UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA

# Continuación Única de Soluciones de la Ecuación de Korteweg-de Vries (KdV)

**Nelson Jades Gutiérrez Jiménez**

**Universidad Nacional de Colombia**
**Sede Medellín**
**Facultad de Ciencias**
**Escuela de Matemáticas**
**Mayo 2011**

# Continuación Única de Soluciones de la Ecuación de Korteweg-de Vries (KdV)

Por

Nelson Jades Gutiérrez Jiménez

Trabajo presentado como requisito parcial
para optar al título de

Magister en Ciencias Matemáticas

Director: Jorge Enrique Mejía Laverde

Universidad Nacional de Colombia
Sede Medellín

Facultad de Ciencias

Escuela de Matemáticas

Mayo 2011

# Agradecimientos

Debo un especial agradecimiento al profesor Jorge Mejía Laverde, director de esta tesis de maestría, quien con su amabilidad, generosidad y disciplina ha dejado buenas enseñanzas a mi formación académica.

Agradezco también a los profesores Eddye Bustamante y Pedro Isaza, por sus apreciables sugerencias y correcciones que ayudaron a mejorar la versión final del trabajo.

Agradezco a todos mis profesores, compañeros y amigos que de una u otra forma hicieron un ambiente agradable durante todo el proceso de estudio, en especial a Diana Arango por brindarme su apoyo y su amistad.

Todo esto sin el acompañamiento de mis padres, Ramiro y Sonia, no sería igual, a ellos un eterno agradecimiento.

# Resumen

En el presente trabajo demostramos un principio de continuación única de soluciones para la ecuación de Korteweg-de Vries (KdV)

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + u\frac{\partial u}{\partial x} = 0; \quad u = u(x,t),\ x \in \mathbb{R},\ t \geq 0,$$

que afirma lo siguiente:
Si $u_1, u_2 \in C\Big([0,1]; H^6(\mathbb{R}) \cap L^2((1+x^2)^{2\alpha}dx)\Big) \cap C^1\Big([0,1]; H^3(\mathbb{R})\Big)$, para algún $\alpha > 1$, son soluciones de la ecuación KdV tales que existe $b \in \mathbb{R}$ para el cual

$$u_1(t)(x) = u_2(t)(x), \quad \text{si } (x,t) \in (b,\infty) \times \{0,1\},$$

entonces $u_1(t)(x) = u_2(t)(x)$ para $(x,t) \in \mathbb{R} \times [0,1]$.

# Abstract

In this work we prove a unique continuation principle of solutions to the Korteweg-de Vries (KdV) equation

$$\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}+u\frac{\partial u}{\partial x}=0; \quad u=u(x,t),\ x\in\mathbb{R},\ t\geq 0,$$

that reads as follows:
If $u_1, u_2 \in C\Big([0,1]; H^6(\mathbb{R})\cap L^2((1+x^2)^{2\alpha}dx)\Big)\cap C^1\Big([0,1]; H^3(\mathbb{R})\Big)$, for some $\alpha>1$, are solutions to the KdV equation such that there exists $b\in\mathbb{R}$ for which

$$u_1(t)(x)=u_2(t)(x), \quad \text{for } (x,t)\in(b,\infty)\times\{0,1\},$$

then $u_1(t)(x)=u_2(t)(x)$ for all $(x,t)\in\mathbb{R}\times[0,1]$.

# Contenido

# Notaciones

1. Espacios $L^p(\mathbb{R}^n)$, $1 \leq p \leq \infty$, $n \in \mathbb{N}$:

   Para $1 \leq p < \infty$:

   $$L^p(\mathbb{R}^n) := \left\{ f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \,\middle|\, f \text{ es medible y } \|f\|_{L^p_x} := \left( \int_{\mathbb{R}^n} |f|^p \, dx \right)^{1/p} < \infty \right\};$$

   Para $p = \infty$:

   $$L^p(\mathbb{R}^n) := \left\{ f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \,\middle|\, f \text{ es medible y } \|f\|_{L^\infty_x} := \operatorname*{ess\,sup}_{x \in \mathbb{R}^n} |f(x)| < \infty \right\}.$$

2. Espacios $L^2$ con peso:

   $$L^2(e^{2\lambda x} dx) := \left\{ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \,\middle|\, f \text{ es medible y } e^{\lambda x} f \in L^2(\mathbb{R}) \right\},$$

   $$L^2((1+x^2)^{2\alpha} dx) := \left\{ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \,\middle|\, f \text{ es medible y } (1+x^2)^{\alpha} f \in L^2(\mathbb{R}) \right\}.$$

3. $C(\mathbb{R}^n)$: espacio de funciones continuas de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}$.

4. $C_b(\mathbb{R}^n)$: espacio de funciones continuas y acotadas de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}$.

5. $C_0(\mathbb{R}^n)$: espacio de funciones continuas de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}$ con soporte compacto.

6. $\operatorname{supp} f$: soporte de la función $f$.

7. $C^\infty(\mathbb{R}^n)$: espacio de funciones de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}$ infinitamente diferenciables.

8. $C_0^\infty(\mathbb{R}^n) := C^\infty(\mathbb{R}^n) \cap C_0(\mathbb{R}^n)$.

9. $$C^{3,1}(\mathbb{R}^2) := \left\{ f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x,t) & \mapsto & f(x,t) \end{array} \,\middle|\, \partial_x^j f \in C(\mathbb{R}^2) \text{ para } j \in \{0,1,2,3\},\ \partial_t f \in C(\mathbb{R}^2) \right\}.$$

10. $C_0^{3,1}(\mathbb{R}^2) := C^{3,1}(\mathbb{R}^2) \cap C_0(\mathbb{R}^2)$.

11. $$C^{3,1}(\mathbb{R}\times[0,1]) := \left\{ f : \mathbb{R} \times [0,1] \to \mathbb{R} \,\middle|\, \text{existe } g \in C^{3,1}(\mathbb{R}^2) \text{ tal que } f = g\big|_{\mathbb{R}\times[0,1]} \right\}.$$

12. $S'(\mathbb{R}^n)$: espacio de distribuciones temperadas en $\mathbb{R}^n$.

13. Decimos que $u \in S'_{\mathcal{F}}(\mathbb{R}^n)$ si $u \in S'(\mathbb{R}^n)$ y su transformada de Fourier $\widehat{u}$ es representable por una función.

14. Para $s \in \mathbb{R}$, $H^s(\mathbb{R})$ es el espacio de Sobolev de orden $s$ y tipo $L^2$ definido por
$$H^s(\mathbb{R}) := \left\{ u \in S'_{\mathcal{F}}(\mathbb{R}) \;\middle|\; \|u\|_{H^s(\mathbb{R})} := \left( \int_{\mathbb{R}} (1+\xi^2)^s \left| \widehat{u}(\xi) \right|^2 \, d\xi \right)^{1/2} < \infty \right\}.$$

15. $C\left([0,1]; H^s(\mathbb{R})\right)$: espacio de funciones continuas del intervalo $[0,1]$ con valores en $H^s(\mathbb{R})$.

16. Para $u \in C\left([0,1]; H^s(\mathbb{R})\right)$:
$$\|u\|_{C([0,1];H^s(\mathbb{R}))} := \max_{t\in[0,1]} \|u(t)\|_{H^s(\mathbb{R})} .$$

17.
$$C^1\left([0,1]; H^s(\mathbb{R})\right) := \left\{ f \in C\left([0,1]; H^s(\mathbb{R})\right) \;\middle|\; f' \in C\left([0,1]; H^s(\mathbb{R})\right) \right\}.$$

18. En general si $B$ es un espacio de Banach,
$$C\left([0,1]; B\right) := \{ f : [0,1] \to B \mid f \text{ es continua} \} .$$
Para $f \in C\left([0,1]; B\right)$,
$$\|f\|_{C([0,1];B)} := \max_{t\in[0,1]} \|f(t)\|_B .$$

19.
$$L^2(\mathbb{R}\times[0,1]) := \left\{ f : \mathbb{R}\times[0,1] \to \mathbb{R} \;\middle|\; f \text{ es medible y } \|f\|_{L^2(\mathbb{R}\times[0,1])} < \infty \right\},$$
donde
$$\|f\|_{L^2(\mathbb{R}\times[0,1])} := \left( \int_{\mathbb{R}} \int_0^1 |f(x,t)|^2 \, dt\, dx \right)^{1/2}.$$

20. La notación $g(\cdot_x)$ designa la función de la variable $x$: $x \mapsto g(x)$.

    Similarmente $\widehat{h(\tau)}(\cdot_\xi)$, designa la función de la variable $\xi$: $\xi \mapsto \widehat{h(\tau)}(\xi)$, $M(\cdot_x, \cdot_\tau)$ designa la función de las variables $x$ y $\tau$: $(x,\tau) \mapsto M(x,\tau)$ y $w(\cdot_x, t)$ designa la función de la variable $x$: $x \mapsto w(x,t)$.

21. Normas $L^p_x L^q_t$:
$$\|w\|_{L^\infty_x L^2_t(\mathbb{R}^2)} := \operatorname*{ess\,sup}_{x\in\mathbb{R}} \|w(x,\cdot_t)\|_{L^2(\mathbb{R}_t)} ,$$
$$\|w\|_{L^\infty_x L^2_t(\mathbb{R}\times[0,1])} := \operatorname*{ess\,sup}_{x\in\mathbb{R}} \|w(x,\cdot_t)\|_{L^2_t([0,1])} ,$$
$$\|w\|_{L^1_x L^2_t(\mathbb{R}^2)} := \int_{\mathbb{R}} \|w(x,\cdot_t)\|_{L^2(\mathbb{R}_t)} \, dx,$$
$$\|w\|_{L^1_x L^2_t(\mathbb{R}\times[0,1])} := \int_{\mathbb{R}} \|w(x,\cdot_t)\|_{L^2_t([0,1])} \, dx,$$
donde $w(x,\cdot_t)$ denota la función de la variable $t$: $t \mapsto w(x,t)$.

22.
$$L^\infty\left((t_1,t_2); L^2(\mathbb{R})\right) = \left\{ u : (t_1,t_2) \to L^2(\mathbb{R}) \;\middle|\; u \text{ es medible y } \operatorname*{ess\,sup}_{t\in(t_1,t_2)} \|u(t)\|_{L^2_x} < \infty \right\}.$$

# Introducción

La importancia del estudio de las ecuaciones diferenciales parciales de evolución, en la matemática actual, radica en que sirven como modelos matemáticos para describir muchos fenómenos dinámicos de interés que se presentan en las ciencias físicas y naturales.

La ecuación de Korteweg-de Vries (KdV)

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + u\frac{\partial u}{\partial x} = 0; \quad u = u(x,t),\ x \in \mathbb{R},\ t \geq 0, \tag{1}$$

es una ecuación diferencial parcial de evolución, dispersiva y no lineal. Esta ecuación es un modelo que describe, en una dimensión espacial, la propagación de ondas de pequeña amplitud en un medio no lineal con dispersión. Un ejemplo de este tipo de medio es el de las ondas solitarias que se forman en la superficie del agua de canales poco profundos.

Uno de los aspectos más importantes en el estudio de las ecuaciones de evolución es el problema de continuación única de soluciones, que consiste en dar condiciones de carácter local sobre dos soluciones $u_1$ y $u_2$ de una misma ecuación que garanticen que $u_1 = u_2$.

En [5], Kenig, Ponce y Vega probaron que si $u_1$ es una solución suficientemente suave de la ecuación KdV en $\mathbb{R} \times [0,1]$ tal que para cierto $b \in \mathbb{R}$, $u_1(x,0) = u_1(x,1) = 0$ para todo $x > b$, entonces $u_1(x,t) = 0$ para todo $(x,t) \in \mathbb{R} \times [0,1]$. Obsérvese que en este caso $u_2$ es la solución idénticamente nula y la condición sobre $u_1$ y $u_2$, que garantiza que $u_1 = u_2$ en $\mathbb{R} \times [0,1]$, es:

$$u_1(x,t) = u_2(x,t) \quad \text{para } (x,t) \in (b,+\infty) \times \{0,1\}\,. \tag{2}$$

Posteriormente, en [6], Kenig, Ponce y Vega demostraron que si $u_1$ y $u_2$ son soluciones suficientemente suaves de la ecuación KdV en $\mathbb{R} \times [0,1]$ que tienen cierto decaimiento polinomial y satisfacen la condición (2) entonces $u_1 = u_2$ en $\mathbb{R} \times [0,1]$.

El presente trabajo está basado en el artículo [6] y tiene por objetivo demostrar en todos sus detalles el resultado de [6] antes mencionado, siguiendo el derrotero trazado por Kenig, Ponce y Vega de estimaciones de energía en espacios $L^2$ con peso exponencial y de estimativos de tipo Carleman.

La principal diferencia de este trabajo con el artículo [6] radica en la simplificación de la prueba del estimativo de tipo Carleman para la derivada, realizada en la sección 2.2. En efecto, hemos utilizado normas más sencillas y aplicado sólo métodos elementales de transformada de Fourier, sugeridos por trabajos previos de P. Isaza y J. Mejía (véanse los artículos [3] y [4]) y por la tesis doctoral de E. Bustamante (véase [1]), dirigida por P. Isaza y J. Mejía, que evitan el uso de herramientas más sofisticadas como desigualdades de tipo Strichartz y descomposiciones de Littlewood-Paley. Esta simplificación se traduce en una mayor claridad del método utilizado por Kenig, Ponce y Vega y constituye el aporte más importante de este trabajo.

El decaimiento exponencial obtenido para la diferencia $u_1 - u_2$, mediante estimaciones de energía, y los estimativos de tipo Carleman implican que $u_1$ y $u_2$ coinciden en una semibanda $[R, +\infty) \times [0, 1]$. Finalmente, un resultado previo de Saut y Scheurer en [8] conduce a que las soluciones $u_1$ y $u_2$ de la ecuación KdV que satisfacen (2) deben coincidir en $\mathbb{R} \times [0, 1]$.

Es importante señalar que el principio de continuación única probado en [6] no es una consecuencia directa del resultado probado en [5], debido a que la ecuación KdV no es lineal. En realidad, la diferencia $u_1 - u_2$ de dos soluciones de la ecuación KdV no satisface la ecuación KdV.

Terminamos esta introducción con la descripción de la estructura del trabajo, el cual está dividido en tres capítulos. Los dos primeros capítulos están dedicados a obtener las estimaciones necesarias en la demostración del resultado principal que se lleva a cabo en el último capítulo.

En el capítulo 1 se demuestra que si $u_1$ y $u_2$ son soluciones suficientemente suaves de la ecuación KdV tales que en el tiempo $t = 0$, la diferencia $u_1(0) - u_2(0)$ y sus derivadas espaciales hasta el orden 3 decaen exponencialmente para $x > 0$, entonces este decaimiento se mantiene en cualquier instante $t$ del intervalo (0,1].

En el capítulo 2, que consta de dos secciones, se establecen dos estimativos de tipo Carleman. En la sección 2.1, usando transformada de Fourier espacial, se prueba un estimativo de tipo Carleman para la norma de una cierta función en el espacio $L^2(\mathbb{R} \times [0, 1])$ con peso exponencial. En la sección 2.2 se demuestra un estimativo de tipo Carleman para la norma de la derivada espacial de una cierta función en el espacio $L^\infty_x L^2_t(\mathbb{R} \times [0, 1])$ con peso exponencial.

Finalmente, en el capítulo 3 demostramos el resultado principal del trabajo que nos dice que si $u_1$ y $u_2$ son soluciones suficientemente suaves de la ecuación KdV con cierto decaimiento polinomial en la variable espacial que satisfacen la condición (2), entonces $u_1 \equiv u_2$.

La letra $C$ en este trabajo denotará diversas constantes positivas que pueden variar de una línea a otra y que dependen de parámetros que están claramente establecidos en cada caso.

# Capítulo 1

# Estimaciones A priori

El objetivo principal de este capítulo (teorema 1.1) es demostrar que si $u_1$ y $u_2$ son soluciones suficientemente suaves de la ecuación KdV tales que en el tiempo $t = 0$, $u_1(0) - u_2(0)$ y sus derivadas espaciales hasta el orden 3 decaen exponencialmente para $x > 0$, entonces este decaimiento se mantiene en cualquier instante $t$ en el intervalo $(0, 1]$. La prueba de la anterior afirmación es llevada a cabo mediante estimaciones a priori realizadas sobre la ecuación satisfecha por la diferencia $u_1 - u_2$.
El teorema 1.1 está precedido por el lema 1.1 en el que se demuestra inicialmente el decaimiento exponencial para $x > 0$ de $u_1(t) - u_2(t)$, $t \in (0, 1]$, bajo la suposición de que se tiene este decaimiento para $u_1(0) - u_2(0)$.

Si $u_1$ y $u_2$ son soluciones de la ecuación KdV

$$\partial_t u + \partial_x^3 u + u\partial_x u = 0, \tag{1.1}$$

y $w := u_1 - u_2$, entonces $w$ satisface la ecuación

$$\partial_t w + \partial_x^3 w + u_1\partial_x w + (\partial_x u_2)w = 0. \tag{1.2}$$

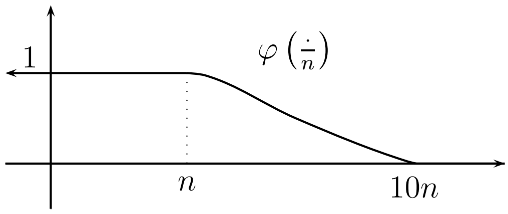
**Lema 1.1.** *Sean $u_1, u_2 \in C([0,1]; H^6(\mathbb{R})) \cap C^1([0,1]; H^3(\mathbb{R}))$ soluciones de la ecuación KdV, es decir*

$$u_i'(t) + \partial_x^3 u_i(t) + u_i(t)\partial_x u_i(t) = 0 \quad \forall\, t \in [0,1],\ i = 1, 2;$$

*y sea $w := u_1 - u_2$. Si para $\beta > 0$, $e^{\beta x}w(0) \in L^2(\mathbb{R})$, entonces existe $K_\beta > 0$ tal que*

$$\sup_{t \in\ [0,1]} \left\| e^{\beta x} w(t) \right\|_{L^2_x} \le K_\beta.$$

***Prueba***. Sea $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R})$ una función decreciente tal que $\varphi(x) = 1$ si $x < 1$ y $\varphi(x) = 0$ si $x > 10$.
Para cada $n \in \mathbb{N}$ consideremos la función $\varphi\left(\frac{\cdot}{n}\right)$,




y definamos

$$\phi_n(x) := e^{2\beta\theta_n(x)}, \text{ donde } \theta_n(x) := \int_0^x \varphi\left(\frac{t}{n}\right) dt.$$

La sucesión de funciones $\phi_n$ satisface las siguientes propiedades:

i. Para cada $n \in \mathbb{N}$, $\phi_n$ es una función creciente tal que $\phi_n(x) = e^{2\beta x}$ si $x \leq n$ y $\phi_n(x) \equiv d_n \leq e^{20\beta n}$ si $x \geq 10n$.

ii. Para $j = 1, 2, 3$ y $\beta > 0$ existe $k_{j,\beta} > 0$ tal que para $n \in \mathbb{N}$ y $x \in \mathbb{R}$ $|\phi_n^{(j)}(x)| \leq k_{j,\beta}\phi_n(x)$.

iii. Para todo $n \in \mathbb{N}$ y $x \in \mathbb{R}$ $\phi_n(x) \leq \phi_{n+1}(x)$.

iv. Para todo $x \in \mathbb{R}$ $\phi_n(x) \to e^{2\beta x}$ cuando $n \to \infty$.

Como para $t \in [0, 1]$ $w \equiv w(t) \in L^2(\mathbb{R})$ y $\phi_n$ es acotada, entonces $w\phi_n \in L^2(\mathbb{R})$; además, dado que $w \in H^6(\mathbb{R})$ y $\partial_t w \in H^3(\mathbb{R})$ y $H^s(\mathbb{R})$ es un álgebra para $s > \frac{1}{2}$, todos los términos de la ecuación (1.2) están en $L^2(\mathbb{R})$. Por lo tanto al multiplicar la ecuación (1.2) por $w\phi_n$, cada uno de los términos obtenidos es integrable en $\mathbb{R}$, y así de la ecuación (1.2) se sigue que

$$\int_{\mathbb{R}} (\partial_t w)w\phi_n \, dx + \int_{\mathbb{R}} (\partial_x^3 w)w\phi_n \, dx + \int_{\mathbb{R}} u_1(\partial_x w)w\phi_n \, dx + \int_{\mathbb{R}} (\partial_x u_2)w^2\phi_n \, dx = 0. \quad (1.3)$$

Observemos que (1.3) es una ecuación en la variable $t$. Hallemos expresiones equivalentes para los tres primeros términos de (1.3).
Como $\int_{\mathbb{R}} w^2\phi_n \, dx = \langle w, w\phi_n\rangle$, donde $\langle \cdot, \cdot \rangle$ es el producto interior en $L^2(\mathbb{R})$, y $w \in C^1([0, 1]; L^2(\mathbb{R}))$, entonces:

$$\frac{d}{dt}\int_{\mathbb{R}} w^2\phi_n \, dx = \frac{d}{dt}\langle w, w\phi_n\rangle = \langle \partial_t w, w\phi_n\rangle + \langle w, (\partial_t w)\phi_n\rangle = 2\int_{\mathbb{R}} (\partial_t w)w\phi_n \, dx.$$

Así,

$$\int_{\mathbb{R}} (\partial_t w)w\phi_n \, dx = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_{\mathbb{R}} w^2\phi_n \, dx. \quad (1.4)$$

Para el segundo término de (1.3) tenemos que $w\phi_n \in H^1(\mathbb{R})$ y $\partial_x^2 w \in H^1(\mathbb{R})$. Entonces utilizando la fórmula de integración por partes obtenemos:

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} (\partial_x^3 w) w\phi_n \, dx &= -\int_{\mathbb{R}} \partial_x^2 w(\partial_x w)\phi_n \, dx - \int_{\mathbb{R}} (\partial_x^2 w) w \phi_n^{(1)} \, dx \\ &= -\int_{\mathbb{R}} \partial_x^2 w(\partial_x w)\phi_n \, dx + \int_{\mathbb{R}} \partial_x w(\partial_x w)\phi_n^{(1)} \, dx + \int_{\mathbb{R}} (\partial_x w) w \phi_n^{(2)} \, dx. \quad (1.5)\end{aligned}$$

Por la regla de derivación de un producto de funciones de $H^1(\mathbb{R})$ se tiene que

$$(\partial_x w) w = \frac{1}{2}\partial_x \left(w^2\right), \; (\partial_x^2 w)\partial_x w = \frac{1}{2}\partial_x \left(\partial_x w\right)^2.$$

En consecuencia, una nueva aplicación de la fórmula de integración por partes en el primero y tercer término del lado derecho de la ecuación (1.5) nos permite concluir que

$$\int_{\mathbb{R}} (\partial_x^3 w) w\phi_n \, dx = \frac{3}{2}\int_{\mathbb{R}} (\partial_x w)^2 \phi_n^{(1)} \, dx - \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} w^2 \phi_n^{(3)} \, dx. \quad (1.6)$$

De manera análoga para el tercer término de (1.3) se obtiene que

$$\int_{\mathbb{R}} u_1(\partial_x w) w\phi_n \, dx = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} (\partial_x w^2) u_1 \phi_n \, dx = -\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} (\partial_x u_1) w^2 \phi_n \, dx - \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} u_1 w^2 \phi_n^{(1)} \, dx. \quad (1.7)$$

Reemplazando (1.4), (1.6) y (1.7) en la ecuación (1.3) y multiplicando por 2 se sigue que

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\int_{\mathbb{R}} w^2\phi_n \, dx = -3\int_{\mathbb{R}} (\partial_x w)^2 \phi_n^{(1)} \, dx + \int_{\mathbb{R}} w^2 \phi_n^{(3)} \, dx + \int_{\mathbb{R}} (\partial_x u_1) w^2 \phi_n \, dx \\ + \int_{\mathbb{R}} u_1 w^2 \phi_n^{(1)} \, dx - 2\int_{\mathbb{R}} (\partial_x u_2) w^2 \phi_n \, dx.\end{aligned}$$

Notemos que $(\partial_x w)^2 \phi_n^{(1)} \geq 0$, de este modo:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\int_{\mathbb{R}} w^2\phi_n \, dx &\leq \int_{\mathbb{R}} w^2 \phi_n^{(3)} \, dx + \int_{\mathbb{R}} (\partial_x u_1) w^2 \phi_n \, dx + \int_{\mathbb{R}} u_1 w^2 \phi_n^{(1)} \, dx \\ &\qquad - 2\int_{\mathbb{R}} (\partial_x u_2) w^2 \phi_n \, dx \\ &\leq \int_{\mathbb{R}} w^2 |\phi_n^{(3)}| \, dx + \int_{\mathbb{R}} |\partial_x u_1| w^2 \phi_n \, dx + \int_{\mathbb{R}} w^2 |u_1| |\phi_n^{(1)}| \, dx \\ &\qquad + 2\int_{\mathbb{R}} |\partial_x u_2| w^2 \phi_n \, dx. \quad (1.8)\end{aligned}$$

Como $H^1(\mathbb{R}) \hookrightarrow L^\infty(\mathbb{R}) \cap C(\mathbb{R})$, entonces

$$|u_1(t)(x)| \leq ||u_1(t)||_{L^\infty(\mathbb{R})} \leq c_1 ||u_1(t)||_{H^1(\mathbb{R})} \leq c_1 ||u_1||_{C([0,1];\, H^1(\mathbb{R}))}.$$

Similarmente se tiene que

$$|\partial_x u_1(t)(x)| \leq c_1 ||\partial_x u_1||_{C([0,1];\, H^1(\mathbb{R}))}, \; |\partial_x u_2(t)(x)| \leq c_1 ||\partial_x u_2||_{C([0,1];\, H^1(\mathbb{R}))}.$$

Las anteriores observaciones junto con la propiedad ii de la sucesión $\{\phi_n\}$ nos permiten concluir de (1.8) que

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\int_{\mathbb{R}} w^2\phi_n\,dx \leq k_{3,\beta}\int_{\mathbb{R}} w^2\phi_n\,dx &+ c_1\left\|\partial_x u_1\right\|_{C([0,1];\,H^1(\mathbb{R}))}\int_{\mathbb{R}} w^2\phi_n\,dx \\
&+ c_1 k_{1,\beta}\left\|u_1\right\|_{C([0,1];\,H^1(\mathbb{R}))}\int_{\mathbb{R}} w^2\phi_n\,dx + 2c_1\left\|\partial_x u_2\right\|_{C([0,1];\,H^1(\mathbb{R}))}\int_{\mathbb{R}} w^2\phi_n\,dx \\
&\leq \big(k_{3,\beta} + c_1\left\|\partial_x u_1\right\|_{C([0,1];\,H^1(\mathbb{R}))} + c_1 k_{1,\beta}\left\|u_1\right\|_{C([0,1];\,H^1(\mathbb{R}))} \\
&\qquad\qquad + 2c_1\left\|\partial_x u_2\right\|_{C([0,1],H^1(\mathbb{R}))}\big)\int_{\mathbb{R}} w^2\phi_n\,dx \\
&\equiv K\int_{\mathbb{R}} w^2\phi_n\,dx.
\end{aligned}$$

Ahora, al multiplicar esta última desigualdad por el factor $e^{-Kt}$ obtenemos

$$e^{-Kt}\frac{d}{dt}\int_{\mathbb{R}} w^2\phi_n\,dx - Ke^{-Kt}\int_{\mathbb{R}} w^2\phi_n\,dx \leq 0, \text{ es decir:}$$
$$\frac{d}{dt}\left(e^{-Kt}\int_{\mathbb{R}} w^2\phi_n\,dx\right) \leq 0.$$

Por lo tanto, para todo $t \in [0,1]$ y para todo $n \in \mathbb{N}$

$$e^{-Kt}\int_{\mathbb{R}} w(t)^2\phi_n\,dx \leq e^0\int_{\mathbb{R}} w(0)^2\phi_n\,dx.$$

En consecuencia para todo $t \in [0,1]$ y para todo $n \in \mathbb{N}$

$$\int_{\mathbb{R}} w(t)^2\phi_n\,dx \leq e^K\int_{\mathbb{R}} w(0)^2\phi_n\,dx.$$

Teniendo en cuenta las propiedades iii y iv de la sucesión $\{\phi_n\}$, una aplicación del teorema de la convergencia monótona nos permite concluir cuando $n \to \infty$ que

$$\int_{\mathbb{R}} w(t)^2 e^{2\beta x}\,dx \leq e^K\int_{\mathbb{R}} w(0)^2 e^{2\beta x}\,dx, \text{ y por lo tanto}$$
$$||e^{\beta x}w(t)||_{L^2(\mathbb{R})} \leq e^{K/2}||e^{\beta x}w(0)||_{L^2(\mathbb{R})}.$$

Definiendo $K_\beta := e^{K/2}||e^{\beta x}w(0)||_{L^2_x(\mathbb{R})} > 0$, obtenemos que

$$\sup_{t\in\ [0,1]}\left\|e^{\beta x}w(t)\right\|_{L^2_x} \leq K_\beta.$$

□

El siguiente teorema es una generalización del lema 1.1, que será utilizada más tarde en la demostración del principio de continuación única para la ecuación $KdV$ (teorema 3.2).

**Teorema 1.1.** *Sean $u_1, u_2 \in C([0,1]; H^6(\mathbb{R})) \cap C^1([0,1]; H^3(\mathbb{R}))$ soluciones de la ecuación KdV y $w := u_1 - u_2$. Si para $\beta > 0$ y $j \in \{0,1,2,3\}$ se cumple que $e^{\beta x}\partial_x^{j'} w(0) \in L^2(\mathbb{R})$ para $0 \leq j' \leq j$, entonces existe $K_\beta > 0$ tal que*

$$\sup_{t\in\ [0,1]} \left\| e^{\beta x}\partial_x^j w(t) \right\|_{L_x^2} \leq K_\beta.$$

***Prueba***. Para $j = 0$ el teorema 1.1 se reduce al lema 1.1. Probemos el teorema 1.1 sólo para $j = 1$, ya que para $j = 2, 3$ la demostración es análoga a la del caso $j = 1$.
Derivemos la ecuación (1.2) respecto a $x$.

$$\partial_x(\partial_t w + \partial_x^3 w + u_1 \partial_x w + (\partial_x u_2) w) = 0. \tag{1.9}$$

Como $\|\cdot\|_{H^2} \leq \|\cdot\|_{H^3}$, entonces el operador $\partial_x : H^3 \to H^2$ es continuo, así

$$\text{lím}_{h\to 0} \frac{\partial_x w(t+h) - \partial_x w(t)}{h} \text{ (en } H^2) = \partial_x \left[ \text{lím}_{h\to 0} \frac{w(t+h) - w(t)}{h} \text{ (en } H^3) \right].$$

Por lo tanto $\partial_t(\partial_x w) = \partial_x(\partial_t w) \in H^2(\mathbb{R})$ y al usar la regla de derivación de un producto la ecuación (1.9) se transforma en la siguiente ecuación, donde cada término pertenece a $L_x^2$.

$$\partial_t(\partial_x w) + \partial_x^4 w + u_1 \partial_x^2 w + (\partial_x u_1)\partial_x w + (\partial_x u_2)\partial_x w + (\partial_x^2 u_2) w = 0.$$

Sea $v := \partial_x w$. Entonces

$$\partial_t v + \partial_x^3 v + u_1 \partial_x v + (\partial_x u_1) v + (\partial_x u_2) v + (\partial_x^2 u_2) w = 0. \tag{1.10}$$

Multiplicando la ecuación (1.10) por $v\phi_n \in L_x^2$, donde $\{\phi_n\}$ es la sucesión de funciones descrita en la prueba del lema 1.1, e integrando en $\mathbb{R}$ obtenemos

$$\int_{\mathbb{R}} (\partial_t v) v\phi_n \, dx + \int_{\mathbb{R}} (\partial_x^3 v) v\phi_n \, dx + \int_{\mathbb{R}} u_1 (\partial_x v) v\phi_n \, dx + \int_{\mathbb{R}} (\partial_x u_1) v^2 \phi_n \, dx$$
$$+ \int_{\mathbb{R}} (\partial_x u_2) v^2 \phi_n \, dx + \int_{\mathbb{R}} (\partial_x^2 u_2) w v \phi_n \, dx = 0. \tag{1.11}$$

Los tres primeros términos de la ecuación (1.11) tienen las siguientes expresiones equivalentes

$$\int_{\mathbb{R}} (\partial_t v) v\phi_n \, dx = \frac{1}{2}\frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}} v^2 \phi_n \, dx, \tag{1.12}$$

$$\int_{\mathbb{R}} (\partial_x^3 v) v\phi_n \, dx = \frac{3}{2} \int_{\mathbb{R}} (\partial_x v)^2 \phi_n^{(1)} \, dx - \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} v^2 \phi_n^{(3)} \, dx, \tag{1.13}$$

$$\int_{\mathbb{R}} u_1 (\partial_x v) v\phi_n \, dx = -\frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} u_1 v^2 \phi_n^{(1)} \, dx - \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} (\partial_x u_1) v^2 \phi_n \, dx. \tag{1.14}$$

Reemplazando (1.12), (1.13) y (1.14 ) en la ecuación (1.11), dejando sólo en el lado izquierdo la expresión equivalente al primer término y después de multiplicar por 2 obtenemos

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\int_{\mathbb{R}} v^2\phi_n\,dx = -3\int_{\mathbb{R}}(\partial_x v)^2\phi_n^{(1)}\,dx + \int_{\mathbb{R}} v^2\phi_n^{(3)}\,dx \\
+ \int_{\mathbb{R}} u_1 v^2\phi_n^{(1)}\,dx - \int_{\mathbb{R}}(\partial_x u_1)v^2\phi_n\,dx \\
- 2\int_{\mathbb{R}}(\partial_x u_2)v^2\phi_n\,dx - 2\int_{\mathbb{R}}(\partial_x^2 u_2)wv\phi_n\,dx \\
\equiv I + II + III + IV + V + VI.
\end{aligned}
\tag{1.15}
$$

Estimemos los términos del lado derecho de la ecuación (1.15).

$$I \equiv -3\int_{\mathbb{R}}(\partial_x v)^2\phi_n^{(1)}\,dx \leq 0, \text{ ya que } (\partial_x v)^2\phi_n^{(1)} \geq 0,$$

$$II \leq \int_{\mathbb{R}} v^2|\phi_n^{(3)}|\,dx \leq k_{3,\beta}\int_{\mathbb{R}} v^2\phi_n\,dx,$$

$$III \leq \int_{\mathbb{R}} |u_1|v^2\phi_n^{(1)}\,dx \leq c_1 k_{1,\beta}\,\|u_1\|_{C([0,1];\,H^1(\mathbb{R}))}\int_{\mathbb{R}} v^2\phi_n\,dx,$$

$$IV \leq \int_{\mathbb{R}} |\partial_x u_1|v^2\phi_n\,dx \leq c_1\,\|\partial_x u_1\|_{C([0,1];\,H^1(\mathbb{R}))}\int_{\mathbb{R}} v^2\phi_n\,dx,$$

$$V \leq 2\int_{\mathbb{R}} |\partial_x u_2|v^2\phi_n\,dx \leq 2c_1\,\|\partial_x u_2\|_{C([0,1];\,H^1(\mathbb{R}))}\int_{\mathbb{R}} v^2\phi_n\,dx,$$

$$
\begin{aligned}
VI &\leq 2\int_{\mathbb{R}} |\partial_x^2 u_2||wv\phi_n|\,dx \\
&\leq 2c_1\left\|\partial_x^2 u_2\right\|_{C([0,1];\,H^1(\mathbb{R}))}\int_{\mathbb{R}} |w\phi_n^{1/2}||v\phi_n^{1/2}|\,dx \\
&\leq 2c_1\left\|\partial_x^2 u_2\right\|_{C([0,1];\,H^1(\mathbb{R}))}\left(\int_{\mathbb{R}} w^2\phi_n\,dx\right)^{1/2}\left(\int_{\mathbb{R}} v^2\phi_n\,dx\right)^{1/2}.
\end{aligned}
$$

Como para todo $n \in \mathbb{N}$ $\phi_n(x) \leq e^{2\beta x}$ y $e^{\beta x}w(0) \in L^2(\mathbb{R})$, del lema 1.1 se sigue que

$$\left(\int_{\mathbb{R}} w^2\phi_n\,dx\right)^{1/2} \leq \left(\int_{\mathbb{R}} e^{2\beta x}w^2\,dx\right)^{1/2} \leq \sup_{t\in\,[0,1]}\left\|e^{\beta x}w(t)\right\|_{L_x^2} \equiv c_{2,\beta}.$$

De este modo

$$VI \leq 2c_1\,\|\partial_x u_2\|_{C([0,1];\,H^1(\mathbb{R}))}\,c_{2,\beta}\left(\int_{\mathbb{R}} v^2\phi_n\,dx\right)^{1/2}.$$

Las anteriores estimaciones de los términos del lado derecho de la ecuación (1.15) implican que

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\int_{\mathbb{R}} v^2\phi_n\,dx \le \big(&k_{3,\beta} + c_1 k_{1,\beta}\,\|u_1\|_{C([0,1];\,H^1(\mathbb{R}))} + c_1\,\|\partial_x u_1\|_{C([0,1];\,H^1(\mathbb{R}))}\\
&+ 2c_1\,\|\partial_x u_2\|_{C([0,1];\,H^1(\mathbb{R}))}\big)\int_{\mathbb{R}} v^2\phi_n\,dx\\
&+ 2c_1\,\|\partial_x u_2\|_{C([0,1];\,H^1(\mathbb{R}))}\,c_{2,\beta}\left(\int_{\mathbb{R}} v^2\phi_n\,dx\right)^{1/2}\\
\equiv K_1\int_{\mathbb{R}} v^2\phi_n\,dx &+ K_2\left(\int_{\mathbb{R}} v^2\phi_n\,dx\right)^{1/2}
\end{aligned}
$$

Como $\sqrt{t} \le t+1$ para todo $t \ge 0$, entonces de la desigualdad anterior se sigue que

$$
\frac{d}{dt}\int_{\mathbb{R}} v^2\phi_n\,dx \le K\int_{\mathbb{R}} v^2\phi_n\,dx + C,
$$

para algún $K > 0$ y algún $C > 0$, independientes de $t \in [0,1]$ y $n \in \mathbb{N}$.
Al multiplicar esta última desigualdad por el factor $e^{-Kt}$ obtenemos

$$
e^{-Kt}\frac{d}{dt}\int_{\mathbb{R}} v^2\phi_n\,dx - Ke^{-Kt}\int_{\mathbb{R}} v^2\phi_n\,dx - Ce^{-Kt} \le 0,\ \text{ que es equivalente a:}
$$

$$
\frac{d}{dt}\left(e^{-Kt}\int_{\mathbb{R}} v^2\phi_n\,dx + \frac{C}{K}\,e^{-Kt}\right) \le 0.
$$

Por lo tanto, para todo $t \in [0,1]$ y para todo $n \in \mathbb{N}$

$$
e^{-Kt}\int_{\mathbb{R}} v^2\phi_n\,dx + \frac{C}{K}\,e^{-Kt} \le \int_{\mathbb{R}} v^2(0)\phi_n\,dx + \frac{C}{K},\ \text{ es decir:}
$$

$$
\int_{\mathbb{R}} v^2\phi_n\,dx \le e^{Kt}\int_{\mathbb{R}} v^2(0)\phi_n\,dx + \frac{C}{K}\left(e^{Kt} - 1\right).
$$

Por consiguiente, para todo $t \in [0,1]$ y para todo $n \in \mathbb{N}$

$$
\int_{\mathbb{R}} v^2\phi_n\,dx \le e^{K}\int_{\mathbb{R}} v^2(0)\phi_n\,dx + C_1.
$$

Nuevamente por las propiedades iii y iv de la sucesión $\{\phi_n\}$, una aplicación del teorema de la convergencia monótona nos permite concluir cuando $n \to \infty$ que

$$
\int_{\mathbb{R}} v^2 e^{2\beta x}\,dx \le e^{K}\int_{\mathbb{R}} v^2(0)e^{2\beta x}\,dx + C_1,\ \text{ esto es:}
$$

$$
\left\|e^{\beta x}v\right\|_{L^2(\mathbb{R})} \le \left(e^{K}\left\|e^{\beta x}v(0)\right\|^2_{L^2(\mathbb{R})} + C_1\right)^{1/2}.
$$

Definiendo $K_\beta := \left(e^{K}\left\|e^{\beta x}v(0)\right\|^2_{L^2(\mathbb{R})} + C_1\right)^{1/2} > 0$, concluimos que

$$
\sup_{t\in\ [0,1]}\left\|e^{\beta x}\partial_x w(t)\right\|_{L^2_x(\mathbb{R})} \le K_\beta.
$$

□

# Capítulo 2

# Estimaciones de Tipo Carleman

El presente capítulo consta de dos secciones.
En la sección 2.1 mediante el uso de la transformada de Fourier espacial establecemos, en el teorema 2.1, un estimativo de tipo Carleman para la norma de una cierta función $w$ en el espacio $L^2(\mathbb{R} \times [0,1])$ con peso exponencial, el cual expresa una propiedad de continuidad del operador inverso de la parte lineal de la ecuación KdV en esta clase de espacios.
En la sección 2.2 probamos el teorema 2.2 en el que se establece un estimativo de tipo Carleman para la norma de la derivada espacial de una cierta función $w$ en el espacio $L_x^\infty L_t^2(\mathbb{R} \times [0,1])$ con peso exponencial. En este estimativo se acota la norma $\left\| e^{\lambda x} \partial_x w \right\|_{L_x^\infty L_t^2(\mathbb{R}\times[0,1])}$ con $C \left\| e^{\lambda x} \left(\partial_t + \partial_x^3\right) w \right\|_{L_x^1 L_t^2(\mathbb{R}\times[0,1])}$.
El teorema 2.2 está precedido por el lema 2.2, en el cual se prueba el mismo estimativo del teorema 2.2 pero en una clase más restringida de funciones. En este lema se presenta una prueba directa, que difiere de la realizada en el artículo [6] de Kenig, Ponce y Vega y que simplifica significativamente el procedimiento allí descrito.

## 2.1. Estimación para $e^{\lambda x} w$

Empezamos esta sección con el lema 2.1 que justifica el cálculo formal de la derivada temporal de $\widehat{e^{\lambda x} w(t)}(\xi)$ empleado en la prueba del teorema 2.1.

**Lema 2.1.** *Sea $w(\cdot_t) \in C^1\left([0,1]; L^2\right)$ tal que $w$ y $w'$ son funciones acotadas de $[0,1]$ con valores en $L^2\left(e^{2\beta x}dx\right)$ para todo $\beta > 0$. Entonces para todo $\lambda > 0$ y para todo $\xi \in \mathbb{R}$ la función $t \mapsto \widehat{e^{\lambda x} w(t)}(\xi)$ es absolutamente continua con derivada $\widehat{e^{\lambda x} w'(t)}(\xi)$ para casi todo $t \in [0,1]$.*

***Prueba***. Para obtener el resultado mostraremos que $\widehat{e^{\lambda x} w'(\cdot_t)}(\xi) \in L^1([0,1])$ y que se cumple la siguiente igualdad

$$\widehat{e^{\lambda x} w(t)}(\xi) - \widehat{e^{\lambda x} w(0)}(\xi) = \int_0^t \widehat{e^{\lambda x} w'(\tau)}(\xi)\, d\tau \quad \text{para todo} \quad t \in [0,1]. \tag{2.1}$$

Veamos en primer lugar que $e^{\lambda x}w(t) \in L^1_x$ para $\lambda > 0$ y $t \in [0,1]$. En realidad, usando la desigualdad de Cauchy-Schwarz

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}} \left|e^{\lambda x}w(t)\right| \, dx &= \int_{-\infty}^{0} \left|e^{\lambda x}w(t)\right| \, dx + \int_{0}^{\infty} \left|e^{\lambda x}w(t)\right| \, dx \\
&= \int_{-\infty}^{0} e^{\frac{\lambda}{2}x}|e^{\frac{\lambda}{2}x}w(t)| \, dx + \int_{0}^{\infty} e^{-\lambda x}|e^{2\lambda x}w(t)| \, dx \\
&\leq \left(\int_{-\infty}^{0} e^{\lambda x} \, dx\right)^{1/2} \left(\int_{-\infty}^{0} (e^{\frac{\lambda}{2}x}w(t))^2 \, dx\right)^{1/2} \\
&\quad + \left(\int_{0}^{\infty} e^{-2\lambda x} \, dx\right)^{1/2} \left(\int_{0}^{\infty} (e^{2\lambda x}w(t))^2 \, dx\right)^{1/2}. \qquad (2.2)
\end{aligned}$$

Como $w \in L^\infty\left([0,1]; L^2(e^{2\beta x}dx)\right)$ para todo $\beta > 0$ entonces

$$\left(\int_{-\infty}^{0} (e^{\frac{\lambda}{2}x}w(t))^2 \, dx\right)^{1/2} \leq \left\|e^{\frac{\lambda}{2}x}w(t)\right\|_{L^2} \leq \sup_{t\in[0,1]} \left\|e^{\frac{\lambda}{2}x}w(t)\right\|_{L^2} < \infty \quad \text{y} \qquad (2.3)$$

$$\left(\int_{0}^{\infty} (e^{2\lambda x}w(t))^2 \, dx\right)^{1/2} \leq \left\|e^{2\lambda x}w(t)\right\|_{L^2} \leq \sup_{t\in[0,1]} \left\|e^{2\lambda x}w(t)\right\|_{L^2} < \infty. \qquad (2.4)$$

Además,

$$\left(\int_{-\infty}^{0} e^{\lambda x} \, dx\right)^{1/2} = \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \quad \text{y} \quad \left(\int_{0}^{\infty} e^{-2\lambda x} \, dx\right)^{1/2} = \frac{1}{\sqrt{2\lambda}}. \qquad (2.5)$$

Por consiguiente de la desigualdad (2.2), teniendo en cuenta (2.3), (2.4) y (2.5) se sigue que

$$e^{\lambda x}w(t) \in L^1_x \quad \forall t \in [0,1] \quad \text{y existe } c > 0 \text{ tal que } \sup_{t\in[0,1]} \left\|e^{\lambda x}w(t)\right\|_{L^1_x} \leq c. \qquad (2.6)$$

Un procedimiento análogo al anterior muestra que

$$e^{\lambda x}w'(t) \in L^1_x \quad \forall t \in [0,1] \quad \text{y existe } \widetilde{c} > 0 \text{ tal que } \sup_{t\in[0,1]} \left\|e^{\lambda x}w'(t)\right\|_{L^1_x} \leq \widetilde{c}. \qquad (2.7)$$

Para $n \in \mathbb{N}$, sea $\chi_{[-n,n]}$ la función característica del intervalo $[-n,n]$. Entonces

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-ix\xi}e^{\lambda x}w(t)\chi_{[-n,n]}(x) \, dx = \left\langle w(t), e^{-ix\xi}e^{\lambda x}\chi_{[-n,n]}(\cdot_x)\right\rangle_{L^2_x}. \qquad (2.8)$$

Como $w(\cdot_t) \in C^1([0,1], L^2)$ entonces

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\int_{\mathbb{R}} e^{-ix\xi}e^{\lambda x}w(t)\chi_{[-n,n]}(x) \, dx &= \frac{d}{dt}\left\langle w(t), e^{-ix\xi}e^{\lambda x}\chi_{[-n,n]}(\cdot_x)\right\rangle_{L^2_x} \\
&= \left\langle w'(t), e^{-ix\xi}e^{\lambda x}\chi_{[-n,n]}(\cdot_x)\right\rangle_{L^2_x}. \qquad (2.9)
\end{aligned}$$

Claramente la aplicación de $[0,1]$ en $\mathbb{R}$ dada por

$$t \longmapsto \left\langle w'(t), e^{-ix\xi} e^{\lambda x} \chi_{[-n,n]}(\cdot_x) \right\rangle_{L^2_x}$$

es continua, y así de (2.9) concluimos que la función escalar
$t \mapsto \left\langle w(t), e^{-ix\xi} e^{\lambda x} \chi_{[-n,n]}(\cdot_x) \right\rangle_{L^2_x}$ es continuamente diferencible y por el teorema fundamental del cálculo

$$\left\langle w(t), e^{-ix\xi} e^{\lambda x} \chi_{[-n,n]}(\cdot_x) \right\rangle - \left\langle w(0), e^{-ix\xi} e^{\lambda x} \chi_{[-n,n]}(\cdot_x) \right\rangle = \int_0^t \left\langle w'(\tau), e^{-ix\xi} e^{\lambda x} \chi_{[-n,n]}(\cdot_x) \right\rangle d\tau. \tag{2.10}$$

Ahora, para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$\left| e^{-ix\xi} e^{\lambda x} w(t) \chi_{[-n,n]}(x) \right| \leq \left| e^{\lambda x} w(t) \right| \in L^1_x, \quad \forall t \in [0,1].$$

Luego por el teorema de la convergencia dominada se tiene que para todo $t \in [0,1]$

$$\left\langle w(t), e^{-ix\xi} e^{\lambda x} \chi_{[-n,n]}(\cdot_x) \right\rangle_{L^2_x} \xrightarrow{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}_x} e^{-ix\xi} e^{\lambda x} w(t)(x)\, dx. \tag{2.11}$$

En particular,

$$\left\langle w(0), e^{-ix\xi} e^{\lambda x} \chi_{[-n,n]}(\cdot_x) \right\rangle_{L^2_x} \xrightarrow{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}_x} e^{-ix\xi} e^{\lambda x} w(0)(x)\, dx. \tag{2.12}$$

Sea $\tau \in [0,t]$ fijo. Probemos que

$$\left\langle w'(\tau), e^{-ix\xi} e^{\lambda x} \chi_{[-n,n]}(\cdot_x) \right\rangle_{L^2_x} \xrightarrow{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}_x} e^{-ix\xi} e^{\lambda x} w'(\tau)(x)\, dx. \tag{2.13}$$

En primer lugar *c.p.t* $x \in \mathbb{R}$

$$w'(\tau)(x) e^{-ix\xi} e^{\lambda x} \chi_{[-n,n]}(x) \xrightarrow{n\to\infty} e^{-ix\xi} e^{\lambda x} w'(\tau)(x).$$

De otra parte, por (2.7) $e^{\lambda x} w'(\tau)(\cdot_x) \in L^1_x$ y *c.p.t* $x \in \mathbb{R}$

$$\left| w'(\tau)(x) e^{-ix\xi} e^{\lambda x} \chi_{[-n,n]}(x) \right| \leq \left| e^{\lambda x} w'(\tau)(x) \right|.$$

Luego, por el teorema de la convergencia dominada tiene lugar la afirmación (2.13).
Como para todo $\tau \in [0,t]$

$$\left| \left\langle w'(\tau), e^{-ix\xi} e^{\lambda x} \chi_{[-n,n]}(\cdot_x) \right\rangle_{L^2} \right| \leq \int_{\mathbb{R}_x} e^{\lambda x} \left| w'(\tau)(x) \right| \, dx, \quad \text{y}$$

teniendo en cuenta (2.7)

$$\int_0^t \left( \int_{\mathbb{R}_x} e^{\lambda x} \left| w'(\tau)(x) \right| \, dx \right) d\tau \leq \sup_{\tau \in [0,1]} \left\| e^{\lambda x} w'(\tau) \right\|_{L^1_x} < \infty,$$

una nueva aplicación del teorema de la convergencia dominada nos permite concluir que

$$\text{lím}_{n\to\infty} \int_0^t \left\langle w'(\tau), e^{-ix\xi} e^{\lambda x} \chi_{[-n,n]}(\cdot_x) \right\rangle_{L^2_x} d\tau = \int_0^t \int_{\mathbb{R}_x} e^{-ix\xi} e^{\lambda x} w'(\tau)(x)\, dx\, d\tau. \tag{2.14}$$

De (2.10), (2.11), (2.12) y (2.14) se sigue (2.1) y de allí la afirmación del lema.

□

**Teorema 2.1** (Estimación para $e^{\lambda x}w$)**.** *Sea* $w \in C([0,1];H^3) \cap C^1([0,1];L^2)$ *y supongamos que:*

*(i) La función* $t \mapsto \partial_x^j w(t)$ *es acotada de* $[0,1]$ *con valores en* $L^2(e^{2\beta x}dx)$ *para todo* $\beta > 0$ *y* $j = 0,1,2,3$*; y*

*(ii) La función* $t \mapsto w'(t)$ *es acotada de* $[0,1]$ *con valores en* $L^2(e^{2\beta x}dx)$ *para todo* $\beta > 0$.

*Entonces, para todo* $\lambda > 0$

$$\left\|e^{\lambda x}w\right\|_{L^2(\mathbb{R}\times[0,1])} \leq \left\|e^{\lambda x}w(0)\right\|_{L^2(\mathbb{R})} + \left\|e^{\lambda x}w(1)\right\|_{L^2(\mathbb{R})} + \left\|e^{\lambda x}(w' + \partial_x^3 w)\right\|_{L^2(\mathbb{R}\times[0,1])}. \quad (2.15)$$

***Prueba***. Para $t \in [0,1]$ sean $w \equiv w(t)$, $g \equiv g(t) := e^{\lambda x}w(t)$ y $h \equiv h(t) := e^{\lambda x}(w'(t) + \partial_x^3 w(t)) \equiv e^{\lambda x}(w' + \partial_x^3 w)$. Entonces usando la regla de derivación de un producto podemos escribir a $h$ como sigue.

$$\begin{aligned} h &= e^{\lambda x}w' + e^{\lambda x}\partial_x^3 w \\ &= e^{\lambda x}w' + e^{\lambda x}\partial_x^3(e^{-\lambda x}g) \\ &= e^{\lambda x}w' + e^{\lambda x}\left(e^{-\lambda x}\partial_x^3 g - 3\lambda e^{-\lambda x}\partial_x^2 g + 3\lambda^2 e^{-\lambda x}\partial_x g - \lambda^3 e^{-\lambda x}g\right). \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$h = e^{\lambda x}w' + \partial_x^3 g - 3\lambda\partial_x^2 g + 3\lambda^2\partial_x g - \lambda^3 g. \quad (2.16)$$

De las hipótesis $(i)$ y $(ii)$ y con un razonamiento análogo al de la primera parte de la prueba del lema 2.1 (ver desigualdades (2.6) y (2.7)), se sigue que para todo $t \in [0,1]$ cada término del lado derecho de (2.16) pertenece a $L_x^1$, y es claro que también pertenece a $L_x^2$, por consiguiente para todo $t \in [0,1]$, $h(t) \in L_x^1 \cap L_x^2$. Tomando transformada de Fourier con respecto a la variable espacial en la ecuación (2.16) obtenemos

$$\widehat{h(t)}(\xi) = \widehat{e^{\lambda x}w'(t)}(\xi) + \widehat{\partial_x^3 g(t)}(\xi) - 3\lambda\widehat{\partial_x^2 g(t)}(\xi) + 3\lambda^2\widehat{\partial_x g(t)}(\xi) - \lambda^3\widehat{g(t)}(\xi), \quad \forall\, \xi \in \mathbb{R}. \quad (2.17)$$

El cálculo de la transformada de una derivada y el resultado del lema 2.1 nos permiten concluir de (2.17) que para casi todo $t$ en $[0,1]$ y todo $\xi \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \widehat{h(t)}(\xi) &= \frac{d}{dt}\widehat{e^{\lambda x}w(t)}(\xi) + (i\xi)^3\widehat{g(t)}(\xi) - 3\lambda(i\xi)^2\widehat{g(t)}(\xi) + 3\lambda^2(i\xi)\widehat{g(t)}(\xi) - \lambda^3\widehat{g(t)}(\xi) \\ &= \frac{d}{dt}\widehat{g(t)}(\xi) + \left[-\lambda^3 + 3\lambda\xi^2 + i(-\xi^3 + 3\lambda^2\xi)\right]\widehat{g(t)}(\xi). \end{aligned}$$

Sean $a_\lambda(\xi) := \lambda^3 - 3\lambda\xi^2$ y $m_\lambda(\xi) := \xi^3 - 3\lambda^2\xi$, así la ecuación anterior se convierte en

$$\widehat{h(t)}(\xi) = \frac{d}{dt}\widehat{g(t)}(\xi) + \left[-a_\lambda(\xi) - im_\lambda(\xi)\right]\widehat{g(t)}(\xi), \quad (2.18)$$

y al multiplicar la ecuación (2.18) por el factor $e^{[-a_\lambda(\xi) - im_\lambda(\xi)]t}$ se tiene la siguiente igualdad

$$\frac{d}{dt}\left(e^{[-a_\lambda(\xi) - im_\lambda(\xi)]t}\widehat{g(t)}(\xi)\right) = e^{[-a_\lambda(\xi) - im_\lambda(\xi)]t}\widehat{h(t)}(\xi), \text{ para casi todo } t \text{ en } [0,1]. \quad (2.19)$$

Ahora, usando la afirmación del lema 2.1 y el hecho de que la función $t \mapsto e^{[-a_\lambda(\xi)-im_\lambda(\xi)]t}$ es absolutamente continua en $[0,1]$, tenemos que la función $t \mapsto e^{[-a_\lambda(\xi)-im_\lambda(\xi)]t}\widehat{g(t)}(\xi)$ es absolutamente continua en $[0,1]$. Para integrar la ecuación (2.19) con respecto a $t$, consideremos dos casos:

- Si $a_\lambda(\xi) \leq 0$, entonces integrando de 0 a $t$ la ecuación (2.19) y usando la continuidad absoluta de la función $\tau \mapsto e^{[-a_\lambda(\xi)-im_\lambda(\xi)]\tau}\widehat{g(\tau)}(\xi)$ en el intervalo $[0,t]$, obtenemos

$$e^{-a_\lambda(\xi)t}e^{-im_\lambda(\xi)t}\widehat{g(t)}(\xi) - \widehat{g(0)}(\xi) = \int_0^t e^{-a_\lambda(\xi)\tau}e^{-im_\lambda(\xi)\tau}\widehat{h(\tau)}(\xi)\, d\tau.$$

  Por lo tanto,

$$\widehat{g(t)}(\xi) = e^{a_\lambda(\xi)t}e^{im_\lambda(\xi)t}\widehat{g(0)}(\xi) + \int_0^t e^{a_\lambda(\xi)[t-\tau]}e^{im_\lambda(\xi)[t-\tau]}\widehat{h(\tau)}(\xi)\, d\tau,$$

  de donde

$$\begin{aligned}\left|\widehat{g(t)}(\xi)\right| &\leq \left|\widehat{g(0)}(\xi)\right| + \int_0^t \left|\widehat{h(\tau)}(\xi)\right| d\tau \\ &\leq \left|\widehat{g(0)}(\xi)\right| + \left|\widehat{g(1)}(\xi)\right| + \int_0^1 \left|\widehat{h(\tau)}(\xi)\right| d\tau. \end{aligned} \tag{2.20}$$

- Si $a_\lambda(\xi) > 0$, entonces integrando de $t$ a 1 la ecuación (2.19) y usando la continuidad absoluta de la función $\tau \mapsto e^{[-a_\lambda(\xi)-im_\lambda(\xi)]\tau}\widehat{g(\tau)}(\xi)$ en el intervalo $[t,1]$, obtenemos

$$e^{-a_\lambda(\xi)}e^{-im_\lambda(\xi)}\widehat{g(1)}(\xi) - e^{-a_\lambda(\xi)t}e^{-im_\lambda(\xi)t}\widehat{g(t)}(\xi) = \int_t^1 e^{-a_\lambda(\xi)\tau}e^{-im_\lambda(\xi)\tau}\widehat{h(\tau)}(\xi)\, d\tau.$$

  Por lo tanto,

$$\widehat{g(t)}(\xi) = e^{-a_\lambda(\xi)[1-t]}e^{-im_\lambda(\xi)[1-t]}\widehat{g(1)}(\xi) - \int_t^1 e^{-a_\lambda(\xi)[\tau-t]}e^{-im_\lambda(\xi)[\tau-t]}\widehat{h(\tau)}(\xi)\, d\tau,$$

  de donde

$$\begin{aligned}\left|\widehat{g(t)}(\xi)\right| &\leq \left|\widehat{g(1)}(\xi)\right| + \int_t^1 \left|\widehat{h(\tau)}(\xi)\right| d\tau \\ &\leq \left|\widehat{g(0)}(\xi)\right| + \left|\widehat{g(1)}(\xi)\right| + \int_0^1 \left|\widehat{h(\tau)}(\xi)\right| d\tau. \end{aligned} \tag{2.21}$$

Luego de (2.20) y (2.21) concluimos que para todo $t \in [0,1]$

$$\left|\widehat{g(t)}(\xi)\right| \leq \left|\widehat{g(0)}(\xi)\right| + \left|\widehat{g(1)}(\xi)\right| + \int_0^1 \left|\widehat{h(\tau)}(\xi)\right| d\tau. \tag{2.22}$$

Como para todo $t \in [0,1]$, $g(t), h(t) \in L^2_x$, por la identidad de Plancherel se tiene que para todo $t \in [0,1]$

$$||\widehat{g(t)}||_{L^2_\xi} = \|g(t)\|_{L^2_x} \quad \text{y} \quad ||\widehat{h(t)}||_{L^2_\xi} = \|h(t)\|_{L^2_x}\,. \tag{2.23}$$

Probemos ahora que para todo $\tau \in [0,1]$ la función $\xi \mapsto \int_0^1 |\widehat{h(\tau)}(\xi)|\, d\tau$ pertenece a $L^2_\xi$. En realidad, por la desigualdad integral de Minkowski y la segunda igualdad en (2.23) tenemos que

$$\begin{aligned}
\left\| \int_0^1 |\widehat{h(\tau)}(\cdot_\xi)|\, d\tau \right\|_{L^2_\xi} &= \left[ \int_{\mathbb{R}} \left( \int_0^1 |\widehat{h(\tau)}(\xi)|\, d\tau \right)^2 d\xi \right]^{1/2} \\
&\leq \int_0^1 \left( \int_{\mathbb{R}} |\widehat{h(\tau)}(\xi)|^2\, d\xi \right)^{1/2} d\tau \\
&= \int_0^1 \left\| \widehat{h(\tau)}(\cdot_\xi) \right\|_{L^2_\xi} d\tau = \int_0^1 \|h(\tau)(\cdot_x)\|_{L^2_x}\, d\tau,
\end{aligned} \tag{2.24}$$

y como la función $\tau \mapsto h(\tau)$ es acotada de $[0,1]$ con valores en $L^2_x$, entonces

$$\int_0^1 \|h(\tau)(\cdot_x)\|_{L^2_x}\, d\tau \leq \sup_{\tau \in [0,1]} \|h(\tau)\|_{L^2_x} < \infty. \tag{2.25}$$

Por consiguiente de (2.24) y (2.25) obtenemos que

$$\left\| \int_0^1 |\widehat{h(\tau)}(\cdot_\xi)|\, d\tau \right\|_{L^2_\xi} < \infty. \tag{2.26}$$

Teniendo en cuenta (2.23) y (2.26), se sigue de la desigualdad (2.22) que

$$\left\| \widehat{g(t)} \right\|_{L^2_\xi(\mathbb{R})} \leq \left\| \widehat{g(0)} \right\|_{L^2_\xi(\mathbb{R})} + \left\| \widehat{g(1)} \right\|_{L^2_\xi(\mathbb{R})} + \left\| \int_0^1 |\widehat{h(\tau)}(\cdot_\xi)|\, d\tau \right\|_{L^2_\xi} < \infty.$$

Ahora, de la anterior desigualdad, de las igualdades en (2.23) y de la estimación (2.25), tenemos que

$$\|g(t)\|_{L^2(\mathbb{R})} \leq \|g(0)\|_{L^2(\mathbb{R})} + \|g(1)\|_{L^2(\mathbb{R})} + \int_0^1 \|h(\tau)(\cdot_x)\|_{L^2_x}\, d\tau. \tag{2.27}$$

Pero por la desigualdad de Cauchy-Schwarz

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \|h(\tau)(\cdot_x)\|_{L^2_x}\, d\tau &\leq \left( \int_0^1 1^2\, d\tau \right)^{1/2} \left( \int_0^1 \|h(\tau)(\cdot_x)\|^2_{L^2_x}\, d\tau \right)^{1/2} \\
&\leq \left( \int_0^1 \int_{\mathbb{R}} |h(\tau)(x)|^2\, dx\, d\tau \right)^{1/2} \\
&= \|h\|_{L^2(\mathbb{R} \times [0,1])}\,.
\end{aligned}$$

Por consiguiente de (2.27) se sigue que para todo $t \in [0,1]$

$$\|g(t)\|_{L^2(\mathbb{R})} \leq \|g(0)\|_{L^2(\mathbb{R})} + \|g(1)\|_{L^2(\mathbb{R})} + \|h\|_{L^2(\mathbb{R}\times[0,1])}. \tag{2.28}$$

Como

$$\begin{aligned}\|g\|_{L^2(\mathbb{R}\times[0,1])} = \left(\int_0^1 \int_{\mathbb{R}} (g(t)(x))^2\, dx\, dt\right)^{1/2} &= \left(\int_0^1 \|g(t)\|_{L^2_x}^2\, dt\right)^{1/2} \\ &\leq \sup_{t\in[0,1]} \|g(t)\|_{L^2(\mathbb{R})},\end{aligned} \tag{2.29}$$

entonces de (2.29) y (2.28) concluimos que

$$\|g\|_{L^2(\mathbb{R}\times[0,1])} \leq \|g(0)\|_{L^2(\mathbb{R})} + \|g(1)\|_{L^2(\mathbb{R})} + \|h\|_{L^2(\mathbb{R}\times[0,1])},$$

lo cual prueba nuestro teorema.

□

## 2.2. Estimación para $e^{\lambda x}\partial_x w$

El lema 2.2 con el que iniciamos esta sección expresa una propiedad de acotamiento del operador $(\partial_x - \lambda)T$, donde $T$ es el operador inverso de $g \mapsto e^{\lambda x}(\partial_t + \partial_x^3)e^{-\lambda x} g$ y está definido por el multiplicador

$$m_0(\xi,\tau) = \frac{1}{i\tau + (i\xi - \lambda)^3}.$$

**Lema 2.2.** *Existen constantes $C > 0$ y $\lambda_0 > 0$, tales que para todo $\lambda \geq \lambda_0$ y todo $w \in C_0^{3,1}(\mathbb{R}^2)$*

$$\left\|e^{\lambda x}\partial_x w\right\|_{L_x^\infty L_t^2(\mathbb{R}^2)} \leq C \left\|e^{\lambda x}(\partial_t + \partial_x^3) w\right\|_{L_x^1 L_t^2(\mathbb{R}^2)}.$$

***Prueba***. Sean $g := e^{\lambda x} w$ y $h := e^{\lambda x}(\partial_t + \partial_x^3)w$. Entonces

$$e^{\lambda x}\partial_x w = e^{\lambda x}\partial_x(e^{-\lambda x} g) = e^{\lambda x}(e^{-\lambda x}\partial_x g - \lambda e^{-\lambda x} g) = (\partial_x - \lambda) g,$$

y

$$\begin{aligned} h &= e^{\lambda x}\partial_t w + e^{\lambda x}\partial_x^3 w \\ &= \partial_t g + e^{\lambda x}\partial_x^3(e^{-\lambda x} g) \\ &= \partial_t g + e^{\lambda x}\left(e^{-\lambda x}\partial_x^3 g - 3\lambda e^{-\lambda x}\partial_x^2 g + 3\lambda^2 e^{-\lambda x}\partial_x g - \lambda^3 e^{-\lambda x} g\right). \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$h = \partial_t g + (\partial_x - \lambda)^3 g \in C_0(\mathbb{R}^2),$$

y al tomar transformada de Fourier en las variables $x$ y $t$ obtenemos

$$\widehat{h}(\xi,\tau) = i\tau\widehat{g}(\xi,\tau) + (i\xi - \lambda)^3\widehat{g}(\xi,\tau),$$

de donde

$$\widehat{g}(\xi,\tau)=\frac{\widehat{h}(\xi,\tau)}{i\tau+(i\xi-\lambda)^3}, \text{ siempre que el denominador sea no nulo.} \tag{2.30}$$

Los puntos $(\xi,\tau)$ donde el denominador se anula serán descritos más adelante.
Sea $\overline{g}:=e^{\lambda x}\partial_x w=(\partial_x-\lambda)g$, entonces como $\overline{g}\in C_0(\mathbb{R}^2)$ se sigue que

$$\overline{g}=(\partial_x-\lambda)g=\partial_x g-\lambda g=\left[(\partial_x g-\lambda g)^\wedge\right]^\vee=\left[i\xi\widehat{g}-\lambda\widehat{g}\right]^\vee=\left[(i\xi-\lambda)\widehat{g}\right]^\vee,$$

donde $\vee$ denota la transformada de Fourier inversa en $\mathbb{R}^2$.
Al reemplazar (2.30) en la anterior igualdad obtenemos que

$$\overline{g}(\cdot_x,\cdot_t)=\left[\frac{(i\xi-\lambda)}{i\tau+(i\xi-\lambda)^3}\widehat{h}(\xi,\tau)\right]^\vee(\cdot_x,\cdot_t). \tag{2.31}$$

Definamos

$$m(\xi,\tau):=\frac{\xi+i\lambda}{\tau-(\xi+i\lambda)^3}=\frac{\xi+i\lambda}{(\tau-\xi^3+3\lambda^2\xi)+i(\lambda^3-3\lambda\xi^2)}.$$

Por consiguiente de (2.31)

$$\widehat{\overline{g}}(\xi,\tau)=m(\xi,\tau)\widehat{h}(\xi,\tau). \tag{2.32}$$

De la expresión para $m(\xi,\tau)$, podemos ver que el denominador se anula cuando $(\xi,\tau)=\pm\left(\frac{\lambda}{\sqrt{3}},\frac{8\lambda^3}{3\sqrt{3}}\right)$.

- **Afirmación 1**. Para $\lambda>0$ y $\tau\neq\pm\frac{8}{3\sqrt{3}}\lambda^3$, la función

$$\xi\longmapsto m(\xi,\tau) \text{ pertenece a } L^1_\xi\cap L^2_\xi.$$

***Prueba de la Afirmación 1.*** Para $|\xi|>3^{1/3}|\tau|^{1/3}+1$, como $|\tau|<\frac{|\xi+i\lambda|^3}{3}$, entonces

$$|m(\xi,\tau)|=\frac{|\xi+i\lambda|}{|\tau-(\xi+i\lambda)^3|}\leq\frac{|\xi+i\lambda|}{|\xi+i\lambda|^3-|\tau|}\leq\frac{|\xi+i\lambda|}{|\xi+i\lambda|^3-\frac{|\xi+i\lambda|^3}{3}}=\frac{3}{2|\xi+i\lambda|^2}\leq\frac{3}{2\xi^2}, \tag{2.33}$$

y teniendo en cuenta que $\xi\mapsto m(\xi,\tau)$ es continua en $[-3^{1/3}|\tau|^{1/3}-1,3^{1/3}|\tau|^{1/3}+1]$, entonces de la desigualdad (2.33) se sigue que $\xi\mapsto m(\xi,\tau)$ pertenece a $L^1_\xi\cap L^2_\xi$.

$\square$

Como la transformada de $L^2_x$ en $L^2_\xi$ es biyectiva, y la transformada inversa envía $L^1_\xi$ en $C_b(\mathbb{R}_x)$ entonces la afirmación 1 nos permite concluir que para $\lambda>0$ y $\tau\neq\pm\frac{8\lambda^3}{3\sqrt{3}}$,

$$\text{existe } M(\cdot_x,\tau)\in L^2_x\cap C_b(\mathbb{R}_x), \text{ tal que } [M(\cdot_x,\tau)]^{\wedge_x}(\xi)=m(\xi,\tau). \tag{2.34}$$

- **Afirmación 2**. Existe $C>0$ tal que para todo $\lambda>2$, $\|M\|_{L^\infty_{x\tau}}\leq C$.

***Prueba de la Afirmación 2***. Sean $\tau \neq 0$ y $v := \frac{\xi+i\lambda}{\tau^{1/3}}$, así $v\tau^{1/3} = \xi + i\lambda$ y $v^3\tau = (\xi+i\lambda)^3$. Por lo tanto

$$m(\xi,\tau) = \frac{\xi+i\lambda}{\tau-(\xi+i\lambda)^3} = -\frac{1}{\tau^{2/3}}\frac{v}{v^3-1}. \tag{2.35}$$

Usando fracciones parciales, tenemos que

$$\frac{v}{v^3-1} = \frac{a_1}{v-r_1} + \frac{a_2}{v-r_2} + \frac{a_3}{v-r_3} = \sum_{j=1}^{3}\frac{a_j}{v-r_j}, \tag{2.36}$$

donde $r_1 = 1$, $r_2 = e^{(2\pi/3)i}$ y $r_3 = e^{(4\pi/3)i}$ son las tres raíces cúbicas de la unidad y los $a_j$ para $j = 1,2,3$ están dados por

$$a_j = \text{lím}_{v\to r_j}\frac{(v-r_j)v}{v^3-1} = \text{lím}_{v\to r_j}\frac{2v-r_j}{3v^2} = \frac{2r_j-r_j}{3r_j^2} = \frac{1}{3r_j}. \tag{2.37}$$

Teniendo en cuenta (2.35), (2.36), (2.37) y recordando que $v\tau^{1/3} = \xi + i\lambda$ podemos escribir a $m$ como sigue

$$\begin{aligned} m(\xi,\tau) &= -\frac{1}{3\tau^{1/3}}\sum_{j=1}^{3}\frac{1}{r_j}\frac{1}{\xi+i\lambda-r_j\tau^{1/3}} \\ &= -\frac{1}{3\tau^{1/3}}\sum_{j=1}^{3}\frac{1}{r_j}\frac{1}{[\xi-\tau^{1/3}Re(r_j)]-i[\tau^{1/3}Im(r_j)-\lambda]}. \end{aligned} \tag{2.38}$$

Teniendo presente que el conjunto $\{\tau|\, \tau^{1/3}Im(r_j) - \lambda = 0 \text{ para algún } j = 1,2,3\}$ es finito, podemos trabajar en adelante bajo la suposición $\tau^{1/3}Im(r_j) - \lambda \neq 0$ para todo $j \in \{1,2,3\}$.

Consideremos dos casos.

- Si $\tau^{1/3}Im(r_j) - \lambda > 0$, definamos la función $f_j$ por

  $$f_j(x) = i\sqrt{2\pi}\chi_{(0,\infty)}(x)e^{-[\tau^{1/3}Im(r_j)-\lambda]x} \in L^1(\mathbb{R}).$$

  Un cálculo explícito de la transformada de Fourier muestra que

  $$\widehat{f_j}(\xi) = \frac{1}{\xi-i[\tau^{1/3}Im(r_j)-\lambda]},$$

  y por una propiedad de la transformada de Fourier

  $$\widehat{f_j}(\xi-\tau^{1/3}Re(r_j)) = [e^{i(\tau^{1/3}Re(r_j)(\cdot_x))}f_j(\cdot_x)]^{\wedge_x}(\xi).$$

  Así

  $$[e^{i(\tau^{1/3}Re(r_j)(\cdot_x))}f_j(\cdot_x)]^{\wedge_x}(\xi) = \frac{1}{[\xi-\tau^{1/3}Re(r_j)]-i[\tau^{1/3}Im(r_j)-\lambda]}. \tag{2.39}$$

- Si $\tau^{1/3}Im(r_j) - \lambda < 0$, definamos la función $f_j$ por
$$f_j(x) = -i\sqrt{2\pi}\chi_{(-\infty,0)}(x)e^{-[\tau^{1/3}Im(r_j)-\lambda]x} \in L^1(\mathbb{R}).$$
Entonces puede verse, de manera similar al cálculo anterior, que la igualdad (2.39) también es cierta.

Luego de (2.34), (2.38) y (2.39) se sigue que
$$M(x,\tau) = [m(\cdot_\xi,\tau)]^{\vee_\xi}(x) = -\frac{1}{3\tau^{1/3}}\sum_{j=1}^{3}\frac{1}{r_j}e^{i\tau^{1/3}Re(r_j)x}f_j(x). \tag{2.40}$$

Observemos que en cualquier caso la función $f_j$ es una función acotada y que la cota no depende de $\lambda$. Por lo tanto de (2.40) podemos concluir que existe $C_1 > 0$ tal que para todo $x \in \mathbb{R}$, si $|\tau| > 2$, $\tau \neq \pm\frac{8}{3\sqrt{3}}\lambda^3$ y $\tau^{1/3}Im(r_j) - \lambda \neq 0$ para $j = 1,2,3$, se tiene que
$$|M(x,\tau)| \leq C_1.$$
En consecuencia,
$$\|M(\cdot x,\cdot\tau)\|_{L^\infty_{x\tau}(\mathbb{R}\times|\tau|>2)} < C_1, \quad \forall\, \lambda > 0. \tag{2.41}$$
Supongamos que $|\tau| \leq 2$ y $\tau \neq \pm\frac{8}{3\sqrt{3}}\lambda^3$.

De la afirmación 1 $m(\cdot_\xi,\tau) \in L^1_\xi$, y por lo tanto es válida la fórmula inversión de la transformada y $M(\cdot_x,\tau)$ definida por (2.34) puede ser calculada como
$$M(x,\tau) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}_\xi} e^{ix\xi}m(\xi,\tau)\,d\xi \quad \forall\, x \in \mathbb{R}. \tag{2.42}$$

Para $\lambda > 2$ y $|\tau| < 2$, $\frac{|\xi+i\lambda|^3}{4} > \frac{8}{4} = 2 > |\tau|$, luego
$$\begin{aligned}|m(\xi,\tau)| = \left|\frac{\xi+i\lambda}{\tau-(\xi+i\lambda)^3}\right| &\leq \frac{|\xi+i\lambda|}{|\,|\xi+i\lambda|^3-|\tau|\,|}\\ &\leq \frac{|\xi+i\lambda|}{|\xi+i\lambda|^3-\frac{|\xi+i\lambda|^3}{4}}\\ &= \frac{4}{3|\xi+i\lambda|^2}.\end{aligned} \tag{2.43}$$

De este modo de (2.42) y (2.43) se sigue que para $\lambda > 2$, $x \in \mathbb{R}$ y $|\tau| < 2$
$$\begin{aligned}|M(x,\tau)| &\leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{4}{3}\int_{\mathbb{R}_\xi}\frac{1}{|\xi+i\lambda|^2}\,d\xi\\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{4}{3}\left(\int_{[-1,1]}\frac{1}{|\xi+i\lambda|^2}\,d\xi + \int_{[-1,1]^c}\frac{1}{|\xi+i\lambda|^2}\,d\xi\right)\\ &\leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{4}{3}\left(\int_{[-1,1]}\frac{1}{4}\,d\xi + \int_{[-1,1]^c}\frac{1}{\xi^2}\,d\xi\right) \equiv C_2 < \infty.\end{aligned}$$

Por consiguiente, existe una constante $C_2 > 0$, tal que para todo $\lambda > 2$

$$\|M(\cdot x, \cdot \tau)\|_{L^\infty_{x\tau}(\mathbb{R}\times|\tau|\leq 2)} \leq C_2. \tag{2.44}$$

Luego de (2.41) y (2.44) queda probada la afirmación 2.

$\square$

Continuemos ahora con la demostración del lema 2.2.

Como $\overline{g} \in C_0(\mathbb{R}^2)$, $h \in C_0(\mathbb{R}^2)$ y $C_0(\mathbb{R}^2) \subset L^1(\mathbb{R}^2)$, entonces usando la definición de la transformada de Fourier para las funciones de $L^1(\mathbb{R}^2)$ y el teorema de Fubini, puede verse que

$$\widehat{\overline{g}}(\xi, \tau) = [\widehat{\overline{g}(\cdot_x, \cdot_t)}^t(\tau)]^{\wedge_x}(\xi) \text{ y } \widehat{h}(\xi, \tau) = [\widehat{h(\cdot_x, \cdot_t)}^t(\tau)]^{\wedge_x}(\xi). \tag{2.45}$$

Luego de (2.32) y (2.45) se sigue que para $(\xi, \tau) \in \mathbb{R}^2$ y $(\xi, \tau) \neq \pm\left(\frac{\lambda}{\sqrt{3}}, \frac{8\lambda^3}{3\sqrt{3}}\right)$

$$[\widehat{\overline{g}(\cdot_x, \cdot_t)}^t(\tau)]^{\wedge_x}(\xi) = m(\xi, \tau)[\widehat{h(\cdot_x, \cdot_t)}^t(\tau)]^{\wedge_x}(\xi). \tag{2.46}$$

Observemos que la función $x \mapsto \widehat{h(x, \cdot_t)}^t(\tau) \in L^1_x$ ya que $|\widehat{h(x, \cdot_t)}^t(\tau)| \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \|h(x, \cdot_t)\|_{L^1_t}$ y por lo tanto

$$\int_{\mathbb{R}_x} |\widehat{h(x, \cdot_t)}^t(\tau)|\, dx \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}_x} \|h(x, \cdot_t)\|_{L^1_t}\, dx \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \|h\|_{L^1(\mathbb{R}^2)} < \infty. \tag{2.47}$$

Además, por (2.34) la función $x \longmapsto M(x, \tau)$ pertenece $L^2_x$. De este modo la convolución de $M(\cdot_x, \tau)$ y $\widehat{h(\cdot_x, \cdot_t)}^t(\tau)$ pertenece a $L^2_x$ y

$$\begin{aligned} \left[M(\cdot_x, \tau) *_x \widehat{h(\cdot_x, \cdot_t)}^t(\tau)\right]^{\wedge_x} &= \sqrt{2\pi}\, [M(\cdot_x, \tau)]^{\wedge_x}\, [\widehat{h(\cdot_x, \cdot_t)}^t(\tau)]^{\wedge_x} \\ &= \sqrt{2\pi}\, m(\cdot_\xi, \tau)[\widehat{h(\cdot_x, \cdot_t)}^t(\tau)]^{\wedge_x}(\cdot_\xi). \end{aligned} \tag{2.48}$$

Luego de (2.46) y (2.48), se tiene que para $(\xi, \tau) \in \mathbb{R}^2$ tal que $(\xi, \tau) \neq \pm\left(\frac{\lambda}{\sqrt{3}}, \frac{8\lambda^3}{3\sqrt{3}}\right)$

$$[\widehat{\overline{g}(\cdot_x, \cdot_t)}^t(\tau)]^{\wedge_x}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[M(\cdot_x, \tau) *_x \widehat{h(\cdot_x, \cdot_t)}^t(\tau)\right]^{\wedge_x}(\xi),$$

y así como por (2.34) salvo para un número finito de valores de $\tau$ se tiene que $M(\cdot_x, \tau) \in C_b(\mathbb{R}_x)$, podemos afirmar que para todo $x \in \mathbb{R}$

$$\widehat{\overline{g}(x, \cdot_t)}^t(\tau) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[M(\cdot_x, \tau) *_x \widehat{h(\cdot_x, \cdot_t)}^t(\tau)\right](x), \tag{2.49}$$

salvo para un número finito de valores de $\tau$.

En consecuencia para todo $x' \in \mathbb{R}$, usando el teorema de Plancherel en la variable $t$, la igualdad (2.49), la afirmación 2 y la desigualdad integral de Minkowski, se sigue que para $\lambda > 2$

$$
\begin{aligned}
\|\overline{g}(x',\cdot_t)\|_{L^2_t} &= \|[\overline{g}(x',\cdot_t)]^{\wedge_t}\|_{L^2_\tau}\\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\int_{\mathbb{R}_\tau}\left|\left[M(\cdot_x,\tau) *_x [\widehat{h(\cdot_x,\cdot_t)}^t(\tau)]\right](x')\right|^2 d\tau\right)^{1/2}\\
&\leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\int_{\mathbb{R}_\tau}\left\|\left[M(\cdot_x,\tau) *_x [\widehat{h(\cdot_x,\cdot_t)}^t(\tau)]\right]\right\|^2_{L^\infty_x} d\tau\right)^{1/2}\\
&\leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\int_{\mathbb{R}_\tau}||M||^2_{L^\infty_{x\tau}}\left\|\widehat{h(\cdot_x,\cdot_t)}^t(\tau)]\right\|^2_{L^1_x} d\tau\right)^{1/2}\\
&\leq \frac{||M||_{L^\infty_{x\tau}}}{\sqrt{2\pi}}\left(\int_{\mathbb{R}_\tau}\left(\int_{\mathbb{R}_x}|\widehat{h(x,\cdot_t)}^t(\tau)|\,dx\right)^2 d\tau\right)^{1/2}\\
&\leq C\int_{\mathbb{R}_x}\left(\int_{\mathbb{R}_\tau}|\widehat{h(x,\cdot_t)}^t(\tau)|^2\,d\tau\right)^{1/2} dx\\
&= C\int_{\mathbb{R}_x}\left(\int_{\mathbb{R}_t}|h(x,t)|^2\,dt\right)^{1/2} dx = C\,\|h\|_{L^1_xL^2_t(\mathbb{R}^2)}\,.
\end{aligned}
$$

Por lo tanto, de la anterior desigualdad se sigue que

$$\|\overline{g}\|_{L^\infty_xL^2_t(\mathbb{R}^2)} \leq C\,\|h\|_{L^1_xL^2_t(\mathbb{R}^2)}\,,$$

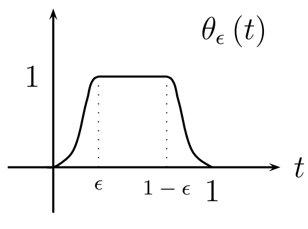
lo cual prueba el lema 2.2.

□

**Teorema 2.2** (Estimación para $e^{\lambda x}\partial_x w$)**.** *Sea $w \in C^{3,1}(\mathbb{R}\times[0,1])$ tal que $\operatorname{supp} w \subseteq [-M,M]\times[0,1]$ para algún $M>0$ y $w(x,0)=w(x,1)=0$ para todo $x\in\mathbb{R}$. Entonces existen constantes $C>0$ y $\lambda_0>0$, independientes de $M$ y de $w$, tales que para todo $\lambda\geq\lambda_0$*

$$\left\|e^{\lambda x}\partial_x w\right\|_{L^\infty_xL^2_t(\mathbb{R}\times[0,1])} \leq C\left\|e^{\lambda x}(\partial_t+\partial_x^3)w\right\|_{L^1_xL^2_t(\mathbb{R}\times[0,1])}.$$

***Prueba***. A lo largo de esta demostración identificaremos las funciones $w, \partial_x w, \partial_t w, \partial_x^3 w$ con sus extensiones a todo $\mathbb{R}^2$ que valen cero por fuera de $\mathbb{R}\times[0,1]$.
Sea $\{\epsilon_n \equiv \epsilon\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión decreciente, entre cero y un medio que converge a cero y consideremos una sucesión de funciones $\{\theta_\epsilon\}$ en $C_0^\infty(\mathbb{R})$ con las siguientes características: Para todo $t\in\mathbb{R}$, $0\leq\theta_\epsilon\leq 1$; para $t\in(\epsilon,1-\epsilon)$, $\theta_\epsilon(t)=1$; para $t\leq 0$ o $t\geq 1$, $\theta_\epsilon(t)=0$ y tal que $|\theta'_\epsilon(t)|\leq\frac{2}{\epsilon}$ para todo $t\in\mathbb{R}$.



Definamos

$$w_\epsilon(x,t) := \begin{cases} \theta_\epsilon(t)w(x,t), & \text{si } (x,t) \in \mathbb{R}\times[0,1], \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Por consiguiente para todo $0 < \epsilon < 1/2$, $w_\epsilon \in C_0^{3,1}(\mathbb{R}^2)$. Por el lema 2.2, existen constantes $C > 0$ y $\lambda_0 > 0$ tales que para todo $\lambda \geq \lambda_0$ y todo $\epsilon \in (0, 1/2)$

$$\left\|e^{\lambda x}\partial_x w_\epsilon\right\|_{L_x^\infty L_t^2(\mathbb{R}^2)} \leq C \left\|e^{\lambda x}(\partial_t + \partial_x^3)w_\epsilon\right\|_{L_x^1 L_t^2(\mathbb{R}^2)}. \tag{2.50}$$

Veamos que

$$\left\|e^{\lambda x}\partial_x w_\epsilon\right\|_{L_x^\infty L_t^2(\mathbb{R}^2)} \xrightarrow{\epsilon\to 0^+} \left\|e^{\lambda x}\partial_x w\right\|_{L_x^\infty L_t^2(\mathbb{R}\times[0,1])}. \tag{2.51}$$

En realidad,

$$\begin{aligned} \left\|e^{\lambda x}\partial_x w_\epsilon - e^{\lambda x}\partial_x w\right\|_{L_x^\infty L_t^2(\mathbb{R}^2)} &= \left\|e^{\lambda x}\partial_x w(\theta_\epsilon - 1)\right\|_{L_x^\infty L_t^2(\mathbb{R}\times[0,1])} \\ &= \sup_{x\in[-M,M]} \left[\int_0^1 e^{2\lambda x}(\partial_x w(x,t))^2(\theta_\epsilon(t)-1)^2\,dt\right]^{1/2} \\ &\leq e^{\lambda M} \max_{\mathbb{R}\times[0,1]} |\partial_x w(x,t)| \left[\int_0^1 (\theta_\epsilon(t)-1)^2\,dt\right]^{1/2} \\ &\leq e^{\lambda M} \max_{\mathbb{R}\times[0,1]} |\partial_x w(x,t)|\, [2\epsilon]^{1/2} \xrightarrow{\epsilon\to 0^+} 0. \end{aligned}$$

De otra parte, probemos que

$$\overline{\lim_{\epsilon\to 0^+}} \left\|e^{\lambda x}(\partial_t + \partial_x^3)w_\epsilon\right\|_{L_x^1 L_t^2(\mathbb{R}^2)} \leq \left\|e^{\lambda x}(\partial_t + \partial_x^3)w\right\|_{L_x^1 L_t^2(\mathbb{R}\times[0,1])}. \tag{2.52}$$

Claramente

$$\left\|e^{\lambda x}(\partial_t + \partial_x^3)w_\epsilon\right\|_{L_x^1 L_t^2(\mathbb{R}^2)} \leq \left\|e^{\lambda x}(\partial_t w + \partial_x^3 w)\theta_\epsilon\right\|_{L_x^1 L_t^2(\mathbb{R}^2)} + \left\|e^{\lambda x} w\theta_\epsilon'\right\|_{L_x^1 L_t^2(\mathbb{R}^2)}. \tag{2.53}$$

Ahora,

$$\left\|e^{\lambda x}(\partial_t w + \partial_x^3 w)\theta_\epsilon\right\|_{L_x^1 L_t^2(\mathbb{R}^2)} = \int_{-M}^{M} \left\|e^{\lambda x}\big(\partial_t w(x,\cdot_t) + \partial_x^3 w(x,\cdot_t)\big)\theta_\epsilon(\cdot_t)\right\|_{L_t^2}\,dx,$$

y como $|\theta_\epsilon(t)| \leq 1$ y $supp\, w \subseteq [-M,M]\times[0,1]$, entonces una aplicación del teorema de la convergencia dominada nos permite concluir que

$$\left\|e^{\lambda x}(\partial_t w + \partial_x^3 w)\theta_\epsilon\right\|_{L_x^1 L_t^2(\mathbb{R}^2)} \xrightarrow{\epsilon\to 0^+} \left\|e^{\lambda x}(\partial_t w + \partial_x^3 w)\right\|_{L_x^1 L_t^2(\mathbb{R}\times[0,1])}. \tag{2.54}$$

De otro lado

$$\begin{aligned} \left\|e^{\lambda x} w\theta_\epsilon'\right\|_{L_x^1 L_t^2(\mathbb{R}^2)} &= \left\|e^{\lambda x} w\theta_\epsilon'\right\|_{L_x^1 L_t^2(\mathbb{R}\times[0,1])} \\ &= \int_{-M}^{M} \left[\int_0^1 e^{2\lambda x}[w(x,t)\theta_\epsilon'(t)]^2\,dt\right]^{1/2} dx \\ &\leq e^{\lambda M} \int_{-M}^{M} \left[\int_0^\epsilon [w(x,t)\theta_\epsilon'(t)]^2\,dt + \int_{1-\epsilon}^1 [w(x,t)\theta_\epsilon'(t)]^2\,dt\right]^{1/2} dx \\ &\leq e^{\lambda M}\frac{2}{\epsilon} \int_{-M}^{M} \left[\int_0^\epsilon [w(x,t)]^2\,dt + \int_{1-\epsilon}^1 [w(x,t)]^2\,dt\right]^{1/2} dx. \end{aligned} \tag{2.55}$$

Como $w(x,0) = w(x,1) = 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$, entonces

$$w(x,t) = w(x,t) - w(x,0), \quad w(x,t) = w(x,t) - w(x,1)$$

y al aplicar el teorema del valor medio obtenemos que para algún $t_{x_1} \in [0,t]$ y algún $t_{x_2} \in [t,1]$,

$$|w(x,t) - w(x,0)| = |(t-0)\partial_t w(x,t_{x_1})|, \;\; |w(x,t) - w(x,1)| = |(t-1)\partial_t w(x,t_{x_2})|. \tag{2.56}$$

Por lo tanto de (2.55) y (2.56) se sigue que

$$\begin{aligned}
\left\| e^{\lambda x} w \theta'_\epsilon \right\|_{L^1_x L^2_t(\mathbb{R}^2)} &\le e^{\lambda M} \frac{2}{\epsilon} \int_{-M}^{M} \left[ \int_0^\epsilon [(t-0)\partial_t w(x,t_{x_1})]^2 \, dt \right. \\
&\qquad\qquad\qquad \left. + \int_{1-\epsilon}^{1} [(t-1)\partial_t w(x,t_{x_2})]^2 \, dt \right]^{1/2} dx \\
&\le e^{\lambda M} \frac{2}{\epsilon} \max_{\mathbb{R}\times[0,1]} |\partial_t w(x,t)| \int_{-M}^{M} \left[ \int_0^\epsilon t^2 \, dt + \int_{1-\epsilon}^{1} (t-1)^2 \, dt \right]^{1/2} dx \\
&\le e^{\lambda M} \frac{2}{\epsilon} \max_{\mathbb{R}\times[0,1]} |\partial_t w(x,t)| \, 2M \left( \frac{2}{3} \epsilon^3 \right)^{1/2} \\
&\le e^{\lambda M} \, 2 \max_{\mathbb{R}\times[0,1]} |\partial_t w(x,t)| \, 2M \left( \frac{2}{3} \right)^{1/2} \epsilon^{1/2} \xrightarrow{\epsilon \to 0^+} 0.
\end{aligned} \tag{2.57}$$

De (2.53), (2.54) y (2.57) se sigue (2.52).
Finalmente, de (2.50 ), (2.51) y (2.52) tenemos la afirmación del teorema.

□

# Capítulo 3

# Demostración del Resultado Principal

En este capítulo demostramos el resultado principal del trabajo que nos dice que si $u_1$ y $u_2$ son soluciones suficientemente suaves de la ecuación KdV con decaimiento polinomial en la variable espacial tales que en el tiempo $t = 0$ y en el tiempo $t = 1$ los soportes de las funciones espaciales $u_1(\cdot_x, 0) - u_2(\cdot_x, 0)$ y $u_1(\cdot_x, 1) - u_2(\cdot_x, 1)$ están contenidos en un intervalo $(-\infty, b)$ para algún $b \in \mathbb{R}$, entonces $u_1 \equiv u_2$.
Iniciamos el capítulo con el enunciado y demostración de un lema de interpolación (lema 3.1) que afirma que la hipótesis de decaimiento polinomial para $u_1$ y $u_2$ es heredada por sus derivadas espaciales de orden 1, debido al grado de regularidad de $u_1$ y $u_2$.
En segundo lugar enunciamos un teorema de Saut y Scheurer (teorema 3.1), probado en [8], que nos permite concluir que si $u_1$ y $u_2$ coinciden en una semibanda $[R, \infty) \times [0, 1]$, entonces deben coincidir en $\mathbb{R} \times [0, 1]$.
Finalmente, enunciamos y demostramos el resultado principal del trabajo (teorema 3.2).

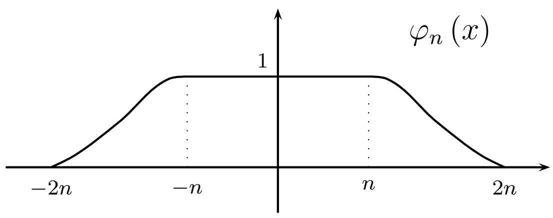
**Lema 3.1.** *Sean $\alpha > 0$ y $f \in H^2(\mathbb{R})$ tal que $(1 + x^2)^\alpha f \in L^2(\mathbb{R})$. Entonces*

$$\left\|(1 + x^2)^{\frac{\alpha}{2}} f\right\|_{H^1(\mathbb{R})} \leq C_\alpha \Big(\left\|(1 + x^2)^\alpha f\right\|_{L^2(\mathbb{R})} + \left\|\partial_x^2 f\right\|_{L^2(\mathbb{R})}\Big).$$

***Prueba.*** En primer lugar veamos que $(1 + x^2)^{\frac{\alpha}{2}} \partial_x f \in L^2(\mathbb{R})$ y que

$$\left\|(1 + x^2)^{\frac{\alpha}{2}} \partial_x f\right\|_{L^2}^2 \leq \widetilde{C}_\alpha \left\|(1 + x^2)^\alpha f\right\|_{L^2}^2 + \left\|(1 + x^2)^\alpha f\right\|_{L^2} \left\|\partial_x^2 f\right\|_{L^2}. \tag{3.1}$$

Sea $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ tal que $\varphi(x) = 1$ si $-1 < x < 1$ y $\varphi(x) = 0$ si $x \in [-2, 2]^c$, $\varphi$ creciente en $[-2, -1]$ y decreciente en $[1, 2]$. Para cada $n \in \mathbb{N}$ consideremos la función $\varphi_n(x) := \varphi(\frac{x}{n})$.



Como las funciones $\varphi_n(1+x^2)^\alpha\partial_x f,\ \partial_x f$ pertenecen a $H^1(\mathbb{R})$, entonces al aplicar la fórmula de integración por partes obtenemos que

$$\begin{aligned}
\left\|\varphi_n^{1/2}(1+x^2)^{\frac{\alpha}{2}}\partial_x f\right\|_{L^2}^2 &= \int_{\mathbb{R}} \varphi_n(x)(1+x^2)^\alpha(\partial_x f(x))^2\,dx \\
&= -\int_{\mathbb{R}} \varphi_n'(x)(1+x^2)^\alpha(\partial_x f(x))f(x)\,dx \qquad (I_n)\\
&\quad -\int_{\mathbb{R}} \varphi_n(x)\alpha(1+x^2)^{\alpha-1}2x(\partial_x f(x))f(x)\,dx \qquad (II_n)\\
&\quad -\int_{\mathbb{R}} \varphi_n(x)(1+x^2)^\alpha(\partial_x^2 f(x))f(x)\,dx \qquad (III_n)\\
&\equiv I_n + II_n + III_n.
\end{aligned} \tag{3.2}$$

Dado que para $f\in H^1(\mathbb{R})$ se cumple que $\partial_x(f^2)=2(\partial_x f)f$, una nueva aplicación de la fórmula de integración por partes en $I_n$ y $II_n$, y una aplicación de la desigualdad de Cauchy-Schwarz en $III_n$ nos permiten afirmar que

$$I_n \equiv \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} \varphi_n''(x)(1+x^2)^\alpha(f(x))^2\,dx + \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} \varphi_n'(x)\alpha(1+x^2)^{\alpha-1}2x(f(x))^2\,dx, \tag{3.3}$$

$$\begin{aligned}
II_n \equiv &\int_{\mathbb{R}} \varphi_n'(x)\alpha(1+x^2)^{\alpha-1}x(f(x))^2\,dx \\
&+\int_{\mathbb{R}} \varphi_n(x)[\alpha(1+x^2)^{\alpha-1}+\alpha(\alpha-1)(1+x^2)^{\alpha-2}2x^2](f(x))^2\,dx,
\end{aligned} \tag{3.4}$$

$$III_n \le \left\|(1+x^2)^\alpha f\right\|_{L^2_x}\left\|\partial_x^2 f\right\|_{L^2_x}. \tag{3.5}$$

Teniendo en cuenta que para todo $x\in\mathbb{R}$,

$$\lim_{x\to\infty}\varphi_n'(x)=\lim_{x\to\infty}\varphi_n''(x)=0,\ \ \lim_{x\to\infty}\varphi_n(x)=1,$$

y que existe una constante $C>0$ tal que para todo $x\in\mathbb{R}$, $|\varphi_n'(x)|\le C$ y $|\varphi_n''(x)|\le C$ y que $(1+x^2)^\alpha f\in L^2(\mathbb{R})$, el teorema de la convergencia dominada nos permite concluir de (3.3) y (3.4) que

$$\lim_{n\to\infty} I_n = 0, \text{ y } \lim_{n\to\infty} II_n = \int_{\mathbb{R}}[\alpha(1+x^2)^{\alpha-1}+\alpha(\alpha-1)(1+x^2)^{\alpha-2}2x^2](f(x))^2\,dx. \tag{3.6}$$

Como por el teorema de la convergencia monótona

$$\left\|(1+x^2)^{\frac{\alpha}{2}}\partial_x f\right\|_{L^2}^2 = \lim_{n\to\infty}\left\|\varphi_n^{1/2}(1+x^2)^{\frac{\alpha}{2}}\partial_x f\right\|_{L^2}^2,$$

entonces de (3.2), (3.5) y (3.6) se sigue que

$$
\begin{aligned}
\left\|(1+x^2)^{\frac{\alpha}{2}}\partial_x f\right\|_{L^2}^2 &\leq \int_{\mathbb{R}} [\alpha(1+x^2)^{\alpha-1} + \alpha(\alpha-1)(1+x^2)^{\alpha-2}2x^2](f(x))^2\,dx \\
&\qquad\qquad + \left\|(1+x^2)^{\alpha} f\right\|_{L_x^2} \left\|\partial_x^2 f\right\|_{L_x^2} \\
&\leq |\alpha + 2\alpha(\alpha-1)| \int_{\mathbb{R}} (1+x^2)^{\alpha-1}(f(x))^2\,dx \\
&\qquad\qquad + \left\|(1+x^2)^{\alpha} f\right\|_{L_x^2} \left\|\partial_x^2 f\right\|_{L_x^2} \\
&\leq \widetilde{C}_\alpha \left\|(1+x^2)^{\alpha} f\right\|_{L_x^2}^2 + \left\|(1+x^2)^{\alpha} f\right\|_{L_x^2} \left\|\partial_x^2 f\right\|_{L_x^2},
\end{aligned}
$$

lo cual prueba (3.1).
Por otra parte

$$
\begin{aligned}
\left\|\alpha x(1+x^2)^{\frac{\alpha}{2}-1} f\right\|_{L^2}^2 &= \alpha^2 \int_{\mathbb{R}} x^2(1+x^2)^{\alpha-2}(f(x))^2\,dx \\
&\leq \alpha^2 \int_{\mathbb{R}} (1+x^2)^{\alpha-1}(f(x))^2\,dx \\
&\leq \alpha^2 \left\|(1+x^2)^{\alpha} f\right\|_{L^2}^2 .
\end{aligned} \tag{3.7}
$$

Puesto que

$$
\partial_x[(1+x^2)^{\frac{\alpha}{2}} f] = \alpha x(1+x^2)^{\frac{\alpha}{2}-1} f + (1+x^2)^{\frac{\alpha}{2}}\partial_x f \in L^2(\mathbb{R}), \tag{3.8}
$$

de (3.1) y (3.7) se sigue que $\partial_x[(1+x^2)^{\frac{\alpha}{2}} f] \in L^2(\mathbb{R})$, y como $(1+x^2)^{\frac{\alpha}{2}} f \in L^2(\mathbb{R})$, entonces $(1+x^2)^{\frac{\alpha}{2}} f \in H^1(\mathbb{R})$. Además, usando (3.8), (3.1) y (3.7) también se tiene que

$$
\begin{aligned}
\left\|(1+x^2)^{\frac{\alpha}{2}} f\right\|_{H^1(\mathbb{R})}^2 &= \left\|(1+x^2)^{\frac{\alpha}{2}} f\right\|_{L^2}^2 + \left\|\partial_x[(1+x^2)^{\frac{\alpha}{2}} f]\right\|_{L^2}^2 \\
&\leq \left\|(1+x^2)^{\alpha} f\right\|_{L^2}^2 + \left(\left\|\alpha x(1+x^2)^{\frac{\alpha}{2}-1} f\right\|_{L^2} + \left\|(1+x^2)^{\frac{\alpha}{2}}\partial_x f\right\|_{L^2}\right)^2 \\
&\leq \left\|(1+x^2)^{\alpha} f\right\|_{L^2}^2 + 2\left\|\alpha x(1+x^2)^{\frac{\alpha}{2}-1} f\right\|_{L^2}^2 + 2\left\|(1+x^2)^{\frac{\alpha}{2}}\partial_x f\right\|_{L^2}^2 \\
&\leq \left\|(1+x^2)^{\alpha} f\right\|_{L^2}^2 + 2\alpha^2\left\|(1+x^2)^{\alpha} f\right\|_{L^2}^2 + 2\widetilde{C}_\alpha\left\|(1+x^2)^{\alpha} f\right\|_{L^2}^2 \\
&\qquad\qquad + 2\left\|(1+x^2)^{\alpha} f\right\|_{L^2}\left\|\partial_x^2 f\right\|_{L^2} \\
&\leq (1+2\alpha^2+2\widetilde{C}_\alpha)\left\|(1+x^2)^{\alpha} f\right\|_{L^2}^2 + 2\left\|(1+x^2)^{\alpha} f\right\|_{L^2}\left\|\partial_x^2 f\right\|_{L^2} .
\end{aligned}
$$

Ahora si $(C_\alpha)^2 := 1+2\alpha^2+2\widetilde{C}_\alpha > 1$, de la desigualdad anterior se sigue que

$$
\begin{aligned}
\left\|(1+x^2)^{\frac{\alpha}{2}} f\right\|_{H^1(\mathbb{R})}^2 &\leq (C_\alpha)^2\left(\left\|(1+x^2)^{\alpha} f\right\|_{L^2}^2 + 2\left\|(1+x^2)^{\alpha} f\right\|_{L^2}\left\|\partial_x^2 f\right\|_{L^2} + \left\|\partial_x^2 f\right\|_{L^2}^2\right) \\
&\leq (C_\alpha)^2\left(\left\|(1+x^2)^{\alpha} f\right\|_{L^2} + \left\|\partial_x^2 f\right\|_{L^2}\right)^2,
\end{aligned}
$$

lo cual prueba la afirmación del lema.

$\square$

**Teorema 3.1** (Saut-Scheurer)**.** *Supongamos que $v = v(x,t)$ satisface la ecuación*

$$\partial_t v + \partial_x^3 v + \sum_{j=0}^{2} r_j(x,t)\partial_x^j v = 0, \quad (x,t) \in \mathbb{R} \times (t_1, t_2), \tag{3.9}$$

*donde*

$$r_j \in L^\infty\Big((t_1,t_2); L^2(\mathbb{R})\Big).$$

*Si $v(x,t) = 0$ para $(x,t)$ en un abierto $\Omega \subset \mathbb{R} \times (t_1,t_2)$, entonces $v = 0$ en las componentes horizontales de $\Omega$, es decir en el conjunto*

$$\mathbb{R} \times \{t \in (t_1,t_2) \mid \exists\, y \ \ (y,t) \in \Omega\}.$$

**Teorema 3.2** (resultado principal)**.** *Sean $u_1, u_2 \in C\Big([0,1]; H^6(\mathbb{R}) \cap L^2((1+x^2)^{2\alpha}dx)\Big) \cap C^1\Big([0,1]; H^3(\mathbb{R})\Big)$, para algún $\alpha > 1$, soluciones de la ecuación de Korteweg-de Vries (KdV)*

$$u'(t) + \partial_x^3 u(t) + u(t)\partial_x u(t) = 0, \ \forall t \in [0,1].$$

*Si existe $b \in \mathbb{R}$, tal que*

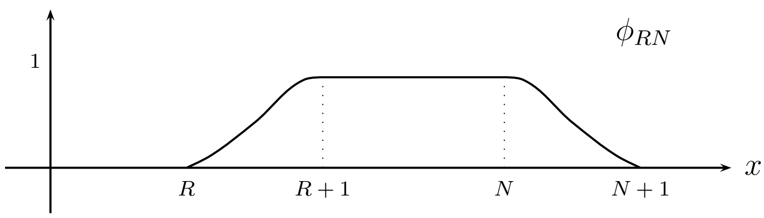
$$u_1(t)(x) = u_2(t)(x), \quad \textit{para} \ \ (x,t) \in (b,\infty) \times \{0,1\},$$

*entonces $u_1 \equiv u_2$.*

***Prueba***. Sea $w(x,t) := u_1(t)(x) - u_2(t)(x)$ y para $R, N \in \mathbb{R}$ con $b < R < R+1 < N$ sea $\phi_{RN} \in C^\infty(\mathbb{R})$ una función tal que $\phi_{RN}(x) = 1$ si $x \in [R+1, N]$ y $\phi_{RN} = 0$ si $x \in [R, N+1]^c$, $\phi_{RN}$ creciente en $[R, R+1]$ y decreciente en $[N, N+1]$, y tal que existe $C > 0$, independiente de $N$, con la propiedad de que

$$|\phi_{RN}^{(j)}(x)| \leq C \ \text{ para todo } \ x \in \mathbb{R} \ \text{ y todo } \ N \ \text{ y } \ j \in \{1,2,3\}. \tag{3.10}$$

Podemos construir las $\phi_{RN}$ de manera que $\phi_{RN}$ y $\phi_{R(N+1)}$ coincidan en $(-\infty, N]$.




Definamos $w_{RN}(x,t) := \phi_{RN}(x)w(x,t)$.
Es claro que $t \mapsto w_{RN}(\cdot_x, t)$ pertenece a $C\left([0,1]; H^3\right) \cap C^1\left([0,1]; L^2\right)$ y como $supp\, \phi_{RN} \subset [R, N+1]$, las funciones

$$\begin{aligned} t &\longmapsto \partial_x^j w_{RN}(\cdot_x, t) \quad \text{para } j = 0,1,2,3; \text{ y} \\ t &\longmapsto \partial_t w_{RN}(\cdot_x, t) \end{aligned}$$

son funciones acotadas de $[0,1]$ con valores en $L^2(e^{2\lambda x}dx)$ para todo $\lambda > 0$. Luego por el teorema 2.1, para todo $\lambda > 0$

$$\left\|e^{\lambda x} w_{RN}\right\|_{L^2(\mathbb{R}\times[0,1])} \leq \left\|e^{\lambda x} w_{RN}(\cdot_x, 0)\right\|_{L^2_x} + \left\|e^{\lambda x} w_{RN}(\cdot_x, 1)\right\|_{L^2_x} + \left\|e^{\lambda x}(\partial_t + \partial_x^3) w_{RN}\right\|_{L^2(\mathbb{R}\times[0,1])}. \tag{3.11}$$

De otra parte, notemos que $w_{RN} \in C^{3,1}(\mathbb{R}\times[0,1])$ y que $supp\, w_{RN} \subset [-(N+1), N+1]\times[0,1]$. Como $u_1(t)(x) = u_2(t)(x)$ para $(x,t) \in (b,\infty)\times\{0,1\}$ y $b < R$ entonces $w_{RN}(x,0) = w_{RN}(x,1) = 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$. De este modo $w_{RN}$ satisface las hipótesis del teorema 2.2, y por lo tanto existen constantes $C > 0$ y $\lambda_0 > 0$, independientes de $R$ y $N$, tales que para todo $\lambda > \lambda_0$

$$\left\|e^{\lambda x}\partial_x w_{RN}\right\|_{L^\infty_x L^2_t(\mathbb{R}\times[0,1])} \leq C\left\|e^{\lambda x}(\partial_t + \partial_x^3) w_{RN}\right\|_{L^1_x L^2_t(\mathbb{R}\times[0,1])}. \tag{3.12}$$

Así, de (3.11) y (3.12), teniendo en cuenta que $\left\|e^{\lambda x} w_{RN}(\cdot_x, 0)\right\|_{L^2_x} = \left\|e^{\lambda x} w_{RN}(\cdot_x, 1)\right\|_{L^2_x} = 0$, obtenemos para $\lambda > \lambda_0$ que

$$\begin{aligned}\left\|e^{\lambda x} w_{RN}\right\|_{L^2(\mathbb{R}\times[0,1])} + \left\|e^{\lambda x}\partial_x w_{RN}\right\|_{L^\infty_x L^2_t(\mathbb{R}\times[0,1])} &\leq \left\|e^{\lambda x}(\partial_t + \partial_x^3) w_{RN}\right\|_{L^2(\mathbb{R}\times[0,1])} \\ &\quad + C\left\|e^{\lambda x}(\partial_t + \partial_x^3) w_{RN}\right\|_{L^1_x L^2_t(\mathbb{R}\times[0,1])}. \end{aligned} \tag{3.13}$$

Como $w_{RN} \in C^{3,1}(\mathbb{R}\times[0,1])$, es claro que:

$$\begin{aligned}\partial_t(w_{RN}) + \partial_x^3 w_{RN} &= \partial_t(\phi_{RN} w) + \partial_x^3(\phi_{RN} w) \\ &= \phi_{RN}\partial_t w + \phi_{RN}\partial_x^3 w + 3\phi'_{RN}\partial_x^2 w + 3\phi''_{RN}\partial_x w + \phi'''_{RN} w \\ &= \phi_{RN}(\partial_t w + \partial_x^3 w) + 3\phi'_{RN}\partial_x^2 w + 3\phi''_{RN}\partial_x w + \phi'''_{RN} w. \end{aligned} \tag{3.14}$$

Recordemos que si $u_1$ y $u_2$ son soluciones de la ecuación KdV entonces su diferencia $w$ satisface la ecuación

$$\partial_t w + \partial_x^3 w = -u_1\partial_x w - (\partial_x u_2) w.$$

Entonces al reemplazar el término $\partial_t w + \partial_x^3 w$ por su equivalente según la ecuación anterior y al restar y sumar el término $u_1\phi'_{RN} w$ en el lado derecho de la ecuación (3.14) tenemos que

$$\begin{aligned}\partial_t(w_{RN}) + \partial_x^3 w_{RN} &= \phi_{RN}(-u_1\partial_x w - (\partial_x u_2) w) - u_1\phi'_{RN} w \\ &\qquad + u_1\phi'_{RN} w + 3\phi'_{RN}\partial_x^2 w + 3\phi''_{RN}\partial_x w + \phi'''_{RN} w \\ &= -u_1\partial_x w_{RN} - (\partial_x u_2) w_{RN} + F_{RN}, \end{aligned} \tag{3.15}$$

donde $F_{RN} := u_1\phi'_{RN} w + 3\phi'_{RN}\partial_x^2 w + 3\phi''_{RN}\partial_x w + \phi'''_{RN} w$.
Luego de (3.13) y (3.15) se sigue que para todo $\lambda > \lambda_0$:

$$\begin{aligned}
\left\|e^{\lambda x}w_{RN}\right\|_{L^2(\mathbb{R}\times[0,1])}+\left\|e^{\lambda x}\partial_x w_{RN}\right\|_{L^\infty_x L^2_t(\mathbb{R}\times[0,1])} \leq & \left\|e^{\lambda x}u_1\partial_x w_{RN}\right\|_{L^2(\mathbb{R}\times[0,1])} \qquad (I_{RN})\\
&+\left\|e^{\lambda x}(\partial_x u_2)w_{RN}\right\|_{L^2(\mathbb{R}\times[0,1])} \qquad (II_{RN})\\
&+\left\|e^{\lambda x}F_{RN}\right\|_{L^2(\mathbb{R}\times[0,1])}\\
&+C\left\|e^{\lambda x}u_1\partial_x w_{RN}\right\|_{L^1_x L^2_t(\mathbb{R}\times[0,1])} \quad (III_{RN})\\
&+C\left\|e^{\lambda x}(\partial_x u_2)w_{RN}\right\|_{L^1_x L^2_t(\mathbb{R}\times[0,1])} \quad (IV_{RN})\\
&+C\left\|e^{\lambda x}F_{RN}\right\|_{L^1_x L^2_t(\mathbb{R}\times[0,1])}. \qquad (3.16)
\end{aligned}$$

A continuación realizamos estimaciones puntuales para $u_1$ y $\partial_x u_2$, necesarias para acotar y posteriormente absorber con el lado izquierdo de (3.16), los términos $(I_{RN})$, $(II_{RN})$, $(III_{RN})$ y $(IV_{RN})$ del lado derecho de (3.16).
Como para cada $t\in[0,1]$, $u_1(t)\in H^2$ y $(1+x^2)^\alpha u_1(t)\in L^2$, entonces por el lema 3.1

$$\left\|(1+x^2)^{\frac{\alpha}{2}}u_1(t)\right\|_{H^1(\mathbb{R}_x)}\leq C_\alpha\Big(\left\|(1+x^2)^\alpha u_1(t)\right\|_{L^2(\mathbb{R}_x)}+\left\|\partial_x^2 u_1(t)\right\|_{L^2(\mathbb{R}_x)}\Big),$$

y usando la inmersión $H^1(\mathbb{R})\hookrightarrow L^\infty(\mathbb{R})\cap C(\mathbb{R})$, se tiene entonces que para todo $t\in[0,1]$ y todo $x\in\mathbb{R}$

$$\begin{aligned}
|(1+x^2)^{\frac{\alpha}{2}}u_1(t)(x)| &\leq ||(1+x^2)^{\frac{\alpha}{2}}u_1(t)||_{L^\infty(\mathbb{R})}\\
&\leq C\,||(1+x^2)^{\frac{\alpha}{2}}u_1(t)||_{H^1(\mathbb{R})}\\
&\leq C\,C_\alpha\Big(\left\|(1+x^2)^\alpha u_1(t)\right\|_{L^2(\mathbb{R})}+\left\|\partial_x^2 u_1(t)\right\|_{L^2(\mathbb{R})}\Big)\\
&\leq C\,C_\alpha\left\|u_1\right\|_{C([0,1];\,H^2(\mathbb{R})\cap L^2((1+x^2)^{2\alpha}dx))}\equiv K_{1,\alpha}.
\end{aligned}$$

Por lo tanto, para todo $x\in\mathbb{R}$ y todo $t\in[0,1]$:

$$|u_1(t)(x)|\leq\frac{K_{1,\alpha}}{(1+x^2)^{\frac{\alpha}{2}}}\,. \tag{3.17}$$

Con respecto a la estimación puntual de $\partial_x u_2$, observemos inicialmente que para cada $t$, $(1+x^2)^\alpha u_2(t)\in L^2$ y por la primera parte de la prueba del lema 3.1 se sigue que $(1+x^2)^{\frac{\alpha}{2}}\partial_x u_2(t)\in L^2$, y como $\partial_x u_2(t)\in H^2$ obtenemos que $\partial_x u_2(t)$ satisface las hipótesis del lema 3.1 con $\frac{\alpha}{2}$ en lugar de $\alpha$. Luego

$$\left\|(1+x^2)^{\frac{\alpha}{4}}\partial_x u_2(t)\right\|_{H^1(\mathbb{R}_x)}\leq C_\alpha\Big(\left\|(1+x^2)^{\frac{\alpha}{2}}\partial_x u_2(t)\right\|_{L^2(\mathbb{R}_x)}+\left\|\partial_x^3 u_2(t)\right\|_{L^2(\mathbb{R}_x)}\Big),$$

y procediendo de manera análoga a como se hizo para obtener (3.17), podemos concluir que existe una constante $K_{2,\alpha}>0$ tal que para todo $x\in\mathbb{R}$ y todo $t\in[0,1]$

$$|\partial_x u_2(t)(x)|\leq\frac{K_{2,\alpha}}{(1+x^2)^{\frac{\alpha}{4}}}\,. \tag{3.18}$$

Sea $\chi_A$ la función característica del intervalo $A := [R, N+1]$. Teniendo presente la desigualdad de Hölder y las desigualdades (3.17) y (3.18), tenemos las siguientes estimaciones

$$\begin{aligned} I_{RN} \equiv \left\| e^{\lambda x} u_1 \partial_x w_{RN} \right\|_{L^2(\mathbb{R}\times[0,1])} &\leq \| \chi_A u_1 \|_{L^2_x L^\infty_t(\mathbb{R}\times[0,1])} \left\| e^{\lambda x} \partial_x w_{RN} \right\|_{L^\infty_x L^2_t(\mathbb{R}\times[0,1])} \\ &= \left( \int_R^{N+1} \Big( \sup_{t\in[0,1]} |u_1(t)(x)| \Big)^2 dx \right)^{1/2} \left\| e^{\lambda x} \partial_x w_{RN} \right\|_{L^\infty_x L^2_t(\mathbb{R}\times[0,1])} \\ &\leq \left( \int_R^{N+1} \frac{K_{1,\alpha}^2}{(1+x^2)^\alpha} dx \right)^{1/2} \left\| e^{\lambda x} \partial_x w_{RN} \right\|_{L^\infty_x L^2_t(\mathbb{R}\times[0,1])} \\ &\leq K_{1,\alpha} \left( \int_R^{\infty} \frac{1}{(1+x^2)^\alpha} dx \right)^{1/2} \left\| e^{\lambda x} \partial_x w_{RN} \right\|_{L^\infty_x L^2_t(\mathbb{R}\times[0,1])}; \end{aligned} \tag{3.19}$$

$$\begin{aligned} III_{RN} \equiv C \left\| e^{\lambda x} u_1 \partial_x w_{RN} \right\|_{L^1_x L^2_t(\mathbb{R}\times[0,1])} &\leq C \| \chi_A u_1 \|_{L^1_x L^\infty_t(\mathbb{R}\times[0,1])} \left\| e^{\lambda x} \partial_x w_{RN} \right\|_{L^\infty_x L^2_t(\mathbb{R}\times[0,1])} \\ &\leq C K_{1,\alpha} \left( \int_R^{\infty} \frac{1}{(1+x^2)^{\frac{\alpha}{2}}} dx \right) \left\| e^{\lambda x} \partial_x w_{RN} \right\|_{L^\infty_x L^2_t(\mathbb{R}\times[0,1])}; \end{aligned} \tag{3.20}$$

$$\begin{aligned} II_{RN} \equiv \left\| e^{\lambda x} (\partial_x u_2) w_{RN} \right\|_{L^2(\mathbb{R}\times[0,1])} &\leq \| \chi_A \partial_x u_2 \|_{L^\infty_x L^\infty_t(\mathbb{R}\times[0,1])} \left\| e^{\lambda x} w_{RN} \right\|_{L^2_x L^2_t(\mathbb{R}\times[0,1])} \\ &= \sup_{x\in A} \sup_{t\in[0,1]} |\partial_x u_2(t)(x)| \left\| e^{\lambda x} w_{RN} \right\|_{L^2_x L^2_t(\mathbb{R}\times[0,1])} \\ &\leq \sup_{x\in A} \frac{K_{2,\alpha}}{(1+x^2)^{\frac{\alpha}{4}}} \left\| e^{\lambda x} w_{RN} \right\|_{L^2_x L^2_t(\mathbb{R}\times[0,1])} \\ &\leq \frac{K_{2,\alpha}}{(1+R^2)^{\frac{\alpha}{4}}} \left\| e^{\lambda x} w_{RN} \right\|_{L^2_x L^2_t(\mathbb{R}\times[0,1])}; \end{aligned} \tag{3.21}$$

$$\begin{aligned} IV_{RN} \equiv C \left\| e^{\lambda x} (\partial_x u_2) w_{RN} \right\|_{L^1_x L^2_t(\mathbb{R}\times[0,1])} &\leq C \| \chi_A \partial_x u_2 \|_{L^2_x L^\infty_t(\mathbb{R}\times[0,1])} \left\| e^{\lambda x} w_{RN} \right\|_{L^2_x L^2_t(\mathbb{R}\times[0,1])} \\ &\leq C K_{2,\alpha} \left( \int_R^{\infty} \frac{1}{(1+x^2)^{\frac{\alpha}{2}}} dx \right)^{1/2} \left\| e^{\lambda x} w_{RN} \right\|_{L^2_x L^2_t(\mathbb{R}\times[0,1])}. \end{aligned} \tag{3.22}$$

Notemos que como $\alpha > 1$, las integrales en (3.19), (3.20), (3.22) son finitas y tienden a cero cuando $R \to \infty$. Por lo tanto para $R$ fijo suficientemente grande, podemos concluir de las desigualdades (3.19), (3.20), (3.21) y (3.22) que

$$\left.\begin{aligned} I_{RN} \equiv \left\| e^{\lambda x} u_1 \partial_x w_{RN} \right\|_{L^2(\mathbb{R}\times[0,1])} &\leq \frac{1}{4} \left\| e^{\lambda x} \partial_x w_{RN} \right\|_{L^\infty_x L^2_t(\mathbb{R}\times[0,1])} \\ III_{RN} \equiv C \left\| e^{\lambda x} u_1 \partial_x w_{RN} \right\|_{L^1_x L^2_t(\mathbb{R}\times[0,1])} &\leq \frac{1}{4} \left\| e^{\lambda x} \partial_x w_{RN} \right\|_{L^\infty_x L^2_t(\mathbb{R}\times[0,1])} \\ II_{RN} \equiv \left\| e^{\lambda x} (\partial_x u_2) w_{RN} \right\|_{L^2(\mathbb{R}\times[0,1])} &\leq \frac{1}{4} \left\| e^{\lambda x} w_{RN} \right\|_{L^2_x L^2_t(\mathbb{R}\times[0,1])} \\ IV_{RN} \equiv C \left\| e^{\lambda x} (\partial_x u_2) w_{RN} \right\|_{L^1_x L^2_t(\mathbb{R}\times[0,1])} &\leq \frac{1}{4} \left\| e^{\lambda x} w_{RN} \right\|_{L^2_x L^2_t(\mathbb{R}\times[0,1])}. \end{aligned}\right\}$$

Como el supp $\phi_{RN}$ es compacto, es claro que

$$\left\|e^{\lambda x}\partial_x w_{RN}\right\|_{L^\infty_x L^2_t(\mathbb{R}\times[0,1])} < \infty \;\text{ y }\; \left\|e^{\lambda x} w_{RN}\right\|_{L^2_x L^2_t(\mathbb{R}\times[0,1])} < \infty,$$

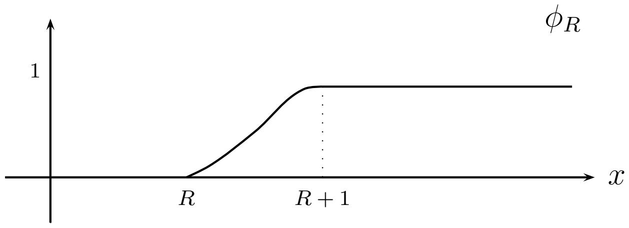
y así, para $R$ suficientemente grande, los términos $I_{RN}$, $II_{RN}$, $III_{RN}$ y $IV_{RN}$ del lado derecho de (3.16) pueden ser absorbidos por los términos del lado izquierdo, de manera que tiene lugar la estimación

$$\begin{aligned}\left\|e^{\lambda x} w_{RN}\right\|_{L^2(\mathbb{R}\times[0,1])} &+ \left\|e^{\lambda x}\partial_x w_{RN}\right\|_{L^\infty_x L^2_t(\mathbb{R}\times[0,1])} \\ &\leq 2\left\|e^{\lambda x}F_{RN}\right\|_{L^2(\mathbb{R}\times[0,1])} + 2C\left\|e^{\lambda x}F_{RN}\right\|_{L^1_x L^2_t(\mathbb{R}\times[0,1])} \quad \forall\,\lambda > \lambda_0.\end{aligned}$$

En consecuencia, para $R$ suficientemente grande,

$$\left\|e^{\lambda x} w_{RN}\right\|_{L^2(\mathbb{R}\times[0,1])} \leq 2\left\|e^{\lambda x}F_{RN}\right\|_{L^2(\mathbb{R}\times[0,1])} + 2C\left\|e^{\lambda x}F_{RN}\right\|_{L^1_x L^2_t(\mathbb{R}\times[0,1])} \quad \forall\,\lambda > \lambda_0, \tag{3.23}$$

donde la constante $C$ es independiente de $R$, $N$ y de $\lambda > \lambda_0$.
Ahora estimemos los términos del lado derecho de (3.23).
Recordemos que $F_{RN} = u_1\phi'_{RN}w + 3\phi'_{RN}\partial_x^2 w + 3\phi''_{RN}\partial_x w + \phi'''_{RN}w$.
Notemos que si $N \longrightarrow \infty$, entonces $\phi_{RN}$ converge puntualmente a $\phi_R$ donde $\phi_R$ es la función de clase $C^\infty$ que coincide con $\phi_{RN}$ en $(-\infty, R+1)$ y que es idénticamente 1 en $[R+1,\infty)$.




Sean $F_R := u_1\phi'_R w + 3\phi'_R\partial_x^2 w + 3\phi''_R\partial_x w + \phi'''_R w$ y

$$k_1 := \max_{x\in[R,R+1]}|\phi'_R(x)|, \quad k_2 := \max_{x\in[R,R+1]}|\phi''_R(x)|, \quad k_3 := \max_{x\in[R,R+1]}|\phi'''_R(x)|.$$

Entonces,

$$\begin{aligned}\left\|e^{\lambda x}u_1\phi'_R w\right\|_{L^2(\mathbb{R}\times[0,1])} &= \Big(\int_R^{R+1}\int_0^1 e^{2\lambda x}(u_1(t)(x)\phi'_R(x)w(x,t))^2\,dtdx\Big)^{1/2} \\ &\leq Ce^{\lambda(R+1)}k_1\left\|u_1\right\|_{C([0,1];H^1(\mathbb{R}))}\left\|w\right\|_{C([0,1];L^2(\mathbb{R}))}\Big(\int_R^{R+1}\int_0^1 dtdx\Big)^{1/2} \\ &\leq Ce^{\lambda(R+1)}k_1\left\|u_1\right\|_{C([0,1];H^1(\mathbb{R}))}\left\|w\right\|_{C([0,1];L^2(\mathbb{R}))}, \end{aligned} \tag{3.24}$$

$$\begin{aligned}\left\|e^{\lambda x}3\phi'_R\partial_x^2 w\right\|_{L^2(\mathbb{R}\times[0,1])} &= 3\Big(\int_R^{R+1}\int_0^1 e^{2\lambda x}(\phi'_R(x)\partial_x^2 w(x,t))^2\,dtdx\Big)^{1/2} \\ &\leq 3Ce^{\lambda(R+1)}k_1\left\|\partial_x^2 w\right\|_{C([0,1];L^2(\mathbb{R}))}\Big(\int_R^{R+1}\int_0^1 dtdx\Big)^{1/2} \\ &\leq 3Ce^{\lambda(R+1)}k_1\left\|\partial_x^2 w\right\|_{C([0,1];L^2(\mathbb{R}))}, \end{aligned} \tag{3.25}$$

$$
\begin{aligned}
\left\|e^{\lambda x}3\phi''_{RN}\partial_x w\right\|_{L^2(\mathbb{R}\times[0,1])} &= 3\Big(\int_R^{R+1}\int_0^1 e^{2\lambda x}(\phi''_R(x)\partial_x w(x,t))^2\,dtdx\Big)^{1/2}\\
&\le 3Ce^{\lambda(R+1)}k_2\left\|\partial_x w\right\|_{C([0,1];L^2(\mathbb{R}))}\Big(\int_R^{R+1}\int_0^1 dtdx\Big)^{1/2}\\
&\le 3Ce^{\lambda(R+1)}k_2\left\|\partial_x w\right\|_{C([0,1];L^2(\mathbb{R}))}, \qquad (3.26)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\left\|e^{\lambda x}\phi'''_R w\right\|_{L^2(\mathbb{R}\times[0,1])} &= \Big(\int_R^{R+1}\int_0^1 e^{2\lambda x}(\phi'''_R(x)w(x,t))^2\,dtdx\Big)^{1/2}\\
&\le Ce^{\lambda(R+1)}k_3\left\|w\right\|_{C([0,1];L^2(\mathbb{R}))}\Big(\int_R^{R+1}\int_0^1 dtdx\Big)^{1/2}\\
&\le Ce^{\lambda(R+1)}k_3\left\|w\right\|_{C([0,1];L^2(\mathbb{R}))}. \qquad (3.27)
\end{aligned}
$$

De la definición de $F_R$ y de las desigualdades (3.24) a (3.27) se concluye que existe una constante $K>0$ tal que para todo $R>b$,

$$\left\|e^{\lambda x}F_R\right\|_{L^2(\mathbb{R}\times[0,1])} \le Ke^{\lambda(R+1)} \quad \forall\,\lambda>0. \qquad (3.28)$$

De manera similar puede probarse que existe $K>0$ tal que para todo $R>b$,

$$\left\|e^{\lambda x}F_R\right\|_{L^1_xL^2_t(\mathbb{R}\times[0,1])} \le Ke^{\lambda(R+1)} \quad \forall\,\lambda>0. \qquad (3.29)$$

De otra parte, observemos que para $(x,t)\in[R,\infty)\times[0,1]$ y $\lambda>0$

$$e^{2\lambda x}\left|F_{RN}(x,t)\right|^2 \xrightarrow{N\to\infty} e^{2\lambda x}\left|F_R(x,t)\right|^2. \qquad (3.30)$$

Además, de (3.10) se sigue que para todo $N$ y todo $(x,t)\in[R,\infty)\times[0,1]$ :

$$
\begin{aligned}
&e^{2\lambda x}\left|F_{RN}(x,t)\right|^2\\
&= e^{2\lambda x}\Big|u_1(t)(x)\phi'_{RN}(x)w(x,t)+3\phi'_{RN}(x)\partial_x^2 w(x,t)+3\phi''_{RN}(x)\partial_x w(x,t)+\phi'''_{RN}(x)w(x,t)\Big|^2\\
&\le e^{2\lambda x}C^2\Big(|u_1(t)(x)|\,|w(x,t)|+3|\partial_x^2 w(x,t)|+3|\partial_x w(x,t)|+|w(x,t)|\Big)^2\\
&\le \widetilde{C}e^{2\lambda x}\Big(\left\|u_1\right\|_{C([0,1];H^1(\mathbb{R}))}|w(x,t)|+3|\partial_x^2 w(x,t)|+3|\partial_x w(x,t)|+|w(x,t)|\Big)^2. \qquad (3.31)
\end{aligned}
$$

Como $w=u_1-u_2$, donde $u_1$ y $u_2$ son soluciones de la $KdV$ que satisfacen las hipótesis del teorema 1.1 del capítulo 1 y $w(x,0)=0$ para todo $x>b$, y por lo tanto para todo $\beta>0$ y $j\in\{0,1,2,3\}$ $e^{\beta x}\partial_x^j w(0)\in L^2(\mathbb{R})$, entonces el teorema 1.1 nos permite concluir que el lado derecho de (3.31) es integrable en $[R,\infty)\times[0,1]$. Por lo tanto, de (3.28), (3.30), (3.31) y del teorema de la convergencia dominada se sigue que

$$\left\|e^{\lambda x}F_{RN}\right\|_{L^2(\mathbb{R}\times[0,1])} \xrightarrow{N\to\infty} \left\|e^{\lambda x}F_R\right\|_{L^2(\mathbb{R}\times[0,1])} \le Ke^{\lambda(R+1)}. \qquad (3.32)$$

Similarmente, puede verse que

$$\left\|e^{\lambda x}F_{RN}\right\|_{L^1_xL^2_t(\mathbb{R}\times[0,1])} \xrightarrow{N\to\infty} \left\|e^{\lambda x}F_R\right\|_{L^1_xL^2_t(\mathbb{R}\times[0,1])} \le Ke^{\lambda(R+1)}. \qquad (3.33)$$

El teorema de la convergencia monótona aplicado al lado izquierdo de (3.23), junto con (3.32) y (3.33), implica que para todo $\lambda > \lambda_0$ y $R$ suficientemente grande

$$\begin{aligned}\left\|e^{\lambda x}\phi_R w\right\|_{L^2(\mathbb{R}\times[0,1])} &\le 2\left\|e^{\lambda x}F_R\right\|_{L^2(\mathbb{R}\times[0,1])} + 2C\left\|e^{\lambda x}F_R\right\|_{L^1_xL^2_t(\mathbb{R}\times[0,1])}\\ &\le 2Ke^{\lambda(R+1)} + 2CKe^{\lambda(R+1)}\\ &= 2K(1+C)e^{\lambda(R+1)}, \end{aligned} \tag{3.34}$$

donde la constante $2K(1+C)$, es independiente de $\lambda$ y $R$.
Pero,

$$\begin{aligned}\left\|e^{\lambda x}\phi_R w\right\|_{L^2(\mathbb{R}\times[0,1])} &= \Big(\int_R^\infty\int_0^1 e^{2\lambda x}(\phi_R(x)w(x,t))^2\,dtdx\Big)^{1/2}\\ &\ge \Big(\int_{R+2}^\infty\int_0^1 e^{2\lambda x}(\phi_R(x)w(x,t))^2\,dtdx\Big)^{1/2}\\ &\ge e^{\lambda(R+2)}\Big(\int_{R+2}^\infty\int_0^1 (w(x,t))^2\,dtdx\Big)^{1/2}. \end{aligned} \tag{3.35}$$

Luego de (3.34) y (3.35)

$$e^{\lambda(R+2)}\Big(\int_{R+2}^\infty\int_0^1 (w(x,t))^2\,dtdx\Big)^{1/2} \le 2K(1+C)e^{\lambda(R+1)},$$

de donde

$$\Big(\int_{R+2}^\infty\int_0^1 (w(x,t))^2\,dtdx\Big)^{1/2} \le 2K(1+C)e^{-\lambda}, \quad \forall\,\lambda > \lambda_0.$$

Por lo tanto si $\lambda \longrightarrow \infty$ concluimos que para $R$ suficientemente grande $w(x,t) = 0$ si $(x,t) \in [R+2,\infty)\times[0,1]$. Finalmente como

$$\partial_t w + \partial_x^3 w + u_1\partial_x w + (\partial_x u_2)w = 0,$$

donde $u_1$ y $\partial_x u_2$ pertenecen a $L^\infty\Big((0,1);L^2(\mathbb{R})\Big)$, entonces por el teorema 3.1 concluimos que $w(x,t) = 0$ para $(x,t) \in \mathbb{R}\times[0,1]$, es decir $u_1 \equiv u_2$, lo cual prueba el teorema 3.2.

□

# Referencias


[1] Bustamante, E. *"Principios de Continuación Única en Ecuaciones Dispersivas."* Tesis de Doctorado en Matemáticas. Universidad Nacional de Colombia- Sede Medellín. 2011.

[2] Evans, L. *"Partial Differential Equations ."* American Mathematical Society. (1998). 662 pgs.

[3] Isaza, P., Mejía, J. *"On the Support of the Solutions to the Ostrovsky Equation With Negative Dispersion."* J. Differential Equations 247 (2009), 1851-1865.

[4] Isaza, P., Mejía, J. *"On the Support of the Solutions to the Ostrovsky Equation With Positive Dispersion."* Nonlinear Analysis 72 (2010), 4016-4029.

[5] Kenig, C., Ponce, G., Vega, L. *"On the support of solutions to the generalized KdV equation."* Ann. I. H. Poincaré-AN19, 2 (2002), 191-208.

[6] Kenig, C., Ponce, G., Vega, L. *"On the unique continuation of solutions to the generalized KdV equation ."* Mathematical Research Letters 10, (2003), 833-846.

[7] Linares, F., Ponce, G. *"Introduction to Nonlinear Dispersive Equations ."* Springer. (2004). 256 pgs.

[8] Saut, J.C., Scheurer, B. *"Unique continuation for some evolution equations."* J. Diff. Equations 66 (1987), 118-139.