Variable Compleja

Bernardo Acevedo .

UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA SEDE MANIZALES

Noviembre de 2006

Contenido

Prólogo

El objetivo del presente libro, es el de facilitar al estudiante de las carreras de ingeniería, la asimilación clara de los conceptos matemáticos tratados, pues es el fruto de un cuidadoso análisis de los ejemplos resueltos y de los ejercicios propuestos con sus debidas respuestas, basado en mi experiencia como docente de la Universidad Nacional sede Manizales.

Desde luego que los escritos que se presentan no son originales, ni pretenden serlo, toda vez que es una recopilación organizada y analizada de diferntes textos y de mi experiencia personal.

Este texto constituye un material de consulta obligada de los estudiantes, el cual les genera un diálogo directo con el profesor.

Bernardo Acevedo Frías
profesor asociado

Capítulo 1

Números Complejos

1.1 Generalidades

Una de las características que tienen los números reales, es que todo número real elevado al cuadrado es siempre mayor o igual que cero, o sea que expresiones como $x^2 = -2 \quad o \quad x^2 = -9$ no tienen sentido si se está trabajando con los números reales como universo. Si se quiere trabajar en un universo donde esto tenga sentido, necesariamente tiene que ser diferente al de los números reales. Para construir este universo inicialmente se puede crear un número cuyo cuadrado sea igual a -1, el cual se llamará unidad imaginaria y se notará por la letra i (este número no puede ser real) y según esto $i^2 = -1$. En este universo que se quiere construir, se hace necesario que aparezcan los números reales, pues son los números que se conocen, de esta forma en este conjunto se conocen los números reales y el número i. Pero es necesario que se trate de conservar en este universo si no todas, por lo menos una buena parte de las propiedades fundamenteles que se conocen de los números, una de ellas es por ejemplo, la propiedad clausurativa para el producto la cual nos obliga a considerar también como elemento de este conjunto los que resultan de multiplicar los números reales por el nuevo número i, es decir, los números de la forma bi con b número real no nulo, que se llamarán imaginarios puros y se caracterizan porque al elevarlos al cuadrado siempre dan un número menor o igual que cero, ya que respetando ciertas propiedades conocidas del producto $(bi)^2 = b^2i^2 = b^2(-1) = -b^2$. Con esto se pueden hallar números cuyo cuadrado sea igual a -c , con c>0, estos serán $\sqrt{c}i$ y $-\sqrt{c}i$ (que no son reales). Si se quiere mantener en este nuevo conjunto la propiedad clausurativa para la suma, se debe aceptar en él, números que se obtengan al sumar cualquier número real a con cualquier número imaginario puro bi es decir se introduce a este conjunto, números de la forma $a + bi$. Realmente todos los números que se han aceptado en este nuevo conjunto se pueden expresar en la forma $z = a + bi$ con a, b números reales, ya que si d es real, es de la forma $d = d + 0i$ y si es imaginario puro es de la forma $di = 0 + di$. A este conjunto así construido se llamará el conjunto de los números complejos y se nota por C o sea que estará formado por los números reales $a + 0i$ y por los números bi con $b \neq 0$. Si $z = a + bi$, la parte real del complejo z, notada por $Re(z)$ es a y la parte imaginaria, notada por $Im(z)$ es b.

1.2 Operaciones

Sean $z_1 = a + bi$, $z_2 = c + di$ dos números complejos, entonces se pueden tener las operaciones siguientes

1.2.1 Igualdad

$$z_1 = z_2 \quad \text{si y sólo si} \quad a + bi = c + di \quad \text{si y sólo si} \quad a = c \quad y \quad b = d$$

1.2.2 Suma

$$z_1 + z_2 = (a + bi) + (c + di) = (a + c) + i(b + d)$$

Ejemplo 1.1

$$(2 + 3i) + (4 - i) = (2 + 4) + i(3 - 1) = 6 + 2i$$

Ejemplo 1.2

$$(4 + 5i) + (-2 + i) = (4 - 2) + i(5 + 1) = 2 + 6i$$

Ejemplo 1.3

$$1 + i + i^2 + i^3 + i^4 = 1 + i + i^2 + i.i^2 + (i^2)^2 = 1 + i - 1 - i + 1 = 1$$

1.2.3 Resta

$$z_1 - z_2 = (a + bi) - (c + di) = (a - c) + i(b - d)$$

Ejemplo 1.4

$$(2 + 3i) - (4 - i) = (2 - 4) + i(3 + 1) = -2 + 4i$$

1.2.4 Multiplicación

$$z_1 \cdot z_2 = (a + bi) \cdot (c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i$$

Ejemplo 1.5

$$(2 - 3i) \cdot (4 + 2i) = (8 + 6) + (4 - 12)i = 14 - 8i \qquad \textit{Observe que}$$

$$(2 - 3i) \cdot (4 + 2i) = 2 \cdot (4 + 2i) - 3i \cdot (4 + 2i) = 8 + 4i - 12i + 6 = 14 - 8i$$

1.2.5 División

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{a+bi}{c+di} = \frac{(a+bi)(c-di)}{(c+di)(c-di)} = \frac{(ac+bd)+(bc-ad)i}{c^2+d^2}$$

Ejemplo 1.6

$$z = \frac{1+i}{1-i} = \frac{(1+i)(1+i)}{(1-i)(1+i)} = \frac{1+2i+i^2}{1+1} = \frac{2i}{2} = i$$

Ejemplo 1.7

$$\frac{2(1+i)}{(1+i^{-8})} = \frac{2(1+i)}{1+\frac{1}{i^8}} = \frac{2i^8(1+i)}{i^8+1} = \frac{2(i^2)^4(1+i)}{(i^2)^4+1} = 1+i$$

Ejemplo 1.8

$$\begin{aligned} z &= \frac{3i^{30}-i^{19}}{2i-1} = \frac{3(i^2)^{15}-(i^2)^9\cdot i}{2i-1} = \frac{-3+i}{2i-1} = \frac{(-3+i)\cdot(-2i-1)}{(2i-1)\cdot(-2i-1)} \\ &= \frac{6i+3+2-i}{1-4i^2} = \frac{5+5i}{5} = 1+i \end{aligned}$$

Ejemplo 1.9

$$\begin{aligned} \frac{5+5i}{3-4i} + \frac{20}{4+3i} &= \frac{(5+5i)\cdot(3+4i)}{(3-4i)\cdot(3+4i)} + \frac{20(4-3i)}{(4+3i)(4-3i)} \\ &= \frac{15+20i+15i++20i^2}{9-16i^2} + \frac{80-60i}{16-9i^2} = \frac{-5+35i+80-60i}{25} = 3-i \end{aligned}$$

Ejemplo 1.10 *Hallar números reales x e y, tales que*

$$3x + 2iy - ix + 5y = 7 + 5i$$

En efecto, esta ecuación se puede escribir como

$$3x + 5y + i(2y - x) = 7 + 5i$$

e igualando parte real y parte imaginaria se tiene que $3x + 5y = 7$ $\quad y \quad$ $2y - x = 5$ y resolviendo este sistema se obtiene $x = -1$ $y = 2$

Ejemplo 1.11 *Hallar números reales x y y, tales que*

$$(x + iy)^2 = 2i$$

En efecto, esta ecuación se puede escribir como

$$x^2 + 2ixy + (iy)^2 = x^2 + 2ixy - y^2 = x^2 - y^2 + 2ixy = 2i$$

e igualando parte real y parte imaginaria se tiene que

$$x^2 - y^2 = 0 \quad y \quad 2xy = 2$$

de donde

$$y = \pm x \quad y \quad xy = 1$$

cuya solución es

$$(x, y) = (1, 1) \quad y \quad (x, y) = (-1, -1)$$

Ejemplo 1.12 *Hallar números reales x e y, tales que*

$$x + iy = y + ix$$

En efecto, igualando parte real y parte imaginaria se tiene que

$$x = y \in R$$

Ejemplo 1.13 *Hallar las soluciones de la ecuación*

$$(1 + i)z + 3i\bar{z} = 2 + i$$

En efecto :

$$(1 + i)z + 3i\bar{z} = (1 + i)(x + iy) + 3i(x - iy) = x + iy + ix - y + 3ix + 3y =$$

$$= x + 2y + i(4x + y) = 2 + i$$

por lo tanto

$$x + 2y = 2 \quad y \quad 4x + y = 1$$

y la solución de este sistema es $x = 0$ *y* $y = 1$*, luego* $z = i$ *es la solución*

Ejemplo 1.14 *Hallar las soluciones de la ecuación*

$$z.\bar{z} + 3(z - \bar{z}) = 4 + 6i$$

En efecto

$$z.\bar{z} + 3(z - \bar{z}) = x^2 + y^2 + 3(x + iy - x + iy) = x^2 + y^2 + 6iy = 4 + 6i$$

por lo tanto

$$x^2 + y^2 = 4 \quad y \quad 6y = y$$

y la solución de este sistema es $y = 1$ *y* $x = \pm\sqrt{3}$ *luego* $z = \pm\sqrt{3} + i$ *es la solución de la ecuación*

Desde el punto de vista lógico, es conveniente definir un número complejo $z = a+bi$, como una pareja ordenada (a, b), sometida a ciertas definiciones que resultan ser equivalentes a las anteriores así :

$$z_1 = z_2 \quad \text{si y sólo si} \quad (a, b) = (c, d) \quad \text{si y sólo si} \quad a = c \;\; y \;\; b = d$$

$$z_1 + z_2 = (a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$$

$$z_1 - z_2 = (a, b) - (c, d) = (a - c, b - d)$$

$$z_1 \cdot z_2 = (a, b) \cdot (c, d) = (ac - bd, ad + bc)$$

De lo anterior se tiene que : $(a, b) = (a, 0)+(0, b) = a(1, 0)+b(0, 1) = a+bi$ considerando a $(1, 0) \equiv 1$, $(0, 1) = i$

1.3 Algunas propiedades

Sea z_1, z_2, z_3 números complejos, entonces

1.3.1 Clausurativa

La suma y la multiplicación de dos números complejos es un número complejo, es decir , si z_1y z_2 son números complejos entonces

$$z_1 + z_2 \qquad z_1 \cdot z_2 \qquad \text{son números complejos}$$

1.3.2 Conmutativa

$$z_1 + z_2 = z_2 + z_1 \qquad\qquad z_1 \cdot z_2 = z_2 \cdot z_1$$

1.3.3 Distributiva

$$z_1 \cdot (z_2 + z_3) = (z_1 \cdot z_2) + (z_1 \cdot z_3)$$

1.3.4 Modulativa

$$\text{Para todo } \; z \in C, \; \text{ existe } 0 \in C \; \text{ tal que } z + 0 = 0 + z = z$$

1.3.5 Invertiva para la suma

$$\text{Dado } z \in C, \quad \text{existe } -z \;\epsilon\; C \quad \text{tal que} \quad z + (-z) = (-z) + z = 0$$

1.3.6 Invertiva para el producto

$$\text{Dado } z \in C\ ,\ z \neq 0 \quad \text{existe } z^{-1} \quad \text{tal que } z \cdot z^{-1} = z^{-1} \cdot z = 1$$

Ejemplo 1.15

$$\text{Si} \quad z = 2 + 3i \text{ entonces } \frac{1}{z} = \frac{1}{2+3i} = \frac{1}{(2+3i)} . \frac{(2-3i)}{(2-3i)} = \frac{(2-3i)}{4+9} = \frac{2-3i}{13} \text{ y}$$

$$(2+3i)\left(\frac{1}{2+3i}\right) = \frac{(2+3i)(2-3i)}{(2+3i)(2-3i)} = \frac{4-6i+6i+9}{13} = 1$$

1.3.7 Leyes de los Exponentes

$$\text{Si } z \neq 0, \quad z^0 = 1, \quad z^1 = z \;\; y \;\; z^n = z^{n-1} \cdot z$$

y para $n\epsilon\mathbb{N}$ entonces

1. $$z_1^n \cdot z_1^m = z_1^{n+m}$$

2. $$(z_1^n)^m = z_1^{nm}$$

3. $$(z_1 \cdot z_2)^n = z_1^n \cdot z_2^n$$

Ejemplo 1.16

$$(2+3i\ )^4 . (2+3i\ )^5 = (2+3i\ )^9$$

Ejemplo 1.17

$$\left((2+3i\ )^4\right)^3 = (2+3i\ )^{12}$$

Ejemplo 1.18

$$\left((4+5i)\,(3-2i)\right)^5 = (4+5i)^5\,(3-2i)^5$$

1.3.8 Teorema del binomio

Para z, w números complejos se tiene que:

$$(z+w)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} z^{n-k} w^k$$

Su demostración se hace por inducción matemática (Ejercicio)

Ejemplo 1.19

$$(2+i)^2(2+i)^4 = (2+i)^6 = \sum_{k=0}^{6} \binom{6}{k} 2^{6-k} i^k$$

Ejemplo 1.20

$$\left(1+i\sqrt{3}\right)^{50} = \sum_{k=0}^{50} \binom{50}{k} (1)^{50-k} \left(i\sqrt{3}\right)^k$$

Ejemplo 1.21

$$(1+i)^{500} = ((1+i)^2)^{250} = (1+2i-1)^{250} = (2i)^{250} = -2^{250}$$

Ejemplo 1.22 *Como*

$$\frac{-3+i}{2i-1} = \frac{(-3+i)(-2i-1)}{(2i-1)(-2i-1)} = \frac{6i+3-2i^2-i}{-4i^2+1} = \frac{5i+5}{5} = 1+i$$

entonces

$$\left(\frac{-3+i}{2i-1}\right)^{20} = (1+i)^{20} = \sum_{k=0}^{20} \binom{20}{k} (1)^{20-k} (i)^k$$

1.4 Módulo y Conjugado de un número complejo

El módulo o valor absoluto de un número complejo $z = a + bi$, se nota por $|z|$ y se define por $|z| = \sqrt{a^2+b^2}$ y su conjugado se nota por $\bar{z}$ y se define por $\bar{z} = a - bi$

1.4.1 Algunas Propiedades

1. $$\overline{\overline{z}} = z$$

   Solución. $z = a + bi$, $\overline{z} = a - bi$ y así $\overline{\overline{z}} = a + bi = z$, es decir, $\overline{\overline{z}} = z$, así por ejemplo
   $$\overline{\overline{3-2i}} = \overline{3+2i} = 3 - 2i$$

2. $$\frac{z+\bar{z}}{2} = a = \mathrm{Re}(z)$$

   Solución. $\dfrac{z+\bar{z}}{2} = \dfrac{a+bi+\overline{a+bi}}{2} = \dfrac{a+bi+a-bi}{2} = a = \mathrm{Re}(z)$

3. $$\frac{z-\bar{z}}{2i} = b = \mathrm{Im}(z)$$

   Solución La prueba es análoga a la anterior

4. $$Re(z) \leq |z| \qquad \mathrm{Im(z)} \leq |z|$$

   Solución $Re(z) = a \leq |z| = \sqrt{a^2+b^2}$

5. $$|\bar{z}| = |z|$$

   Solución $|\bar{z}| = \left|\overline{a+bi}\right| = |a-bi| = \sqrt{a^2+(-b)^2} = \sqrt{a^2+b^2} = |z|$, por ejemplo
   $$\left|\overline{4+3i}\right| = \sqrt{(4)^2+(3)^2} = 5 = \sqrt{(4)^2+(-3)^2} = |4-3i|$$

6. $$z \cdot \bar{z} = |z|^2 = \left|z^2\right|$$

Solución $z \cdot \bar{z} = (a+bi)(a-bi) = a^2+b^2 = |z|^2$

7.
$$|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$$

Solución

$$|z_1 \cdot z_2|^2 = (z_1 \cdot z_2)(\overline{z_1 \cdot z_2}) = (z_1 \cdot z_2)(\bar{z}_1 \cdot \ \bar{z}_2) = \ z_1 \cdot \bar{z}_1 \cdot z_2 \cdot \bar{z}_2 \ = |z_1|^2 |z_2|^2$$

luego
$$|z_1 \cdot z_2|^2 = |z_1|^2 |z_2|^2 \quad \text{y} \quad \text{así}$$
$$|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$$

Ejemplo 1.23 *Verificar que*

$$|(1-2i)(2+i)| = |(1-2i)| \, |(2+i)|$$

En efecto :
$$|(1-2i)(2+i)| = |2+i-4i+2| = |4-3i| =$$
$$= \sqrt{16+9} = 5 = \sqrt{5}.\sqrt{5} = |(1-2i)| \, |(2+i)|$$

8.
$$\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$$

Solución La prueba es análoga a la anterior

Ejemplo 1.24 *Verificar que*

$$\left|\frac{(1-2i)(2+i)}{(1-i)(2+i)\,i}\right| = \frac{|1-2i|\,|2+i|}{|1-i|\,|2+i|\,|i|}$$

En efecto :

$$\left|\frac{(1-2i)(2+i)}{(1-i)(2+i)\,i}\right| = \left|\frac{2+i-4i+2}{(2+i-2i+1)i}\right| = \left|\frac{4-3i}{1+3i}\right| = \left|\frac{(4-3i)(1-3i)}{(1+3i)(1-3i)}\right| =$$

$$= \left|\frac{-5-15i}{1+9}\right| = \left|\frac{-5-15i}{10}\right| = \sqrt{\frac{25}{100}+\frac{225}{100}} = \frac{\sqrt{250}}{10} = \frac{5}{\sqrt{10}} \quad y$$

$$\frac{|1-2i|\,|2+i|}{|1-i|\,|2+i|\,|i|} = \frac{\sqrt{5}\sqrt{5}}{\sqrt{2}\sqrt{5}.1} = \frac{5}{\sqrt{10}} \quad \textit{por lo tanto}$$

$$\left|\frac{(1-2i)(2+i)}{(1-i)(2+i)\,i}\right| = \frac{|1-2i|\,|2+i|}{|1-i|\,|2+i|\,|i|}$$

Ejemplo 1.25 *Verificar que*

$$\left|\frac{-3+i}{2i-1}\right| = \frac{|-3+i|}{|2i-1|}$$

En efecto :

$$\left|\frac{-3+i}{2i-1}\right| = \left|\frac{(-3+i)(-1-2i)}{(2i-1)(-1-2i)}\right| = \left|\frac{5+5i}{5}\right| = |1+i| = \sqrt{2} \qquad y$$

$$\frac{|-3+i|}{|2i-1|} = \frac{\sqrt{10}}{\sqrt{5}} = \sqrt{2}$$

luego

$$\left|\frac{-3+i}{2i-1}\right| = \frac{|-3+i|}{|2i-1|}$$

9.

$$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$$

Para demostrar esta propiedad se utilizarán las propiedades $z \cdot \bar{z} = |z|^2$,

$$z + \bar{z} = 2\,\mathrm{Re}(z) y Re(z) \leq |z| \ \text{así que :}$$

$$\begin{aligned} |z_1+z_2|^2 &= (z_1+z_2)\left(\overline{z_1+z_2}\right) = (z_1+z_2)\left(\bar{z}_1 + \ \bar{z}_2\right) = z_1.\bar{z}_1 + z_1.\bar{z}_2 + z_2.\bar{z}_1 + z_2 \cdot \bar{z}_2 = \\ &= |z_1|^2 + z_1.\bar{z}_2 + z_2.\bar{z}_1 + |z_2|^2 = |z_1|^2 + 2\,\mathrm{Re}(z_1.\bar{z}_2) + |z_2|^2 \leq |z_1|^2 + 2\,|z_1.\bar{z}_2| + |z_2|^2 \\ &= |z_1|^2 + 2\,|z_1|\,|\bar{z}_2| + |z_2|^2 = |z_1|^2 + 2\,|z_1|\,|z_2| + |z_2|^2 = (|z_1| + |z_2|)^2 \end{aligned}$$

luego

$$|z_1+z_2|^2 \leq (|z_1| + |z_2|)^2$$

y así sacando raìz cuadrada a ambos términos de la desigualdad anterior se tiene que

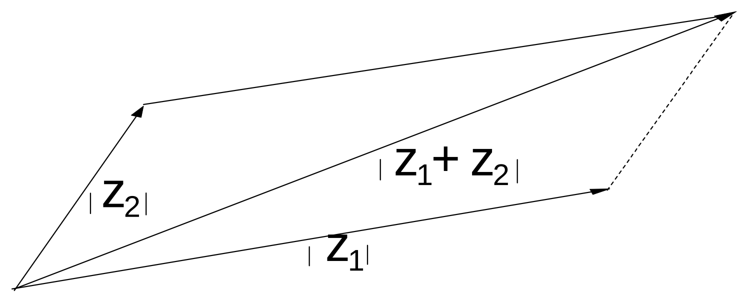
$$|z_1+z_2| \leq (|z_1| + |z_2|)$$

conocida como la desigualdad triangular. Observe la figura 1.1

10. $\overline{z_1+z_2} = \bar{z}_1 + \ \bar{z}_2$

Solución

$$\begin{aligned} \overline{z_1+z_2} &= \overline{a+bi+c+di} = \overline{a+c+i(b+d)} = a+c-i(b+d) = \\ &= a-bi+c-di = \bar{z}_1 - \bar{z}_2 \end{aligned}$$



Ejemplo 1.26 *Verificar que*

$$\overline{(2+3i)+(-1+2i)} = \overline{(2+3i)} + \overline{(-1+2i)}$$

En efecto :

$$\overline{(2+3i)+(-1+2i)} = \overline{(2-1)+(3+2)\,i} = \overline{1+5i} = 1-5i \quad y$$

$$\overline{(2+3i)} + \overline{(-1+2i)} = 2-3i-1-2i = 1-5i \qquad así$$

$$\overline{(2+3i)+(-1+2i)} = \overline{(2+3i)} + \overline{(-1+2i)}$$

11.

$$\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2} \qquad (ejercicio)$$

Ejemplo 1.27 *Verificar que*

$$\overline{\left(\frac{1-i}{1+i}\right)} = \frac{\overline{1-i}}{\overline{1+i}}$$

En efecto :

$$\begin{aligned}
\overline{\left(\frac{1-i}{1+i}\right)} &= \overline{\left(\frac{(1-i)(1-i)}{1+1}\right)} = \overline{\left(\frac{-2i}{1+1}\right)} = i \\
\frac{\overline{1-i}}{\overline{1+i}} &= \frac{1+i}{1-i} = \frac{(1+i)^2}{(1-i)(1+i)} = \frac{2i}{2} = i \quad luego
\end{aligned}$$

$$\overline{\left(\frac{1-i}{1+i}\right)} = \frac{\overline{1-i}}{\overline{1+i}}$$

12.

$$\overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \bar{z}_2 \qquad (ejercicio)$$

Ejemplo 1.28 *Verificar que*

$$\overline{(2-3i)\cdot(4+2i)} = \overline{(2-3i)}.\overline{(4+2i)}$$

En efecto :

$$\overline{(2-3i)\cdot(4+2i)} = \overline{2\cdot(4+2i)-3i\cdot(4+2i)} = \overline{14-8i} = 14+8i \quad y$$

$$\overline{(2-3i)}.\overline{(4+2i)} = (2+3i)\cdot(4-2i) = 14+8i$$

luego

$$\overline{(2-3i)\cdot(4+2i)} = \overline{(2-3i)}.\overline{(4+2i)}$$

Ejemplo 1.29 *Verificar que*

$$\overline{\left(\frac{(3+7i)^2}{8+6i}\right)} = \frac{(3-7i)^2}{8-6i}$$

En efecto :

$$\begin{aligned} \overline{\left(\frac{(3+7i)^2}{8+6i}\right)} &= \overline{\left(\frac{(3+7i)(3+7i)}{8+6i}\right)} = \frac{\overline{(3+7i)(3+7i)}}{\overline{(8+6i)}} = \\ &= \frac{(3-7i)(3-7i)}{8-6i} = \frac{(3-7i)^2}{8-6i} \end{aligned}$$

13.

$$||z_1|-|z_2|| \leq |z_1|+|z_2|$$

Solución Para probar esta propiedad se hace

$$|z_1| = |z_1+z_2-z_2| \leq |z_1+z_2| + |-z_2| \quad \text{que significa}$$

$$|z_1|-|z_2| \leq |z_1+z_2| \leq |z_1|+|z_2|$$

y así se tiene la prueba cuando $|z_1| \geq |z_2|$.

Si

$$|z_1| < |z_2| \quad \text{entonces } |z_2| = |z_2+z_1-z_1| \leq |z_1+z_2| + |-z_1|$$

que significa

$$|z_2|-|z_1| = -(|z_1|-|z_2|) \leq |z_1+z_2| \leq |z_1|+|z_2|$$

y así

$$||z_1|-|z_2|| \leq |z_1+z_2| \leq |z_1|+|z_2|$$

Ejemplo 1.30

$$||4+3i|-|3-4i|| = |5-5| = 0 \quad y$$

$$|4+3i|+|3-4i| = 10 \ \textit{así que}$$

$$||4+3i|-|3-4i|| \leq |4+3i|+|3-4i|$$

1.5 Representación gráfica de un número complejo

En un número complejo $z = a + bi$, hay dos números reales que lo caracterizan, su parte real a y su parte imaginaria b las cuales, de acuerdo al concepto de igualdad en $\mathbb{C}$, si se intercambian entre si, se altera el número complejo $z = a + bi$, pues $a + bi \neq b + ai$, esto hace que los números a y b tengan la misma característica de la pareja (a, b), en el sentido de que $a + bi = c + di$ si y solo si $a = c$ y $b = d$ y $(a, b) = (c, d)$ si y solo si $a = c$ y $b = d$. Esto motiva a representar cada número complejo $a + bi$ como la pareja (a, b), donde la primera componente a, corresponde a la parte real del complejo z y se ubicará sobre el eje de las x, que se llamará eje real y la segunda componente b, representará la parte imaginaria del complejo z y se ubicará sobre el eje y, que se llamará eje imaginario. Como el número complejo $z = a+bi$ se puede considerar como una pareja ordenada (a, b), entonces z se puede representar por un punto en el plano xy, llamado plano complejo. Así a cada número complejo $z = a + bi$ corresponde uno y solo un punto en el plano y recìprocamente a cada punto en el plano corresponde uno y sólo un número complejo figura 1.2

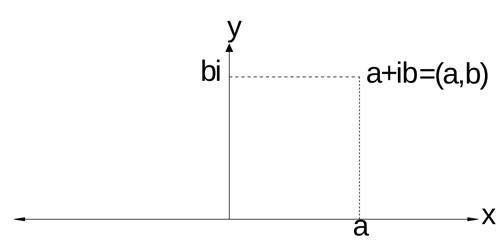
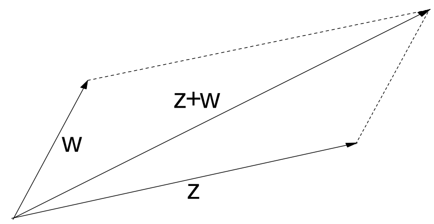


Figura 1.1:

Otra representación posible de $z = a + bi$ es en forma de vector, pues z se considera como una linea dirigida que comienza en el origen y termina en el punto (a, b).
Para sumar los números z, w, es decir, $z + w$ se procede como se observa en la figura 1.3



En el punto final del vector z se construye el vector w (en otras palabras el punto final de z, se hace coicidir con el punto inicial de w y la suma es el vector que va desde el punto inicial de z al punto final de w, o se emplea la ley del paralelogramo).
Para la resta, se efectua una suma, así : $w - z = w + (-z)$ figura 1.4

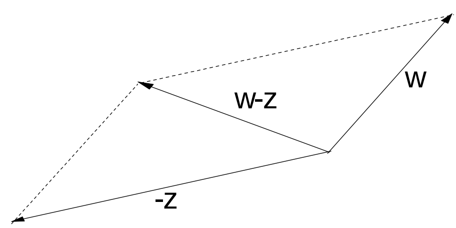


Figura 1.2:

1.6 Forma Polar de un Complejo

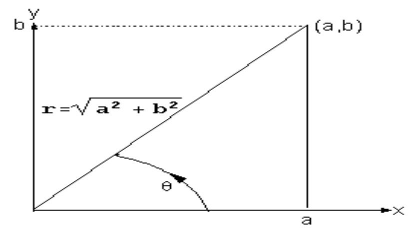
Con frecuencia los puntos del plano se definen en términos de coordenadas polares, el número complejo $z = a+bi$ con $z \neq 0$, está representado por el punto P cuyas coordenadas cartesianas son (a, b) o cuyas coordenadas polares son (r, θ) donde $r = \sqrt{a^2 + b^2}$ es el módulo de z que se nota por $r = |z|$ y θ, el ángulo que forma el vector (a, b) con el eje x positivo es llamado un argumento del complejo $z = a + bi$. θ se considera positivo, si se mide en dirección contraria al movimiento de las manecillas del reloj y negativo en dirección a las manecillas del reloj De la figura 1.5

se tiene que

$$\cos\theta = \frac{a}{r} \text{ y } \sin\theta = \frac{b}{r}$$

entonces

$$a = r\cos\theta \quad \text{y} \quad b = r\sin\theta$$



así que

$$z = a + bi = r(\cos\theta + i\sin\theta) = |z|\,(\cos\theta + i\sin\theta)$$

expresión llamada forma Polar del complejo z, para $\theta\ \epsilon[0, 2\pi)$ o $\theta\ \epsilon(-\pi, \pi]$
Observemos que para cada $z \neq 0$, corresponde un solo valor de θ en $0 \leq \theta < 2\pi$ o si se toma otro intervalo de longitud 2π por ejemplo $-\pi < \theta \leq \pi$, corresponde un solo valor de θ. Esta elección particular de θ se llama la parte principal del complejo z y a este valor de θ particular se llama el argumento principal del complejo z y se nota por $Argz$.
Si tenemos un argumento particular del número complejo z, este argumento mas cualquier otro múltiplo entero de 2π es también un argumento, luego en general

$$\arg z = \theta + 2n\pi \quad n\epsilon\mathbb{Z} \quad \text{o} \quad \arg z = Argz + 2n\pi \quad n\epsilon\mathbb{Z} \quad \text{donde}$$

$$Argz = \begin{cases} \arctan\dfrac{b}{a} & si \quad a > 0 \\ \dfrac{\pi}{2} & si \quad a = 0 \quad y \quad b > 0 \\ \pi + \arctan\dfrac{b}{a} & si \quad a < 0 \quad y \quad b \geq 0 \\ -\pi + \arctan\dfrac{b}{a} & si \quad a < 0 \quad y \quad b < 0 \\ -\dfrac{\pi}{2} & si \quad a = 0 \quad y \quad b < 0 \end{cases} \qquad \text{y}$$

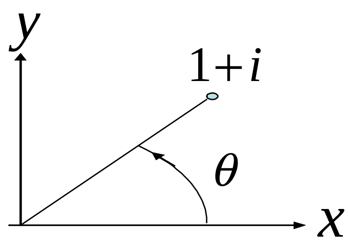
$$\arg z = \begin{cases} \arctan\dfrac{b}{a} + 2n\pi & si \quad a > 0 \quad y \quad b > 0 \\ \pi + \arctan\dfrac{b}{a} + 2n\pi & si \quad a < 0 \\ 2\pi + \arctan\dfrac{b}{a} + 2n\pi & si \quad a > 0 \quad y \quad b < 0 \end{cases}$$

Ejemplo 1.31 *La forma polar de* $1 + i$ *es*

$$1 + i = \sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}) \quad ya\ que$$

$$|1+i| = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2} \quad y \quad \theta = \arctan\frac{1}{1} = \frac{\pi}{4}$$

(salvo múltiplos de 2π)



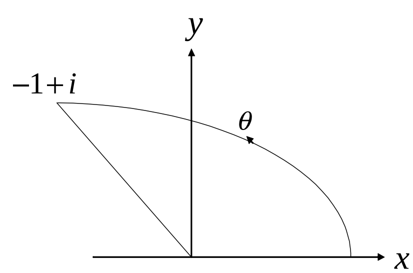
Ejemplo 1.32 *La forma polar de $-1+i$ es*

$$-1+i = \sqrt{2}(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}) \quad \textit{ya que}$$

$$|-1+i| = \sqrt{(-1)^2+1^2} = \sqrt{2} \quad y \quad w = \arctan\frac{1}{-1} = -\frac{\pi}{4}$$

pero el punto $-1+i$ se encuentra en el segundo cuadrante, entonces

$$\theta = \arctan\frac{1}{-1} + \pi = -\frac{\pi}{4} + \pi = \frac{3\pi}{4}(\textit{salvo múltiplos de } 2\pi)$$

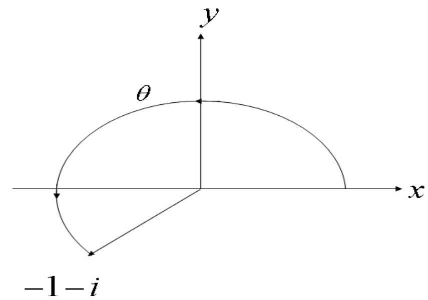


Ejemplo 1.33 *La forma polar de $-1-i$ es*

$$-1-i = \sqrt{2}(\cos\frac{5\pi}{4} + i\sin\frac{5\pi}{4}) = \sqrt{2}(\cos\frac{-3\pi}{4} + i\sin\frac{-3\pi}{4}) \quad \textit{ya que}$$

$$|-1-i| = \sqrt{(-1)^2+(-1)^2} = \sqrt{2} \ y$$

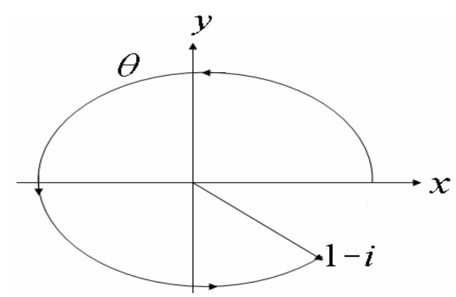
$w = \arctan\frac{-1}{-1} = \arctan\frac{1}{1} = \frac{\pi}{4}$, *pero el punto $-1-i$ se ecuentra en el tercer cuarante, entonces* $\theta = \arctan\frac{-1}{-1} + \pi = \frac{\pi}{4} + \pi = \frac{5\pi}{4}$ *(salvo múltiplos de 2π), ó* $\theta = \arctan\frac{-1}{-1} - \pi = \frac{\pi}{4} - \pi = -\frac{3\pi}{4}$



Ejemplo 1.34 *La forma polar de* $1-i$ *es*

$$1-i=\sqrt{2}(\cos\frac{7\pi}{4}+i\sin\frac{7\pi}{4})=\sqrt{2}(\cos\frac{-\pi}{4}+i\sin\frac{-\pi}{4})$$

ya que $\theta=\arctan\dfrac{-1}{1}=-\dfrac{\pi}{4}$, *ó* $\theta=\arctan\dfrac{-1}{1}+2\pi=-\dfrac{\pi}{4}+2\pi=\dfrac{7\pi}{4}$



Ahora observemos que

$$1+i=\sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4})=\sqrt{2}(\cos(\frac{\pi}{4}+2n\pi)+i\sin(\frac{\pi}{4}+2n\pi))\ n\in\mathbb{Z}$$

El argumento de $1+i$ es $\arg z=\dfrac{\pi}{4}+2n\pi$ y en general, todos los valores de $\arg z$ estan contenidos en la expresión $\arg z=\theta_0+2n\pi$ con $n\in\mathbb{Z}$, donde θ_0 es algún valor particular, en nuestros ejemplos expuestos

$$\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4},\frac{5\pi}{4},\frac{7\pi}{4},\frac{-3\pi}{4},\frac{-\pi}{4}.$$

Ejemplo 1.35 *Si* $z=a+bi$ *entonces*

si $a>0$ y $b=0$, su forma polar es

$$z=a+bi=a\left(\cos 0+isen0\right)$$

$$z = 2 + 0i = 2\left(\cos 0 + isen0\right)$$

si $a\ >0\ \ y\ \ b\ >0$, su forma polar es

$$\begin{aligned} z &= a + bi = \sqrt{a^2+b^2}\left(\cos\left(\arctan\frac{b}{a}\right) + isen\left(\arctan\frac{b}{a}\right)\right) \\ z &= 3 + 4i = \sqrt{25}\left(\cos\left(\arctan\frac{4}{3}\right) + isen\left(\arctan\frac{4}{3}\right)\right) \end{aligned}$$

si $a = 0\ \ y\ \ b\ >0$, su forma polar es

$$\begin{aligned} z &= a + bi = b\left(\cos\frac{\pi}{2} + isen\frac{\pi}{2}\right) \\ z &= 2i = 2\left(\cos\frac{\pi}{2} + isen\frac{\pi}{2}\right) \end{aligned}$$

si $a\ <0\ \ \ y\ \ \ b\ >0$, su forma polar es

$$\begin{aligned} z &= a + bi = \sqrt{a^2+b^2}\left(\cos\left(\arctan\frac{b}{a} + \pi\right) + isen\left(\arctan\frac{b}{a} + \pi\right)\right) \\ z &= -3 + 4i = 5\left(\cos\left(\arctan\frac{4}{-3} + \pi\right) + isen\left(\arctan\frac{4}{-3} + \pi\right)\right) \end{aligned}$$

si $a\ <0\ \ y\ \ b = 0$, su forma polar es

$$\begin{aligned} z &= a + bi = \left|-a\right|\left(\cos\pi + isen\pi\right) \\ z &= -2 = 2\left(\cos\pi + isen\pi\right) \end{aligned}$$

si $a\ <0\ \ y\ \ \ b\ <0$, su forma polar es

$$\begin{aligned} z &= a + bi = \sqrt{a^2+b^2}\left[\cos\left(\arctan\frac{b}{a} + \pi\right) + isen\left(\arctan\frac{b}{a} + \pi\right)\right] \\ &= \sqrt{a^2+b^2}\left(\cos\left(\arctan\frac{b}{a} - \pi\right) + isen\left(\arctan\frac{b}{a} - \pi\right)\right) \\ z &= -3 - 4i = 5\left[\cos\left(\arctan(\frac{-4}{-3}) + \pi\right) + isen\left(\arctan(\frac{-4}{-3}) + \pi\right)\right] \\ &= 5\left(\cos\left(\arctan(\frac{-4}{-3}) - \pi\right) + isen\left(\arctan(\frac{-4}{-3}) - \pi\right)\right) \end{aligned}$$

si $a = 0\ \ \ y\ \ \ b\ <0$, su forma polar es

$$z = a + bi = \left|-b\right|\left(\cos\frac{3\pi}{2} + isen\frac{3\pi}{2}\right) = \left|-b\right|\left(\cos\frac{-\pi}{2} + isen\frac{-\pi}{2}\right)$$

si $a\ > 0\ \ y\ \ b\ < 0$, su forma polar es

$$\begin{aligned} z &= a+bi=\sqrt{a^2+b^2}\left[\cos\left(\arctan\frac{b}{a}+2\pi\right)+isen\left(\arctan\frac{b}{a}+2\pi\right)\right]= \\ &= \sqrt{a^2+b^2}\left[\cos\left(\arctan\frac{b}{a}\right)+isen\left(\arctan\frac{b}{a}\right)\right] \\ z &= 3-4i=5\left[\cos\left(\arctan\frac{-4}{3}\right)+isen\left(\arctan\frac{-4}{3}\right)\right] \end{aligned}$$

1.7 Operaciones en forma Polar

Sean z y w dos números complejos con forma polar

$$z=r(\cos\theta+i\sin\theta)\quad y\quad w=d(\cos\delta+i\sin\delta)$$

respectivamente entonces

1.7.1 Producto

$$\begin{aligned} z\cdot w &= r(\cos\theta+i\sin\theta)\cdot d(\cos\delta+i\sin\delta) \\ &= rd(\cos\theta\cos\delta-\sin\theta\sin\alpha+i(\cos\theta\sin\delta+\sin\theta\cos\delta)) \\ &= rd(\cos(\theta+\delta)+i\sin(\theta+\delta)) \end{aligned}$$

por lo tanto

$$\arg(z\cdot w)=\arg z+\arg w+2n\pi$$

Ejemplo 1.36

$$(\cos 15^o+i\sin 15^o)^7(\cos 45^o-i\sin 45^o)^3=$$

$$=(\cos 15^o+i\sin 15^o)^7(\cos(-45^o)+i\sin(-45^o))^3=$$

$$=(\cos 105^o+i\sin 105^o)(\cos(-135^o)+i\sin(-135^o))=$$

$$=(\cos(-30^o)+i\sin(-30^o))=\cos 30^o-i\sin 30^o=\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{i}{2}$$

Ejemplo 1.37

Sean $z=3(\cos 40^o+i\sin 40^o)$ *y* $w=4(\cos 80^o+i\sin 80^o)$ *entonces*

$$\begin{aligned} z \cdot w &= 3(\cos 40^o + i \sin 40^o) \cdot 4(\cos 80^o + i \sin 80^o) \\ &= 12(\cos(40^o + 80^o) + i \sin(40^o + 80^o)) = 12(\cos 120^o + i \sin 120^o) = \\ &= 12\left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i\right) = -6 + 6\sqrt{3} i \end{aligned}$$

y de aquí se concluye que

$$\arg z \cdot w = 40^o + 80^o = \arg z + \arg w \text{ salvo múltiplos de } 2\pi$$

igualdad que se mira como una igualdad entre conjuntos, es decir, un valor de $\arg zw$ es igual a un valor de $\arg z$, más un valor de $\arg w$

Ejemplo 1.38 *Sea* $z = 2\sqrt{3} + 2i$ *entonces*

$$\left|2\sqrt{3} + 2i\right| = \sqrt{4 \cdot 3 + 4} = 4 \quad y$$

$$\theta = \arctan \frac{2}{2\sqrt{3}} = \arctan \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{\pi}{6} \quad \textit{luego la forma polar de z es}$$

$$z = 2\sqrt{3} + 2i = 4(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6}).$$

Sea $w = 3 - 3\sqrt{3}i$ entonces

$$\left|3 - 3\sqrt{3}i\right| = \sqrt{9 + 9 \cdot 3} = \sqrt{36} = 6 \quad \text{y}$$

$$\delta = \arctan \frac{-3\sqrt{3}}{3} = \arctan(-\sqrt{3}) = -\frac{\pi}{3}$$

luego la forma polar de w es

$$3 - 3\sqrt{3}i = 6(\cos(-\frac{\pi}{3}) + i \sin(-\frac{\pi}{3})) = 6(\cos(\frac{5\pi}{3}) + i \sin(\frac{5\pi}{3}))$$

entonces

$$z \cdot w = 4(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6}) \cdot 6(\cos(-\frac{\pi}{3}) + i \sin(-\frac{\pi}{3})) = 24(\cos(-\frac{\pi}{6}) + i \sin(-\frac{\pi}{6}))$$

Ahora

$$\begin{aligned} z.w &= (2\sqrt{3} + 2i)(3 - 3\sqrt{3}i) \\ &= 4(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6}) \cdot 6(\cos(\frac{5\pi}{3}) + i \sin(\frac{5\pi}{3})) \\ &= 24(\cos \frac{11\pi}{6} + i \sin \frac{11\pi}{6}) = 24(\cos(-\frac{\pi}{6}) + i \sin(-\frac{\pi}{6})) \end{aligned}$$

Ejemplo 1.39 *Sean $z = 2i$, $w = 3 + 3i$, entonces*

$$|z| = 2, |w| = \sqrt{18} \quad \arg z = \frac{\pi}{2} + 2n\pi, \quad \arg w = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$$

así

$$\begin{aligned} z \cdot w &= 2i(3+3i) = -6 + 6i, \quad y \\ |z \cdot w| &= |-6+6i| = \sqrt{(-6)^2 + 6^2} = 2\sqrt{18} = |z|\,|w| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} arg(zw) &= arg(-6+6i) = \frac{3\pi}{4} + 2n\pi, \\ \arg z + \arg w &= \frac{\pi}{2} + 2q\pi + \frac{\pi}{4} + 2k\pi = \frac{3\pi}{4} + 2(q+k)\pi \end{aligned}$$

luego se observa que, cualquier valor de $\arg zw$, es igual a un valor de $\arg z$, mas un valor de $\arg w$

Generalizando el producto se tiene que :

$$z^n = (r(\cos\theta + i\sin\theta))^n = r^n(\cos n\theta + i\sin n\theta)$$

que se prueba por inducción matemática: En efecto si n=1 entonces

$$z = (r(\cos\theta + i\sin\theta)) = r(\cos\theta + i\sin\theta)$$

y suponemos la igualdad cierta para n, es decir

$$z^n = (r(\cos\theta + i\sin\theta))^n = r^n(\cos n\theta + i\sin n\theta)$$

y la probaremos para n+1, es decir

$$z^{n+1} = (r(\cos\theta + i\sin\theta))^{n+1} = (r(\cos\theta + i\sin\theta))^n r(\cos\theta + i\sin\theta) =$$

$$= r^n(\cos n\theta + i\sin n\theta)r(\cos\theta + i\sin\theta) = r^{n+1}(\cos n\theta + i\sin n\theta)(\cos\theta + i\sin\theta) =$$

$$= r^{n+1}\left(\cos n\theta\cos\theta - \sin n\theta\sin\theta + i\left(\cos n\theta\sin\theta + \cos\theta\sin n\theta\right)\right) =$$

$$= r^{n+1}\left(\cos(n\theta + \theta) + i\sin(n\theta + \theta)\right) = r^{n+1}\left(\cos(n+1)\theta + i\sin(n+1)\theta\right)$$

expresión conocida como fómula de De Moivre

Ejemplo 1.40 *La fórmula de De Moivre se emplea para deducir por ejemplo algunas identidades trigonómetricas así:*

$$\cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta \qquad \sin 2\theta = 2\cos\theta\sin\theta$$

En efecto:

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^2 = \cos 2\theta + i\sin 2\theta \quad \textit{pero}$$

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^2 = \cos^2\theta + 2i\cos\theta\sin\theta + i^2\sin^2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta + 2i\cos\theta\sin\theta$$

luego

$$\cos 2\theta + i\sin 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta + 2i\cos\theta\sin\theta$$

y así igualando parte real e imaginaria se tiene que

$$\cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta \qquad \sin 2\theta = 2\cos\theta\sin\theta$$

En forma análoga

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^3 = \cos 3\theta + i\sin 3\theta$$

y de aquí se puede deducir que

$$\cos 3\theta = \cos^3\theta - 3\cos\theta\sin^2\theta \quad \text{y que} \quad \sin 3\theta = 3\cos^2\theta\sin\theta - \sin^3\theta$$

1.7.2 División

$$\begin{aligned}
\frac{z}{w} &= \frac{r(\cos\theta + i\sin\theta)}{d(\cos\delta + i\sin\delta)} = \frac{r}{d}\left(\frac{(\cos\theta + i\sin\theta)(\cos\delta - i\sin\delta)}{(\cos\delta + i\sin\delta)(\cos\delta - i\sin\delta)}\right) \\
& \frac{r}{d}\left(\frac{(\cos\theta\cos\delta + \sin\theta\sin\delta + i(\sin\theta\cos\delta - \cos\theta\sin\delta)}{(\cos\delta + i\sin\delta)(\cos\delta - i\sin\delta)}\right) \\
&= \frac{r}{d}\left(\frac{\cos(\theta-\delta) + i\sin(\theta-\delta)}{\cos^2\delta + \sin^2\delta}\right) = \frac{r}{d}\left(\cos(\theta-\delta) + i\sin(\theta-\delta)\right)
\end{aligned}$$

Ejemplo 1.41

$$\frac{2(\cos 60^o + i\sin 60^o)}{2(\cos(-30) + i\sin(-30))} = \cos 90^o + i\sin 90^o = i$$

Ejemplo 1.42

$$\frac{(\cos 15^o + i\sin 15^o)^7}{(\cos 45 + i\sin 45)^3} = \frac{\cos 105^o + i\sin 105^o}{\cos 135 + i\sin 135} = \cos(-30) + i\sin(-30) =$$

$$= \cos 30 - i\sin 30 = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}$$

Ejemplo 1.43 *Si*

$$z = \left(\frac{1+\sqrt{3}i}{1-\sqrt{3}i}\right)^{10}$$

Hallar, la forma polar de z, el Re(z), Im(z), conjugado de z, el módulo de z,

En efecto :

$$\begin{aligned}\left(\frac{1+\sqrt{3}i}{1-\sqrt{3}i}\right)^{10} &= \left(\frac{2(\cos 60^o + i\sin 60^o)}{2(\cos(-60)+i\sin(-60))}\right)^{10} = (\cos 120^o + i\sin 120^o)^{10} \\ &= \cos 1200^o + i\sin 1200^o = \cos 120^o + i\sin 120^o = -\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\end{aligned}$$

por lo tanto

$$\left(\frac{1+\sqrt{3}i}{1-\sqrt{3}i}\right)^{10} = -\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$$

y así

$$\operatorname{Re}(z) = \operatorname{Re}\left(\left(\frac{1+\sqrt{3}i}{1-\sqrt{3}i}\right)^{10}\right) = \operatorname{Re}\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = -\frac{1}{2}$$

$$\operatorname{Im}(z) = \operatorname{Im}\left(\left(\frac{1+\sqrt{3}i}{1-\sqrt{3}i}\right)^{10}\right) = \operatorname{Im}\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\bar{z} = -\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i, \quad |z| = \left|\left(\frac{1+\sqrt{3}i}{1-\sqrt{3}i}\right)^{10}\right| = \left|-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right| = \sqrt{\frac{1}{4}+\frac{3}{4}} = 1$$

Ejemplo 1.44

$$\begin{aligned}\textit{Sean } z &= 2i, w = 3+3i, \quad \textit{entonces} \\ |z| &= 2, \ |w| = \sqrt{18} \quad \arg z = \frac{\pi}{2}+2n\pi \quad y \quad \arg w = \frac{\pi}{4}+2k\pi \\ \frac{z}{w} &= \frac{2i}{3+3i} = \frac{2}{3}\cdot\frac{i}{1+i}\cdot\frac{1-i}{1-i} = \frac{1}{3}(1+i) \quad \textit{por lo tanto} \\ \left|\frac{z}{w}\right| &= \sqrt{\frac{1}{9}+\frac{1}{9}} = \frac{\sqrt{2}}{3} = \frac{\sqrt{2}.\sqrt{2}}{3\sqrt{2}} = \frac{2}{\sqrt{18}} = \frac{|z|}{|w|} \quad y\end{aligned}$$

$$\arg\left(\frac{z}{w}\right) = \frac{\pi}{4}+2n\pi, \quad \arg z - \arg w = \frac{\pi}{2}+2q\pi - \left(\frac{\pi}{4}+2k\pi\right) = \frac{\pi}{4}+2\pi(q-k)$$

luego cualquier valor de $\arg\left(\frac{z}{w}\right)$ *es un valor de* $\arg z$ *menos un* valor de $\arg w$ (salvo múltiplos de 2π)

Ejemplo 1.45 *Hallar, la forma polar de z, el Re(z), Im(z), conjugado de z, el módulo de z, si*

$$z = \frac{(1+i)^2}{1-i}$$

En efecto :

$$\begin{aligned} z &= \frac{(1+i)^2}{1-i} = \frac{\left[\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)\right]^2}{\sqrt{2}\left(\cos(-\frac{\pi}{4}) + i\sin(-\frac{\pi}{4})\right)} = \frac{2\left(\cos\frac{2\pi}{4} + i\sin\frac{2\pi}{4}\right)}{\sqrt{2}\left(\cos(-\frac{\pi}{4}) + i\sin(-\frac{\pi}{4})\right)} \\ &= \sqrt{2}\cos\left(\frac{2\pi}{4} + \frac{\pi}{4}\right) + i\sqrt{2}\sin\left(\frac{2\pi}{4} + \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\cos\frac{3\pi}{4} + i\sqrt{2}\sin\frac{3\pi}{4} \\ &= -1+i \end{aligned}$$

luego

$$z = \frac{(1+i)^2}{1-i} = -1+i \quad \textit{y así}$$

$$\operatorname{Re}(z) = \operatorname{Re}\left(\frac{(1+i)^2}{1-i}\right) = \operatorname{Re}(-1+i) = -1, \quad \operatorname{Im}(z) = \operatorname{Im}\left(\frac{(1+i)^2}{1-i}\right) = 1$$

$$\operatorname{Re}(\bar{z}) = \operatorname{Re}(-1-i) = -1, \quad \operatorname{Im}(\bar{z}) = \operatorname{Im}(-1-i) = -1$$

Ejemplo 1.46 *Sea*

$$z = \frac{\left(1-i\sqrt{3}\right)^{21}}{(i-1)^{38}}$$

Hallar, la forma polar de z, el Re(z), Im(z), conjugado de z, el módulo de z.

En efecto :

$$\begin{aligned} z &= \frac{\left(1-i\sqrt{3}\right)^{21}}{(i-1)^{38}} = \frac{\left[2\left(\cos(-60^o) + i\sin(-60^o)\right)\right]^{21}}{\left[\sqrt{2}\left(\cos 135^o + i\sin 135\right)\right]^{38}} = 2^2\frac{\cos(-1260^o) + i\sin(-1260^o)}{\cos 5130^o + i\sin 5130^o} \\ &= 4\cos(-6390^o) + 4i\sin(-6390^o) = 4\cos(-270^o) + 4i\sin(-270^o) = 4i \end{aligned}$$

luego

$$z = \frac{\left(1-i\sqrt{3}\right)^{21}}{(i-1)^{38}} = 4i \quad \text{y así}$$

$$\operatorname{Re}(z) = \operatorname{Re}\left(\frac{\left(1-i\sqrt{3}\right)^{21}}{(i-1)^{38}}\right) = \operatorname{Re}(4i) = 0, \quad \bar{z} = -4i$$

$$\operatorname{Im}(z) = \operatorname{Im}\left(\frac{\left(1-i\sqrt{3}\right)^{21}}{(i-1)^{38}}\right) = \operatorname{Im}(4i) = 4, \quad |z| = \left|\frac{\left(1-i\sqrt{3}\right)^{21}}{(i-1)^{38}}\right| = |4i| = 4$$

1.8 Raíces de un número complejo

Supongamos que se quiere extraer la raíz cuadrada del número complejo 3-4i, quiere decir que debemos hallar un número complejo x+iy, tal que su cuadrado sea igual a 3-4i, para ello tendremos que si

$$\sqrt{3-4i} = x+iy \quad \text{entonces } 3-4i = (x+iy)^2 = x^2 - y^2 + 2ixy$$

entonces por la igualdad de 2 números complejos se tiene que :

$$x^2 - y^2 = 3 \ \text{ y } \ 2xy = -4$$

Como $y = -\dfrac{2}{x}$ entonces $x^2 - y^2 = x^2 - (-\dfrac{2}{x})^2 = 3$ luego $x^4 - 3x^2 - 4 = 0 = (x^2-4)(x^2+1)$ sisi $x = \pm 2$ por tanto como $y = -\dfrac{2}{x}$, se tiene que $y = \pm 1$, así las raices cuadradas de $3-4i$ son $z = 2-i$, $z = -2+i$

Para hallar las raices de i, escribimos

$$\sqrt{i} = x+iy \text{ entonces } i = (x+iy)^2 = x^2 - y^2 + 2ixy$$

por lo tanto

$$x^2 - y^2 = 0 \ \text{ y } \ 2xy = 1$$

Como $y = \dfrac{1}{2x}$ entonces $x^2 - y^2 = x^2 - \frac{1}{4x^2} = 0$ entonces $4x^4 - 1 = 0$, así $x^4 = \frac{1}{4}$, luego $x^2 = \frac{1}{2}$ y de aquí $x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}, y\ y = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$ así

$$\sqrt{i} = x+iy = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}(1+i)$$

En efecto

$$\left(\pm\frac{1}{\sqrt{2}}(1+i)\right)^2 = \frac{1}{2}\left(1+2i+i^2\right) = \frac{2i}{2} = i$$

Las raíces enésimas de un número complejo a son por definición

$$a^{\frac{1}{n}} = \{z \in C \mid z^n = a\}$$

Si z es una raíz enésima de a entonces $z^n = a$. Escribamos la forma polar de z y de a,

$z = |z|(\cos\theta + i\sin\theta)$ y $a = |a|(\cos\delta + i\sin\delta) = |a|(\cos(\delta + 2k\pi) + i\sin(\delta + 2k\pi))$,por lo tanto

$z^n = (|z|(\cos\theta + i\sin\theta))^n = |z|^n(\cos n\theta + i\sin n\theta) = a = |a|(\cos(\delta+2k\pi)+i\sin(\delta+2k\pi))$

así que $|z|^n = |a|$ y $n\theta = \delta + 2k\pi$,luego $|z| = |a|^{\frac{1}{n}}$ y $\theta = \frac{\delta+2k\pi}{n}$ y

$$z = |a|^{\frac{1}{n}}\left[\cos(\frac{\delta + 2k\pi}{n}) + i\sin(\frac{\delta + 2k\pi}{n})\right]$$

que escrito simbólicamente es

$$z = a^{\frac{1}{n}} = (|a|(\cos\delta + i\sin\delta))^{\dfrac{1}{n}} =$$
$$= \left(\sqrt[n]{|a|}\left[\cos(\frac{\delta + 2k\pi}{n}) + i\sin(\frac{\delta + 2k\pi}{n})\right],\ k = 0, 1, 2...n-1\right)$$

Ejemplo 1.47 *Hallar las raices cúbicas de 8.*

$$Como \quad z = 8 = |8|(\cos 0^o + i\sin 0^o)$$

entonces

$$8^{\frac{1}{3}} = \left(\sqrt[3]{|8|}\left[\cos(\frac{2k\pi}{3}) + i\sin(\frac{2k\pi}{3})\right],\ k = 0, 1, 2\right)$$

luego las raices cúbicas de 8 son para

$$k = 0, \quad 2(\cos 0^o + i\sin 0^o) = 2$$
$$k = 1, \quad 2(\cos 120^o + i\sin 120^o) = -1 + i\sqrt{3}$$
$$k = 2, \quad 2(\cos 240^o + i\sin 240^o) = -1 - i\sqrt{3}$$

Ejemplo 1.48 *Las raices cuadradas de i vienen dadas por*

$$\begin{aligned} i^{\frac{1}{2}} &= \left(\sqrt{|i|}\left[\cos\left(\frac{\frac{\pi}{2} + 2k\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\frac{\pi}{2} + 2k\pi}{2}\right)\right],\ k = 0, 1\right) \\ &= \left(\sqrt{|i|}\left[\cos\left(\frac{\pi}{4} + k\pi\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4} + k\pi\right)\right],\ k = 0, 1\right) \end{aligned}$$

luego las raices cuadradas de i son para

$$k = 0, \quad (\cos 45^o + i\sin 45^o) = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$k = 1, \quad (\cos 225^o + i\sin 225^o) = -\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Ejemplo 1.49 *Hallar las raices cuartas de 1*

$$Como \quad z = 1 = |1| (\cos 0^o + i \sin 0^o)$$

entonces

$$1^{\frac{1}{4}} = \left(\sqrt[4]{|1|} \left[\cos(\frac{2k\pi}{4}) + i \sin(\frac{2k\pi}{4}) \right],\ k = 0, 1, 2, 3 \right)$$

luego las raices cuartas de 1 son $\{1, -1, i, -i\}$ *pués*

$$para \quad k = 0,\ \sqrt[4]{|1|} [\cos(0) + i \sin(0)] = 1$$

$$para\ k = 1,\ \sqrt[4]{|1|} \left[\cos(\frac{2\pi}{4}) + i \sin(\frac{2\pi}{4}) \right] = i \sin \frac{\pi}{2} = i$$

$$para\ k = 2,\ \sqrt[4]{|1|} \left[\cos(\frac{4\pi}{4}) + i \sin(\frac{4\pi}{4}) \right] = \cos \pi = -1$$

$$para\ k = 3,\ \cos(\frac{6\pi}{4}) + i \sin(\frac{6\pi}{4}) = \cos(\frac{3\pi}{2}) + i \sin(\frac{3\pi}{2}) = -i$$

Ejemplo 1.50 *Hallar las raices cuartas de*

$$z = -2\sqrt{3} - 2i$$

En efecto : Como

$$z = -2\sqrt{3} - 2i, \quad entonces \quad \left| -2\sqrt{3} - 2i \right| = 4, \quad \delta = \arctan \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{\pi}{6} + \pi = \frac{7\pi}{6} \quad y \qquad así$$

$$\left(-2\sqrt{3} - 2i \right)^{\frac{1}{4}} = \left(\sqrt[4]{4} \left[\cos\left(\frac{\frac{7\pi}{6} + 2k\pi}{4} \right) + i \sin\left(\frac{\frac{7\pi}{6} + 2k\pi}{4} \right) \right],\ k = 0, 1, 2, 3 \right)$$

son las raices cuartas de

$$z = -2\sqrt{3} - 2i$$

Ejemplo 1.51 *Como*

$$z = -1 + i = \sqrt{2}(\cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4})$$

entonces

$$(-1 + i)^{\frac{1}{3}} = \left((\sqrt{2})^{\frac{1}{3}} \left[\cos\left(\frac{\frac{3\pi}{4} + 2k\pi}{3} \right) + i \sin\left(\frac{\frac{3\pi}{4} + 2k\pi}{3} \right) \right],\ k = 0, 1, 2 \right)$$

son las raices cúbicas del número complejo

$$z = -1 + i$$

En forma similar se define

$$\begin{aligned}
a^{\frac{m}{n}} &= (a^m)^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{|a|^m}(\cos(m\theta+2k\pi)+i\sin(m\theta+2k\pi))^{\frac{1}{n}} \\
&= \sqrt[n]{|a|^m}(\cos(\frac{m\theta+2k\pi}{n})+i\sin(\frac{m\theta+2k\pi}{n})) \quad k=0,1,2....n-1 \quad \text{y} \\
\left(a^{\frac{1}{n}}\right)^m &= (\sqrt[n]{|a|^m}(\cos(\frac{m(\delta+2k\pi)}{n})+i\sin(\frac{m(\delta+2k\pi)}{n})) \quad k=0,1,2....n-1)
\end{aligned}$$

Si m y n son primos relativos se tiene que

$$\left\{(a^m)^{\frac{1}{n}}\right\} = \left\{\left(a^{\frac{1}{n}}\right)^m\right\}$$

Ejemplo 1.52

$$\begin{aligned}
(-1)^{\frac{2}{3}} &= \left((-1)^2\right)^{\frac{1}{3}} = 1^{\frac{1}{3}} = \left(\sqrt[3]{|1|}\left(\cos(0^o+\frac{2k\pi}{3})+i\sin(0^o+\frac{2k\pi}{3})\right),\ k=0,1,2\right) \\
&= \{1,\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3},\cos\frac{4\pi}{3}+i\sin\frac{4\pi}{3}\} = \{1,-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}i}{2},-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}i}{2}\},\ \textit{pués}
\end{aligned}$$

$$\text{Si } k=0,\ \sqrt[3]{|1|}\left(\cos(0^o+\frac{2k\pi}{3})+i\sin(0^o+\frac{2k\pi}{3})\right) = \cos 0+i\sin 0 = 1$$

$$\text{Si } k=1,\ \sqrt[3]{|1|}\left(\cos(0^o+\frac{2k\pi}{3})+i\sin(0^o+\frac{2k\pi}{3})\right) = \cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2k\pi}{3}$$

$$\text{Si } k=2,\ \text{Si } k=0,\ \sqrt[3]{|1|}\left(\cos(0^o+\frac{2k\pi}{3})+i\sin(0^o+\frac{2k\pi}{3})\right) = \cos\frac{4\pi}{3}+i\sin\frac{4\pi}{3}$$

Ahora

$$(-1)^{\frac{2}{3}} = \left((-1)^{\frac{1}{3}}\right)^2 \ \textit{pero}\ (-1)^{\frac{1}{3}} = (\sqrt[3]{|-1|}\left(\cos(\frac{\pi+2k\pi}{3})+i\sin(\frac{\pi+2k\pi}{3})\right),\ k=0,1,2)$$

$$= \{\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3},-1,\cos\frac{5\pi}{3}+i\sin\frac{5\pi}{3}\}$$

y así

$$\begin{aligned}
(-1)^{\frac{2}{3}} &= \left((-1)^{\frac{1}{3}}\right)^2 = \{\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3},-1,\cos\frac{5\pi}{3}+i\sin\frac{5\pi}{3}\}^2 \\
&= \{\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3},1,\cos\frac{10\pi}{3}+i\sin\frac{10\pi}{3}\} = \{-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}i}{2},1,-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}i}{2}\}
\end{aligned}$$

$$\text{luego} \qquad \left((-1)^2\right)^{\frac{1}{3}} = \left((-1)^{\frac{1}{3}}\right)^2$$

Ejemplo 1.53 *Calcular*

$$\left((-1)^2\right)^{\frac{1}{4}} \qquad y \qquad \left((-1)^{\frac{1}{4}}\right)^2$$

que puede concluir de esto, son iguales ? Cuándo lo son ? Observar los ejemplos anteriores

Ejemplo 1.54 *Hallar los valores de* $(2-i)^{-\frac{2}{3}}$
Primero calculamos

$$\frac{1}{2-i} = \left(\frac{1}{2-i}\right)\frac{(2+i)}{(2+i)} = \frac{2}{5} + \frac{1}{5}i$$

Ahora escribimos

$$(2-i)^{-\frac{2}{3}} = \left(\frac{1}{2-i}\right)^{\frac{2}{3}} = \left(\frac{2}{5} + \frac{1}{5}i\right)^{\frac{2}{3}}$$

y elevamos primero al cuadrado

$$\begin{aligned} \left(\frac{2}{5} + \frac{1}{5}i\right)^2 &= \left(\frac{4}{25} + \frac{4}{25}i - \frac{1}{25}\right) = \left(\frac{3}{25} + \frac{4}{25}i\right) \ y \\ \text{el módulo } \left|\frac{3}{25} + \frac{4}{25}i\right| &= \frac{1}{25}\sqrt{3^2+4^2} = \frac{1}{5} \end{aligned}$$

y un argumento de $\frac{3}{25} + \frac{4}{25}i$ es $\arctan\frac{4}{3}$ luego

$$\begin{aligned} (2-i)^{-\frac{2}{3}} &= \left(\frac{2}{5} + \frac{1}{5}i\right)^{\frac{2}{3}} = \left(\frac{3}{25} + \frac{4}{25}i\right)^{\frac{1}{3}} = \\ &= \sqrt[3]{\frac{1}{5}}\left[\cos\left(\frac{\arctan\frac{4}{3} + 2k\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\arctan\frac{4}{3} + 2k\pi}{3}\right), \ k = 0,1,2\right] \end{aligned}$$

1.9 Lugares Geométricos, Conjuntos y Regiones en el Plano Complejo

Se sabe que a cada número complejo z, le corresponde un punto en el plano xy, de manera análoga, las ecuaciones y desigualdades en variable compleja, pueden representarse por curvas o regiones en el plano xy, como lo veremos a continuación

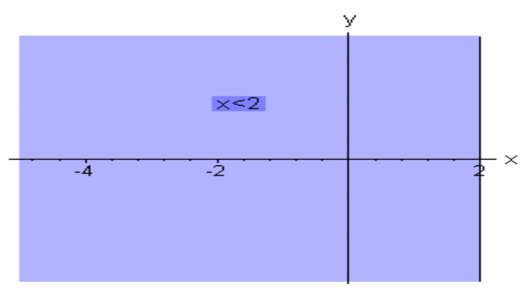
Ejemplo 1.55 *Consideremos la ecuación*

$$\operatorname{Re} z = 2$$

y si la escribimos en términos de x, y, se tiene que : Rez= $\operatorname{Re}(x+yi) = x = 2$. *En el plano complejo el lugar geométrico de los puntos que satisfacen la ecuación* $x = 2$, *es una recta vertical infinita .Si se considera la desigualdad*

$$\operatorname{Re} z < 2$$

que equivale a $x < 2$, *los puntos que satisfacen esta desigualdad, están a la izquierda de la recta* $x = 2$, *es decir, el conjunto solución de la desigaldad* $\operatorname{Re} z < 2$ *es el conjunto* $\{(x, y)/x < 2\}$, *como se observa en la figura 1.7*



El conjunto solución de la desigualdad

$$\operatorname{Im}(i\bar{z}) < 2 \quad \text{figura 1.7}$$

es el conjunto

$$\{(x, y)/x < 2\}$$

ya que

$$\operatorname{Im}(i\bar{z}) = \operatorname{Im}(i(x - iy)) = \operatorname{Im}(ix + y) = x < 2$$

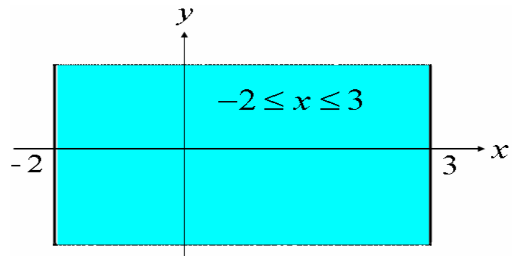
Ejemplo 1.56 *Si se tiene*

$$-2 \leq \operatorname{Re} z \leq 3$$

que equivale a

$$-2 \leq x \leq 3$$

el lugar geométrico de los puntos que satisfacen la ecuación $-2 \leq \operatorname{Re} z \leq 3$, *corresponde a los puntos que están entre y sobre las rectas* $x = -2$ *y* $x = 3$ *figura 1.8*



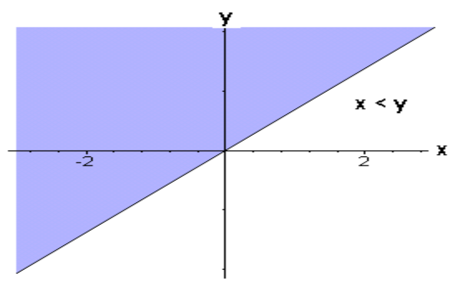
Ejemplo 1.57 *Si*

$$\operatorname{Re} z < \operatorname{Im} z$$

que equivale a $x < y$ *el conjunto solución de* $\operatorname{Re} z < \operatorname{Im} z$ *es el conjunto*

$$\{(x, y)/x < y\}$$

que se observa en la figura siguiente



Ejemplo 1.58 *Si*

$$\operatorname{Re}(z^2) \leq -1$$

entonces

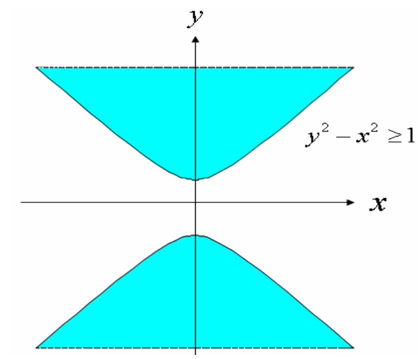
$$\operatorname{Re}((x + iy)^2) = \operatorname{Re}(x^2 + 2ixy + i^2y^2) = x^2 - y^2 \leq -1$$

por lo tanto

$$y^2 - x^2 \geq 1$$

luego el lugar geométrico que representa la desigualdad $\operatorname{Re}(z^2) \leq -1$ *viene dada por figura siguiente*

$$\left\{(x, y)/y^2 - x^2 \geq 1\right\}$$



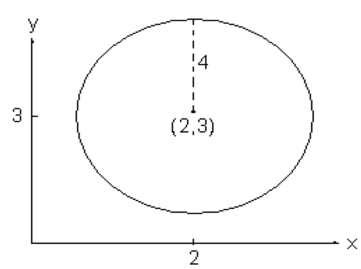
Ejemplo 1.59 *Si* $|z-(2+3i)|=4$, *entonces como*

$$|z-(2+3i)| = |x+yi-(2+3i)| = |x-2+(y-3)i)| = \sqrt{(x-2)^2+(y-3)^2}$$

$$\textit{se tiene que} \quad \sqrt{(x-2)^2+(y-3)^2} = 4 \quad \textit{y así} \;\; (x-2)^2+(y-3)^2 = 16$$

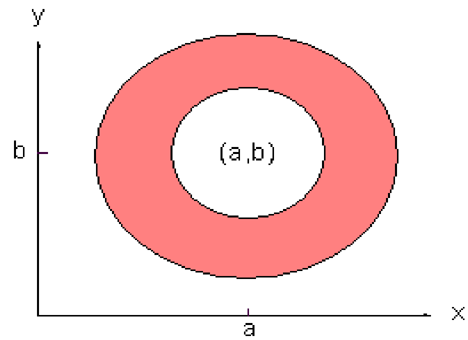
luego el lugar geométrico de los puntos que satisfacen la igualdad $|z-(2+3i)| = 4$, *corresponde a los puntos que estàn en la circunferencia* $(x-2)^2+(y-3)^2 = 16$ *figura siguiente*

Si $|z-(2+3i)| < 4$, los puntos que satisfacen esta desigualdad son los puntos que están dentro de la circunferencia con centro $(2,3)$ y radio 4



En forma general, el lugar geométrico que representa la ecuación $c \leq |z-(a+bi)| \leq d$ con $0 \leq c \leq d$ es el conjunto

$$\{(x,y)/c^2 \leq (x-a)^2+(y-b)^2 \leq d^2\} \quad \text{figura siguiente}$$

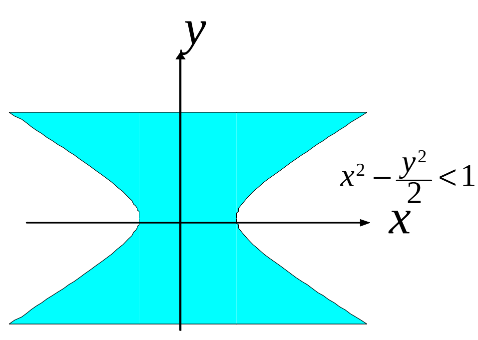


Ejemplo 1.60 *Determinar todos los z tales que* $|z|^2 + 3\,\mathrm{Re}(z^2) = 4$*. Como* $z = x + yi$ *entonces*

$$|z|^2 + 3\,\mathrm{Re}(z^2) = (x^2 + y^2) + 3(x^2 - y^2) = 4$$

que equivale a $x^2 - \dfrac{y^2}{2} = 1$*, luego el lugar geométrico de los puntos que satisfacen la igualdad, son los puntos* (x, y) *que estan sobre la hipérbola* $x^2 - \dfrac{y^2}{2} = 1.$

Si $|z|^2 + 3\,\mathrm{Re}(z)^2 < 4$ que equivale a $x^2 - \dfrac{y^2}{2} < 1$, el lugar geométrico de los puntos que satisfacen la desigualdad son $\{(x, y)/x^2 - \dfrac{y^2}{2} < 1\}$



Ejemplo 1.61 *Determinar todos los* $z = x + iy$ *tales que* $|z + 2i| = |z + (1 - 3i)|$
Escribamos esta ecuación como

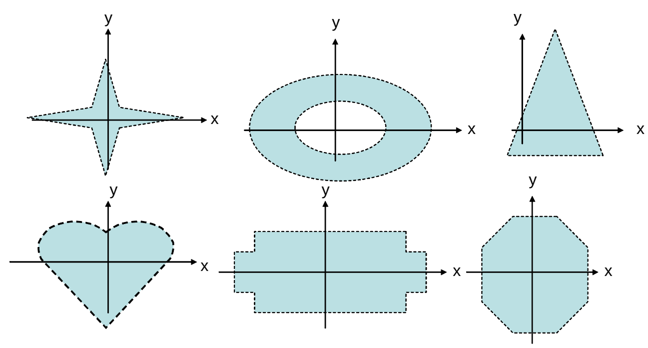
$$|z + 2i| = |x + iy + 2i| = |x + i(y + 2)| = \sqrt{x^2 + (y + 2)^2}$$

$$= |z + 1 - 3i)| = |x + iy + 1 - 3i| = |(x + 1) + i(y - 3)| = \sqrt{(x + 1)^2 + (y - 3)^2}$$

entonces $\sqrt{x^2+(y+2)^2} = \sqrt{(x+1)^2+(y-3)^2}$ *y elevando al cuadrado ambos miembros de ésta igualdad obtenemos* $x^2+y^2+4y+4 = x^2+2x+1+y^2-6y+9$, *que simplificando se llega a* $x-5y=-3$, *que es la ecuación de una recta.*

Definición 1 Punto interior. *Sea* $S \neq \Phi$, $S \subseteq C$ *se dice que a es un punto interior de* S, *si existe* $B(a,\epsilon) \subseteq S$

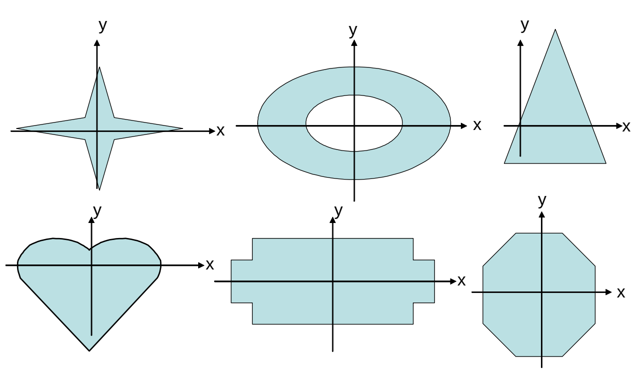
Definición 2 Conjunto abierto. *Un conjunto* S *es abierto si y solo si todos sus puntos son interiores. Ejemplos de conjuntos abiertos en* R^2,*se observan en la figura siguiente*



Ejemplo 1.62 ***Definición 3 Puntos frontera*** *a es un punto frontera de* S, *si toda bola* $B(a,\epsilon)$ *contiene puntos de* S *y puntos que no perrtenecen a* S

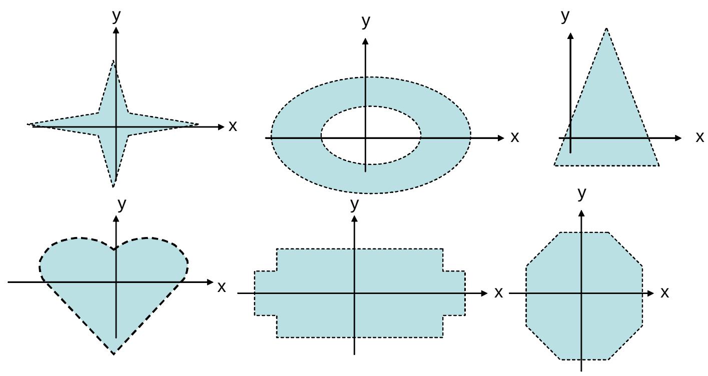
Definición 4 Punto de Acumulación. *Un punto a, es de acumulaciòn de un conjunto* S, *si toda bola abierta reducida* $B'(a,\epsilon)$ *contiene puntos de* S

Definición 5 Conjunto Cerrado. *Un conjunto* S *se dice cerrado si y solo si* S *contiene todos sus puntos de acumulación. Ejemplos de conjuntos cerrados en* R^2 *se pueden apreciar en la figura siguiente*

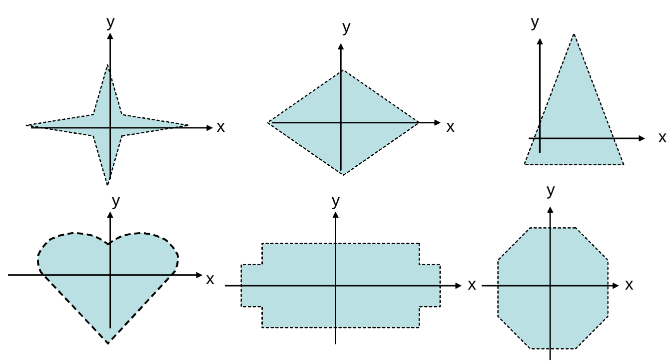


Ejemplo 1.63 ***Definición 6 Conjunto Conexo***. *Un conjunto S es conexo si cualquier par de puntos de S, puede ser unido por un camino poligonal contenido en S*

Definición 7 Dominio. *Un conjunto S se dice dominio, si es abierto y conexo. En la figura siguiente se pueden observar gráficas de Dominios*



Ejemplo 1.64 ***Definición 8 Simplemente Conexo***. *Un dominio S se dice simplemente conexo, si toda curva simple cerrada en S es tal que su interior está totalmente contenida en S.Por ejemplo $S = R^2 - \{0, 0\}, S = \{z\epsilon C\ /2 < |z - (1 + 5i)| < 3\}$,no son conjutos simplemente conexos En la figura siguiente se pueden observar conjuntos simplemente conexos*



Ejemplo 1.65 ***Definición 9 Vecindad*** *Vecindad de un punto, es cualquier conjunto que contenga un conjunto abierto, que contenga al punto.*

Ejemplo 1.66 *Consideremos el conjunto* $S = \{\frac{i}{n}\}_{n\epsilon\mathbb{N}}$. *No tiene puntos interiores, ya que si* $a\epsilon S$, $B(a,\epsilon)$ *no esta contenida en* S. *Ningún punto de* S *es interior, luego* S *no es un conjunto abierto. El único punto de acumulación de* S, *es* $z = 0$ *luego* S *no es cerrado pues* $0 \notin S$ *y* 0 *es punto de acumulación. Los puntos frontera de* S *son* $\{0, i, \frac{i}{2}, \frac{i}{3}...\}$.*No es un conjunto conexo, ni dominio, ni vecindad.*

Ejemplo 1.67 *Consideremos el conjunto* $S = \{z\epsilon\mathbb{C} \,/\, |z-(2+3i)| < 4\}$.$S$ *es un conjunto abierto, pues todos sus puntos son interiores.* S *no es un conjunto cerrado, pues por ejemplo* $(2,7)$ *es un punto de acumulación y* $(2,7) \notin S$. *Los puntos de acumulación de* S *son* $\{z\epsilon C/ \ |z-(2+3i)| \leq 4\}$. *Es un conjunto conexo, es dominio y es simplemente conexo.*

Ejemplo 1.68 *Consideremos el conjunto* $S = \{z\epsilon C \ /2 \leq |z-(2+i)| \leq 3\}$. *No es un conjunto abierto, pues por ejemplo* $(2,4)$ *es un punto de* S, *que no es interior a* S. *Los puntos interiores son* $\{z\epsilon C \ /2 < |z-(2+i)| < 3\}$. *Es un conjunto cerrado. Los puntos de acumulación son* $S = \{z\epsilon C \ /2 \leq |z-(2+i)| \leq 3\}$, *no es un dominio, no es un conjunto simplemente conexo*

Ejemplo 1.69 *Consideremos el conjunto* $S = \{z\epsilon C \ /2 < |z-(2+i)| < 3\}$. *Es un conjunto abierto, los puntos interiores son el mismo conjunto. No es un conjunto cerrado, pues por ejemplo* $(2,4)$ *es un punto de acumulación que no pertenece a* S. *Los puntos de acumulación son* $S = \{z\epsilon C \ /2 \leq |z-(2+i)| \leq 3\}$. *Es un conjunto Conexo, es Dominio y no es simplemente Conexo*

Ejercicio 1 *Aplicar los conceptos tratados anteriormente para solucionar los siguientes ejercicios*

1. Verificar que:

   a) $(-7+2i)+(3+4i)+(-4+6i) = -8+12i$
   b) $(-7+2i)-(3+4i)+(-4+6i) = -14+4i$
   c) $(-7+2i)\cdot((3+4i)-(-4+6i)) = -45+28i$
   d) $\dfrac{(-7+2i)\cdot(-4+6i)}{(-7+2i)+(3+4i)} = -7+2i$
   e) $\dfrac{1}{(-7+2i)+(3+4i)+(-4+6i)} = -\dfrac{1}{26} - \dfrac{3}{52}i$

   (a) $(-\frac{1}{2}+\frac{i\sqrt{3}}{2})^3 = 1, \qquad (1-i)^3 = -2-2i, \qquad \dfrac{1+8i}{2+i} = 2+3i$

2. Hallar módulo y argumento principal de

a) $z = 2 - 5i$. Respuesta $\sqrt{29}$, $\arctan(\frac{-5}{2})$

b) $z = -2 + 5i$, Respuesta $\sqrt{29}$, π+arctan$(\frac{-5}{2})$ ó $\pi-$arctan$(\frac{5}{2})$

c) $z = -1 - i$, Respuesta $\sqrt{2}$, $5\pi/4$ ó π+arctan(1)

d) $z = 3i$, Respuesta 3, $\pi/2$

e) $z = -5$, Respuesta 5, π

f) $-i$ Respuesta 1 -$\pi/2$

3). Mostrar que

$$z = -i + \frac{3+i}{1-i} = 1 + i, \qquad w = \frac{5 \cdot (6+2i) - 5 \cdot (1+3i)}{(-1+i) - 2} + 7 + 2i = -1 + i$$

$$v = \left[\frac{2+i}{6i - (1-2i)}\right]^2 = -\frac{253}{4225} - \frac{204}{4225}i$$

y verifique que:

a) $\operatorname{Re} z = 1, \operatorname{Re} v = -\frac{253}{4225}$, $\operatorname{Re} w = -1$, $\operatorname{Im} z = 1$, $\operatorname{Im} w = 1$, $\operatorname{Im} v = -\frac{204}{4225}$

b) $\arg z = \arctan 1 + 2n\pi$, $\arg v = \arctan \frac{204}{253} + \pi + 2n\pi$, $\arg w = \arctan(-1) + \pi + 2n\pi$

c) $Arg z = \dfrac{\pi}{4}$, $Arg v = \arctan \frac{204}{253} - \pi$, $Arg w = \dfrac{3\pi}{4}$

d) $\bar{z} = 1 - i$, $\bar{v} = -\frac{253}{4225} + \frac{204}{4225}i$, $\bar{w} = -1 - i$

e) $|z| = \sqrt{2}$, $|v| = \sqrt{\left(-\frac{253}{4225}\right)^2 + \left(-\frac{204}{4225}\right)^2} = \dfrac{1}{13}$, $|w| = \sqrt{2}$

f) $|\overline{z}| = \sqrt{2}$, $|\overline{v}| = \dfrac{1}{13}$, $|\overline{w}| = \sqrt{2}$

3. Verificar que

$$z = (-\sqrt{3} - i)^{-5} = \frac{1}{32}(\cos 330 - i\sin 330)$$
$$w = (-\sqrt{3} + i)^{3} = 8\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right)$$
$$z_1 = (\sqrt{3} - i)^{3} = 8\left(\cos\frac{-\pi}{2} + i\sin\frac{-\pi}{2}\right)$$

y que

a) $z \cdot w \cdot z_1 = (-\sqrt{3} - i)^{-5} * (-\sqrt{3} + i)^3 * (\sqrt{3} - i)^3 = \sqrt{3} + i$

b) $z^2 \cdot w \cdot z_1 = (-\sqrt{3} - i)^{-10} * (-\sqrt{3} + i)^3 * (\sqrt{3} - i)^3 = \frac{1}{32} i\sqrt{3} + \frac{1}{32}$

c) $\dfrac{z \cdot w \cdot z_1}{z \cdot z \cdot w} = \dfrac{(-\sqrt{3} - i)^{-5} * (-\sqrt{3} + i)^3 * (\sqrt{3} - i)^3}{(-\sqrt{3} - i)^{-5} * (-\sqrt{3} - i)^{-5}(-\sqrt{3} + i)^3} = -128i\sqrt{3} - 128$

d) $\mathrm{Re}(z) = \mathrm{Re}\left((-\sqrt{3} - i)^{-5}\right) = \frac{1}{64}\sqrt{3}$, $\mathrm{Im}(w) = \mathrm{Im}\left((-\sqrt{3} + i)^3\right) = 8, \arg w = \dfrac{\pi}{2} + 2n\pi$, $Arg z_1 = Arg\left((\sqrt{3} - i)^3\right) = -\dfrac{\pi}{2}$, $\mathrm{Arg}(w) = \mathrm{Arg}\left((-\sqrt{3} + i)^3\right) = \dfrac{\pi}{2}$

e) $\overline{z} = \frac{1}{64}\sqrt{3} - \frac{1}{64}i, \quad |w| = 8, \quad |\overline{z}| = \sqrt{\left(\frac{1}{64}\sqrt{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{64}\right)^2} = \dfrac{1}{32}, \quad \overline{z_1} = 8i$

4. Hallar x y y tal que

a) $i(x + yi) = x + 1 + 2yi$ Respuesta $x = -\dfrac{2}{3},\ y = -\dfrac{1}{3}$

b) $x^2 - y^2 + 2xyi = -xi + y$ Respuesta $(x, y) = (0, 0)$ y $(x, y) = (0, -1)$

c) $2x - 3yi + 4xi - 2y - 5 - 10i = x + y + 2 - (y - x + 3)i$ Respuesta $x = 1,\ y = -2$

5. Mostrar que

a) $16^{\frac{1}{2}} = \sqrt{16}\left(\cos\left(\dfrac{2k\pi}{2}\right) + i\sin\left(\dfrac{2k\pi}{2}\right)\right) \quad k = 0, 1$

b) $(1 - i)^{\frac{1}{3}} = 2^{\frac{1}{6}}\left(\cos\left(\dfrac{-\frac{\pi}{4} + 2k\pi}{3}\right) + i\sin\left(\dfrac{-\frac{\pi}{4} + 2k\pi}{3}\right)\right) \quad k = 0, 1, 2$

c) $i^{\frac{1}{3}} = \cos\left(\dfrac{\frac{\pi}{2} + 2k\pi}{3}\right) + i\sin\left(\dfrac{\frac{\pi}{2} + 2k\pi}{3}\right) \quad k = 0, 1, 2$

d) $(1{+}4i)^{\frac{2}{3}} = 17^{\frac{1}{3}}\left(\cos\left(\dfrac{2arc\tan 4 + 4k\pi}{3}\right) + i\sin\left(\dfrac{2arc\tan 4 + 4k\pi}{3}\right)\right) \quad k = 0, 1, 2$

e) $(-64)^{\frac{1}{4}} = 64^{\frac{1}{4}}\left(\cos\left(\dfrac{\pi+2k\pi}{4}\right) + i\sin\left(\dfrac{\pi+2k\pi}{4}\right)\right)\; k = 0,1,2,3$

f) $\sqrt{1+i} = \pm\left(\sqrt{\frac{1+\sqrt{2}}{2}} + i\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2}}\right)$

6. Demostrar o refutar que:

a) $|z_1+z_2+z_3+...+z_n| \leq |z_1|+|z_2|+|z_3|+...+|z_n|$ Respuesta Verdadera

b) $\left(\bar{z}\right)^n = \overline{(z^n)}$ Respuesta Verdadera

c) $\operatorname{Re}(iz) = -\operatorname{Im}(z)$ Respuesta Verdadera

d) $Im(iz) = Re(z)$ Respuesta Verdadera

e) $\operatorname{Re}(z^2) = (\operatorname{Re} z)^2 - (\operatorname{Im} z)^2$ Respuesta Verdadera

f) $Im(z^2) = 2\operatorname{Re} z \operatorname{Im} z$ Respuesta Verdadera

g) $\operatorname{Re}(z_1+z_2) = \operatorname{Re}(z_1)+\operatorname{Re}(z_2)$ Respuesta Verdadera

h) $\arg(z_1\bar{z}_2) = \arg z_1 - \arg z_2 + 2n\pi$ Respuesta Verdadera

i) $\arg(\bar{z}) = -\arg z + 2n\pi$ Respuesta Verdadera

j) $|\operatorname{Re} z| + |\operatorname{Im} z| \leq \sqrt{2}\,|z|$ Respuesta Verdadera

k) $\arg(z^n) = n\arg z + 2n\pi$ Respuesta Verdadera

l) $\operatorname{Re}(z_1z_2) = \operatorname{Re}(z_1)\operatorname{Re}(z_2) - \operatorname{Im}(z_1)\operatorname{Im}(z_2)$ Respuesta Verdadera

m) $Arg(z_1z_2) = Arg(z_1) + Arg(z_2)$ Respuesta Falsa

n) $Arg(\dfrac{z_1}{z_2}) = Arg(z_1) - Arg(z_2)$ Respuesta Falsa

7. Hallar la ecuación del lugar geométrico de los puntos en el plano que satisfacen la ecuación

a) $|z| = |z-i|$ Respuesta $\{(x,y)/y = 1/2\}$

b) $|z-8+4i| = 9$ Respuesta $\{(x,y)/(x-8)^2+(y+4)^2 = 81\}$

c) $|z-i| = 2$ Respuesta $\{(x,y)/x^2+(y-1)^2 = 4\}$

d) $|z+3|+|z-3| = 10$ Respuesta $\left\{(x,y)/\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{16} = 1\right\}$

e) $\operatorname{Im}(z-i) = \operatorname{Re}(z+1)$ Respuesta $\{(x,y)/y = x+2\}$

f) $\left|\dfrac{z-3}{z+3}\right| = 2$ Respuesta $\{(x,y)/(x+5)^2+y^2 = 16\}$

g) $|z-1| = \mathrm{Re}(z+1)$ Respuesta $\{(x,y)/y^2 = 4x\}$

h) $|z-3| - |z+3| = 4$ Respuesta $\{(x,y)/5x^2 - 4y^2 = 20\}$

i) $z = -z$ Respuesta $\{(0,0)\}$

j) $\bar{z} = \dfrac{1}{z}$ Respuesta $\{(x,y)/x^2 + y^2 < 1\}$

k) $z + \bar{z} = 1$ Respuesta $\{(x,y)/x = 1/2\}$

l) $Re(z^2) \geq 0$ Respuesta $\{(x,y)/x^2 - y^2 \geq 0\}$

m) $z - \bar{z} = i$ Respuesta $\{(x,y)/y = 1/2\}$

8. Graficar el lugar geométrico de los puntos que representa la desigualdad

a) $\mathrm{Re}\, z^2 \leq 1$ Respuesta $x^2 - y^2 \leq 1$

b) $\mathrm{Im}\, z < 2$ Respuesta $y < 2$

c) $|z+3| + |z-3| \leq 10$ Respuesta $\dfrac{x^2}{25} + \dfrac{y^2}{16} \leq 1$

d) $\mathrm{Im}(z-i) = \mathrm{Re}(z+1)$ Respuesta $y = x + 2$

e) $2 \leq |z-i| < 3$ Respuesta $4 \leq x^2 + (y-1)^2 < 9$

f) $0 < |z| \leq 5$ Respuesta $0 < x^2 + y^2 \leq 25$

g) $\mathrm{Re}\, z \geq 0$ Respuesta $x \geq 0$

h) $|z-1| \geq \mathrm{Re}(z+1)$ Respuesta $y^2 \geq 4x$

9. Sea $S = \{a + bi\ /a, b$ son números irracionales $\}$ que estàn en el interior del rectángulo de vértices $-2-3i,\ 2-3i,\ -2+5i,\ 2+5i$

a) Es S cerrado?, es S abierto? Cuáles son los puntos interiores. Cuáles son los puntos de acumulación de S. Cuales son los puntos frontera de S. Es S un conjunto conexo?, es dominio?, es simplemente conexo? Respuestas: S no es cerrado, no es S abierto, no tiene puntos interiores, los puntos de acumulación de S son todos los puntos $\{(x,y) \in [-2,2] \times [-3,5]\}$,los puntos frontera de S son $\{(x,y) \in [-2,2] \times [-3,5]\}$., no es conexo, no es Dominio, no es simplemente conexo

10. Sea $S = \{a + bi\ /a, b\ son$ números irracionales $\}$ que están en el borde y en el interior del rectángulo de vértices $-2-3i\quad 2-3i\quad -2+5i\quad 2+5i$

a) Es S cerrado?, es S abierto? Cuáles son los puntos interiores. Cuáles son los puntos de acumulación de S. Cuáles son los puntos frontera de S. Es S un conjunto conexo?, es dominio?, es simplemente conexo?. Respuestas : S no es cerrado, no es S abierto, no tiene puntos interiores, los puntos de acumulación de S son todos los puntos $\{(x, y) \in [-2, 2] \times [-3, 5]\}$, los puntos frontera de S son $\{(x, y) \in [-2, 2] \times [-3, 5]\}$., no es conexo, no es Dominio, no es simplemente conexo

11. Sea $S = \{2 + i\ \}$

a) Es S cerrado?, es S abierto? Cuales son los puntos interiores. Cuales son los puntos de acumulación de S. Cuales son los puntos frontera de S. Es S un conjunto conexo?, es dominio?, es simplemente conexo? Respuestas: S es cerrado, S no es abierto, no tiene puntos interiores, no tiene puntos de acumulación, punto frontera es $\{2 + i\ \}$, no es conexo, no es Dominio, no es simplemente conexo

12 Cuales de los conjuntos siguientes son dominios y dominios simplemente conexo

a) $|z + 3| + |z - 3| \leq 10$ Respuesta *no* dominio y no dominio simplemente conexo

b) $|z + 3| + |z - 3| < 10$ Respuesta dominio y dominio simplemente conexo

c) $\mathrm{Im}(z - i) = \mathrm{Re}(z + 1)$ Respuesta Respuesta *no* dominio y no dominio simplemente conexo

d) $2 < |z - i| < 3$ Respuesta dominio y no dominio simplemente conexo

e) $|z - 1| < \mathrm{Re}(z + 1)$ Respuesta dominio y dominio simplemente conexo

f) $Im(z) < 2$ Respuesta dominio y dominio simplemente conexo

g) $|z| > 0$ Respuesta dominio y no dominio simplemente conexo

Capítulo 2

Funciones

2.1 Generalidades

Hasta aquí, se han tratado las propiedades elementales de los números complejos y ahora se pretende introducir las funciones complejas.
En un curso de cálculo elemental, se hace hincapie en las funciones reales, por las que se entienden cualquier función que opera sobre números reales y produce números reales, por ejemplo, la función definida por $f(x) = x^2$ para todo $x\epsilon\mathbb{R}$, toma cualquier número real x y produce el número real no negativo x^2.
La idea de una función compleja es similar, excepto que ahora se permite a la función operar sobre números complejos y producir números complejos, por ejemplo $f(z) = z^2 + 2z + 1$, así $f(i) = i^2 + 2i + 1 = 2i$.
Mas aún, suponga que se tienen 2 variables complejas z y w y que existe una relación de manera que, en una forma bien definida a cada valor de alguna región en el plano complejo z, le corresponde uno o más valores de w, entonces se dice que w es una función de z, definida en esa región y se escribe $w = f(z) = u + iv$, es decir, si

$$w = f(z) = f(x + yi) = u + vi = u(x, y) + v(x, y)i$$

se concluye que una función compleja $f(z)$, es equivalente a dos funciones reales, $u(x, y)$ y $v(x, y)$

Ejemplo 2.1 $f(z) = |z^2| = x^2 + y^2 = u(x, y) + iv(x, y)$

Ejemplo 2.2 $f(z) = \bar{z} = x - yi = u(x, y) + iv(x, y)$

Ejemplo 2.3 $f(z) = \mathrm{Re}(z^2) = x^2 - y^2 = u(x, y) + iv(x, y)$

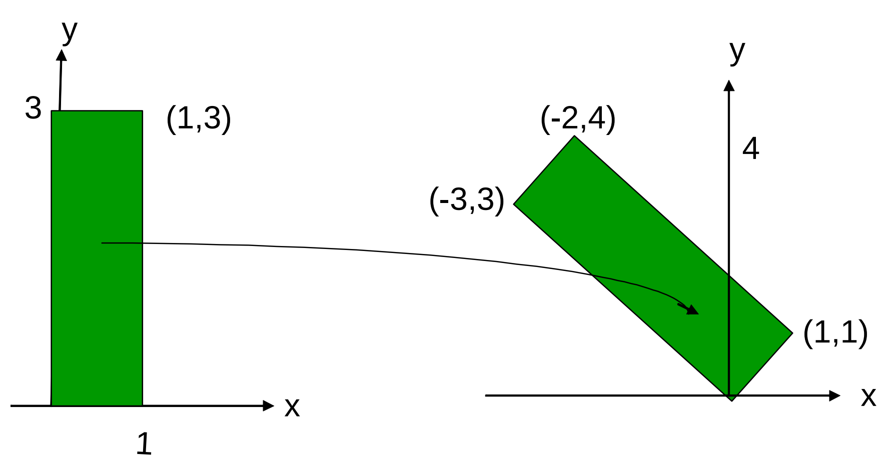
Ejemplo 2.4 $f(z) = \dfrac{\bar{z}}{z} = \dfrac{\bar{z}.\bar{z}}{z.\bar{z}} = \dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} - \dfrac{2xyi}{x^2 + y^2} = u(x, y) + iv(x, y)$

Ejemplo 2.5 $f(z) = z^2 = (x+iy)^2 = x^2 - y^2 + 2ixy = u(x,y) + iv(x,y)$

Ejemplo 2.6 *Sea R la region el plano xy determinada por las rectas $y = 0$, $y = 3$, $x = 1$, $x = 0$ (figura 2.1) y veamos la imagen por medio de la función*

$$f(z) = (1+i)z = (1+i)(x+iy) = (x-y) + i(x+y) = u(x,y) + iv(x,y)$$

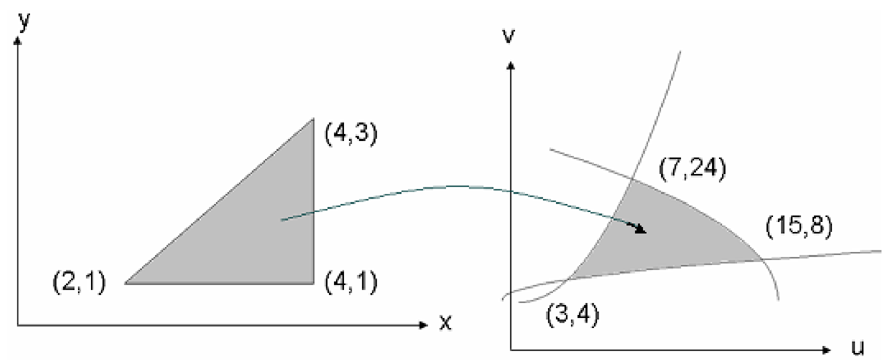
La recta $x = 0$ tiene por imagen $u = -v$, pues $u = x - y$, $v = x + y$ entonces $u = 0 - y$ $v = 0 + y$ y de aquí $u = -v$.
La recta $y = 0$ tiene por imagen por imagen $u = v$, pues, $u = x - y$, $v = x + y$ entonces $u = x$ $v = x$ y de aquí $u = v$.
La recta $y = 3$ tiene por imagen $u - v = -6$, pues, $u = x - y$, $v = x + y$ entonces $u = x - 3$ $v = x + 3$ y de aquí $u - v = -6$
La recta $x = 1$ tiene por imagen $u + v = 2$, pues, $u = x - y$, $v = x + y$ entonces $u = 1 - y$ $v = 1 + y$ y de aquí $u + v = 2$
El punto $(x,y) = (0,0)$ tiene por imagen $(u,v) = (0,0)$ pues $u = x - y = 0$ y $v = x + y = 0$
El punto $(x,y) = (1,0)$ tiene por imagen $(u,v) = (1,1)$ pues $u = x - y = 1$ y $v = x + y = 1$
El punto $(x,y) = (1,3)$ tiene por imagen $(u,v) = (-2,4)$
El punto $(x,y) = (0,3)$ tiene por imagen $(u,v) = (-3,3)$



Ejemplo 2.7 *Sea R la region el plano xy determinada por las rectas $y = x - 1$, $y = 1$, $x = 4$, (figura 2.2) y veamos la imagen por medio de la función*

$$f(z) = z^2 = (x+iy)^2 = x^2 - y^2 + 2ixy = u(x,y) + iv(x,y)$$

La imagen del punto $(x, y) = (2, 1)$ es $u = x^2 - y^2 = 4 - 1 = 3, v = 2xy = 2.2.1 = 4$, es decir, $(u, v) = (3, 4)$
La imagen del punto $(x, y) = (4, 1)$ es $u = x^2 - y^2 = 16 - 1 = 15$, $v = 2xy = 8$ por tanto $(u, v) = (15, 8)$
La imagen del punto $(x, y) = (4, 3)$ es $u = x^2 - y^2 = 16 - 9 = 7$, $v = 2xy = 24$, por tanto $(u, v) = (7, 24)$
La imagen de la recta $y = 1$ es $u = \frac{v^2}{4} - 1$, pues $u = x^2 - y^2,\ \ v = 2xy$ entonces $u = x^2 - 1$ $v = 2x$ y como $x = \frac{v}{2}$ entonces $u = \frac{v^2}{4} - 1$.
La imagen la recta $y = x - 1$ es $2v = u^2 - 1$, pues $u = x^2 - y^2,\ \ v = 2xy$ entonces $u = x^2 - (x - 1)^2 = 2x - 1$, por tanto $x = \frac{u+1}{2}$ y $v = 2x(x - 1)$ y de aquí $2v = u^2 - 1$
La imagen la recta $x = 4$ es $u = 16 - \frac{v^2}{64}$, pues $u = x^2 - y^2,\ \ v = 2xy$ entonces $u = 16 - y^2$ y $v = 8y$ y de aquí $u = 16 - \frac{v^2}{64}$



Ejemplo 2.8 *Hallar la imagen de la recta de $Re(z) = 2$ en el plano w mediante $f(z) = z^2$*

En efecto $w = u + iv = z^2 = (x + iy)^2 = x^2 - y^2 + 2ixy$ por tanto igualando parte real e imaginaria se tiene que

$$u = x^2 - y^2 \quad \text{y} \quad v = 2xy$$

por lo tanto como $Re(z) = x = 2$, entonces

$$u = 2^2 - y^2 \quad \text{y} \quad v = 2(2)y \ \ \text{luego } y = \frac{v}{4} \ \ \text{y así} \ \ u = 4 - \left(\frac{v}{4}\right)^2$$

luego la imagen de la recta $x = 2$ mediante $f(z) = z^2$ es una parábola, el gráfico de

$$u = 4 - \left(\frac{v}{4}\right)^2$$

La imagen del primer cuadrante en el plano z, por medio de $f(z) = z^2$ es el semiplano superior de w, pues si

$z = re^{i\theta}$, $w = \rho e^{i\beta}$ entonces como $w = z^2$ se tiene que $\rho e^{i\beta} = r^2 e^{i2\theta}$ así que $\rho = r^2$ y $\beta = 2\theta$

y como los punto de z estan $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$, ellos se aplican en $0 \leq \beta \leq \pi$

Ejemplo 2.9 *Hallar la imagen de la recta* $x = 1$ *mediante* $f(z) = \dfrac{z-1}{z+1}$

En efecto, exprezaremos z en términos de w Como $w = \dfrac{z-1}{z+1}$ entonces $w(z+1) = z - 1$ y de aquí

$$z = \frac{1+w}{1-w} \text{ y por tanto } z = x + iy = \frac{1+u+iv}{1-u-iv} = \frac{(1+u+iv)(1-u+iv)}{(1-u-iv)(1-u+iv)} = \frac{1-u^2-v^2}{(1-u)^2+v^2} + \frac{2vi}{(1-u)^2+v^2}$$

entonces igualando parte real e imaginaria se tiene

$$x = \frac{1-u^2-v^2}{(1-u)^2+v^2} \quad \text{e} \quad y = \frac{2v}{(1-u)^2+v^2}$$

y así la imagen de la recta $x = 1$ es la circunferencia

$$1 = \frac{1-u^2-v^2}{(1-u)^2+v^2} \quad \text{que simplificando se tiene} \quad u^2 + v^2 = u$$

2.2 Algunos Tipos de funciones

2.2.1 Función polinomial de grado n

Es una expresión de la forma

$$f(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + ... + a_n z^n \text{ con } \quad a_n \neq 0, \text{ y } \ a_i \epsilon \mathbb{C}$$

Ejemplo 2.10 $f(z) = 1 + i$ *es una función polinomial*

Ejemplo 2.11 $f(z) = z + 5i$ *es una función polinomial*

Ejemplo 2.12 $f(z) = 5iz^4 + 3z^3 - 2i$ *es una función polinomial*

2.2.2 Función Racional

Es una expresión de la forma $\dfrac{f(z)}{g(z)}$, donde $f(z)$ y $g(z)$ son funciones polinomiales y $g(z) \neq 0$

Ejemplo 2.13 $f(z) = \dfrac{z+5i}{5iz^4+3z^3-2i}$ *es una función racional*

Ejemplo 2.14 $f(z) = \dfrac{1}{z^3+2iz^2-5}$ *es una función racional*

Ejemplo 2.15 $f(z) = \dfrac{z^5+z^3-i}{z^4+z-4}$ *es una función racional*

2.2.3 Función Exponencial

Se pretende definir e^z para z complejo de tal manera que se tenga la función exponencial real cuando z es real.
Se recuerda que

$$e^a = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{n!} \quad \text{y} \quad \text{si} \quad a = \theta i \quad \text{entonces}$$

$$\begin{aligned} e^{i\theta} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(i\theta)^n}{n!} = 1 + i\theta + \frac{(i\theta)^2}{2!} + \frac{(i\theta)^3}{3!} + \frac{(i\theta)^4}{4!} + ... + ... \\ &= 1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} + ... + i(\theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} + ...) \\ &= \cos\theta + i\sin\theta \end{aligned}$$

luego, una manera de definir la función exponencial es

$$e^z = e^{x+iy} = e^x(\cos y + i \sin y) \text{ y así}$$

$$|e^z| = e^x \quad \text{y} \quad \text{el} \quad \arg(e^z) = y + 2n\pi, \quad n\epsilon\mathbb{Z}$$

Ejemplo 2.16 $e^{\pi i} = e^0(\cos\pi + i\sin\pi)$

Ejemplo 2.17 $e^{2+3i} = e^2(\cos 3 + i\sin 3)$

Ejemplo 2.18 $e^{2-3i} = e^2(\cos(-3) + i\sin(-3)) = e^2(\cos 3 - i\sin 3)$

Ejemplo 2.19 $e^i = e^0(\cos 1 + i\sin 1)$

Ejemplo 2.20 *Como*

$$\frac{(1+i)^2}{1-i} = -1+i$$

entonces

$$e^{\left(\frac{(1+i)^2}{1-i}\right)} = e^{-1+i} = e^{-1}\left(\cos 1 + i\sin 1\right)$$

y así

$$a)\quad \left|e^{\left(\frac{(1+i)^2}{1-i}\right)}\right| = \left|e^{-1+i}\right| = \left|e^{-1}\left(\cos 1 + i\sin 1\right)\right| = e^{-1}\sqrt{\cos^2 1 + \sin^2 1} = e^{-1}$$

$$b)\quad \operatorname{Re}\left(e^{\left(\frac{(1+i)^2}{1-i}\right)}\right) = \operatorname{Re}\left(e^{-1+i}\right) = \operatorname{Re}(e^{-1}\left(\cos 1 + i\sin 1\right)) = e^{-1}\cos 1$$

$$c)\quad \operatorname{Im}\left(e^{\left(\frac{(1+i)^2}{1-i}\right)}\right) = \operatorname{Im}\left(e^{-1+i}\right) = \operatorname{Im}(e^{-1}\left(\cos 1 + i\sin 1\right)) = e^{-1}\sin 1$$

Algunas propiedades

1.

$$e^z \neq 0$$

Solución. Suponga que $e^z = 0$, Como $e^z = e^x(\cos y + i\sin y) = 0$ entonces $e^x\cos y = 0$ y $e^x\sin y = 0$ lo que implica que $\cos y = 0$ y $\sin y = 0$ (pues e^x es diferente de cero) y de aquí $y = n\pi$, luego como $\cos n\pi = (-1)^n \neq 0$ entonces $e^x\cos n\pi$ no es cero, luego se concluye que $e^z \neq 0$

2.

$$e^{z+2n\pi i} = e^z$$

Solución. $e^{z+2n\pi i} = e^{(a+bi)+2n\pi i} = e^{a+(b+2n\pi)i} = e^a(\cos(b+2n\pi) + i\sin(b+2n\pi))$
$= e^a(\cos b + i\sin b) = e^z$

3.

$$e^z = 1 \text{ si y solo si } \text{z} = 2n\pi i$$

Solución $e^z = 1$ sii $e^a(\cos b + i \sin b) = 1 = 1 + 0i$ sii $e^a \cos b = 1$ y $e^a \sin b = 0$ y elevando al cuadrado y sumando se tiene que $e^{2a}\cos^2 b + e^{2a}\sin^2 b = e^{2a} = 1$ luego $a = 0$, por tanto

$\cos b = 1$ y $\sin b = 0$ sii $b = 2n\pi$ y $a = 0$ sii $z = 2n\pi i$

4.

$$e^z = e^w \quad \text{sii} \;\; \text{z} = w + 2n\pi i$$

Solución Aplicar la propiedad #3

5.

$$e^{z_1} \cdot e^{z_2} = e^{z_1 + z_2}$$

Solución Sean $z_1 = a + bi \quad z_2 = c + di$ entonces

$$\begin{aligned} e^{z_1} \cdot e^{z_2} &= e^{a+bi} \cdot e^{c+di} = e^a(\cos b + i \sin b)e^c(\cos d + i \sin d) \\ &= e^a e^c[(\cos b \cos d - \sin b \sin d) + i(\sin b \cos d + \cos b \sin d)] \\ &= e^{a+c}(\cos(b+d) + i \sin(b+d)) = e^{(a+c)+i(b+d)} = e^{z_1+z_2} \end{aligned}$$

Ejemplo 2.21

$$e^{\frac{\pi i}{4} + \frac{\ln 2}{2}} = e^{\frac{\pi i}{4}} e^{\frac{\ln 2}{2}} = \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4}\right) e^{\ln \sqrt{2}} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\sqrt{2} = 1 + i$$

6.

$$\frac{e^{z_1}}{e^{z_2}} = e^{z_1 - z_2}$$

Solución Análoga a la anterior

7.

$$\overline{e^z} = e^{\bar{z}}$$

Solución

$$\begin{aligned} \overline{e^z} &= \overline{e^x(\cos y + i \sin y)} = e^x \cos y - ie^x \sin y = e^x(\cos y - i \sin y) \\ &= e^x(\cos(-y) + i \sin(-y)) = e^x e^{-iy} = e^{x-iy} = e^{\bar{z}} \end{aligned}$$

8. Si $z_1 = re^{i\theta}$ y $z_2 = de^{i\delta}$ entonces

$$z_1 z_2 = rde^{i\theta}e^{i\delta} = rde^{i(\theta+\delta)} = rde^{i\arg z_1 z_2}$$

entonces

$$e^{i(\theta+\delta)} = e^{i\arg z_1 z_2}$$

por tanto

$$e^{i(\arg z_1 z_2 - (\theta+\delta))} = 1 \quad \text{luego} \quad \arg z_1 z_2 - (\theta + \delta) = 2n\pi$$

y así

$$\arg z_1 z_2 = \arg z_1 + \arg z_2 + 2n\pi \text{ para algún } n\epsilon\mathbb{Z}$$

En forma análoga se tiene que

$$\arg \frac{z_1}{z_2} = \arg z_1 - \arg z_2 + 2n\pi \text{ para algún } n\epsilon\mathbb{Z} \text{ y}$$

$$\arg z^n = n \arg z + 2p\pi \text{ para algún } p\epsilon\mathbb{Z}$$

2.2.4 La función logaritmo

Hay mucha formas de hacer un estudio de la función logaritmo natural con valores reales, pero cualquiera que sea el camino escogido, una de las propiedades básicas es que, para cualquier y y para $x > 0$, $y = \ln x$ sii $x = e^y$. Se utilizará esta propiedad para definir en forma análoga la función logaritmo natural compleja, que notaremos como $\log z$ para distinguirla de la función logaritmo natural real. Así que definimos para $z \neq 0$

$$w = \log z \quad \text{si y solo si} \quad z = e^w$$

Para tener una manera explícita de calcular $\log z$ entonces escribiremos z en su forma polar $z = re^{i\theta}$, y sea $w = u + iv$ (hallaremos u y v). Consideremos la ecuación $z = e^w$ que queremos resolver para w. Así

$$z = re^{i\theta} = e^w = e^u e^{iv}$$

tomando el módulo en ambos lados de la ecuación anterior se tiene que

$$|z| = \left|re^{i\theta}\right| = |r|\left|e^{i\theta}\right| = \left|e^u e^{iv}\right| = |e^u|\left|e^{iv}\right|$$

como $\left|e^{i\theta}\right| = |e^{iv}| = 1$, pues θ y v son reales se tiene que

$$r = e^u$$

y como r y e^u son números reales, tomando logaritmo natural en ambos lados de la igualdad se concluye que

$$u = \ln r = \ln |z|$$

donde $\ln r$ es la función logaritmo natural real evaluada en r
Ahora como $r = e^u$ entonces de $z = re^{i\theta} = e^u e^{i\theta} = e^u e^{iv}$ se tiene que $e^{i\theta} = e^{iv}$, es decir $e^{i(v-\theta)} = 1$ y de aquí $v - \theta = 2n\pi$ es decir, $v = \theta + 2n\pi$ luego

$$w = u + iv = \log z = \ln |z| + i(\theta + 2n\pi) \quad n\epsilon\mathbb{Z}$$

Como θ es cualquier argumento particular de z, el símbolo $\arg z$ contiene todos los números de la forma $\theta + 2n\pi$ y podemos escribir

$$\log z = \ln |z| + i \arg z$$

Observemos que hay un número infinito de logarimos naturales diferentes para un número complejo z diferente de cero, pero todos difieren en múltiplos de 2π
Como el símbolo $\log z$ denota un conjunto infinito de números complejos distintos, $\log z$ no es una función como usulmente la conocemos Para tener la función logaritmo compleja, definimos el logaritmo principal de $z \neq 0$ por

$$Logz = \ln |z| + iArgz$$

utilizando el valor principal del argumento y así $Logz$ es una función
La función logaritmo puede definirse para otras bases reales distintas de e. Si $z = a^w$ entonces $w = \log_a z = \dfrac{\log z}{\log a}$, donde $a > 0$ y $a \neq 0, 1$ (Recuerde que $\log z$ es en este escrito el logaritmo natural de z)

Ejemplo 2.22 *El* $\log(-i)$ *se puede expresar como:*

$$\log(-i) = \ln |i| + i(\frac{3\pi}{2} + 2n\pi) = 0 + i(\frac{3\pi}{2} + 2n\pi) = i(\frac{3\pi}{2} + 2n\pi)$$

ó

$$\log(-i) = \ln |i| + i(-\frac{\pi}{2} + 2n\pi) = 0 + i(-\frac{\pi}{2} + 2n\pi) = i(-\frac{\pi}{2} + 2n\pi)$$

y el logaritmo principal $(Log(-i))$ *como*

$$Log(-i) = \ln |i| + i(-\frac{\pi}{2}) = 0 - \frac{i\pi}{2} = -\frac{\pi}{2}i$$

Ejemplo 2.23 *El* $\log(-1-i)$ *se puede expresar como:*

$$\log(-1-i) = \ln|-1-i| + i(\frac{5\pi}{4} + 2n\pi) = \ln\sqrt{2} + i(\frac{5\pi}{4} + 2n\pi)$$

ó

$$\log(-1-i) = \ln|-1-i| + i(\frac{-3\pi}{4} + 2n\pi) = \ln\sqrt{2} + i(-\frac{3\pi}{4} + 2n\pi)$$

y el logaritmo principal L$og(-1-i)$ como

$$Log(-1-i) = \ln|-1-i| + i(-\frac{3\pi}{4}) = \ln\sqrt{2} - \frac{3\pi}{4}i$$

Ejemplo 2.24 *El* $\log(\sqrt{3}-i)$ *se puede expresar como:*

$$\log(\sqrt{3}-i) = \ln\left|\sqrt{3}-i\right| + i(\frac{11\pi}{6} + 2n\pi) = \ln 2 + i(\frac{11\pi}{6} + 2n\pi)$$

ó

$$\log(\sqrt{3}-i) = \ln\left|\sqrt{3}-i\right| + i(-\frac{\pi}{6} + 2n\pi) = \ln 2 + i(-\frac{\pi}{6} + 2n\pi)$$

y el logaritmo principal $\left(Log(\sqrt{3}-i)\right)$ *como*

$$Log(\sqrt{3}-i) = \ln\left|\sqrt{3}-i\right| + i(-\frac{\pi}{6}) = \ln 2 - \frac{\pi}{6}i$$

Ejemplo 2.25 *El* $\log(-4)$ *se puede expresar como:*

$$\log(-4) = \ln|-4| + i(\pi + 2n\pi) = \ln 4 + i(\pi + 2n\pi)$$

ó

$$\log(-4) = \ln|-4| + i(-\pi + 2n\pi) = \ln 4 + i(-\pi + 2n\pi)$$

y el logaritmo principal $(Log(-4))$ *como*

$$Log(-4) = \ln|-4| + i\pi = \ln 4 + \pi i$$

Ejemplo 2.26 *Como*

$$z = \frac{(1+i)^2}{1-i} = -1 + i$$

entonces

$$\log z = \log\left(\frac{(1+i)^2}{1-i}\right) = \log(-1+i) = \ln\sqrt{2} + \frac{3\pi i}{4} + 2n\pi i$$

Algunas propiedades

Si z y w son números complejos diferentes de cero entonces

1.

$$\log zw = \log z + \log w \ + 2n\pi i \quad \text{para algún entero n}$$

Solución

$$\log zw = \ln|zw| + i \arg zw = \ln|z| + \ln|w| + i(\arg z + \arg w + 2n\pi) =$$

$$= \ln|z| + i \arg z + \ln|w| + i \arg w + 2n\pi i = \log z + \log w + 2n\pi i$$

2.

$$\log \frac{z}{w} = \log z - \log w + 2n\pi i$$

Solución. Ejercicio

3.

$$\log z^n = n \log z + 2p\pi i$$

Solución

$$\begin{aligned} \log z^n &= \ln|z^n| + i \arg z^n = \ln|z|^n + i \arg z^n = n \ln|z| + in \arg z + 2p\pi i \\ &= n(\ln|z| + i \arg z) + 2p\pi i = n \log z + 2p\pi i \end{aligned}$$

4.

$$e^{\log z} = z$$

Solución

$$e^{\log z} = e^{\ln|z| + i \arg z} = e^{\ln|z|} e^{i \arg z} = |z| \, e^{i \arg z} = |z| \, e^{i(\theta + 2n\pi)} = |z| \, (\cos\theta + i \sin\theta) = x + iy = z$$

5.

$$\log e^z = z + 2n\pi i$$

Solución

$$\log e^z = \ln|e^z| + i\arg e^z = \ln\left|e^x e^{iy}\right| + i\arg e^x e^{iy} = \ln|e^x| + \ln\left|e^{iy}\right| + i(\arg e^x e^{iy})$$

$$\ln|e^x| + 0 + i\arg(e^x e^{iy}) = x + i(y + 2n\pi) = z + 2n\pi i$$

Estas igualdades son válidas como igualdades entre conjuntos, así por ejemplo

$$\log i \cdot i = \log i + \log i + 2p\pi i$$

$$\text{pero } \log i \cdot i = \log i^2 = \log(-1) = \ln|-1| + i(\pi + 2n\pi) = i(\pi + 2n\pi) \text{ y}$$

$$2\log i + 2p\pi i = 2\left(\ln|1| + i(\frac{\pi}{2} + 2n\pi)\right) + 2p\pi i = i(\pi + 2(2n)\pi) + 2p\pi i$$

entonces un elemento de $\log i^2$ es por ejemplo $i(\pi + 2.2\pi) = 5\pi i$ cuando $n = 2$ y este corresponde a un elemento de $2\log i + 2p\pi i$ que es cuando $n = 1$ y $p = 0$, es decir $i(\pi + 2(1+1)\pi) = 5\pi i$.
El valor principal del logaritmo de z, que se denota por $Logz$ es el valor que se obtiene cuando se usa el argumento principal de z y ninguna de las igualdades anteriores es válida con argumento principal

Ejemplo 2.27

$$Log(-1.i) \neq Log(-1) + Logi \quad pues$$

$$Log(-1.i) = Log(-i) = \ln|-i| + iArg(-i) = -\frac{\pi}{2}i \quad y$$

$$Log(-1) + Logi = \ln|-1| + iArg(-1) + \ln|i| + iArg(i) = \pi i + \frac{\pi}{2}i = \frac{3\pi}{2}i$$

Ejemplo 2.28 *Mostrar que*

$$\log(i)^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{3}\log i + 2p\pi i$$

En efecto

$$\begin{aligned}
\log(i)^{\frac{1}{3}} &= \log\left(\cos\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right)\right)^{\frac{1}{3}} \\
&= \log\left(\cos\left(\frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{3}\right)\right) = \\
&= \log\left(e^{\left(\frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{3}\right)i}\right) = \ln\left|e^{\left(\frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{3}\right)i}\right| + i\arg e^{\left(\frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{3}\right)i} \\
&= 0 + \left(\frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{3}\right)i + 2n\pi i \quad k = 0,1,2 \ n\epsilon\mathbb{Z}
\end{aligned}$$

Ahora

$$\begin{aligned}\frac{1}{3}\log i + 2p\pi i &= \frac{1}{3}(\ln|i| + i\arg i) + 2p\pi i\\ &= \frac{1}{3}i\left(\frac{\pi}{2} + 2n\pi\right) + 2p\pi i = \left(\frac{\pi}{6} + \frac{2n\pi}{3}\right)i \ + 2p\pi i\end{aligned}$$

y así se tiene que

$$\log(i)^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{3}\log i + 2p\pi i$$

2.2.5 Potencias de la forma $\mathbf{z}^w$

Utilizando las funciones logaritmo y exponencial complejas, podemos definir z^w para cualquier número complejo $z \neq 0$ y cualquier número complejo w. Recordemos que si $x > 0$ y y es cualquier número real

$$x^y = e^{y\ln x}$$

Utilizando esto como modelo, definimos z^w por la ecuación

$$z^w = e^{w\log z + 2p\pi i} = e^{w\log z}$$

Como $\log z$ tiene un número infinito de valores, z^w también

Podemos definir una función llamada el valor principal de z^w, utilizando la función logaritmo principal

Algunas propiedades

Sea z un número complejo diferente de cero y sean α y β números cualquiera entonces

1.

$$z^\alpha \cdot z^\beta = z^{\alpha+\beta}$$

Solución

$$z^\alpha \cdot z^\beta = e^{\alpha\log z} \cdot e^{\beta\log z} = e^{(\alpha+\beta)\log z} = z^{\alpha+\beta}$$

2.

$$\frac{z^\alpha}{z^\beta} = z^{\alpha-\beta}$$

Solución Análoga a la anterior

3.

$$(z^{\alpha})^{\beta} = z^{\alpha\beta}$$

Solución Ejercicio

Ejemplo 2.29

$$\begin{aligned} i^i &= e^{i\log i} = e^{i(\ln|i|+i(\frac{\pi}{2}+2n\pi))} = e^{i^2(\frac{\pi}{2}+2n\pi)} = e^{-(\frac{\pi}{2}+2n\pi)}, \;\; \textit{por lo tanto} \\ \mathrm{Re}(i^i) &= \mathrm{Re}(e^{-(\frac{\pi}{2}+2n\pi)}) = e^{-(\frac{\pi}{2}+2n\pi)} \quad\; e \;\; \mathrm{Im}(i^i) = \mathrm{Im}(e^{-(\frac{\pi}{2}+2n\pi)}) = 0 \end{aligned}$$

Ejemplo 2.30

$$\begin{aligned} 2^{3-i} &= e^{(3-i)\log 2} = e^{(3-i)(\ln 2+i(0+2n\pi)} = e^{(3-i)(\ln 2+i2n\pi)} = e^{3(\ln 2+i2n\pi)-i(\ln 2+i2n\pi)} \\ &= e^{3\ln 2+2n\pi+i(6n\pi-\ln 2)} = e^{3\ln 2+2n\pi}e^{i(6n\pi-\ln 2)} \\ &= 8e^{2n\pi}\left(\cos(6n\pi-\ln 2)+i\sin(6n\pi-\ln 2)\right) \quad \textit{luego} \end{aligned}$$

$$\mathrm{Re}\left(2^{3-i}\right) = 8e^{2n\pi}\cos(6n\pi-\ln 2), \quad e \quad \mathrm{Im}\left(2^{3-i}\right) = 8e^{2n\pi}\sin(6n\pi-\ln 2)$$

Ejemplo 2.31 *Mostrar que*

$$\log(e^{1+3\pi i}) = 1+3\pi i+2k\pi i$$

En efecto

$$e^z = e^{1+3\pi i} = e\cdot e^{3\pi i} = e\left(\cos 3\pi + i\sin 3\pi\right) = e\left(-1\right) = -e \quad y$$

$$\log(e^{1+3\pi i}) = \log(-e) = \ln|-e| + i(\pi+2n\pi) = 1+i(\pi+2n\pi) = 1+i(3\pi+2k\pi)$$

$$= 1+3\pi i+2k\pi i \;\; \textit{(para n=1), entonces} \;\; \log(e^{1+3\pi i}) = 1+3\pi i+2k\pi i$$

Ejemplo 2.32

$$\begin{aligned} \log(e^{\frac{\pi}{3}i}) &= \ln\left|e^{\frac{\pi}{3}i}\right| + i(\frac{\pi}{3}+2n\pi) = i(\frac{\pi}{3}+2n\pi), \;\; \textit{por} \;\; \textit{lo tanto} \\ \mathrm{Re}(\log e^{\frac{\pi i}{3}}) &= 0 \quad e \quad \textit{Im}(\log e^{\frac{\pi i}{3}}) = \frac{\pi}{3}+2n\pi \end{aligned}$$

2.2.6 Funciones trigonométricas

Para motivar la definición recordemos que si θ es real,

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta \quad y \quad e^{-i\theta} = \cos(-\theta) + i\sin(-\theta) = \cos\theta - i\sin\theta$$

Si sumamos estas ecuaciones obtenemos que

$$e^{i\theta} + e^{-i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta + \cos\theta - i\sin\theta = 2\cos\theta \ \text{ luego}$$

$$\cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$$

y si las restamos, se tiene que

$$e^{i\theta} - e^{-i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta - (\cos\theta - i\sin\theta) = 2i\sin\theta \ \text{ luego}$$

$$\sin\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$$

y estas igualdades sugieren que se defina para cualquier número complejo z,

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} \quad \text{y} \quad \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$$

entonces

$$\cos i = \frac{e^{ii} + e^{-ii}}{2} = \frac{e^{-1} + e^{1}}{2}$$

$$\begin{aligned} \sin\left(\frac{\pi}{2} + i\ln 2\right) &= \frac{e^{i\left(\frac{\pi}{2} + i\ln 2\right)} - e^{-i\left(\frac{\pi}{2} + i\ln 2\right)}}{2i} = \frac{e^{\frac{\pi i}{2}} e^{-\ln 2} - e^{-\frac{\pi i}{2}} e^{\ln 2}}{2i} \\ &= \frac{i\left(\frac{1}{2}\right) + 2i}{2i} = \frac{5}{4} \end{aligned}$$

$$\sin i = \frac{e^{i.i} - e^{-i.i}}{2i} = \frac{e^{-1} - e^{1}}{2i} = -i\left(\frac{e^{-1} - e^{1}}{2}\right) = i\sinh 1$$

Las demás funciones se definen como

$$\tan z = \frac{\sin z}{\cos z}, \quad \cot z = \frac{\cos z}{\sin z}, \quad \sec z = \frac{1}{\cos z}, \quad \csc z = \frac{1}{\sin z}$$

Algunas propiedades

1. $\cos^2 z + \sin^2 z = 1$

Solución

$$\begin{aligned}\cos^2 z + \sin^2 z &= \left(\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}\right)^2 + \left(\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}\right)^2 = \frac{e^{2iz}+2+e^{-2iz}}{4} + \frac{e^{2iz}-2+e^{-2iz}}{4i^2}\\ &= \frac{e^{2iz}}{4} + \frac{1}{2} + \frac{e^{-2iz}}{4} - \frac{e^{2iz}}{4} + \frac{1}{2} - \frac{e^{-2iz}}{4} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1\end{aligned}$$

2. $1 + \tan^2 z = \sec^2 z$

3. $1 + \cot^2 z = \csc^2 z$

4. $e^{iz} = \cos z + i \sin z$

Solución $\cos z + i\sin z = \dfrac{e^{iz}+e^{-iz}}{2} + i\left(\dfrac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}\right) = e^{iz}$

5. $\sin(-z) = -\sin z$ y $\cos(-z) = \cos z$

Solución $\cos(-z) = \dfrac{e^{-iz}+e^{iz}}{2} = \dfrac{e^{iz}+e^{-iz}}{2} = \cos z$

6. $e^{-iz} = \cos z - i\sin z$ (ejercicio)

7. $\sin(z+w) = \sin z\cos w + \cos z \sin w$

Solución

$$\begin{aligned}\sin(z+w) &= \frac{e^{i(z+w)} - e^{-i(z+w)}}{2i} = \frac{e^{iz}e^{iw} - e^{-iz}e^{-iw}}{2i} =\\ &= \frac{i\cos z\sin w + i\sin z\cos w + i\cos z\sin w + i\sin z\cos w}{2i} =\\ &= \frac{2i\cos z\sin w + 2i\sin z\cos w}{2i} = \sin z\cos w + \cos z\sin w\end{aligned}$$

8. $\sin(z-w) = \sin z\cos w - \cos z\sin w$

9. $\cos(z+w) = \cos z\cos w - \sin z\sin w$

10. $\cos(z-w) = \cos z\cos w + \sin z\sin w$

11. $\sin 2z = 2\sin z\cos z$

12. $\cos 2z = \cos^2 z - \sin^2 z$

13. $\cos^2 z = \dfrac{1+\cos 2z}{2}$

14. $\sin iz = i\sinh z$

Solución $\sin iz = \dfrac{e^{-z}-e^{z}}{2i} = i\left(\dfrac{e^{z}-e^{-z}}{2}\right) = i\sinh z$

15. $\cos iz = \cosh z$

16. $\sin z = \sin(x+iy) = \sin x\cosh y + i\cos x\sinh y$

Solución $\sin z = \sin(x+iy) = \sin x\cos iy + \cos x\sin iy = \sin x\cosh y + i\cos x\sinh y$

17. $\cos z = \cos(x+iy) = \cos x\cosh y - i\sin x\sinh y$

Solución $\cos z = \cos(x+iy) = \cos x\cos iy - \sin x\sin iy = \cos x\cosh y - i\sin x\sinh y$

18. $\sin(z+2n\pi) = \sin z \qquad \cos(z+2n\pi) = \cos z$

19. $\cosh iz = coz$ y $\sinh iz = i\sin z$

2.2.7 funciones hiperbólicas

Las funciones hiperbólicas complejas estan definidas por

$$\begin{aligned}
\sinh z &= \frac{e^{z}-e^{-z}}{2} \quad , \quad \cosh z = \frac{e^{z}+e^{-z}}{2} \quad \tanh z = \frac{\sinh z}{\cosh z}\\
\coth z &= \frac{\cosh z}{\sinh z} \quad \sec hz = \frac{1}{\cosh z} \quad \csc hz = \frac{1}{\sinh z}
\end{aligned}$$

Algunas propiedades

1. $\cosh^2 z - \sinh^2 z = 1$

$$\text{En efecto : } \cosh^2 z - \sinh^2 z = \left(\frac{e^{z}+e^{-z}}{2}\right)^2 - \left(\frac{e^{z}-e^{-z}}{2}\right)^2 =$$

$$= \frac{e^{2z}+2+e^{-2z}}{4} - \frac{e^{2z}-2+e^{-2z}}{4} = 1$$

2. $1-\tanh^2 z = \sec h^2 z$

3. $\coth^2 z - 1 = \csc h^2 z$

4. $\sinh(-z) = -\sinh z$ y $\cosh(-z) = \cosh z$

5. $\cosh(z \pm w) = \cosh z \cosh w \pm \sinh z \sinh w$

6. $\sinh(z \pm w) = \sinh z \cosh w \pm \cosh z \sinh w$

7. $\sin iz = i \sinh z$

8. $\cos iz = \cosh z$

9. $\sinh iz = i \sin z$

10. $\cosh iz = \cos z$

11. $\cosh z = \cosh x \cos y + i \sinh x \sin y$

$$\text{En efecto : } \cosh z = \cosh(x+iy) = \cosh x \cosh iy + \sinh x \sinh iy =$$

$$= \cosh x \cos y + i \sinh x \sin y$$

2.2.8 Funciones trigonométricas e hiperbólicas inversas

Si conocemos el logaritmo de un número complejo w, podemos encontrar el número por medio de la identidad $e^{\log w} = w$, pues sabemos que la función exponencial es la inversa de la función logaritmo.
Si conocemos el seno de un número complejo w, surge la pregunta como hallar w y si este w es único. En efecto

$$w = \sin^{-1} z \ \text{ sii } \ z = \sin w = \frac{e^{iw} - e^{-iw}}{2i} = \frac{e^{2iw} - 1}{2ie^{iw}} \ \text{entonces } \ z = \frac{e^{2iw} - 1}{2ie^{iw}} \ \text{y de aquí}$$

$$e^{2iw} - 1 = 2zie^{iw} \ \text{ luego } e^{2iw} - 2zie^{iw} - 1 = 0 \ \text{ y solucionando esta ecuación se tiene}$$

$$e^{iw} = \frac{2iz \pm \sqrt{(2zi)^2 + 4}}{2} = iz \pm \sqrt{1-z^2} \ \text{ y tomando logaritmo a ambos lados de la ecuación}$$

$$\begin{aligned} \text{se tiene que } iw &= \log\left(iz \pm \sqrt{1-z^2}\right) + 2n\pi i, \text{ es decir} \\ w &= \sin^{-1} z = -i\log\left(iz \pm \sqrt{1-z^2}\right) + 2n\pi \end{aligned}$$

donde $\sqrt{1-z^2}$ es uno de los dos valores de $\left(1-z^2\right)^{\frac{1}{2}}$ luego

$$\sin^{-1} z = -i\log\left(iz \pm \sqrt{1-z^2}\right) + 2n\pi$$

En forma análoga se puede demostrar que

$$\cos^{-1} z = -i\log\left(z \pm \sqrt{z^2-1}\right) + 2n\pi$$

$$\tan^{-1} z = \frac{i}{2}\log\frac{i+z}{i-z} + 2n\pi = \frac{i}{2}\log\frac{1-iz}{1+iz} + 2n\pi$$

$$\csc^{-1} z = \frac{1}{i}\log\left(\frac{i \pm \sqrt{z^2-1}}{z}\right) + 2n\pi$$

$$\sinh^{-1} z = \log\left(z \pm \sqrt{1+z^2}\right) + 2n\pi$$

$$\cosh^{-1} z = \log\left(z \pm \sqrt{z^2-1}\right) + 2n\pi$$

$$\tanh^{-1} z = \frac{1}{2}\log\frac{1+z}{1-z} + 2n\pi$$

Algunos ejemplos y algunas ecuaciones

Ejemplo 2.33 *Solucionar la ecuación* $az^2 + bz + c = 0$ *Multiplique ambos lados por* $4a$ *para obtener*

$$4a^2z^2 + 4abz + 4ac = 0$$

ahora sumemos y restemos b^2*, es decir,*

$$4a^2z^2 + 4abz + b^2 - b^2 + 4ac = 0$$

y organizando el cuadrado perfecto

$$(2az+b)^2 = b^2 - 4ac$$

y de aquí

$$2az + b = \left(b^2 - 4ac\right)^{\frac{1}{2}}$$

y así

$$z=\frac{-b+(b^2-4ac)^{\frac{1}{2}}}{2a}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

Ejemplo 2.34 *Solucionar la ecuación*

$$\cosh z=0$$

Como

$$\cosh z=\cosh x\cos y+i\sinh x\sin y=0$$

entonces

$$\cosh x\cos y=0 \quad y \quad \sinh x\sin y=0$$

y como

$$\cosh x\neq 0$$

luego

$$\cos y=0 \quad \textit{por lo tanto} \quad y=(2n+1)\frac{\pi}{2} \quad n\epsilon\mathbb{Z}$$

Sin embargo

$$\sin\left((2n+1)\frac{\pi}{2}\right)\neq 0$$

esto implica que $\sinh x=0$ *o que* $x=0$ *por tanto*

$$\cosh z=0 \quad \textit{sii} \quad z=0+(2n+1)\frac{\pi}{2}i$$

ó

$$\cosh z=\frac{e^z+e^{-z}}{2}=0 \textit{ entonces } e^z+e^{-z}=0=e^z+\frac{1}{e^z}=e^{2z}+1=0$$

luego

$$e^{2z}=-1 \quad \textit{por tanto} \quad 2z=(\pi+2n\pi)\,i \quad y \quad \textit{así} \quad z=\left(\frac{\pi}{2}+n\pi\right)i$$

Ejemplo 2.35 *Solucionar la ecuación*

$$\cos z=0$$

Como

$$\cos z=\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}=0=e^{2iz}+1 \textit{ sii } e^{-2iz}=-1=e^{(2n+1)\pi i}$$

por lo tanto

$$2iz=(2n+1)\pi i \quad \textit{así que } z=\frac{(2n+1)\pi}{2}$$

ó también la podemos solucionar así

$$\cos z = \cos x \cosh y - i \sin x \sinh y = 0 \quad sii \qquad \cos x \cosh y = 0$$

y $-\sin x \sinh y = 0$, *puesto que* $\cosh y$ *nunca se anula, se tendrá que* $\cos x = 0$ *de donde* $x = (2n+1)\frac{\pi}{2}$ $n\epsilon\mathbb{Z}$, *puesto que* $\sin\left((2n+1)\frac{\pi}{2}\right) \neq 0$ *y* $\sinh y = 0$ *sii* $y = 0$ *se concluye que*

$$\cos z = 0 \qquad sii \qquad z = (2n+1)\frac{\pi}{2} + 0i$$

Ejemplo 2.36 *Solucionar la ecuación*

$$\cos z = 2$$

En efecto :

$$2 = \cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = \frac{u + u^{-1}}{2} \text{ con } u = e^{iz}$$

luego

$$\frac{u + u^{-1}}{2} = 2 \text{ por tanto } u + u^{-1} = 4 \text{ y si multiplicamos por } u \text{ se obtiene}$$

$$u^2 - 4u + 1 = 0$$

cuya solución es

$$u = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 4}}{2} = 2 \pm \sqrt{3}$$

y así

$$e^{iz} = 2 \pm \sqrt{3} \text{ y tomando logaritmo se tiene}$$

$$iz = \log\left(2 \pm \sqrt{3}\right) + 2n\pi i \text{ , es decir,}$$

$$z = -i \log\left(2 \pm \sqrt{3}\right) + 2n\pi = -i\left(\ln\left|2 \pm \sqrt{3}\right| + 2n\pi i\right) + 2p\pi$$

Ejemplo 2.37 *Solucionar la ecuación*

$$\cos z = \frac{3}{4} + \frac{i}{4}$$

En efecto :

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = \frac{3}{4} + \frac{i}{4} \text{ por lo tanto}$$

$$e^{iz} + e^{-iz} = \frac{3}{2} + \frac{i}{2} \text{ y así } e^{2iz} - \left(\frac{3}{2} + \frac{i}{2}\right)e^{iz} + 1 = 0 \text{ y}$$

$$e^{iz} = \frac{\left(\frac{3}{2}+\frac{i}{2}\right) \pm \sqrt{\left(\frac{3}{2}+\frac{i}{2}\right)^2 - 4}}{2} = \frac{\left(\frac{3}{2}+\frac{i}{2}\right) \pm \sqrt{-2+\frac{3i}{2}}}{2}$$

Ahora como $-2+\frac{3i}{2} = (x+iy)^2 = x^2-y^2+2ixy$ *entonces* $x^2-y^2 = -2$ *y* $2xy = 3/2$. $y = \frac{3}{4x}$ *y así* $x^2-y^2 = x^2-\frac{9}{16x^2} = -2$ *luego* $16x^4+32x^2-9 = 0 = (2x-1)(2x+1)(2x-3i)(2x+3i)$ *por tanto* $x = \pm 1/2$ *y así las raices cuadradas de* $-2+\frac{3i}{2}$ *son* $z = \pm\left(\frac{1}{2}+\frac{3i}{2}\right)$ *por tanto*

$$e^{iz} = \frac{\left(\frac{3}{2}+\frac{i}{2}\right) \pm \sqrt{\left(\frac{3}{2}+\frac{i}{2}\right)^2 - 4}}{2} = \frac{\left(\frac{3}{2}+\frac{i}{2}\right) \pm \left(\frac{1}{2}+\frac{3i}{2}\right)}{2}$$

por tanto $e^{iz} = 1+i$ *y* $e^{iz} = \frac{1-i}{2}$ *y así* $iz = log(1+i)+2p\pi i$ *es decir* $z = -i\log(1+i)+2p\pi$ *y* $iz = log(\frac{1-i}{2}) + 2p\pi i$, *es decir* $z = -i\log(\frac{1-i}{2}) + 2p\pi$

Ejemplo 2.38 *Solucionar la ecuación*

$$e^z = e^{2+i}$$

En efecto :

$$e^z = e^{2+i} \quad sii \quad e^{z-(2+i)} = 1 \quad sii \quad z-(2+i) = 2n\pi i, \ \ es\ decir, \ \ z = (2+i)+2n\pi i$$

Ejemplo 2.39 *Solucionar la ecuación*

$$e^z = 1+i$$

En efecto

$$e^z = e^{x+iy} = e^x\cos y + ie^x \sin y = 1+i$$

por tanto $e^x\cos y = 1$ *y* $e^x \sin y = 1$. *Elevando al cuadrado y sumando se tiene que*

$$(e^x\cos y)^2 + (e^x\sin y)^2 = e^{2x} = 1+1 = 2$$

por tanto $x = ln\sqrt{2}$ *y dividiendo se tiene que* $tany = 1$ *sii* $y = \pi/4$ *luego la solución es*

$$z = x+iy = ln\sqrt{2} + i\left(\frac{\pi}{4}+2n\pi\right)$$

Ejemplo 2.40 *Solucionar la ecuación*

$$\log(i-z) = 1$$

En efecto

$$e^{\log(i-z)} = e \ \ sii \ \ i-z = e \ \ sii \ \ z = i-e$$

Ejemplo 2.41 *a) Hallar los valores de* $\sin^{-1} 1$. *En efecto: Como*

$$\sin^{-1} z = -i \log\left(iz \pm \sqrt{1-z^2}\right) + 2n\pi$$

entonces

$$\sin^{-1} 1 = -i \log i + 2n\pi = -i\left(\ln|i| + \frac{\pi}{2}i\right) + 2n\pi = \frac{\pi}{2} + 2n\pi$$

por lo tanto

$$\sin^{-1} 1 = \frac{\pi}{2} + 2n\pi$$

b) Hallar los valores de $\sin^{-1} 2$. En efecto: Como

$$\sin^{-1} z = -i \log\left(iz \pm \sqrt{1-z^2}\right) + 2n\pi$$

entonces (para $n = 0$)

$$\sin^{-1} 2 = -i\log\left(2i \pm \sqrt{1-4}\right) = -i\log\left(2i \pm \sqrt{3}i\right) =$$

$$\left\{\begin{array}{l} -i\log\left(2i+\sqrt{3}i\right) \\ -i\log\left(2i-\sqrt{3}i\right) \end{array}\right. = \begin{array}{l} -i\left[\ln\left|\left(2i+\sqrt{3}i\right)\right| + \left(\frac{\pi}{2}+2n\pi\right)i\right] = -i\left(\ln(2+\sqrt{3}) + \left(\frac{\pi}{2}+2n\pi\right)i\right) \\ -i\left[\ln\left|\left(2i-\sqrt{3}i\right)\right| + \left(\frac{\pi}{2}+2n\pi\right)i\right] = -i\left(\ln(2-\sqrt{3}) + \left(\frac{\pi}{2}+2n\pi\right)i\right) \end{array}$$

2.3 Límites de Funciones

2.3.1 Definición

Sea $f(z)$ una función definida en una vecindad de z_0, excepto posiblemente en z_0,entonces $\lim\limits_{z\to z_0} f(z) = L$ sii Dado $\epsilon > 0$, cualquiera, existe $\delta > 0$ tal que si

$$0 < |z - z_0| < \delta \text{ entonces } |f(z) - L| < \epsilon$$

La definición proporciona un medio para comprobar si un punto dado es un límite de una función, pero no proporciona un método para determinarlo, pues dice que el limite es L, si dado $\epsilon > 0$, por pequeño que sea, se puede hallar $\delta > 0$ tal que si $z\epsilon B(z_0, \delta)$ entonces sus imágenes estan en $B(L, \epsilon)$, es decir, $f(z)\epsilon B(L, \epsilon)$

Ejemplo 2.42 $\lim\limits_{z\to 1+i} \dfrac{z}{4} = \dfrac{1+i}{4}$, *pues dado* $\epsilon > 0$ *cualquiera, existe* $\delta > 0$ *tal que si*

$$0 < |z - (1+i)| < \delta \quad \textit{entonces} \quad \left|\frac{z}{4} - \frac{1+i}{4}\right| < \epsilon$$

En efecto $\left|\frac{z}{4}-\frac{1+i}{4}\right| = \left|\frac{z-(1+i)}{4}\right| < \epsilon$ *entonces* $|z-(1+i)| < 4\epsilon = \delta$, *luego dado* ϵ, *existe* $\delta > 0$. *(Pues basta con tomar* $4\epsilon = \delta$*). Ahora comprobemos que este* δ, *satisface la desigualdad, pues si* $|z-(1+i)| < \delta = 4\epsilon$ *entonces* $|z-(1+i)| < 4\epsilon$, *y de aquí* $\left|\frac{z-(1+i)}{4}\right| < \epsilon$ *es decir,* $\left|\frac{z}{4}-\frac{1+i}{4}\right| < \epsilon$

Ejemplo 2.43 $\lim\limits_{z\to z_0} z = z_0$ *(tomar* $\delta = \epsilon$*)*

Ejemplo 2.44 $\lim\limits_{z\to z_0} k = k$ *(Tomar cualquier* $\delta > 0$*)*

2.3.2 Algunas propiedades

Si $\lim\limits_{z\to z_0} f(z) = A$ y $\lim\limits_{z\to z_0} g(z) = B$ entonces

Suma

$$\lim_{z\to z_0}(f+g)(z) = \lim_{z\to z_0}(f(z)+g(z)) = \lim_{z\to z_0} f(z) + \lim_{z\to z_0} g(z) = A+B$$

Resta

$$\lim_{z\to z_0}(f-g)(z) = \lim_{z\to z_0}(f(z)-g(z)) = \lim_{z\to z_0} f(z) - \lim_{z\to z_0} g(z) = A-B$$

Multiplicación

$$\lim_{z\to z_0}(fg)(z) = \lim_{z\to z_0}(f(z)g(z)) = \lim_{z\to z_0} f(z)\cdot\lim_{z\to z_0} g(z) = A\cdot B$$

Division

$$\lim_{z\to z_0}\left(\frac{f}{g}\right)(z) = \lim_{z\to z_0}\frac{f(z)}{g(z)} = \frac{\lim\limits_{z\to z_0} f(z)}{\lim\limits_{z\to z_0} g(z)} = \frac{A}{B} \quad si\ B \neq 0$$

Ejemplo 2.45 *Como* $\lim\limits_{z\to i} 2z+2 = \lim\limits_{z\to i} 2\cdot\lim\limits_{z\to i} z + \lim\limits_{z\to i} 2 = 2i+2 \neq 0$ *entonces*

$$\lim_{z\to i}\frac{z^2+1+i}{2z+2} = \frac{\lim\limits_{z\to i} z\cdot\lim\limits_{z\to i} z + \lim\limits_{z\to i}(1+i)}{\lim\limits_{z\to i} 2\cdot\lim\limits_{z\to i} z + \lim\limits_{z\to i} 2} = \frac{i^2+1+i}{2i+2} = \frac{i}{2i+2}$$

Ejemplo 2.46

$$\lim_{z\to i}\frac{z-i}{z^2+1}=\lim_{z\to i}\frac{z-i}{(z+i)(z-i)}=\lim_{z\to i}\frac{1}{z+i}=\frac{1}{2i}$$

Se puede abreviar el estudio sobre límites, estableciendo una relación entre el límite de una función de variable compleja y los límites de una función de valores reales de dos variables reales así :
Si $f(z)=f(x+iy)=u(x,y)+iv(x,y),\ \ z=x+iy,\ \ z_0=a+ib$

$$\lim_{z\to z_0}f(z)=A+iB \ \text{ sii } \lim_{(x,y)\to(a,b)}u(x,y)+iv(x,y)=A+iB \ \text{ es decir, el}$$

$$\begin{aligned}\lim_{z\to z_0}f(z) &= A+iB \ \text{ existe y es igual a } A+iB \ \text{ sii}\\ & \text{el } \lim_{(x,y)\to(a,b)}u(x,y) \text{ existe y es } A \quad \text{y} \quad \text{el } \lim_{(x,y)\to(a,b)}v(x,y) \text{ existe y es } B\end{aligned}$$

Ejemplo 2.47

$$\lim_{z\to 2+i}z=\lim_{(x,y)\to(2,1)}x+iy=2+i$$

Ejemplo 2.48

$$\begin{aligned}\lim_{z\to 1+i}\frac{1}{z} &= \lim_{(x,y)\to(1,1)}\frac{1}{x+iy}=\lim_{(x,y)\to(1,1)}\frac{x-iy}{(x+iy)(x-iy)}=\lim_{(x,y)\to(1,1)}\frac{x-iy}{(x^2+y^2)}\\ &= \lim_{(x,y)\to(1,1)}\frac{x}{(x^2+y^2)}-\lim_{(x,y)\to(1,1)}\frac{iy}{(x^2+y^2)}=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i\end{aligned}$$

Ejemplo 2.49

$$\begin{aligned}\lim_{z\to 0}\frac{\bar{z}}{z} &= \lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x-iy}{x+iy}=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{(x-iy)(x-iy)}{x^2+y^2}=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^2-y^2-2xyi}{x^2+y^2}\\ &= \lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}-i\frac{2xy}{x^2+y^2} \ \textit{ no existe, ya que por ejemplo}\\ & \quad \lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} \ \ \textit{no existe, pues por el camino } (x,0) \ \ \textit{el}\end{aligned}$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{x^2}=1$$

$$\textit{y por el camino } (0,y) \ \textit{ el } \lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}=\lim_{y\to 0}\frac{-y^2}{y^2}=-1$$

Ejemplo 2.50

$$\lim_{z\to 0}\frac{1}{z}=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{1}{x+iy}=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{(x-iy)}{x^2+y^2}=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x}{x^2+y^2}-i\frac{y}{x^2+y^2}$$

este límite no existe, pues por el camino (x,x) el

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x}{x^2+y^2}$$

no existe, ya que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x}{x^2+y^2}=\lim_{x\to 0}\frac{x}{2x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{2x}$$

que no existe.

Escribir $\lim\limits_{z\to\infty} f(z)=\infty$ significa que $\lim\limits_{z\to\infty}|f(z)|=\infty$

Definición 10 *Decimos que $\lim\limits_{z\to\infty} f(z)=L$ sii para todo $\epsilon>0$ existe $M>0$ tal que si $|z|>M$ entonces $|f(z)-L|<\epsilon$*

Definición 11 *Decimos que $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)=\infty$ sii para todo $M>0$ existe $\delta>0$ tal que si $0<|z-z_0|<\delta$ entonces $|f(z)|>M$*

Definición 12 *Decimos que $\lim\limits_{z\to\infty} f(z)=\infty$ sii para todo $M>0$ existe $N>0$ tal que si $|z|>N$ entonces $|f(z)|>M$*

2.4 Continuidad de Funciones

Sea $f(z)$ una función definida en una vecindad de a, entonces $f(z)$ es continua en a si y solo si

$$\lim_{z\to a} f(z)=f(a)$$

Ejemplo 2.51 *las funciones polinomiales son funciones continuas*

Ejemplo 2.52 *Las funciones $f(z)=\sin z$, $g(z)=\cos z$, $h(z)=e^z$, $f(z)=\mathrm{Im}(z)$, $f(z)=\mathrm{Re}(z)$, $f(z)=\bar{z}$, $f(z)=|z|^2$ son funciones continuas en todo C*

Ejemplo 2.53 *La función* $f(z)=\begin{cases}\dfrac{z^2+1}{z-i} & z\neq i\\ 2i & z=i\end{cases}$ *es continua, ya que* $\lim\limits_{z\to i} f(z)=f(i)$ *(ejercicio), y éste es el únco punto problema*

Ejemplo 2.54 *La función* $f(z)=\begin{cases}\dfrac{\bar{z}}{z} & z\neq 0\\ 0 & z=0\end{cases}$ *no es continua en* $z=0$, *pues* $\lim\limits_{z\to 0}\dfrac{\bar{z}}{z}$ *no existe*

Ejemplo 2.55 *La función* $f(z)=\begin{cases}\dfrac{z^2+4}{z-2i} & z\neq 2i\\ 3+4i & z=2i\end{cases}$ *no es continua en* $z=2i$, *pues*

$$\lim_{z\to 2i}\frac{z^2+4}{z-2i}=\lim_{z\to 2i}(z+2i)=4i\neq f(2i)=3+4i$$

2.4.1 Propiedades de las funciones continuas

Si f y g son funciones continuas en a entonces

1.
$$f(z)+g(z)\ \text{ es continua en }\quad z=a$$

2.
$$f(z)-g(z)\ \text{ es continua}\quad\text{en}\quad z=a$$

3.
$$f(z)g(z)\quad\text{es continua en}\qquad z=a$$

4.
$$\frac{f(z)}{g(z)}\quad\text{es continua en}\quad z=a\quad si\quad g(a)\neq 0$$

5. Si f es continua en a y g es continua en f(a) entonces $g\circ f$ es continua en a

Ejemplo 2.56 *la función* $f(z)=\left[\sin\left(\dfrac{z^2+2z+1}{e^z+15}\right)+\cos z+(z^3+3z)\right]^3$ *es una función continua para todo* $z/e^z+15\neq 0, z\neq\log(-15)$

Ejercicio 2 *Aplicar la teoría expuesta, para solucionar los ejercicios que se exponen a continuación*

1. Dado

$$z=-i+\frac{3+i}{1-i}=1+i, \qquad w=\frac{5\cdot(6+2i)-5\cdot(1+3i)}{(-1+i)-2}+7+2i=-1+i$$

$$v=3\ \left(\frac{1+i}{1-i}\right)^2-2\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^3-i^2=-2-2i$$

Mostrar que

a)

$i)$ $\log\left(-i+\dfrac{3+i}{1-i}\right)=\log(1+i)=ln\sqrt{2}+\left(\dfrac{\pi}{4}+2n\pi\right)i$

$ii)$ $Log\left(-i+\dfrac{3+i}{1-i}\right)=Log\,(1+i)=ln\sqrt{2}+\dfrac{\pi i}{4}$

$iii)$ $e^z=e^{\left(-i+\frac{3+i}{1-i}\right)}=e^{1+i}=e\cos 1+ie\sin 1$

$iv)$ $\sin z=\sin\left(-i+\dfrac{3+i}{1-i}\right)=\sin(1+i)=\sin 1\cosh 1+i\cos 1\sinh 1$

$v)$ $\log e^z=\log e^{\left(-i+\frac{3+i}{1-i}\right)}=\log e^{(1+i)}=1+i+2n\pi i$

$vi)$ $e^{\log z}=e^{\log\left(-i+\frac{3+i}{1-i}\right)}=e^{\log(1+i)}=1+i$

$vii)$ $\cos z=\cos\left(-i+\dfrac{3+i}{1-i}\right)=\cos(1+i)=\cos 1\cosh 1-i\sin 1\sinh 1$

$viii)$ $sinhz=\sinh\left(-i+\dfrac{3+i}{1-i}\right)=\sinh(1+i)=\cos 1\sinh 1+i\sin 1\cosh 1$

$ix)$ $sin^{-1}z=\ sin^{-1}\left(-i+\dfrac{3+i}{1-i}\right)=$

$=\sin^{-1}(1+i)=-i\log\left(i(1+i)+(1-2i)^{\frac{1}{2}}\right)$

$iX)(1-2i)^{\frac{1}{2}}=$

$$=5^{\frac{1}{4}}\left(\cos\left(\frac{\arctan(-2)+2k\pi}{2}\right)+i\sin\left(\frac{\arctan(-2)+2k\pi}{2}\right)\right)\ k=0,1$$

y calcule por separado para $k=0$ y para $k=1$ el valor de

$$-i\log\left(i(1+i)+(1-2i)^{\frac{1}{2}}\right)$$

$x)\ Argz = Arg\left(-i + \dfrac{3+i}{1-i}\right) = Arg(1+i) = \dfrac{\pi}{4}$

b) Mostrar que

$$\begin{aligned} i)\ \log w &= \log\left(\frac{5\cdot(6+2i)-5\cdot(1+3i)}{(-1+i)-2} + 7 + 2i\right) = \\ &= \log(-1+i) = ln\sqrt{2}\ + \left(\frac{3\pi}{4} + 2n\pi\right) i \end{aligned}$$

$$ii)\ Logw = Log\left(\frac{5\cdot(6+2i)-5\cdot(1+3i)}{(-1+i)-2} + 7 + 2i\right) =$$

$$= Log(-1+i) = ln\sqrt{2}\ + \frac{3\pi i}{4}$$

$$iii)\ e^{w} = e^{-1}\cos 1 + ie^{-1}\sin 1$$

$$iv)\sin w = \sin(-1+i) = \sin(-1)\cos i + \cos(-1)\sin i =$$

$$= -\sin 1\cosh 1 + i\cos 1\sinh 1$$

$$v)\log e^{w} = \frac{5\cdot(6+2i)-5\cdot(1+3i)}{(-1+i)-2} + 7 + 2i + 2n\pi i = -1 + i + 2n\pi i$$

$$vi)\ e^{\log w} = w = -1+i$$

$$X)\ Argw = \frac{3\pi}{4}$$

c) Mostrar que

$$i)\quad |Logz| = \left|ln\sqrt{2}\ + \frac{\pi}{4}i\right| = \sqrt{\left(ln\sqrt{2}\right)^2 + \left(\frac{\pi}{4}\right)^2}$$

$$\begin{aligned} iii)\quad |\cos v| &= \left|\cos\left(3\ \left(\frac{1+i}{1-i}\right)^2 - 2\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^3 - i^2\right)\right| = |\cos(-2-2i)| \\ &= |\cos 2\cosh 2 - i\sin 2\sinh 2| = \sqrt{(\cos 2\cosh 2)^2 + (\sin 2\sinh 2)^2} \end{aligned}$$

$$iv)\quad |e^{z}| = e$$

$$v)\quad |z^{w}|\ = e^{-\left(\frac{\pi}{4}+2n\pi\right)-\ln\sqrt{2}}$$

2. Mostrar que

a)

$i)\ \ (1-i)^{1+i} =$

$$= e^{\ln\sqrt{2}-\left(\frac{7\pi}{4}+2n\pi\right)}\left(\cos(\ln(\sqrt{2})+\frac{7\pi}{4}+2n\pi)+i\sin\left(\ln(\sqrt{2})+\frac{7\pi}{4}+2n\pi)\right)\right)$$

$ii) 1^i = e^{-2n\pi}$

b)

$$i)\quad \sin(\arg(1+i)) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$ii)\, \sin(1-i) = \sin 1\cosh 1 - i\cos 1\sinh 1$$

$$iii)\ arc\cos 2 = -i\left(\ln(2\pm\sqrt{3})+2n\pi i\right)$$

c)

$i) e^{ie^i} = e^{-\sin 1}\left(\cos(\cos 1)+i\sin(\cos 1)\right)$

$ii)\ e^{\cos(1+i)} = e^{\cos 1\cosh 1}\left(\cos(\sin 1\sinh 1)-i\sin(\sin 1\sinh 1)\right)$

$iii)\ \cos(e^{1+i}) = \cos\left(e\cos 1\right)\cosh\left(e\sin 1\right)-i\sin\left(e\cos 1\right)\sinh(e\sin 1)$

$iv)\ \ e^{(1-i)^{\frac{1}{3}}} \qquad (1-i)^{\frac{1}{3}} =$

$$= 2^{\frac{1}{6}}\left(\cos\left(\frac{\frac{7\pi}{4}+2k\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{\frac{7\pi}{4}+2k\pi}{3}\right)\right)\ k=0,1,2$$

para k $=0$, una raíz cúbica es $2^{\frac{1}{6}}\cos\frac{7\pi}{12}+i2^{\frac{1}{6}}\sin\frac{7\pi}{12} = a+ib$ y así

$$e^{a+ib} = e^{\left(2^{\frac{1}{6}}\cos\frac{7\pi}{12}\right)}\left(\cos(2^{\frac{1}{6}}\sin\frac{7\pi}{12})\right)+i\sin(2^{\frac{1}{6}}\sin\frac{7\pi}{12})$$

en forma análoga para $k=1$, y $k=2$

$v)\ e^{i\sin i} = e^{-\sinh 1}$

3. Mostrar que

a) $\overline{\cos z} = \cos\bar{z}$. En efecto:

$$\overline{\cos z} = \overline{\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}} = \frac{e^{-i\bar{z}}+e^{i\bar{z}}}{2} = \cos\bar{z}$$

b) $\overline{\sin z} = \sin \bar{z}$

c) $\overline{\tan z} = \tan \bar{z}$

4. Solucionar las ecuaciones

a) $e^z = 1 + \sqrt{3}i$ Respuesta $z = ln2 + \left(\dfrac{\pi}{3} + 2n\pi\right) i$

b) $\sin z = 0$ Respuesta $z = n\pi$

c) $\cosh z = 2i$ Respuesta $z = log\left(2i \pm i\sqrt{5}\right)$

d) $\sinh z = i$ Respuesta $z = \left(\dfrac{\pi}{2} + 2n\pi\right) i$

e) $log(z + i) = 0$ Respuesta $z = 1 - i$

f) $logz = \frac{\pi i}{2}$ Respuesta $z = i$

5. Analizar la continuidad de las funciones siguientes

a) $f(z) = \begin{cases} \dfrac{z^2+1}{z-i} & si \quad z \neq i \\ 2i & si \quad z = i \end{cases}$ Respuesta f es continua para todo $z \in C$

b) $f(z) = \begin{cases} z^2 + 2z & si \quad z \neq i \\ 3 + 2i & si \quad z = i \end{cases}$ Respuesta f no es continua en $z = i$

c) Probar que las funciones $f(z) = Re(z)$, $g(z) = Im(z)$, $h(z) = \bar{z}, k(z) = |z|$, $l(z) = z^2 z$, $i(z) = 3x - iy$ son continuas en C

6. Analizar el $\lim\limits_{z \to 0} f(z)$ si $f(z) = \dfrac{x^2 + x}{x + y} + \dfrac{iyx}{x + y^2}$ Respuesta no existe el límite

7. Analizar el $\lim\limits_{z \to 0} f(z)$ si $f(z) = \dfrac{x^2 y}{x^2 + y^2} + \dfrac{i(y^3 + y^2 x)}{x^4 + y^2}$ Respuesta 0+0i

8. Sea R la región limitada por las rectas $x = 1$, $y = 1$, $x + y = 1$ hallar la imgen por medio de $f(z) = z^2$ Respuesta La región limitada por las gráficas de $u = 1 - \dfrac{v^2}{4}$, $u = \dfrac{v^2}{4} - 1$, $v = (1 + u)\left(\dfrac{1-u}{2}\right)$

9. Sea R la región limitada por las rectas $x = 0$, $y = 1$, $x = 2$, $y = -1$ hallar la imagen por medio de $f(z) = (1+i)z + (2-3i)$ Respuesta La región limitada por las gráficas de $u + v = -1$, $u = v + 3$, $u = v + 7$, $u + v = 3$

10. Mostrar que

a)
$$artan2i = -\frac{\pi}{2} - n\pi + i\left(\frac{\ln 3}{2}\right)$$

b)
$$arc\cosh\left(\frac{1}{2}\right) = i\left(\pm\frac{\pi}{3} + 2n\pi\right)$$

d)
$$arc\sinh\left(\frac{i}{2}\right) = \begin{cases} i\left(\frac{\pi}{6} + 2n\pi\right) \\ i\left(\frac{5\pi}{6} + 2n\pi\right) \end{cases}$$

e) Calcular el valor de

$$1.\ e^{\sin(1+i)} \quad 2.\ e^{arc\sin i} \quad 3.\ \left|e^{\sin(1+i)}\right| \quad 4.\ \sin\left(e^{\cos(1+i)}\right)$$

Capítulo 3

Derivadas

3.1 Definición

Sea $f(z)$ definida en una vecindad de z_0, la derivada de una función compleja $f(z)$ en un punto z_0, se denota por $f'(z_0)$ y se define por

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = f'(z_0)$$

si este límite existe y es finito o en forma equivalente f es derivable en z_0 si

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h} = f'(z_0)$$

existe y es finito. En este límite h se aproxima al número complejo cero a través de valores complejos

Ejemplo 3.1 *Si $f(z) = z$ entonces*

$$f'(z) = \lim_{h \to 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{z + h - z}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h}{h} = \lim_{h \to 0} 1 = 1$$

Ejemplo 3.2 *si $f(z) = z^2$ entonces $f'(z) = 2z$ pues*

$$\begin{aligned} f'(z) &= \lim_{h \to 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{(z+h)^2 - z^2}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{z^2 + 2zh + h^2 - z^2}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{2zh + h^2}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{(2z+h)h}{h} = \lim_{h \to 0} 2z + h = 2z \end{aligned}$$

Ejemplo 3.3 *si $f(z) = z^n$ entonces $f'(z) = nz^{n-1}$*

Ejemplo 3.4 *La función $f(z) = \bar{z}$ no es derivable en ningún punto, pues*

$$\begin{aligned} f'(z) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(z+h)-f(z)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\overline{z+h}-\bar{z}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\bar{z}+\bar{h}-\bar{z}}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{\bar{h}}{h} \text{ que no existe} \end{aligned}$$

Ejemplo 3.5 *La función $f(z) = z \cdot \bar{z}$ es derivable solo en $z = 0$, ya que*

$$\begin{aligned} f'(z) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(z+h)-f(z)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(z+h)\cdot(\overline{z+h})-z\cdot\bar{z}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(z+h)(\bar{z}+\bar{h})-z.\bar{z}}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{z.\bar{h}+h.\bar{z}+h.\bar{h}}{h} = \begin{cases} 0 & si \quad z=0 \\ \text{no existe} & si \quad z\neq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Ejemplo 3.6 *La función $f(z) = \mathrm{Re}(z)$ no es derivable, pués*

$$f'(z) = \lim_{h\to 0} \frac{f(z+h)-f(z)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\mathrm{Re}(z+h)-\mathrm{Re}(z)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\mathrm{Re}(x+h_1+i(y+h_2))-\mathrm{Re}(x+iy)}{h}$$

$$= \lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \frac{x+h_1-x}{h_1+ih_2} = \lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \frac{h_1}{h_1+ih_2} = \lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \frac{h_1\,(h_1-ih_2)}{(h_1+ih_2)\,(h_1-ih_2)} =$$

$$= \lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \frac{h_1\,(h_1-ih_2)}{(h_1^2+h_2^2)} = \lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \left(\frac{h_1^2}{h_1^2+h_2^2} - \frac{ih_1h_2}{h_1^2+h_2^2}\right) \text{ que no existe ya que}$$

por el camino $(h_1, 0)$ el límite

$$\lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \frac{h_1^2}{(h_1^2+h_2^2)} = \lim_{h_1\to 0} \frac{h_1^2}{h_1^2} = 1$$

y por el camino $(0, h_2)$ el límite

$$\lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \frac{h_1^2}{(h_1^2+h_2^2)} = \lim_{h_2\to 0} \frac{0}{h_2^2} = 0$$

luego la función $f(z) = \mathrm{Re}(z)$ no es derivable en ningún punto z

3.2 Algunas Propiedades

Las propiedades para derivar funciones complejas son similares a las propiedades para derivar funciones reales. Si $f(z)$ y $g(z)$ son funciones derivables en z entonces

3.2.1 Suma

$$(f+g)'(z) = f'(z) + g'(z)$$

3.2.2 Resta

$$(f-g)'(z) = f'(z) - g'(z)$$

3.2.3 Multiplicación

$$(fg)'(z) = f'(z)g(z) + f(z)g'(z)$$

3.2.4 División

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(z) = \frac{g(z)f'(z) - f(z)g'(z)}{g^2(z)}$$

3.2.5 Compuesta

$$(f(g(z)))' = f'(g(z))g'(z)$$

Ejemplo 3.7 *Si* $f(z) = \left(z^4 + 3z^2 + 5 + i\right)^3$ *entonces* $f'(z) = 3\left(z^4 + 3z^2 + 5 + i\right)^2 \left(4z^3 + 6z\right)$

Ejemplo 3.8 *Si* $f(z) = z^4 - 3z^2$ *entonces* $f'(z) = 4z^3 - 6z$

Ejemplo 3.9

$$\begin{aligned} Si \quad f(z) &= \frac{z^4 + 3z^2}{z^3 + z + 1} \text{ entonces} \\ f'(z) &= \frac{(z^3 + z + 1)(4z^3 + 6z) - (z^4 + 3z^2)\left(3z^2 + 1\right)}{\left(z^3 + z + 1\right)^2} \end{aligned}$$

3.2.6 Ecuaciones de Cauchy Riemann

Supongamos que una función f está definida en una vecindad del punto z_0 por medio de la ecuación $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ y que $f'(z_0) = \lim_{h\to 0} \dfrac{f(z_0+h) - f(z_0)}{h}$ existe entonces

$$\begin{aligned}
f'(z_0) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(z_0+h)-f(z_0)}{h} = \lim_{(\triangle x,\triangle y)\to(0,0)} \frac{f(x_0+\triangle x + i(y_0+\triangle y)) - f(x_0+iy_0)}{\triangle x + i\triangle y} \\
&= \lim_{(\triangle x,\triangle y)\to(0,0)} \frac{u(x_0+\triangle x, y_0+\triangle y) + iv(x_0+\triangle x, y_0+\triangle y) - (u(x_0,y_0)+iv(x_0,y_0))}{\triangle x + i\triangle y} \\
&= \lim_{\triangle x\to 0} \frac{u(x_0+\triangle x, y_0) + iv(x_0+\triangle x, y_0) - (u(x_0,y_0)+iv(x_0,y_0))}{\triangle x} \\
&= \lim_{\triangle x\to 0} \frac{u(x_0+\triangle x, y_0) - u(x_0,y_0) + i(v(x_0+\triangle x, y_0) - v(x_0,y_0))}{\triangle x} \\
&= \frac{\partial u(x_0,y_0)}{\partial x} + i\frac{\partial v(x_0,y_0)}{\partial x} \text{ por el camino } (\triangle x, 0) \text{ y por el camino } (0,\triangle y) \\
f'(z) &= \lim_{\triangle y\to 0} \frac{u(x_0,,y_0+\triangle y) + iv(x_0,y_0+\triangle y) - (u(x_0,y_0)+iv(x_0,y_0))}{i\triangle y} \\
&= \lim_{\triangle y\to 0} \frac{-iu(x_0,,y_0+\triangle y) + v(x_0,y_0+\triangle y) + iu(x_0,y_0) - v(x,y))}{\triangle y} \\
&= \lim_{\triangle y\to 0} \frac{-i(u(x_0,,y_0+\triangle y) - u(x_0,y_0)) + v(x_0,y_0+\triangle y) - v(x_0,y_0)}{\triangle y} \\
&= -i\frac{\partial u(x_0,y_0)}{\partial y} + \frac{\partial v(x_0,y_0)}{\partial y}
\end{aligned}$$

$$\text{luego } f'(z_0) = \frac{\partial u(x_0,y_0)}{\partial x} + i\frac{\partial v(x_0,y_0)}{\partial x} = -i\frac{\partial u(x_0,y_0)}{\partial y} + \frac{\partial v(x_0,y_0)}{\partial y} \text{ y así}$$

$$\frac{\partial u(x_0,y_0)}{\partial x} = \frac{\partial v(x_0,y_0)}{\partial y} \quad \text{y} \quad \frac{\partial v(x_0,y_0)}{\partial x} = -\frac{\partial u(x_0,y_0)}{\partial y}$$

conocidas como ecuaciones de Cauchy Riemann
Luego se concluye que si $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ es derivable en z, entonces $u(x,y)$ y $v(x,y)$ satisfacen las ecuaciones de Cauchy Riemann

$$\frac{\partial u(x,y)}{\partial x} = \frac{\partial v(x,y)}{\partial y} \quad \text{y} \quad \frac{\partial v(x,y)}{\partial x} = -\frac{\partial u(x,y)}{\partial y}$$

en $z = (x, y)$ y

$$\begin{aligned} f'(z) &= \frac{\partial u(x,y)}{\partial x} + i\frac{\partial v(x,y)}{\partial x} = -i\frac{\partial u(x,y)}{\partial y} + \frac{\partial v(x,y)}{\partial y} \\ &= \frac{\partial u(x,y)}{\partial x} - i\frac{\partial u(x,y)}{\partial y} = i\frac{\partial v(x,y)}{\partial x} + \frac{\partial v(x,y)}{\partial y} \end{aligned}$$

(por lo tanto si $u(x, y)$ y $v(x, y)$ no satisfacen las ecuaciones de Cauchy Riemann en $z = x + iy$ entonces

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$$

no es derivable en $z = x + iy$) y se puede demostrar que si $u(x, y)$ y $v(x, y)$ tienen derivadas parciales continuas en (x, y) y satisfacen las ecuaciones de Cauchy en (x, y) entonces $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ es derivable en (x, y) y

$$f'(z) = \frac{\partial u(x,y)}{\partial x} + i\frac{\partial v(x,y)}{\partial x} = -i\frac{\partial u(x,y)}{\partial y} + \frac{\partial v(x,y)}{\partial y}$$

Ejemplo 3.10 *La función*

$$f(z) = Re(z) = x = u(x, y) + iv(x, y) \text{ no es derivable en ningún punto(x,y)}$$

ya que

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 1 \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \quad \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad \frac{\partial v}{\partial x} = 0$$

por tanto

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 1 \neq \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

es decir, la función $f(z) = Re(z)$, no satisface las ecuaciones de Cauchy Riemann en nigún punto (x,y)

Ejemplo 3.11 *La función*

$$f(z) = |z|^2 = x^2 + y^2 = u(x, y) + iv(x, y) \text{ no es derivable en } z \neq 0$$

ya que $f(z) = |z|^2 = x^2 + y^2$, no satisface las ecuaciones de Cauchy Riemann en $(x, y) \neq (0, 0)$, pues

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 2y \quad \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad \frac{\partial v}{\partial x} = 0$$

por tanto

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x \neq \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \qquad y \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = 2y \neq \frac{\partial v}{\partial x} = 0$$

Observe que las ecuaciones de ecuaciones de Cauchy Riemann se satisfacen en $x = 0$, $y = 0$, *y como las derivadas parciales son continuas en* $(0,0)$, *se concluye que* $f(z) = |z|^2$ *es derivable en* $(0,0)$ *y*

$$f'(0) = \frac{\partial u(0,0)}{\partial x} + i\frac{\partial v(0,0)}{\partial x} = 0 + i0 = 0$$

Ejemplo 3.12 *La función*

$$f(z) = e^z = e^{x+iy} = e^x(\cos y + i\sin y) = e^x\cos y + ie^x\sin y = u(x,y) + iv(x,y)$$

es una función derivable en todo C, ya que,

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad y \quad \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y} \quad \textit{para todo (x,y), pués}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = e^x\cos y \qquad y \qquad \frac{\partial v}{\partial y} = e^x\cos y \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -e^x\sin y \qquad \frac{\partial v}{\partial x} = e^x\sin y$$

y las derivadas parciales son continuas para todo (x,y), *por tanto*

$$\begin{aligned} f'(z) &= \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = e^x\cos y + ie^x\sin y = e^x(\cos y + i\sin y) \\ &= e^{x+iy} = e^z \end{aligned}$$

luego si

$$f(z) = e^z \ \textit{entonces} \ f'(z) = e^z$$

Ejemplo 3.13

$$f(z) = \sin z = \sin(x+iy) = \sin x\cosh y + i\cos x\sinh y$$

es una función función derivable en todo C , ya que

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \cos x\cosh y = \frac{\partial v}{\partial y} \quad y \quad \frac{\partial v}{\partial x} = -\sin x\sinh y = -\frac{\partial u}{\partial y}, \quad \textit{para todo } (x,y)$$

y estas derivadas parciales son continuas para todo (x,y), *por tanto*

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = \cos x\cosh y - i\sin x\sinh y = \cos z$$

luego si

$$f(z) = \sin z \quad \textit{entonces} \ f'(z) \ = \textit{cosz}$$

Ejemplo 3.14

$$\textit{Si } f(z) = z^2 + 3z + 1 \quad \textit{enonces } f'(z) = 2z + 3$$

Pues

$$f(z) = z^2 + 3z + 1 = (x + iy)^2 + 3(x + iy) + 1 =$$
$$= x^2 - y^2 + 3x + 1 + i(2xy + 3y) = u(x, y) + iv(x, y)$$

por tanto

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x + 3 = \frac{\partial v}{\partial y} \quad y \quad \frac{\partial v}{\partial x} = 2y = -\frac{\partial u}{\partial y}$$

y como estas derivadas son continuas y satifacen cauchy en (x,y) entonces

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = 2x + 3 + 2iy = 2(x + iy) + 3 = 2z + 3$$

Ejemplo 3.15 *La función*

$$f(z) = x + x^3 + 3xy^2 + i(3x^2y - y^3 + y)$$

es derivable en el eje real pues

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= 1 + 3x^2 + 3y^2 = \frac{\partial v}{\partial y} = 1 + 3x^2 - 3y^2 \ \textit{sii } 3y^2 = -3y^2 \ \textit{pot tanto} \\ 6y^2 &= 0 \ \textit{entonces } y = 0 \ y \ x \ \textit{es cualquier valor real} \end{aligned}$$

$$y \quad \frac{\partial v}{\partial x} = 6xy \quad = -\frac{\partial u}{\partial y} = -6xy \quad \textit{sii } 12xy = 0 \ \textit{sii } x = 0 \ \textit{ó } y = 0$$

Observe que se satisfacen las ecuaciones de cauhy y son coninuas en el eje real por tanto por ejemplo

$$f'(0) = \frac{\partial u(0,0)}{\partial x} + i\frac{\partial v(0,0)}{\partial x} = 1 + i0 = 1 \qquad f'(1) = \frac{\partial u(1,0)}{\partial x} + i\frac{\partial v(1,0)}{\partial x} = 4$$

Ejemplo 3.16 *La función*

$$f(z) = 2x - 3y + i(3x + 2y) \ \textit{es derivable en todo el plano, pues}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2 = \frac{\partial v}{\partial y} \quad y \quad \frac{\partial v}{\partial x} = 3 = -\frac{\partial u}{\partial y}$$

y estas derivadas parciales son contnuas en (x,y), por tanto f(z) es derivable en todo C y

$$f'(z) = \frac{\partial u(x, y)}{\partial x} + i\frac{\partial v(x, y)}{\partial x} = 2 + 3i$$

Ejemplo 3.17

$$Si \quad f(z) = e^{3z^4+3z} \quad entonces \quad f'(z) = e^{3z^4+3z}(12z^3+3)$$

Ejemplo 3.18

$$\begin{aligned} Si \;\; f(z) &= \cos z = \frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2} \quad entonces \\ f'(z) &= \frac{i(e^{iz}-e^{-iz})}{2} = -\left(\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}\right) = -\sin z \end{aligned}$$

Ejemplo 3.19

$$Si \;\; f(z) = z^2e^z \quad entonces \; f'(z) = 2ze^z + z^2e^z$$

Ejemplo 3.20 *si*

$$f(z) = \cos^3(z^2+4z+1) \;\; entonces \; f'(z) = 3\cos^2(z^2+4z+1)(-\sin(z^2+4z+1)).(2z+4)$$

Ejemplo 3.21

$$(\tan z)' = \left(\frac{\sin z}{\cos z}\right)' = \frac{\cos z\cos z + \sin z\sin z}{\cos^2 z} = \frac{1}{\cos^2 z} = \sec^2 z$$

En forma análoga se verifica que

$$(\sec z)' = \sec z \tan z$$

$$(\cot z)' = -\csc^2 z$$

$$(\sinh z)' = \left(\frac{e^z-e^{-z}}{2}\right)' = \frac{e^z+e^{-z}}{2} = \cosh z$$

$$(\cosh z)' = \sinh z$$

$$(\tanh z)' = \sec h^2 z$$

Ejemplo 3.22

$$Si \;\; f(z) = \sin^3(z^2+2z-4) \quad entonces)$$

$$f'(z) = 3\sin^2(z^2+2z-4).cos(z^2+2z-4)(2z+2$$

Ejemplo 3.23

$$Si \quad f(z) = Logz = \ln\sqrt{x^2+y^2} + iArgz = \frac{1}{2}\ln(x^2+y^2) + i\arctan\frac{y}{x}$$

entonces

$$\begin{aligned} f'(z) &= \frac{1}{2}\frac{2x}{(x^2+y^2)} + i\frac{-\frac{y}{x^2}}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2} = \frac{x}{(x^2+y^2)} - i\frac{y}{(x^2+y^2)} = \\ &= \frac{x-iy}{x^2+y^2} = \frac{x-iy}{(x-iy)(x+iy)} = \frac{1}{x+iy} = \frac{1}{z} \end{aligned}$$

luego si

$$f(z) = Logz \ \textit{entonces}\ f'(z) = \frac{1}{z}$$

Ejemplo 3.24 *Si* $f(z) = \log^3(\sin z + \cos^2 z + 2z + 5)$ *entonces*

$$f'(z) = 3\log^2(\sin z + \cos^2 z + 2z + 5)\frac{1}{(\sin z + \cos^2 z + 2z + 5)}(\cos z - 2\cos z \sin z + 2)$$

Ejemplo 3.25

$$\begin{aligned} (\arcsin z)' &= \frac{d}{dz}\left(-iLog\left(iz + (1-z^2)^{\frac{1}{2}}\right) = \right. \\ &= -i\left(\frac{1}{(iz+(1-z^2)^{\frac{1}{2}}}\right)\left(i - \frac{z}{(1-z^2)^{\frac{1}{2}}}\right) \\ &= -i\left(\frac{1}{(iz+(1-z^2)^{\frac{1}{2}}}\right)\left(\frac{i(1-z^2)^{\frac{1}{2}} - z}{(1-z^2)^{\frac{1}{2}}}\right) \\ &= \left(\frac{1}{(iz+(1-z^2)^{\frac{1}{2}}}\right)\left(\frac{(1-z^2)^{\frac{1}{2}} + iz}{(1-z^2)^{\frac{1}{2}}}\right) \\ &= \frac{1}{(1-z^2)^{\frac{1}{2}}} \end{aligned}$$

En forma análoga se tiene que:

$$(arc\cos z)' = \frac{-1}{(1-z^2)^{\frac{1}{2}}}$$

$$(\arctan z)' = \frac{1}{(1+z^2)}$$

$$(\operatorname{arccot} z)' = \frac{-1}{(1+z^2)}$$
$$(\operatorname{arcsec} z)' = \frac{1}{z\sqrt{z^2-1}}$$
$$(\operatorname{arccsc} z)' = \frac{-1}{z\sqrt{z^2-1}}$$
$$(\arcsin hz)' = \frac{1}{(1+z^2)^{\frac{1}{2}}}$$
$$(arc\cosh z)' = \frac{1}{(z^2-1)^{\frac{1}{2}}}$$
$$(\arctan hz)' = \frac{1}{1-z^2}$$

Las ecuaciones de ecuaciones de Cauchy Riemann en forma polar estan dadas por

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta} \;\text{ y }\; \frac{\partial v}{\partial r} = -\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta} \;\text{ pues si}$$

$x = r\cos\theta$, y $y = r\sin\theta$ $\quad r = \sqrt{x^2+y^2}$, $\theta = arc\tan\frac{y}{x}$ entonces

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \theta}\frac{\partial \theta}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial r}\cdot\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} + \frac{\partial u}{\partial \theta}\cdot\frac{-y}{x^2+y^2} = \frac{\partial u}{\partial r}\cdot\cos\theta - \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta}\cdot\sin\theta$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial \theta}\frac{\partial \theta}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial r}\cdot\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} + \frac{\partial u}{\partial \theta}\cdot\frac{x}{x^2+y^2} = \frac{\partial u}{\partial r}\cdot\sin\theta + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta}\cdot\cos\theta$$

Análogamente

$$\begin{aligned}
\frac{\partial v}{\partial x} &= \frac{\partial v}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial \theta}\frac{\partial \theta}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial r}\cdot\cos\theta - \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta}\cdot\sin\theta \\
\frac{\partial v}{\partial y} &= \frac{\partial u}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial \theta}\frac{\partial \theta}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial r}\cdot\sin\theta + \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta}\cdot\cos\theta
\end{aligned}$$

luego como $\dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial v}{\partial y}$ se tiene que

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} &= \frac{\partial u}{\partial r}\cdot\cos\theta - \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta}\cdot\sin\theta - \left(\frac{\partial v}{\partial r}\cdot\sin\theta + \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta}\cdot\cos\theta\right) \\
&= \left(\frac{\partial u}{\partial r} - \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta}\right)\cos\theta - \left(\frac{\partial v}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta}\right)\sin\theta = 0
\end{aligned}$$

como $\dfrac{\partial u}{\partial y} = -\dfrac{\partial v}{\partial x}$ entonces

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} &= \frac{\partial u}{\partial r}\cdot\sin\theta + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial\theta}\cdot\cos\theta + \frac{\partial v}{\partial r}\cdot\cos\theta - \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial\theta}\cdot\sin\theta\\ &= \left(\frac{\partial u}{\partial r} - \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial\theta}\right)\sin\theta + \left(\frac{\partial v}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial\theta}\right)\cos\theta = 0\end{aligned}$$

y así multiplicando la ecuación $\left(\dfrac{\partial u}{\partial r} - \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial v}{\partial\theta}\right)\cos\theta - \left(\dfrac{\partial v}{\partial r} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial u}{\partial\theta}\right)\sin\theta = 0$ por $\cos\theta$

y la ecuación $\left(\dfrac{\partial u}{\partial r} - \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial v}{\partial\theta}\right)\sin\theta + \left(\dfrac{\partial v}{\partial r} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial u}{\partial\theta}\right)\cos\theta = 0$ por $\sin\theta$

y sumando se tiene que

$$\frac{\partial u}{\partial r} - \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial\theta} = 0 \ \text{ o } \ \frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial\theta}$$

Ahora multiplicando la ecuación por $\left(\dfrac{\partial u}{\partial r} - \frac{1}{r}\dfrac{\partial v}{\partial\theta}\right)\cos\theta - \left(\dfrac{\partial v}{\partial r} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial u}{\partial\theta}\right)\sin\theta = 0$ por $-\sin\theta$ y la ecuación $\left(\dfrac{\partial u}{\partial r} - \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial v}{\partial\theta}\right)\sin\theta + \left(\dfrac{\partial v}{\partial r} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial u}{\partial\theta}\right)\cos\theta = 0$ por $\cos\theta$ y sumando se deduce que

$\dfrac{\partial v}{\partial r} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial u}{\partial\theta} = 0$ o $\dfrac{\partial v}{\partial r} = -\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial u}{\partial\theta}$ y así la derivada en coordenadas polares es

$$\begin{aligned}f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} &= \frac{\partial u}{\partial r}\cdot\cos\theta - \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial\theta}\cdot\sin\theta + i\left(\frac{\partial v}{\partial r}\cdot\cos\theta - \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial\theta}\cdot\sin\theta\right) =\\ &= (\frac{\partial u}{\partial r} + i\frac{\partial v}{\partial r})(\cos\theta - i\sin\theta)\end{aligned}$$

ó

$$\begin{aligned}f'(z) = -i\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial y} &= -i\left(\frac{\partial u}{\partial r}\cdot\sin\theta + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial\theta}\cdot\cos\theta\right) + \frac{\partial v}{\partial r}\cdot\sin\theta + \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial\theta}\cdot\cos\theta =\\ &= (\frac{\partial u}{\partial\theta} + i\frac{\partial v}{\partial\theta})(-\frac{i}{r})(\cos\theta - i\sin\theta)\end{aligned}$$

Ejemplo 3.26 *$f(z) = Logz = \ln r + i\theta$ entonces, apliquemos la fórmula anterior, es decir,*

$$\begin{aligned}f'(z) &= (\frac{\partial u}{\partial r} + i\frac{\partial v}{\partial r})(\cos\theta - i\sin\theta) = (\frac{1}{r} + i.0)(\cos\theta - i\sin\theta)\\ &= \frac{1}{r(\cos\theta + i\sin\theta)} = \frac{1}{z}\end{aligned}$$

3.3 Regla de L´hopital

Esta regla es idéntica a la que se emplea en el cálculo para evaluar formas indeterminadas con funciones de variable real
Si $g(z_0) = 0$ y $h(z_0) = 0$ y si $g(z)$ y $h(z)$ son derivables en z_0 con $h'(z_0) \neq 0$

$$\text{entonces} \quad \lim_{z \to z_0} \frac{g(z)}{h(z)} = \frac{g'(z_0)}{h'(z_0)} \quad \text{pues}$$

$$\lim_{z \to z_0} \frac{g(z)}{h(z)} = \lim_{z \to z_0} \frac{g(z) - g(z_0)}{h(z) - h(z_0)} = \lim_{z \to z_0} \left(\frac{g(z) - g(z_0)}{h(z) - h(z_0)} \right) \left(\frac{z - z_0}{z - z_0} \right)$$

$$= \lim_{z \to z_0} \frac{\dfrac{g(z) - g(z_0)}{z - z_0}}{\dfrac{h(z) - h(z_0)}{z - z_0}} = \frac{\lim\limits_{z \to z_0} \dfrac{g(z) - g(z_0)}{z - z_0}}{\lim\limits_{z \to z_0} \dfrac{h(z) - h(z_0)}{z - z_0}} = \frac{g'(z_0)}{h'(z_0)}$$

$$\lim_{z \to 2i} \frac{z^4 - 16}{z - 2i} = \lim_{z \to 2i} \frac{4z^3}{1} = -32i$$

Ejemplo 3.27

$$\lim_{z \to 0} \frac{\sin z}{z} = \lim_{z \to 0} \frac{\cos z}{1} = 1$$

Ejemplo 3.28

$$\lim_{z \to 0} \frac{1 - \cos z}{z^2} = \lim_{z \to 0} \frac{\sin z}{2z} = \lim_{z \to 0} \frac{\cos z}{2} = \frac{1}{2}$$

3.3.1 Funciones Analíticas

Definición 13 *$f(z)$ es análitica en z_0, si existe una vecindad que contenga al punto z_0, tal que $f'(z)$ exista para todo z en la vecindad y $f(z)$ es análitica en un conjunto S, si $f(z)$ es análitica en cada punto del conjuto S*

Más aún $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ es análitica en un dominio R si y solo si $u(x, y)$ y $v(x, y)$ tienen derivadas parciales continuas en R y satisfacen las ecuaciones de Cauchy en R.

Además si f es analítica en un dominio R, todas las derivadas f', f'', ... $f^{(n)}$, ...existen y son funciones analíticas en R y $f''(z)$ viene dada por

$$\begin{aligned} f''(z) &= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + i\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x} - i\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} \quad \text{o} \\ f''(z) &= \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} - i\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = -\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - i\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \end{aligned}$$

La suma, resta, producto, cociente y compuesta de funciones analíticas es analítica.

Ejemplo 3.29 *La función*

$$f(z) = z \cdot \bar{z}$$

no es análitica en $z = 0$, pues no existe una vecindad que contenga al punto 0 tal que $f'(z)$ exista para todo z, ya que solamente en $z = 0$, $f(z)$ es derivable, en los demás puntos $f'(z)$ no existe

Ejemplo 3.30 *La función*

$$f(z) = \bar{z}$$

no es análitica en ningún z, pues para ningún z, $f'(z)$ existe

Ejemplo 3.31 *La función*

$$f(z) = \left(z^4 + 3z^2 + 5 + i\right)^3 (\cos^4 z)(\sin z)e^z$$

es una función analitica en C, ya que $f'(z)$ existe para todo z

Ejemplo 3.32 *Las funciones*

$$f(z) = \sin z, \quad f(z) = \cos z, \quad f(z) = e^z, \; f(z) = (\cos^4 z)(\sin z)e^z, \; f(z) = (z^4 + 3z^2)\cos z$$

son funciones analiticas, ya que $f'(z)$ existe para todo z

Ejemplo 3.33 $f(z) = \dfrac{1}{z}$ *es una función analítica, para todo $z \neq 0$, ya que $f'(z)$ existe para todo $z \neq 0$*

Ejemplo 3.34 $f(z) = \dfrac{e^z}{z^2+1}$ *es analítica en $|z| < \frac{1}{2}$*

Ejemplo 3.35 $f(z) = \dfrac{e^z}{z^2+1}$ *no es analítica en $z = \pm i$*

Ejemplo 3.36 $f(z) = \dfrac{2}{z}$ *no es analítica en $z = 0$*

Ejemplo 3.37 $f(z) = \dfrac{1}{(z^2+1)(z^2+9)}$ *no es analítica en $z = \pm i, \pm 3i$*

Ejemplo 3.38

$$f(z) = e^{\bar{z}} = e^x \cos y - ie^x \sin y$$

no es una función analítica, ya que no satisface las ecuaciones de Cauchy Riemann, pues

$$\frac{\partial u}{\partial x} = e^x \cos y \neq \frac{\partial v}{\partial y} = -e^x \cos y$$

Ejemplo 3.39 $f(z) = \sin \bar{z}$, $f(z) = e^{\bar{z}}$ *no son funciones analíticas en ningún punto de* C *, ya que no satisfacen las ecuaciones de Cauchy Riemann (ejercicio)*

Ejemplo 3.40

$$f(z) = Re(z) = x = u(x, y) + iv(x, y) \text{ no es analítica en ningún punto de } C$$

ya que

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 1 \neq \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

es decir, la función $f(z) = Re(z)$*, no satisface ecuaciones de ecuaciones de Cauchy Riemann*

Ejemplo 3.41 *La función*

$$f(z) = \text{Im}(z^2) = 2xy = u(x, y) + iv(x, y) \text{ no es analítica en ningún punto de } C$$

ya que

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2y \neq \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

es decir, la función $f(z) = \text{Im}(z^2)$, no satisface ecuaciones de ecuaciones de Cauchy Riemann. Muestre que $f'(0) = 0$

Ejemplo 3.42 *La función*

$$f(z) = |z|^2 = x^2 + y^2 = u(x, y) + iv(x, y) \text{ no es analítica en ningún punto de } C$$

ya que $f(z) = |z|^2 = x^2 + y^2$*, no satisface ecuaciones de ecuaciones de Cauchy Riemann, pues*

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x \neq \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \qquad y \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = 2y \neq \frac{\partial v}{\partial x} = 0$$

Observe que las ecuaciones de ecuaciones de Cauchy Riemann se satisfacen en x=0, y=0, y como las derivadas parciales son continuas en (0,0), se concluye que $f(z) = |z|^2$ *es derivable en (0,0) y* $f'(0) = 0$

Lema 1 *Si $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ es análitica en un dominio R entonces $u(x,y)$ y $v(x,y)$ son funciones armónicas (es decir, son funciones que tienen segundas derivadas parciales continuas y satisfacen la ecuación de laplace)*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad y \quad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0$$

Lema 2 *Si $f(z)$ es analítica, entonces $u(x,y)$ y $v(x,y)$ son armónicas*

En efecto, como f es analítica entonces $u(x,y)$ y $v(x,y)$ satisface las ecuaciones de Cauchy Riemann y las segundas derivadas parciales de u y v son continuas, luego las mixtas son iguales así

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial}\left(-\frac{\partial u}{\partial y}\right) = -\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \text{ entonces}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

Análogamente se tiene que

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0$$

Ejercicio 3 *En los problemas de 1 al 5 utilizar la definición de derivada para evaluar $f'(z_0)$*

1. $f(z) = z^3 \quad z_0 = 1 + i$ Respuesta 6i

2. $f(z) = z + 2\bar{z} \quad si \quad z_0 = i$ Respuesta no existe

3. $f(z) = \operatorname{Im} z \quad si \quad z_0 = 1 + i$ Respuesta no existe

4. $f(z) = (\bar{z})^2 \quad si \quad z_0 = 1 - i$ Respuesta no existe

5. $f(z) = \dfrac{1}{z+2} \quad si \quad z_0 = 3i$ Respuesta $\dfrac{-1}{(3i+2)^2}$

En los numerales del 6 al 12, hallar $u(x,y)$ y $v(x,y)$ tales que $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$.

Determine si es posible un dominio donde sean analíticas y si f es analítica, verificar que u y v son funciones armónicas

6. $f(z) = z^2 + 5iz$ Respuesta $f(z) = (x^2 - y^2 - 5y) + i\,(2xy + 5x)$, todo el plano

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 2 - 2 = 0 \quad y \quad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0 + 0 = 0$$

7. $f(z) = iz + \bar{z}$ Respuesta $f(z) = (x - y) + i\,(x - y)$, no es analítica en ningún punto de C

8. $f(z) = |z| + z$ Respuesta $f(z) = \sqrt{x^2 + y^2} + x + iy$, no es analítica en ningún punto de C

9. $f(z) = \dfrac{2 + \operatorname{Im} z}{|z|^2}$ Respuesta $f(z) = \dfrac{2 + y}{x^2 + y^2}$ no es analítica en ningún punto de C

10. $f(z) = Re(iz)$ Respuesta $f(z) = -y$ no es analítica en ningún punto de C

11. $f(z) = \dfrac{z - i}{z}$ Respuesta $f(z) = \dfrac{x^2 + y^2 - y - ix}{x^2 + y^2}$ analítica para todo $z \neq 0$

12. $f(z) = (\bar{z})^2$ Respuesta $f(z) = x^2 - y^2 - 2ixy$ no es analítica

13) Verificar que la función $f(z) = 2z - \bar{z} + 5$ no es derivable en ningún punto de C

14) Verificar que la función $f(z) = x^2 + y^2 + 2ixy$ es derivable en el eje real y no es analítica

15) Verificar que la función $f(z) = x^2 - y^2 - 2xy + i(x^2 - y^2 + 2xy)$ es analítica en todo C

16) Hallar las constantes para que la función sea analítica

$$
\begin{aligned}
f(z) &= x + ay + i(bx + cy) \quad \text{Respuesta } c = 1, a = -b \\
f(z) &= x^2 + axy + by^2 + i(cx^2 + dxy + y^2) \quad \text{Respuesta } a = 2, b = -1, c = -1,\ d = 2 \\
f(z) &= ax + by + 3bx + i(ax - by + y) \quad \text{Respuesta } a = -1/3,\ b = 1/3
\end{aligned}
$$

17. Mostrar que en la función

$$
f(z) = \begin{cases} \dfrac{z^5}{|z|^4} & si \quad z \neq 0 \\ 0 & si \quad z = 0 \end{cases}
$$

$$
u(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^5 - 10x^3y^2 + 5xy^4}{(x^2 + y^2)^2} & si \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & si \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}
$$

$$
v(x,y) = \begin{cases} \dfrac{5x^4y - 10x^2y^3 + y^5}{(x^2 + y^2)^2} & si \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & si \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}
$$

$\dfrac{\partial u(0,0)}{\partial x} = 1,\ \dfrac{\partial u(0,0)}{\partial y} = 0, \dfrac{\partial v(0,0)}{\partial x} = 0$ y $\dfrac{\partial v(0,0)}{\partial y} = 1$ luego las derivadas parciales

existen y satisfacen las ecuaciones de Cauchy–Riemman en $(0,0)$, pero $f'(0)$ no existe Ind,Calcular $f'(0)$ por definición y mostrar que este límite no existe y verifique que las derivadas parciales no son continuas en (0,0)

18. hallar $f'(z)$ para las funciones

$$a)\quad f(z) = \frac{\sin(e^{4z} - z^2)}{z^5 + z^2 - 6}$$

$$b)\quad f(z) = e^{-z}(z^4 + z^3 + 2z + 7)$$

$$c)\quad f(z) = sinh^3 z$$

$$d)\quad f(z) = (z^4 + z^3 + 2z + 7)\cosh^2(\sin z)$$

$$e)\quad f(z) = \frac{z^4 - 9i}{(iz^3 + 2z + 7)}$$

20. Mostrar que la función

$$f(z) = \begin{cases} \dfrac{\bar{z}^2}{z} & si \quad z \neq 0 \\ 0 & si \quad z = 0 \end{cases}$$

satisface las ecuaciones de Cauchy–Riemman en $z = 0$, pero f no es derivable en $z = 0$.

21. Mostrar que

$$a)\quad \lim_{z\to i} \frac{z^{10} + 1}{z^6 + 1} = 5/3$$

$$b)\quad \lim_{z\to 0} \frac{1 - \cos z}{\sin z^2} = 1/2$$

$$c)\quad \lim_{z\to 1+i} \frac{(z - 1 - i)^2}{(z^2 - 2z + 2)^2} = -1/4$$

$$d)\quad \lim_{z\to i} \frac{z^2 + 1}{z^6 + 1} = 1/3$$

Capítulo 4

Integrales

4.1 Generalidades

La integral definida $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ del cálculo real es reemplazada en análisis complejo por la integral de linea de una función compleja sobre una curva en el plano complejo. Ahora definimos este concepto, suponiendo familiaridad con integrales de linea de funciones reales de dos variables sobre curvas en el plano.
Supongamos que nos dan una curva C en el plano, definida por una ecuación paramétrica de la forma $x = x(t)$, $y = y(t) \quad a \leq t \leq b$. Como hemos identificado a los números complejos con los puntos en el plano, el punto $(x(t), y(t))$ de la curva lo identificamos con el número complejo $z(t) = x(t) + iy(t)$. Por ejemplo la cicunferencia unitaria $(|z| = 1)$, con centro en el origen, orientado en sentido contrario al movimiento de las manecillas del reloj, está dada paramétricamente por

$$z(t) = \cos t + i \sin t \;\; 0 \leq t \leq 2\pi \quad \text{o} \;\; \text{por} \;\; z(t) = e^{it} \;\; \text{con} \;\; 0 \leq t \leq 2\pi$$

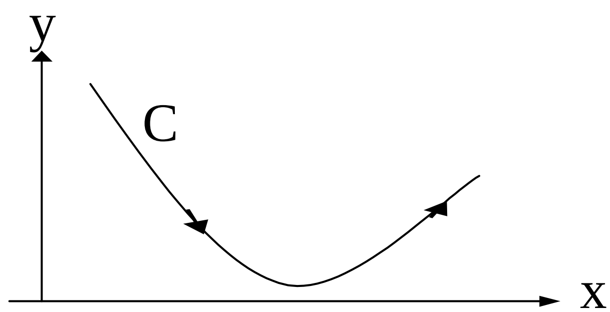
o por

$$x = \cos t \ , \ \ y = \sin t \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$

Si una curva esta dada paramétricamente por $z(t) = x(t) + iy(t)$ para $a \leq t \leq b$, $z(t)$ se mueve a lo largo de la curva en una dirección expecífica conforme t varía de a a b. Esto da a la curva una orientación que usualmente indicamos colocando una flecha en la gráfica, figura 4.1

4.2 Definición de integral

Supongamos que $f(z)$ es una función compleja definida para los puntos $z(t) = x(t) + iy(t)$ $a \leq t \leq b$ que estan sobre la curva y $P = \{t_{0,}t_1, t_{2,}.., t_n\}$ una partición de $[a, b]$ con



$a = t_0 < t_1 < t_2 < .. < t_n = b$ y sea $z(t_k) = z_k$. Ahora tenemos los puntos $z_0 = x(a) + iy(a), ...z_1, z_2, ..., z_n = x(b) + iy(b)$ sobre la curva . En cada intervalo $[t_{k-1}, t_k]$ elegimos un punto ξ_k. El punto $w_k = z(\xi_k)$ esta sobre la curva entre z_{k-1} y z_k y formamos $\sum_{k=1}^{n} f(w_k)(z_k - z_{k-1})$ y así definimos la integral como

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f(w_k)(z_k - z_{k-1}) = \int_C f(z)\, dz \quad \text{si este límite existe}$$

Ejemplo 4.1 *Si $z(t) = x(t) + iy(t) \quad a \le t \le b$ es una parametrización de la curva C y sea $f(z) = k$ entonces $f(w_k) = k$ para cualquier w_k entre z_{k-1} y z_k y así*

$$\int_C k\, dz = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f(w_k)(z_k - z_{k-1}) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} k(z_k - z_{k-1}) = \lim_{n\to\infty} k(z_n - z_o) = k(b - a)$$

Ejemplo 4.2 *Si $z(t) = x(t) + iy(t) \quad a \le t \le b$ es una parametrización de la curva C y sea $f(z) = z$ entonces $f(w_k) = f(\frac{z_{k-1} + z_k}{2}) = \frac{z_{k-1} + z_k}{2}$ si $w_k = \frac{z_{k-1} + z_k}{2}$ y así*

$$\begin{aligned}
\int_C z\, dz &= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f(w_k)(z_k - z_{k-1}) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f(\frac{z_{k-1} + z_k}{2})(z_k - z_{k-1}) \\
&= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} (\frac{z_{k-1} + z_k}{2})(z_k - z_{k-1}) = \frac{1}{2} \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} (z_{k-1} + z_k)(z_k - z_{k-1}) \\
&= \frac{1}{2} \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} (z_k^2 - z_{k-1}^2) = \frac{1}{2} \lim_{n\to\infty} (z_n^2 - z_0^2) = \frac{1}{2}(b^2 - a^2)
\end{aligned}$$

4.3 Algunas propiedades de la integral

4.3.1 Linealidad

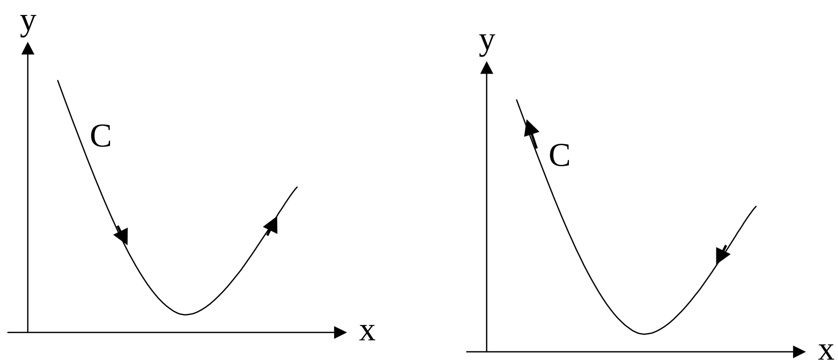
$$\int_C (\alpha f(z) \pm \beta g(z)) = \alpha \int_C f(z)\, dz \pm \beta \int_C g(z)\, dz$$

para α y β constantes complejas

4.3.2 Cambio de orientación

$$\int_{-C} f(z)\, dz = -\int_C f(z)\, dz$$

si las curvas tienen orientaciones contrarias figra 4.2



4.3.3 Propiedad aditiva

$$\int_C f(z)\, dz = \int_{C_1} f(z)\, dz + \int_{C_2} f(z)\, dz + ... + \int_{C_n} f(z)\, dz$$

donde las curvas $C_1, C_2, C_3 ... C_n$, forman la curva C

Raramente se usa la definición con límite para evaluar la integral de linea, ya que es muy compleja y por ello buscaremos métodos mas fáciles para ello, como lo indica el siguiente lema.

Lema 3 *Sea C una curva regular a trozos parametrizada por $z(t) = x(t) + iy(t)$ para $a \leq t \leq b$ y $f(z)$ una funcion continua en C entonces*

$$\int_C f(z)\,dz = \int_a^b f(z(t))\,z'(t)\,dt$$

Ejemplo 4.3 *Una parametrización del segmento de recta que une $0 + 0i$ con $1 + i$ es $z(t) = t + it$ para $0 \leq t \leq 1$ y $z'(t) = 1 + i$ entonces*

$$\begin{aligned}\int_C \bar{z}\,dz &= \int_0^1 (t - it) \cdot (1 + i)\,dt = (1 + i)\int_0^1 (t - it)\,dt = (1 + i)\left[\frac{t^2}{2} - i\frac{t^2}{2}\right]_0^1 \\ &= (1 + i)\left(\frac{1 - i}{2}\right) = 1\end{aligned}$$

Ejemplo 4.4 *La cicunferencia unitaria ($|z| = 1$), con centro en el origen, orientada en sentido contrario al movimiento de las manecillas del reloj, esta dada paramétricamente por*

$$z(t) = \cos t + i \sin t \quad 0 \leq t \leq 2\pi \quad o \;\; por \;\; z(t) = e^{it}, \quad z'(t) = ie^{it} \;\; con \;\; 0 \leq t \leq 2\pi$$

entonces

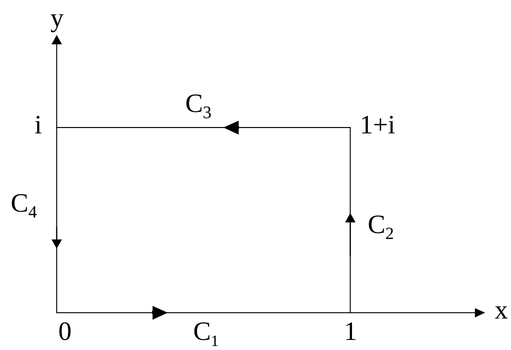
$$\int_C \frac{1}{z}\,dz = \int_0^{2\pi} \frac{ie^{it}}{e^{it}} dt = i\int_0^{2\pi} dt = 2\pi i$$

Ejemplo 4.5 *Una parametrización del gráfico de $y = x^2$ desde $(-1, 1)$ hasta $(2, 4)$ es $z(t) = t + it^2$, $z'(t) = 1 + 2ti$ $-1 \leq t \leq 2$ entonces*

$$\int_C Re z\,dz = \int_C x\,dz = \int_{-1}^2 t(1 + 2ti)dt = \int_{-1}^2 tdt + \int_{-1}^2 2t^2 idt = \frac{3}{2} + 6i$$

Ejemplo 4.6 *Una parametrización del segmento de recta que une los puntos $1 + 0i$ con $1 + 4i$ es $z(t) = 1 + ti$ con $0 \leq t \leq 4$ y $z'(t) = i$ entonces*

$$\int_C \operatorname{Im} z^2\,dz = \int_C 2xy\,dz = \int_0^4 2(1)(t)idt = 16i$$



Ejemplo 4.7 *Consideremos el contorno C del cuadrado de vértices* $0+0i, 1+0i, 1+i, 0+i$ *figura 4.3*

cuyas parametrizaciones son

$$\begin{array}{llcll} C_1 & z_1(t) & = & t+0i, & z_1'(t)=1, \quad 0\le t\le 1 \\ C_2 & z_2(t) & = & 1+(t-1)i, & z_2'(t)=i, \quad 1\le t\le 2 \\ C_3 & z_3(t) & = & (3-t)+i & z_3'(t)=-1, \quad 2\le t\le 3 \\ C_4 & z_4(t) & = & 0+(4-t)i & z_4'(t)=-i, \quad 3\le t\le 4 \end{array}$$

y así

$$\begin{aligned} \int_c z\cdot\bar{z}dz &= \int_{c_1} z\cdot\bar{z}\;dz+\int_{c_2} z\cdot\bar{z}\;dz+\int_{c_3} z\cdot\bar{z}\;dz+\int_{c_4} z\cdot\bar{z}\;dz \\ &= \int_0^1 t.t\,dt+\int_1^2 (1+(t-1)i).(1-(t-1)i).i\,dt+ \\ &+\int_2^3 ((3-t)+i)((3-t)-i)(-1)\,dt++\int_3^4 (4-t)i.(-(4-t)i)(-i)\,dt= \end{aligned}$$

$$=\frac{1}{3}+\frac{4i}{3}-\frac{4}{3}-\frac{i}{3}=-1+i$$

La integral $\int_C f(z)\,dz$ también se puede evaluar en términos de integrales de linea así : Si $z(t)=x(t)+iy(t)$, $a\le t\le b$; $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)=u(x(t),y(t))+iv(x(t),y(t))$

$dz = dx + idy$ entonces

$$f(z)dz = [u(x(t), y(t)) + iv(x(t), y(t))][dx + idy] = udx - vdy + i(vdx + udy) \text{ entonces}$$

$$\int_C f(z)\,dz = \int_C udx - vdy + i\int_C vdx + udy =$$

$$= \iint\limits_R (-\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y})dxdy + i\iint\limits_R (\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y})dxdy$$

$$\begin{aligned}
\text{Ahora } \int_c z \cdot \bar{z}dz &= \int_c (x^2 + y^2 + i0)dz = \int_C (x^2 + y^2)dx - 0dy + i\int_C 0.dx + (x^2 + y^2)dy \\
&= \iint\limits_R (0 - 2y)dxdy + i\iint\limits_R (2x - 0)dxdy = \\
&= -\iint\limits_R 2ydxdy + i\iint\limits_R 2xdxdy = \\
&= -2\int_0^1\int_0^1 ydxdy + 2i\int_0^1\int_0^1 xdxdy = i - 1
\end{aligned}$$

Ejemplo 4.8 *Consideremos el contorno C del cuadrado de vértices $0, 1, 1+i, i$ orientado en sentido contrario al movimiento de las manecillas del reloj, cuyas parametrizaciones son*

$$\begin{array}{lllll}
C_1 & : & z_1(t) = t & z_1'(t) = 1 & 0 \leq t \leq 1 \\
C_2 & : & z_2(t) = 1 + ti & z_2'(t) = i & 0 \leq t \leq 1 \\
C_3 & : & z_3(t) = -t + i & z_3'(t) = -1 & -1 \leq t \leq 0 \\
C_4 & : & z_4(t) = -ti & z_4'(t) = -i & -1 \leq t \leq 0
\end{array}$$

entonces

$$\int_C |z|^2\ dz = \int_C (x^2 + y^2)(dx + idy) = \int_C (x^2 + y^2)dx - 0dy + i\int_C 0.dx + (x^2 + y^2)dy =$$

$$= \int_C (x^2 + y^2)dx + i\int_C (x^2 + y^2)dy = \left[\int_0^1 (t^2 + 0^2)dt + i\int_0^1 (t^2 + 0^2).0dt\right] +$$

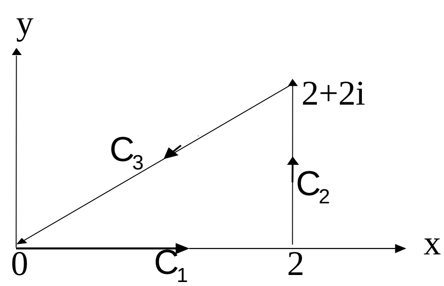
$$+\left[\int_0^1 (1^2+t^2).0dt + i\int_0^1 (1+t^2)1dt\right] + \left[\int_{-1}^0 (t^2+1)(-1)dt + i\int_{-1}^0 (t^2+1)(0)dt\right] +$$

$$+\left[\int_{-1}^0 (0+t^2)(0)dt + i\int_{-1}^0 (0+t^2)(-1)dt\right]$$

$$= \frac{1}{3} + \frac{4i}{3} - \frac{4}{3} - \frac{i}{3} = i-1$$

Observe que una curva se puede parametrizar de varias formas sin alterar el valor de la integral

Ejemplo 4.9 *Calcular* $\int_C (\bar{z})^2\, dz$ *con* C *el contorno del triangulo de vértices* $0, 2,$ $2+2i$ *orientado en sentido contrario al movimiento de las manecillas del reloj, figura 4.4*



Una parametrización de cada curva puede ser

$$\begin{array}{lllll} C_1 & : & z_1(t) = t & z_1'(t) = 1 & 0 \le t \le 2 \\ C_2 & : & z_2(t) = 2+ti & z_2'(t) = i & 0 \le t \le 2 \\ C_3 & : & z_3(t) = -t(1+i) & z_3'(t) = -(1+i) & -2 \le t \le 0 \end{array}$$

La primera solución es Aplicar el teorema de Green

$$\int_C (\bar{z})^2\, dz = \int_C udx - vdy + i\int_C vdx + udy =$$

$$= \int_C (x^2-y^2)dx + 2xydy + i\int_C -2xydx + (x^2-y^2)dy =$$

$$= \iint\limits_R (-\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y})dxdy + i\iint\limits_R (\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y})dxdy =$$

$$= \iint\limits_R (2y+2y)dxdy + i\iint\limits_R (2x+2x)dxdy = \iint\limits_R 4ydxdy + i\iint\limits_R 4xdxdy =$$

$$= \int\limits_0^2\int\limits_0^x (4y)dydx + 4i\int\limits_0^2\int\limits_0^x (x)dydx = \frac{16}{3} + \frac{32i}{3}$$

Una segunda solución es aplicar el lema 3

$$\int_c (\bar{z})^2\,dz = \int_{c_1} (\bar{z})^2\ dz + \int_{c_2} (\bar{z})^2\ dz + \int_{c_3} (\bar{z})^2\ \ dz =$$

$$= \left[\int\limits_0^2 t^2dt + \int\limits_0^2 (2-ti)^2 idt - \int\limits_{-2}^0 (-t+it)^2(1+i)dt\right] =$$

$$= \frac{16}{3} + \frac{32}{3}i$$

Una tercera solución es calcular las integrales de linea

$$\begin{aligned}
\int_C (\bar{z})^2\ dz &= \int_C udx - vdy + i\int_C vdx + udy = \\
&\int_C (x^2-y^2)dx + 2xydy + i\int_C - 2xydx + (x^2-y^2)dy \\
&= \left[\int\limits_0^2 \left[(t^2-0) + 2t.0\right]dt + i\int\limits_0^2 \left[-2t.0 + (t^2-0).0\right]dt\right] + \\
&\left[\int\limits_0^2 ((4-t^2).0 + 2.2.t)dt + i\int\limits_0^2 \left[-2.2t.0 + (4-t^2)\right]dt\right] + \\
&\left[\int\limits_{-2}^0 ((t^2-t^2).(-1) + 2.t^2(-1))dt + i\int\limits_{-2}^0 \left[-2t^2.(-1) + (t^2-t^2)(-1)\right]dt\right] = \\
&= \frac{16}{3} + \frac{32}{3}i
\end{aligned}$$

Ejemplo 4.10 *Calcular la integral*

$$\oint_{|z|=2} \bar{z}dz$$

Se calculará de tres formas

1. Una parametrización del círculo $|z| = 2$ es $z(t) = 2e^{it}$ $0 \leq t \leq 2\pi$ $dz = 2ie^{it}\, dt$, luego

$$\oint_{|z|=2} \bar{z}dz = \int_0^{2\pi} 2e^{-it}.2ie^{it}dt = 4i\int_0^{2\pi} dt = 8\pi i$$

2.Parametrizando la curva y aplicando la definición de integral de linea

$$\begin{aligned}
\oint_C \bar{z}dz &= \oint_C (x-iy)(dx+idy) = \oint_C xdx + ixdy - iydx + ydy = \\
&= \oint_C xdx + ydy + i\oint_C (xdy - ydx)
\end{aligned}$$

Como $z(t) = 2e^{it} = 2\cos t + 2isent$ entonces $x = 2cost$, d$x = -2sent$, $y = 2sen$t, $dy = 2cost$ y así

$$\begin{aligned}
\oint_C \bar{z}dz &= \oint_C xdx + ydy + i\oint_C (xdy - ydx) \\
&= \int_0^{2\pi} \left[(2cost)\,(-2sent) + (2sent)\,(2cost)\right] dt + i\int_0^{2\pi} \left[(2cost)\,(2cost) + (2sent)\,(2sent)\right] dt \\
&= -\int_0^{2\pi} 8\cos t \sin t dt + 4i\int_0^{2\pi} dt = 8\pi i
\end{aligned}$$

3.Aplicando el teorema *de* Green, ya que la curva es cerradad simple

$$\begin{aligned}
\oint_C \bar{z}dz &= \oint_C xdx + ydy + i\oint_C (xdy - ydx) = \iint_R 0dxdy + i\iint_R (1+1)\,dxdy \\
&= 2i\int_0^{2\pi}\int_0^{2} rdrd\theta = 8\pi i
\end{aligned}$$

Ejemplo 4.11 *Calcular la integral*

$$\oint_C \operatorname{Im}(i\bar{z})\,dz \quad = \oint_C xdz$$

Si C *es el contorno del triangulo de vértices* $(0,0)\,,(2,0)\,,(1,1)\,.$ *Se hará de tres formas distintas*

$$\oint_C \operatorname{Im}(i\bar{z})\,dz \quad = \oint_C xdz = \int_{C_1} xdz + \int_{C_2} xdz + \int_{C_3} xdz$$

1. Parametrizando cada curva y aplicando el lema 3

$$\begin{aligned} C_1 &: \ z(t) = t \quad 0 \le t \le 2 \quad\ z'(t) = 1dt \\ C_2 &: \ z(t) = -t \ + i\,(2+t) \quad -2 \le t \le -1 \quad\ z'(t) = (-1+i)\,dt \\ C_3 &: \ z(t) = -t - it \quad -1 \le t \le 0 \quad\ z'(t) = (-1-i)\,dt \end{aligned}$$

por tanto

$$\begin{aligned} \oint_C \operatorname{Im}(i\bar{z})\,dz &= \oint_C xdz = \int_{C_1} xdz + \int_{C_2} xdz + \int_{C_3} xdz \\ &= \int_0^2 tdt + \int_{-2}^{-1} (-t)(-1+i)dt + \int_{-1}^{0} (-t)(-1-i)dt = i \end{aligned}$$

2.Aplicando el teorema *de* Green

$$\begin{aligned} \oint_C \operatorname{Im}(i\bar{z})\,dz &= \oint_C xdz = \oint_C x(dx+idy) = \oint_C xdx + i\oint_C xdy \\ &= \iint_R 0dxdy + i\iint_R 1dxdy = i\int_0^1 \int_y^{2-y} dxdy = i \end{aligned}$$

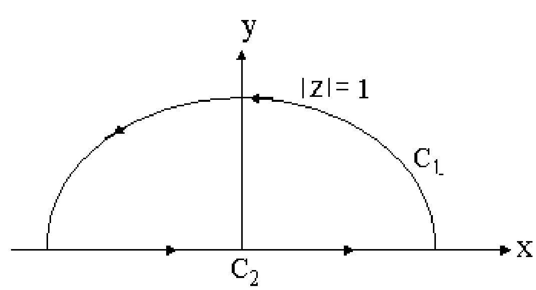
3.Parametrizando cada curva y aplicando la definición de integral de linea

$$\begin{aligned}
\oint_C xdz &= \oint_C x(dx+idy) = \oint_C xdx + i\oint_C xdy \\
&= \left(\int_{C_1} xdx + i\int_{C_1} xdy\right) + \left(\int_{C_2} xdx + i\int_{C_2} xdy\right) + \left(\int_{C_3} xdx + i\int_{C_3} xdy\right) \\
&= \left(\int_0^2 tdt + i\int_0^2 t.0dt\right) + \left(\int_{-2}^{-1} -t(-1)dt + i\int_{-2}^{-1} (-t).dt\right) + \left(\int_{-1}^{0} -t(-1)dt + i\int_{-1}^{0} tdt\right) \\
&= i
\end{aligned}$$

Ejemplo 4.12 *Calcular la integral*

$$\oint_C zdz$$

Si C es el contorno mostrado en la figura 4.5



1.Aplicando el teorema *de* Green

$$\begin{aligned}
\oint_C zdz &= \oint_C (x+iy)(dx+idy) = \oint_C xdx + ixdy + iydx - ydy \\
&= \oint_C xdx - ydy + i\oint_C (xdy + ydx) = \iint_R 0dxdy + i\iint_R (1-1)dxdy \\
&= \int_0^{\pi}\int_0^1 0rdrd\theta + i\int_0^{\pi}\int_0^1 (1-1)rdrd\theta = 0
\end{aligned}$$

2.Parametrizando la curva y aplicando la definición de integral de linea

$$\begin{aligned}
\oint_C z dz &= \oint_C x dx - y dy + i \oint_C (x dy + y dx) = \\
&= \int_0^{\pi} \left[(cost)(-sent) - (sent)(cost)\right] dt + i \int_0^{\pi} \left[(cost)(cost) + (sent)(-sent)\right] dt \\
&\quad + \int_{-1}^{1} t dt + i \int_{-1}^{1} (t.0 + 0.1) dt = 0
\end{aligned}$$

3 Aplicando el lema 3

$$\oint_C z dz = \int_{C_1} z dz + \int_{C_2} z dz = \int_0^{\pi} e^{it} i e^{it} dt + \int_{-1}^{1} t dt = i \int_0^{\pi} e^{2it} dt + \int_{-1}^{1} t dt = 0$$

El siguiente teorema se utiliza para hacer estimaciones

Lema 4 *Si $f(z)$ es continua sobre una curva C regular a trozos parametrizada por $z(t)$ para $a \leq t \leq b$ entonces*

$$\left| \int_C f(z)\, dz \right| \leq \int_a^b |f(z(t))|\, |z'(t)|\, dt \quad y$$

Si L es la longitud de la curva C y $|f(z)| \leq M$ para z en C entonces

$$\left| \int_C f(z)\, dz \right| \leq ML$$

En efecto : $\int_C f(z)\, dz = \int_a^b f(z(t))\, z'(t)\, dt$ y se quiere probar que

$$\left| \int_C f(z(t))\, z'(t)\, dt \right| \leq \int_a^b |f(z(t))|\, |z'(t)|\, dt$$

Par ello sea

$$\int_a^b f(z(t))\, z'(t)\, dt = re^{i\theta}$$

entonces

$$r = e^{-i\theta}\int_a^b f(z(t))\, z'(t)\, dt = \int_a^b e^{i\theta} f(z(t))\, z'(t)\, dt$$

entonces

$$\begin{aligned} r &= Re(r) = Re\left(\int_a^b e^{i\theta} f(z(t))\, z'(t)\, dt\right) = \\ &= \int_a^b Re(e^{i\theta} f(z(t))\, z'(t)\,)dt \leq \int_a^b \left|e^{i\theta} f(z(t))\, z'(t)\,\right| dt \\ &= \int_a^b \left|e^{i\theta}\right| |f(z(t))\, z'(t)\,|\, dt = \int_a^b |f(z(t))\, z'(t)\,|\, dt = \int_a^b |f(z(t))|\,|\, z'(t)|\, dt \ \ \text{por lo tanto} \end{aligned}$$

$$\left|\int_C f(z)\, dz\right| = \left|\int_a^b f(z(t))\, z'(t)\, dt\right| \leq \int_a^b |f(z(t))|\, |z'(t)|\, dt$$

Para demostrar la parte segunda, observe que

$$\left|\int_C f(z)\, dz\right| \leq \int_a^b |f(z(t))|\, |z'(t)|\, dt \leq \int_a^b M\, |z'(t)|\, dt = ML \ \ \text{y así}$$

$$\left|\int_C f(z)\, dz\right| \leq ML$$

Los siguientes ejemplos ilustran el anterior Lema

Ejemplo 4.13 *Mostrar que*

$$\left|\int_C z^2\, dz\right| \leq \int_C \left|z^2\, dz\right| = \int_C \left|z^2\right|\, |\, dz| \leq 2\sqrt{2} \ \ \textit{si } C \textit{ es el segmento de recta que va de } 0 \textit{ a } 1{+}i$$

En efecto $|f(z)| = |z^2| \leq 2$ *y como la longitud de la curva es* $\sqrt{2}$ *entonces*

$$\left|\int_C z^2\, dz\right| \leq 2\sqrt{2}$$

Ejemplo 4.14 *Mostrar que si C es la circunferencia de radio 2, con centro en el origen orientada en sentido contrario al movimiento de las manecillas del reloj entonces*

$$\left|\oint_C \frac{e^z}{z^2+1}\,dz\right| \leq \int_C \left|\frac{e^z}{z^2+1}dz\right| = \int_C \frac{|e^z|\,|dz|}{|z^2+1|} \leq \int_C \frac{|e^z|\,|dz|}{|z^2|-1} \leq \int_C \frac{e^2\,|dz|}{3} = \frac{4\pi e^2}{3}$$

si C es el contorno de $|z| = 2$.ya que $|z^2+1| \geq |z|^2 - 1 = 4 - 1 = 3$ para $|z| = 2$ $|e^z| = e^x < e^2$ y como la longitud de la circunferencia es 4π entonces

$$\left|\oint_C \frac{e^z}{z^2+1}\,dz\right| \leq \frac{e^2}{3}\int_0^{2\pi} 2dt = \frac{4\pi e^2}{3}$$

Ejemplo 4.15 *Mostrar que si C es la circunferencia de radio 2, con centro en el origen orientada en sentido contrario al movimiento de las manecillas del reloj entonces*

$$\left|\oint_C e^{Re(z)}\,dz\right| \leq \int_C \left|e^{Re(z)}dz\right| = \int_C \left|e^{Re(z)}\right|\,|dz| \leq \int_C e^{|Re(z)|}\,|dz| \leq \int_C e^2\,|dz| = 4\pi e^2$$

Como una parametrización de C es $z(t) = 2\cos t + 2i\sin t$ $0 \leq t \leq 2\pi$ y como $Rez = 2\cos t$ alcanza su valor maximo de 2 cuando $t = 0$ o $t = 2\pi$ se tiene que

$$e^{Re(z)} \leq e^2 \quad \text{y como la longitud de } C \text{ es } 4\pi \text{ entonces}$$

$$\left|\oint_C e^{Re(z)}\,dz\right| \leq e^2\int_0^{2\pi} 2dt = e^2 4\pi$$

4.3.4 Terema de Barrow

Sea $F(z)$ una función analítica en un dominio simplemente conexo D, tal que $F'(z) = f(z)$ para $z\epsilon D$ y C una curva regular a trozos en D con punto inicial z_1 y con punto final z_2 entones

$$\int_C f(z)dz = F(z_2) - F(z_1)$$

En efecto sea $z = z(t) = x(t) + iy(t)$, $a \leq t \leq b$ una parametrización de C entonces

$$\begin{aligned}
\int_C f(z)dz &= \int_a^b f(z(t))z'(t)dt = \int_a^b F'(z(t))z'(t)dt = \\
&= \int_a^b \frac{d}{dt}F(z(t))dt = F(z(b)) - F(z(a)) \\
&= F(z_2) - F(z_1)
\end{aligned}$$

En particular si C es una curva cerrada simple regular a trozos $(z_1 = z_2)$ entonces

$$\int_C f(z)dz = F(z_2) - F(z_1) = 0$$

Ejemplo 4.16 *La función $F(z) = \sin z$ es analítica en todo el plano, que es un dominio simplemente conexo y $F'(z) = \cos z = f(z)$ para todo z, por lo tanto*

$$\int_i^{5+i} \cos z\, dz = \sin z|_i^{5+i} = \sin(5+i) - \sin i$$

Ejemplo 4.17

$$\int_i^{5+i} e^z\, dz = [e^z]_i^{5+i} = e^{(5+i)} - e^i$$

Ejemplo 4.18

$$\int_i^{5+i} z\, dz = \left[\frac{z^2}{2}\right]_i^{5+i} = \frac{(5+i)^2}{2} - \frac{(i)^2}{2}$$

Ejemplo 4.19

$$\int_0^i \sin 3z \cos 3z\, dz = \left[\frac{\sin^2 3z}{6}\right]_0^i = \frac{\sin^2 3i}{6}$$

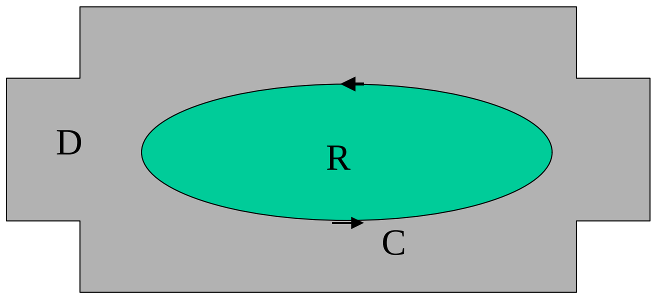
Ejemplo 4.20

$$\int_0^i ze^{2z}\, dz = \left[\frac{ze^{2z}}{2} - \frac{e^{2z}}{4}\right]_0^i = \frac{ie^{2i}}{2} - \frac{e^{2i}}{4} + \frac{1}{4}$$

Estudiaremos a continuación uno de los teoremas fundamentales de la teoria de fiunciones de variable compleja y es el teorema de la integral de cauchy

4.4 Teorema de la integral de Cauchy

Sea $f(z)$ una función analítica en un dominio simplemente conexo D. Si C es cualquier curva simple cerrada regular a trozos en D, figura 4.6



entonces

$$\oint_C f(z)\,dz = 0$$

En efecto como

$$\oint_C f(z)\,dz = \oint_C u(x,y)dx - v(x,y)dy + i\oint_C v(x,y)dx + u(x,y)dy$$

y como $u(x,y)$ y $v(x,y)$ satisfacen las hipótesis del teorema de Green y aplicando este teorema a ambas integrales de linea de la derecha se obtiene que

$$\begin{aligned}\oint_C f(z)\,dz &= \oint_C udx - vdy + i\oint_C vdx + udy = \\ &= \iint_R \left(-\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right)dxdy + i\iint_R \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}\right)dxdy\end{aligned}$$

donde R es la región encerrada por C. Sin embargo en las integrales dobles, el integrando es cero, ya que como $f(z)$ es analítica, u y v satisfacen las ecuaciones de Cauhy Riemann, es decir,

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad y \quad \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}$$

entonces

$$\begin{aligned}\oint_C f(z)\,dz &= \iint_R \left(-\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right)dxdy + i\iint_R \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}\right)dxdy = \\ &= \iint_R 0dxdy + i\iint_R 0dxdy = 0\end{aligned}$$

y así

$$\oint_C f(z)\,dz = 0$$

Ejemplo 4.21 *La integral*

$$\oint_C e^z\,dz = 0$$

Si C es cualquier curva simple cerrada regular a trozos en el plano, orientada en sentido contrario al movimiento de las manecillas del reloj, pues $f(z) = e^z$ es una función analítica en todo el plano, que es un dominio simplente conexo que contiene a C, es decir,

$$\oint_{|z|=1} e^z\,dz = 0$$

pero tratemos de calcular esta integral usando el lema 3. Como

$$z(t) = e^{it} \quad 0 \le t \le 2\pi,\ dz = ie^{it}dt \text{ entonces}$$

$$\oint_{|z|=1} e^z\,dz = \int_0^{2\pi} e^{e^{it}} ie^{it}dt = i\int_0^{2\pi} e^{(\cos t + i\sin t)}(\cos t + i\sin t)dt =$$

$$= \int_0^{2\pi} e^{(\cos t + i\sin t)}(i\cos t - \sin t)dt = \int_0^{2\pi} e^{\cos t}\left(\cos(\sin t) + i\sin(\sin t)\right)(i\cos t - \sin t)dt =$$

$$= \int_0^{2\pi} e^{\cos t}\left(-\sin t\cos(\sin t) - \sin(\sin t)\cos t\right) + ie^{\cos t}\left(\cos t\cos(\sin t) - \sin t\sin(\sin t)\right) =$$

$$= \left[e^{\cos t}\cos(\sin t) + ie^{\cos t}\sin(\sin t)\right]_0^{2\pi} = 0 \quad \textit{dificil}$$

Ejemplo 4.22 *La integral*

$$\oint_C \cos z \sin z \, dz = 0$$

Si C es cualquier curva simple cerrada regular a trozos en el plano, orientada en sentido contrario al movimiento de las manecillas del reloj, pues $f(z) = \cos z \sin z$ es una función analítica en todo el plano, que es un dominio simplente conexo que contiene a C

Ejemplo 4.23 *La integral*

$$\oint_C z^4 \cos z \, dz = 0$$

Si C es el cuadrado con vértices $0+0i, 1+0i, 1+i, 0+i$, orientado en sentido contrario al movimiento de las manecillas del reloj, pues $f(z) = z^4 \cos z$ es una función analítica en todo el plano, que es un dominio simplente conexo que contiene a C

Ejemplo 4.24 *La integral*

$$\oint_C z^4 \sin^3 z \cos z \, dz = 0$$

Si C es el cuadrado con vértices $0+0i, 1+0i, 1+i, 0+i$, orientado en sentido contrario al movimiento de las manecillas del reloj, pues $f(z) = z^4 \sin^3 \cos z$ es una función analítica en todo el plano, que es un dominio simplente conexo que contiene a C

Ejemplo 4.25 *La integral*

$$\oint_C \left(z^3 + 4z^6 \; - z^4\right) e^z \sin z dz = 0$$

Si C es cualquier curva simple cerrada regular a trozos en el plano, orientada en sentido contrario al movimiento de las manecillas del reloj, pues $f(z) = \left(z^3 + 4z^6 \; - z^4\right) e^z \sin z$ es una función analítica en todo el plano, que es un dominio simplente conexo que contiene a C

Ejemplo 4.26 *La integral*

$$\oint_C \frac{\cos^3 z}{(z-i)(z+i)} \, dz = 0$$

Si C es la circunferencia $|z-(4+5i)| = 1$, orientada en sentido contrario al movimiento de las manecillas del reloj, ya que $f(z) = \dfrac{\cos^3 z}{(z-i)(z+i)}$ es una función analítica sobre y en el interior de C, luego basta tomar un dominio simplemente conexo, que contenga a C y que no contenga a $z = \pm i$.

Ejemplo 4.27 *La integral*

$$\oint_C \frac{1}{z}\,dz = 2\pi i \quad \textit{Ejemplo 4.4}$$

Si C es la circunferencia $|z| = 1$,orientada en sentido contrario al movimiento de las manecillas del reloj, $f(z) = \dfrac{1}{z}$ es analítica en el dominio D formado al excluir el origen del plano complejo. Sin embargo, D no es simplemente conexo, esto muestra que la conclusión del teorema de Cauchy falla si D no es simplemente conexo

Ejemplo 4.28 *La integral*

$$\oint_C \frac{1}{z}\,dz = 0$$

Si C es la circunferencia $|z - 2i| = 1$, orientada en sentido contrario al movimiento de las manecillas del reloj, ya que $f(z) = \dfrac{1}{z}$ es una función analítica sobre y en el interior de C luego basta tomar un dominio simplemente conexo, que contenga a C y que no contenga a $z = 0$.

Ejemplo 4.29 *La integral*

$$\oint_C \frac{1}{z^3}\,dz = 0 \quad \textit{Aplicar lema 3(Ejercicio)}$$

Si C es la circunferencia $|z| = 1$, orientada en sentido contrario al movimiento de las manecillas del reloj, pues $f(z) = \dfrac{1}{z^3}$ es analítica en el dominio D formado al excluir el origen del plano complejo. Sin embargo, D no es simplemente conexo. Que conclusión puede sacar de este ejemplo?

Ejemplo 4.30 *Evaluar*

$$\oint_C \frac{z}{(z - 2i)^5 \sin z}\,dz$$

Si C es la circunferencia $|z - 8i| = 1$, orientada en sentido contrario al movimiento de las manecillas del reloj.

$f(z) = \dfrac{z}{(z - 2i)^5 \sin z}$ no es analítica en $z = 2i$, ni en $z = n\pi$, pero la curva C es la circunferencia de radio 1 y centro $8i$ que no pasa, ni encierra a $z = 2i$, ni a $z = n\pi$, luego $f(z)$ es analítica sobre y en el interior de C , tomar D , como por ejemplo el interior de $|z - 8i| = 4$ que es un dominio simplemente conexo que contiene a C y a su interior, entonces

$$\oint_C \frac{z}{(z-2i)^5 \sin z}\, dz = 0$$

Ejemplo 4.31 *Evaluar la integral*

$$\oint_C \left[\frac{6}{(z-i)^2} + \frac{2}{z-i} + 1 - 3(z-i)^2\right] dz$$

si C es la circunferencia $|z-i| = 1$,orientada en sentido contrario al movimiento de las manecillas del reloj. f no es analítica en $z = i$, luego

$$\oint_C \left(\frac{6}{(z-i)^2} + \frac{2}{z-i} + 1 - 3(z-i)^2\right) dz = \oint_C \frac{6}{(z-i)^2} dz + \oint_C \frac{2}{z-i} dz$$

$$+ \oint_C (1 - 3(z-i)^2) dz = \int_0^{2\pi} \frac{6ie^{it}}{e^{2it}} dt + \int_0^{2\pi} \frac{2ie^{it}}{e^{it}} dt + 0 = 0 + 4\pi i + 0 = 4\pi i$$

ya que

$$\oint_C \left(1 - 3(z-i)^2\right) dz = 0 \quad \textit{en} \quad C : |z-i| = 1$$

Ejemplo 4.32 *Evaluar la integral*

$$\oint_C \frac{8z}{z^3 - 3iz^2 + z - 3i}\, dz = \oint_C \frac{8z}{(z-i)(z+i)(z-3i)}\, dz$$

si C es la circunferencia $|z+i| = 1$, orientada en sentido contrario al movimiento de las manecillas del reloj.

En efecto:
Las fraciones parciales de f son

$$f(z) = \frac{8z}{(z-i)(z+i)(z-3i)} = \frac{2i}{z-i} - \frac{3i}{z-3i} + \frac{i}{z+i} \text{ entonces}$$

$$\oint_C \frac{8z}{(z-i)(z+i)(z-3i)} dz = \oint_C \left(\frac{2i}{z-i} - \frac{3i}{z-3i} + \frac{i}{z+i}\right) dz$$

y observemos que los puntos donde f no es analitica son $z = \pm i$ y $z = 3i$ y que el único punto en el interior de C es $z = -i$ luego

$$-\oint_C \frac{3i}{(z-3i)} dz = \oint_C \frac{2i}{z-i} dz = 0$$

pues las funciones $f(z) = \dfrac{3i}{(z-3i)}$ y $g(z) = \dfrac{2i}{z-i}$ son analíticas en el interior y sobre la frontera de C. Ahora la integral

$$\oint_C \frac{i}{z+i}dz = \int_0^{2\pi} \frac{i^2 e^{it}}{e^{it}} dt = -2\pi \text{ luego}$$

$$\begin{aligned}\oint_C \frac{8z}{(z-i)(z+i)(z-3i)}dz &= \oint_C \frac{2i}{z-i}dz - \oint_C \frac{3i}{(z-3i)}dz + \oint_C \frac{i}{z+i}dz \\ &= 0 + 0 - 2\pi = -2\pi\end{aligned}$$

Ejemplo 4.33 *Evaluar la integral*

$$\oint_C (z^4 - Re(z))dz$$

si C es la circunferencia $|z| = 2$, orientada en sentido contrario al movimiento de las manecillas del reloj. La integral $\oint_C z^4 dz = 0$ ya que la función $f(z) = z^4$ es analítica sobre y en el interior de la curva C:$|z| = 2$. A La integral $\oint_C Re(z)dz$ no se le puede aplicar el teorma de Cauchy, ya que Rez no es analítica en ningún punto, luego para evaluar la integral parametrizamos la curva ó aplicamos el teorema de Green.

Una parametrización de C es $z(t) = 2e^{it} = 2\cos t + 2i \sin t \quad 0 \leq t \leq 2\pi$. $z'(t) = -2\sin t + 2i\cos t \quad Rez = 2\cos t$, entonces

$$\oint_C (z^4 - Re(z))dz = \oint_C z^4 dz - \oint_C Re(z)dz = 0 - \int_0^{2\pi} 2\cos t(-2\sin t + 2i\cos t)dt = -4\pi i$$

4.4.1 Ramificacines del teorema de Cauchy

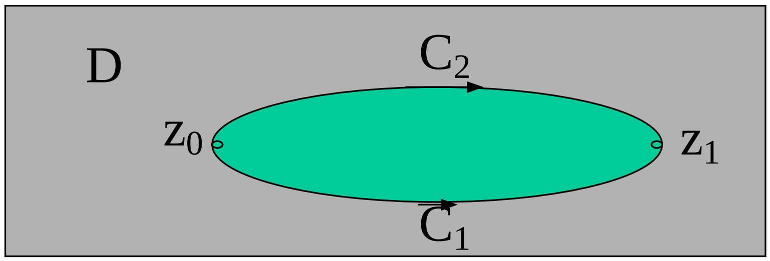
Independencia de la trayectoria

Si $f(z)$ es analítica en un dominio simplemente conexo D, entonces la integral

$$\int_C f(z)dz$$

es independiente de la trayectoria en D, es decir la integral de linea tiene el mismo valor a lo largo de cualquier curva que este contenida en D y solo depende del punto final y del punto inicial

Cuando la $\int_C f(z)dz$ es independiente de la trayectoria en D, se acostumbra a escribir la $\int_C f(z)dz$, como $\int\limits_{z_0}^{z_1} f(z)dz$ donde z_0 es el punto inicial de C y z_1 el punto final



En efecto, como $f(z)$ es analítica en un dominio simplemente conexo D, y sean z_0 y z_1 puntos en D Sean C_1 y C_2 dos curvas desde z_0 hasta z_1 en D, figura 4.7, invirtiendo la orientación de C_2 obtenemos una curva cerrada K en D con punto inicial y terminal z_0, entonces por el teorema de Cauchy la integral $\oint_K f(z)dz = 0$ y descomponiendo K en C_1 y C_2 obtenemos

$$\oint_K f(z)dz = 0 = \int_{C_1} f(z)dz - \int_{C_2} f(z)dz = 0$$

lo que implica que

$$\int_{C_1} f(z)dz = \int_{C_2} f(z)dz$$

por lo tannto en D la $\int_C f(z)dz$ depende solamente de los puntos extremos de C

Ejemplo 4.34 *La función $f(z) = \cos z$ es analítica en todo el plano, que es un conjunto simplemente conexo, por lo tanto la $\int_C \cos z\, dz$ es independiente de la trayectoria, es decir, si C es cualquier curva que va desde i hasta $5+i$ entonces*

$$\int\limits_{i}^{5+i} \cos z\, dz = \sin(5+i) - \sin i = \int\limits_{i}^{i+1} \cos z\, dz + \int\limits_{i+1}^{5+i} \cos z\, dz$$

Ejemplo 4.35

$$\int\limits_{i}^{5+i} e^z\, dz = e^{(5+i)} - e^i = \int\limits_{i}^{0} e^z\, dz + \int\limits_{0}^{3+i} e^z\, dz + \int\limits_{3+i}^{5+i} e^z\, dz$$

Ejemplo 4.36

$$\int_{i}^{5+i} z\,dz = \left[\frac{z^2}{2}\right]_{i}^{5+i} = \frac{(5+i)^2}{2} - \frac{(i)^2}{2} = \int_{i}^{-i} z\,dz + \int_{-i}^{5-3i} z\,dz + \int_{5-3i}^{5+i} z\,dz$$

Existencia de una antiderivada

Sea $f(z)$ analítica en un dominio simplemente conexo D, y sean a y z puntos cualquiera en D, y sea

$$F(z) = \int_{a}^{z} f(t)dt$$

entonces $F(z)$ es una función analítica en D y $F'(z) = f(z)$ para todo z en D.
En efecto, partamos de que

$$F(z+\triangle z) - F(z) = \int_{a}^{z+\triangle z} f(t)dt - \int_{a}^{z} f(t)dt = \int_{z}^{z+\triangle z} f(t)dt$$

y como podemos tomar cualquier trayectoria que una z con $z + \triangle z$, escogeremos la más simple que es la linea recta que una los puntos, entonces

$$\frac{F(z+\triangle z) - F(z)}{\triangle z} - f(z) = \frac{1}{\triangle z}\left[\int_{z}^{z+\triangle z} f(t)dt - f(z)\right] = \frac{1}{\triangle z}\left[\int_{z}^{z+\triangle z} f(t) - f(z)\right] dt$$

y como f es analítica, entonces f es continua, luego

$$\left|\frac{1}{\triangle z}\right| \left|\int_{z}^{z+\triangle z} (f(t) - f(z))dt\right| \leq \left|\frac{1}{\triangle z}\right| \int_{z}^{z+\triangle z} |f(t) - f(z)|\,|dt| = \left|\frac{1}{\triangle z}\right| \epsilon\,|\triangle z| = \epsilon$$

así que si $\triangle z \to 0$, entonces

$$\lim_{\triangle z \to 0} \frac{F(z+\triangle z) - F(z)}{\triangle z} - f(z) = 0$$

y así

$$\lim_{\triangle z \to 0} \frac{F(z+\triangle z) - F(z)}{\triangle z} = f(z) = F'(z)$$

luego la integral de una función analítica, es también una función analítica, asi que

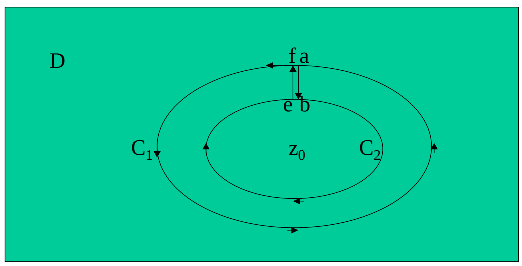
$$\int_{a}^{b} f(z)dz = \int_{c}^{b} f(z)dz - \int_{c}^{a} f(z)dz = F(b) - F(a)$$

Teorema de la deformación

Sea $f(z)$ analítica en un dominio D, excepto en z_0 y sea dos curvas simples cerradas regulares a trozos en D conteniendo a z_0 con $C_2 \subseteq C_1$ con orientaciones en sentido contrario al del movimiento de las manecillas del reloj figura 4.8, entonces

$$\oint_{C_1} f(z)\,dz = \oint_{C_2} f(z)\,dz$$

En efecto cortamos el anillo y lo convertimos en un dominio simplemente conexo,



luego

$$\begin{aligned} 0 &= \oint_{abefa} f(z)\,dz = \int_{ab} f(z)\,dz + \int_{be} f(z)\,dz + \int_{ef} f(z)\,dz + \int_{fa} f(z)\,dz = \\ &= -\oint_{C_2} f(z)\,dz + \oint_{C_1} f(z)\,dz \quad \text{luego} \end{aligned}$$

$$\oint_{C_1} f(z)\,dz = \oint_{C_2} f(z)\,dz$$

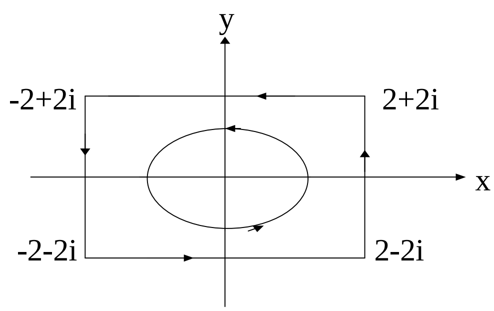
Ejemplo 4.37 *Evaluar la*

$$\oint_C \frac{1}{z}\,dz$$

si C es el contorno del cuadrado de vértices $2+2i, -2+2i, -2-2i, 2-2i$ orientado en sentido contrario al del movimiento de las manecillas del reloj figura 4.9

En lugar de calcular la integral

$$\oint_C \frac{1}{z}\,dz$$



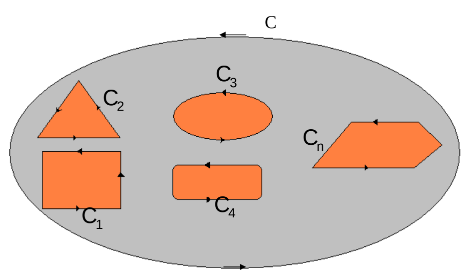
parametrizando cada curva y evaluando las 4 integrales de linea, aplicamos el teorema anterior a una curva más sencilla como lo es la circunferencia unitaria con centro en $(0,0)$, así

$$\oint_C \frac{1}{z}\,dz = \int_0^{2\pi} \frac{ie^{it}dt}{e^{it}} = 2\pi i \qquad \text{si} \quad z(t) = e^{it} \; 0 \leq t \leq 2\pi$$

es una parametrización de la circunferencia unitaria con centro en $(0,0)$y radio 1

Generalizando el teorema anterior tenemos

Sea $f(z)$ analítica en una región limitada por curvas simples cerradas regulares a trozos C, C_1, C_2, C_3, C_4,....,C_n disyuntas, donde C_1, C_2, C_3, C_4,....,C_n estan contenidas en C figura 4.10, y sobre estas curvas, entonces

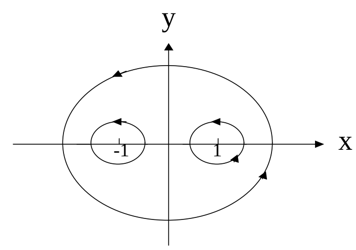


$$\int_C f(z)\,dz = \oint_{C_1} f(z)\,dz + \oint_{C_2} f(z)\,dz + \oint_{C_3} f(z)\,dz + ... + \oint_{C_n} f(z)\,dz$$

Ejemplo 4.38 *Ilustrar el teorema anterior con la integral*

$$\oint_C \frac{\sin z}{z^2-1}\,dz$$

si C es el contorno de la circunferencia $|z| = 2$ orientado en sentido contrario al del movimiento de las manecillas del reloj figura 4.11



En efecto, como

$$f(z) = \frac{\sin z}{z^2 - 1} = \frac{\sin z}{(z-1)(z+1)}$$

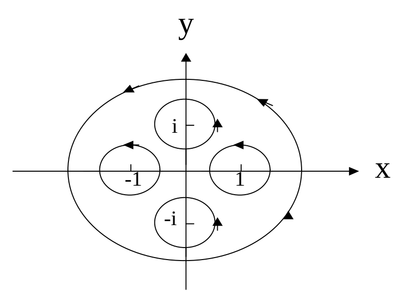
y $z = \pm 1$ se encuentran en el interior de $|z| = 2$, se puede aplicar el teorema generalizado anterior así :

$$\oint_{|z|=2} \frac{\sin z}{z^2 - 1}\, dz = \oint_{|z-1|=1/2} \frac{\sin z}{z^2 - 1}\, dz + \oint_{|z+1|=1/2} \frac{\sin z}{z^2 - 1}\, dz$$

Ejemplo 4.39 *Ilustrar el teorema anterior con la integral*

$$\oint_{|z|=20} \frac{\sin z}{z^4 - 1}\, dz$$

si C es el contorno de la circunferencia $|z| = 20$ orientado en sentido contrario al del movimiento de las manecillas del reloj figura 4.12



En efecto:

Como

$$f(z)=\frac{\sin z}{z^4-1}=\frac{\sin z}{(z-1)(z-i)(z+1)(z+i)}$$

y $z=\pm i,\pm 1$ se encuentran en el interior de $|z|=20$, se puede aplicar el teorema generalizado anterior así :

$$\oint\limits_{|z|=20}\frac{\sin z}{z^4-1}\,dz=\oint\limits_{|z-i|=\frac{1}{2}}\frac{\sin z}{z^4-1}\,dz+\oint\limits_{|z+i|=\frac{1}{2}}\frac{\sin z}{z^4-1}\,dz+\oint\limits_{|z-1|=\frac{1}{2}}\frac{\sin z}{z^4-1}\,dz+\oint\limits_{|z+1|=\frac{1}{2}}\frac{\sin z}{z^4-1}\,dz$$

4.4.2 Fórmula de la integral de Cauchy

Si $f(z)$ es analítica en un dominio simplemente conexo D, entonces para cualquier punto a en D y cualquier curva simple cerrada regular a trozos C en D que contenga a a, se tiene que

$$f(a)=\frac{1}{2\pi i}\oint_C\frac{f(z)}{z-a}dz$$

donde C se recorre en sentido contrario al movimiento de las manecillas del reloj
En efecto,

$$\oint_C\frac{f(z)}{z-a}dz=\oint_C\frac{f(a)+f(z)-f(a)}{z-a}dz=\oint_C\frac{f(a)}{z-a}dz+\oint_C\frac{f(z)-f(a)}{z-a}dz$$

y demostremos que la integral

$$\oint_C\frac{f(z)-f(a)}{z-a}dz=0.$$

Como

$$0\leq\left|\oint_C\frac{f(z)-f(a)}{z-a}dz\right|\leq\oint_C\left|\frac{f(z)-f(a)}{z-a}\right||dz|\leq\frac{2\pi r\epsilon}{r}=2\pi\epsilon\to 0$$

luego

$$\oint_C\frac{f(z)}{z-a}dz=\oint_C\frac{f(a)}{z-a}dz=f(a)2\pi i\ \ \text{si C}:|z-a|=r$$

4.4.3 Derivada de una función analítica

Si $f(z)$ es analítica en un dominio simplemente conexo D, entonces para cualquier punto a en D y cualquier curva simple cerrada regular a trozos C en D que contenga a a, se cumple que f tiene derivadas de todos los órdenes en a y la nésima derivada de f en a viene dada por

$$f^{(n)}(a) = \frac{n!}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}dz \qquad n = 0, 1, 2, ...$$

donde C se recorre en sentido contrario al movimiento de las manecillas del reloj
Si $n = 1$, entonces

$$f'(a) = \lim_{\triangle z \to 0} \frac{f(a+\triangle z) - f(a)}{\triangle z}$$

pero

$$\frac{f(a+\triangle z) - f(a)}{\triangle z} = \frac{1}{2\pi i \triangle z}\left(\oint_C \frac{f(z)}{z-(a+\triangle z)}dz - \oint_C \frac{f(z)}{z-a}dz\right) \tag{4.4.1}$$

Simplificando la ec. (4.4.1) se tiene.

$$\frac{f(a+\triangle z) - f(a)}{\triangle z} = \frac{1}{2\pi i}\left(\oint_C \frac{f(z)}{(z-(a+\triangle z))(z-a)}dz\right)$$

Ahora

$$\frac{1}{2\pi i}\left(\oint_C \frac{f(z)}{(z-a-\triangle z)(z-a)}dz - \oint_C \frac{f(z)}{(z-a)^2}dz\right) = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)\triangle z}{(z-a-\triangle z)(z-a)^2}dz$$

y demostremos que esta última integral tiende a cero cuando $\triangle z \to 0$
Sea r la mínima distancia de a a los puntos de C. Entonces para todo $|z|$ en C se tiene que $|z-a| \geq r$ entones $\dfrac{1}{|z-a|} \leq \dfrac{1}{r}$ entonces $\dfrac{1}{|z-a|^2} \leq \dfrac{1}{r^2}$ y si $|\triangle z| \leq \frac{r}{2}$ para todo z en C se tiene que

$$|z-a-\triangle z| \geq |z-a| - |\triangle z| = r - \frac{r}{2} = \frac{r}{2}$$

entonces

$$0 \leq \left|\frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)\triangle z}{(z-a-\triangle z)(z-a)^2}dz\right| \leq$$

$$\oint_C \left|\frac{|f(z)|\,|\triangle z|}{|z-a-\triangle z|\,|z-a|^2}dz\right| \leq \left|\frac{M2\pi r\,|\triangle z|}{2\pi}\frac{2}{r}\frac{1}{r^2}\right. \to 0 \;\text{ si } \triangle z \to 0$$

entonces

$$\left|\frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)\triangle z}{(z-a+\triangle z)(z-a)^2}dz\right| \to 0 \quad \text{cuando} \quad \triangle z \to 0$$

y así
$$\lim_{\triangle z\to 0}\frac{f(a+\triangle z)-f(a)}{\triangle z}=f'(a)=\frac{1}{2\pi i}\oint_C\frac{f(z)}{(z-a)^2}dz$$
Siguiendo un razonamiento semejante se demuestra $f''(a)$ y por inducción termina su prueba

Ejemplo 4.40 *Evaluar la*
$$\oint_C\frac{1}{z}\,dz$$
si C es el contorno del cuadrado de vértices $2+2i,-2+2i,-2-2i,2-2i$ orientado en sentido contrario al del movimiento de las manecillas del reloj.

En efecto:
Por la Fórmula de la integral de Cauchy se tiene que
$$\oint_C\frac{1}{z}\,dz=2\pi i f(0)=2\pi i\qquad\text{ya que}\ \ f(0)=1\ \text{pues}\ f(z)=1$$

Ejemplo 4.41 *Evaluar la*
$$\oint_C\frac{1}{z^3}\,dz$$
si C es el contorno del cuadrado de vértices $2+2i,-2+2i,-2-2i,2-2i$ orientado en sentido contrario al del movimiento de las manecillas del reloj.

En efecto:
Por la Fórmula de la integral de Cauchy se tiene que
$$\oint_C\frac{1}{z^3}\,dz=\frac{2\pi i}{2}f''(0)=0\qquad\text{ya que}\ \ f''(0)=0\ \text{pues}\ f(z)=1$$

Ejemplo 4.42 *Evaluar la*
$$\oint_C\frac{\sin z}{z^2}\,dz$$
si C es el contorno de la circunferencia $|z|=2$ orientado en sentido contrario al del movimiento de las manecillas del reloj.

En efecto:
$$f(z)=\sin z\ \ \text{entonces}\ \ f'(z)=\cos z\ \text{luego}\ \oint_C\frac{\sin z}{z^2}\,dz=2\pi i f'(0)=2\pi i\cos 0=2\pi i$$

Ejemplo 4.43 *Evaluar la*

$$\oint_C \frac{1-\cos z}{z^2}\,dz$$

si C es el contorno de la circunferencia $|z| = 2$ orientado en sentido contrario al del movimiento de las manecillas del reloj.

En efecto:

$$f(z) = 1-\cos z \quad \text{entonces} \quad f'(z) = \sin z \text{ luego } \oint_C \frac{1-\cos z}{z^2}\,dz = 2\pi i f'(0) = 2\pi i \sin 0 = 0$$

Ejemplo 4.44 *Evaluar la*

$$\oint_C \frac{e^z \sin z}{z-i}\,dz$$

si C es el contorno de la circunferencia $|z-i| = 2$ orientado en sentido contrario al del movimiento de las manecillas del reloj.

En efecto:

$$f(z) = e^z \sin z \quad \text{entonces} \quad \oint_C \frac{e^z \sin z}{z-i}\,dz = 2\pi i f(i) = e^i \sin i$$

Ejemplo 4.45 *Evaluar la*

$$\oint_C \frac{e^z}{(z-i)^4}\,dz$$

si C es el contorno de la circunferencia $|z-i| = 2$ orientado en sentido contrario al del movimiento de las manecillas del reloj.

En efecto:

$$f(z) = e^z \quad f^{(3)}(z) = e^z \quad \text{entonces} \quad \oint_C \frac{e^z}{(z-i)^4}\,dz = 2\pi i f^{(3)}(i) = 2\pi i e^i$$

Ejemplo 4.46 *Evaluar la*

$$\oint_{|z|=20} \frac{\sin z}{z^4-1}\,dz$$

si C es el contorno de la circunferencia $|z| = 20$ orientado en sentido contrario al del movimiento de las manecillas del reloj. En efecto,

$$\oint\limits_{|z|=20} \frac{\sin z}{z^4-1}\,dz = \oint\limits_{|z-i|=\frac{1}{2}} \frac{\sin z}{z^4-1}\,dz + \oint\limits_{|z+i|=\frac{1}{2}} \frac{\sin z}{z^4-1}\,dz + \oint\limits_{|z-1|=\frac{1}{2}} \frac{\sin z}{z^4-1}\,dz + \oint\limits_{|z+1|=\frac{1}{2}} \frac{\sin z}{z^4-1}\,dz$$

$$= \oint\limits_{|z-i|=\frac{1}{2}} \frac{f(z)}{z-i}\,dz + \oint\limits_{|z+i|=\frac{1}{2}} \frac{g(z)}{z+i}\,dz + \oint\limits_{|z-1|=\frac{1}{2}} \frac{h(z)}{z-1}\,dz + \oint\limits_{|z+1|=\frac{1}{2}} \frac{q(z)}{z+1}dz = 2\pi i\left[\frac{\sin i}{(i+i)(i-1)(i+1)}\right]$$

$$+2\pi i\left[\frac{\sin(-i)}{(-i-i)(-i+1)(-i-1)}+\right] + 2\pi i\left[\frac{\sin 1}{(1+1)(1+i)(1-i)} + \frac{\sin(-1)}{(-1+i)(-1-i)(-1-1)}\right]$$

donde

$$f(z) = \frac{\sin z}{(z^2-1)(z+i)}, \quad g(z) = \frac{\sin z}{(z^2-1)(z-i)}, \qquad h(z) = \frac{\sin z}{(z+1)(z^2+1)},$$
$$q(z) = \frac{\sin z}{(z-1)(z^2+1)}$$

Ejemplo 4.47 *Evaluar la*

$$\oint_C \frac{e^z}{z^4}\,dz$$

si C es cualquier curva simple cerrada que encierre al 0, orientada en sentido contrario al del movimiento de las manecillas del reloj.

En efecto:

$$\oint_C \frac{e^z}{z^4}\,dz = \frac{2\pi i f^{(3)}(0)}{3!} = \frac{2\pi i e^0}{3!} = \frac{2\pi i}{3!} \text{ ya que si } f(z)=e^z \text{ entoces } f^{(3)}(z)=e^z$$

Ejemplo 4.48 *Evaluar la*

$$\oint\limits_{|z|=20} \frac{\sin z}{(z-1)^4}\,dz$$

si C es el contorno de la circunferencia $|z|=20$ orientado en sentido contrario al del movimiento de las manecillas del reloj.

En efecto:

$f(z)=\sin z$ y $f^{(3)}(z) = -\cos z$ luego $f^{(3)}(1) = -\cos 1$ y así

$$\oint\limits_{|z|=20} \frac{\sin z}{(z-1)^4}\,dz = \frac{2\pi i(-\cos 1)}{3!} = -\frac{2\pi i \cos 1}{3!}$$

Ejemplo 4.49 *Evaluar la*

$$\oint\limits_{|z|=20} \frac{\cos z}{z^4}\,dz$$

si C es el contorno de la circunferencia $|z|=20$ orientado en sentido contrario al del movimiento de las manecillas del reloj.

En efecto:
$f(z)=\cos z$ y $f^{(3)}(z)=\sin z$ luego $f^{(3)}(0)=0$ y así

$$\oint\limits_{|z|=20} \frac{\cos z}{z^4}\,dz = \frac{2\pi i(0)}{3!} = 0$$

4.4.4 Teorema de Morera

Si $f(z)$ es continua y tiene derivada continua en un dominio D, simplemente conexo y si $\oint\limits_C f(z)dz=0$ para toda curva simple cerrada C en D, entonces $f(z)$ es analítica en D.

En efecto, como

$$\begin{aligned}\oint\limits_C f(z)dz &= 0=\oint\limits_C udx-vdy+i\oint\limits_C vdx+udy\\ &= \iint\limits_R\left(-\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}\right)dxdy+i\iint\limits_R\left(\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial v}{\partial y}\right)dxdy=0\end{aligned}$$

entonces $\dfrac{\partial v}{\partial x},\dfrac{\partial u}{\partial y},\dfrac{\partial u}{\partial x},\dfrac{\partial v}{\partial y}$, cunplen con las ecuaciones de cauchy Riemman y como estas derivadas son continuas entonces f es analítica

4.4.5 Desigualdad de Cauchy

Si $f(z)$ es analítica en un dominio simplemente conexo D, que contiene todos los puntos sobre y dentro del círculo C de radio r y centro en $z=a$ y sea $|f(z)|\leq M$ para todo z en C entonces

$$\left|f^{(n)}(a)\right|\leq\frac{M.n!}{r^n}\quad n=0,1,2,3,...$$

En efecto.

$$\begin{aligned}\left|f^{(n)}(a)\right| &= \left|\frac{n!}{2\pi i}\right|\left|\oint_C \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}dz\right| \leq \frac{n!}{2\pi}\oint_C \left|\frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}dz\right| \leq \frac{n!}{2\pi}\oint_C \frac{|f(z)|\,|dz|}{|(z-a)^{n+1}|} \\ &\leq \frac{2\pi n! M}{2\pi r^n} = \frac{Mn!}{r^n}\end{aligned}$$

4.4.6 Teorema de Liouville

Si $f(z)$ es analítica y es acotada ($|f(z)| \leq M$) en todo punto del plano, entonces $f(z)$ debe ser una constante
En efecto: Sea a cualquier punto en el plano complejo y demostremos que $f'(a) = 0$. Por la desigualdad de Cauchy

$$0 \leq |f'(a)| \leq \frac{M}{r} \quad \text{con r lo suficientemente grande}$$

luego $f'(a) = 0$ y así $f(z)$ es una función constante

4.4.7 Teorema del módulo Máximo

f(z) analítica dentro y sobre una curva simple cerrada C y no es identicamente una constante entonces el valor máximo de $|f(z)|$ ocurre sobre C

4.4.8 Teorema del Módulo Mínimo

$f(z)$ analítica dentro y sobre una curva simple cerrada C y $f(z) \neq 0$ dentro de C entonces $f(z)$ toma un valor mínimo sobre C

4.4.9 Teorema del valor medio de Gauss

$f(z)$ analítica dentro y sobre una curva simple cerrada C, $|z-a| = r$, entonces $f(a)$ es el promedio de $f(z)$ sobre C, es decir,

$$f(a) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(a + re^{i\theta})d\theta$$

4.5 Operadores diferenciales

Sea $z = x + iy$,entonces $\bar{z} = x - iy$ y si f(x,y) es diferenciable se tiene que

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}\frac{\partial \bar{z}}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} \quad \text{así} \ \frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial \bar{z}}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}\frac{\partial \bar{z}}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial z}i + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(-i) = i(\frac{\partial f}{\partial z} - \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}) \ \text{así} \ \frac{\partial}{\partial y} = i(\frac{\partial}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial \bar{z}})$$

$$\bigtriangledown = \frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial \bar{z}} + i(i(\frac{\partial}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial \bar{z}})) = 2\frac{\partial}{\partial \bar{z}}$$

$$\overline{\bigtriangledown} = \frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial \bar{z}} - i(i(\frac{\partial}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial \bar{z}})) = 2\frac{\partial}{\partial z}$$

Si $B(z, \bar{z}) = P(x, y) + iQ(x, y) = f(x, y)$ entonces

$$2\frac{\partial B}{\partial \bar{z}} = \frac{\partial P}{\partial x} - \frac{\partial Q}{\partial y} + i(\frac{\partial Q}{\partial x} + \frac{\partial P}{\partial y})$$

En efecto

$$\bigtriangledown B = (\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y})(P(x, y) + iQ(x, y)) = \frac{\partial P}{\partial x} - \frac{\partial Q}{\partial y} + i(\frac{\partial Q}{\partial x} + \frac{\partial P}{\partial y}) = 2\frac{\partial B}{\partial \bar{z}}$$

$$Div f = \bigtriangledown \cdot \ f = Re(\overline{\bigtriangledown} \, f) = Re\left[(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y})(P(x, y) + iQ(x, y))\right]$$

$$Rot f = \bigtriangledown \times \ f = \mathrm{Im}(\overline{\bigtriangledown} \, f) = \mathrm{Im}\left[(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y})(P(x, y) + iQ(x, y))\right]$$

$$\text{Laplaciano de } \bigtriangledown^2 = Re(\overline{\bigtriangledown}\bigtriangledown) = Re\left[(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y})(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y})\right] = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

$$\text{Laplaciano de } f = \bigtriangledown^2 f = Re(\overline{\bigtriangledown} \bigtriangledown f) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

4.6 Teorema de Green

Sea $B(z,\bar{z}) = P(x,y) + iQ(x,y) = f(x,y)$ continua con derivadas parciales continuas en un dominio simplemente conexo R y sobre su frontera C donde $z = x+iy$, $\bar{z} = x - iy$ entonces

$$\oint_C B(z,\bar{z})dz = 2i \iint_R \frac{\partial B}{\partial \bar{z}} dxdy$$

En efecto,

$$\begin{aligned}
\oint_C B(z,\bar{z})dz &= \oint_C \left(P(x,y) + iQ(x,y)\right)(dx + idy) \\
&= \oint_C Pdx - Qdy + i \oint_C Qdx + Pdy \\
&= -\iint_R \left(\frac{\partial Q}{\partial x} + \frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy + i \iint_R \left(\frac{\partial P}{\partial x} - \frac{\partial Q}{\partial y}\right)dxdy \\
&= i\left[\iint_R \frac{\partial P}{\partial x} - \frac{\partial Q}{\partial y} + i\left(\frac{\partial Q}{\partial x} + \frac{\partial P}{\partial y}\right)\right] dxdy = 2i \iint_R \frac{\partial B}{\partial \bar{z}} dxdy
\end{aligned}$$

Ejercicios

1. Una ecuación paramétrica para

a) El segmento de recta que une los puntos 0 con $1+2i$ es $z(t) = (1+2i)t$ $0 \le t \le 1$

b) El segmento de recta que une los puntos $4+2i$ con $3+5i$ es $z(t) = 4 + 2i + t(-1+3i)$ $0 \le t \le 1$

c) El contorno del semicírculo superior con centro $1-i$ y radio 2 es $z(t) = 1-i+2e^{it}$ $0 \le t \le \pi$

d) El contorno de la parábola $y = 3x^2$ désde $(-1,3)$ hasta $(2,12)$ es $z(t) = t + 3t^2 i$ $-1 \le t \le 2$

e) El contorno de la elípse $4x^2 + y^2 = 4$ es $z(t) = \cos t + 2i \sin t$ $-\pi \le t \le \pi$

f) El contorno de la elípse $4x^2 + y^2 = 4$ es $z(t) = \cos t + 2i \sin t$ $0 \le t \le 2\pi$

g) El contorno de $y = \frac{1}{x}$ désde $(1,1)$ hasta $(3, \frac{1}{3})$ es $z(t) = t + \frac{i}{t}$ $1 \le t \le 3$

h) El contorno de $|z - 3 + 4i| = 4$ es $z(t) = 3 - 4i + 4e^{it}$ $0 \le t \le 2\pi$

2. Mostrar que

a) $\displaystyle\int_{i}^{2+i} z\,dz = 2+2i$

b) $\displaystyle\int_{0}^{\pi i} e^{z}\,dz = -2$

c) $\displaystyle\int_{\frac{\pi i}{6}}^{0} \cosh 3z\,dz = \frac{-i}{3}$

d) $\displaystyle\int_{1}^{i} ze^{z^2}\,dz = \tfrac{1}{2}e^{-1} - \tfrac{1}{2}e$

e) $\displaystyle\int_{i}^{2i} z\,e^{z}dz = (1-i)\,e^{i} - (1-2i)\,e^{2i}$

f) $\displaystyle\int_{0}^{2i} z^2\cos z^3\,dz = -\tfrac{1}{3}i\sinh 8$

g) $\displaystyle\int_{1+i}^{2+4i} \tfrac{1}{z}\,dz = Log(2+4i) - Log(1+i) = \ln\sqrt{20} - \ln\sqrt{2} + i\left[arc\tan 2 - \tfrac{\pi}{4}\right]$

3. Mostrar que las integrales siguientes

a) $\displaystyle\oint_C e^{z^3}dz = 0$

b) $\displaystyle\oint_C \sin^4 z\cos^3 z\,dz = 0$

c) $\displaystyle\oint_C (z^3+3z^2-5+i)\;dz = 0$

d) $\displaystyle\oint_C z^{20}\cos^2 z\,dz = 0$

Si C es el contorno de la curva simple cerrada regular a trozos, orientada en sentido contrario al del movimiento de las manecillas del reloj para

a) Rectangulo de vértices $-1, 3, 3+2i, -1+2i$

b) $C : |z - i| = 1$
c) $C : |z - 1| = 1$
d) $C : |z| = 1$

4. Mostrar que

a) $\displaystyle\int_C \operatorname{Im}(z^2)dz = \frac{32}{3} + \frac{64}{3}i$ si C es el contorno del segmento de recta que une los puntos $0 + 0i$ hasta $2 + 4i$

b) $\displaystyle\int_C \operatorname{Im}(z^2)dz = 8 + \frac{128i}{5}$ si C es el contorno del gráfico de $y = x^2$ desde 0 hasta $2 + 4i$

c) $$\oint_C (2\bar{z} - 1)\, dz = \begin{cases} 1 - i & si \quad C: \text{Es el segmento de recta de } 1 \text{ a } -i \\ 1 + (\pi + 1)i & si \quad C: z(t) = e^{2\pi i t} \quad \frac{1}{4} \le t \le \frac{1}{2} \\ 2i & si \quad C: \text{segmentos de recta de } 0 \text{ a } 1 \text{ , } 1 \text{ a } i \text{ y } i \text{ a } 0 \end{cases}$$

5. Considere C la curva simple cerrada regular a trozo orientada en sentido contrario al del movimiento de las manecillas del reloj y verifique que

a) $\displaystyle\oint_C \frac{z^4 + 6}{z^2 - 2z} dz = -6\pi i$ si $C : |z| = 1$

b) $\displaystyle\oint_C \frac{1}{\bar{z}} dz = 0$ si $C : |z| = 1$

c) $\displaystyle\oint_C (\bar{z})^2\, dz = 0$ si $C : |z| = 1$

d) $\displaystyle\oint_C \frac{\sin z}{z} dz = 0$ si $C : |z| = 1$

e) $$\oint_C \frac{\cos z}{z(z^2 + 1)} dz = \begin{cases} 2\pi i(1 - \cos i) & si \quad C: |z| = 3 \\ 2\pi i & si \quad C: |z| = \frac{1}{2} \\ 0 & si \quad C: |z - 1| = \frac{1}{3} \end{cases}$$

f) $$\oint_C \bar{z}\, dz = \begin{cases} 18i\pi & si \quad C: |z - 2| = 3 \\ 8i & si \quad C: \text{Contorno del cuadradado de vértices } 0, 2, 2i, 2 + 2i \\ 40i\pi & si \quad C: |z - 3| + |z + 3| = 10 \end{cases}$$

g) $\displaystyle\oint_C \frac{e^z}{z(1-z)}dz = \begin{cases} 2\pi i & si \quad C: |z| = \frac{1}{4} \\ -2\pi e i & si \quad C: |z-1| = \frac{1}{4} \\ 2\pi i - 2\pi e i & si \quad C: \left|z - \frac{1}{2}\right| = 1 \end{cases}$

h) $\displaystyle\oint_{|z|=2} \frac{z}{z^4-1}dz = 0$

i)

$$\oint_C \left(Re\bar{z} + \mathrm{Im}(z^2) + |z|^2 + z^2 + \frac{z}{z^2+4} + \frac{e^z}{z^2+16} \right) dz =$$

$$= (0+12i) + (-24+36i) + (-36+24i) + (0+i0) + (0+\pi i) + (0+0i)$$

si C la curva simple cerrada regular a trozos, orientada en sentido contrario al del movimiento de las manecillas del reloj para el rectángulo de vértices $-1, 3, 3+3i, -1+3i$

ii)

$$\oint_C \left(Re\bar{z} + \mathrm{Im}(z^2) + |z|^2 + z^2 + \frac{z}{z^2+4} + \frac{e^z}{z^2+16} \right) dz =$$

$$= (0 + \frac{\pi i}{4}) + \left(0 + \frac{\pi i}{2}\right) - \left(\frac{\pi}{2} + 0i\right) + (0+i0) + (0+i0) + (0+0i)$$

si C la curva simple cerrada regular a trozos $C: |z-i| = \frac{1}{2}$, orientada en sentido contrario al del movimiento de las manecillas del reloj

iii)

$$\oint_C \left(Re\bar{z} + \mathrm{Im}(z^2) + |z|^2 + z^2 + \frac{z}{z^2+4} + \frac{e^z}{z^2+16} \right) dz =$$

$$= (0+\pi i) + (-2\pi + 0i) + (0+2\pi i) + (0+0i) + (0+0i) + (0+0i)$$

si C es la curva simple cerrada regular a trozos $C: |z-1| = 1$, orientada en sentido contrario al del movimiento de las manecillas del reloj

iv)

$$\oint_C \left(Re\bar{z} + \mathrm{Im}(z^2) + |z|^2 + z^2 + \frac{z}{z^2+4} + \frac{e^z}{z^2+16} \right) dz =$$

$$= (0+\pi i) + (0+0i) + (0+0i) + (0+0i) + (0+0i) + (0+0i)$$

si C es la curva simple cerrada regular a trozos $C: |z| = 1$, orientada en sentido contrario al del movimiento de las manecillas del reloj

v)

$$\oint_C \bar{z}\,dz = \begin{cases} 18\pi i & si \quad C: |z-2| = 3 \\ 8i & si \quad C: \text{ cuadradado de vértices } 0, 2, 2i, 2+2i \\ 40\pi i & si \quad C: |z-3| + |z+3| = 10 \end{cases}$$

Capítulo 5

Sucesiones y series

5.1 Generalidades

En este capítulo se presenta el contenido básico de lo que es una sucesion y algunos criterios de convergencia para las series complejas, que son semejantes a los de las series reales que se estudian en el curso de cálculo y se explica por qué las series de potencia desempeñan un papel fundamental en el análisis complejo y el interés principal, son los desarrollos de Taylor y de Laurent de una función compleja

5.2 Definición de una sucesión compleja

Una sucesión compleja es una función que asigna a cada número natural un número complejo, es decir,

$$\begin{array}{rcccl} f & : & \mathbb{N} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ & & n & \longrightarrow & f(n) = z_n \end{array}$$

y la sucesión se nota por $\{f(n)\} = \{z_n\}_{n\epsilon\mathbb{N}}$

Ejemplo 5.1

$$\{i^n\}\,, \quad \{1+ni\}\,, \quad \left\{\frac{1}{n}+\frac{i}{n^2}\right\}, \quad \left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n + ie\right\}, \quad \{e^{ni}\}$$

son ejemplos de sucesiones complejas .

5.3 Definición de una sucesión convergente

Una sucesión $\{z_n\}$ converge a L, si para todo $\epsilon > 0$, existe $N > 0$, tal que si $n > N$ entonces $|z_n - L| < \epsilon$ y si $\{z_n\}$ converge a L entonces L es el límite de la sucesión y escribimos $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = L$ y si no existe el límite, se dice que la sucesión $\{z_n\}$ diverge

Ejemplo 5.2

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n}+\frac{i}{n}\right)=1$$

Se probará que para todo $\epsilon > 0$, existe $N > 0$ tal que si $n > N$ entonces

$$\left|\frac{n+1}{n}+\frac{i}{n}-1\right|<\epsilon.$$

En efecto :

$$\left|\frac{n+1}{n}+\frac{i}{n}-1\right|=\left|1+\frac{1}{n}+\frac{i}{n}-1\right|=\left|\frac{1}{n}+\frac{i}{n}\right|\leq\frac{1}{n}+\frac{1}{n}=\frac{2}{n}<\epsilon$$

entonces $\dfrac{2}{\epsilon} < n$, luego tomar $N = \dfrac{2}{\epsilon}$, así N existe. Ahora probemos que satisface la desigualdad, pues si $n > N = \dfrac{2}{\epsilon}$ entonces $n > \dfrac{2}{\epsilon}$, así $\dfrac{2}{\epsilon} < n$, luego

$$\frac{2}{n}=\frac{1}{n}+\frac{1}{n}<\epsilon \quad \text{y} \quad \text{como} \quad \left|\frac{1}{n}+\frac{i}{n}\right|<\frac{1}{n}+\frac{1}{n}<\epsilon$$

entonces

$$\left|1+\frac{1}{n}+\frac{i}{n}-1\right|=\left|\frac{n+1}{n}+\frac{i}{n}-1\right|<\epsilon$$

Ejemplo 5.3 *Mostrar que*

$$\lim_{n\to\infty}\frac{i}{n}=0$$

Se probará que para todo $\epsilon > 0$, existe $N > 0$ tal que si $n > N$ entonces $\left|\dfrac{i}{n}-0\right|<\epsilon.$

En efecto :

$$\left|\frac{i}{n}-0\right|=\frac{1}{n}<\epsilon$$

entonces $\frac{1}{\epsilon} < n$, luego tomar $N = \frac{1}{\epsilon}$, así N existe. Ahora probemos que N satisface la desigualdad, pues si $n > N = \frac{1}{\epsilon}$ entonces $n > \frac{1}{\epsilon}$, luego

$$\frac{1}{n} < \epsilon \quad \text{y} \quad \text{como} \quad \frac{1}{n} = \left|\frac{i}{n} - 0\right| < \epsilon$$

entonces

$$\left|\frac{i}{n} - 0\right| < \epsilon \quad \text{si} \quad n > N$$

5.3.1 Algunas propiedades

Si $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = A$ y $\lim\limits_{n\to\infty} w_n = B$ entonces

1.
$$\lim_{n\to\infty}(z_n \pm w_n) = \lim_{n\to\infty} z_n \pm \lim_{n\to\infty} w_n = A \pm B$$

2.
$$\lim_{n\to\infty}(z_n \cdot w_n) = \lim_{n\to\infty} z_n \cdot \lim_{n\to\infty} w_n = A \cdot B$$

3.
$$\lim_{n\to\infty}\frac{z_n}{w_n} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} z_n}{\lim\limits_{n\to\infty} w_n} = \frac{A}{B} \quad si \quad B \neq 0$$

Lema 5 *Sea* $z_n = x_n + iy_n$, $L = a + ib$, *entonces* $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = L$ *sii* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ *y* $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$, *en otras palabras una sucesión compleja converge sii las sucesiones reales formadas por las partes real e imaginaria de* z_n *convergen*

En efecto : Supngamos que $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = L$ entones para todo $\epsilon > 0$, existe $N > 0$ tal que si

$$n > N \quad \text{se tiene que} \quad |z_n - L| = |x_n + iy_n - (a + ib)| = |x_n - a + i(y_n - b)| < \epsilon$$

pero

$$|x_n - a| \leq |x_n - a + i(y_n - b)| < \epsilon \quad \text{y} \quad |y_n - b| \leq |x_n - a + i(y_n - b)| < \epsilon$$

entonces

$$|x_n - a| < \epsilon \quad \text{y} \quad |y_n - b| < \epsilon \quad \text{si} \quad n > N$$

Reciprocamente si $\lim_{n\to\infty} x_n = a$ entonces para todo $\epsilon > 0$, existe $N_1 > 0$ tal que si $n > N_1$ se tiene que $|x_n - a| < \dfrac{\epsilon}{2}$ y si $\lim_{n\to\infty} y_n = b$, entonces para todo $\epsilon > 0$, existe $N_2 > 0$ tal que si $n > N_2$ se tiene que $|y_n - b| < \dfrac{\epsilon}{2}$ Sea $N = max\{N_1, N_2\}$, entonces

$$|x_n + iy_n - (a+ib)| = |x_n - a + i(y_n - b| \leq |x_n - a| + |y_n - b| < \epsilon \;\; si \;\; n > N$$

Ejemplo 5.4 *Mostrar que*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} + \frac{n^2 i}{n^2+1} = 1 + i$$

$$Como \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1 \quad y \quad \lim_{n\to\infty} \frac{n^2 i}{n^2+1} = i \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{n^2+1} = i \quad entonces$$

la sucesión

$$\left\{ \frac{n}{n+1} + \frac{n^2 i}{n^2+1} \right\} \quad converge\ a\ 1+i,\ es\ decir,$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} + \frac{n^2 i}{n^2+1} = 1 + i$$

Ejemplo 5.5 *Mostrar que*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^3}{n^3+1} + \left(1 + \frac{2}{n}\right)^n i = 1 + e^2 i$$

$$Como \quad \lim_{n\to\infty} \frac{n^3}{n^3+1} = 1 \quad y \quad \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{2}{n}\right)^n i = e^2 i \quad entonces\ la\ sucesión$$

$$\left\{ \frac{n^3}{n^3+1} + \left(1 + \frac{2}{n}\right)^n i \right\} \quad converge\ a\ 1 + e^2 i\ ,\ es\ decir$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^3}{n^3+1} + \left(1 + \frac{2}{n}\right)^n i = 1 + e^2 i$$

Ejemplo 5.6 *Mostrar que*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} + \frac{(-1)^n i}{n^2} = 0$$

$$Como \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0 \quad y \lim_{n\to\infty} \frac{(-1)^n i}{n^2} = 0 \qquad entonces\ la\ \ sucesión$$

$$\left\{ \frac{1}{n} + \frac{(-1)^n i}{n^2} \right\} \quad converge\ a\ 0{+}0i,\ es\ decir,$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} + \frac{(-1)^n i}{n^2} = 0$$

Ejemplo 5.7 *El*

$$\lim_{n\to\infty} e^{in}$$

no existe, ya que

$$\lim_{n\to\infty} \cos n$$

no existe

Ejemplo 5.8 *Mostrar que*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3n^3+2n^2+1}{2n^3+n+21} + \left(\frac{2}{5}\right)^n i = \frac{3}{2} + 0i = \frac{3}{2}$$

En efecto

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3n^3+2n^2+1}{2n^3+n+21} + \left(\frac{2}{5}\right)^n i = \frac{3}{2} + 0i = \frac{3}{2}, \text{ ya que}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3n^3+2n^2+1}{2n^3+n+21} = \frac{3}{2} \quad y \quad \lim_{n\to\infty} \left(\frac{2}{5}\right)^n i = i \lim_{n\to\infty} \left(\frac{2}{5}\right)^n = i\cdot 0 = 0$$

Ejemplo 5.9 *El*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sin n}{n^2} + \frac{i}{n^2} = 0, \quad \text{ya que}$$

$$0 \leq \frac{\sin n}{n^2} \leq \frac{1}{n^2} \quad y \quad \text{por el teorema del empareado se concluye que} \quad \lim_{n\to\infty} \frac{\sin n}{n^2} = 0$$

$$y \quad \lim_{n\to\infty} \frac{i}{n^2} = 0$$

Ejemplo 5.10 *El*

$$\lim_{n\to\infty} (n + \frac{i}{n}) = \infty$$

ya que

$$\lim_{n\to\infty} n = \infty \quad (\lim_{n\to\infty} \left|n + \frac{i}{n}\right| = \lim_{n\to\infty} \sqrt{n^2 + \frac{1}{n^2}} = \infty)$$

Ejemplo 5.11 *Mostrar que*

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{n}\left(\sqrt{n+2i} - \sqrt{n+1}\right) = \frac{2i-1}{2}$$

En efecto:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt{n}\left(\sqrt{n+2i}-\sqrt{n+1}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}\left(\sqrt{n+2i}-\sqrt{n+1}\right)\left(\sqrt{n+2i}+\sqrt{n+1}\right)}{\left(\sqrt{n+2i}+\sqrt{n+1}\right)}=$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}\,(n+2i-n-1)}{\sqrt{n+2i}+\sqrt{n+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}\,(2i-1)}{\sqrt{n+2i}+\sqrt{n+1}}=\\
&= (2i-1)\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n}\left(\sqrt{1+\frac{2i}{n}}+\sqrt{1+\frac{1}{n}}\right)}
\end{aligned}$$

$$=(2i-1)\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\left(\sqrt{1+\frac{2i}{n}}+\sqrt{1+\frac{1}{n}}\right)}=(2i-1)\,\frac{1}{2}=\frac{2i-1}{2}$$

Ejemplo 5.12 *Como*

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{3}{n}\right)^n=e^3 \quad y \quad \lim_{n\to\infty}\arctan\left(\sin\left(\frac{\pi}{2}+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right)=\arctan\left(\sin\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\pi}{4}$$

entonces

$$\lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{3}{n}\right)^n+i\arctan\left(\sin\left(\frac{\pi}{2}+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right)\right]=e^3+i\arctan\sin\frac{\pi}{2}=e^3+i\frac{\pi}{4}$$

Se escribe $\lim\limits_{n\to\infty} z_n=\infty$ si para $|z_n|$ se tiene que $\lim\limits_{n\to\infty}|z_n|=\infty$ sii para todo $\epsilon>0$, existe $N>0$ tal que si $n>N$ entonces $|z_n|>N$

5.4 Series complejas

Sea $\{z_n\}$ una sucesión compleja, queremos asignar un significado al símbolo $\sum\limits_{n=1}^{\infty} z_n$, que denota la suma de los términos de la sucesión $\{z_n\}$. Como en el caso real, definimos la enésima suma parcial S_n de esta serie, como la suma de n primeros términos de la sucesión $\{z_n\}$ así :

$$S_n=\sum_{k=0}^{n} z_k=z_0+z_1+z_2+...+z_n$$

$\{S_n\}$ es a su vez una sucesión compleja. Si esta sucesión de sumas parciales converge a L, decimos que la serie $\sum\limits_{k=1}^{\infty} z_k$ converge a L y definimos su suma como

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} z_k = \sum_{k=1}^{\infty} z_k = L$$

en caso contrario decimos que la serie $\sum\limits_{k=1}^{\infty} z_k$ diverge

Si en la serie $\sum\limits_{k=1}^{\infty} z_k$ se omiten los términos de S_n queda

$R_n = z_{n+1} + z_{n+2} + z_{n+3} + ...$ denominado residuo de la serie despues del término z_n y resulta que si la serie $\sum\limits_{k=1}^{\infty} z_k$ converge y tiene suma L, entonces

$$L = S_n + R_n$$

por tanto

$$R_n = L - S_n$$

luego

$$S_n \to L$$

por la definición de convergencia se tiene que

$$R_n \to 0$$

Ejemplo 5.13 *Analizar la convergencia de la serie*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+1} + \left(\frac{1}{2}\right)^n i$$

En efecto:

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k+2} - \frac{1}{k+1} + \left(\frac{1}{2}\right)^k i = \frac{1}{n-1+2} - \frac{1}{0+1} + \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}} i = \\ &= \frac{1}{n+1} - \frac{1}{1} + 2i \cdot \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1} \end{aligned}$$

entonces

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} - \frac{1}{1} + 2i \cdot \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1} = -1 + 2i$$

y así

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+1} + \left(\frac{1}{2}\right)^n i = -1 + 2i$$

Ejemplo 5.14 *sea*

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} z^k = 1 + z^1 + z^2 + z^3 + .. + z^n = \frac{1-z^{n+1}}{1-z}$$

entonces

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} z^k = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1-z^{n+1}}{1-z}\right) = \frac{1}{1-z} \qquad si \quad |z| < 1$$

luego

$$\sum_{k=0}^{\infty} z^k = \frac{1}{1-z} \qquad si \quad |z| < 1$$

Ejemplo 5.15

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3}{(1+i)^n} = \frac{3}{1-\dfrac{1}{1+i}} = \frac{3(1+i)}{i} = -3i(1+i) \quad pues \quad \left|\frac{1}{1+i}\right| = \frac{1}{\sqrt{2}} < 1$$

Ejemplo 5.16

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{i}{3}\right)^n = \frac{1}{1-\dfrac{i}{3}} = \frac{3}{3-i} = \frac{3(3+i)}{(3-i)(3+i)} = \frac{9+3i}{10} \; pues \quad \left|\frac{i}{3}\right| = \frac{1}{3} < 1$$

Ejemplo 5.17

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1+i}{3-4i}\right)^n = \frac{1}{1-\frac{1+i}{3-4i}} \quad pues \quad \left|\frac{1+i}{3-4i}\right| = \frac{\sqrt{2}}{5} < 1$$

Las sumas parciales relacionan inmediatamente la convergencia de una serie compleja con la convergencia de las dos series de su parte reale e imaginaria, es decir :

5.4.1 Algunos criterios de convergencia

1. Una serie $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ con $z_n = x_n + iy_n$ converge sii las series $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ y $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ convergen y si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ converge a A y la serie $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ converge a B entonces la serie $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ converge a $A + iB$, es decir,

$$\sum_{n=1}^{\infty} z_n = \sum_{n=1}^{\infty} x_n + iy_n = \sum_{n=1}^{\infty} x_n + i\sum_{n=1}^{\infty} y_n = A + iB$$

Ejemplo 5.18 *La serie*

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n + iy_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+n+1} + \left(\frac{2}{3}\right)^n i$$

es convergente, ya que las series

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+n+1}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n$$

son convergentes, pués

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+n+1} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \qquad y \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n \text{ es una serie geométrica convergente}$$

Ejemplo 5.19 *La serie*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{3i}{(2n)!}$$

es divergente, ya que la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$$

es divergente, por el criterio de la integral para series reales y la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{(2n)!}$ *es convergente*

Ejemplo 5.20 *La serie*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(i)^n}{\sqrt{n}}$$

es convergente, ya que esta serie se puede escribir

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(i)^n}{\sqrt{n}} = i - \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{i}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{4}} + \frac{i}{\sqrt{5}} - \frac{1}{\sqrt{6}} - \frac{i}{\sqrt{7}} + \frac{1}{\sqrt{8}} + ...$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{4}} - \frac{1}{\sqrt{6}} + \frac{1}{\sqrt{8}} + ... + i\left(1 - \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{5}} - \frac{1}{\sqrt{7}} + ...\right)$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{2n}} + i\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{2n+1}}$$

y como las dos series $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{2n}}, \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{2n+1}}$ *son alternadas convergentes, criterio de leibniz, se concluye que la serie*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(i)^n}{\sqrt{n}}$$

es convergente

2. Si la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} z_n \quad \text{converge}$$

entonces

$$\lim_{n\to\infty} z_n = 0$$

por lo tanto si

$$\lim_{n\to\infty} z_n \neq 0 \quad \text{entonces}$$

la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} z_n \quad \text{diverge}$$

En efecto como la serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} z_n$ converge a L, entonces $z_m = S_m - S_{m-1}$, luego

$$\lim_{n\to\infty} z_n = \lim_{n\to\infty} (S_m - S_{m-1}) = \lim_{n\to\infty} S_m - \lim_{n\to\infty} S_{m-1} = L - L = 0$$

Ejemplo 5.21 *La serie*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n+2} + \left(\frac{1}{2}\right)^n i \qquad \textit{diverge, pues}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n+2} + \left(\frac{1}{2}\right)^n i = 1 + 0i \neq 0$$

Ejemplo 5.22 *La serie*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+2} + \left(1+\frac{1}{n}\right)^n i \qquad \textit{diverge, pues}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+2} + \left(1+\frac{1}{n}\right)^n i = 0 + e.i \neq 0$$

Ejemplo 5.23 *La serie* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} e^{ni}$ *diverge, pues* $\lim\limits_{n\to\infty} e^{ni} \neq 0$

La multiplicación de cada término de una serie por una constante diferente de cero, no afecta la convergencia o divergencia de la serie.
Eliminando o agregando un número finito de términos en una serie, no se afecta la convergencia o divergencia de la serie (solo se afecta el valor, en caso de ser convergente)

Definición 14 *Una serie se denomina absolutamente convergente, si la serie* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |z_n|$ *converge y si* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} z_n$ *converge, pero la serie* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |z_n|$ *diverge, entonces se dice que la serie* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} z_n$ *es condicionalmente convergente.*

Si se tiene una serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} z_n$ y es posible hallar una serie convergente $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ con términos reales positivos tales que $|z_n| \leq b_n \;\; n = 1, 2, 3,$ entonces la serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |z_n|$ converge
En efecto, $S_n = |z_1| + |z_2| + |z_3| + ... + |z_n|$; $T_n = b_1 + b_2 + b_3 + ... + b_n$ como la serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ converge, entonces $\lim\limits_{n\to\infty} T_n = T$ entonces $0 \leq S_n \leq T_n$ y como $\{S_n\}$ es creciente y acotada entonces $\{S_n\}$ converge, luego la serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} z_n$ converge

3. Si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} |z_n|$ converge entonces $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ converge

En efecto, sea $z_n = x_n + iy_n$, con x_n y y_n reales. Como $|x_n| \leq |z_n|$ entonces la convergencia de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} |z_n|$ implica la convergencia de la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|$, que a su vez implica la convergencia de la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} x_n$. En forma análoga se demuestra la convergencia de la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} y_n$

Ejemplo 5.24

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{i}{n!} \text{ es convergente, ya que } \sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{i}{n!}\right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n!}$$

y como

$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n!}$ *es una serie convergente, aplicar criterio del cociente, entonces la serie*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{i}{n!}\right|$$

es una serie convergente y así la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{i}{n!} \quad \text{es convergente}$$

Ejemplo 5.25 *La serie*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{i-1}{n^2+1} \text{ es convergente, pués}$$

$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{i-1}{n^2+1}\right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n^2}$ *y como la serie* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n^2}$ *es convergente, se concluye que la serie*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{i-1}{n^2+1}\right| \text{ es convrgente y así la serie } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{i-1}{n^2+1} \text{ es convergente}$$

Ejemplo 5.26 *La serie*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3+2i}{(n+1)^n} \quad \textit{es convergente, ya que} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{3+2i}{(n+1)^n} \right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{2^n}$$

que es convergente, aplicar el criterio del cociente ó el criterio de la raíz, por lo tanto, por el criterio de comparación se concluye que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{3+2i}{(n+1)^n} \right| \quad \textit{es una serie convergente y así la serie}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3+2i}{(n+1)^n} \quad \textit{es convergente}$$

4. Criterio del Cociente

Sea $\sum\limits_{n=1}^{\infty} z_n$ con $z_n \neq 0$ y $\lim\limits_{n\to\infty} \left|\frac{z_{n+1}}{z_n}\right| = L$, entonces

a) si $L < 1$, la serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} z_n$ converge

b) Si $L > 1$, la serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} z_n$ diverge

c) Si $L = 1$, el criterio falla, puede ser convergente o divergente

Ejemplo 5.27 *La serie*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(100+75i)^n}{n!} \quad \textit{converge pues}$$

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \left| \frac{z_{n+1}}{z_n} \right| &= \lim_{n\to\infty} \left| \frac{\frac{(100+75i)^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{(100+75i)^n}{n!}} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{\frac{(100+75i)^n(100+75i)}{(n+1)n!}}{\frac{(100+75i)^n}{n!}} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{(100+75i)}{(n+1)} \right| \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{125}{n+1} = 0 < 1\end{aligned}$$

Ejemplo 5.28 *La serie*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2)^n i}{(3n)!} \quad \textit{converge, pues}$$

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{z_{n+1}}{z_n} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{\frac{2^{n+1} i^{n+1}}{(3n+3)!}}{\frac{2^n i^n}{(3n)!}} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{2}{(3n+3)(3n+2)(3n+1)} \right| = 0 < 1$$

Ejemplo 5.29 *La serie*

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1+i}{1-i\sqrt{3}}\right)^n \quad \textit{converge, pues}$$

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{z_{n+1}}{z_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{\left(\frac{1+i}{1-i\sqrt{3}}\right)^{n+1}}{\left(\frac{1+i}{1-i\sqrt{3}}\right)^{n}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{1+i}{1-i\sqrt{3}}\right| = \frac{\sqrt{2}}{2} < 1$$

Ejemplo 5.30 *La serie*

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2-3i)^n}{n!} \quad \textit{converge, pues}$$

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{z_{n+1}}{z_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(2-3i)^{n+1}}{(n+1)!}.\frac{n!}{(2-3i)^n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{2-3i}{n+1}\right| = 0 < 1$$

5. Criterio de la raíz

Sea $\sum\limits_{n=1}^{\infty} z_n$ con $z_n \neq 0$ y $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\sqrt[n]{|z_n|}\right| = L$, entonces

a) si $L < 1$, la serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} z_n$ converge

b) Si $L > 1$, la serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} z_n$ diverge

c) Si $L = 1$, el criterio falla, puede ser convergente o divergente

Ejemplo 5.31 *La serie*

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^n(1+i)^n}{(n+1)^n} \quad \textit{diverge, pues}$$

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{n^n(1+i)^n}{(n+1)^n}\right|^{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{n(1+i)}{(n+1)}\right| = |1+i| = \sqrt{2} > 1$$

Ejemplo 5.32 *La serie*

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(1-i)^n}{(2+3i)^n} \quad \textit{converge, ya que}$$

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(1-i)^n}{(2+3i)^n}\right|^{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(1-i)}{(2+3i)}\right| = \frac{|(1-i)|}{|(2+3i)|} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{13}} < 1$$

Ejemplo 5.33 *La serie*
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(1+i)^n}{(3i)^n} \quad \textit{converge, ya que}$$
$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(1+i)^n}{(3i)^n}\right|^{\frac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(1+i)}{(3i)}\right|=\frac{|(1+i)|}{|(3i)|}=\frac{\sqrt{2}}{3}<1$$

Ejemplo 5.34 *La serie*
$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2+i}{5-4i}\right)^{2n} \quad \textit{converge, ya que}$$
$$\lim_{n\to\infty}\left|\left(\frac{2+i}{5-4i}\right)^{2n}\right|^{\frac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty}\left|\left(\frac{2+i}{5-4i}\right)^{2}\right|=\frac{|(2+i)|^2}{|(5-4i)|^2}=\frac{5}{41}<1$$

Ejemplo 5.35 *La serie*
$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{i}{n}\right)^{n} \quad \textit{converge, ya que}$$
$$\lim_{n\to\infty}\left|\left(\frac{i}{n}\right)^{n}\right|^{\frac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty}\left|\left(\frac{i}{n}\right)\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0<1$$

Ejercicio 4

1. Verificar que

a) $\{(-1)^n+3i\}$ *diverge* *b)* $\{\frac{(-1)^n}{n+i}\}$ converge a $0+0i$ *c)* $\{(-1)^n+\frac{i}{n}\}$ *diverge*

d) $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\cos n}{n^2}+\frac{2ni}{n+1}\right)=2i$ *e)* $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1+2n^2}{n^2}-\frac{(n-1)i}{n}\right)=2-i$ *f)* $\lim_{n\to\infty}(-i)^{4n}=1$

g) $\lim_{n\to\infty}\frac{i}{n!}=0$ *h)* $\lim_{n\to\infty}e^{\frac{i}{n}}=1$ *i)* $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{i^n}{n}+(1+\frac{2}{n})^n\right)=e^2$

j) $\lim_{n\to\infty}n^{\frac{1}{n}}+\left(1+\frac{2i}{n}\right)^n=1+e^{2i}$ *k)* $\lim_{n\to\infty}(\sin n+ie^n)$ no existe l) $\lim_{n\to\infty}\frac{e^{in}}{2n+1}=0$

i) $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+...+\frac{1}{2^n}\right)+i\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+...+\frac{1}{3^n}\right)=1+\frac{i}{2}$

2. Mostrar que las series siguientes son convergentes

$a)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n n^3}{(2-3i)^n}$ $\quad b)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(3+i)^n}{n!}$ $\quad c)\ \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{8i}{9}\right)^n n^4$

$d)\ \sum_{n=1}^{\infty} n\left(\frac{1+i}{2}\right)^n$ $\quad e)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+i)}$ $\quad f)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2 i^n}{n^4+1}$

$g)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n}(1+i)$ $\quad h)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(10+5i)^n}{(3n)!}$ $\quad i)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n}{n^3}+\frac{(-1)^n}{n}i$

3. Mostrar que las series siguientes son divergentes

$a)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(4i)^n n!}{n^n}$ $\quad b)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(1+2i)^n}{(1-i)^n}$ $\quad c)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n-i}{3n+2i}$

$d)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{3}{n}+\frac{n-1}{n+1}i$ $\quad e)\sum_{n=1}^{\infty}2i+\frac{2}{n^4}$ $\quad f)\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3+5i}{1-i}\right)^n$

5.5 Series de potencia

Las series de potencia constituyen las series más importantes en análisis complejo y una serie de potencia es una expresión de la forma

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-a)^n = a_0 + a_1(z-a) + a_2(z-a)^2 + a_3(z-a)^3 + ...$$

con $a_0, a_1, a_2 ...$ constantes denominados coeficientes de la serie y a a constante, denominada el centro de la serie.
Una serie de potencias siempre converge para un valor de z, puede ser que converja en el interior de $|z-a| \leq R$, en todo el plano complejo o en un punto. Si la serie converge en el interior de $|z-a| \leq R$, se dice que la serie tiene un radio de convergencia R, si converge para todo z, se dice que la serie tiene un radio de convergencia ∞ y si converge en un solo punto, tiene un radio de convergencia 0.

Ejemplo 5.36 *La serie* $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ *converge para todo z, pues*

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{z^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{z^n}{n!}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{z}{(n+1)}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{|z|}{n+1} = 0 < 1 \quad \textit{para todo } z$$

y en este caso su radio de convergencia es ∞

Ejemplo 5.37 *La serie* $\sum_{n=0}^{\infty} n^n z^n$ *converge para* $z = 0$, *pues*

$$\lim_{n\to\infty} |a_n|^{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} |n\, z| = \begin{cases} 0 & si \quad z = 0 \\ \infty & si \quad z \neq 0 \end{cases}$$

en este caso el radio de convergencia es 0

Ejemplo 5.38 *La serie* $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ *converge para* $|z| < 1$, *pues*

$$\lim_{n\to\infty} |a_n|^{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} |\, z^n|^{\frac{1}{n}} = |z| < 1$$

en este caso el radio de convergencia es 1

Lema 6 *Si la serie* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-a)^n$ *converge para* $z = z_1 \neq a$, *entonces converge absolutamente para todo* z *que esté más próximo a a que a* z_1, *es decir,* $|z-a| < |z_1 - a|$ *y si diverge para* $z = z_2$, *entonces diverge para todo* z *que esté más lejos de a, que de* z_1.

En efecto, como la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z_1-a)^n$ converge, entonces $\lim_{n\to\infty} a_n(z_1-a)^n = 0$, luego los términos de la serie están acotados, es decir, $|a_n(z_1-a)^n| < M$ para $n = 0, 1, 2,$...Ahora

$$|a_n(z-a)^n| = \left|a_n(z_1-a)^n \frac{(z-a)^n}{(z_1-a)^n}\right| \leq M \left|\frac{z-a}{z_1-a}\right|^n$$

y como $\left|\frac{z-a}{z_1-a}\right| < 1$ entonces la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} M \left|\frac{z-a}{z_1-a}\right|^n = M \sum_{n=0}^{\infty} \left|\frac{z-a}{z_1-a}\right|^n$$

es una serie geométrica convergente y como

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n(z-a)^n| < M \sum_{n=0}^{\infty} \left| \frac{z-a}{z_1-a} \right|^n$$

por el criterio de comparación, se concluye que la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-a)^n$$

converge

La suma o resta, término a término de dos series de potencia con radio de convergencia R_1, R_2 produce una serie de potencia con radio de convergencia por lo menos igual al menor entre R_1 y R_2

La multiplicación de cada término de la primera serie, por cada término de la segunda y el agrupamiento de los términos que tienen la misma potencia de z, produce una nueva serie de potencia así :

$$\begin{aligned} \text{Si} \;\; f(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \;\; \text{y} \;\; g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n \text{ entonces } f(z).g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n = \\ &= a_0b_0 + (a_0b_1 + a_1b_0)z + (a_0b_2 + a_1b_1 + a_2b_0)z^2 + ... = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (a_0b_n + a_1b_{n-1} + ... + a_nb_0)z^n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n \end{aligned}$$

$$c_n = \frac{1}{n!}\frac{d^n}{dz^n}\left(f(z)g(z)\right)_{z=0}$$

y

$$\frac{f(z)}{g(z)} = \sum_{n=0}^{\infty} d_n z^n \qquad |z| < \min\{R_1, R_2\}$$

Si una serie de potencia tiene un radio de convergencia diferente de cero, ésta siempre representa una función analítica, más aún

Supongamos que la serie $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(z-a)^n$ tiene un radio de convergencia diferente de cero, y sea $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(z-a)^n$ en $|z-a| < R$ entonces

a) f(z) es una función analítica en $|z-a| < R$

b) $f'(z) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} n a_n (z-a)^{n-1}$ en $|z-a| < R$

c) Si C es una curva regular a trozos en el circulo de convergencia

$$\int_C f(z)dz = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \int_C (z-a)^n dz$$

5.5.1 Serie de Taylor

Sea $f(z)$ una función analítica en $z = a$, entonces f tiene una representación en serie de la forma

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(z-a)^n$$

para z en alguna vecindad de a
Como f es analítica en $z = a$, existe una vecindad de la forma $|z-a| < R$ en donde f es derivable. Sea C la circunferencia $|z-a| = \frac{R}{2}$ entonces f es derivable en todos los puntos $|z-a| < \frac{R}{2}$ y sobre C. Sea t en C y z cualquier punto en $|z-a| < \frac{R}{2}$.

$$\begin{aligned}
\text{Ahora } \frac{1}{t-z} &= \frac{1}{t-a+a-z} = \frac{1}{(t-a)-(z-a)} = \frac{1}{(t-a)}\frac{1}{)(1-\frac{z-a}{t-a})} = \\
&= \frac{1}{(t-a)}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z-a}{t-a}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-a)^n}{(t-a)^{n+1}}
\end{aligned}$$

y por fórmula integral de Cauchy

$$\begin{aligned}
f(z) &= \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(t)}{t-z}dt = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \sum_{n=0}^{\infty}\frac{f(t)(z-a)^n}{(t-a)^{n+1}}dt = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(t)(z-a)^n}{(t-a)^{n+1}}dt \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(t)}{(t-a)^{n+1}}dt\right](z-a)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(z-a)^n
\end{aligned}$$

Si $a = 0$, se reduce a la serie de Maclaurin

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}z^n \qquad |z| < R$$

Ejemplo 5.39 *Sea* $f(z) = e^z$, *como* $f^{(n)}(0) = 1$ *entonces la serie de Taylor de* f *alrededor de cero es*

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n \quad \text{y converge para todo z, pués}$$

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{\dfrac{z^{n+1}}{(n+1)!}}{\dfrac{z^n}{n!}} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{z}{(n+1)} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{|z|}{n+1} = 0 < 1, \text{ para todo z}$$

por tanto

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1+i)^n}{n!} = e^{1+i}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n}{n!} = e^i$$

Ejemplo 5.40 *La serie de Taylor de $f(z) = e^z$ alrededor de a es*

$$f(z) = e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^a}{n!} (z-a)^n \quad \textit{que converge para todo } z$$

$$\textit{En efecto,} \quad f(z) = e^z = e^{z-a+a} = e^a e^{z-a} = e^a \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (z-a)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^a}{n!} (z-a)^n$$

Ejemplo 5.41 *Si reemplazamos z por az en la serie*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n$$

obtenemos la serie

$$f(z) = e^{az} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (az)^n \quad \textit{y converge para todo } z$$

Ejemplo 5.42 *Si reemplazamos z por z^3 en la serie*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n$$

obtenemos la serie

$$f(z) = e^{z^3} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^{3n} \quad \textit{y converge para todo } z$$

por tanto

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2-3i)^{3n}}{n!} = e^{(2-3i)^3}$$

Ejemplo 5.43 *Si reemplazamos z por la serie de tanz en la serie*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n$$

obtenemos la serie

$$\begin{aligned} e^{\tan z} &= 1 + \left(z + \frac{z^3}{3} + ...\right) + \frac{1}{2!}\left(z + \frac{z^3}{3} + ...\right)^2 + \frac{1}{3!}\left(z + \frac{z^3}{3} + ...\right)^3 + ... \\ &= 1 + z + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{2} + \frac{3}{8}z^4 + ... \end{aligned}$$

En algunos casos, podemos obtener un desarrollo de Taylor complejo a partir de un desarrollo de Taylor real, simplemente reemplazando x por z. Por ejemplo la serie de senx es

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1} \quad \text{que converge para todo x}$$

Como sinx debe ser igual a $\sin z$ para z real, el desarrollo de Taylor alrededor de cero para sinz es es

$$\sin z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n+1} \quad \text{que converge para todo z, aplique criterio del cociente}$$

por tanto

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \ (2+4i)^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sin(2+4i)$$

Si derivamos la serie del sinz obtenemos la serie del coseno

$$\cos z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (2n+1)}{(2n+1)!} z^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} z^{2n} \quad \text{que converge para todo z}$$

por tanto

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (2+i)^{2n}}{(2n)!} = \cos(2+i)$$

Si reemplazamos la z por z^3 en la serie

$$\cos z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} z^{2n}$$

obtenemos

$$\cos z^3 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} z^{6n} \quad \text{que converge para todo z}$$

Si reemplazamos la z por az en la serie

$$\cos z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} z^{2n}$$

obtenemos

$$\cos az = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} (az)^{2n} \quad \text{que converge para todo z}$$

Si reemplazamos la z por $z-a$ en la serie

$$\cos z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} z^{2n}$$

obtenemos

$$\cos(z-a) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} (z-a)^{2n} \quad \text{que converge para todo z}$$

Ejemplo 5.44 *La serie binomial*

$$(1+z)^{\alpha} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} z^n \quad \textit{converge para} \quad |z|<1$$

$$(1-z)^{\alpha} = (1+(-z))^{\alpha} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} (-z)^n \quad \text{converge para } |z|<1$$

Ejemplo 5.45 *Si se hace el desarrollo de* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} z^n$ *y luego reemplazamos* $\alpha=-1$ *en*

$$(1+z)^{\alpha} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} z^n \ \textit{se obtiene}$$

$$\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n \quad \textit{que converge para } |z| < 1, \quad \textit{aplique el criterio de la raíz}$$

Si reemplazamos z por z^3 en la serie

$$\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n$$

obtenemos la serie

$$\frac{1}{1-z^3} = \sum_{n=0}^{\infty} z^{3n}$$

que converge para $|z| < 1$, aplique el criterio de la raíz

Si reemplazamos z por $3z$ en

$$\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n$$

obtenemos la serie

$$\frac{1}{1-3z} = \sum_{n=0}^{\infty} (3z)^n$$

converge para $|3z| < 1$, es decir, $|z| < \frac{1}{3}$, aplique el criterio de la raíz

Ejemplo 5.46 *La serie alrededor de cualquier punto a de $\dfrac{1}{1-z}$ viene dada por*

$$\begin{aligned} \frac{1}{1-z} &= \frac{1}{1-(z-a+a)} = \frac{1}{(1-a)-(z-a)} = \frac{1}{(1-a)} \frac{1}{(1-\frac{z-a}{1-a})} = \\ &= \frac{1}{(1-a)} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z-a}{1-a}\right)^n \quad \textit{converge para } \left|\frac{z-a}{1-a}\right| < 1 \end{aligned}$$

luego

$$\frac{1}{1-z} = \frac{1}{(1-a)} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z-a}{1-a}\right)^n \quad \textit{converge para } \left|\frac{z-a}{1-a}\right| < 1$$

Ejemplo 5.47 *La serie de* $\tan z = z + \frac{z^3}{3} + \frac{2}{15}z^5 + ...$ *tiene radio de convergencia* $\frac{\pi}{2}$*, que es la distancia de cero al punto mas cercano donde* $\tan z$ *no es analítica. En efecto*

$$\tan z = \frac{\sin z}{\cos z} = \frac{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!}}{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!}}$$

Como usualmente es más fácil multiplicar dos series que dividir, escribimos

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad o$$

$$(a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + ...)(1 - \frac{z^2}{2} + \frac{z^4}{24} - \frac{z^6}{720} + ...) = z - \frac{z^3}{6} + \frac{z^5}{120} + ...$$

y agrupando los términos de este producto se obtiene

$$a_0 + a_1 z + (a_2 - \frac{a_0}{2})z^2 + (a_3 - \frac{a_1}{2})z^3 + (a_4 - \frac{a_2}{2} + \frac{a_0}{24})z^4 = z - \frac{z^3}{6} + \frac{z^5}{120} + ...$$

luego igualando coeficientes de potencias iguales se tiene

$$a_0 = 0, \quad a_1 = 1, \quad a_2 - \frac{a_0}{2} = 0, \quad a_3 - \frac{a_1}{2} = -\frac{1}{6}, \quad a_4 - \frac{a_2}{2} + \frac{a_0}{24} = 0$$

y así sucesivamente, solucionando el anterior sistema se obtiene que

$$a_0 = a_2 = a_4 = 0 \qquad a_1 = 1, \quad a_3 = \frac{1}{3}$$

entonces

$$\tan z = z + \frac{z^3}{3} + \frac{2}{15}z^5 + ...$$

5.6 Convergencia Uniforme

Decimos que una sucesión de funciones $u_1(z), u_2(z), u_3(z), ...u_n(z)..$ tiene límite S(z) cuando n$\to \infty$, si dado $\epsilon > 0$, podemos demostrar que existe un entero N tal que

$$|S(z) - u_n(z)| < \epsilon \quad \text{para todo} \ \ n > N \ \ \text{y escribimos} \ \lim_{n\to\infty} u_n(z) = S(z)$$

De la sucesion de funciones $\{u_n(z)\}$ podemos formar una nueva sucesion

$$S_n(z) = \sum_{k=0}^{n} u_k(z) \text{ y si } \lim_{n\to\infty} S_n(z) \text{ existe entonces}$$

escribimos

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n(z) = S(z)$$

Decimos que $\sum_{n=0}^{\infty} u_n(z)$ con suma parcial $\{S_n(z)\}$ converge uniformemente a $S(z)$ en un dominio D, si para todo $\epsilon > 0$, existe un número N que no depende de z, tal que para todo z en D

$$|R_n(z)| = |S(z) - S_n(z)| < \epsilon \quad \text{para todo} \quad n > N$$

Una forma sencilla de probar que una serie es uniformemente convergente es por medio del criterio de Weierstass

Sea $\sum_{n=0}^{\infty} M_n$ una serie convergente de términos positivos. La serie $\sum_{n=0}^{\infty} u_n(z)$ converge uniformemente en un dominio D si

$$|u_n(z)| < M_n \quad \text{para todo z en D}$$

En efecto:

$$|S(z) - S_n(z)| = \left|\sum_{k=0}^{\infty} S_k(z) - \sum_{k=0}^{n} S_k(z)\right| = \left|\sum_{k=n+1}^{\infty} S_k(z)\right| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} |S_k(z)| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} M_k$$

y como la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} M_n \quad \text{es convergente entonces } |S(z) - S_n(z)| < \epsilon \text{ si } n > N \quad \text{para todo z en D}$$

luego la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n(z) \quad \text{converge uniformemente}$$

5.6.1 Algunas propiedades

1. Si una serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ converge para $z = a \neq 0$ entonces converge absolutamante para $|z| < |a|$ y uniformemente para $|z| < |z_1|$ donde $|z_1| < |a|$

En efecto ya que $\sum_{n=0}^{\infty} a_n a^n$ converge entonces $|a_n a^n| < 1$ para n grande o sea que $|a_n| < \frac{1}{|a^n|}$ para $n > N$ luego

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n z^n| = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|\,|z^n| \leq \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{|z^n|}{|a|^n} \text{ que converge para } \frac{|z|}{|a|} < 1 \text{ por lo tanto}$$

la serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} |a_n z^n|$ converge, y por lo tanto es absolutamente convergente

Sea

$$M_n = \frac{|z_1|^n}{|a|^n} \text{ entonces la serie } \sum_{n=0}^{\infty} M_n \text{ es convergente pues } \frac{|z_1|}{|a|} < 1$$

como $|a_n z^n| < M_n$ para $|z|<|z_1|$ entonces la serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ es uniformemente convergente

Ejemplo 5.48 *La serie* $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ *converge uniformemente para* $|z| \leq \frac{3}{5}$

2. Si $u_n(z)$, n=0,1,2,...son continuas en un dominio D y la serie $\sum_{n=0}^{\infty} u_n(z)$ es uniformemente convergente y converge a S(z) en D entonces S(z) es continua en D

3. Si $u_n(z)$, n=0,1,2,...son continuas en un dominio D y S(z)=$\sum_{n=0}^{\infty} u_n(z)$ es uniformemente convergente en D con C una curva En D entonces

$$\int_C S(z)dz = \int_C \sum_{n=0}^{\infty} u_n(z)dz = \sum_{n=0}^{\infty} \int_C u_n(z)dz$$

5.7 Serie de Laurent

Si f es analítica en a, podemos desarrollar f en una serie de Taylor alrededor de a, conteniendo potencias de $z - a$. Si f no es anlítica en a podríamos tratar de representar f en una serie alrededor de a si incluimos potencias de $\frac{1}{z-a}$ y esta es la idea de la serie de Laurent

Sea f analítica en el anillo $r_1 < |z - a| < r_2$ entonces para z en este anillo

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - a)^n$$

donde

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(t)}{(t-a)^{n+1}} dt \qquad n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3....$$

y C cualquier circunferencia $|z - a| = \rho$ con $r_1 < \rho < r_2$.

Al coeficiente

$$a_{-1} = \frac{1}{2\pi i}\oint_C f(t)dt \text{ se llama el residuo de } f \text{ en } z = a$$

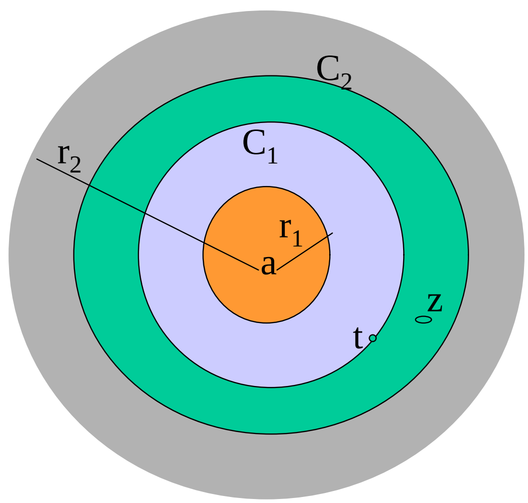
La serie

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-a)^n$$

se llama serie de Laurent de f alrededor de a, en el anillo $r_1 < |z-a| < r_2$ y los números

$$a_n = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(t)}{(t-a)^{n+1}}dt \qquad n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3$$

se llaman los coeficientes de Laurent de f en a



En efecto: sea z en el anillo figura 5.1 y elegimos los números R_1 y R_2 tales que $r_1 < R_1 < |z-a| < R_2 < r_2$. Sea C_2 la circunferencia $|z-a| = R_2$ y sea C_1 la circunferencia $|z-a| = R_1$ entonces por generalización de la integral de Cauchy

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\oint_{C_2} \frac{f(t)}{t-z}dt - \frac{1}{2\pi i}\oint_{C_1} \frac{f(t)}{t-z}dt$$

calculando ambas integrales en el sentido contrario al movimiento de las manecillas del reloj
Ahora

Para la integral sobre la curva C_2, $\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\oint_{C_2} \frac{f(t)}{t-z}dt$ escribimos

$$\frac{1}{t-z}=\frac{1}{(t-a+a-z)}=\frac{1}{(t-a)\left(1-\frac{z-a}{t-a}\right)}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-a)^n}{(t-a)^{n+1}}$$

entonces

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{C_2}\frac{f(t)}{t-z}dt=\sum_{n=0}^{\infty}\left\{\frac{1}{2\pi i}\oint_{C_2}(\frac{f(t)}{(t-a)^{n+1}})dt\right\}(z-a)^n=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-a)^n$$

donde

$$a_n=\frac{1}{2\pi i}\oint_{C}\frac{f(t)dt}{(t-a)^{n+1}}\quad n=0,1,2,...$$

Para la integral sobre la curva C_1 , $\displaystyle\oint_{C_1}\frac{f(t)}{(t-z)}dt$ escribimos

$$\frac{1}{t-z}=\frac{1}{t-a-(z-a)}=-\frac{1}{(z-a)}\frac{1}{(1-\dfrac{t-a}{z-a})}=$$

$$=-\frac{1}{(z-a)}\frac{1}{(1-\dfrac{t-a}{z-a})}=-\frac{1}{(z-a)}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{t-a}{z-a}\right)^n=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(t-a)^{n-1}}{(z-a)^n}$$

y observemos que para t en C_1, $\left|\dfrac{t-a}{z-a}\right|<1$, por lo tanto

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{C_1}\frac{f(t)}{t-z}dt=-\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{1}{2\pi i}\oint_{C_1}f(t)(t-a)^{n-1}dt\right\}\frac{1}{(z-a)^n}=-\sum_{n=1}^{\infty}a_{-n}(z-a)^{-n}$$

donde

$$a_{-n}=\frac{1}{2\pi i}\oint_{C_1}f(t)(t-a)^{n-1}dt\quad n=1,2,3,...$$

Ahora reemplazamos C_1 y C_2 con la circunferencia $|z-a|=\rho$ en estas integrales de linea. Esto nos permite consolidar las fórmulas para $a_0,a_1,a_{2,...}a_{-1},a_{-2},a_{-3}$ en una sola

$$a_n=\frac{1}{2\pi i}\oint_{C_\rho}\frac{f(t)}{(t-a)^{n+1}}dt\quad \text{para}\;\; n=0,\pm1,\pm2,\pm3,....$$

Con esta elección de coeficientes, tenemos

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{2\pi i}\oint_{C_2}\frac{f(t)}{t-z}dt - \frac{1}{2\pi i}\oint_{C_1}\frac{f(t)}{t-z}dt = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-a)^n - \sum_{n=1}^{\infty} a_{-n}\frac{-1}{(z-a)^n} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-a)^n + \sum_{n=1}^{\infty} a_{-n}\frac{1}{(z-a)^n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-a)^n \end{aligned}$$

como queríamos demostrar
Casi nunca calculamos un desarrollo de Laurent calculando las integrales de la fórmula para los coeficientes

Ejemplo 5.49 *Como ya sabemos que la serie*

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}z^n \quad \textit{converge para todo } z$$

entonces reemplazando z *por* $\dfrac{1}{z}$ *en*

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}z^n$$

obtenemos la serie de Laurent

$$e^{\frac{1}{z}} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\frac{1}{z^n}$$

que converge para $0 < |z| < \infty$

Ejemplo 5.50 *Reemplazando* z *por* $\dfrac{1}{z-i}$ *en*

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}z^n$$

obtenemos la serie de Laurent

$$e^{\frac{1}{z-i}} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\frac{1}{(z-i)^n}$$

que converge para $0 < |z-i| < \infty$

Ejemplo 5.51 *La serie*

$$\sin z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n+1} \quad \text{converge para todo } z$$

entonces reemplazando z *por* $\frac{1}{z}$ *en*

$$\sin z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n+1}$$

obtenemos la serie de Laurent

$$\sin \frac{1}{z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \left(\frac{1}{z}\right)^{2n+1}$$

que converge para $0 < |z| < \infty$

Ejemplo 5.52 *Hallar todas la series Laurent alrededor de cero de la función*

$$f(z) = \frac{1}{(z+2)(z+3)} = \frac{1}{z+2} - \frac{1}{z+3}$$

En efecto:

$$\frac{1}{z+2} = \frac{1}{2(1+\frac{z}{2})} = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \left(\frac{z}{2}\right)^n \quad \text{converge para } \left|\frac{z}{2}\right| < 1 \text{ , es decir, } |z| < 2$$

$$\frac{1}{z+2} = \frac{1}{z\left(1+\frac{2}{z}\right)} = \frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \left(\frac{2}{z}\right)^n \quad \text{converge para } \left|\frac{2}{z}\right| < 1 \text{ , es decir, } |z| > 2$$

$$\frac{1}{z+3} = \frac{1}{3(1+\frac{z}{3})} = \frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \left(\frac{z}{3}\right)^n \quad \text{converge para } \left|\frac{z}{3}\right| < 1 \text{ , es decir, } |z| < 3$$

$$\frac{1}{z+3} = \frac{1}{z\left(1+\frac{3}{z}\right)} = \frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \left(\frac{3}{z}\right)^n \quad \text{converge para } \left|\frac{3}{z}\right| < 1 \text{ , es decir, } |z| > 3$$

i) Ahora la serie de laurent para $f(z)$ en el anillo $2 < |z| < 3$ es

$$f(z) = \frac{1}{(z+2)(z+3)} = \frac{1}{z+2} - \frac{1}{z+3} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{2^n}{z^{n+1}} - \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^n}{3^{n+1}} \quad \textit{pues}$$

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{(z+2)(z+3)} = \frac{1}{z+2} - \frac{1}{z+3} = \frac{1}{z} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{2}{z}\right)^n - \frac{1}{3} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{z}{3}\right)^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{2^n}{z^{n+1}} - \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^n}{3^{n+1}} \end{aligned}$$

ii) La serie de laurent para $f(z)$ en $|z| > 3$ es

$$f(z) = \frac{1}{(z+2)(z+3)} = \frac{1}{z+2} - \frac{1}{z+3} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{2^n}{z^{n+1}} - \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{3^n}{z^{n+1}}$$

iii) La serie de Laurent para $f(z)$ en $|z| < 2$ es

$$f(z) = \frac{1}{(z+2)(z+3)} = \frac{1}{z+2} - \frac{1}{z+3} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^n}{2^{n+1}} - \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^n}{3^{n+1}}$$

iv) La serie de Laurent para $f(z)$ en el anillo $0 < |z+2| < 1$ es

$$f(z) = \frac{1}{(z+2)(z+3)} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (z+2)^{n-1} \quad \textit{y converge para } 0 < |z+2| < 1 \quad \textit{pues}$$

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{(z+2)(z+3)} = \frac{1}{(z+2)} \frac{1}{(1+z+2)} = \frac{1}{(z+2)} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (z+2)^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (z+2)^{n-1} \quad \textit{y converge para } 0 < |z+2| < 1 \end{aligned}$$

Ejemplo 5.53 *La serie de Laurent de la función*

$$f(z) = \frac{\sin z}{z^3} \quad \textit{en el anillo } 0 < |z| < \infty \quad \textit{es}$$

$$f(z) = \frac{\sin z}{z^3} = \frac{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n+1}}{z^3} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n-2} \quad \textit{converge en el anillo } 0 < |z| < \infty$$

Ejemplo 5.54 *Hallar la serie de Laurent de la función*

$$f(z) = \frac{5}{(z+2)(z^2+1)} = \frac{1}{z+2} - \frac{\frac{1}{2}+i}{z-i} - \frac{\frac{1}{2}-i}{z+i} \quad \textit{en el anillo } 1 < |z| < 2$$

Primero observemos que

$$\frac{1}{z+2} = \frac{1}{2(1+\frac{z}{2})} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^n}{2^{n+1}} \qquad |z| < 2$$

$$\frac{1}{z+i} = \frac{1}{z(1+\frac{i}{z})} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{i^n}{z^{n+1}} \qquad |i| < |z|\,, \;\; 1 < |z|$$

$$\frac{1}{z-i} = \frac{1}{z(1-\frac{i}{z})} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n}{z^{n+1}} \qquad |i| < |z|\,, \quad 1 < |z|$$

luego para

$$1 < |z| < 2 \textit{ se tiene que}$$

$$\frac{5}{(z+2)(z^2+1)} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^n}{2^{n+1}} - \left(\frac{1}{2}+i\right) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n}{z^{n+1}} - \left(\frac{1}{2}-i\right) \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{i^n}{z^{n+1}}$$

Ejemplo 5.55 *Hallar la serie de Laurent de*

$$f(z) = \frac{z^2-3}{(z+1)(z+3)} = 1 - \frac{3}{z+3} - \frac{1}{z+1} \qquad \textit{para } |z| > 3$$

Podemos observar que

$$\frac{1}{z+3} = \frac{1}{z(1+\frac{3}{z})} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{3^n}{z^{n+1}} \qquad |z| > 3$$

$$\frac{1}{z+1} = \frac{1}{z(1+\frac{1}{z})} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1^n}{z^{n+1}} \qquad |z| > 1$$

luego

$$\frac{z^2-3}{(z+1)(z+3)} = 1 - \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{3^{n+1}}{z^{n+1}} - \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1^n}{z^{n+1}} \quad \textit{para } |z| > 3$$

Ejemplo 5.56 *Mostrar que*

$$\frac{10}{(z+1)(z^2-2z+2)}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^n}(z-1)^n+(-1+2i)\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n i^n (z-1)^{-n-1}$$

$$-(1+2i)\sum_{n=0}^{\infty} i^n (z-1)^{-n-1} \qquad si\;\; 1<|z-1|<2$$

En efecto:

$$\frac{10}{(z+1)(z^2-2z+2)}=\frac{A}{z+1}+\frac{B}{z-1+i}+\frac{C}{z-1-i}=$$

$$=\frac{2}{z+1}+\frac{(-1+2i)}{z-1+i}-\frac{(1+2i)}{z-1-i}=\frac{2}{z-1+2}+\frac{(-1+2i)}{z-1+i}-\frac{(1+2i)}{z-1-i}$$
$$=\frac{1}{1+\left(\dfrac{z-1}{2}\right)}+\frac{(-1+2i)}{(z-1)\left(1+\dfrac{i}{z-1}\right)}-\frac{(1+2i)}{(z-1)\left(1-\dfrac{i}{z-1}\right)}=$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^n}(z-1)^n+(-1+2i)\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n i^n(z-1)^{-n-1}-(1+2i)\sum_{n=0}^{\infty} i^n(z-1)^{-n-1}$$
$$si\;\; 1<|z-1|<2$$

Ejemplo 5.57 *Hallar la serie de Laurent de*

$$f(z)=\frac{z}{(z+1)^2} \quad en\;\; 0<|z+1|<\infty$$

En efecto:

$$f(z)=\frac{z}{(z+1)^2}=\frac{z+1-1}{(z+1)^2}=\frac{z+1}{(z+1)^2}-\frac{1}{(z+1)^2}=\frac{1}{(z+1)}-\frac{1}{(z+1)^2}$$

Ejemplo 5.58 *Hallar la serie de Laurent de*

$$f(z)=\frac{2}{(z+1)(z-1)} \quad en\;\; 1<|z+2|<3$$

En efecto:

$$f(z)=\frac{A}{z-1}+\frac{B}{z+1}=\frac{1}{z-1}-\frac{1}{z+1}=\frac{1}{z+2-3}-\frac{1}{z+2-1}$$

$$= \frac{-1}{3(1-\dfrac{z+2}{3})} - \frac{1}{(z+2)(1-\dfrac{1}{z+2})} = -\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z+2)^n}{3^n} + \frac{1}{(z+2)}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(z+2)^n}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(z+2)^{n+1}} - \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z+2)^n}{3^{n+1}} \quad en \;\; 1 < |z+2| < 3$$

5.7.1 Singularidades

Si $f(z)$ no es analítica en $z = a$, pero en una vecindad de a si es, entonces se dice que $z = a$, es una singularidad de $f(z)$ y se pueden clasificar en :

1. Singularidad esencial. $z = a$ es una singularidad esencial de $f(z)$, si en la serie $\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-a)^n$ aparecen infinitas potencias de $(z-a)$ negativas

Ejemplo 5.59 *La función*

$$e^{\frac{1}{z-i}} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\frac{1}{(z-i)^n} = 1 + \frac{1}{z-i} + \frac{1}{2!}\frac{1}{(z-i)^2} + ...$$

tiene una Singularidad esencial en $z = i$ *y* $a_{-1} = 1$, *coeficiente de* $\dfrac{1}{z-i}$

Ejemplo 5.60 *La función*

$$\sin\frac{1}{z} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\left(\frac{1}{z}\right)^{2n+1} = \frac{1}{z} - \frac{1}{3!z^3} + \frac{1}{5!z^5} - \frac{1}{7!z^7} + ...$$

tiene una Singularidad esencial en $z = 0$ *y* $a_{-1} = 1$, *coeficiente de* $\dfrac{1}{z}$

2. Polo de orden n. Se dice que $f(z)$ tiene un polo de orden n, si la serie de Laurent toma la forma $\sum\limits_{k=-n}^{\infty} a_k(z-a)^k$, con $a_{-n} \neq 0$, y los anteriores a él son todos nulos, es decir, $a_{-n-1} = a_{-n-2} = a_{-n-3} = ... = 0$

Ejemplo 5.61 *La función*

$$f(z) = \frac{\sin z}{z^4} = \frac{z - \dfrac{z^3}{3!} + \dfrac{z^5}{5!} - \dfrac{z^7}{7!} + ...}{z^4} = \frac{1}{z^3} - \frac{1}{3!}\frac{1}{z} + \frac{z}{5!} - ......$$

tiene un polo de orden 3 *en* $z = 0$ *y* $a_{-1} = -\dfrac{1}{3!}$, *coeficiente de* $\dfrac{1}{z}$

Ejemplo 5.62 *La función*

$$f(z) = \frac{1-\cos z}{z^3} = \frac{1-\left(1-\frac{z^2}{2!}+\frac{z^4}{4!}-...\right)}{z^3} = \frac{1}{2!}\frac{1}{z} - \frac{z}{4!} + ...$$

tiene un polo de orden 1 en $z=0$ y $a_{-1} = \frac{1}{2!}$, coeficiente de $\frac{1}{z}$

Ejemplo 5.63 *La función*

$$f(z) = \frac{1}{z(z-1)^2} = \frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty} nz^{n-1} = \frac{1}{z} + 2 + 3z + 4z^2 + ... \quad 0 < |z| < 1$$

tiene un polo de orden 1 *en* $z=0$ *y* $a_{-1} = 1$, *coeficiente de* $\frac{1}{z}$

$$f(z) = \frac{1}{z(z-1)^2} = \frac{1}{(z-1+1)}\frac{1}{(z-1)^2} = \frac{1}{(z-1)^2} - \frac{1}{(z-1)} + 1 - (z-1) + ...$$

tiene un polo de orden 2 *en* $z=1$ *y* $a_{-1} = -1$, *coeficiente de* $\frac{1}{z-1}$

Algunas reglas

a) Si

$$\lim_{z\to a}(z-a)^n f(z) \text{ no es cero, ni infinito}$$

entonces $f(z)$ tiene un polo de orden n en $z=a$

Ejemplo 5.64 *La función*

$$f(z) = \frac{\sin z}{z^3} \text{ tiene un polo de orden 2 en } z=0, \text{ pues } \lim_{z\to 0} z^2\frac{\sin z}{z^3} = \lim_{z\to 0}\frac{\sin z}{z} = 1$$

Ejemplo 5.65 *La función*

$$f(z) = \frac{e^z-1}{z^2} \text{ tiene un polo de orden 1 en } z=0, \text{ pues } \lim_{z\to 0} z\frac{e^z-1}{z^2} = \lim_{z\to 0}\frac{e^z-1}{z} = 1$$

$$f(z) = \frac{1-\cos z}{z^3} \text{ tiene un polo de orden 1 en } z=0, \text{ pues } \lim_{z\to 0} z\frac{1-\cos z}{z^3} = \frac{1}{2}$$

Ejemplo 5.66 *La función*

$$f(z) = \frac{1}{z - \sin z}, \text{ tiene un polo de orden 3}$$

pués

$$\lim_{z\to 0} \frac{z^3}{z - \sin z} = \lim_{z\to 0} \frac{3z^2}{1 - \cos z} = \lim_{z\to 0} \frac{6z}{\sin z} = 6$$

b) Sea

$$f(z) = \frac{g(z)}{h(z)}$$

donde $g(z)$ es analítica en $z = a$ ó a es una singularidad removible de g(z), además $\lim_{z\to a} g(z)$ existe y no es cero. Si $h(z)$ tiene n ceros entonces, $f(z)$ tiene un polo de orden n en $z = a$

Ejemplo 5.67

$$f(z) = \frac{e^z}{z^3(z-i)(z+2)} = \frac{\frac{e^z}{(z-i)(z+2)}}{z^3} \text{ tiene un polo de orden } 3 \text{ en } z = 0, \text{ ya que}$$

$$\text{la función } \ g(z) = \frac{e^z}{(z-i)(z+2)} \quad \text{es analítica en } z = 0 \ \text{ y } \ \lim_{z\to 0} g(z) = \frac{1}{-2i} \neq 0$$

y $h(z) = z^3$ *tiene tres ceros. También tiene un polo de orden uno en* $z = i$*, y en* $z = -2$

La función

$$f(z) = \frac{\sin z}{(z-i)(z+2)} = \frac{\frac{\sin z}{z+2}}{(z-i)} = \frac{g(z)}{(z-i)}$$

tiene un polo de orden 1 en $z = i$, ya que la función

$$g(z) = \frac{\sin z}{z+2}$$

es analítica en z=i y

$$\lim_{z\to i} g(z) = \frac{\sin i}{i+2} \neq 0$$

y $h(z) = (z - i)$ tiene un cero en z=i

3. Singularidad removible. Se dice que $f(z)$ tiene una Singularidad removible en $z = a$, si $f(z)$ no está definida en $z = a$ y la serie $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-a)^n$ no tiene potencias negativas de $z - a$

Ejemplo 5.68 *La función*

$$f(z) = \frac{\sin z}{z} = \frac{z - \dfrac{z^3}{3!} + \dfrac{z^5}{5!} - \dfrac{z^7}{7!} + ...}{z} = 1 - \frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} - .....$$

tiene una Singularidad removible en $z = 0$, *con* $a_{-1} = 0$

Ejemplo 5.69 *La función*

$$f(z) = \frac{\sin z}{z^3} = \frac{z - \dfrac{z^3}{3!} + \dfrac{z^5}{5!} - \dfrac{z^7}{7!} + ...}{z^3} = \frac{1}{z^2} - \frac{1}{3!} + \frac{z^2}{5!} - ..$$

tiene un polo de orden 2 en $z = 0$, *con* $a_{-1} = 0$

Ejemplo 5.70 *La función*

$$f(z) = \frac{1 - \cos z}{z^2} = \frac{1 - \left(1 - \dfrac{z^2}{2!} + \dfrac{z^4}{4!} - ...\right)}{z^2} = \frac{1}{2!} - \frac{z^2}{4!} + ...$$

tiene una Singularidad removible en $z = 0$, *con* $a_{-1} = 0$

Como calcular el residuo en algunos casos

1. Si $f(z)$ tiene una singularidad esencial en $z = a$, entonces el residuo a_{-1} de $f(z)$ en $z = a$, hay que hallarlo por medio de la serie de Laurent

2. Si $f(z)$ tiene un polo de orden n en $z = a$, entonces el residuo se calcula por

$$a_{-1} = \lim_{z \to a} \frac{1}{(n-1)!} \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} \left((z-a)^n f(z)\right)$$

En efecto, como $f(z)$ tiene un polo de orden n en $z = a$, entonces

$$f(z) = \frac{a_{-n}}{(z-a)^n} + \frac{a_{-n+1}}{(z-a)^{n-1}} + ... + \frac{a_{-1}}{(z-a)} + a_0 + a_1(z-a) + ... \text{ con } a_{-n} \neq 0$$

Multiplicando ambos lados de la igualdad por $(z-a)^n$ se obtiene

$$(z-a)^n f(z) = a_{-n} + a_{-n+1}(z-a) + ... + a_{-1}(z-a)^{n-1} + a_0(z-a)^n + ...$$

Como la parte derecha de la igualdad anterior es una serie de Taylor alrededor de $z = a$, entonces $(z-a)^n f(z)$ es una función analítica en $z = a$, luego podemos derivar $n-1$ veces, es decir,

$$\frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}}((z-a)^n f(z)) = (n-1)(n-2)(n-3)....1.a_{-1} + a_0(z-a) + ...$$

y tomando límite cuando z tiende a a en ambos lados de la igualdad, obtenemos

$$\lim_{z\to a} \frac{1}{(n-1)!}\frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}}((z-a)^n f(z)) = a_{-1}$$

3. Si $f(z)$ tiene una *singularidad removible en* $z = a$, entonces el residuo a_{-1} de $f(z)$ en $z = a$, hay que hallarlo por medio de la serie de Laurent, pero como la serie $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-a)^n$ no tiene potencias negativas de $z-a$, entonces su residuo es cero

5.8 Teorema de los Residuos

Sea $f(z)$ analítica en un dominio D, excepto en un número finito de singularidades z_0, z_1,...z_n, con residuos $a_{-1}, b_{-1}, ..., c_{-1}$ y C una curva simple cerrada en D orientada en sentido contrario al movimiento de las manecillas del reloj, conteniendo las singularidades, entonces

$$\oint_C f(z)dz = 2\pi i(a_{-1} + b_{-1+} .... + c_{-1}) = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} Re(f, z_k)$$

En efecto,

$$\oint_C f(z)dz = \oint_{C_1} f(z)dz + \oint_{C_2} f(z)dz + ... \oint_{C_n} f(z)dz = 2\pi i(a_{-1} + b_{-1+} .... + c_{-1})$$

Ejemplo 5.71 *Mostrar que la integral*

$$\oint_{|z|=1} \frac{1}{z}dz = 2\pi i$$

En efecto:

La serie de Laurent de la función $f(z) = \frac{1}{z}$, alrededor de $z = 0$, es $f(z) = \frac{1}{z}$, por lo tanto el residuo en $z = 0$ es 1, y así la integral

$$\oint_{|z|=1} \frac{1}{z}dz = 2\pi i\,(1) = 2\pi i$$

La función $f(z) = \dfrac{1}{z}$ tiene un polo en $z = 0$, pues

$\lim\limits_{z\to 0} \dfrac{z}{z} = \lim\limits_{z\to 0} 1 = 1$ es diferente de 0 y es finito además este límite es $Re(f;0) = 1$

En forma análoga, la serie de Laurent de la función $f(z) = \dfrac{1}{z^2}$, alrededor de $z = 0$, es $f(z) = \dfrac{1}{z^2}$, por lo tanto el residuo en $z = 0$ es 0, y así la integral

$$\oint\limits_{|z|=1} \frac{1}{z^2} dz = 2\pi i\,(0) = 0$$

La función $f(z) = \dfrac{1}{z^2}$ tiene un polo en $z = 0$, de orden 2 pues

$\lim\limits_{z\to 0} \dfrac{z^2}{z^2} = \lim\limits_{z\to 0} 1 = 1$ es difernte de 0 y es finito además $Re(f;0) = \lim\limits_{z\to 0} \dfrac{d}{dz}\left(\dfrac{z^2}{z^2}\right) = \lim\limits_{z\to 0} \dfrac{d}{dz}(1) = 0$

Ejemplo 5.72 *Mostrar que la integral*

$$\oint\limits_{|z|=1} \frac{\sin z}{z} dz = 0$$

En efecto:

La serie de Laurent de la función $f(z) = \dfrac{\sin z}{z}$, alrededor de $z = 0$ es

$$\frac{\sin z}{z} = \frac{z - \dfrac{z^3}{3!} + \dfrac{z^5}{5!} - \dfrac{z^7}{7!} + \dots.}{z} = 1 - \frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} - \dots.$$

por lo tanto el residuo en $z = 0$ es el coeficiente de $\dfrac{1}{z}$ que es 0, y así la integral

$$\oint\limits_{|z|=1} \frac{\sin z}{z} dz = 2\pi i.0 = 0.$$

Ejemplo 5.73 *Mostrar que la integral*

$$\oint\limits_{|z|=1} \frac{1 - \cos z}{z^3} dz = \pi i$$

En efecto:

La serie de Laurent de la función $f(z) = \dfrac{1-\cos z}{z^3}$, alrededor de $z=0$ es

$$f(z) = \frac{1-\cos z}{z^3} = \frac{1-\left(1-\frac{z^2}{2!}+\frac{z^4}{4!}-...\right)}{z^3} = \frac{1}{2!}\frac{1}{z} - \frac{z}{4!} + ...$$

por lo tanto el residuo en $z=0$ es el coeficiente de $\dfrac{1}{z}$ que es $\dfrac{1}{2!}$, y así la integral

$$\oint_{|z|=1} \frac{\sin z}{z} dz = 2\pi i.\frac{1}{2!} = \pi i$$

La función

$$f(z) = \frac{1-\cos z}{z^3}$$

tiene un plolo de orden 1

$$\text{pues } \lim_{z\to 0} z\frac{1-\cos z}{z^3} = \lim_{z\to 0} \frac{1-\cos z}{z^2} = \lim_{z\to 0} \frac{\sin z}{2z} = \lim_{z\to 0} \frac{\cos z}{2} = \frac{1}{2} = \operatorname{Re}(f,0)$$

Ejemplo 5.74 *Mostrar que la integral*

$$\oint_{|z|=1} \frac{e^z-1}{z^2} dz = 2\pi i$$

En efecto:

La serie de Laurent de la función $f(z) = \dfrac{e^z-1}{z^2}$, alrededor de $z=0$ es

$$f(z) = \frac{e^z-1}{z^2} = \frac{\left(1+z+\frac{z^2}{2!}+\frac{z^3}{3!}+\frac{z^4}{4!}+...\right)-1}{z^2} = \frac{1}{z} + \frac{1}{2!} + ...$$

por lo tanto el residuo en $z=0$ es el coeficiente de $\dfrac{1}{z}$ que es 1, y así la integral

$$\oint_{|z|=1} \frac{e^z-1}{z^2} dz = 2\pi i$$

La función

$$f(z) = \frac{e^z-1}{z^2}$$

tiene un polo de orden 1 en $z = 0$, pues

$$\lim_{z\to 0} z\frac{e^z - 1}{z^2} = \lim_{z\to 0} \frac{e^z - 1}{z} = 1 = \mathrm{Re}(f, 0)$$

luego

$$\oint\limits_{|z|=1} \frac{e^z - 1}{z^2} dz = 2\pi i$$

Ejemplo 5.75 *Mostrar que la integral*

$$\oint\limits_{|z|=1} e^{\frac{1}{z}} \sin\frac{1}{z} dz = 2\pi i$$

En efecto,

$$\begin{aligned} e^{\frac{1}{z}} \sin\frac{1}{z} &= \left(1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{2!z^2} + ...\right)\left(\frac{1}{z} - \frac{1}{3!z^3} + \frac{1}{5!z^5} + ...\right) \\ &= \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} + ... \end{aligned}$$

luego $a_{-1} = 1$, *el coeficiente de* $\frac{1}{z}$, *en la serie de Laurent, luego*

$$\oint\limits_{|z|=1} e^{\frac{1}{z}} \sin\frac{1}{z} dz = 2\pi i(1)$$

Ejemplo 5.76 *Mostrar que la integral*

$$\oint\limits_{|z|=1} \frac{\sin z}{z^2} dz = 2\pi i$$

En efecto, como

$$\lim_{z\to 0} z\frac{\sin z}{z^2} = \lim_{z\to 0} \frac{\sin z}{z} = 1$$

entonces $z = 0$ *es un polo de orden* 1 *y el residuo en* $z = 0$ *es 1. Ahora*

$$\frac{\sin z}{z^2} = \frac{z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - ...}{z^2} = \frac{1}{z} - \frac{z}{3!} + \frac{z^3}{5!} - ..$$

luego el residuo es $a_{-1} = 1$*, el coeficiente de* $\dfrac{1}{z}$*, en la serie de Laurent, luego*

$$\oint\limits_{|z|=1} \frac{\sin z}{z^2} dz = 2\pi i$$

Ejemplo 5.77 *Calcular*

$$\oint\limits_{|z|=10} \frac{z}{(z^2+1)} dz$$

En efecto, $f(z) = \dfrac{z}{(z^2+1)}$ *tiene a* $z = \pm i$ *como puntos singulares que son polos de orden 1, ya que*

$$\lim_{z\to i} \frac{(z-i)z}{(z^2+1)} = \lim_{z\to i} \frac{(z-i)z}{(z+i)(z-i)} = \lim_{z\to i} \frac{z}{(z+i)} = \frac{1}{2} \quad \textit{además } a_{-1} = \frac{1}{2}$$

y

$$\lim_{z\to -i} \frac{(z+i)z}{(z^2+1)} = \lim_{z\to -i} \frac{(z+i)z}{(z+i)(z-i)} = \lim_{z\to -i} \frac{z}{(z-i)} = \frac{1}{2} \quad \textit{además } b_{-1} = \frac{1}{2}$$

luego

$$\oint\limits_{|z|=10} \frac{z}{(z^2+1)} dz = 2\pi i \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right) = 2\pi i$$

Ejemplo 5.78 *Calcular*

$$\oint\limits_{C} \frac{\cos\left(\frac{z}{2}\right)}{(z^2-25)} dz \qquad C\text{: } \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$$

En efecto, $f(z) = \dfrac{\cos\left(\frac{z}{2}\right)}{(z^2-25)}$ *tiene a* $z = \pm 5$ *como puntos singulares que son polos de orden 1, pero no se encuentran en el interior de C, por tanto* $f(z) = \dfrac{\cos\left(\frac{z}{2}\right)}{(z^2-25)}$ *es analítica en C y su interior luego*

$$\oint\limits_{C} \frac{\cos\left(\frac{z}{2}\right)}{(z^2-25)} dz = 0 \quad \textit{si} \quad C\text{: } \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$$

Ejemplo 5.79 *Calcular*

$$\oint_C \frac{\cos\left(\frac{z}{2}\right)}{(z^2-4)}dz \qquad C\colon \frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$$

En efecto, $f(z)=\dfrac{\cos\left(\frac{z}{2}\right)}{(z^2-4)}$ *tiene a* $z=\pm 2$ *como puntos singulares que son polos de orden 1,*

$$\oint_C \frac{\cos\left(\frac{z}{2}\right)}{(z^2-4)}dz = 2\pi i\left(\mathrm{Re}(f,2)+\mathrm{Re}(f,-2)\right) \qquad si \qquad C\colon \frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$$

$$\mathrm{Re}(f,2)+\mathrm{Re}(f,-2)=\lim_{z\to 2}(z-2)\frac{\cos\left(\frac{z}{2}\right)}{(z^2-4)}+\lim_{z\to -2}(z+2)\frac{\cos\left(\frac{z}{2}\right)}{(z^2-4)}=\frac{\cos 1}{4}-\frac{\cos 1}{4}=0$$

por tanto

$$\oint_C \frac{\cos\left(\frac{z}{2}\right)}{(z^2-4)}dz = 2\pi i\left(\mathrm{Re}(f,2)+\mathrm{Re}(f,-2)\right)=0$$

Ejemplo 5.80 *Mostrar que*

$$\oint_C \frac{\cos z}{e^z-1}dz=\mathrm{Re}(f,0)+\mathrm{Re}(f,2\pi i)=2\pi i(1+\cosh 2\pi)$$

si C *es el rectángulo limitado por las ecuaciones* $x=\pm 1$, $y=-1$,$y=3\pi$.

En efecto

$$\mathrm{Re}(f,0)+\mathrm{Re}(f,2\pi i)=\lim_{z\to 0}(z-0)\frac{\cos z}{e^z-1}+\lim_{z\to 2\pi i}(z-2\pi i)\frac{\cos z}{e^z-1}=$$

$$\lim_{z\to 0}\frac{\cos z-z\sin z}{e^z}+\lim_{z\to 2\pi i}\frac{\cos z-(z-2\pi i)\sin z}{e^z}=1+\cos 2\pi i=1+\cosh 2\pi$$

por lo tanto

$$\oint_C \frac{\cos z}{e^z-1}dz=\mathrm{Re}(f,0)+\mathrm{Re}(f,2\pi i)=2\pi i(1+\cosh 2\pi)$$

Ejemplo 5.81 *Calcular*

$$\oint\limits_{|z|=10} \frac{e^{\frac{1}{z}}}{1-z}dz$$

En efecto, $z=0$ *es una singularidad esencial y* $z=1$ *un polo de orden* 1

$$\begin{aligned}\frac{e^{\frac{1}{z}}}{1-z} &= (1+z+z^2+z^3+...)(1+\frac{1}{z}+\frac{1}{2!z^2}+\frac{1}{3!z^3}+....)\\ &= (1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+....)\frac{1}{z}+....=\frac{e-1}{z}+...\end{aligned}$$

luego el residuo en $z=0$ *es* $e-1$ *y el residuo en z=1 es* $-e$*,, ya que*

$$\lim_{z\to 1}(z-1)\frac{e^{\frac{1}{z}}}{1-z} = -\lim_{z\to 1} e^{\frac{1}{z}} = -e$$

así que

$$\oint\limits_{|z|=10} \frac{e^{\frac{1}{z}}}{1-z}dz = 2\pi i\,(e-1-e) = -2\pi i$$

Ejemplo 5.82 *Calcular*

$$\oint\limits_{|z|=10} z\cos(\frac{1}{z-i})dz$$

Como

$$z\cos\left(\frac{1}{z-i}\right) = (z-i+i)\cos\left(\frac{1}{z-i}\right) = (z-i)\cos\left(\frac{1}{z-i}\right)+i\cos\left(\frac{1}{z-i}\right)$$

$$= (z-i)\left(1-\frac{1}{2!(z-i)^2}+\frac{1}{4!(z-i)^4}-...\right)+i\left(1-\frac{1}{2!(z-i)^2}+\frac{1}{4!(z-i)^4}-...\right)$$

$$= (z-i)-\frac{1}{2!(z-i)}+\frac{1}{4!(z-i)^3}-....+i-\frac{i}{2!(z-i)^2}+\frac{i}{4!(z-i)^4}-...$$

así el $Re(f,i) = -\frac{1}{2!}$, *luego*

$$\oint\limits_{|z|=10} z\cos\left(\frac{1}{z-i}\right)dz = 2\pi i(-\frac{1}{2!}) = -\pi i$$

Ejemplo 5.83 *Calcular la integral*

$$\oint\limits_{|z|=9} \frac{\sin z}{z^2(z^2+4)}dz$$

En efecto, $f(z)$ presenta singularidades en $z=0$ y $z=\pm 2i$. En $z=0$ hay un polo de orden 1, en $z=\pm 2i$ hay polos de orden uno así que :

$$Re(f,0) = \lim_{z\to 0} z\frac{\sin z}{z^2(z^2+4)} = \lim_{z\to 0}\frac{\sin z}{z(z^2+4)} = \lim_{z\to 0}\frac{\frac{\sin z}{z}}{z^2+4} = \frac{1}{4}$$

$$Re(f,2i) = \lim_{z\to 2i}(z-2i)\frac{\sin z}{z^2(z-2i)(z+2i)} = \lim_{z\to 2i}\frac{\sin z}{z^2(z+2i)} = \frac{\sin 2i}{(2i)^2(4i)} = \frac{i\sin 2i}{16}$$

$$Re(f,-2i) = \lim_{z\to -2i}(z+2i)\frac{\sin z}{z^2(z-2i)(z+2i)} = \lim_{z\to -2i}\frac{\sin z}{z^2(z-2i)} = \frac{\sin 2i}{(-2i)^2(-4i)} = \frac{i\sin 2i}{16}$$

luego

$$\oint\limits_{|z|=9} \frac{\sin z}{z^2(z^2+4)}dz = 2\pi i\left(\frac{1}{4}+\frac{i\sin 2i}{16}+\frac{i\sin 2i}{16}\right)$$

Ejemplo 5.84 *La integral*

$$\oint\limits_{|z|=1} \frac{\sin z}{z^2(z^2+4)}dz = 2\pi i\frac{1}{4} = \frac{\pi i}{2}$$

ya que $z=\pm 2i$ no están en el interior de $|z|\leq 1$, ni en la frontera y

$$Re(f,0) = \lim_{z\to 0} z\frac{\sin z}{z^2(z^2+4)} = \lim_{z\to 0}\frac{\sin z}{z(z^2+4)} = \lim_{z\to 0}\frac{\frac{\sin z}{z}}{z^2+4} = \frac{1}{4}$$

Ejemplo 5.85 *Calcular la integral*

$$\oint\limits_{|z|=8} \frac{(z^2-2z)dz}{(z+1)^2(z^2+4)}$$

En efecto, $f(z)$ tiene un polo de orden 2 en $z=-1$ y polos de orden 1 en $z=\pm 2i$, luego

$$\begin{aligned} Re(f,-1) &= \lim_{z\to -1}\frac{1}{1!}\frac{d}{dz}\left[(z+1)^2\frac{z^2-2z}{(z+1)^2(z^2+4)}\right] = \lim_{z\to -1}\frac{d}{dz}\left[\frac{z^2-2z}{(z^2+4)}\right] \\ &= \lim_{z\to -1}\frac{(z^2+4)(2z-2)-(z^2-2z)2z}{(z^2+4)^2} = -\frac{14}{25} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Re(f,2i) &= \lim_{z\to 2i}(z-2i)\frac{z^2-2z}{(z+1)^2(z+2i)(z-2i)} = \lim_{z\to 2i}\frac{z^2-2z}{(z+1)^2(z+2i)} = \\ &= \frac{-4-4i}{(2i+1)^2(2i+2i)} = \frac{7+i}{25} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Re(f,-2i) &= \lim_{z\to -2i}(z+2i)\frac{z^2-2z}{(z+1)^2(z+2i)(z-2i)} = \lim_{z\to -2i}\frac{z^2-2z}{(z+1)^2(z-2i)} \\ &= \frac{-4+4i}{(-2i+1)^2(-2i-2i)} = \frac{7-i}{25} \end{aligned}$$

entonces

$$\oint\limits_{|z|=8}\frac{z^2-2z}{(z+1)^2(z^2+4)} = 2\pi i\left(-\frac{14}{25}+\frac{7+i}{25}+\frac{7-i}{25}\right)$$

Ejemplo 5.86 *Calcular la integral*

$$\oint\limits_{|z|=8}\frac{e^z dz}{z^3}$$

En efecto, $f(z)$ tiene un polo de orden 3 en $z=0$, ya que

$$\lim_{z\to 0} z^3 f(z) = \lim_{z\to 0} z^3\frac{e^z}{z^3} = \lim_{z\to 0} e^z = 1$$

ó

$$\frac{e^z}{z^3} = \frac{1}{z^3}+\frac{1}{z^2}+\frac{1}{2!z}+\frac{1}{3!}+...$$

y $Re(f(z),0) = \dfrac{1}{2!}$ *y así*

$$\oint\limits_{|z|=8}\frac{e^z dz}{z^3} = \frac{2\pi i}{2!} = \pi i$$

Ahora si aplicamos la fórmula para hallar el residuo cuando la singularidad es un polo de orden 3 se tiene

$$\begin{aligned} Re(f(z),0) &= \lim_{z\to 0}\frac{1}{(3-1)!}\frac{d^{3-1}}{dz^{3-1}}z^3 f(z) = \lim_{z\to 0}\frac{1}{2!}\frac{d^2}{dz^2}\left(z^3.\frac{e^z}{z^3}\right) \\ &= \lim_{z\to 0}\frac{1}{2!}\frac{d^2}{dz^2}(e^z) = \lim_{z\to 0}\frac{1}{2!}e^z = \frac{1}{2!} \end{aligned}$$

luego

$$\oint\limits_{|z|=8}\frac{e^z dz}{z^3} = \frac{2\pi i}{2!} = \pi i$$

Ejemplo 5.87 *Calcular la integral*

$$\oint_{|z|=8} \frac{e^z \cos z}{z^2}$$

En efecto:

$z = 0$, es un polo de orden 2, ya que

$$\lim_{z\to 0} z^2.\frac{e^z \cos z}{z^2} = \lim_{z\to 0} e^z \cos z = 1 \text{ y el residuo se calcula por}$$

$$Re(f(z),0) = \lim_{z\to 0} \frac{1}{1!}\frac{d}{dz}\left(z^2\frac{e^z \cos z}{z^2}\right) = \lim_{z\to 0}(e^z \cos z - e^z \sin z) = 1$$

luego

$$\oint_{|z|=8} \frac{e^z \cos z}{z^2} = 2\pi i$$

Ahora observe que

$$e^z \cos z = \left(1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^4}{4!} + ...\right)\left(1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \frac{z^6}{6!} + ...\right)$$

$$= 1 + z - \frac{z^3}{3} - \frac{z^4}{4!} + ...$$

así que

$$\frac{e^z \cos z}{z^2} = \frac{1 + z - \frac{z^3}{3} - \frac{z^4}{4!} + ...}{z^2} = \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z} - \frac{z}{3} - ...$$

que ratifica que el $Re(f(z),0) = 1$, coeficiente de $\frac{1}{z}$ luego

$$\oint_{|z|=8} \frac{e^z \cos z}{z^2} = 2\pi i$$

Ejemplo 5.88 *Calcular la integral*

$$\oint_{|z|=1} \frac{dz}{\sin z}$$

En efecto:

$z = 0$, es un polo de orden 1, ya que

$$\lim_{z\to 0} z.\frac{1}{\sin z} = \lim_{z\to 0}\frac{1}{\cos z} = 1 \text{ que coicide con el residuo}$$

así la integral

$$\oint_{|z|=1}\frac{dz}{\sin z} = 2\pi i$$

En forma análoga la integral

$$\oint_{|z|=1}\frac{dz}{z\sin z} = 2\pi i.0 = 0$$

ya que $z = 0$, es un polo de orden 2, pues

$$\lim_{z\to 0} z^2.\frac{1}{z\sin z} = \lim_{z\to 0}\frac{z}{\sin z} = 1$$

y el residuo está dado por

$$Re(f(z),0) = \lim_{z\to 0}\frac{1}{1!}\frac{d}{dz}\left(z^2.\frac{1}{z\sin z}\right) = \lim_{z\to 0}\frac{d}{dz}\left(\frac{z}{\sin z}\right) = \lim_{z\to 0}\frac{\sin z - z\cos z}{\sin^2 z} =$$

$$= \lim_{z\to 0}\frac{\cos z - \cos z + z\sin z}{2\sin z\cos z} = \lim_{z\to 0}\frac{z}{2\cos z} = 0$$

Ejemplo 5.89 *Calcular la integral*

$$\oint_{\left|z-\frac{1}{2\pi}\right|=\frac{1}{40}}\frac{dz}{\sin\frac{1}{z}}$$

Las singularidades se presentan en $\frac{1}{z} = n\pi$, $n = \pm 1, \pm 2..$ *es decir,* $z = \frac{1}{n\pi}$, *pero solo el punto* $z = \frac{1}{2\pi}$, *está en el interior de la región y es un polo de orden 1, pues*

$$\lim_{z\to\frac{1}{2\pi}}(z-\frac{1}{2\pi}).\frac{1}{\sin\frac{1}{z}} = \lim_{z\to\frac{1}{2\pi}}\frac{1}{-\left(\frac{1}{z^2}\right)\cos\frac{1}{z}} = -\lim_{z\to\frac{1}{2\pi}}\frac{z^2}{\cos\frac{1}{z}} = -\frac{1}{4\pi^2}$$

que coicide con el valor del residuo, luego

$$\oint_{\left|z-\frac{1}{2\pi}\right|=\frac{1}{40}}\frac{dz}{\sin\frac{1}{z}} = 2\pi i\left(-\frac{1}{4\pi^2}\right) = -\frac{i}{2\pi}$$

Ejemplo 5.90 *Calcular la integral*

$$\oint\limits_C \frac{dz}{e^z - 1}$$

si C es el contorno limitado por los gráficos de $x = -1, x = 1, y = 3\pi,\ y = 5\pi$.*En efecto:*

$z = 4\pi i$, es un polo de orden 1, ya que

$$\lim_{z\to 0} \frac{z - 4\pi i}{e^z - 1} = \lim_{z\to 0} \frac{1}{e^z} = 1 \text{ que coicide con el valor del residuo}$$

por lo tanto

$$\oint\limits_C \frac{dz}{e^z - 1} = 2\pi i$$

Ejemplo 5.91 *Calcular la integral*

$$\oint\limits_{|z|=1} \frac{\sin z dz}{z - \sinh z}$$

Calculemos la serie de Laurent alrededor de $z = 0$.

$$\frac{\sin z}{z - \sinh z} = \frac{z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \frac{z^7}{7!} + \ldots}{z - \left(z + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + \frac{z^7}{7!} + ..\right)} = \frac{-6}{z^2} + \frac{13}{10} + \ldots$$

por lo tanto $z = 0$ *es un polo de orden 2 y su residuo es 0, el coeficiente de* $\dfrac{1}{z}$ *luego*

$$\oint\limits_{|z|=1} \frac{\sin z dz}{z - \sinh z} = 2\pi i.0 = 0$$

Como $z = 0$ *es un polo de orden 2 por la serie de laurent y porque*

$$\lim_{z\to 0} \frac{z^2 \sin z}{z - \sinh z} = \lim_{z\to 0} \frac{z^2 \cos z + 2z \sin z}{1 - \cosh z} = -6 \textit{ (derive dos veces más lhophital)}$$

entonces el residuo se calcula también por

$$Re(f(z), 0) = \lim_{z\to 0} \frac{1}{1!} \frac{d}{dz} \left(\frac{z^2 \sin z}{z - \sinh z} \right) = 0 \textit{ extenso el cálculo}$$

Ejemplo 5.92 *Calcular la integral*

$$\oint\limits_{|z|=1} \frac{dz}{\cos z - 1 + \frac{z^2}{2}}$$

Calculemos la serie de Laurent alrededor de $z = 0$.

$$\cos z - 1 + \frac{z^2}{2} = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \frac{z^6}{6!} + .. - 1 + \frac{z^2}{2} = \frac{z^4}{4!} - \frac{z^6}{6!} + ...$$

entonces

$$\frac{1}{\cos z - 1 + \frac{z^2}{2}} = \frac{1}{\frac{z^4}{4!} - \frac{z^6}{6!} + ...} = \frac{4!}{z^4} + \frac{4!4!}{6!z^2} + \frac{4!4!4!}{6!6!} + ...$$

luego el residuo en $z = 0$ es 0, por tanto

$$\oint\limits_{|z|=1} \frac{dz}{\cos z - 1 + \frac{z^2}{2}} = 2\pi i 0 = 0$$

bserve que $z = 0$ es un polo de orden 4 y se puede ratificar por

$$\lim_{z\to 0} \frac{z^4}{\cos z - 1 + \frac{z^2}{2}} = \lim_{z\to 0} \frac{4z^3}{-\sin z + z} = \lim_{z\to 0} \frac{12z^2}{-\cos z + 1} = \lim_{z\to 0} \frac{24z}{\sin z} = 24$$

diferente de 0 y finito y el residuo se puede calcular por

$$Re(f(z), 0) = \lim_{z\to 0} \frac{1}{(4-1)!} \frac{d^{4-1}}{dz^{4-1}} \left(\frac{z^4}{\cos z - 1 + \frac{z^2}{2}} \right) = 0 \textit{ difícil}$$

Ejemplo 5.93 *Calcular la integral*

$$\oint\limits_{|z|=2\pi} \tan z$$

En efecto

$$\oint\limits_{|z|=2\pi} \tan z = \oint\limits_{|z|=2\pi} \frac{\sin z dz}{\cos z} = 2\pi i \left(\operatorname{Re}\left(f, \frac{\pm\pi}{2}\right) + \operatorname{Re}\left(f, \frac{\pm 3\pi}{2}\right) \right)$$

Ahora

$$\operatorname{Re}\left(f, \frac{\pi}{2}\right) = \lim_{z\to\frac{\pi}{2}} \left(z - \frac{\pi}{2}\right) \frac{\sin z}{\cos z} = \lim_{z\to\frac{\pi}{2}} \frac{\sin z + \left(z - \frac{\pi}{2}\right)\cos z}{-\sin z} = -1$$

$$\operatorname{Re}\left(f, \frac{-\pi}{2}\right) = \lim_{z\to -\frac{\pi}{2}} \left(z+\frac{\pi}{2}\right)\frac{\sin z}{\cos z} = \lim_{z\to -\frac{\pi}{2}} \frac{\sin z + \left(z+\frac{\pi}{2}\right)\cos z}{-\sin z} = -1$$

$$\operatorname{Re}\left(f, \frac{3\pi}{2}\right) = \lim_{z\to \frac{3\pi}{2}} \left(z-\frac{3\pi}{2}\right)\frac{\sin z}{\cos z} = \lim_{z\to \frac{3\pi}{2}} \frac{\sin z + \left(z-\frac{3\pi}{2}\right)\cos z}{-\sin z} = -1$$

$$\operatorname{Re}\left(f, \frac{-3\pi}{2}\right) = \lim_{z\to -\frac{3\pi}{2}} \left(z+\frac{3\pi}{2}\right)\frac{\sin z}{\cos z} = \lim_{z\to -\frac{3\pi}{2}} \frac{\sin z + \left(z+\frac{3\pi}{2}\right)\cos z}{-\sin z} = -1$$

por tanto

$$\oint_{|z|=2\pi} \tan z = -8\pi i$$

Ejemplo 5.94 *Calcular la integral*

$$\oint_{|z+1|=4} \frac{zdz}{e^z+3}$$

En efecto

$$\operatorname{Re}\left(f, \log(-3)\right) = \lim_{z\to\log(-3)} (z-\log(-3))\frac{z}{e^z+3} = \lim_{z\to\log(-3)} (z-\log(-3))\frac{1}{e^z} + \frac{z}{e^z} =$$

$$\frac{\log(-3)}{-3} = \frac{\ln 3 + \pi i}{-3}$$

por lo tanto

$$\oint_{|z+1|=4} \frac{zdz}{e^z+3} = \frac{\ln 3 + \pi i}{-3}$$

Ejemplo 5.95 *Calcular la integral*

$$\oint_{|z+1|=4} \frac{e^z dz}{\cosh z} = \oint_{|z+1|=4} \frac{2e^{2z}dz}{e^{2z}+1}$$

En efecto :

$$\cosh z = \frac{e^z+e^{-z}}{2} = \frac{e^{2z}+1}{2e^z} \ \textit{entonces}\ \frac{e^z}{\cosh z} = \frac{2e^{2z}}{e^{2z}+1}$$

Como

$$e^{2z}+1=0 \ \textit{ssi}\ e^{2z}=-1 \ \textit{ssi}\ 2z = \log(-1)+2n\pi i$$

entonces

$$z = \frac{\log(-1) + 2n\pi i}{2} = \frac{i(\pi + 2k\pi) + 2n\pi i}{2} =$$

por tanto las singularidades son $\pm\dfrac{\pi i}{2}, \pm\dfrac{3\pi i}{2}$ *por tanto*

$$\oint\limits_{|z+1|=4} \frac{e^z dz}{\cosh z} = \oint\limits_{|z+1|=4} \frac{2e^{2z} dz}{e^{2z}+1} = 2\pi i \left(\operatorname{Re}\left(f, \frac{\pm\pi i}{2}\right) + \operatorname{Re}\left(f, \frac{\pm 3\pi i}{2}\right)\right) = 8\pi i$$

pues

$$\operatorname{Re}\left(f, \frac{\pi i}{2}\right) = \lim_{z\to\frac{\pi i}{2}} \left(z - \frac{\pi i}{2}\right) \frac{2e^{2z}}{e^{2z}+1} = \lim_{z\to\frac{\pi i}{2}} \frac{(z-\frac{\pi i}{2})4e^{2z} + 2e^{2z}}{2e^{2z}} = 1$$

$$\operatorname{Re}\left(f, \frac{-\pi i}{2}\right) = \lim_{z\to-\frac{\pi i}{2}} \left(z + \frac{\pi i}{2}\right) \frac{2e^{2z}}{e^{2z}+1} = \lim_{z\to-\frac{\pi i}{2}} \frac{(z+\frac{\pi i}{2})4e^{2z} + 2e^{2z}}{2e^{2z}} = 1$$

$$\operatorname{Re}\left(f, \frac{3\pi i}{2}\right) = \lim_{z\to\frac{3\pi i}{2}} \left(z - \frac{3\pi i}{2}\right) \frac{2e^{2z}}{e^{2z}+1} = \lim_{z\to\frac{3\pi i}{2}} \frac{(z-\frac{3\pi i}{2})4e^{2z} + 2e^{2z}}{2e^{2z}} = 1$$

$$\operatorname{Re}\left(f, \frac{-3\pi i}{2}\right) = \lim_{z\to-\frac{3\pi i}{2}} \left(z + \frac{3\pi i}{2}\right) \frac{2e^{2z}}{e^{2z}+1} = \lim_{z\to-\frac{3\pi i}{2}} \frac{(z+\frac{3\pi i}{2})4e^{2z} + 2e^{2z}}{2e^{2z}} = 1$$

Ejemplo 5.96 *Calcular la integral*

$$\oint\limits_{|z|=1} \frac{dz}{\sinh z} = 2\pi i$$

ya que

$$\operatorname{Re}(f, 0) = \lim_{z\to 0} (z-0) \frac{1}{\sinh z} = \lim_{z\to 0} \frac{1}{\cosh z} = 1$$

y

$$\frac{1}{\sinh z} = \frac{1}{z} + ...$$

que ratifica que el residuo en $z = 0$ *es 1*

5.8.1 Teorema del Argumento

Sea f(z) análitica dentro y sobre una curva simple cerrada C, excepto para un polo $z = \alpha$ de multiplicidad p dentro de C y que f(z) tiene un cero $z = \beta$ de multiplicidad n dentro de C entonces

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f\,'(z)}{f(z)}dz = n - p$$

En efecto

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f\,'(z)}{f(z)}dz = \frac{1}{2\pi i}\oint_{C_1} \frac{f\,'(z)}{f(z)}dz + \frac{1}{2\pi i}\oint_{C_2} \frac{f\,'(z)}{f(z)}dz$$

con C_1 una curva simple cerrada en el interior de C que encierra a $z = \beta$ y C_2 una curva simple cerrada en el interior de C que encierra a $z = \alpha$ y disyuntas
Como f(z) tiene un polo $z = \alpha$ de multiplicidad p entonces

$$f(z) = \frac{F(z)}{(z-\alpha)^p} \quad \text{con F(z) análitica y diferente de cero dentro y sobre } C_2$$

entonces tomando logaritmo en ambos lados de la igualdad y derivando se obtiene que

$$\frac{f\,'(z)}{f(z)} = \frac{F\,'(z)}{F(z)} - \frac{p}{z-\alpha}$$

por lo tanto

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{C_2} \frac{f\,'(z)}{f(z)}dz = \frac{1}{2\pi i}\oint_{C_2} \frac{F\,'(z)}{F(z)}dz - \frac{1}{2\pi i}\oint_{C_2} \frac{p}{z-\alpha}dz = 0 - p = -p$$

y como f(z) tiene un cero de orden n en $z = \beta$ entonces

$$f(z) = (z-\beta)^n G(z) \quad \text{donde G(z) es análitica y diferente de cero dentro y sobre } C_1$$

entonces tomando logaritmo en ambos lados de la igualdad y derivando se obtiene que

$$\frac{f\,'(z)}{f(z)} = \frac{n}{z-\beta} + \frac{G\,'(z)}{G(z)}$$

por lo tanto

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{C_1} \frac{f\,'(z)}{f(z)}dz = \frac{1}{2\pi i}\oint_{C1} \frac{n}{z-\beta}dz + \frac{1}{2\pi i}\oint_{C_1} \frac{G\,'(z)}{G(z)}dz = n + 0$$

luego

$$\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{C}\frac{f\,'(z)}{f(z)}dz=\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{C_1}\frac{f\,'(z)}{f(z)}dz+\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{C_2}\frac{f\,'(z)}{f(z)}dz=n-p$$

Generalizando el teorema anterior se tiene que

Sea f(z) una función analítica dentro y sobre una curva simple cerrada C excepto para un número finito de polos dentro de C. Suponga que f(z) es diferente de cero sobre C. Si N y P son el número de ceros y el número de polos dentro de C, contando las multiplicidades entonces

$$\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{|z|=4}\frac{f\,'(z)}{f(z)}dz=N-P$$

Ejemplo 5.97

$$como \quad f(z)=\frac{\left(z^2+1\right)^2}{\left(z^2+2z+2\right)^3}$$

tiene dos ceros de multiplicidad 2 y tiene dos polos de multiplicidad 3 y estan dentro de C, entonces

$$\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{|z|=4}\frac{f\,'(z)}{f(z)}dz=N-P=4-6=-2$$

Ejemplo 5.98

$$como \;\; f(z)=z^2+1 \;\; tiene\ dos\ ceros\ de\ orden\ 1\ y\ cero\ polos\ en\ \;|z|=4$$

entonces

$$\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{|z|=4}\frac{2z}{z^2+1}dz=N-P=2-0=2$$

Ejemplo 5.99

$$como \;\; f(z)=z^4+1 \;\; tiene\ 4\ ceros\ de\ orden\ 1\ y\ cero\ polos\ en\ \;|z|=4$$

entonces

$$\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{|z|=4}\frac{4z^3}{z^4+1}dz=N-P=4-0=4$$

Ejemplo 5.100 *Como*

$$f(z) = \frac{\sin \pi z}{\cos \pi z}$$

tiene 7 ceros de orden 1 en $z = 0, z = \pm 1, z = \pm 2, z = \pm 3$ *y 6 polos en* $z = \frac{\pm 1}{2}, z = \frac{\pm 3}{2}, z = \frac{\pm 5}{2}$, *en la circunferencia* $|z| = \pi$ *entonces*

$$\frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{|z|=\pi} \frac{\sin \pi z}{\cos \pi z} dz = N - P = 7 - 6 = 1$$

por tanto

$$\oint\limits_{|z|=\pi} \tan \pi z dz = \oint\limits_{|z|=\pi} \frac{\sin \pi z}{\cos \pi z} dz = 2\pi i$$

5.9 Algunas aplicaciones

1. Si la suma infinita $\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} f(n)$ converge, entonces

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n) = -(\text{suma de residuos de } \pi\cot\pi z \text{ f(z) en todos los polos no enteros de f(z)})$$

Ejemplo 5.101 *Probar que la suma*

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{n^2+1} = \pi \coth \pi$$

En efecto, sea $f(z) = \dfrac{1}{z^2+1}$ *que tiene polos de orden* 1 *en* $z = \pm i$ *luego*

$$Re(f, i) = \lim_{z \to i} (z - i) cot\pi z \frac{1}{z^2+1} = \lim_{z \to i} \cot \pi z \frac{1}{z+i} = \frac{\cot \pi i}{2i}$$

$$Re(f, -i) = \lim_{z \to -i} (z + i) cot\pi z \frac{1}{z^2+1} = \lim_{z \to -i} \cot \pi z \frac{1}{z-i} = \frac{\cot(-\pi i)}{-2i}$$

luego

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{n^2+1} = -\pi\left(\frac{\cot \pi i}{2i} - \frac{\cot(-\pi i)}{2i}\right) = \frac{-\pi 2 \cos \pi i}{2i \sin \pi i} = \pi \coth \pi$$

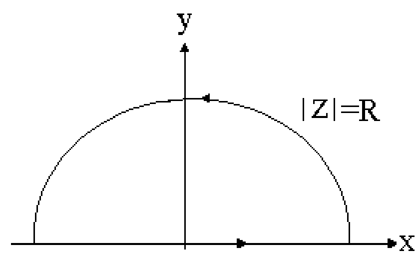
2. Integrales convergentes de la forma

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$$

Para calcular integrales del tipo $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$ convergentes, lo haremos de la forma siguiente :

$$\text{Pr imero} \quad \text{calculamos} \quad \text{la integral} \quad \oint_C f(z)dz$$

donde C es la union del semi-círculo γ de radio R grande y el segmento de recta desde $-R$ hasta R, (figura5.1) por aplicación del teorema de los residuos. Luego calculamos las integrales sobre el segmento de recta y del semi-círculo γ de radio R grande por definición, se igualan y se demuestra que la integral sobre el semi-círculo γ vale cero



Ejemplo 5.102 *Calcular*

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2}dx$$

En efecto, la integral

$$\oint_C \frac{1}{1+z^2}dz = 2\pi i\,\mathrm{Re}(f,i) = 2\pi i \lim_{z\to i} \frac{(z-i)}{1+z^2} = 2\pi i(\frac{1}{2i}) = \pi$$

Ahora

$$\oint_C \frac{1}{1+z^2}dz = \int_{C_1} \frac{1}{1+z^2}dz + \int_{C_2} \frac{1}{1+z^2}dz = \int_{-R}^{R} \frac{1}{1+x^2}dx + \oint_{C_2} \frac{1}{1+z^2}dz$$

Para C_1 $z(x) = x \quad -R \leq x \leq R \quad dz = dx$. *Como*

$$\left|\oint_{C_2} \frac{1}{1+z^2}dz\right| \leq \oint_{C_2} \left|\frac{1}{1+z^2}dz\right| = \int_0^\pi \left|\frac{Rie^{it}}{R^2e^{2it}+1}\right| dt \leq \int_0^\pi \frac{|Rie^{it}|\, dt}{|R^2e^{2it}+1|} \leq \int_0^\pi \frac{Rdt}{R^2-1} = \frac{\pi R}{R^2-1}$$

entonces

$$\oint_C \frac{1}{1+z^2}dz = \int_{-R}^{R} \frac{1}{1+x^2}dx + \frac{\pi R}{R^2-1}$$

y así

$$\pi = \oint_C \frac{1}{1+z^2}dz = \lim_{R\to\infty}\left(\int_{-R}^{R} \frac{1}{1+x^2}dx + \frac{\pi R}{R^2-1}\right) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2}dx + 0$$

luego

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2}dx = \pi$$

Como conclusión

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} Re(f(z), z_k) \text{ con z}_k \text{ todos los polos de } f(z) \text{ en el semiplano superior}$$

Ejemplo 5.103 *Calcular*

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^6}dx$$

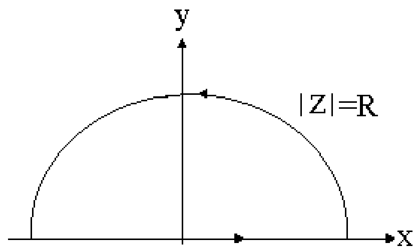
En efecto, consideremos la integral

$$\oint_C \frac{1}{1+z^6}dz$$

donde donde C es la union del semi-círculo γ de radio R grande y el segmento de recta desde $-R$ hasta R, recorrido en sentido antihorario

Puesto que $1+z^6 = 0$ cuando

$$z = (-1)^{\frac{1}{6}} = \cos(\frac{\pi+2k\pi}{6}) + i\sin\left(\frac{\pi+2k\pi}{6}\right) \quad k = 0, 1, 2, 3, 4, 5$$



entonces los polos son

$$e^{\frac{\pi i}{6}}, e^{\frac{3\pi i}{6}}, e^{\frac{5\pi i}{6}}, e^{\frac{7\pi i}{6}}, e^{\frac{9\pi i}{6}}\ e^{\frac{11\pi i}{6}}$$

pero solamente los polos

$$e^{\frac{\pi i}{6}}, e^{\frac{3\pi i}{6}}, e^{\frac{5\pi i}{6}}$$

están dentro de C entonces utilizando la regla de l'hophital se tiene que

$$\operatorname{Re}(f, e^{\frac{\pi i}{6}}) = \lim_{z \to e^{\frac{\pi i}{6}}} (z - e^{\frac{\pi i}{6}}) \frac{1}{z^6 + 1} = \lim_{z \to e^{\frac{\pi i}{6}}} \frac{1}{6z^5} = \frac{e^{-\frac{5\pi i}{6}}}{6}$$

$$\operatorname{Re}(f, e^{\frac{3\pi i}{6}}) = \lim_{z \to e^{\frac{3\pi i}{6}}} (z - e^{\frac{3\pi i}{6}}) \frac{1}{z^6 + 1} = \lim_{z \to e^{\frac{3\pi i}{6}}} \frac{1}{6z^5} = \frac{e^{-\frac{5\pi i}{2}}}{6}$$

$$\operatorname{Re}(f, e^{\frac{5\pi i}{6}}) = \lim_{z \to e^{\frac{5\pi i}{6}}} (z - e^{\frac{5\pi i}{6}}) \frac{1}{z^6 + 1} = \lim_{z \to e^{\frac{5\pi i}{6}}} \frac{1}{6z^5} = \frac{e^{-\frac{25\pi i}{6}}}{6}$$

por tanto

$$\begin{aligned} \oint_C \frac{1}{1 + z^6} dz &= 2\pi i \left(\frac{e^{-\frac{5\pi i}{6}}}{6} + \frac{e^{-\frac{5\pi i}{2}}}{6} + \frac{e^{-\frac{25\pi i}{6}}}{6} \right) = \frac{2\pi i(-2i \sin 30 - i)}{6} \\ &= \frac{-i(2\sin(30) + 1)2\pi i}{6} = \frac{-2i2\pi i}{6} = \frac{2\pi}{3} \end{aligned}$$

entonces

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1 + x^6} dx = \frac{2\pi}{3}$$

Ejemplo 5.104

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos t}{1 + t^2} dt$$

Primero aplicamos el teorema de los residuos y calculamos la integral

$$\oint\limits_C \frac{e^{iz}}{1+z^2}dz$$

donde C es el semicírculo de radio R (grande) unido con el segmento de recta desde -R hasta R, es decir,

$$\oint\limits_C \frac{e^{iz}}{1+z^2}dz = 2\pi i Re(f,i) = 2\pi i \lim_{z\to i} \frac{(z-i)\,e^{iz}}{(z-i)\,(z+i)} = \pi e^{-1}$$

Ahora

$$\oint\limits_C \frac{e^{iz}}{1+z^2}dz = \int\limits_{C_1} \frac{e^{iz}}{1+z^2}dz + \int\limits_{C_2} \frac{e^{iz}}{1+z^2}dz$$

$z_1(t) = t \quad -R \leq t \leq R \quad dz_1 = dt \quad z_2(t) = Re^{it} \quad -\pi \leq t \leq \pi \quad dz_2 = Rie^{it}dt$
entonces

$$\int\limits_{C_1} \frac{e^{iz}}{1+z^2}dz = \int\limits_{-R}^{R} \frac{e^{it}}{1+t^2}dt = \int\limits_{-R}^{R} \frac{\cos t + i\sin t}{1+t^2}dt$$

$$y \quad \left|\int\limits_{C_2} \frac{e^{iz}}{1+z^2}dz\right| = \left|\int\limits_{0}^{\pi} \frac{e^{iRe^{it}}iRe^{it}}{1+R^2e^{2it}}dt\right| \leq R\int\limits_{0}^{\pi} \frac{\left|e^{iRe^{it}}\right|dt}{|R^2e^{2it}|-1} = \frac{R}{R^2-1}\int\limits_{0}^{\pi} e^{-R\sin t}dt$$

$$= \frac{2R}{R^2-1}\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} e^{-\frac{2R}{\pi}t}dt = \frac{2R}{R^2-1}.\frac{\pi}{2R}\left(1-e^{-R}\right) \to 0 \ si \ R \to \infty$$

obseve que para

$$\left[0,\frac{\pi}{2}\right], \quad sint \geq \frac{2}{\pi}t, \quad -sint \leq -\frac{2}{\pi}t, \quad e^{-R\sin t} \leq e^{-\frac{2R}{\pi}t}$$

asi que

$$\int\limits_{-R}^{R} \frac{\cos t + i\sin t}{1+t^2}dt + \int\limits_{C_2} \frac{e^{iz}}{1+z^2}dz = \pi e^{-1}$$

entonces tomando límite cuando R→ ∞, se tiene

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos t + i\sin t}{1+t^2}dt + 0 = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos t}{1+t^2}dt + i\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin t}{1+t^2}dt = \pi e^{-1}$$

por lo tanto

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos t}{1+t^2}dt = 2\int_{0}^{\infty} \frac{\cos t}{1+t^2}dt = \pi e^{-1} \quad y \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin t}{1+t^2}dt = 0$$

luego

$$\int_{0}^{\infty} \frac{\cos t}{1+t^2}dt = \frac{\pi e^{-1}}{2}$$

3. Integrales de la forma

$$\int_{0}^{2\pi} R(\sin t, \cos t)dt = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} Re(f(z), z_k)$$

donde R es una función racional de senos y cosenos entonces se hace

$$z = e^{it} \quad 0 \leq t \leq 2\pi \quad dz = ie^{it}dt = izdt \;\; y \quad dt = \frac{dz}{iz}$$

$$cost = \frac{e^{it}+e^{-it}}{2} = \frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right) = \frac{z^2+1}{2z} \;\; , \;\; sint = \frac{e^{it}-e^{-it}}{2i} = \frac{1}{2i}\left(z-\frac{1}{z}\right) = \frac{z^2-1}{2iz}$$

y así

$$f(z) = R(\sin t, \cos t) = \frac{1}{iz}R(\frac{z^2+1}{2z}, \frac{z^2-1}{2iz})$$

$y \quad z_1, z_2\, z_3 ... z_n$ son los polos en el interior de $|z| \leq 1$ y se calcula la integral

$$\oint_{|z|=1} \frac{1}{iz}R(\frac{z^2+1}{2z}, \frac{z^2-1}{2iz})dz = \int_{0}^{2\pi} R(\sin t, \cos t)dt = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} Re(f(z), z_k)$$

Ejemplo 5.105 *Calcular la integral* $\int_{0}^{2\pi} \frac{dt}{\sqrt{5}+\cos t}$

Sea

$$z = e^{it} \quad 0 \leq t \leq 2\pi \quad dz = ie^{it}dt = izdt \;\; y \quad dt = \frac{dz}{iz}$$

$$cost = \frac{e^{it}+e^{-it}}{2} = \frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right) = \frac{z^2+1}{2z} \;\; , \;\; sint = \frac{e^{it}-e^{-it}}{2i} = \frac{1}{2i}\left(z-\frac{1}{z}\right) = \frac{z^2-1}{2iz}$$

entonces

$$\int_0^{2\pi} \frac{dt}{\sqrt{5}+\cos t} = \oint_{|z|=1} \frac{1}{(\sqrt{5}+\frac{z^2+1}{2z})}\frac{dz}{iz} = \frac{2}{i}\oint_{|z|=1} \frac{dz}{z^2+2\sqrt{5}z+1}$$

Tiene dos singularidades en $-\sqrt{5}-2$, $-\sqrt{5}+2$, pero solamente $-\sqrt{5}+2$ está en el interior de $|z| \leq 1$ y así

$$\int_0^{2\pi} \frac{dt}{\sqrt{5}+\cos t} = 2\pi i\frac{2}{i}\lim_{z\to -\sqrt{5}+2}(z-(-\sqrt{5}+2))\frac{1}{z^2+2\sqrt{5}z+1} =$$

$$= 4\pi \lim_{z\to -\sqrt{5}+2} \frac{1}{2z+2\sqrt{5}} = \frac{4\pi}{4} = \pi$$

aplicando la regla de l'hopital

Ejemplo 5.106 *Calcular la integral* $\int\limits_0^{2\pi} \frac{dt}{5+3\sin t}$

Sea

$$z = e^{it} \quad 0 \leq t \leq 2\pi \quad dz = ie^{it}dt = izdt \quad y \quad dt = \frac{dz}{iz}$$

$$cost = \frac{e^{it}+e^{-it}}{2} = \frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right) = \frac{z^2+1}{2z} \ , \ \ sint = \frac{e^{it}-e^{-it}}{2i} = \frac{1}{2i}\left(z-\frac{1}{z}\right) = \frac{z^2-1}{2iz}$$

entonces

$$\int_0^{2\pi} \frac{dt}{5+3\sin t} = \oint_{|z|=1} \frac{1}{\left(5+3\left(\frac{z^2-1}{2iz}\right)\right)}\frac{dz}{iz} = 2\oint_{|z|=1} \frac{dz}{10iz+3z^2-3} = 2\oint_{|z|=1} \frac{dz}{3z^2+10iz-3}$$

$$= \oint_{|z|=1} \frac{6dz}{(3z)^2+10i3z-9} = \oint_{|z|=1} \frac{6dz}{(3z+i)\,(3z+9i)} = 2\pi i \operatorname{Re}(f,-\frac{i}{3})$$

Ahora

$$\operatorname{Re}(f,-\frac{i}{3}) = \lim_{z\to --\frac{i}{3}} (z+\frac{i}{3})\frac{6}{(3z+i)\,(3z+9i)} = \lim_{z\to --\frac{i}{3}} \frac{2}{3z+9i} = \frac{2}{-i+9i} = \frac{2}{8i}$$

entonces

$$\oint_{|z|=1} \frac{6dz}{(3z+i)(3z+9i)} = 2\pi i \operatorname{Re}(f, -\frac{i}{3}) = \frac{\pi}{2}$$

Ejemplo 5.107 *Calcular la integral*

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos 3t dt}{5 - 4\cos t}$$

Sea

$$z = e^{it} \quad 0 \leq t \leq 2\pi \quad dz = ie^{it}dt = izdt \;\; y \quad dt = \frac{dz}{iz}$$

$$cost = \frac{e^{it}+e^{-it}}{2} = \frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right) = \frac{z^2+1}{2z} \;, \quad \cos 3t = \frac{e^{3it}+e^{-3it}}{2} = \frac{1}{2}\left(z^3+\frac{1}{z^3}\right) = \frac{z^6+1}{2z^3}$$

entonces

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos 3t dt}{5-4\cos t} = \oint_{|z|=1} \frac{\left(\frac{z^6+1}{2z^3}\right)}{5-4\left(\frac{z^2+1}{2z}\right)} \frac{dz}{iz} = -\frac{1}{2i} \oint_{|z|=1} \frac{(z^6+1)dz}{z^3(2z-1)(z-2)}$$

los polos que estàn dentro de $|z|=1$, son $z=0 \;\; y \;\; z=1/2$, por tanto

$$\operatorname{Re}(f,0) = \lim_{z\to 0} \frac{1}{2!}\frac{d^2}{dz^2}\left[z^3 . \frac{(z^6+1)}{z^3(2z-1)(z-2)}\right] = \lim_{z\to 0} \frac{1}{2!}\frac{d^2}{dz^2}\left[\frac{(z^6+1)}{(2z-1)(z-2)}\right] = \frac{21}{8}$$

$$\operatorname{Re}(f,1/2) = \lim_{z\to 1/2} \left[(z-1/2) . \frac{(z^6+1)}{z^3 2(z-1/2)(z-2)}\right] = \lim_{z\to 1/2} \left[\frac{(z^6+1)}{2z^3(z-2)}\right] = -\frac{65}{24}$$

por tanto

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos 3t dt}{5-4\cos t} = -\frac{1}{2i}(2\pi i)\left(\frac{21}{8}-\frac{65}{24}\right) = \frac{\pi}{12}$$

4. Transformada de Laplace

Si

$$\pounds(f(t)) = F(s) \;\; \text{entonces} \quad f(t) = \sum_{k=1}^{n} Re(e^{zt}F(z), z_k) \;\; \text{con } z_k \text{ los polos de } F(z)$$

Ejemplo 5.108 *Sabemos que la* $\pounds(f(t)) = \dfrac{1}{s^2+1}$ *entonces*

$$\begin{aligned} f(t) &= Re(e^{zt}F(z), i) + Re(e^{zt}F(z), -i) = \\ &= \lim_{z\to i}(z-i)\frac{e^{zt}}{(z+i)(z-i)} + \lim_{z\to -i}(z+i)\frac{e^{zt}}{(z+i)(z-i)} \\ &= \frac{e^{it}}{2i} - \frac{e^{-it}}{2i} = \frac{e^{it}-e^{-it}}{2i} = \sin t \end{aligned}$$

Ejemplo 5.109 *Sabemos que la* $\pounds(f(t)) = \dfrac{1}{s-1}$ *entonces*

$$f(t) = Re(e^{zt}F(z), 1) = \lim_{z\to 1}(z-1)\frac{e^{zt}}{(z-1)} = e^t$$

Ejemplo 5.110 *Sabemos que la*

$$\pounds(f(t)) = \frac{1}{(s-1)^2+1} = \frac{1}{(s-1+i)\,(s-1-i)}$$

entonces

$$\begin{aligned} f(t) &= Re(e^{zt}F(z), 1-i) + Re(e^{zt}F(z), 1+i) = \\ &= \lim_{z\to 1-i}(z-1+i)\,\frac{e^{zt}}{(z-1+i)\,(z-1-i)} + \lim_{z\to 1+i}(z-1-i)\frac{e^{zt}}{(z-1+i)\,(z-1-i)} = \\ &= \lim_{z\to 1-i}\frac{e^{zt}}{(z-1-i)} + \lim_{z\to 1+i}\frac{e^{zt}}{(z-1+i)} = \frac{e^{(1-i)t}}{-2i} + \frac{e^{(1+i)t}}{2i} \\ &\quad \frac{e^{(1+i)t}}{2i} - \frac{e^{(1-i)t}}{2i} = \frac{e^t\left(e^{it}-e^{-it}\right)}{2i} = e^t \sin t \end{aligned}$$

Ejemplo 5.111 *Sabemos que la*

$$\pounds(f(t)) = \frac{1}{s^2-1}$$

entonces

$$\begin{aligned} f(t) &= Re(e^{zt}F(z), 1) + Re(e^{zt}F(z), -1) = \\ &= \lim_{z\to 1}(z-1)\,\frac{e^{zt}}{(z+1)\,(z-1)} + \lim_{z\to -1}(z+1)\frac{e^{zt}}{(z-1)\,(z+1)} = \\ &= \lim_{z\to 1}\frac{e^{zt}}{(z+1)} + \lim_{z\to -1}\frac{e^{zt}}{(z-1)} = \frac{e^t}{2} - \frac{e^{-t}}{2} = \frac{e^t-e^{-t}}{2} = \sinh t \end{aligned}$$

Ejemplo 5.112 *Sabemos que la*

$$\pounds(f(t)) = \frac{2}{s(s^2+4)}$$

entonces

$$\begin{aligned}
f(t) &= Re(e^{zt}F(z),0) + Re(e^{zt}F(z),2i) + Re(e^{zt}F(z),-2i) = \\
&= \lim_{z\to 0}\frac{2ze^{zt}}{z(z^2+4)} + \lim_{z\to 2i}(z-2i)\frac{2e^{zt}}{z(z^2+4)} + \lim_{z\to -2i}(z+2i)\frac{2e^{zt}}{z(z^2+4)} = \\
&= \frac{2}{4} + \frac{2e^{2it}}{2i(4i)} + \frac{2e^{-2it}}{-2i(-4i)} = \frac{2}{4} - \frac{e^{2it}}{4} - \frac{e^{-2it}}{4} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\left(\frac{e^{2it}+e^{-2it}}{2}\right) = \\
&= \frac{1-\cos 2t}{2} = \sin^2 t
\end{aligned}$$

Ejercicio 5

1. Mostrar que

a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{3^n} = \frac{3}{3-z}$ si $|z| < 3$ b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n n z^n = \frac{-z}{(1+z)^2}$ si $|z| < 1$

c) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{(n+3)!} = \frac{1}{z^3}\left(e^z - 1 - z - \frac{z^2}{2}\right)$ d) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n^2 z^n}{n!} = ze^z + z^2 e^z$ para todo z

e) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\left(1+\frac{(-1)^n}{6^n}\right)z^n = \frac{1}{1-z} + \frac{6}{6+z}$ si $|z| < 1$

f) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\left(n + \frac{1-(-1)^n}{2^n}\right)z^n = \frac{z}{(1-z)^2} + \frac{2}{2-z} - \frac{2}{2+z}$ si $|z| < 1$

g) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(2z-3)^n = \frac{1}{1-(2z-3)}$ si $|2z-3| < 1$ h) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} nz^n = \frac{z}{(1-z)^2}$ si $|z| < 1$

i) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{5^n(z-2i)^n}{3^n} = \frac{1}{1-\frac{5}{3}(z-2i)}$ si $|z-2i| < \frac{3}{5}$

2. Hallar el intervalo de convergencia de la serie

$$a)\quad \sum_{n=0}^{\infty} 2^n (z-i)^n \quad \left(\text{Respuesta} \quad |z-i| < \frac{1}{2}\right)$$

$$\text{b)}\quad \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{i-1}{2+i}\right)^n (z-3)^n \quad \left(\text{Respuesta} \quad |z-3| < \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}}\right)$$

$$\text{c)}\quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n}{2^{n+1}} (z+4-2i)^n \qquad (\text{ Respuesta} \quad |z+4-2i| < 2)$$

$$\text{d)}\quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n^3} \quad (\text{Respuesta } |z| < 1) \qquad e)\quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{2^n} (z+3i)^n \quad (\text{Respuesta} \quad |z+3i| < 2)$$

$$\text{f)}\quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-5i)^n}{3^n} \qquad (\text{Respuesta} \quad |z-5i| < 3)$$

$$\text{g)}\quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^n}{(n+1)^n} (z-1+2i)^n \quad (\text{Respuesta} \quad |z-1+2i| < 1\ ) \qquad \text{h)}\quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{(5n)!} \quad \text{todo el plano}$$

$$i)\quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-5i)^n}{(3n)!} \ (\text{Respuesta todo el plano }) \quad \text{j)}\quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1-i)^n (z-3i)^n}{n+2} \quad \left(\text{Respuesta } |z-3i| < \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

$$\text{k)}\quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n}{(1-i)^n} (z-3i)^n \quad \left(\text{Respuesta } |z-3i| < \sqrt{2}\right) \quad \text{l)}\quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^n}{(1+n)^n} (z-i)^n \quad (\text{Respuesta } |z-i| < 1$$

3. Mostrar que

$$\text{a)}\quad \frac{2z}{1+z^2} = \frac{(z+i)+(z-i)}{(z-i)\,(z+i)} = \frac{1}{z-i} + \frac{1}{z+i} = \frac{1}{z-i} + \frac{1}{2i} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (z-i)^n}{(2i)^n}$$

$$\text{si} \quad 0 < |z-i| < 2$$

$$\text{b)}\quad \frac{z^2}{1-z} = \frac{(z-1+1)^2}{1-z} = \frac{-1}{z-1} - 2 - (z-1) \qquad si \quad 0 < |z-1| < \infty$$

$$\text{c)}\quad \frac{z+i}{z-i} = \frac{z-i+2i}{z-i} = 1 + \frac{2i}{z-i} \qquad \text{si } 0 < |z-i| < \infty$$

$$\text{d)}\quad \frac{1}{z+4} = \frac{1}{z+4-2-i+2+i} = \frac{1}{z-2-i+6+i} = \frac{1}{6+i} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(6+i)^n} (z-2-i\ )^n$$

$$\text{si } \ |z-2-i| < \sqrt{37}$$

4. Mostrar que

$$a)\ \oint\limits_{|z|=4} z e^{\frac{1}{z+i}} dz = 2\pi i(\frac{1}{2}-i) \qquad \text{b)}\ \oint\limits_{|z|=4} (z-i) e^{\frac{1}{z}} dz = 2\pi i(\frac{1}{2}-i)$$

$$\text{c)}\ \oint\limits_{|z|=3} \frac{\cos z}{z(z-1)^2} dz = 2\pi i(1-\sin 1-\cos 1)$$

$$\text{d)}\ \oint\limits_{|z+1|=\frac{3}{2}} \frac{z^3-1}{(z+1)(z^2-4)(z+i)} dz = \frac{-7+46i}{30}\pi \quad \text{e)}\ \oint\limits_{|z-2i|=4} (z-i) e^{\frac{1}{z-2i}} dz = 2\pi i(\frac{1}{2}+i)$$

$$\text{f)}\ \oint\limits_{|z|=4} \frac{\cos\frac{1}{z}}{z^2} dz = 0 \qquad g)\ \oint\limits_{|z-2i|=4} z\cos\frac{1}{z-2i} dz = -\pi i \qquad \text{h)}\ \oint\limits_{|z|=3} \frac{1-\cos\frac{1}{z}}{z} dz = 0$$

$$\text{i)}\ \oint\limits_{|z|=\frac{1}{2}} \frac{e^z}{z(z-i)(z+i)} dz = 2\pi i \qquad \text{j)}\ \oint\limits_{|z|=2} \frac{e^z-1}{z^2(z-i)(z+i)} dz = 2\pi i\,(1-\sin 1)$$

$$k)\ \oint\limits_{|z|=2} \frac{1-2z}{z(z-1)(z-3)} dz = \frac{5\pi i}{3} \qquad l)\ \oint\limits_{|z|=2\pi} \tan z dz = -8\pi i \quad \text{m)}\ \oint\limits_{|z|=\pi} \frac{1}{\cos z} dz = 0$$

5. Mostrar que

$$a)\quad f(z) = \frac{1}{(z+1)(z+2)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-2)^n}{(z-1)^{n+1}} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-3)^n}{(z-1)^{n+1}} \quad \text{si} \quad |z-1|>3$$

$$b)\quad f(z) = \frac{1}{(z+1)(z+2)} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (z+1)^{n-1} = \frac{1}{z+1} - \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (z+1)^n$$

$$\text{si} \quad 0<|z+1|<1$$

$$c)\quad f(z) = \frac{1}{(z+2)(z-3)} = -\frac{1}{5}\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{3^{n+1}} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-2)^n}{z^{n+1}}\right) \quad \text{si} \quad 2<|z|<3$$

$$d) \qquad f(z) = \frac{2z-3}{(z-1)^2(z+i)} =$$

$$= \left(1 - \frac{3i}{2}\right) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{z^{n+1}} + \left(\frac{i-1}{2}\right) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{z^{n+1}} + \left(-1 + \frac{3i}{2}\right) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-i)^n}{z^{n+1}} \qquad \text{si} \quad 1 < |z|$$

6. Mostrar que

$$\text{a)} \int_0^{\pi} \frac{dt}{2-\cos t} = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \frac{dt}{2-\cos t} = \frac{\pi}{\sqrt{3}} \qquad \text{b)} \int_0^{2\pi} \frac{\cos 3t dt}{5-4\cos t} = \frac{\pi}{12}$$

$$\text{c)} \int_0^{2\pi} \frac{dt}{(5-3\sin t)^2} = \frac{5\pi}{32} \qquad \text{d)} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^4} = \frac{\sqrt{2}\pi}{2}$$

$$\text{e)} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2 dx}{(1+x^2)^2(x^2+2x+2)} = \frac{7\pi}{50} \qquad \text{f)} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^2(x^2+4)} = \frac{\pi}{9}$$

$$\text{g)} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos 2x dx}{(1+x^2)} = \frac{\pi}{e^2} \qquad \text{h)} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \sin \sqrt{3} x dx}{(16+x^2)} = \pi e^{-4\sqrt{3}}$$

indicación para el ejercicio h. $f(z) = \dfrac{z e^{i\sqrt{3}z}}{z^2+16}$ y $\sin t \geq \dfrac{2}{\pi} t \qquad 0 \leq t \leq \dfrac{\pi}{2}$

Bibliografía

[1] ANSI/ASME Measurement Uncertainty, Part I. ANSI/ASME PTC 19.1–1985. 1986

[2] .

[3] Popov, E., P., Mechanics of Materials, Prentice Hall, Englewood Cliffs, N. J., 1976.

[4] Soderstrand, M., A., Mitra,S., K., "Sensitivity Analysis of Third–Order Filters", International Journal of Electronics, v. 30, No. 3, pp 265–272. 1971.

[5] Streeter, V., L., Wylie, E., B., Fluid Mechanics, McGraw–Hill, N. Y., 1985.

[6] Vrbancis, W., P., "The operational amplifier summer–a practical design procedure". Wescon Conference Record, Session 2, 1982, pp.1–4.

[7] Johnson, R., Elementary Statistics, PWS–Kent, Boston, USA. 1988.