Teoría del Potencial en el Plano Complejo

por

Luz Marina Vásquez Peláez

Trabajo presentado como requisito parcial para optar al título de Especialista en Matemáticas.

Director:

Juan Humberto Arango Escalante

Universidad Nacional de Colombia
Sede Medellín
Facultad de Ciencias
Escuela de Matemáticas

Septiembre 2004

Teoría del Potencial en el plano Complejo

Luz Marina Vásquez Peláez

APROBADO:

Juan Humberto Arango Escalante.
Director.

A MIS PADRES: ALONSO Y ALICIA
A MIS HIJOS: JUAN CARLOS Y JOSE DANIEL

Resumen

En este trabajo estudiamos las funciones armónicas y las funciones subarmónicas en el plano complejo como una introducción al estudio de la Teoría del Potencial en el mismo, puesto que los potenciales en general tienen comportamientos muy parecidos a los de las funciones subarmónicas y para muchos propósitos las dos clases de funciones son equivalentes.

Agradecimientos

Quiero agradecer a todos los que me colaboran en la realización de este trabajo, muy especialmente al profesor Juan Humberto Arango Escalante, quien me lo dirigió y a los profesores Diego Mejía Duque y Fernando Puerto Ortiz y demás asistentes al seminario de Análisis Complejo en el cual se bosquejo la prueba de varios de los Teoremas y la solución de algunos de los Ejercicios.

A mis profesores y compañeros, les quiero agradecer sus enseñanzas, su colaboración y su amistad que fue muy importante sobre todo en los momentos difíciles.

Finalmente quiero expresar mi gratitud a mi familia por su constante apoyo sin el cual habría sido imposible hacer la especialización.

Contenido

Introducción

La Teoría del Potencial es un amplio campo del análisis que se puede desarrollar en muchos contextos, tales como la teoría clásica del potencial en $\mathbb{R}^n$ y la teoría pluripotencial en $\mathbb{C}^n$. Existe una conexión muy cercana entre esta teoría y el análisis complejo; las técnicas del análisis complejo, particularmente los mapeos conformes, se usan para acelerar y simplificar pruebas de algunos de los resultados de la teoría del potencial.

Por otro lado los teoremas de la teoría del potencial tienen múltiples aplicaciones en análisis complejo; en este trabajo los utilizamos para probar teoremas como el Teorema de Picard, el Principio de Phragmén-Lindelöf, la Desigualdad de Borel-Carathéodory y el Teorema de Montel.

La teoría del potencial tiene aplicaciones en teoría de aproximaciones, en sistemas dinámicos y en análisis funcional. Algunos resultados clásicos son muy conocidos, como la Interpolación en los Espacios L^P y la Aproximación Uniforme, mientras que otros, como la Teoría Espectral de Algebras de Banach y la Dimensión de Hausdorff de los conjuntos de Julia, son relativamente recientes. En los últimos tiempos se han hallado muchas otras aplicaciones interesantes.

El texto Potential Theory in the Complex Plane, de Thomas Ransford [10] , trata tópicos como funciones armónicas y subarmónicas, el Problema de Dirichlet, medida armónica, funciones de Green, potenciales y capacidad. Nosotros estudiamos los dos primeros capítulos de este libro los cuales se refieren a las funciones armónicas y a las subarmónicas, completamos los detalles de las pruebas y en el primer capítulo resolvimos todos los Ejercicios propuestos, aunque en algunos debilitamos las hipótesis. En el capítulo de funciones subarmónicas no resolvimos todos los Ejercicios.

En el apéndice A vemos la Definición de Potencial Complejo, la cual muestra la relación entre este potencial y las funciones que estudiamos.

1 Funciones Armónicas

1.1 Funciones Armónicas y Holomorfas

Las funciones armónicas son funciones de clase C^2 que satisfacen la Ecuación de Laplace. Una función de valor complejo es armónica si y sólo si sus partes real e imaginaria son armónicas. Las funciones armónicas tienen muchas propiedades heredadas de las funciones holomorfas; en el plano complejo existe una conexión directa entre estas dos clases de funciones.

Definición 1.1.1 *Sea U un subconjunto abierto de $\mathbb{C}$.*

Una función $h : U \longrightarrow \mathbb{R}$ es llamada armónica *si h es de clase $\mathrm{C}^2(U)$ y $\Delta h = 0$ en U.*

Teorema 1.1.2 *Sea D un dominio en $\mathbb{C}$.*

(a) *Si f es holomorfa en D y $h = \operatorname{Re} f$, entonces h es armónica en D.*

(b) *Si h es armónica en D, y si D es simplemente conexo, entonces $h = \operatorname{Re} f$ para alguna función f holomorfa en D. Más aún, f es única excepto por la adición de una constante.*

Prueba:

(a) Sea

$$f = h + ik \qquad \left(h, k \in C^{\infty}(D)\right),$$

entonces por las Ecuaciones de Cauchy-Riemann

$$\begin{aligned} h_x &= k_y \\ h_y &= -k_x. \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned}\Delta h &= h_{xx} + h_{yy}\\ &= k_{yx} - k_{xy}\\ &= k_{yx} - k_{yx}\\ &= 0.\end{aligned}$$

Similarmente $k = \operatorname{Im} f$ es armónica.

(b) Si $h = \operatorname{Re} f$ para alguna función holomorfa f, digamos $f = h + ik$, entonces

$$\begin{aligned}f' &= h_x + ik_x \\ &= h_x - ih_y. \qquad \text{(Ecuaciones de Cauchy-Riemann)}\end{aligned} \tag{1.1}$$

Luego si f existe, f' está completamente determinada por h, y f es única excepto por la adición de una constante.

La ecuación (1.1) también nos sugiere como construir una tal función f.

Definamos

$$\begin{aligned}g: \quad D &\longrightarrow \mathbb{C} \quad \text{por}\\ z &\longmapsto g(z) = h_x - ih_y.\end{aligned}$$

Entonces $g \in C^1(D)$ y satisface las ecuaciones de Cauchy-Riemann porque $\Delta h = 0$, entonces

$$h_{xx} = -h_{yy}$$

y

$$h_{xy} = h_{yx} = -(-h_{yx}).$$

Luego g es holomorfa en D. Fijemos $z_o \in D$, y definamos

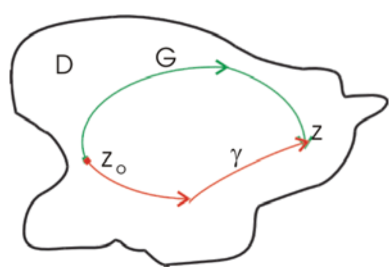


Figura 1

$$\begin{array}{rccl} f: & D & \longrightarrow & \mathbb{C} \quad \text{por} \\ & z & \longmapsto & f(z) = \displaystyle\int_\gamma g(\xi)\, d\xi + h(z_o), \end{array}$$

donde γ es una trayectoria que une a z_o con z.

Como D es simplemente conexo, f está bien definida.

La función f es analítica, $f' = g = h_x - ih_y$.

Definamos

$$\widetilde{h} := \operatorname{Re} f.$$

Entonces

$$\begin{array}{rcl} \widetilde{h}_x & = & h_x \\ \widetilde{h}_y & = & h_y \\ \widetilde{h} & = & h + \alpha(y). \\ \widetilde{h}_y & = & h_y + \alpha'(y) \\ \therefore & \alpha & \text{es constante.} \\ f' & = & h_x - ih_y \\ \widetilde{h} & = & h + \alpha, \end{array}$$

pero

$$\begin{array}{rcl} f(z_o) & = & \displaystyle\int_{z_o}^{z_o} g(\xi)\, d\xi + h(z_o) = h(z_o) \\ h(z_o) + \alpha & = & \widetilde{h}(z_o) = \operatorname{Re} f(z_o) = h(z_o) \\ & & \therefore \quad \alpha = 0 \\ & & \therefore \quad h = \widetilde{h} \\ & & \therefore \quad h = \operatorname{Re} f. \end{array}$$

Si

$$\begin{array}{rcl} f' & = & h_x - ih_y \qquad (h = \operatorname{Re} f = \operatorname{Re} F) \\ F' & = & h_x - ih_y \\ f' & = & F' \\ F & = & f + c. \end{array}$$

Entonces,

$$\operatorname{Re} F = \operatorname{Re} f + \operatorname{Re} c$$

pero

$$\operatorname{Re} F = h = h + \operatorname{Re} c. \qquad \text{(Aquí la constante es imaginaria pura).}$$

Luego $\operatorname{Re} c = 0$, o sea que $c = iy$ para $y \in \mathbb{R}$. ■

Como consecuencia de este teorema obtenemos un resultado usual acerca de logaritmos holomorfos.

Corolario 1.1.3 *Sea f holomorfa y tal que no se anula en un dominio simplemente conexo D en $\mathbb{C}$. Entonces existe una función holomorfa g en D tal que $f = e^g$.*

Prueba:

Tomemos $h = \log|f|$ en D. Puesto que h es localmente la parte real de una función holomorfa, es decir una rama de $\log f$, $\Delta h = 0$, por el Teorema 1.1.2 (a).

Entonces existe $H = \log|f| + i \operatorname{Arg} f$. ($\operatorname{Arg} f$ es el argumento principal). Así

$$H = l \circ f \qquad \text{(donde } l \text{ es una rama del logaritmo)}.$$

Entonces H es holomorfa y h es armónica; por el Teorema 1.1.2 (b), existe g holomorfa en D tal que $h = \operatorname{Re} g$.

Así

$$\begin{aligned} \left|\frac{f}{e^g}\right| &= \left|fe^{-g}\right| \\ &= |f|\left|e^{-g}\right| \\ &= |f|\, e^{-\operatorname{Re} g} \\ &= e^h \cdot e^{-h} \\ &= 1. \end{aligned}$$

Entonces

$$\begin{aligned} \frac{f}{e^g} &= e^\alpha \qquad (e^\alpha \text{ constante de módulo } 1) \\ & \text{y} \\ f &= e^{\alpha+g}. \end{aligned}$$ ■

Nota: El Corolario 1.1.3 y el Teorema 1.1.2 (b) pueden fallar si D no es simplemente conexo. Por ejemplo, la función $f(z) = z$ es holomorfa y diferente de cero en el dominio $D = \mathbb{C}^* = \mathbb{C}\setminus\{0\}$ pero no existe una función holomorfa g tal que $z = e^{g(z)}$ en este dominio. En efecto, supongamos que $z = e^{g(z)}$, entonces

$$1 = e^{g(z)} g'(z)$$

de donde $g'(z) = \frac{1}{z}$, entonces

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{|z|=1} g'(\xi)\, d\xi \\ &= \int_{|z|=1} \frac{1}{z} dz \\ &= 2\pi i, \end{aligned}$$

lo cual es falso.
Sin embargo como los discos son simplemente conexos, toda función armónica es al menos localmente la parte real de alguna función holomorfa.

Corolario 1.1.4 *Si h es una función armónica en un subconjunto abierto U de $\mathbb{C}$, entonces $h \in C^{\infty}(U)$.*

Corolario 1.1.5 *Si $f : U_1 \to U_2$ es una función holomorfa entre subconjuntos abiertos U_1, U_2 de $\mathbb{C}$, y si h es armónica en U_2, entonces $h \circ f$ es armónica en U_1.*

Prueba:

Sean f analítica y h armónica

$$U_1 \xrightarrow{f} U_2 \xrightarrow{h} \mathbb{R}.$$

Locamente $h = \operatorname{Re} g$, con g analítica. De donde

$$h \circ f = \operatorname{Re}(g \circ f),$$

que es armónica, por el Teorema 1.1.2. ■

O por otra parte:

$$\Delta(h \circ f) = \Delta h \circ f \left|f'\right|^2.$$

Sean U una vecindad de infinito, $\varphi : U \to \mathbb{C}$ conforme y $f = \varphi_2 \circ \varphi_1^{-1}$.

Así, en $\mathbb{C}_\infty$, h es armónica en U si $h \circ \varphi^{-1}$ es armónica en $\varphi(U)$.

Entonces $h \circ \varphi_1^{-1} = \left(h \circ \varphi_2^{-1}\right) \circ f$ es armónica en U_1 y por lo tanto $h \circ f$ es armónica en U_1. ■

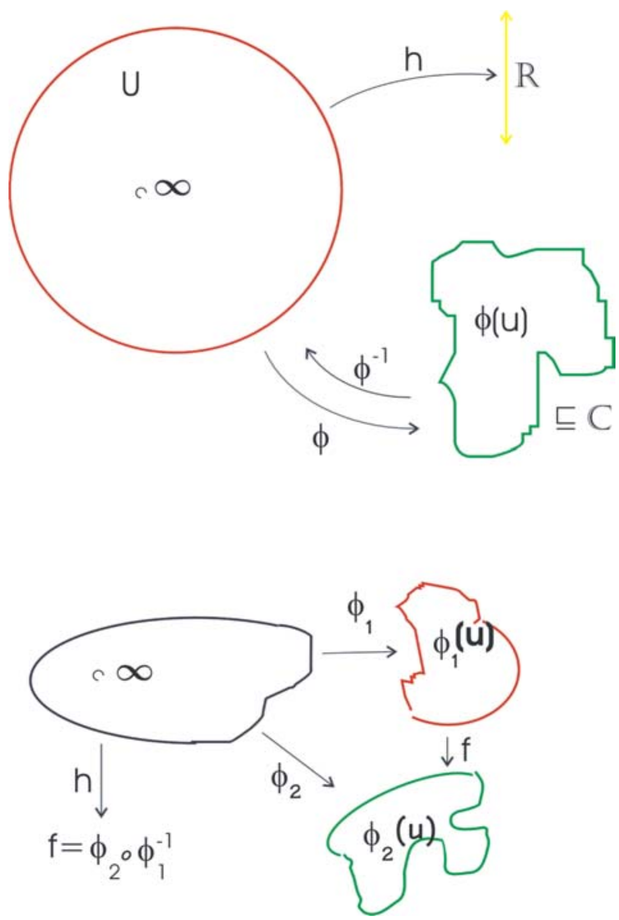


Figura 2

Estos resultados nos permiten extender la noción de armonicidad a la esfera de Riemann.

Dada una función h definida en una vecindad abierta U de ∞, decimos que h es *armónica* en U si $h \circ \varphi^{-1}$ es armónica en $\varphi(U)$, donde φ es una función conforme de U sobre un subconjunto abierto de $\mathbb{C}$. No importa cuál función φ escojamos: si φ_1 y φ_2 son dos funciones escogidas, entonces $h \circ \varphi_1^{-1} = \left(h \circ \varphi_2^{-1}\right) \circ f$, donde $f = \varphi_2 \circ \varphi_1^{-1}$, así por el Corolario 1.1.5, $h \circ \varphi_1^{-1}$ es armónica en $\varphi^{-1}(U)$ si y sólo si $h \circ \varphi_2^{-1}$ es armónica en $\varphi_2(U)$. (Figura 2). ■

Teorema 1.1.6 (Propiedad del Valor Medio)

Sea h una función armónica en una vecindad abierta del disco $\overline{\Delta}(w,\rho)$. Entonces

$$h(w)=\frac{1}{2\pi}\int_{0}^{2\pi}h\left(w+\rho e^{i\theta}\right)d\theta.$$

Prueba:

Sea $h: G\to\mathbb{R}$, G abierto de $\mathbb{C}$ tal que $\overline{\Delta}(w,\rho)\subseteq G$.

Si $G\neq\mathbb{C}$ entonces $G^c=\mathbb{C}\backslash G$ es cerrado,

$$\overline{\Delta}(w,\rho)\cap G^c=\emptyset$$
$$\therefore\ \eth := \operatorname{dist}\left(\overline{\Delta}(w,\rho),G^c\right)>0.$$

Sea $\rho'=\rho+\frac{\eth}{2}$ entonces $\Delta(w,\rho')\subseteq G$, luego h es armónica en $\Delta(w,\rho')$. Por lo tanto

$$\left(\exists f\in H\left(\Delta\left(w,\rho'\right)\right)(h=\operatorname{Re}f)\right),$$

de donde

$$\begin{aligned}
f(w) &= \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|z-w|=\rho}\frac{f(z)}{(z-w)}dz\\
&= \frac{1}{2\pi i}\int_{0}^{2\pi}\frac{f\left(w+\rho e^{i\theta}\right)}{\rho e^{i\theta}}i\rho e^{i\theta}d\theta\\
h(w) &= \operatorname{Re}f(w)=\operatorname{Re}\frac{1}{2\pi i}\int_{0}^{2\pi}\frac{f\left(w+\rho e^{i\theta}\right)}{\rho e^{i\theta}}i\rho e^{i\theta}d\theta\\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{2\pi}\operatorname{Re}f\left(w+\rho e^{i\theta}\right)d\theta. \quad\blacksquare
\end{aligned}$$

Teorema 1.1.7 (Principio de Identidad)

Sean h y k funciones armónicas en un dominio D en $\mathbb{C}$. Si $h=k$ en un subconjunto abierto no vacío U de D, entonces $h=k$ en todo D.

Prueba:

Sea $u=h-k$. u es armónica, puesto que h y k lo son:

$$\begin{aligned}
\Delta u &= u_{xx} + u_{yy} \\
&= h_{xx} - k_{xx} + h_{yy} - k_{yy} \quad \text{(El laplaciano es un operador lineal)} \\
&= \Delta h - \Delta k \\
&= 0 - 0 = 0.
\end{aligned}$$

Entonces $(\forall z \in U)\,(\Delta u\,(z) = 0)\,.$

Sea $g = u_x - iu_y,\;\; g \in H\,(D) \wedge (\forall z \in U)\,(g\,(z) = 0)$

$$\therefore g = 0 \qquad (\text{en } D)\,.$$

$$0 = u_x - iu_y \;\;\therefore\;\; u_x = 0 \;\wedge\; u_y = 0$$

$$\begin{aligned}
\therefore\quad & u = \int u_x \, dx = v_1\,(y) \;\;\wedge\;\; u = \int u_y \, dy = v_2\,(x) \\
\therefore\quad & u \text{ es constante} \quad (\text{ en } D) \\
\therefore\quad & u = 0 \qquad\qquad\quad (\text{en } D) \\
\therefore\quad & h - k = 0 \\
\therefore\quad & h = k \text{ en } D. \;\; \blacksquare
\end{aligned}$$

Nota: Para funciones holomorfas, se cumple una forma más fuerte del Principio de Identidad; es decir, si dos funciones holomorfas coinciden en un conjunto con un punto límite en un dominio D, entonces coinciden en todo D. Sin embargo, éste no es el caso para las funciones armónicas. Por ejemplo las funciones $h\,(z) = \operatorname{Re} z$ y $k\,(z) = 0$ son armónicas en $\mathbb{C}$ y coinciden en $\{z \in \mathbb{C} / \operatorname{Re} z = 0\}$; sin embargo, son funciones distintas.

Teorema 1.1.8 (Principio del Máximo)

Sea h una función armónica en un dominio D en $\mathbb{C}$.

(a) Si h alcanza un máximo local en D, entonces h es constante.

(b) Si h puede extenderse continuamente a $\overline{D}$ y $h \leq 0$ en ∂D, entonces $h \leq 0$ en D.

(Recordemos que las clausuras y las fronteras las estamos tomando con respecto a $\mathbb{C}_\infty$. Si tomanos $\overline{D}$ y ∂D con respecto a $\mathbb{C}$, el Teorema del Máximo no se cumple; por ejemplo: $h = \operatorname{Re} z$ y $D = \{z / \operatorname{Re} z > 0\}$ no cumplen el principio del máximo en $\mathbb{C}$).

Prueba:

(a) Supongamos que h alcanza un máximo local en D. Entonces

$$(\exists w \in D)\,(\exists\ r > 0)\,(\forall z \in \Delta\,(w,r))\,(h\,(z) \leq h\,(w))\,.$$

Por el Teorema 1.1.2 (b),

$$(\exists f \in H(\Delta\,(w,r)))\,(h = \operatorname{Re} f \ \ (\text{en } \Delta\,(w,r)))\,.$$

Entonces

$$\left|e^f\right| = e^{\operatorname{Re} f} = e^h$$

$$\therefore \quad (\forall z \in \Delta\,(w,r))\left(e^{h(z)} \leq e^{h(w)}\right)$$

$$\therefore \quad \left|e^f\right|(z) \leq \left|e^f\right|(w)$$

$$\therefore \quad e^f \in H\,(\Delta\,(w,r))$$

$$\therefore \quad e^f \text{ es constante en } \Delta\,(w,r)\,. \qquad (\text{Teorema del Módulo Máximo})\,.$$

Así

$$\left|e^f\right| \text{ es constante entonces } e^{\operatorname{Re} f} \text{ es constante.}$$

$$\therefore \quad \operatorname{Re} f \text{ es constante}$$

$$\therefore \quad h \text{ es constante en } \Delta\,(w,r)\,.$$

Luego por el Principio de Identidad h es constante en D.

(b) $\overline{D}$ es compacto (cerrado en compacto) y $h : \overline{D} \to \mathbb{R}$ es continua, entonces

$$\left(\exists w \in \overline{D}\right)\left(\forall z \in \overline{D}\right)(h\,(z) \leq h\,(w))\,.$$

Existen dos casos

Caso 1: Si $w \in \partial D$: como $h\,(w) \leq 0$, entonces

$$\left(\forall z \in \overline{D}\right)(h\,(z) \leq h\,(w) \leq 0)\,.$$

Caso 2: Si $w \in D$: h alcanza un máximo local en D, y por lo tanto h es constante en D (por (a)), entonces h es constante en $\overline{D}$ (por continuidad). Como $h \leq 0$ en ∂D, entonces $h \leq 0$ en D. ■

Ejercicios 1.1

---

1. Sea $h\,(x + iy) = e^x\,(x \cos y - y \operatorname{sen} y)$. Pruebe que h es armónica en $\mathbb{C}$; y halle una función holomorfa f en $\mathbb{C}$ tal que $h = \operatorname{Re} f$.

2. Sea h armónica en $A = \{z \in \mathbb{C} : \rho_1 < |z| < \rho_2\}$. Use el hecho de que

$h_x - ih_y$ es holomorfa para probar que existen constantes únicas $(a_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ y b, con $a_o, b \in \mathbb{R}$, tales que

$$h(z) = \operatorname{Re}\left(\sum_{-\infty}^{\infty} a_n z^n\right) + b\log|z| \qquad (\rho_1 < |z| < \rho_2).$$

3. Sean h, k funciones armónicas y no constantes en un dominio D. Pruebe que hk es armónica si y sólo si $h + ick$ es holomorfa para alguna constante real c.

4. Pruebe que toda función armónica es analítica real, y use esto para dar otra prueba del Principio de Identidad.

5. Pruebe que las únicas funciones armónicas en todo $\mathbb{C}_\infty$ son las constantes.

Ejercicios Resueltos 1.1

1. ■ Sea $h(x+iy) = e^x(x\cos y - y\operatorname{sen} y)$. Pruebe que h es armónica en $\mathbb{C}$; halle una función holomorfa f en $\mathbb{C}$ tal que $h = \operatorname{Re} f$.

Prueba:

Veamos que h es armónica en $\mathbb{C}$.

$$\begin{aligned}
h_x &= e^x(x\cos y - y\operatorname{sen} y) + e^x(\cos y) \\
&= h + e^x(\cos y) \\
h_y &= e^x(-x\operatorname{sen} y - (\operatorname{sen} y + y\cos y)) \\
&= e^x(-x\operatorname{sen} y - \operatorname{sen} y - y\cos y) \\
&= -e^x(x\operatorname{sen} y + \operatorname{sen} y + y\cos y) \\
h_{xx} &= h + e^x(\cos y) + e^x(\cos y) \\
&= h + 2e^x(\cos y) \\
h_{yy} &= -e^x(x\cos y + \cos y + \cos y + y(-\operatorname{sen} y)) \\
&= -e^x(x\cos y + 2\cos y - y\operatorname{sen} y) \\
&= -e^x(x\cos y - y\operatorname{sen} y) - 2e^x\cos y \\
&= -h - 2e^x\cos y \\
\Delta h &= h_{xx} + h_{yy} \\
&= h + e^x(\cos y) + (-h - 2e^x\cos y) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Por lo tanto h es armónica en $\mathbb{C}$. Luego

$$(\exists f = u + iv \in H(\mathbb{C}))(h = \operatorname{Re} f = u).$$

Entonces:

$$v_y = u_x = h_x = h + e^x(\cos y)$$

$$\begin{aligned}
\therefore \quad v &= \int \left(h + e^x \left(\cos y\right)\right) dy \\
&= \int e^x \left(x \cos y - y \operatorname{sen} y + \cos y\right) \ dy \\
&= e^x \left(x \operatorname{sen} y + y \cos y - \operatorname{sen} y + \operatorname{sen} y\right) + c\left(x\right) \\
&= e^x \left(x \operatorname{sen} y + y \cos y\right) + c\left(x\right).
\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}
v_x = -u_y &= -h_y = e^x \left(x \operatorname{sen} y + \operatorname{sen} y + y \cos y\right) \\
\therefore \quad v &= \int e^x \left(x \operatorname{sen} y + \operatorname{sen} y + y \cos y\right) \ dx \\
&= \operatorname{sen} y \left(xe^x - e^x\right) + e^x \operatorname{sen} y + e^x y \cos y + c\left(y\right) \\
&= e^x \left(x \operatorname{sen} y - \operatorname{sen} y + \operatorname{sen} y + y \cos y\right) + c\left(y\right) \\
&= e^x \left(x \operatorname{sen} y + y \cos y\right) + c\left(y\right).
\end{aligned}$$

$$\therefore c \in \mathbb{R}.$$

Por lo tanto

$$f = h + ie^x \left(x \operatorname{sen} y + y \cos y\right) + ic. \quad \blacksquare$$

2. ■ Sea h armónica en $A = \{z \in \mathbb{C} : \rho_1 < |z| < \rho_2\}$. Use el hecho de que $h_x - ih_y$ es holomorfa para probar que existen constantes únicas $(a_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ y b, con $a_o, b \in \mathbb{R}$, tales que

$$h\left(z\right) = \operatorname{Re}\left(\sum_{-\infty}^{\infty} a_n z^n\right) + b \log|z| \qquad \left(\rho_1 < |z| < \rho_2\right).$$

Prueba:

Como h es armónica entonces $g = h_x - ih_y$ es holomorfa en A, por lo tanto existen $b_n \in \mathbb{C}$ y

$$g\left(z\right) = \sum_{-\infty}^{\infty} b_n z^n, \qquad \left(z \in A\right)$$

tales que

$$b_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\xi|=\rho} \frac{g\left(\xi\right)}{\xi^{n+1}} d\xi, \qquad \left(\rho_1 < \rho < \rho_2\right) \text{ (Teorema de Laurent).}$$

Sea $z \in A$, $z = x + iy$ fija, llamemos $z_o := x_o + iy_o$. Entonces

$$\int_\gamma g\left(z\right) \ dz = \int_{\gamma_n} \sum_{-\infty}^{\infty} b_n z^n \ dz, \quad \text{donde} \quad \begin{array}{rcl} \gamma: \ [x_o, x] & \rightarrow & A \\ t & \rightarrow & \gamma\left(t\right) = t + iy \end{array}.$$

$$\therefore \quad \int_{x_o}^{x} \left(h_x\left(t, y\right) - ih_y\left(t, y\right)\right) \ dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n \int_\gamma z^n dz.$$

Así

$$\int_{x_0}^{x} h_x(t,y)\ dt = \operatorname{Re}\sum_{\substack{n=-\infty\\ n\neq -1}}^{\infty} b_n \left.\frac{(t+iy)^{n+1}}{n+1}\right|_{x_o}^{x} + \operatorname{Re} b_{-1}\int_{x_o}^{x}\frac{1}{t+iy}\ dt.$$

Si $\varphi(t) = h(t,y)$ entonces $\varphi'(t) = h_x(t,y)$ y así:

$$\begin{aligned}
\int_{x_o}^{x} h_x(t,y)\ dt &= \int_{x_o}^{x}\varphi'(t)\ dt\\
&= \varphi(x) - \varphi(x_o)\\
&= h(x,y) - h(x_o,y)\\
&= h(z) - h(z_o). \qquad (y = y_o)
\end{aligned}$$

Luego

$$\begin{aligned}
h(z) - h(z_o) &= \operatorname{Re}\sum_{\substack{n=-\infty\\ n\neq -1}}^{\infty} b_n\frac{z^{n+1}}{n+1} - \operatorname{Re}\sum_{\substack{n=-\infty\\ n\neq -1}}^{\infty} b_n\frac{z_o^{n+1}}{n+1}\\
&\quad + \operatorname{Re}\left(b_{-1}\int_{x_0}^{x}\frac{t-iy}{t^2+y^2}\ dt\right). \quad (y = y_o)
\end{aligned}$$

Ahora bien,

$$\begin{aligned}
\operatorname{Re}\left(b_{-1}\int_{x_0}^{x}\frac{t-iy}{t^2+y^2}\ dt\right) &= \operatorname{Re}\left[b_{-1}\left(\int_{x_0}^{x}\frac{t}{t^2+y^2}\ dt - i\int_{x_0}^{x}\frac{y}{t^2+y^2}\ dt\right)\right]\\
&= \operatorname{Re}\frac{b_{-1}}{2}\ln|z|^2 - \operatorname{Re}\frac{b_{-1}}{2}\ln|z_0|^2\\
&\quad - \operatorname{Re}\left[b_{-1}i\left(\arctan\frac{x}{y} - \arctan\frac{x_0}{y}\right)\right].
\end{aligned}$$

Llamemos

$$\begin{aligned}
a_o &= h(z_o) - \operatorname{Re}\sum_{\substack{n=-\infty\\ n\neq -1}}^{\infty} b_n\frac{z_o^{n+1}}{n+1} - \operatorname{Re}\frac{b_{-1}}{2}\ln|z_o| - \operatorname{Re} ib_{-1}(\operatorname{Arg}(z) - \operatorname{Arg}(z_o))\\
b &= \operatorname{Re}\frac{b_{-1}}{2}.
\end{aligned}$$

Así

$$\sum_{\substack{n=-\infty\\ n\neq -1}}^{\infty} b_n\frac{z_o^{n+1}}{n+1} = \sum_{\substack{m=-\infty\\ m\neq 0}}^{\infty}\frac{b_{m-1}}{m}z_o^m = \sum_{\substack{m=-\infty\\ m\neq 0}}^{\infty} a_m z_o^m$$

donde $\underset{m\neq 0}{a_m} = \frac{b_{m-1}}{m}$. Y entonces

$$h(z) = \operatorname{Re}\left(\sum_{m=-\infty}^{\infty} a_m z^m\right) + b\ln|z|. \quad (\text{para } z\in\gamma \ \text{ y } \ a_o \text{ como antes}). \quad \blacksquare$$

3. ■ Sean h, k funciones armónicas y no constantes en un dominio D. Pruebe que hk es armónica si y sólo si $h + ick$ es holomorfa para alguna constante real c.

Prueba:

"$\Longrightarrow$" Sean $f = h_x - ih_y$ y $g = k_x - ik_y$. Entonces f y g son holomorfas en D. Además, $g \neq 0$ (si no $k_x = k_y = 0$, de donde $k = \int k_x \, dx = k(y)$, luego k sería constante, lo cual es absurdo). Entonces los ceros de g son aislados en D.

Sea $F = \frac{f}{g}$. F es meromorfa en D, pero

$$\begin{aligned}
(hk)_x &= h_x k + h k_x \\
(hk)_{xx} &= h_{xx} k + k_x h_x + h_x k_x + h k_{xx} \\
(hk)_y &= h_y k + h k_y \\
(hk)_{yy} &= h_{yy} k + k_y h_y + h_y k_y + h k_{yy} \\
&\therefore 0 = \Delta(hk) = 2(h_x k_x + h_y k_y) = 0.
\end{aligned}$$

Ahora

$$\begin{aligned}
F &= \frac{h_x - ih_y}{k_x - ik_y}\frac{k_x + ik_y}{k_x + ik_y} \\
&= \frac{h_x k_x + h_y k_y + i(h_x k_y - h_y k_x)}{k_x^2 + k_y^2}.
\end{aligned}$$

De donde $\operatorname{Re} F = 0$, entonces $\operatorname{Re} F$ es constante.

Así: $(\exists c \in \mathbb{R})(\operatorname{Im} F = c)$, de donde $F = ic = \frac{f}{g}$

$\therefore \quad f = icg$

$\therefore \quad h_x - ih_y = ic(k_x - ik_y) = ick_x + ck_y$

$\therefore \quad h_x = ck_y$ y $h_y = -ck_x$

$\therefore \quad h + ick \in H(D)$. (cumple las ecuaciones de Cauchy-Riemann).

"$\Longleftarrow$" Sean $h_x = ck_y$ y $h_y = -ck_x$, entonces $(hk)_x = hk_y + h_y k$

$\therefore \quad (hk)_{xx} = hk_{xx} + h_{xx}k + 2h_x k_y$

$\therefore \quad \triangle(hk) = h\triangle k + k\triangle h + 2h_x k_x + 2h_y k_y = 2ck_y k_x - 2ck_x k_y = 0$

$\therefore \quad hk$ es armónica. ■

4. ■ Pruebe que toda función armónica es análitica real, y use esto para dar otra prueba del Principio de Identidad.

Definición: *Una función f, con dominio en un subconjunto abierto $U \subset \mathbb{C}$ y rango $\subseteq \mathbb{R}$, es llamada analítica real si para cada $\alpha \in U$ la función f puede ser representada por una serie de potencias convergente en alguna vecindad de α.*

Prueba:

Sean U un subconjunto abierto de $\mathbb{C}$, $h : U \to \mathbb{R}$ una función armónica y $\alpha \in U$. Tomemos un disco abierto $\Delta(\alpha, r)$ con centro en α tal que $\Delta(\alpha, r) \subseteq U$; entonces por el Teorema 1.1.2 (b) existe una función holomorfa en $\Delta(\alpha, r)$ tal que $\operatorname{Re} f = h$ en Δ.

Como f es holomorfa en Δ, tiene un desarrollo en series de potencias de la forma

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\partial^k f}{\partial z^k}(\alpha) \frac{(z-\alpha)^k}{k!},$$

esta serie converge para todo $z \in \Delta$.

Sean $z = x + iy$, $f = h + ik$ y $\alpha = a + ib$, entonces

$$\begin{aligned}
f(z) &= f(x+iy) \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\partial^k f}{\partial z^k}(\alpha) \frac{((x+iy)-(a+ib))^k}{k!} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\partial^k f}{\partial z^k}(\alpha) \frac{((x-a)+(y-b)i)^k}{k!} \\
&= f(\alpha) + \frac{\partial f}{\partial z}(\alpha)[(x-a)+(y-b)i] \\
&\quad + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(\alpha) \frac{[(x-a)+(y-b)i]^2}{2!} + \ldots \\
&= f(\alpha) + \frac{\partial f}{\partial z}(\alpha)[(x-a)+(y-b)i] \\
&\quad + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(\alpha) \frac{\left[(x-a)^2 + 2i(x-a)(y-b) + ((y-b)i)^2\right]}{2!} + \ldots \\
&= f(\alpha) + \frac{\partial f}{\partial z}(\alpha)[(x-a)+(y-b)i] + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(\alpha) \frac{(x-a)^2}{2!} \\
&\quad + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(\alpha)(x-a)(y-b)i + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(\alpha) \frac{((y-b)i)^2}{2!} + \ldots \\
&= f(\alpha) + \frac{\partial f}{\partial z}(\alpha)(x-a) + \frac{\partial f}{\partial z}(\alpha)(y-b)i + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(\alpha) \frac{(x-a)^2}{2!} \\
&\quad + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(\alpha)(x-a)(y-b)i - \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(\alpha) \frac{(y-b)^2}{2!} + \ldots
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= h\left(\alpha\right)+k\left(\alpha\right)i+\operatorname{Re}\left(\frac{\partial f}{\partial z}\left(\alpha\right)\right)\left(x-a\right)+\operatorname{Im}\left(\frac{\partial f}{\partial z}\left(\alpha\right)\right)\left(x-a\right)i\\
&\quad+\operatorname{Re}\left(\frac{\partial f}{\partial z}\left(\alpha\right)\right)\left(y-b\right)i-\operatorname{Im}\left(\frac{\partial f}{\partial z}\left(\alpha\right)\right)\left(y-b\right)\\
&\quad+\operatorname{Re}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}\left(\alpha\right)\right)\frac{\left(x-a\right)^2}{2!}+\operatorname{Im}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}\left(\alpha\right)\right)\frac{\left(x-a\right)^2}{2!}i\\
&\quad+\operatorname{Re}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}\left(\alpha\right)\right)\left(x-a\right)\left(y-b\right)i-\operatorname{Im}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}\left(\alpha\right)\right)\left(x-a\right)\left(y-b\right)\\
&\quad-\operatorname{Re}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}\left(\alpha\right)\right)\frac{\left(y-b\right)^2}{2!}-\operatorname{Im}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}\left(\alpha\right)\right)\frac{\left(y-b\right)^2}{2!}i+\ldots\\
&= \left[\begin{array}{l}
h\left(\alpha\right)+\operatorname{Re}\left(\frac{\partial f}{\partial z}\left(\alpha\right)\right)\left(x-a\right)-\operatorname{Im}\left(\frac{\partial f}{\partial z}\left(\alpha\right)\right)\left(y-b\right)\\
+\operatorname{Re}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}\left(\alpha\right)\right)\frac{\left(x-a\right)^2}{2!}-\operatorname{Im}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}\left(\alpha\right)\right)\left(x-a\right)\left(y-b\right)\\
-\operatorname{Re}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}\left(\alpha\right)\right)\frac{\left(y-b\right)^2}{2!}+\ldots
\end{array}\right]+\\
&\quad\left[\begin{array}{l}
k\left(\alpha\right)i+\operatorname{Im}\left(\frac{\partial f}{\partial z}\left(\alpha\right)\right)\left(x-a\right)i+\operatorname{Re}\left(\frac{\partial f}{\partial z}\left(\alpha\right)\right)\left(y-b\right)i\\
+\operatorname{Im}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}\left(\alpha\right)\right)\frac{\left(x-a\right)^2}{2!}i+\operatorname{Re}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}\left(\alpha\right)\right)\left(x-a\right)\left(y-b\right)i\\
-\operatorname{Im}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}\left(\alpha\right)\right)\frac{\left(x-a\right)^2}{2!}i+\cdots
\end{array}\right]
\end{aligned}
$$

Luego

$$
h\left(z\right)=\tfrac{1}{2}\left[\sum_{n=0}^{\infty}\tfrac{a_k}{k!}\left[\left(x-a\right)+\left(y-b\right)i\right]^k+\sum_{n=0}^{\infty}\tfrac{\overline{a_k}}{k!}\left[\left(x-a\right)-\left(y-b\right)i\right]^k\right]\in\mathbb{R}
$$

donde $a_o=h\left(\alpha\right)$, $a_k=\frac{1}{2}\frac{\partial^k f}{\partial z^k}\left(\alpha\right)$ en la primera serie y $a_k=\frac{1}{2}\overline{\frac{\partial^k f}{\partial z^k}\left(\alpha\right)}$ en la segunda serie.

Esta serie es una serie de potencias de $\left(x-a\right)$ y $\left(y-b\right)$ la cual es convergente en Δ, entonces para toda $\alpha\in U$, h puede ser representada por una serie de potencias convergente en alguna vecindad de α, luego h es analítica real en U.

Ahora utilicemos este hecho para probar el Principio de Identidad.

Sean h y k funciones armónicas en un dominio D en $\mathbb{C}$, tales que $h=k$ en un subconjunto abierto no vacio U de D.

Como h y k son armónicas en D entonces tienen desarrollo en series de

Taylor de la forma

$$h(z) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j (z-p)^j \in \mathbb{R} \qquad \text{y} \qquad k(z) = \sum_{j=0}^{\infty} b_j (z-p)^j \in \mathbb{R}$$

que convergen en un disco $D(p,r)$, $r > 0$ y $p \in D$.

Como $h(z) = k(z)$ en $D(p,r)$ entonces $a_j = b_j$ en $D(p,r)$ por la unicidad de la serie de potencias. Entonces existe una sucesión de puntos $z_1, z_2, ...$ en D tal que $\lim z_n \in D$, y

$$h(z_n) = k(z_n) \qquad \text{para } n = 1, 2, ...$$

luego por Principio de Identidad para funciones analíticas reales

$$h(z) = k(z) \qquad (\forall z \in D). \quad \blacksquare$$

5. $\blacksquare$ Pruebe que las únicas funciones armónicas en todo $\mathbb{C}_\infty$ son las constantes.

Prueba:

Sea $h : \mathbb{C}_\infty \longrightarrow \mathbb{R}$ armónica.

La función h es continua y $\mathbb{C}_\infty$ es compacto, entonces

$$(\exists w \in \mathbb{C}_\infty)(\forall z \in \mathbb{C}_\infty)(h(z) \le h(w)).$$

Caso 1:

Si $w \in \mathbb{C}$ entonces h tiene un máximo local en $\mathbb{C}$.

$$\therefore \quad h \text{ es constante en } \mathbb{C}$$

$$\therefore \quad h \text{ es constante en } \mathbb{C}_\infty. \qquad \text{(por continuidad)}.$$

Caso 2:

Si $w = \infty$, $h\left(\frac{1}{z}\right)$ es armónica en $\mathbb{D}$ y tiene un máximo local en 0.

Si $z \in \mathbb{D}^*$ entonces

$$h\left(\frac{1}{z}\right) \le h(\infty) = h\left(\frac{1}{0}\right).$$

$$\therefore \quad h\left(\frac{1}{z}\right) \text{ es constante en } \mathbb{D}.$$

$$\therefore \quad h \text{ es constante en } \{z / |z| \ge 1\}. \quad \text{(por continuidad)}.$$

Si $|z_1|, |z_2| > 1$ entonces $\frac{1}{z_1}, \frac{1}{z_2} \in \mathbb{D}$.

$$\therefore \quad h\left(\frac{1}{\frac{1}{z_1}}\right) = h\left(\frac{1}{\frac{1}{z_2}}\right)$$

$$\therefore \quad h(z_1) = h(z_2).$$

Luego h es constante en $\overline{\mathbb{D}}$,

$$\therefore \quad h \text{ es constante en } \mathbb{C}_\infty. \quad \blacksquare$$

1.2 El Problema de Dirichlet en el Disco

El problema de Dirichlet consiste en hallar una función armónica en un dominio con valores prescritos en la frontera. Una de las ventajas más grandes que tienen las funciones armónicas sobre las funciones holomorfas es que para cualquier dominio por fino que éste sea, existe una solución. Esta es una herramienta que tiene muchas aplicaciones.

Definición 1.2.1 *Sea D un subdominio de $\mathbb{C}$, y sea $\phi : \partial D \longrightarrow \mathbb{R}$ una función continua. El Problema de Dirichlet es hallar una función armónica h en D tal que $\lim_{z\to\zeta} h(z) = \phi(\zeta)$ para todo $\zeta \in \partial D$.*

Teorema 1.2.2 (Teorema de Unicidad)

Con la notación de la Definición 1.2.1, existe a lo más una solución al Problema de Dirichlet.

Prueba:

Supongamos que h_1 y h_2 son ambas soluciones. Entonces $h_1 - h_2$ es armónica en D y se extiende continuamente a $\overline{D}$, y es cero en ∂D. Aplicando el Principio del Máximo (Teorema 1.1.8 (b)) a $\pm(h_1 - h_2)$, concluimos que $h_1 - h_2 = 0$ y por lo tanto $h_1 = h_2$. $\blacksquare$

Nota: La existencia de la solución al Problema de Dirichlet no la podemos probar por ahora. Sin embargo veremos un caso especial, cuando D es un disco.

Definición 1.2.3

(a) *El* Kernel de poisson $P : \Delta(0,1) \times \partial\Delta(0,1) \longrightarrow \mathbb{R}$ *está definido* *por:*

$$P(z,\zeta) := \operatorname{Re}\left(\frac{\zeta+z}{\zeta-z}\right) = \frac{1-|z|^2}{|\zeta-z|^2} \qquad (|z|<1, \quad |\zeta|=1).$$

(b) *Si* $\Delta = \Delta(w,\rho)$ *y* $\phi : \partial\Delta \longrightarrow \mathbb{R}$ *es una función Lebesgue-integrable, entonces su* Integral de poisson $P_\Delta \phi : \Delta \longrightarrow \mathbb{R}$ *está definida por*

$$P_\Delta \phi(z) := \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P\left(\frac{z-w}{\rho}, e^{i\theta}\right)\phi\left(w+\rho e^{i\theta}\right)d\theta \quad (z\in\Delta).$$

Más explícitamente, si $0<r<\rho$ *y* $0\le t<2\pi$, *entonces:*

$$P_\Delta\phi\left(w+re^{it}\right) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\rho^2-r^2}{\rho^2-2\rho r\cos(\theta-t)+r^2}\phi\left(w+\rho e^{i\theta}\right)d\theta.$$

(*La función es integrable si la integral de los valores absolutos es acotada*).

Teorema 1.2.4 *Con la misma notación de la Definición 1.2.3*:

(a) $P_\Delta\phi$ *es armónica en* Δ;

(b) *Si la función* ϕ *es continua en* $\zeta_o \in \partial\Delta$, *entonces*

$$\lim_{z\to\zeta_o} P_\Delta\phi(z) = \phi(\zeta_o).$$

En particular, si ϕ *es continua en toda* $\partial\Delta$, *entonces* $h := P_\Delta\phi$ *resuelve el problema de Dirichlet en* Δ.

Prueba:

(a) Para el *caso* $w=0$, $\rho=1$ tenemos $\Delta = \Delta(0,1)$. Entonces para $z\in\Delta$,

$$\begin{aligned} P_\Delta\phi(z) : &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P\left(z,e^{i\theta}\right)\phi\left(e^{i\theta}\right)d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\operatorname{Re}\left(\frac{e^{i\theta}+z}{e^{i\theta}-z}\right)\phi\left(e^{i\theta}\right)d\theta \\ &= \operatorname{Re}\left[\overbrace{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{e^{i\theta}+z}{e^{i\theta}-z}\phi\left(e^{i\theta}\right)d\theta}^{\text{analítica en } z}\right] \end{aligned}$$

$$= \operatorname{Re}\left[\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\zeta|=1}\frac{\zeta+z}{\zeta-z}\phi(\zeta)\,\frac{d\zeta}{\zeta}\right]. \qquad \begin{pmatrix}\zeta = e^{i\theta}\\ d\zeta = ie^{i\theta}d\theta = i\zeta d\theta\end{pmatrix}.$$

Así que $P_\Delta\phi$ es la parte real de una función holomorfa de z, luego es armónica en Δ.

Ahora veamos que $P_\Delta\phi(z)$ es armónica en cualquier disco.

Sea $\Delta = \Delta(w,\rho)$.

Sean $\sigma : \partial\Delta \longrightarrow \mathbb{R}$ Lebesgue-integrable, $\nu \in \Delta$, $\lambda(z) = w + \rho z$ entonces $z = \frac{\lambda(z)-w}{\rho}$ y

$$\begin{aligned}
P_\Delta\sigma(\nu) &= \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} P\left(\frac{\nu-w}{\rho}, e^{i\theta}\right)\sigma\left(w+\rho e^{i\theta}\right)d\theta\\
&= \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} P\left(\lambda^{-1}(\nu), e^{i\theta}\right)(\sigma\circ\lambda)\left(e^{i\theta}\right)d\theta \ \left(\text{para } z = \frac{\nu-w}{\rho}\in\mathbb{D}\right)\\
&= P_\Delta(\sigma\circ\lambda)(z).
\end{aligned}$$

Luego $P_\Delta\sigma$ es armónica en Δ

$$\begin{aligned}
&\therefore \quad (P_\Delta\sigma)\circ\lambda(z) = P_\Delta(\sigma\circ\lambda)(z)\\
&\therefore \quad P_\Delta\sigma = P_\Delta(\sigma\circ\lambda)\circ\lambda^{-1}\\
&\therefore \quad \Delta(P_\Delta\sigma) = \Delta(P_\Delta(\sigma\circ\lambda))\circ\lambda^{-1}\left|\left(\lambda^{-1}\right)\right|^2.
\end{aligned}$$

Para probar la parte (b), probaremos primero un Lema acerca de Kernel de Poisson.

Lema 1.2.5 *El Kernel de Poisson P satisface*:

(i) $\quad P(z,\zeta) > 0 \qquad (|z|<1, \quad |\zeta|=1)$;

(ii) $\quad \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} P\left(z,e^{i\theta}\right)d\theta = 1 \qquad (|z|<1)$;

(iii) $\quad \sup_{|\zeta-\zeta_o|\geq\delta} P(z,\zeta) \longrightarrow 0$ *cuando* $z \longrightarrow \zeta_o$. $\qquad (|\zeta_o| = 1, \quad \delta > 0)$.

Prueba:

(i) Se sigue de la Definición de $P(z,\zeta)$.

(ii) Expresando la integral dada como una integral de contorno y usando la Fórmula de Cauchy para Integrales tenemos

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P\left(z,e^{i\theta}\right)d\theta &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \operatorname{Re}\left(\frac{e^{i\theta}+z}{e^{i\theta}-z}\right)d\theta \\
&= \operatorname{Re}\left(\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=1}\frac{\zeta+z}{\zeta-z}\frac{d\zeta}{\zeta}\right) \\
&= \operatorname{Re}\left(\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=1}\left(\frac{2}{\zeta-z}-\frac{1}{\zeta}\right)d\zeta\right) \\
&= \operatorname{Re}(2-1)=1.
\end{aligned}$$

(iii) $\sup_{|\zeta-\zeta_o|\geq 0} P(z,\zeta) \longrightarrow 0$ cuando $z\longrightarrow \zeta_o$ $\qquad (|\zeta_o|=1,\ \ \delta>0)$.

Sean $|\zeta_o|=1$ y $\delta>0$.

$$\lim_{z\longrightarrow\zeta_o}\ \sup_{|\zeta-\zeta_o|\geq\delta} P(z,\zeta)=0.$$

En efecto:

Sea z tal que $|z-\zeta_o|<\delta$.

$$P(z,\zeta)=\frac{1-|z|^2}{|\zeta-z|^2}\qquad \underbrace{\leq}\qquad \frac{1-|z|^2}{(\delta-|z-\zeta_o|)^2}$$

$$\downarrow$$

$$\begin{gathered}
|\zeta|=1,\ \ |z-\zeta_o|\geq\delta \\
|\zeta-\zeta_o|\geq\delta>|z-\zeta_o|
\end{gathered}$$

$$\begin{aligned}
|\zeta-z| &= |\zeta-\zeta_o-(z-\zeta_o)| \\
&\geq |\zeta-\zeta_o|-|z-\zeta_o| \\
&\geq \delta-|z-\zeta_o|.
\end{aligned}$$

Entonces

$$\sup_{|\zeta-\zeta_o|\geq\delta} P(z,\zeta)\leq\frac{1-|z|^2}{(\delta-|z-\zeta_o|)^2}\ \underset{\text{cuando } z\longrightarrow\zeta_o.}{\longrightarrow}\ \frac{1-|\zeta_o|^2}{\delta}=0. \quad \blacksquare$$

Prueba del Teorema 1.2.4 (b)

Caso $w=0,\ \ \rho=1.$

Sea $\epsilon>0$. Como

$$\phi(\zeta_o)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\phi(\zeta_o)\,P\left(z,e^{i\theta}\right)d\theta,$$

entonces

$$\begin{aligned}
&\left|\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P\left(z,e^{i\theta}\right)\phi\left(e^{i\theta}\right)d\theta-\phi\left(\zeta_o\right)\right|\\
=&\left|\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P\left(z,e^{i\theta}\right)\left(\phi\left(e^{i\theta}\right)-\phi\left(\zeta_o\right)\right)d\theta\right|\\
\leq&\ \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P\left(z,e^{i\theta}\right)\left|\left(\phi\left(e^{i\theta}\right)-\phi\left(\zeta_o\right)\right)\right|d\theta.
\end{aligned}$$

Por la continuidad de ϕ en ζ_o, existe $\delta>0$ tal que si $|\zeta-\zeta_o|<\delta$, entonces

$$|\phi(\zeta)-\phi(\zeta_o)|<\epsilon,$$

luego

$$\frac{1}{2\pi}\int_{|e^{i\theta}-\zeta_o|<\delta} P\left(z,e^{i\theta}\right)\left|\phi\left(e^{i\theta}\right)-\phi\left(\zeta_o\right)\right|d\theta\leq\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P\left(z,e^{i\theta}\right)\epsilon d\theta=\epsilon.$$

Puesto que dados $\delta>0$, $\zeta_o\in\partial\Delta$, $\lim\limits_{z\longrightarrow\zeta_o}\sup\limits_{|\zeta-\zeta_o|\geq\delta}P(z,\zeta)=0 \qquad (z\in\Delta)$,

existe $\delta'>0$ tal que si $|z-\zeta_o|<\delta'$, entonces

$$\sup_{|\zeta-\zeta_o|\geq\delta}P(z,\zeta)<\epsilon.$$

Así, si $|z-\zeta_o|<\delta'$ entonces

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2\pi}\int_{|e^{i\theta}-\zeta_o|\geq\delta} P\left(z,e^{i\theta}\right)\left|\phi\left(e^{i\theta}\right)-\phi\left(\zeta_o\right)\right|d\theta\\
<&\ \frac{1}{2\pi}\int_{|\zeta-\zeta_o|\geq\delta}\epsilon\left|\phi\left(e^{i\theta}\right)-\phi\left(\zeta_o\right)\right|d\theta \qquad \left(\zeta=e^{i\theta}\right)\\
\leq&\ \int_0^{2\pi}\frac{\epsilon}{2\pi}\left(\left|\phi\left(e^{i\theta}\right)\right|+\left|\phi\left(\zeta_o\right)\right|\right)d\theta\\
=&\ \epsilon k, \qquad \left(k=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(\left|\phi\left(e^{i\theta}\right)\right|+\left|\phi\left(\zeta_o\right)\right|\right)d\theta\right).
\end{aligned}$$

Caso $w\neq 0$ *ó* $\rho\neq 1$.

Sea $\sigma:\partial\Delta(\omega,\rho)\longrightarrow\mathbb{R}$ continua en $\nu_o=\omega+\rho e^{i\theta_o}\in\partial\Delta(\omega,\rho)$; llamemos $\nu=\omega+re^{i\theta}$, $0\leq r<\rho$, $0\leq\theta<2\pi$.

$$\begin{aligned} P_{\Delta}\sigma(\nu) &= P_{\Delta_o}(\sigma\circ\lambda)\circ\lambda^{-1}(\nu) \quad \begin{pmatrix} \lambda(z)=\omega+\rho z,\ \lambda^{-1}(\nu)=\frac{\nu-\omega}{\rho}, \\ \Delta_o=\Delta(0,1) \end{pmatrix} \\ &= P_{\Delta_o}(\sigma\circ\lambda)\left(\frac{\nu-\omega}{\rho}\right) \\ &= P_{\Delta_o}(\sigma\circ\lambda)\left(\frac{r}{\rho}e^{i\theta}\right). \end{aligned}$$

Pero $\nu\longrightarrow\nu_o$ si y sólo si $r\longrightarrow\rho$ y $\theta\longrightarrow\theta_o$. Entonces

$$P_{\Delta_o}(\sigma\circ\lambda)\left(\frac{r}{\rho}e^{i\theta}\right)\longrightarrow(\sigma\circ\lambda)\left(e^{i\theta_o}\right)\quad\text{cuando }\nu\longrightarrow\nu_o,$$

ya que $\sigma\circ\lambda$ es continua en $e^{i\theta_o}$.

Como $\lim\limits_{\nu\to\nu_o}\lambda^{-1}(\nu)=\frac{\nu_o-\omega}{\rho}=e^{i\theta_o}$,

$$\begin{aligned} \lim_{\nu\to\nu_o}P_{\Delta}\sigma(\nu) &= \lim_{z\to e^{i\theta_o}}P_{\Delta_o}(\sigma\circ\lambda)(z) \\ &= (\sigma\circ\lambda)\left(e^{i\theta_o}\right) \\ &= \sigma\left(\omega+\rho e^{i\theta_o}\right) \\ &= \sigma(\nu_\circ). \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Corolario 1.2.6 (Fórmula Integral de Poisson)

Si h es armónica en una vecindad abierta del disco $\overline{\Delta}(\omega,\rho)$, entonces para $r<\rho$ y $0\le t<2\pi$

$$h\left(\omega+re^{it}\right)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\rho^2-r^2}{\rho^2-2\rho r\cos(\theta-t)+r^2}h\left(\omega+\rho e^{i\theta}\right)d\theta.$$

Prueba:

Consideremos el Problema de Dirichlet en $\Delta:=\Delta(\omega,\rho)$ con $\varphi:=h\,|_{\partial\Delta}$.

Por el Teorema 1.2.4, $P_{\Delta}h$ y $h\equiv P_{\Delta}\varphi$ son soluciones para el problema. Por el Teorema 1.2.2, $h=P_{\Delta}h$ en Δ.

De donde

$$h\left(\omega+re^{it}\right)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}P\left(\frac{re^{i\theta}}{\rho},e^{i\theta}\right)\varphi\left(\omega+\rho e^{i\theta}\right)d\theta. \quad \blacksquare$$

Nota: Si $r = 0$

$$h(\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\rho^2}{\rho^2} h\left(\omega + \rho e^{i\theta}\right) d\theta.$$

Teorema 1.2.7 (Propiedad Recíproca del Valor Medio)

Sea $h : U \longrightarrow R$ una función continua en un subconjunto abierto U de $\mathbb{C}$. Supongamos que h posee la Propiedad Local del Valor Medio, esto es, dado $\omega \in U$, existe $\rho > 0$ tal que

$$h(\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} h\left(\omega + re^{i\theta}\right) dt \qquad (0 \leq r < \rho).$$

Entonces h es armónica en D.

Prueba:

Es suficiente probar que h es armónica en cada disco abierto $\Delta := \Delta(\omega, \rho)$ con $\overline{\Delta} \subset U$.

Fijemos un Δ y definamos $K : \overline{\Delta} \longrightarrow \mathbb{R}$ por

$$K = \begin{cases} h - P_\Delta h, & \text{en } \Delta, \\ 0, & \text{en } \partial\Delta, \end{cases}$$

luego K es continua en Δ. Veamos que es continua en $\partial\Delta$.

Sea $\xi \in \partial\Delta$.

Tomemos $z_n \in \overline{\Delta}$ tal que $z_n \longrightarrow \xi$

$$K(z_n) = \begin{cases} h(z_n) - P_\Delta h(z_n) \underset{n\longrightarrow\infty}{\longrightarrow} 0 & \text{si } z_n \in \Delta, \\ 0 & \text{si } z_n \in \partial\Delta \end{cases}$$

Sean $A = \{n / z_n \in \Delta\}$ y $B = \{n / z_n \in \partial\Delta\}$.

Si B es infinito, sea $B = \{n_1, n_2, \ldots\}$ (con n_r creciente)

$$\therefore \lim_{r\to\infty} K(z_{n_r}) = 0 = K(\xi).$$

Si A es infinito, entonces digamos que

$$A = \{n_1, n_2, \ldots\} \qquad (\text{con } n_r \text{ creciente}).$$

Como $\lim_{r\to\infty} z_{n_r} = \xi$ entonces de $K(z_{n_r}) = h(z_{n_r}) - P_\Delta h(z_{n_r})$ se concluye que $\lim_{r\to\infty} K(z_{n_r}) = 0$. Luego $\lim_{n\to\infty} K(z_n) = 0 = K(\xi)$.

Como $\overline{\Delta}$ es compacto existe $M = \max_{z\in\overline{\Delta}} K(z)$.

Veamos que K tiene la Propiedad del Valor Medio.

Sea $z \in \Delta$ y $\rho_o > 0$ tal que $\overline{\Delta}(z,\rho_o) \subseteq \Delta$. Como h cumple la propiedad local del valor medio, existe $\rho_o > 0$ tal que

$$h(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} h\left(z + re^{i\theta}\right) d\theta \qquad (0 \leq r < \rho_o).$$

En particular:

$$h(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} h\left(z + re^{i\theta}\right) d\theta \quad (0 \leq r \leq \rho_1,\ \rho_1 = \min\{\rho_o,\ \rho - |z-\omega|\}).$$

Como $P_\Delta h$ es armónica en una vecindad abierta de $\overline{\Delta}(z,r)$, $0 \leq r \leq \rho$, con r fijo, entonces se satisface:

$$P_\Delta h(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P_\Delta\left(z + re^{i\theta}\right) d\theta \qquad \text{(Propiedad del Valor Medio)}.$$

Así:

$$\begin{aligned} K(z) &= h(z) - P_\Delta h(z) \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \left(h\left(z + re^{i\theta}\right) - P_\Delta h\left(z + re^{i\theta}\right)\right) d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} K\left(z + re^{i\theta}\right) d\theta. \end{aligned}$$

Definamos:

$$\begin{aligned} A &: = \{z \in \Delta : K(z) < M\} = K^{-1}(-\infty, M), \\ B &: = \{z \in \Delta : K(z) = M\}, \\ \Delta &: = A \cup B. \end{aligned}$$

Entonces A es abierto en Δ.

Veamos que B es abierto.

Tomemos $z \in B$. Como K cumple la propiedad local del valor medio en Δ, entonces existe $\rho_1 > 0$ tal que

$$K(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} K\left(z + re^{i\theta}\right) d\theta \qquad (0 \leq r < \rho_1).$$

Sea $\nu \in \Delta(z, \rho_1)$. Entonces

$$\nu = z + re^{i\theta} \qquad (0 \leq r \leq \rho_1, \quad 0 \leq \theta < 2\pi).$$

Si $K(\nu) < M$, por la continuidad de K, existe $\rho_2 > 0$ tal que

$$K(u) < M \quad \forall u \in \Delta(\nu, \rho_2) \quad \text{con} \quad \Delta(\nu, \rho_2) \leq \Delta(z, \rho_1).$$

Consideremos la circunferencia de centro z y radio $r = |\nu - z|$.

Sea $\left\{z + re^{i\theta}/\theta \in [\theta_1, \theta_2]\right\}$ la parte de $\partial\Delta(z, r)$ que está dentro de $\Delta(\nu, \rho_2)$.

Sean $z + re^{i\theta_1}$, $z + re^{i\theta_2}$ los puntos de corte de $|\xi - z| = r$ y $|\xi - \nu| = \rho_2$.

Entonces

$$\begin{aligned}
M &= K(z) \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} K\left(z + re^{i\theta}\right) d\theta \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{\theta_1}^{\theta_1 + 2\pi} K\left(z + re^{i\theta}\right) d\theta \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{\theta_1}^{\theta_2} K\left(z + re^{i\theta}\right) d\theta + \frac{1}{2\pi} \int_{\theta_2}^{\theta_1 + 2\pi} K\left(z + re^{i\theta}\right) d\theta \\
&< \frac{1}{2\pi} \int_{\theta_1}^{\theta_2} M d\theta + \frac{1}{2\pi} \int_{\theta_2}^{\theta_1 + 2\pi} M d\theta \\
&= \frac{M}{2\pi} \left[(\theta_2 - \theta_1) + (\theta_1 + 2\pi - \theta_2)\right] \\
&= M.
\end{aligned}$$

Lo cual es una contradicción.

Luego $K(\nu) = M \quad \forall \nu \in \Delta(z, \rho_1)$, por consiguiente $\Delta(z, \rho_1) \subseteq B$, o sea que B es abierto.

Como A y B son disjuntos y Δ es conexo, entonces $A = \Delta$ ó $B = \Delta$.

Si $A = \Delta$ entonces $K(z) < M \quad \forall z \in \Delta$; y como $K(\xi) = 0$ para $\xi \in \partial\Delta$, entonces $M = 0$.

Luego

$$K(z) \leq 0 \quad \forall z \in \overline{\Delta}.$$

Haciendo un razonamiento igual con

$$J(z) = \begin{cases} P_\Delta h - h, & \text{en } \Delta, \\ 0, & \text{en } \partial\Delta, \end{cases}$$

llegamos a que $J(z) \leq 0 \quad \forall z \in \overline{\Delta}$.

$$\therefore \quad P_\Delta h = h \quad \text{en } \overline{\Delta}$$

$$\therefore \quad h \text{ es armónica en } \Delta. \quad \blacksquare$$

Corolario 1.2.8 *Si $(h_n)_{n\geq 1}$ es una sucesión de funciones armónicas en D, localmente, uniformemente convergente a una función h, entonces h es también armónica en D.*

Prueba:

Veamos que h cumple la Propiedad Local del Valor Medio.

Sea $\omega \in \Delta$. Existe $\rho > 0$ tal que $\Delta(\omega, \rho) \subseteq D$.

Sea r tal que $0 \leq r < \rho$.

Entonces

$$h_n(\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} h_n\left(\omega + re^{i\theta}\right) d\theta \qquad \left(\begin{array}{l} h_n \text{ es convergente y cumple la} \\ \text{Propiedad del valor Medio en} \\ \overline{\Delta}(\omega, r). \end{array}\right).$$

De donde

$$\lim_{n\to\infty} h_n(\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \lim_{n\to\infty} h_n\left(\omega + re^{i\theta}\right) d\theta \quad \left(\begin{array}{l} h_n \text{ es uniformemente con-} \\ \text{vergente sobre compactos.} \end{array}\right).$$

$$\therefore \ h(\omega) = \int_0^{2\pi} h\left(\omega + re^{i\theta}\right) d\theta.$$

Luego h es armónica. $\blacksquare$

Teorema 1.2.9 (Principio de Reflexión)

Sean $\Delta = \Delta(0, R)$,

$$\begin{aligned} \Delta^+ &= \{z \in \Delta : \operatorname{Im} z > 0\} \quad y \\ I &= \{z \in \Delta : \operatorname{Im} z = 0\}. \end{aligned}$$

Supongamos que f es una función holomorfa en Δ^+ tal que $\operatorname{Re} f$ se extiende continuamente a $\Delta^+ \cup I$, con $\operatorname{Re} f = 0$ en I. Entonces f se extiende holomorfamente a todo Δ.

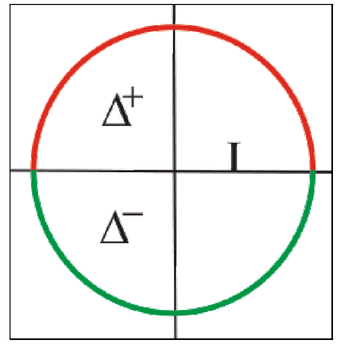


Figura 3

Prueba:

Definamos $h : \Delta \longrightarrow \mathbb{R}$ por

$$h(z) := \begin{cases} \operatorname{Re} f(z), & \text{si } \; z \in \Delta^+, \\ 0, & \text{si } \; z \in I, \\ \text{-}\operatorname{Re} f(\overline{z}), & \text{si } \; \overline{z} \in \Delta^+. \end{cases}$$

h es continua en Δ^+.

h es continua en $\Delta^- = \{\overline{z}/z \in \Delta^+\} = \{z \in \Delta : \operatorname{Im} z < 0\}$, puesto que es composición de funciones continuas.

Sean $z_o \in I$ y $z_n \in \Delta$ tal que $z_n \longrightarrow z_o$.

Llamemos

$$\begin{aligned} A &= \{n/z_n \in \Delta^+\}, \\ B &= \{n/z_n \in \Delta^-\}, \\ C &= \{n/z_n \in I\}. \end{aligned}$$

Si A o B son infinitos, cada uno define una subsucesión, digamos z_{n_k} y z_{m_k}. Entonces

$$\begin{aligned} h(z_{n_k}) &= \operatorname{Re} f(z_{n_k}) \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} \operatorname{Re} f(z_o) = 0. \\ h(z_{m_k}) &= -\operatorname{Re} f(\overline{z_{m_k}}) \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} -\operatorname{Re} f(\overline{z_o}) = 0. \\ \therefore \quad & \lim_{n\to\infty} h(z_n) = 0. \end{aligned}$$

Así h es continua en todo Δ.

Veamos que h tiene la Propiedad del Valor Medio en Δ.

Sea $z \in \Delta$.

(i) Si $z \in \Delta^+$, entonces, existe $\rho > 0$ tal que $\overline{\Delta}(z,\rho) \leq \Delta^+$.

$h\big|_{\Delta(z,\rho)} = \operatorname{Re} f$, que cumple la Propiedad Local del Valor Medio.

(ii) Si $z \in \Delta^-$ entonces $\overline{z} \in \Delta^+$.

Por (i), existe $\rho > 0$ tal que $\forall r : 0 \leq r < \rho$,

$$h(\overline{z}) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} h\left(\overline{z} + re^{it}\right) dt.$$

(Podemos tomar $\Delta(\overline{z}, \rho) \subseteq \Delta^+$).

Como $\overline{z} \in \Delta^+$, $h(\overline{z}) = \operatorname{Re} f(\overline{z})$ y $\overline{z} + re^{it} \in \Delta^+$; entonces

$$h\left(\overline{z} + re^{it}\right) = \operatorname{Re} f\left(\overline{z} + re^{it}\right).$$

Luego

$$\operatorname{Re} f(\overline{z}) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \operatorname{Re} f\left(\overline{z} + re^{it}\right) dt.$$

$$\therefore \quad -\operatorname{Re} f(\overline{z}) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} -\operatorname{Re} f\left(\overline{z} + re^{it}\right) dt$$

$$\therefore \quad h(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} h\left(\overline{z} + re^{-it}\right) dt.$$

Sea $u = -t + 2\pi$. Entonces

$$\begin{aligned} h(z) &= -\frac{1}{2\pi} \int_{2\pi}^{0} h\left(z + re^{i(u-2\pi)}\right) du \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} h\left(z + re^{iu}\right) du. \end{aligned}$$

Así, h cumple la Propiedad del Valor Medio en Δ^-.

(iii) Sea $z \in I$; entonces $h(z) = 0$.

Sea $\rho > 0$ tal que $\overline{\Delta}(z, \rho) \subseteq \Delta$. Tomemos $0 \leq r < \rho$.

Entonces

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} h\left(z + re^{it}\right) dt &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} h\left(z + re^{it}\right) dt + \frac{1}{2\pi} \int_{\pi}^{2\pi} h\left(z + re^{it}\right) dt. \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} \operatorname{Re} f\left(z + re^{it}\right) dt + \frac{1}{2\pi} \int_{\pi}^{2\pi} -\operatorname{Re} f\left(\overline{z} + re^{-it}\right) dt. \end{aligned}$$

Ahora:

$$\begin{aligned}
\int_{\pi}^{2\pi} \operatorname{Re} f\left(\overline{z} + re^{-it}\right) dt &= \int_{\pi}^{2\pi} \operatorname{Re} f\left(z + re^{-it}\right) dt \\
&= \int_{-\pi}^{-2\pi} -\operatorname{Re} f\left(z + re^{i\theta}\right) d\theta \qquad (\theta = -t) \\
&= \int_{\pi}^{0} -\operatorname{Re} f\left(z + re^{i(\theta - 2\pi)}\right) du \quad (u = \theta + 2\pi) \\
&= \int_{\pi}^{0} -\operatorname{Re} f\left(z + re^{i\theta}\right) du \\
&= \int_{0}^{\pi} \operatorname{Re} f\left(z + re^{i\theta}\right) du.
\end{aligned}$$

$$\therefore\ \frac{1}{2\pi} \int_{0}^{2\pi} h\left(z + re^{it}\right) dt = 0 = h(z).$$

Entonces por el Teorema 1.2.7, h es armónica en Δ.

Como Δ es simplemente conexo, existe $\widetilde{f} : \Delta \longrightarrow \mathbb{C}$ analítica tal que $h = \operatorname{Re} \widetilde{f}$.

Ahora $f - \widetilde{f}$ es analítica en Δ^{+},

$$\operatorname{Re}\left(f - \widetilde{f}\right) = \operatorname{Re} f - \operatorname{Re} \widetilde{f} = h - h = 0,$$

entonces $f - \widetilde{f} = c \in \mathbb{C}$ es imaginario puro.

Llamemos $g = \widetilde{f} + c$. Entonces g es analítica en Δ y $f - g \equiv 0$ en Δ^{+}, luego $f \equiv g$ en Δ. ■

Ejercicios 1.2

1. Sea $\Delta = \Delta(0,1)$; definamos $\phi : \partial\Delta \longrightarrow \mathbb{C}$ por $\phi(\zeta) = \overline{\zeta}$. Pruebe que no existe una función f holomorfa en Δ tal que $\lim_{z \to \zeta} f(z) = \phi(\zeta)$ para todo $\zeta \in \partial\Delta$. [Así la versión holomorfa del Problema de Dirichlet en el disco puede no tener solución].

2. (i) Pruebe que el Kernel de Poisson está dado por
$$P\left(re^{it}, e^{i\theta}\right) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} r^{|n|} e^{in(t-\theta)} \qquad (r < 1,\ 0 \le t,\ \theta < 2\pi).$$

Use este hecho para dar una prueba alternativa del Lema 1.2.5 (ii).

(ii) Pruebe que si $\phi : \partial\Delta(0,1) \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función integrable, entonces

$$P_\Delta\phi\left(re^{it}\right) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n r^{|n|} e^{int} \quad (r < 1,\ 0 \le t < 2\pi),$$

donde $(a_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ es una sucesión acotada de números reales.

(iii) Asumamos ahora que ϕ es continua y que $\phi_r\left(e^{it}\right) = P_\Delta\phi\left(re^{it}\right)$. Pruebe que $\phi_r \longrightarrow \phi$ uniformemente en $\partial\Delta(0,1)$ cuando $r \longrightarrow 1$, y deduzca que $\phi\left(e^{it}\right)$ puede ser aproximada uniformemente por polinomios trigonométricos de la forma $\sum_{-N}^{N} b_n e^{int}$.

3. Sea $(h_n)_{n\ge 1}$ una sucesión de funciones armónicas en un dominio D localmente, uniformemente convergente a una función armónica h. Pruebe que $(h_n)_x$ y $(h_n)_y$ convergen localmente, uniformemente a h_x y h_y respectivamente.

4. Pruebe que si f es holomorfa en una vecindad de $\overline{\Delta}(0,\rho)$, y $h = \operatorname{Re} f$, entonces

$$f(z) - f(0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{2z}{\rho e^{i\theta} - z} h\left(\rho e^{i\theta}\right) d\theta \quad (|z| < \rho).$$

5. Pruebe que la extensión holomorfa $\widetilde{f}$ de f en el Principio de Reflexión (Teorema 1.2.9) está dada por

$$\widetilde{f}(\overline{z}) = -\overline{f(z)} \qquad \left(\overline{z} \in \Delta^+\right).$$

Ejercicios Resueltos 1.2

1. ■ Sea $\Delta = \Delta(0,1)$; definamos $\phi : \partial\Delta \longrightarrow \mathbb{C}$ por $\phi(\zeta) = \overline{\zeta}$. Pruebe que no existe una función f holomorfa en Δ tal que $\lim_{z\to\zeta} f(z) = \phi(\zeta)$ para todo $\zeta \in \partial\Delta$. [Así la versión holomorfa del Problema de Dirichlet en el disco puede no tener solución.]

Prueba:

Supongamos que existe f holomorfa en Δ tal que

$$\lim_{z\to\zeta} f(z) = \phi(\zeta) \qquad (\forall\zeta \in \partial\Delta).$$

Entonces $h = \operatorname{Re} f$ es armónica en Δ y satisface

$$\lim_{z\longrightarrow\zeta} h(z) = \lim_{z\longrightarrow\zeta} \operatorname{Re} f = \operatorname{Re}\phi(\zeta) \qquad (\operatorname{Re}\phi \text{ es continua en } \partial\Delta).$$

Llamemos g la función analítica definida por $g(z) = z$ para toda $z \in \Delta$.

Entonces $u = \operatorname{Re} g$ es armónica en Δ y satisface

$$\lim_{z\longrightarrow\zeta} u(z) = \lim_{z\longrightarrow\zeta} \operatorname{Re} g(z) = \lim_{z\longrightarrow\zeta} \operatorname{Re} z = \operatorname{Re}\zeta = \operatorname{Re}\overline{\zeta}.$$

Por la unicidad en la solución al Problema de Dirichlet en Δ, $u \equiv h \in \Delta$.

$$\therefore \quad \operatorname{Re} g = \operatorname{Re} f \text{ en } \Delta.$$
$$\therefore \quad \operatorname{Re}(g - f) \equiv 0 \text{ en } \Delta.$$
$$\therefore \quad g - f \text{ es constante en } \Delta.$$

Existe C imaginario puro tal que $g - f = C$ en Δ.

$$\therefore \quad g(z) = f(z) + C \qquad (\forall z \in \Delta)$$
$$\therefore \quad f(z) = z - C \qquad (\forall z \in \Delta)$$
$$\therefore \quad \lim_{z \longrightarrow \zeta} f(z) = \lim_{z \longrightarrow \zeta} z - C = \zeta - C.$$

Pero

$$\lim_{z \longrightarrow \zeta} f(z) = \phi(\zeta) = \overline{\zeta}.$$

De donde

$$\overline{\zeta} = \zeta - C \qquad (\forall \zeta \in \partial\Delta).$$

En particular para $\zeta = 1$

$$1 = 1 - C,$$
$$\therefore \quad C = 0.$$

Luego $f(z) = z$. Y entonces $\lim_{z \longrightarrow \zeta} f(z) = \zeta$.

Pero

$$\lim_{z \longrightarrow \zeta} f(z) = \overline{\zeta},$$

lo cual es una contradicción. ■

2. ■ (i) Pruebe que el Kernel de Poisson está dado por

$$P\left(re^{it}, e^{i\theta}\right) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} r^{|n|} e^{in(t-\theta)} \qquad (r < 1,\ 0 \leq t,\ \theta < 2\pi).$$

Use este hecho para dar una prueba alternativa del Lema 1.2.5 (ii).

(ii) Pruebe que si $\phi : \partial\Delta(0,1) \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función integrable, entonces

$$P_\Delta \phi\left(re^{it}\right) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n r^{|n|} e^{int} \quad (r < 1,\ 0 \leq t < 2\pi),$$

donde $(a_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ es una sucesión acotada de números reales.

(iii) Asumamos ahora que ϕ es continua y que $\phi_r\left(e^{it}\right) = P_\Delta \phi\left(re^{it}\right)$. Pruebe que $\phi_r \longrightarrow \phi$ uniformemente en $\partial\Delta(0,1)$ cuando $r \longrightarrow 1$, y deduzca que $\phi\left(e^{it}\right)$ puede ser aproximada uniformemente por polinomios trigonométricos de la forma $\sum_{-N}^{N} b_n e^{int}$.

Prueba:

(i)

$$P\left(re^{it}, e^{i\theta}\right) = \operatorname{Re}\left(\frac{e^{i\theta} + re^{it}}{e^{i\theta} - re^{it}}\right)$$

Sea $z = re^{it}$.

Entonces

$$\begin{aligned}
\frac{e^{i\theta}+z}{e^{i\theta}-z} &= \frac{e^{i\theta}+z}{e^{i\theta}}\left[\frac{1}{1-e^{-i\theta}z}\right] \\
&= \left(e^{i\theta}+z\right)e^{-i\theta}\sum_{n=0}^{\infty}\left(e^{-i\theta}z\right)^n \\
&= \left(e^{i\theta}+z\right)e^{-i\theta}\sum_{n=0}^{\infty}e^{-in\theta}z^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}e^{-in\theta}z^n + \sum_{n=0}^{\infty}e^{-i(n+1)\theta}z^{n+1} \\
&= \sum_{n=-1}^{\infty}e^{-i(n+1)\theta}z^{n+1} + \sum_{n=0}^{\infty}e^{-i(n+1)\theta}z^{n+1} \\
&= 1+\sum_{n=0}^{\infty}2e^{-i(n+1)\theta}z^{n+1} \\
&= 1+\sum_{n=1}^{\infty}2e^{-in\theta}z^{n} \\
&= 1+\sum_{n=1}^{\infty}2e^{-in\theta}r^{n}e^{int} \\
&= 1+\sum_{n=1}^{\infty}2r^{n}e^{in(t-\theta)}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sum_{n\in\mathbb{Z}} r^{|n|}e^{in(t-\theta)} &= 1+\sum_{n=1}^{\infty}r^n e^{in(t-\theta)} + \sum_{n=-\infty}^{-1}r^{-n}e^{in(t-\theta)} \\
&= 1+\sum_{n=1}^{\infty}r^n e^{in(t-\theta)} + \sum_{n=1}^{\infty}r^{n}e^{-in(t-\theta)} \\
&= 1+\sum_{n=1}^{\infty}r^n \cdot 2\,\mathrm{Re}\, e^{in(t-\theta)} \\
&= \mathrm{Re}\left[1+\sum_{n=1}^{\infty}2r^n e^{in(t-\theta)}\right] \quad \left(e^{ix}+e^{-ix}=2\,\mathrm{Re}\, e^{ix}\right).
\end{aligned}$$

Prueba alternativa de 1.2.5 (ii).

La serie $\sum_{n\in\mathbb{Z}} r^{|n|}e^{in(t-\theta)}$ es acotada, por el Criterio M de Weirstrass. Entonces podemos intercambiar la suma con la integral, luego

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P\left(re^{it},e^{i\theta}\right)d\theta &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\sum_{n\in\mathbb{Z}} r^{|n|}e^{in(t-\theta)}d\theta \\
&= \frac{1}{2\pi}\sum_{n\in\mathbb{Z}}\int_0^{2\pi} r^{|n|}e^{in(t-\theta)}d\theta \quad \left(\begin{array}{l}\text{Por la convergencia}\\ \text{uniforme.}\end{array}\right) \\
&= \frac{1}{2\pi}\sum_{n\in\mathbb{Z}}\int_0^{2\pi} r^{|n|}\left(\cos\left(n\left(t-\theta\right)\right)+i\operatorname{sen}\left(n\left(t-\theta\right)\right)\right)d\theta. \\
&= 1. \quad \blacksquare
\end{aligned}$$

(ii)

$$\begin{aligned}
P_\Delta\phi\left(re^{it}\right) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P\left(re^{it},e^{i\theta}\right)\phi\left(e^{i\theta}\right)d\theta \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\sum_{n\in\mathbb{Z}} r^{|n|}e^{in(t-\theta)}\phi\left(e^{i\theta}\right)d\theta \\
&= \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n r^{|n|}e^{int}, \text{ para } a_n = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{-in\theta}\phi\left(e^{i\theta}\right)d\theta,
\end{aligned}$$

por el Teorema de la Convergencia Dominada:

$$\begin{aligned}
\left|\sum_{k=-n}^{n} r^{|k|}e^{ik(t-\theta)}\phi\left(e^{i\theta}\right)\right| &\leq \sum_{k=-n}^{n} r^{|k|}\left|\phi\left(e^{i\theta}\right)\right| \\
&\leq \left|\phi\left(e^{i\theta}\right)\right| 2\sum_{k=1}^{\infty} r^k \\
&\leq \frac{2\left|\phi\left(e^{i\theta}\right)\right|}{1-r}. \quad (\text{integrable para } \theta\in[0,2\pi])
\end{aligned}$$

(iii) Sean $\Delta := (0,1)$ y

$$F(z) := \begin{cases} P_\Delta\phi(z) & \text{si } z = re^{i\theta},\ 0\leq r<1, \\ \phi(z) & \text{si } z = e^{it}. \end{cases}$$

Como $P_\Delta\phi(z) \longrightarrow \phi(z_o)$ cuando $z \longrightarrow z_o \in \partial\Delta$, entonces F es continua en $\overline{\Delta}$, luego F es uniformemente continua en $\overline{\Delta}$.

Dado $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que si $z, w \in \overline{\Delta}$

$$|z-w| < \delta \Longrightarrow |F(z) - F(w)| < \epsilon.$$

Sea r tal que $1-\delta < r < 1$. Si $t \in [0,2\pi]$,

$$\left|\phi_r\left(e^{it}\right) - \phi\left(e^{it}\right)\right| = \left|F\left(re^{it}\right) - F\left(e^{it}\right)\right| < \epsilon,$$

puesto que $\phi_r\left(e^{it}\right) = P_\Delta\phi\left(re^{it}\right) = F\left(re^{it}\right)$ y $\left|re^{it} - e^{it}\right| = 1 - r < \delta$.

Luego ϕ_r converge uniformemente a ϕ en $\partial\Delta$ cuando $r \longrightarrow 1^-$. ■

3. ■ Sea $(h_n)_{n\geq 1}$ una sucesión de funciones armónicas en un dominio D localmente, uniformemente convergente a una función armónica h. Pruebe que $(h_n)_x$ y $(h_n)_y$ convergen localmente, uniformemente a h_x y h_y respectivamente.

Prueba:

Como h_n es armónica y $h_n \longrightarrow h$, localmente, uniformemente, entonces por el Corolario 1.2.8 h es armónica; además h_n armónica implica que $(h_n)_x - i\,(h_n)_y$ es analítica y h armónica implica que $h_x - ih_y$ es analítica.

$$\left.\begin{array}{lcll} h_{n_x} & \longrightarrow & h_x & \text{puntualmente} \\ h_{n_y} & \longrightarrow & h_y & \text{puntualmente} \end{array}\right\} \Longrightarrow \underbrace{h_{n_x} - ih_{n_y}}_{\text{Analítica.}}$$

$$h\left(x,y\right) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\left[\rho^2 - \left(x^2+y^2\right)\right] h\left(\rho e^{i\theta}\right) d\theta}{\rho^2 - 2\rho\sqrt{x^2+y^2}\cos\left(\theta - \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)\right) + x^2 + y^2},$$

donde $x = r\cos t$ y $y = r\,\mathrm{sen}\,t$.

Sea

$$\varphi\left(x,y\right) = \frac{\rho^2 - \left(x^2+y^2\right)}{\rho^2 - 2\rho\sqrt{x^2+y^2}\cos\left(\theta - \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)\right) + x^2 + y^2},$$

entonces

$$\begin{aligned} h_n\left(x,y\right) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \varphi\left(x,y\right) h_n\left(\rho e^{i\theta}\right) d\theta \\ h_{n_x}\left(x,y\right) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \varphi_x\left(x,y\right) h_n\left(\rho e^{i\theta}\right) d\theta \end{aligned}$$

y

$$h_x\left(x,y\right) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \varphi_x\left(x,y\right) h\left(\rho e^{i\theta}\right) d\theta.$$

Así, para $\varepsilon > 0$

$$\begin{aligned} \left|h_{n_x}\left(x,y\right) - h_x\left(x,y\right)\right| &\leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \left|\varphi_x\left(x,y\right)\right| \left|\left(h_n - h\right)\left(\rho e^{i\theta}\right)\right| d\theta \\ &< \frac{\epsilon}{2\pi}\int_0^{2\pi} \left|\varphi_x\left(x,y\right)\right| d\theta, \quad \left(\varphi_x\left(x,y\right) \text{ es acotada}\right) \end{aligned}$$

si $\left|\left(h_n - h\right)\left(\rho e^{i\theta}\right)\right| < \epsilon$.

En forma similar se prueba para h_{n_y}. $\blacksquare$

4. $\blacksquare$ Pruebe que si f es holomorfa en una vecindad de $\overline{\Delta}(0,\rho)$, y $h = \operatorname{Re} f$, entonces

$$f(z) - f(0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{2z}{\rho e^{i\theta} - z} h\left(\rho e^{i\theta}\right) d\theta \qquad (|z| < \rho).$$

Prueba:

Sea $h = \operatorname{Re} f$. Entonces h es armónica en una vecindad de $\overline{\Delta}(0,\rho)$. Por La Fórmula Integral de Poisson para funciones armónicas tenemos que:

$$h\left(0 + re^{it}\right) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\rho^2 - r^2}{\rho^2 - 2r\rho\cos(\theta - t) + r^2} h\left(\rho e^{i\theta}\right) d\theta. \quad (0 \le r < \rho)$$

De donde

$$\begin{aligned}
\operatorname{Re} f\left(re^{i\theta}\right) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P\left(\frac{z}{\rho}, e^{i\theta}\right) h\left(\rho e^{i\theta}\right) d\theta \qquad \left(z = re^{it}\right)\\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \operatorname{Re}\left(\frac{e^{i\theta} + \frac{z}{\rho}}{e^{i\theta} - \frac{z}{\rho}}\right) h\left(\rho e^{i\theta}\right) d\theta\\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \operatorname{Re}\left(\frac{\rho e^{i\theta} + z}{\rho e^{i\theta} - z}\right) h\left(\rho e^{i\theta}\right) d\theta\\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \operatorname{Re}\left(\frac{2z}{\rho e^{i\theta} - z} + 1\right) h\left(\rho e^{i\theta}\right) d\theta\\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \left[1 + \operatorname{Re}\left(\frac{2z}{\rho e^{i\theta} - z}\right)\right] h\left(\rho e^{i\theta}\right) d\theta\\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} h\left(\rho e^{i\theta}\right) d\theta + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \operatorname{Re}\left(\frac{2z}{\rho e^{i\theta} - z}\right) h\left(\rho e^{i\theta}\right) d\theta
\end{aligned}$$

Sea $\zeta = \rho e^{i\theta}$ entonces $d\zeta = \rho i e^{i\theta} d\theta = i\zeta d\theta$. Así

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \operatorname{Re} f\left(\rho e^{i\theta}\right) d\theta + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \operatorname{Re}\left(\frac{2z}{\rho e^{i\theta} - z}\right) h\left(\rho e^{i\theta}\right) d\theta\\
= \;& \operatorname{Re}\left(\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta| = \rho} \frac{f(\zeta)}{\zeta} d\zeta\right) + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \operatorname{Re}\left(\frac{2z}{\rho e^{i\theta} - z}\right) h\left(\rho e^{i\theta}\right) d\theta
\end{aligned}$$

$$= \operatorname{Re} f(0) + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \operatorname{Re}\left(\frac{2z}{\rho e^{i\theta} - z}\right) h\left(\rho e^{i\theta}\right) d\theta,$$

de donde

$$\operatorname{Re} f\left(re^{i\theta}\right) - \operatorname{Re} f(0) - \operatorname{Re}\left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{2z}{\rho e^{i\theta} - z} h\left(\rho e^{i\theta}\right) d\theta\right) = 0.$$

Luego la función holomorfa

$$f(z) - f(0) - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{2z}{\rho e^{i\theta} - z} h\left(\rho e^{i\theta}\right) d\theta$$

es constante. Haciendo $z = 0$, vemos que esta constante es 0. ■

5. ■ Pruebe que la extensión holomorfa $\widetilde{f}$ de f en el Principio de Reflexión (Teorema 1.2.9) está dada por

$$\widetilde{f}(\overline{z}) = -\overline{f(z)} \qquad \left(\overline{z} \in \Delta^+\right).$$

Prueba:

Sea

$$g(z) = \begin{cases} f(z) & \text{si} \quad z \in \Delta^+ \cup I, \\ -\overline{f(\overline{z})} & \text{si} \quad z \in \Delta^-. \end{cases}$$

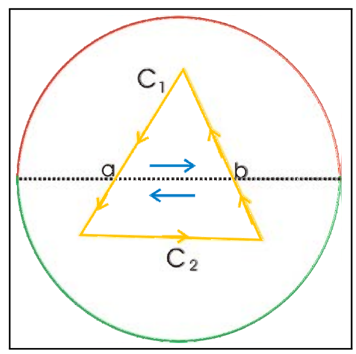


Figura 4

Las funciones $-\overline{f(\overline{z})}$ y $\widetilde{f}(z)$ coinciden en I. En efecto, si $z \in I$, $\overline{z} = z$ y $\operatorname{Re} f(z) = 0$

$$\therefore \quad f(z) = ic, \text{ con } c \in \mathbb{R}$$

$$\therefore \quad \overline{f(\overline{z})} = \overline{ic} = -ic$$

$$\therefore \quad g(z) = ic = f(z) = \widetilde{f}(z).$$

Veamos que $g(z)$ es analítica en Δ.

Sean z y $z + \Delta z$ puntos arbitrarios de Δ^-, entonces $\overline{z}$, $\overline{z} + \overline{\Delta z} \in \Delta^+$ y

$$\frac{g(z + \Delta z) - g(z)}{\Delta z} = -\frac{\overline{f\left(\overline{z} + \overline{\Delta z}\right)} - \overline{f(\overline{z})}}{\Delta z} = -\overline{\left(\frac{f\left(\overline{z} + \overline{\Delta z}\right) - f(\overline{z})}{\overline{\Delta z}}\right)}.$$

Luego la derivada

$$\begin{aligned} g'(z) &= \lim_{\Delta z \to 0} \frac{g(z + \Delta z) - g(z)}{\Delta z} && \left(z \in \Delta^-\right) \\ &= -\overline{\left(\lim_{\overline{\Delta z} \to 0} \frac{f\left(\overline{z} + \overline{\Delta z}\right) - f(\overline{z})}{\overline{\Delta z}}\right)} && \left(\overline{z}, \overline{z} + \overline{\Delta z} \in \Delta^+\right) \\ &= -\overline{f'(\overline{z})}. && \text{(Existe, puesto que } f(z) \text{ es analítica en } \overline{z}\text{)}. \end{aligned}$$

Luego g es analítica en Δ^-. Como $g = f$ en Δ^+, g es analítica en Δ^+.

Sea C una trayectoria triangular contenida en Δ, recorrida en sentido positivo. Si C no intersecta I, entonces C está contenido en Δ^+ ó Δ^-, entonces

$$\int_C g(z) = 0$$

Por el Teorema de la Integral de Cauchy.

Si C intersecta I, en dos puntos a, b, dividimos C en dos trayectorias C_1 y C_2 con puntos finales $a, b \in I$. Luego por el Teorema Generalizado de la Integral de Cauchy, tenemos:

$$\int_{C_1+\widehat{ab}} g(z)\,dz = \int_{C_2+\widehat{ba}} g(z)\,dz = 0,$$

entonces

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{C_1} g(z)\,dz + \int_{\widehat{ab}} g(z)\,dz + \int_{C_2} g(z)\,dz + \int_{\widehat{ba}} g(z)\,dz \\ &= \int_{C_1} g(z)\,dz + \int_{C_2} g(z)\,dz. \end{aligned}$$

De donde

$$0 = \int_{C_1} g(z)\,dz + \int_{C_2} g(z)\,dz = \int_C g(z)\,dz.$$

Como g es continua en Δ, por el Teorema de Morera, g es analítica en Δ.

Como $\widetilde{f}$ y g coinciden en un conjunto (I) con puntos de acumulación, por el Teorema de Identidad para funciones analíticas, $\widetilde{f} = g$ en Δ. ∎

1.3 Funciones Armónicas Positivas

En esta sección estudiaremos la Fórmula Integral de Poisson, y a partir de ella derivaremos algunas desigualdades para funciones armónicas positivas. Aquí, por positivas entendemos 'no-negativas'. En este contexto no se diferenciarán, puesto que por el Teorema 1.1.8, cualquier función armónica que alcanza un valor mínimo cero en un dominio es idénticamente cero en todo el dominio.

Teorema 1.3.1 (Desigualdad de Harnack)

Sea h una función armónica positiva en el disco $\Delta(\omega, \rho)$. Entonces para $r < \rho$ y $0 \le t < 2\pi$,

$$\frac{\rho - r}{\rho + r} h(\omega) \le h\left(\omega + re^{it}\right) \le \frac{\rho + r}{\rho - r} h(\omega).$$

Prueba:

Escojamos s tal que $r < s < \rho$. Aplicando la Fórmula Integral de Poisson a h en $\overline{\Delta}(\omega, s)$,

$$\begin{aligned}
h\left(\omega + re^{it}\right) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{s^2 - r^2}{s^2 - 2sr\cos(\theta - t) + r^2} h\left(\omega + se^{i\theta}\right) d\theta \\
&\leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{(s+r)(s-r)}{(s-r)^2} h\left(\omega + se^{i\theta}\right) d\theta \quad (\cos(\theta - t) \leq 1) \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{s+r}{s-r} h\left(\omega + se^{i\theta}\right) d\theta \\
&= \frac{s+r}{s-r} h(\omega), \qquad \text{(Propiedad de Valor Medio para } h\text{)}.
\end{aligned}$$

Tomando límite cuando $s \longrightarrow \rho$, deducimos que

$$h\left(\omega + re^{it}\right) \leq \frac{\rho + r}{\rho - r} h(\omega).$$

La cota inferior se halla en forma similar. ■

Corolario 1.3.2 (Teorema de Liouville)

Toda función armónica en $\mathbb{C}$, acotada superior o inferiormente es constante.

Prueba:

Es suficiente probar que toda función armónica positiva en $\mathbb{C}$ es constante. En efecto, supongamos que h es acotada inferiormente, entonces $h(z) \geq a$ para algún número a. Luego $u = h - a \geq 0$ es también armónica y u es constante si y sólo si h es constante.

Si h es acotada superiormente, entonces $-h$ es acotada inferiormente y podemos aplicar nuevamente el argumento anterior. Entonces supongamos que $a = 0$ y $h \geq 0$.

Dado $z \in \mathbb{C}$, tomemos $r = |z|$ y sea $\rho > r$. Aplicando la Desigualdad de Harnack a h en $\Delta(0, \rho)$, tenemos

$$h(z) \leq \frac{\rho + r}{\rho - r} h(0).$$

Tomando límite cuando $\rho \longrightarrow \infty$, deducimos que $h(z) \leq h(0)$. Entonces

h alcanza un máximo en 0, y por el Teorema 1.1.8, h es constante. ■

La desigualdad de Harnack en discos implica un resultado análogo en dominios en general.

Corolario 1.3.3 *Sea D un dominio en $\mathbb{C}_\infty$ y sean $z, w \in D$. Entonces existe un número τ tal que, para toda función armónica positiva h en D,*

$$\tau^{-1} h(w) \leq h(z) \leq \tau h(w). \tag{1.2}$$

Prueba:

Dados $z, w \in D$, escribimos $z \sim w$ si existe un número τ tal que (1.2) se cumple para toda función armónica positiva h en D. Entonces $\sim$ es una relación de equivalencia en D, y por la Desigualdad de Harnack sabemos que las clases de equivalencia son conjuntos abiertos. Como D es conexo, sólo puede haber una de tales clases de equivalencia, y esto prueba el Corolario. ■

Definición 1.3.4 Sea *D un dominio en $\mathbb{C}_\infty$. Dados $z, w \in D$,* **la distancia Harnack** *entre z y w es el número más pequeño $\tau_D(z, w)$ tal que, para toda función armónica positiva h en D,*

$$\tau_D(z, w)^{-1} h(w) \leq h(z) \leq \tau_D(z, w) h(w). \tag{1.3}$$

Existe un caso para el cual τ_D puede ser computado directamente.

Teorema 1.3.5 *Si $\Delta = \Delta(w, \rho)$, entonces*

$$\tau_\Delta(z, w) = \frac{\rho + |z - w|}{\rho - |z - w|} \qquad (z \in \Delta).$$

Prueba:

De la desigualdad de Harnack se sigue que

$$\tau_\Delta(z, w) \leq \frac{\rho + |z - w|}{\rho - |z - w|} \qquad (z \in \Delta). \tag{*}$$

Por otra parte, considerando funciones armónicas positivas h en Δ dadas por

$$\begin{aligned} h(z) &= P\left(\frac{z - w}{\rho}, \zeta\right) = \operatorname{Re}\left(\frac{\rho\zeta + (z - w)}{\rho\zeta - (z - w)}\right) \qquad (|\zeta| = 1), \\ &\leq \left|\frac{\rho\zeta + (z - w)}{\rho\zeta - (z - w)}\right| \leq \frac{\rho + |z - w|}{\rho - |z - w|}. \begin{pmatrix} |\rho\zeta - (z - w)| \geq \rho - |z - w| \\ |\rho\zeta + (z - w)| \leq \rho + |z - w| \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Ahora

$$\operatorname{Re}\left(\frac{\rho\zeta+(z-w)}{\rho\zeta-(z-w)}\right)=h(z)\leq\tau_{\Delta}(z,w)\,h(w)=\tau_{\Delta}(z,w)\,.$$

$$\frac{\rho\zeta+(z-w)}{\rho\zeta-(z-w)} = \frac{\rho\zeta+\zeta\,|z-w|}{\rho\zeta-\zeta\,|z-w|}=\frac{\rho+|z-w|}{\rho-|z-w|} \qquad \left(\text{Si } \zeta=\frac{z-w}{|z-w|}\right)$$

$$\therefore \quad \tau_{\Delta}(z,w)\geq\frac{\rho+|z-w|}{\rho-|z-w|}. \tag{**}$$

De $(*)$ y $(**)$ concluimos que

$$\tau_{\Delta}(z,w)=\frac{\rho+|z-w|}{\rho-|z-w|}. \qquad (z\in\Delta)\,. \quad \blacksquare$$

Podemos estimar τ_D para otros dominios D por medio del Principio de Subordinación.

Teorema 1.3.6 (Principio de Subordinación)

Sea $f:D_1\longrightarrow D_2$ una función meromorfa entre los dominios D_1 y D_2 en $\mathbb{C}_\infty$. Entonces

$$\tau_{D_2}(f(z),f(w))\leq\tau_{D_1}(z,w) \qquad (z,w\in D_1)\,;$$

la igualdad se cumple si f es una función conforme de D_1 sobre D_2.

Prueba:

Sean $z,w\in D_1$. Dada una función armónica positiva h en D_2, la función compuesta $h\circ f$ es una función armónica positiva en D_1, así de (1.3)

$$\tau_{D_1}(z,w)^{-1}\,h(f(w))\leq h(f(z))\leq\tau_{D_1}(z,w)\,h(f(w))\,.$$

Como esto se cumple para toda h, la desigualdad buscada también se cumple.

Si f es una función conforme que envía D_1 sobre D_2, podemos aplicar el mismo argumento a f^{-1} para deducir que la igualdad se cumple. $\blacksquare$

Corolario 1.3.7 *Si $D_1\subset D_2$ entonces*

$$\tau_{D_2}(z,w)\leq\tau_{D_1}(z,w) \qquad (z,w\in D_1)\,.$$

Prueba:

Tomemos $f:D_1\longrightarrow D_2$ como la función inclusión y apliquemos el Teorema. $\blacksquare$

Propiedades de Continuidad para τ_D

Teorema 1.3.8 *Si D es un subdominio de $\mathbb{C}_\infty$, entonces $\log \tau_D$ es una semimétrica continua en D.*

Prueba:

Para probar que $\log \tau_D$ es una semimétrica, necesitamos ver que

$$\begin{aligned} \tau_D(z,w) &\geq 1, \quad \tau_D(z,z)=1 && (z,w\in D), \\ \tau_D(z,w) &= \tau_D(w,z) && (z,w\in D), \\ \tau_D(z,w) &\leq \tau_D(z,z')\,\tau_D(z',w) && (z,\ z',\ w\in D), \end{aligned}$$

pero todo lo anterior se sigue de la Definición de τ_D.

Para probar que $\log \tau_D$ es continua, es suficiente probar que

$$\log \tau_D(z,w) \longrightarrow 0 \ \text{ cuando } z \longrightarrow w,$$

puesto que el resultado general se sigue entonces de la desigualdad triangular para $\log \tau_D$.

Sea $w \in D$, escojamos $\rho > 0$ tal que $\Delta := \Delta(w,\rho) \subset D$. Entonces para $z \in \Delta$ tenemos

$$0 \leq \log \tau_D(z,w) \leq \log \tau_\Delta(z,w) = \log\left(\frac{\rho + |z-w|}{\rho - |z-w|}\right),$$

de donde realmente $\log \tau_D(z,w) \longrightarrow 0$ cuando $z \longrightarrow w$. ■

Puede suceder que $\log \tau_D(z,w) = 0$ aunque $z \neq w$, así que $\log \tau_D$ no es completamente una métrica. Por ejemplo puesto que una función armónica positiva en $\mathbb{C}$ es constante, $\log \tau_{\mathbb{C}}(z,w) = 0$ para toda $z, w \in \mathbb{C}$.
Sin embargo, $\log \tau_D$ es una métrica para muchos dominios D. (Ejercicio 4).

Teorema 1.3.9 (Teorema de Harnack)

Sea $(h_n)_{n\geq 1}$ una sucesión de funciones armónicas en un dominio D en $\mathbb{C}_\infty$. Supongamos que $h_1 \leq h_2 \leq h_3 \leq \cdots$ en D.

Entonces $h_n \to \infty$ localmente, uniformemente, o $h_n \to h$ localmente, uniformemente, donde h es armónica en D.

Prueba:

Fijemos $w \in D$. Dado un subconjunto compacto K de D, la cantidad

$$C_K := \sup_{z \in K} \tau_D(z, w)$$

es finita, puesto que τ_D es continua. Entonces para todo $n \geq m \geq 1$, tenemos

$$\begin{aligned} h_n(w) - h_1(w) &\leq C_K(h_n(z) - h_1(z)) \qquad (z \in K), \\ h_n(z) - h_m(z) &\leq C_K(h_n(w) - h_m(w)) \qquad (z \in K), \end{aligned}$$

puesto que $h_n - h_1$ y $h_n - h_m$ son funciones armónicas positivas en D. Ahora si $h_n(w) \longrightarrow \infty$ cuando $n \longrightarrow \infty$, se sigue que $h_n \longrightarrow \infty$ uniformemente en K. Como K puede ser cualquier subconjunto compacto de D, concluimos que $h_n \longrightarrow \infty$ localmente, uniformemente en D. En el otro caso, si $h_n(w)$ tiende a un límite finito, entonces $(h_n)_{n\geq 1}$ es uniformemente Cauchy en K. Nuevamente, como K es arbitrario, se sigue que h_n converge localmente, uniformemente en D a una función finita h, la cual es armónica en D por el Corolario 1.2.8. ■

Teorema 1.3.10 *Sea $(h_n)_{n\geq 1}$ una sucesión de funciones armónicas positivas en un dominio D en $\mathbb{C}_\infty$. Entonces $h_n \longrightarrow \infty$ localmente, uniformemente o existe alguna subsucesión $h_{n_j} \longrightarrow h$ localmente, uniformemente, donde h es armónica en D.*

Prueba:

Fijemos $w \in D$. De las desigualdades

$$\tau_D(z, w)^{-1} h_n(w) \leq h_n(z) \leq \tau_D(z, w) h_n(w) \quad (z \in D,\ n \geq 1), \tag{1.4}$$

se sigue que si $h_n(w) \longrightarrow \infty$, entonces también $h_n \longrightarrow \infty$ localmente, uniformemente en D, y si $h_n(w) \longrightarrow 0$, entonces también $h_n \longrightarrow 0$ localmente, uniformemente en D. Por lo tanto, reemplazando (h_n) por una subsucesión si es necesario, podemos reducirlo al caso donde la sucesión $(\log h_n(w))_{n\geq 1}$ es acotada. Entonces La desigualdad (1.4) implica que $(\log h_n)_{n\geq 1}$ es localente uniformemente acotada en D, y entonces es suficiente probar que existe una subsucesión $\left(h_{n_j}\right)$ tal que $\left(\log h_{n_j}\right)_{j\geq 1}$ es localmente, uniformemente convergente en D.

Sea $S = \{\xi_1, \xi_2, \ldots\}$ un subconjunto denso, contable de D. La sucesión

$(\log h_n(\zeta))_{n\geq 1}$ es acotada para cada $\zeta \in S$; así por un 'argumento de diagonalidad' podemos hallar una subsucesión $\left(h_{n_j}\right)$ tal que $\left(\log h_{n_j}(\zeta)\right)_{j\geq 1}$ es convergente para cada $\zeta \in S$.

Sea $\left(h_{n_j}\right)$ una subsucesión tal que $\left(\log h_{n_j}(\xi_1)\right)$ es convergente; existe una subsucesión de la anterior tal que $\left(\log h_{n_{j_k}}(\xi_2)\right)$ es convergente.

Repitiendo este proceso indefinidamente, obtenemos finalmente una subsucesión $\left(h_{n_j}\right)$ tal que $\left(\log h_{n_j}(\zeta)\right)_{j\geq 1}$ es convergente para cada $\zeta \in S$.

Mostremos que la subsucesión $\left(\log h_{n_j}\right)_{j\geq 1}$ es localmente, uniformemente convergente en D.

Sean K un subconjunto compacto de D, y $\epsilon > 0$. Para cada $z \in K$, sea

$$V_z = \left\{z' \in D / \log \tau_D\left(z, z'\right) < \epsilon\right\},$$

y sean $V_{z_1}, \ldots, V_{z_m}$ un subcubrimiento finito de K. Como S es denso en D, para cada l podemos escoger un punto $\zeta_l \in V_{z_l} \cap S$. Entonces existe $N_l \geq 1$ tal que

$$\left|\log h_{n_j}(\zeta_l) - \log h_{n_k}(\zeta_l)\right| \leq \epsilon \qquad (n_j, n_k \geq N_l\ , \quad l = 1, \ldots, m)$$

$$V_{z_l} = \left\{z' \in D / \log \tau_D\left(z_l, z'\right) < \epsilon\right\}$$

Por la Definición de la Distancia de Harnack,

$$\begin{aligned} \left|\log h_{n_j}(z) - \log h_{n_j}(\zeta_l)\right| &\leq \log \tau_D(z, \zeta_l) \\ &\leq \log \tau_D(z, z_l) + \log \tau_D(z_l, \zeta_l) \\ &< 2\epsilon \quad (z \in V_{z_l}), \end{aligned}$$

con una desigualdad similar para h_{n_k}.

Entonces, si $N = \max\{N_1, \ldots, N_m\}$,

$$\begin{aligned} \left|\log h_{n_j}(z) - \log h_{n_k}(z)\right| &\leq \left|\log h_{n_j}(z) - \log h_{n_j}(\zeta_l)\right| \\ &\quad + \left|\log h_{n_j}(\zeta_l) - \log h_{n_k}(\zeta_l)\right| \\ &\quad + \left|\log h_{n_k}(\zeta_l) - \log h_{n_k}(z)\right| \\ &< 2\epsilon + \epsilon + 2\epsilon \\ &= 5\epsilon \qquad (n_j, n_k \geq N,\ z \in K). \end{aligned}$$

Así $\left(\log h_{n_j}\right)_{j\geq 1}$ es uniformemente Cauchy en K, y entonces es uniformemente convergente allí. ■

La siguiente prueba del Teorema de Picard se debe a John Lewis.

Teorema 1.3.11 (Teorema de Picard)

Si $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ es una función entera no-constante, entonces $\mathbb{C}\backslash f(\mathbb{C})$ contiene a lo más un punto.

Para la prueba de este teorema utilizaremos un lema, el cual es en sí mismo interesante.

Lema 1.3.12 *Sea h una función armónica en una vecindad de $\overline{\Delta}(0, 2R)$ con $h(0) = 0$. Entonces existe un disco $\Delta(w, r) \subset \Delta(0, 2R)$ tal que $h(w) = 0$ y*

$$M_h(w, r) := \sup_{\Delta(w,r)} h = \sup_{\partial\Delta(w,r)} h \geq 3^{-11} M_h(0, R),$$

$$M_h\left(w, \frac{r}{2}\right) \geq 3^{-11} M_h(w, r).$$

El valor exacto de la constante 3^{-11} no es significativo aquí, lo importante es que sea positiva.

Prueba:

Consideremos h no idénticamente 0 (en cuyo caso, el resultado se cumple trivialmente).

Para $z \in \Delta(0, 2R)$ definimos $\delta(z) = \operatorname{dist}(z, \partial\Delta(0, 2R))$, y

$$\begin{aligned} Z &= \{z \in \Delta(0, 2R) / h(z) = 0\}, \\ U &= \bigcup_{z \in Z} \Delta\left(z, \frac{\delta(z)}{4}\right), \\ \gamma &= \sup_U h = \sup_{z \in Z} M_h\left(z, \frac{\delta(z)}{4}\right). \quad (\gamma > 0). \end{aligned}$$

Escogemos $w \in Z$ tal que $M_h\left(w, \frac{\delta(w)}{4}\right) \geq \frac{\gamma}{3}$, y tomemos $r = \frac{\delta(w)}{2}$.

Probemos ahora que $\Delta(w, r)$ satisface las condiciones del Lema.

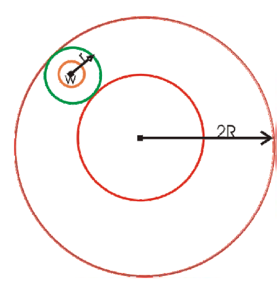


Figura 5

Claramente $\Delta(w, r) \subset \Delta(0, 2R)$ y $h(w) = 0$. También $M_h\left(w, \frac{r}{2}\right) \geq \frac{\gamma}{3}$; así para completar la prueba es suficiente probar que

$$\begin{aligned} (a) \quad M_h(0, R) &\leq 3^{10}\gamma, \\ (b) \quad M_h(w, r) &\leq 3^{10}\gamma. \end{aligned}$$

Prueba de (a) :

Tomemos $z \in \Delta(0,R)$ con $h(z) \geq 0$. Si $z \in \overline{U}$, entonces por continuidad $h(z) \leq \gamma$. Ahora supongamos que $z \notin \overline{U}$. Entonces existe $z' \in (z,0) \cap \overline{U}$ tal que $[z,z') \cap \overline{U} = \phi$. Se sigue que $h > 0$ en $[z,z')$.

Además, para cada $\zeta \in [z,z')$ tenemos que $h > 0$ en $\Delta\left(\zeta, \frac{R}{5}\right)$. En efecto, supongamos que $h \leq 0$, en algún punto de $\Delta\left(\zeta, \frac{R}{5}\right)$; entonces existe $\zeta' \in \Delta\left(\zeta, \frac{R}{5}\right)$ con $h\left(\zeta'\right) = 0$. Pero entonces $\zeta' \in Z$ y

$$\delta\left(\zeta'\right) \geq \delta(\zeta) - \left|\zeta' - \zeta\right| \geq R - \frac{R}{5} = \frac{4R}{5} > 4\left|\zeta' - \zeta\right|,$$

esto implica que $\zeta \in U$, lo cual es una contradicción.

Se sigue de la desigualdad de Harnack que, para cada ζ,

$$\begin{aligned}
\sup_{\Delta\left(\zeta,\frac{R}{10}\right)} h &= \sup_{\partial\Delta\left(\zeta,\frac{R}{10}\right)} h \qquad \text{(Principio del Máximo)} \\
&\leq 3h(\zeta). \qquad \left(h\left(\zeta + \tfrac{R}{10}e^{it}\right) \leq \frac{\frac{R}{5}+\frac{R}{10}}{\frac{R}{5}-\frac{R}{10}} h(\zeta) = 3h(\zeta) \quad \forall t\right).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
h(\zeta) &\leq 3 \inf_{\partial\Delta\left(\zeta,\frac{R}{10}\right)} h \\
&= 3 \inf_{\Delta\left(\zeta,\frac{R}{10}\right)} h \quad \text{(Principio del Mínimo)}.
\end{aligned}$$

De donde

$$\sup_{\Delta\left(\zeta,\frac{R}{10}\right)} h \leq 3^2 \inf_{\Delta\left(\zeta,\frac{R}{10}\right)} h.$$

Puesto que la longitud de $[z,z']$ es menor que R, podemos cubrirlo por cinco discos traslapados de radio $\frac{R}{10}$ con centros en $[z,z')$.

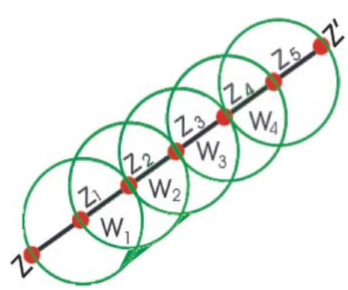


Figura 6

Sean $z_1, z_2, z_3, z_4, z_5 \in [z,z')$.

Sea $z \in \Delta\left(z_1, \frac{R}{10}\right)$, entonces

$$\begin{aligned}
h(z) &\leq \sup_{\Delta\left(z_1,\frac{R}{10}\right)} h \leq 3^2 \inf_{\Delta\left(z_1,\frac{R}{10}\right)} h \leq 3^2 h(w_1), \quad (w_1 \in \Delta(z_1) \cap \Delta(z_2)) \\
h(w_1) &\leq \sup_{\Delta\left(z_2,\frac{R}{10}\right)} h \leq 3^2 \inf_{\Delta\left(z_1,\frac{R}{10}\right)} h \leq 3^2 h(w_2), \quad (w_2 \in \Delta(z_2) \cap \Delta(z_3)) \\
h(w_2) &\leq \sup_{\Delta\left(z_3,\frac{R}{10}\right)} h \leq 3^2 \inf_{\Delta\left(z_2,\frac{R}{10}\right)} h \leq 3^2 h(w_3), \quad (w_3 \in \Delta(z_3) \cap \Delta(z_4)) \\
h(w_3) &\leq \sup_{\Delta\left(z_4,\frac{R}{10}\right)} h \leq 3^2 \inf_{\Delta\left(z_4,\frac{R}{10}\right)} h \leq 3^2 h(w_4), \quad (w_4 \in \Delta(z_4) \cap \Delta(z_5)) \\
h(w_4) &\leq \sup_{\Delta\left(z_5,\frac{R}{10}\right)} h \leq 3^2 \inf_{\Delta\left(z_5,\frac{R}{10}\right)} h \leq 3^2 h(z'). \qquad \left(z' \in \Delta\left(z_5, \frac{R}{10}\right)\right).
\end{aligned}$$

$$\therefore \quad h(z)\, h(w_1)\, h(w_2)\, h(w_3)\, h(w_4) \leq 3^{10} h(w_1)\, h(w_2)\, h(w_3)\, h(w_4)\, h\left(z'\right)$$

$$\therefore \quad h(z) \leq 3^{10} h\left(z'\right).$$

Por lo tanto

$$h(z) \leq \left(3^2\right)^5 h\left(z'\right) \leq 3^{10}\gamma,$$

La última desigualdad se cumple porque $h \leq \gamma$ en $\overline{U}$.

Prueba de (b) : (Es Similar).

Tomemos $z \in \Delta(w, r)$ con $h(z) \geq 0$. Si $z \in \overline{U}$, entonces por continuidad $h(z) \leq \gamma$. Ahora supongamos que $z \notin \overline{U}$. Entonces existe $z' \in (z, w) \cap \overline{U}$ tal que $[z, z') \cap \overline{U} = \phi$. Se sigue que $h > 0$ en $[z, z')$. En efecto, para cada $\zeta \in [z, z')$ tenemos que $h > 0$ en $\Delta\left(\zeta, \frac{r}{5}\right)$. De lo contrario, existe $\zeta' \in \Delta\left(\zeta, \frac{r}{5}\right)$ con $h\left(\zeta'\right) = 0$. Pero entonces $\zeta' \in Z$ y

$$\delta\left(\zeta'\right) \geq \delta(w) - \left|\zeta' - \zeta\right| - |\zeta - w| \geq 2r - \frac{r}{5} - r = \frac{4r}{5} > 4\left|\zeta' - \zeta\right|.$$

Lo que implica que $\zeta \in U$, y esto es una contradicción.

De la desigualdad de Harnack, para cada ζ,

$$\sup_{\Delta\left(\zeta,\frac{r}{10}\right)} h \leq 3^2 \inf_{\Delta\left(\zeta,\frac{r}{10}\right)} h.$$

Puesto que la longitud de $[z, z']$ es menor que r, podemos cubrirlo con cinco discos traslapados de radio $\frac{r}{10}$ con centros en $[z, z')$. Por lo tanto

$$h(z) \leq \left(3^2\right)^5 h\left(z'\right) \leq 3^{10}\gamma,$$

como en (a) la disigualdad se cumple porque $h \leq \gamma$ en $\overline{U}$. ∎

Prueba del Teorema 1.3.11:

Supongamos, por contradicción, que $\mathbb{C}\backslash f(\mathbb{C})$ contiene al menos dos puntos α, β. Entonces $h := \log|f-\alpha|$ y $k := \log|f-\beta|$ son ambas funciones armónicas en $\mathbb{C}$, y satisfacen

$$\begin{aligned} \left|h^+ - k^+\right| &\leq |\alpha-\beta|, \\ \max(h,k) &\geq \log\left(\frac{|\alpha-\beta|}{2}\right), \\ \max(h(z),k(z)) &\geq \log\left(\frac{|\alpha-\beta|}{2}\right), \quad (\forall z\in\mathbb{C}). \end{aligned}$$

En efecto

$$|f-\alpha| \leq |f-\beta| + |\beta-\alpha|$$

$$\frac{|f-\alpha|}{|f-\beta|} \leq 1 + \frac{|\alpha-\beta|}{|f-\beta|} \leq 1+|\alpha-\beta|, \quad \text{si } |f-\beta|\geq 1.$$

Sea $\varphi(x) = \log(1+x) - x$

$$\therefore \quad \varphi'(x) = \frac{1}{1+x} - 1 = \frac{-x}{1+x} < 0 \quad (\forall x>0).$$

De donde φ es decreciente en $[0,+\infty)$ y $\varphi(0)=0$,

$$\therefore \quad \varphi(x) < 0 \quad (\forall x>0).$$

$$\therefore \quad \log(1+x) < x \quad (\forall x>0) \qquad (*)$$

$$\therefore \quad \log\frac{|f-\alpha|}{|f-\beta|} \leq \log(1+|\alpha-\beta|) < |\alpha-\beta|. \qquad (**)$$

Sea $z\in\mathbb{C}$.

(i) Si $h(z),\ k(z) < 0$,

$$h^+(z) = 0 = k^+(z).$$

(ii) Si $h(z),\ k(z) \geq 0$.

$$\begin{aligned} \left|h^+(z) - k^+(z)\right| &= \left|\log|f-\alpha| - \log|f-\beta|\right| \\ &= \left|\log\frac{|f-\alpha|}{|f-\beta|}\right| \\ &= \left\{\begin{array}{c} \log|f-\alpha| - \log|f-\beta| \\ \text{ó} \\ \log|f-\beta| - \log|f-\alpha| \end{array}\right. . \end{aligned}$$

Si $\log|f-\beta| < \log|f-\alpha|$,

$$\begin{aligned} \left|h^+ - k^+\right| &= \log|f-\alpha| - \log|f-\beta| \\ &= \log\frac{|f-\alpha|}{|f-\beta|} \\ &< |\alpha-\beta|. \quad (\text{Por } (**),\ \text{ya que } |f-\beta|\geq 1) \end{aligned}$$

Si $\log|f-\alpha| < \log|f-\beta|$,

$$\begin{aligned} \left|h^{+}-k^{+}\right| &= \log|f-\beta| - \log|f-\alpha| \\ &= \log\frac{|f-\beta|}{|f-\alpha|} \\ &< |\beta-\alpha|. \end{aligned}$$

(iii) Si $h(z) \geq 0$ y $k(z) < 0$, entonces

$$\begin{aligned} \log|f-\alpha| &> 0 \\ \log|f-\beta| &< 0 = \log 1. \\ |f-\beta| &< 1 \quad \wedge \quad |f-\alpha| \leq |f-\beta| + |\beta-\alpha| < 1 + |\beta-\alpha| \\ \left|h^{+}(z)-k^{+}(z)\right| &= |\log|f-\alpha|| \leq \log(1+|\beta-\alpha|) < |\alpha-\beta|. \quad (\text{Por } *) \end{aligned}$$

(iv) Si $h(z) < 0$ y $k(z) \geq 0$, el caso es análogo a (iii).

Ahora:

$$\begin{aligned} |\alpha-\beta| &\leq |\alpha-f(z)| + |f(z)-\beta| \\ &\leq 2\,\text{máx}\{|\alpha-f(z)|, |\beta-f(z)|\} \\ \log\frac{|\alpha-\beta|}{2} &\leq \log\text{máx}\{|\alpha-f(z)|, |\beta-f(z)|\} \\ &= \text{máx}\{\log|f(z)-\alpha|, \log|f(z)-\beta|\} \\ &= \text{máx}\{h(z), k(z)\}, \end{aligned}$$

en todo $\mathbb{C}$.

Puesto que f es no-constante, así es h, y por el Teorema 1.3.2, h no es acotada superior ni inferiormente. En particular, existe $z_o \in \mathbb{C}$ con $h(z_o) = 0$.

Veamos que es suficiente con probar el caso $h(0) = 0$:

Sean

$$F(z) = f(z+z_o),$$

$$\begin{aligned} H &= \log|F-\alpha|, \\ &\wedge \\ K &= \log|F-\beta| \end{aligned}$$

$$\therefore \quad H(z) = h(z + z_o)$$

$$\therefore \quad H(0) = h(z_o) = 0.$$

Sea, pues, $h(0) = 0$.

Apliquemos el Lema 1.3.12 a h en cada uno de los discos $\Delta\left(0, 2^{j+1}\right)$ para producir nuevos discos $\Delta(w_j, r_j) \subseteq \Delta\left(0, 2^{j+1}\right)$ tales que $h(w_j) = 0$ y

$$\begin{aligned} M_h(w_j, r_j) &\geq 3^{-11} M_h\left(0, 2^j\right), \\ M_h\left(w_j, \frac{r_j}{2}\right) &\geq 3^{-11} M_h(w_j, r_j). \end{aligned}$$

Para cada $j \geq 1$ tomamos $M_j = M_h(w_j, r_j)$. Puesto que h es no-acotada,

$$\lim_{j \longrightarrow \infty} M_j \geq 3^{-11} \lim_{j \longrightarrow \infty} M_h\left(0, 2^j\right) = \infty.$$

Definamos dos sucesiones de funciones armónicas (h_j) y (k_j) en $\Delta(0,1)$ por

$$h_j(z) = \frac{h(w_j + r_j z)}{M_j} \quad \text{y} \quad k_j(z) = \frac{k(w_j + r_j z)}{M_j} \qquad (|z| < 1).$$

Sea $z \in \Delta(0,1)$

(i) Si $k_j(z) \leq 0$,

$$k_j(z) \leq 0 < 1 + \frac{|\alpha - \beta|}{M_j}.$$

(ii) Si $k_j(z) > 0$

$$k_j(z) = k_j^+(z).$$

De donde

$$\begin{aligned} k_j &= k_j^+ - h_j^+ + h_j^+ \\ &\leq h_j^+ + \left|h_j^+ - k_j^+\right| \\ &\leq 1 + \frac{|\alpha - \beta|}{M_j} \\ &\leq 1 + \frac{|\alpha - \beta|}{3^{-11} M_h(0, 2^j)} \\ &\leq 1 + \frac{|\alpha - \beta|}{3^{-11} M_h(0, 2)}. \end{aligned} \qquad (***)$$

Entonces h_j y k_j tienen las siguientes propiedades:

$$\begin{aligned} &(a) \quad h_j(0) = 0, \\ &(b) \quad M_{h_j}\left(0, \tfrac{1}{2}\right) \geq 3^{-11}, \\ &(c) \quad \left|h_j^+ - k_j^+\right| \leq \tfrac{|\alpha - \beta|}{M_j}, \\ &(d) \quad \max(h_j, k_j) \geq \tfrac{\log\left(\frac{|\alpha - \beta|}{2}\right)}{M_j}. \end{aligned}$$

Evidentemente $h_j \leq 1$ para toda j, entonces podemos aplicar el Teorema 1.3.10 a $(1-h_j)_{j\geq 1}$ para deducir que existe una subsucesión de los (h_j) que converge localmente, uniformemente a una función $\widetilde{h}$ armónica en $\Delta(0,1)$. Los (k_j) son también uniformemente acotados superiormente, (de $(***)$ tenemos que una cota es $1+\frac{|\alpha-\beta|}{3^{-11}M_h(0,2)}$), luego existe una subsucesión $\left(k_{j_l}\right)$ de (k_j) que converge localmente, uniformemente a una función $\widetilde{k}$ en $\Delta(0,1)$. Ambas, $\widetilde{h}$ y $\widetilde{k}$ son armónicas (o posiblemente $\widetilde{k}$ es idénticamente $-\infty$), y tienen las siguientes propiedades:

$$\begin{array}{ll} (a) & \widetilde{h}(0)=0, \\ (b) & M_{\widetilde{h}}\left(0,\frac{1}{2}\right)\geq 3^{-11}, \\ (c) & \widetilde{h}^{+}=\widetilde{k}^{+} \\ (d) & \max\left(\widetilde{h},\widetilde{k}\right)\geq 0. \end{array}$$

La propiedad (b) implica $\widetilde{h}(\zeta)>0$ para algún ζ y (c) nos dice que $\widetilde{h}=\widetilde{k}$ en una vecindad de ζ. Por el Principio de Identidad (Teorema 1.1.7) tenemos que $\widetilde{h}=\widetilde{k}$ en todo $\Delta(0,1)$. De (d) deducimos que $\widetilde{h}\geq 0$ en $\Delta(0,1)$, y combinando esto con (a) y con el Principio del Máximo (Teorema 1.1.8), concluimos que $\widetilde{h}\equiv 0$ en $\Delta(0,1)$. Pero esto es inconsistente con (b)!. Hemos llegado así a una contradicción y por lo tanto hemos probado el Teorema de Picard. ∎

Ejercicios 1.3

1. Pruebe que si h es una función armónica positiva en $\triangle(0,\rho)$ entonces
$$|\nabla h(0)|\leq \frac{2}{\rho}h(0),$$
y luego deduzca que
$$|\nabla h(z)|\leq \frac{2\rho}{\rho^2-|z|^2}h(z) \qquad (|z|<\rho).$$

2. Pruebe que si f es una función holomorfa en $\triangle(0,\rho)$, la cual satisface que $0<|f|<1$, entonces
$$|f(z)|\leq |f(0)|^{\frac{(\rho-|z|)}{(\rho+|z|)}} \qquad (|z|<\rho).$$

3. Pruebe que si $\triangle=\triangle(0,1)$, entonces
$$\tau_{\triangle}(z,w)=\frac{1+\left|\frac{z-w}{1-z\overline{w}}\right|}{1-\left|\frac{z-w}{1-z\overline{w}}\right|} \qquad (z,w\in\triangle).$$

4. Sea D un dominio acotado en $\mathbb{C}$ de diámetro δ.

(i) Pruebe que

$$\tau_D(z,w) \geq \frac{\delta + |z-w|}{\delta - |z-w|} \qquad (z,w \in D),$$

y deduzca que $\log \tau_D$ es una métrica en D que da origen a la topología usual en D.

(ii) Pruebe que si $w \in D$ y $\zeta \in \partial D$ entonces

$$\tau_D(z,w) \longrightarrow \infty \quad \text{cuando } z \longrightarrow \zeta,$$

y deduzca que el espacio métrico $(D, \log \tau_D)$ es completo.

Pruebe también que las conclusiones finales de (i) y (ii) permanecen válidas si D es cualquier dominio en $\mathbb{C}_\infty$ conformemente equivalente a un dominio acotado.

5. Sean h una función armónica en una vecindad de $\overline{\triangle}(0,\rho)$, y $0 \leq r \leq \rho$. Defina

$$M_h(r) := \sup_{|z|=r} h(z).$$

Pruebe que

$$M_h(r) \leq \frac{2r}{\rho + r} M_h(\rho) + \frac{\rho - r}{\rho + r} h(0) \qquad (0 \leq r \leq \rho).$$

Deduzca la siguiente generalización del Teorema de Liouville

(Corolario 1.3.2) :

Si h es armónica en $\mathbb{C}$ y satisface

$$\liminf_{\rho \to \infty} \frac{M_h(\rho)}{\rho} \leq 0,$$

entonces h es constante.

6. Sean f una función holomorfa en una vecindad de $\overline{\triangle}(0,\rho)$, y $0 \leq r \leq \rho$. Defina

$$M_f(r) := \sup_{|z|=r} |f(z)| \qquad \text{y} \qquad A_f(r) := \sup_{|z|=r} \mathrm{Re} f(z).$$

Pruebe la desigualdad de Borel-Caratheodory:

$$M_f(r) \leq \frac{2r}{\rho - r} A_f(\rho) + \frac{\rho + r}{\rho - r} |f(0)| \qquad (0 \leq r \leq \rho).$$

7. Sea $(h_n)_{n\geq 1}$ una sucesión de funciones armónicas positivas en un dominio D. Pruebe que si $(h_n(z))_{n\geq 1}$ converge puntualmente para cada z en algún subconjunto abierto no vacío de D, entonces $(h_n)_{n\geq 1}$ converge localmente, uniformemente en todo D.

8. (i) Sean h y k funciones armónicas en una vecindad de $\overline{\Delta}(0,1)$ las cuales satisfacen

$$\begin{aligned} |h(0)|, |k(0)| &\leq \lambda, \\ \left|h^+ - k^+\right| &\leq \lambda, \end{aligned}$$

$$\max(h,k) \geq -\lambda,$$

para alguna constante λ. Use la técnica del Teorema 1.3.11 para probar que existe una constante universal c_o tal que

$$\sup_{\Delta\left(0,\frac{1}{2}\right)} h \leq c_o\lambda \quad \text{y} \quad \sup_{\Delta\left(0,\frac{1}{2}\right)} k \leq c_o\lambda.$$

(ii) Deduzca el TEOREMA DE MONTEL:

Si (f_n) es una sucesión de funciones holomorfas en un dominio D tal que $f_n(D) \subset \mathbb{C}\backslash\{0,1\}$ para toda n, entonces $f_n \longrightarrow \infty$ localmente, uniformemente o alguna subsucesión $f_{n_j} \longrightarrow f$ localmente, uniformemente, donde f es holomorfa en D.

Ejercicios Resueltos 1.3

1. ■ Pruebe que si h es una función armónica positiva en $\triangle(0,\rho)$ entonces

$$|\triangledown h(0)| \leq \frac{2}{\rho} h(0),$$

y luego deduzca que

$$|\triangledown h(z)| \leq \frac{2\rho}{\rho^2 - |z|^2} h(z) \qquad (|z| < \rho).$$

Prueba:

Sea $\nabla h(0) \neq 0$.

Sea $\overrightarrow{v} \in \mathbb{R}^2$ un vector unitario en la dirección de $\triangledown h(0)$,

$$\vec{v} = \frac{1}{|\triangledown h(0)|} \triangledown h(0).$$

Puesto que h es diferenciable-FRECHET, por ser armónica, existe

$$\begin{aligned} D_{\vec{v}} h(0) &= \lim_{t \to 0^+} \frac{h(0 + t\overrightarrow{v}) - h(0)}{t} \\ &= \triangledown h(0).\vec{v} \\ &= \frac{|\triangledown h(0)|^2}{|\triangledown h(0)|} = |\Delta h(0)|. \end{aligned}$$

Sea $0 < t = r < \rho$. Por la DESIGUALDAD DE HARNACK,

$$\frac{\rho - r}{\rho + r} h(0) \leq h(r\overrightarrow{v}) \leq \frac{\rho + r}{\rho - r} h(0)$$

$$\begin{aligned} \frac{\rho - r}{\rho + r} h(0) - h(0) &\leq h(r\overrightarrow{v}) - h(0) \leq \frac{\rho + r}{\rho - r} h(0) - h(0) \\ \frac{\frac{\rho - r}{\rho + r} h(0) - h(0)}{r} &\leq \frac{h(r\overrightarrow{v}) - h(0)}{r} \leq \frac{\frac{\rho + r}{\rho - r} h(0) - h(0)}{r} \\ \frac{h(0)\left(\frac{\rho - r}{\rho + r} - 1\right)}{r} &\leq \frac{h(r\overrightarrow{v}) - h(0)}{r} \leq \frac{h(0)\left(\frac{\rho + r}{\rho - r} - 1\right)}{r} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{h(0)(\rho-r-\rho-r)}{r(\rho+r)} &\leq \frac{h(r\overrightarrow{v})-h(0)}{r} \leq \frac{h(0)(\rho+r-\rho+r)}{r(\rho-r)} \\
-\frac{2h(0)\,r}{r(\rho+r)} &\leq \frac{h(r\overrightarrow{v})-h(0)}{r} \leq \frac{2h(0)\,r}{r(\rho-r)} \\
-\frac{2h(0)}{\rho-r} &\leq -\frac{2h(0)}{\rho+r} \leq \frac{h(r\overrightarrow{v})-h(0)}{r} \leq \frac{2h(0)}{\rho-r} \\
\left|\frac{h(r\overrightarrow{v})-h(0)}{r}\right| &\leq \frac{2h(0)}{\rho-r},
\end{aligned}$$

así:

$$\lim_{r\to0^+}\left|\frac{h(0+r\overrightarrow{v})-h(0)}{r}\right| \leq \frac{2h(0)}{\rho},$$

y por lo tanto

$$|\triangledown h(0)| \leq \frac{2h(0)}{\rho}. \tag{$\star$}$$

Ahora, utilicemos el resultado anterior para deducir que

$$|\triangledown h(z)| \leq \frac{2\rho}{\rho^2-|z|^2}h(z) \qquad (|z|<\rho).$$

Sean z_o en $\triangle(0,\rho)$, $z_o\neq 0$ y

$$u(z) = h\left(\rho^2\frac{\rho\left(\frac{z}{\rho}+\frac{z_o}{\rho}\right)}{\rho^2\left(1+\frac{\overline{z_o}}{\rho^2}z\right)}\right) = h\left(\rho^2\frac{z+z_o}{\rho^2+\overline{z_o}z}\right).$$

Entonces

$$\begin{aligned}
h(0) &= h(z_o) \quad \text{y} \\
\triangledown(u) &= \left(\tfrac{\partial u}{\partial x}\ ,\ \tfrac{\partial u}{\partial y}\right). \\
\frac{\partial}{\partial z} &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x}-i\frac{\partial}{\partial y}\right) \\
\frac{\partial}{\partial \overline{z}} &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x}+i\frac{\partial}{\partial y}\right). \\
\frac{\partial}{\partial z}+\frac{\partial}{\partial \overline{z}} &= \frac{\partial}{\partial x} \\
\frac{\partial}{\partial \overline{z}}-\frac{\partial}{\partial z} &= i\frac{\partial}{\partial y}.
\end{aligned}$$

De donde

$$\triangledown(u) = \left(\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial u}{\partial \overline{z}}\ ,\ -i\left(\frac{\partial u}{\partial \overline{z}}-\frac{\partial u}{\partial z}\right)\right).$$

Sea

$$\mathrm{T}(z) = \rho^2\frac{z+z_o}{\rho^2+\overline{z_o}z}.$$

$$\therefore \quad \mathrm{T}'(z) = \rho^2\frac{\rho^2+\overline{z_o}z-\overline{z_o}(z+z_o)}{(\rho^2+\overline{z_o}z)^2}$$

$$\therefore\ \mathrm{T}'(0)=\frac{\rho^2-|z_o|^2}{\rho^2}$$

Aplicando la regla de la cadena, tenemos

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial z}&=\frac{\partial h}{\partial z}\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial z}+\frac{\partial h}{\partial \overline{z}}\frac{\partial \overline{\mathrm{T}}}{\partial z}=\frac{\partial h}{\partial z}\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial z}+0,\\ \frac{\partial u}{\partial \overline{z}}&=\frac{\partial h}{\partial z}\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial \overline{z}}+\frac{\partial h}{\partial \overline{z}}\frac{\partial \overline{\mathrm{T}}}{\partial \overline{z}}=0+\frac{\partial h}{\partial \overline{z}}\frac{\partial \overline{\mathrm{T}}}{\partial \overline{z}},\end{aligned}$$

entonces

$$\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial u}{\partial \overline{z}}=\frac{\partial h}{\partial z}\mathrm{T}'+\frac{\partial h}{\partial \overline{z}}\overline{\mathrm{T}'}$$

y

$$\frac{\partial u}{\partial z}-\frac{\partial u}{\partial \overline{z}}=\frac{\partial h}{\partial z}\mathrm{T}'-\frac{\partial h}{\partial \overline{z}}\overline{\mathrm{T}'},$$

así

$$\begin{aligned}\bigtriangledown u&=\left(\frac{\partial h}{\partial z}\mathrm{T}'+\frac{\partial h}{\partial \overline{z}}\overline{\mathrm{T}'}\,,\,i\left(\frac{\partial h}{\partial z}\mathrm{T}'-\frac{\partial h}{\partial \overline{z}}\overline{\mathrm{T}'}\right)\right)\\ &=\left(\frac{\partial h}{\partial z}\mathrm{T}'\,,\,i\frac{\partial h}{\partial z}\mathrm{T}'\right)+\left(\frac{\partial h}{\partial \overline{z}}\overline{\mathrm{T}'}\,,\,-i\frac{\partial h}{\partial \overline{z}}\overline{\mathrm{T}'}\right).\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}|\bigtriangledown u|^2&=\left(\frac{\partial h}{\partial z}\right)^2\mathrm{T}'^2+\left(\frac{\partial h}{\partial \overline{z}}\right)^2\overline{\mathrm{T}'}^2+2\frac{\partial h}{\partial z}\frac{\partial h}{\partial \overline{z}}\mathrm{T}'\overline{\mathrm{T}'}+i^2\left(\frac{\partial h}{\partial z}\right)^2\mathrm{T}'^2\\ &\quad+2\frac{\partial h}{\partial z}\frac{\partial h}{\partial \overline{z}}\mathrm{T}'\overline{\mathrm{T}'}-\left(\frac{\partial h}{\partial \overline{z}}\right)^2\overline{\mathrm{T}'}^2,\end{aligned}$$

$$|\bigtriangledown u|^2=4\left|\mathrm{T}'\right|^2\left(\frac{\partial h}{\partial z}\frac{\partial h}{\partial \overline{z}}\right).$$

$$\bigtriangledown h=\left(\frac{\partial h}{\partial z}+\frac{\partial h}{\partial \overline{z}}\,,\,i\left(\frac{\partial h}{\partial z}-\frac{\partial h}{\partial \overline{z}}\right)\right),$$

$$|\bigtriangledown h|^2=4\frac{\partial h}{\partial z}\frac{\partial h}{\partial \overline{z}},$$

$$\begin{aligned}|\bigtriangledown u(z)|^2&=\left|\mathrm{T}'(z)\right|^2|\bigtriangledown h(\mathrm{T}(z))|^2,\\ |\bigtriangledown u(z)|&=\left|\mathrm{T}'(z)\right||\bigtriangledown h(\mathrm{T}(z))|,\\ |\bigtriangledown u(0)|&=\left|\mathrm{T}'(0)\right||\bigtriangledown h(z_o)|=\left(\frac{\rho^2-|z_o|^2}{\rho^2}\right)|\bigtriangledown h(z_o)|.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}|\bigtriangledown h(z_o)|&=\frac{\rho^2}{\rho^2-|z_o|^2}|\bigtriangledown u(0)|\\ &\le\frac{\rho^2}{\rho^2-|z_o|^2}\frac{2}{\rho}u(0)\qquad(\text{por }\star)\\ &=\frac{2\rho}{\rho^2-|z_o|^2}h(z_o).\end{aligned}$$

$$\therefore\ |\bigtriangledown h(z_o)|=\frac{2\rho}{\rho^2-|z_o|^2}h(z_o).\qquad(|z_o|<\rho).\quad\blacksquare$$

2. ■ Pruebe que si f es una función holomorfa en $\triangle(0,\rho)$, la cual satisface que $0<|f|<1$, entonces

$$|f(z)| \leq |f(0)|^{\frac{(\rho-|z|)}{(\rho+|z|)}} \qquad (|z|<\rho).$$

Prueba:

La función $|f|>0$, la podemos componer con $\log$. Entonces

$$g := -\log|f|$$

es armónica y positiva, por lo tanto le podemos aplicar la Desigualdad de Harnack.

Sea $z \in \triangle(0,\rho)$ con $|z|=r<\rho$, entonces

$$\begin{aligned}
\frac{\rho-r}{\rho+r} g(0) &\leq g(z) \leq \frac{\rho+r}{\rho-r} g(0) \\
\frac{\rho-r}{\rho+r}(-\log|f(0)|) &\leq -\log|f(z)| \leq \frac{\rho+r}{\rho-r}(-\log|f(0)|) \\
\frac{\rho-r}{\rho+r}\log|f(0)| &\geq \log|f(z)| \geq \frac{\rho+r}{\rho-r}\log|f(0)| \\
\frac{\rho+r}{\rho-r}\log|f(0)| &\leq \log|f(z)| \leq \frac{\rho-r}{\rho+r}\log|f(0)| \\
e^{\frac{\rho+r}{\rho-r}\log|f(0)|} &\leq |f(z)| \leq e^{\frac{\rho-r}{\rho+r}\log|f(0)|} \\
|f(0)|^{\frac{\rho+r}{\rho-r}} &\leq |f(z)| \leq |f(0)|^{\frac{\rho-r}{\rho+r}} \qquad (r<\rho). \quad \blacksquare
\end{aligned}$$

3. ■ Pruebe que si $\triangle = \triangle(0,1)$, entonces

$$\tau_{\triangle}(z,w) = \frac{1+\left|\frac{z-w}{1-z\overline{w}}\right|}{1-\left|\frac{z-w}{1-z\overline{w}}\right|} \qquad (z,w\in\triangle).$$

Prueba:

Sean $z_o, w_o \in \triangle(0,1)$ y sea

$$\mathrm{T}(z) := \frac{z-w_o}{1-z\overline{w_o}}.$$

Apliquemos el Principio de Subordinacion a T en $\mathrm{D}_1 = \mathrm{D}_2 = \triangle(0,1)$,

$$\mathrm{T}{:}\mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{D}, \qquad (\mathrm{T}(w_o)=0).$$

$$\tau_{\mathrm{D}_2}(\mathrm{T}(z_o),\mathrm{T}(w_0)) = \tau_{\mathrm{D}_1}(z_o,w_o).$$

$$\tau_{\triangle}(z_o,w_o) = \tau_{\triangle}\left(\frac{z_o-w_o}{1-\overline{w_o}z_o},0\right) = \frac{1+\left|\frac{z_o-w_o}{1-z_o\overline{w_o}}\right|}{1-\left|\frac{z_o-w_o}{1-z_o\overline{w_o}}\right|},$$

por el Teorema 1.3.5.

Luego

$$\tau_{\triangle}(z,w) = \frac{1+\left|\frac{z-w}{1-z\overline{w}}\right|}{1-\left|\frac{z-w}{1-z\overline{w}}\right|} \qquad (z,w\in\triangle). \quad \blacksquare$$

4. ■ Sea D un dominio acotado en $\mathbb{C}$ de diámetro δ.

(i) Pruebe que

$$\tau_D(z,w) \geq \frac{\delta+|z-w|}{\delta-|z-w|} \qquad (z,w\in D),$$

y deduzca que $\log\tau_D$ es una métrica en D que da origen a la topología usual en D.

(ii) Pruebe que si $w\in D$ y $\zeta\in\partial D$ entonces

$$\tau_D(z,w)\longrightarrow\infty \quad \text{cuando } z\longrightarrow\zeta,$$

y deduzca que el espacio métrico $(D,\log\tau_D)$ es completo.

Pruebe también que las conclusiones finales de (i) y (ii) permanecen válidas si D es cualquier dominio en $\mathbb{C}_\infty$ conformemente equivalente a un dominio acotado.

Prueba:

(i) :

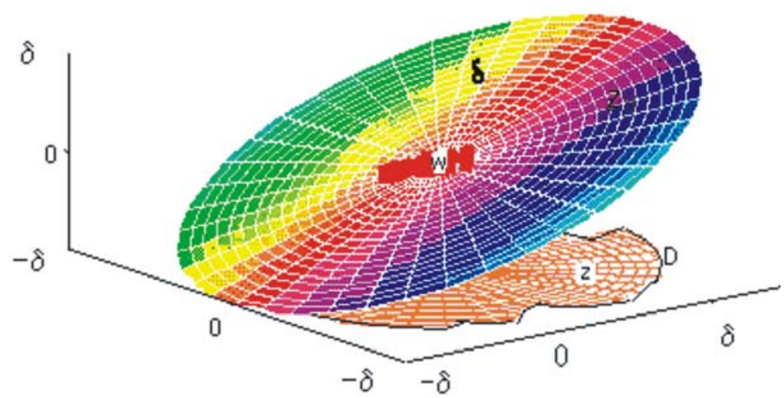


Figura 7

Sean w_o, $z_o\in D$. Consideremos el disco $\Delta=\Delta(w_o,\delta)$ tal que $D\subset\triangle(w_o,\delta)$.

$$\tau_{\triangle}(z,w)\leq\tau_D(z,w) \qquad (\forall w,z\in D).$$

En particular

$$\frac{\delta+|z_o-w_o|}{\delta-|z_o-w_o|} = \tau_{\triangle}(z_o,w_o)\leq\tau_D(z_o,w_o).$$

Veamos que $\log \tau_D$ es una métrica en D que da origen a la topología usual en D.

Para probar que $\log \tau_D$ es una métrica sólo falta que veamos que $\log \tau_D(z,w) = 0$ si y sólo si $z = w$; las demás condiciones se cumplen por el Teorema 1.3.8.

Sean $z, w \in D$,

Si $z = w$, $\tau_D(z,w) = 1$ de donde $\log \tau_D = 0$.

Ahora supongamos que $\log \tau_D = 0$ y $z \neq w$, entonces

$$\tau_D(z,w) = 1 \geq \frac{\delta + |z-w|}{\delta - |z-w|},$$

es decir

$$\begin{aligned} \delta - |z-w| &\geq \delta + |z-w| \\ -|z-w| &\geq |z-w|, \end{aligned}$$

lo cual es una contradicción. Luego $\log \tau_D = 0$ si y sólo si $z = w$.

Todo abierto en D bajo la topología euclídea es abierto en D bajo $\log \tau_D$.

Sea A abierto en D bajo la topología euclídea.

Sea $z_o \in A$

$$\therefore\ (\exists \rho > 0)\left(\Delta(z_o, \rho) \subseteq A\ \wedge\ \rho < \delta\right).$$

Sea $r = \log \frac{\delta+\rho}{\delta-\rho}$

$$\therefore\ \rho = \frac{\delta(e^r - 1)}{e^r + 1}.$$

Así,

$$\Delta_d(z_o, r) := \{w \in D / \log \tau_D(w, z_o) < r\} \subseteq A.$$

En efecto, si $w \in D$ y $\log \tau_D(w, z_o) < r$, entonces

$$\log \frac{\delta + |w - z_o|}{\delta - |w - z_o|} \leq \log \tau_D(w, z_o) < r,$$

luego

$$\begin{aligned} &\frac{\delta + |w - z_o|}{\delta - |w - z_o|} < e^r \\ \therefore\quad &\delta + |w - z_o| < \delta e^r - e^r |w - z_o| \\ \therefore\quad &0 \leq |w - z_o|(1 + e^r) < \delta(e^r - 1) \\ \therefore\quad &|w - z_o| < \delta \frac{e^r - 1}{e^r + 1} = \rho, \end{aligned}$$

o sea que $w \in \Delta(z_o, \rho)$

$$\therefore\ w \in A.$$

Luego A es abierto bajo $\log \tau_D$.

Recíprocamente, sea A abierto en D bajo la métrica $\log \tau_D$.

Sea $z_o \in A$

$$\therefore\ (\exists r > 0)\left(\Delta_d\left(z_o, r\right) \subseteq A\right).$$

Como

$$\begin{array}{rccl} \varphi: & D & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & z & \longmapsto & \varphi\left(z\right) = \log \tau_D\left(z, z_o\right) \end{array}$$

es continua (Teorema 1.3.8) respecto a la métrica euclídea,
$B = \varphi^{-1}\left(\left(-r, r\right)\right)$ es abierto euclídeo en D.
Como $\varphi\left(z_o\right) = \log \tau_D\left(z_o, z_o\right) = 0 \in (-r, r)$ entonces $z_o \in B$. Pero $B \subseteq \Delta_d\left(z_o, r\right)$ (si $z \in B$, $d\left(z, z_o\right) = \varphi\left(z\right) \in (-r, r)\ \therefore\ d\left(z, z_o\right) < r$).

Luego $z_o \in B \subseteq A$.

Luego A es abierto euclídeo. ■

(ii) Supongamos que Ω es simplemente conexo.

Sea $w \in \Omega$. Por el Teorema de Riemann,

$$\left(\exists f : \Omega \longrightarrow \mathbb{D} \text{ conforme}\right)\left(f\left(w\right) = 0\right).$$

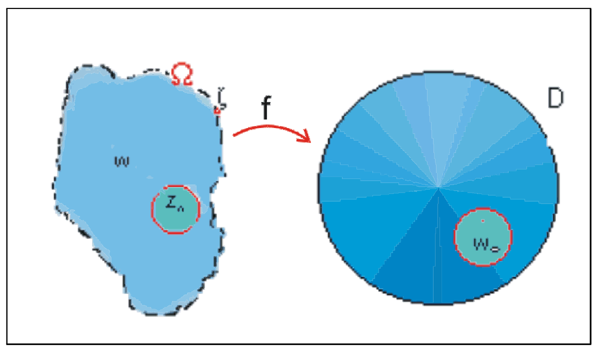


Figura 8

Sea $\zeta \in \partial\Omega$. Veamos que $\tau_\Omega\left(w, z\right) \to \infty$ si $z \to \zeta$. Si $\{z_n\}$ es una sucesión tal que $z_n \in \Omega$, $z_n \to \zeta$ y

$$\alpha: = \liminf_{n\to\infty} \tau_\Omega\left(w, z_n\right),$$

mostremos que $\alpha = \infty$.

Tomemos una subsucesión $\{z_{n_k}\}$ tal que $\tau_\Omega\left(w, z_{n_k}\right) \to \alpha$. (Usaremos la misma $\{z_n\}$ para evitar complicaciones en la notación).

$\tau_\Omega\left(w, z_n\right) \to \alpha$,

$\{f\left(z_n\right)\}$ es una sucesión en $\overline{\mathbb{D}}$, que es compacto.

Existen una subsucesión $\{z_{n_k}\}$ y $w_o \in \overline{\mathbb{D}}$ tales que

$$f\left(z_{n_k}\right) \to w_o.$$

Veamos que $w_o \in \partial\mathbb{D}$.

Si $w_o \in \mathbb{D}$, sea $z_o \in \Omega$ tal que $f(z_o) = w_o$. Entonces $z_o = f^{-1}(w_o) = \lim_{n\longrightarrow\infty} z_{n_k} = \zeta$. Esto contradice el hecho de que $\zeta \in \partial\Omega$; por lo tanto $w_o \in \partial\mathbb{D}$.

$$\begin{aligned}
\tau_\Omega(w, z_{n_k}) &= \tau_{\mathbb{D}}(f(w), f(z_{n_k})) \\
&= \tau_{\mathbb{D}}(0, f(z_{n_k})) \\
&= \frac{1+|f(z_{n_k})|}{1-|f(z_{n_k})|} \to \infty \text{ cuando } k \to \infty.
\end{aligned}$$

De donde

$$\alpha = \infty.$$

Sea, ahora, $\{z_n\}$ una sucesión de Cauchy en D con la métrica ρ, donde

$$\rho(z,w) = \log \tau_D(z,w). \quad (z, w \in D).$$

Fijemos $w \in D$. Sea $\Delta = \Delta(w, \delta)$

$$\forall z \in D,\ \tau_D(z,w) \geq \tau_\Delta(z,w) = \frac{\delta + |z-w|}{\delta - |z-w|}$$

Dado $\epsilon > 0$, $(\exists N \in \mathbb{Z}^+)(\forall m, n \geq N)$

$$\rho(z_n, z_m) < \epsilon,$$

entonces

$$\begin{aligned}
e^\epsilon &> \tau_D(z_n, z_m) \geq \frac{\delta + |z_n - z_m|}{\delta - |z_n - z_m|} \\
e^\epsilon\delta - e^\epsilon|z_n - z_m| &> \delta + |z_n - z_m| \\
|z_n - z_m| &< \frac{\delta(e^\epsilon - 1)}{e^\epsilon + 1} \underset{\epsilon\to0^+}{\longrightarrow} 0\ . \\
&\therefore \quad \exists z_o = \lim_{n\to\infty} z_n, \\
&\therefore \quad z_o \in \overline{D}
\end{aligned}$$

por lo tanto

$$z_n \longrightarrow z_o \text{ en } \mathbb{C}.$$

Supongamos $z_o \in \partial D$, entonces

$$\tau_D(z_n, z_N) \longrightarrow \infty \text{ cuando } n \longrightarrow \infty.$$

Pero $\tau_D(z_n, z_N) < e^\epsilon$ para $n \geq N$, luego $z_o \notin \partial D$.

$$\therefore \quad z_o \in D. \quad (n \geq N)$$

$$1 \quad \leq \quad \tau_D(z_n, z_o) \leq \tau_D(z_n, z_m)\,\tau_D(z_m, z_o).$$

Como τ_D es continua,

$$\begin{aligned}
\tau_D(z_n, z_o) &\to \tau_D(z_o, z_o) = 1. \\
\rho(z_n, z_o) &= \log \tau_D(z_n, z_o) \longrightarrow 0.
\end{aligned}$$

Ahora probemos que si D es cualquier dominio en C_∞ conformemente equivalente a un dominio acotado, entonces $\log \tau_D$ es una métrica en D que da origen a la topología usual en D.

Del Teorema 1.3.8 sabemos que τ_D es una semimétrica continua en D.

Sean $z, w \in D$, entonces existe $g : D \to D_1$ tal que g es conforme y D_1

es un dominio acotado.

Veamos que $\log \tau_D(z,w) = 0$ si y sólo si $z = w$.

$\tau_D(z,w) = \tau_{D_1}(g(z), g(w))$ (Principio de Subordinación).

Pero D_1 es un dominio acotado, entonces

$$\log \tau_{D_1}(g(z), g(w)) = 0 \longleftrightarrow g(z) = g(w) \longleftrightarrow z = w.$$

Todo abierto en D bajo $\log \tau_D$ es abierto en D bajo la métrica usual d_∞.

En efecto,

$$\begin{aligned}
d_\infty(z,w) &= \frac{|z-w|}{\left[\left(1+|z|^2\right)\left(1+|w|^2\right)\right]^{\frac{1}{2}}}; \qquad (z,w \in \mathbb{C}). \\
d_\infty(z,\infty) &= \frac{1}{\left(1+|z|^2\right)^{\frac{1}{2}}}; \qquad (z \in \mathbb{C}). \\
\triangle_\infty(z_o,r) &= \{w \in D / d_\infty(z_o,w) < r\}.
\end{aligned}$$

Sea $\Delta = \{z \in D / \log \tau_D(z_o,z) < r\}$, con $z_o \in D$, $r \in \mathbb{R}^+$.

$g(\Delta) = \{w \in D_1 / \log \tau_{D_1}(g(z_o), w) < r\}$ es un abierto en D_1 con respecto a $\log \tau_{D_1}$ y (por i) por lo tanto, abierto respecto a la métrica euclídea.

Como g es conforme, es continua, luego $\Delta = g^{-1}[g(\Delta)]$ es abierto respecto a d_∞.

Sea, ahora, A un abierto en D respecto a d_∞ y sea $z_o \in A$; luego $g(A)$ es abierto en D_1 respecto a la métrica euclídea. Por (i), $g(A)$ es abierto respecto a $\log \tau_{D_1}$, luego existe $\rho > 0$ tal que

$$\Delta = \{w \in D_1 / \log \tau_{D_1}(g(z_o), w) < \rho\} \subseteq g(A).$$

Pero $g^{-1}(\Delta) = \{z \in D / \log \tau_D(z_o,z) < \rho\}$ es abierto en D respecto a $\log \tau_D$, y claramente

$$z_o \in g^{-1}(\Delta) \subseteq g^{-1}[g(A)] = A.$$

Luego A es abierto respecto a $\log \tau_D$. ■

5. ■ Sean h una función armónica en una vecindad de $\overline{\triangle}(0,\rho)$, y $0 \leq r \leq \rho$. Defina

$$M_h(r) := \sup_{|z|=r} h(z).$$

Pruebe que

$$M_h(r) \leq \frac{2r}{\rho+r} M_h(\rho) + \frac{\rho-r}{\rho+r} h(0) \qquad (0 \leq r \leq \rho).$$

Deduzca la siguiente generalización del Teorema de Liouville

(Corolario 1.3.2) :

Si h es armónica en $\mathbb{C}$ y satisface

$$\liminf_{\rho\to\infty} \frac{M_h(\rho)}{\rho} \leq 0,$$

entonces h es constante.

Prueba:

Sea

$$u(z) = M_h(\rho) - h(z) \geq 0, \qquad \left(z = re^{it}\right).$$

La función $M_h(\rho) - h(z)$ es armónica positiva, entonces

$$\frac{\rho - r}{\rho + r} u(0) \leq u(z) \leq \frac{\rho + r}{\rho - r} u(0).$$

$$\begin{aligned}
\frac{\rho - r}{\rho + r}\left[M_h(\rho) - h(0)\right] &\leq M_h(\rho) - h(z) \\
&\leq \frac{\rho + r}{\rho - r}\left[M_h(\rho) - h(0)\right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
h(z) &\leq M_h(\rho) - \frac{\rho - r}{\rho + r}\left[M_h(\rho) - h(0)\right] \\
&= \frac{2r}{\rho + r} M_h(\rho) + \frac{\rho - r}{\rho + r} h(0),
\end{aligned}$$

de donde

$$M_h(r) \leq \frac{2r}{\rho + r} M_h(\rho) + \frac{\rho - r}{\rho + r} h(0).$$

Si $m_h(r) := \inf_{|z|=r} h(z)$, la función $v(z) = h(z) - m_h(\rho)$ es armónica y positiva. Entonces

$$\frac{\rho - r}{\rho + r} v(0) \leq v(z) \leq \frac{\rho + r}{\rho - r} v(0)$$

$$\begin{aligned}
\frac{\rho - r}{\rho + r}\left[h(0) - m_h(\rho)\right] &\leq h(z) - m_h(\rho) \\
\frac{\rho - r}{\rho + r} h(0) + m_h(\rho) - \frac{\rho - r}{\rho + r} m_h(\rho) &\leq h(z) \\
\frac{\rho - r}{\rho + r} h(0) + \frac{2r}{\rho + r} m_h(\rho) &\leq h(z)
\end{aligned}$$

$$\frac{2r}{\rho + r} m_h(\rho) + \frac{\rho - r}{\rho + r} h(0) \leq m_h(r) \leq \frac{2r}{\rho + r} M_h(\rho) + \frac{\rho - r}{\rho + r} h(0).$$

Ahora probemos la generalización del Teorema de Liouville.

Sean $r > 0$ y $\rho > r$.

La función h es en particular armónica en $\overline{\triangle}(0, \rho)$. Podemos por lo tanto aplicar la desigualdad anterior:

$$\begin{aligned} M_h(r) &\leq \frac{2r}{\rho+r} M_h(\rho) + \frac{\rho-r}{\rho+r} h(0) \\ M_h(r) &\leq \frac{2r\rho}{\rho+r} \frac{M_h(\rho)}{\rho} + \frac{\rho-r}{\rho+r} h(0) \end{aligned}$$

$$M_h(r) - \frac{\rho-r}{\rho+r} h(0) \leq \frac{2r\rho}{\rho+r} \frac{M_h(\rho)}{\rho}$$

$$\lim_{\rho\to\infty} \frac{M_h(r) - \frac{\rho-r}{\rho+r} h(0)}{\frac{2r\rho}{\rho+r}} \leq \lim_{\rho\to\infty} \frac{M_h(\rho)}{\rho}.$$

$$0 \leq \frac{M_h(r) - h(0)}{2r} \leq 0.$$

De donde

$$M_h(r) = h(0). \quad (\forall r > 0).$$

En particular, es claro que $h(0) = \max\left\{h(z) / z \in \overline{\Delta}(0,1)\right\}$. Por el Principio del Máximo, h es constante en $\Delta(0,1)$; y por el Principio de Identidad h es constante en $\mathbb{C}$. ■

6. ■ Sean f una función holomorfa en una vecindad de $\overline{\triangle}(0,\rho)$, y $0 \leq r \leq \rho$. Defina

$$M_f(r) := \sup_{|z|=r} |f(z)| \qquad \text{y} \qquad A_f(r) := \sup_{|z|=r} \operatorname{Re} f(z).$$

Pruebe la desigualdad de Borel-Caratheodory:

$$M_f(r) \leq \frac{2r}{\rho-r} A_f(\rho) + \frac{\rho+r}{\rho-r} |f(0)| \qquad (0 \leq r \leq \rho).$$

Prueba:

Sea g definida por $g(z) := A_f(\rho) - f(z)$. Aplicando el Ejercicio 1.2.4. tenemos:

$$\begin{aligned} g(z) - g(0) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{2z}{\rho e^{i\theta} - z} \operatorname{Re} g\left(\rho e^{i\theta}\right) d\theta \quad (|z| < \rho) \\ f(0) - f(z) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{2z}{\rho e^{i\theta} - z} \left(A_f(\rho) - \operatorname{Re} f\left(\rho e^{i\theta}\right)\right) d\theta, \end{aligned}$$

de donde

$$|f(0) - f(z)| \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{2|z|}{|\rho e^{i\theta} - z|} \left|A_f(\rho) - \operatorname{Re} f\left(\rho e^{i\theta}\right)\right| d\theta.$$

Para $|z| = r$; $\left|\rho e^{i\theta} - z\right| \geq \rho - r$,

$$A_f(\rho) - \operatorname{Re} f\left(\rho e^{i\theta}\right) = \sup_{|z|=\rho} \operatorname{Re} f(z) - \operatorname{Re} f\left(\rho e^{i\theta}\right) \geq 0, \quad (\theta \in [0, 2\pi])$$

de donde

$$\begin{aligned}
|f(z)| - |f(0)| &\leq |f(z) - f(0)| \leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{2r}{\rho - r}\left(A_f(\rho) - \mathrm{Re} f\left(\rho e^{i\theta}\right)\right) d\theta \\
|f(z)| - |f(0)| &\leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{2r}{\rho - r} A_f(\rho)\, d\theta - \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{2r}{\rho - r} \mathrm{Re}\ f\left(\rho e^{i\theta}\right) d\theta \\
|f(z)| &\leq |f(0)| + \frac{2r}{\rho - r} A_f(\rho) - \frac{2r}{\rho - r}\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \mathrm{Re}\ f\left(\rho e^{i\theta}\right) d\theta\right) \\
&= |f(0)| + \frac{2r}{\rho - r} A_f(\rho) - \frac{2r}{\rho - r} \mathrm{Re}\ f(0) \quad \left(\begin{array}{l}\text{Propiedad del} \\ \text{Valor Medio.}\end{array}\right) \\
&\leq \frac{2r}{\rho - r} A_f(\rho) + |f(0)| + \frac{2r}{\rho - r}|f(0)| \\
&= \frac{2r}{\rho - r} A_f(\rho) + |f(0)|\left(1 + \frac{2r}{\rho - r}\right),
\end{aligned}$$

así cuando $|z| = r$

$$|f(z)| \leq \frac{2r}{\rho - r} A_f(\rho) + \frac{\rho + r}{\rho - r}|f(0)|,$$

de donde

$$M_f(r) = \sup_{|z|=r} |f(z)| \leq \frac{2r}{\rho - r} A_f(\rho) + \frac{\rho + r}{\rho - r}|f(0)|. \quad \blacksquare$$

7. ■ Sea $(h_n)_{n\geq 1}$ una sucesión de funciones armónicas positivas en un dominio D. Pruebe que si $(h_n(z))_{n\geq 1}$ converge puntualmente para cada z en D, entonces $(h_n)_{n\geq 1}$ converge localmente, uniformemente en todo D.

Prueba:

Supongamos que $(h_n)_{n\geq 1}$ no converge localmente, uniformemente a ∞. Por el Teorema 1.3.10, existen una subsucesión $\left(h_{n_j}\right)$ y una función armónica h tales que h_{n_j} converge localmente, uniformemente a h en D.

Probemos que $(h_n)_{n\geq 1}$ converge localmente, uniformemente a h.

Sea K compacto en D.

Sabemos que

$$(\forall z \in D)\left(h(z) = \lim_{n\to\infty} h_n(z)\right).$$

Fijemos $w \in D$.

Sean $z \in K$ y $M = \max\{\tau_D(z, w) / z \in K\}$, entonces:

Si $h \equiv 0$,

$$\begin{aligned} M^{-1}h_n(w) &\leq \tau_D^{-1}(z,w)\,h_n(w) \leq h_n(z) \\ &\leq \tau_D(z,w)\,h_n(w) \leq Mh_n(w). \end{aligned}$$

Luego, dado $\epsilon > 0$ $(\exists N \in \mathbb{Z}^+)(\forall n \geq N)$

$$|h_n(w) - h(w)| < \epsilon M^{-1}.$$

De donde $(\forall z \in K)$

$$|h_n(z) - h(z)| = h_n(z) \leq \tau_D(z,w)\,h_n(w) \leq Mh_n(w) < \epsilon.$$

De donde $(h_n)_{n\geq 1}$ converge uniformemente a $0 = h$ en K.

Como

$$(\forall z \in D)\left(h(z) = \lim_{j\to\infty} h_{n_j}(z) \geq 0\right),$$

entonces $h \geq 0$ en D; y, por el Principio del Mínimo, si no se cumple que $h \equiv 0$, entonces $h > 0$.

Sea, pues $h > 0$.

Sea K compacto en D. Entonces existe $b > 0$ tal que

$$(\forall z \in K)(h(z) \leq b).$$

Sea $d = \log \tau_D$.

Sean $\epsilon > 0$, $r = \log \frac{\epsilon}{2b}$

$$\therefore\ K \subseteq \bigcup_{z\in K} B_d(z,r).$$

De donde existen $z_1, \ldots, z_l \in K$ tales que

$$K \subseteq \bigcup_{i=1}^{l} B_i,\ \text{donde } B_i = B_d(z_i, r).$$

Definamos $\mathbb{J}_l = \{1, \ldots, l\}$ y

$$M_i :\ = \max\left\{\tau_D(w, z_i)/w \in \overline{B_i}\right\} \quad (i \in \mathbb{J}_l).$$

Sean $M = \max\{M_i/i \in \mathbb{J}_l\}$ y $j \in \mathbb{J}_l$. Como $\lim_{n\longrightarrow\infty} h_n(z_j) = h(z_j)$,

$$\left(\exists N_j \in \mathbb{Z}^+\right)(\forall n \geq N_j)\left(|h_n(z_j) - h(z_j)| < \frac{\epsilon}{2M}\right).$$

Sea $N = \max\{N_i/i \in \mathbb{J}_l\}$. Sean $n \geq N$ y $z \in K$.

Así, $(\exists i \in \mathbb{J}_l)(z \in B_i)$; entonces como $n \geq N_i$,

$$|h_n(z_i) - h(z_i)| < \frac{\epsilon}{2M}$$

y

$$\tau_D(z, z_i) \leq M_i$$

$$\therefore\ M_i^{-1} \leq \tau_D(z, z_i)^{-1}.$$

Así

$$\begin{aligned} M_i^{-1}h_n(z_i) &\leq \tau_D(z,z_i)^{-1}\,h_n(z_i) \leq h_n(z) \\ &\leq \tau_D(z,z_i)\,h_n(z_i) \leq M_ih_n(z_i) \qquad (1.5) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
M_i^{-1}h(z_i) &\leq \tau_D(z,z_i)^{-1}h(z_i) \leq h(z) \\
&\leq \tau_D(z,z_i)h(z_i) \leq M_i h(z_i) \qquad (1.6) \\
-M_i h(z_i) &\leq \tau_D(z,z_i)^{-1}h(z_i) \leq -h(z) \\
&\leq \tau_D(z,z_i)h(z_i) \leq -M_i^{-1}h(z_i). \qquad (1.7)
\end{aligned}$$

Sumando 1.5 y 1.7 tenemos

$$\begin{aligned}
M_i^{-1}h_n(z_i) - M_i h(z_i) &\leq h_n(z) - h(z) \\
&\leq M_i h_n(z_i) - M_i^{-1}h(z_i) \\
M_i^{-1}(h_n(z_i) - h(z_i)) + h(z_i)\left(M_i^{-1} - M_i\right) &\leq h_n(z) - h(z) \\
&\leq M_i(h_n(z_i) - h(z_i)) \\
&\quad + h(z_i)\left(M_i - M_i^{-1}\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
-M|h_n(z_i) - h(z_i)| - bM &\leq h_n(z) - h(z) \leq M|h_n(z_i) - h(z_i)| + bM \\
|h_n(z) - h(z)| &\leq M|h_n(z_i) - h(z_i)| + bM < M\frac{\epsilon}{2M} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon,
\end{aligned}$$

ya que $(\forall j \in \mathbb{J}_l)\left(\forall w \in \overline{B_j}\right)(d(w,z_j) \leq r)$, entonces

$$\begin{aligned}
\log \tau_D(w,z_j) \leq r = \log\frac{\epsilon}{2b} \\
\therefore \quad \tau_D(w,z_j) \leq \frac{\epsilon}{2b} \\
\therefore \quad M_j \leq \frac{\epsilon}{2b} \\
\therefore \quad M \leq \frac{\epsilon}{2b}.
\end{aligned}$$

Luego $(h_n)_{n\geq 1}$ converge a h uniformemente en K. ■

8. ■ (i) Sean h y k funciones armónicas en una vecindad de $\overline{\Delta}(0,1)$ las cuales satisfacen

$$\begin{aligned}
|h(0)|, |k(0)| &\leq \lambda, \\
\left|h^+ - k^+\right| &\leq \lambda, \\
\max(h,k) &\geq -\lambda,
\end{aligned}$$

para alguna constante λ. Use la técnica del Teorema 1.3.11 para probar que existe una constante universal c_o tal que

$$\sup_{\Delta\left(0,\frac{1}{2}\right)} h \leq c_o\lambda \quad \text{y} \quad \sup_{\Delta\left(0,\frac{1}{2}\right)} k \leq c_o\lambda.$$

(ii) Deduzca el Teorema de Montel:

Si (f_n) es una sucesión de funciones holomorfas en un dominio D tal que $f_n(D) \subset \mathbb{C}\setminus\{0,1\}$ para toda n, entonces f_n tiene una subsucesión que tiende localmente, uniformemente a ∞ o alguna subsucesión $f_{n_j} \longrightarrow f$ localmente, uniformemente, donde f es holomorfa en D.

Prueba:

(i) Supongamos por contradicción, que no existe dicha constante c_o.

Sin pérdida de generalidad supongamos que $\sup\limits_{\Delta\left(0,\frac{1}{2}\right)} h = \infty$.

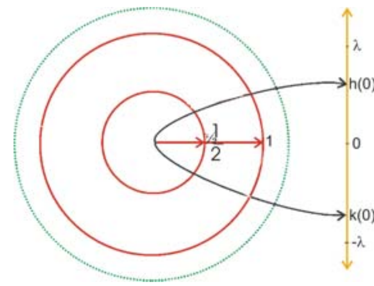


Figura 9

Sean

$$\begin{aligned}\widetilde{h}(z) &= h(z) - h(0),\\ \widetilde{k}(z) &= k(z) - k(0).\end{aligned}$$

Las funciones $\widetilde{h}(z)$ y $\widetilde{k}(z)$ son armónicas en una vecindad de $\overline{\Delta}(0,1)$ puesto que h y k lo son.

$$\begin{aligned}\widetilde{h}(0) &= h(0) - h(0) = 0,\\ \widetilde{k}(0) &= k(0) - k(0) = 0.\end{aligned}$$

Entonces por el Lema 1.3.12 existen discos $\Delta_1(w_1, r_1)$, $\Delta_2(w_2, r_2)$ tales que $\widetilde{h}(w_1) = 0$, $\widetilde{k}(w_2) = 0$, $\Delta_1(w_1, r_1) \subset \Delta(0,1)$, $\Delta_2(w_2, r_2) \subset \Delta(0,1)$ y

$$\sup_{\Delta\left(0,\frac{1}{2}\right)} \widetilde{h} \leq 3^{11} \sup_{\Delta(w_1,r_1)} \widetilde{h} \leq \left(3^{11}\right).\left(3^{11}\right) \sup_{\Delta\left(w_1,\frac{r_1}{2}\right)} \widetilde{h}. \tag{1.8}$$

$$\sup_{\Delta\left(0,\frac{1}{2}\right)} \widetilde{k} \leq 3^{11} \sup_{\Delta(w_2,r_2)} \widetilde{k} \leq \left(3^{11}\right).\left(3^{11}\right) \sup_{\Delta\left(w_2,\frac{r_2}{2}\right)} \widetilde{k}. \tag{1.9}$$

Ahora, si $z \in \overline{\Delta}(0,1)$,

$$\begin{aligned}\left|\widetilde{h}^{+}(z) - \widetilde{k}^{+}(z)\right| &= \left|(h(z) - h(0))^{+} - (k(z) - k(0))^{+}\right|\\ &\leq 3\lambda. \end{aligned}\tag{1.10}$$

Y

$$\begin{aligned}\max\left(\widetilde{h}, \widetilde{k}\right) &= \max(h(z) - h(0), k(z) - k(0))\\ &\geq \max(h(z) - \lambda, k(z) - \lambda)\\ &\geq -2\lambda. \end{aligned}\tag{1.11}$$

Apliquemos el Lema 1.3.12 a $\widetilde{h}$ en cada uno de los discos $\Delta\left(0, 1 - \frac{1}{2^j}\right)$ para producir nuevos discos $\Delta(w_j, r_j)$ tales que $\widetilde{h}(w_j) = 0$ y

$$\begin{aligned}\sup_{\Delta(w_j,r_j)} \widetilde{h} &\geq 3^{-11} \sup_{\Delta\left(0,1-\frac{1}{2^{j+1}}\right)} \widetilde{h},\\ \sup_{\Delta\left(w_j,\frac{r_j}{2}\right)} \widetilde{h} &\geq 3^{-11} \sup_{\Delta(w_j,r_j)} \widetilde{h}.\end{aligned}$$

Para cada $j \geq 2$ sea $M_j = \sup\limits_{\Delta(w_j,r_j)} \widetilde{h}$. Puesto que h no es acotada en $\Delta\left(0, \frac{1}{2}\right)$, ya que por suposición $\sup\limits_{\Delta\left(0,\frac{1}{2}\right)} h = \infty$, entonces

$$\lim_{j\to\infty} M_j \geq 3^{-11} \lim_{j\to\infty} \sup_{\Delta\left(0,\frac{1}{2^j}\right)} \widetilde{h} = +\infty.$$

Definamos dos sucesiones de funciones armónicas $\left(\widetilde{h}_j\right)_{j\geq 1}$ y $\left(\widetilde{k}_j\right)_{j\geq 1}$ en $\Delta(0,1)$ por

$$\widetilde{h}_j(z) := \frac{\widetilde{h}(w_j + r_j z)}{M_j} \text{ y } \widetilde{k}_j(z) := \frac{\widetilde{k}(w_j + r_j z)}{M_j} \qquad (|z| < 1).$$

Sea $z \in \Delta(0,1)$.

(i) Si $\widetilde{k}_j(z) \leq 0$,

$$\widetilde{k}_j(z) \leq 0 < 1 + \frac{3\lambda}{M_j}. \qquad (\text{por } 1.10).$$

(ii) Si $\widetilde{k}_j(z) > 0$

$$\widetilde{k}_j(z) = \widetilde{k}_j^+(z).$$

De donde

$$\begin{aligned} \widetilde{k}_j(z) &= \widetilde{k}_j^+(z) - \widetilde{h}_j^+(z) + \widetilde{h}_j^+(z) \\ &\leq \widetilde{h}_j^+(z) + \left|\widetilde{h}^+(z) - \widetilde{k}^+(z)\right| \\ &\leq 1 + 3\lambda. \end{aligned} \tag{1.12}$$

Entonces $\widetilde{h}_j$ y $\widetilde{k}_j$ tienen las siguientes propiedades:

(a) $\widetilde{h}_j(0) = 0$,

(b) $\sup_{\Delta\left(0,\frac{1}{2}\right)} \widetilde{h}_j \geq 3^{-11}$,

(c) $\left|\widetilde{h}_j^+ - \widetilde{k}_j^+\right| \leq \frac{3\lambda}{M_j}$,

(d) $\max\left(\widetilde{h}_j, \widetilde{k}_j\right) \geq \frac{-2\lambda}{M_j}$.

Evidentemente $\widetilde{h}_j \leq 1$ para toda j, entonces podemos aplicar el Teorema 1.3.10 a $(1-h_j)_{j\geq 1}$ para deducir que existe una subsucesión de los $\left(\widetilde{h}_j\right)$ que converge localmente, uniformemente a una función $\widehat{h}$ armónica en $\Delta(0,1)$. Los $\left(\widetilde{k}_j\right)$ son también uniformemente acotados superiormente, (de (1.12) tenemos que una cota es $1+3\lambda$), luego existe una subsucesión $\left(\widetilde{k}_{j_l}\right)$ de $\left(\widetilde{k}_j\right)$ que converge localmente, uniformemente a una función $\widehat{k}$ en $\Delta(0,1)$. Ambas, $\widehat{h}$ y $\widehat{k}$ son armónicas (o posiblemente $\widehat{k}$ es idénticamente $-\infty$), y tienen las siguientes propiedades:

(a) $\widehat{h}(0) = 0$,

(b) $\sup_{\Delta\left(0,\frac{1}{2}\right)} \widehat{h} \geq 3^{-11}$,

$$(c) \quad \widehat{h}^{+} = \widehat{k}^{+}$$
$$(d) \quad \text{máx}\left(\widehat{h}, \widehat{k}\right) \geq 0.$$

La propiedad (b) implica $\widehat{h}(\zeta) > 0$ para algún ζ y (c) nos dice que $\widehat{h} = \widehat{k}$ en una vecindad de ζ. Por el Principio de Identidad (Teorema 1.1.7) tenemos que $\widehat{h} = \widehat{k}$ en todo $\Delta(0,1)$. De (d) deducimos que $\widehat{h} \geq 0$ en $\Delta(0,1)$, y combinando esto con (a) y con el Principio del Máximo (Teorema 1.1.8), concluimos que $\widehat{h} \equiv 0$ en $\Delta(0,1)$. Pero esto es inconsistente con (b)!. Hemos llegado así a una contradicción. Luego existe una c_o tal que

$$\sup_{\Delta\left(0,\frac{1}{2}\right)} h \leq c_o\lambda \quad \text{y} \quad \sup_{\Delta\left(0,\frac{1}{2}\right)} k \leq c_o\lambda.$$

(ii) Por el Teorema 1.1.2, $f_n = h_n + ik_n$ en D, donde h_n y k_n son sucesiones de funciones armónicas conjugadas para todo n.

Definamos

$$\mathfrak{F} := \{f \text{ holomorfa en } D / f\ [D] \subseteq \mathbb{C}\setminus\{0,1\}\}.$$

Fijemos un punto $z_o = 0$ en D, (si $0 \notin D$ utilizamos una translación) y definamos $\mathfrak{G}$ y $\mathfrak{H}$ por:

$$\mathfrak{G} := \{f \in \mathfrak{F} / |f(0)| \leq 1\},$$
$$\mathfrak{H} := \{f \in \mathfrak{F} / |f(0)| > 1\}.$$

Así $\mathfrak{F} = \mathfrak{G} \cup \mathfrak{H}$.

Sea f_n una sucesión de funciones en $\mathfrak{F}$.

Veamos que si $f_n \in \mathfrak{G}$ existe una subsucesión f_{n_j} tal que $f_{n_j} \longrightarrow f$ localmente, uniformemente, donde f es holomorfa en D y que si $f_n \in \mathfrak{H}$ entonces existe una subsucesión que tiende a infinito localmente, uniformemente o alguna subsucesión $f_{n_j} \longrightarrow f$ localmente, uniformemente, donde f es holomorfa en D.

Sean a cualquier punto en D y γ una curva en D de 0 a a.

Sean $\Delta_o, \Delta_1, \ldots, \Delta_m = D_a$ discos en D con centros $0 = z_o, z_1, \ldots, z_m = a$ en $\{\gamma\}$ y radios $r_o, r_1, \ldots, r_m$, tales que z_{n-1} y z_n estan en $\Delta'_{n-1} \cap \Delta'_n$, con $\Delta'_{n-1} = \Delta\left(z_n, \frac{r_n}{2}\right)$ para $1 \leq n \leq m$. Supongamos también que $\overline{\Delta}_n \subset D$ para $0 \leq n \leq m$.

Sea $f = h + ik \in \mathfrak{G}$. Entonces

$$|h(0)|, |k(0)| \leq |f(0)| \leq 1.$$

Como $\overline{\Delta}_o$ es compacta y f es holomorfa y diferente de cero, entonces $|f|$ alcanza un máximo en algún punto $z \in \overline{\Delta}_o$. Así $h = \operatorname{Re} f$ y $k = \operatorname{Im} f$ son funciones acotadas en $\overline{\Delta}_o$. Luego existe una constante $\lambda_o > 0$ tal que

$$\begin{aligned} |h(0)|, |k(0)| &\leq \lambda_o, \\ \left|h^{+}(z) - k^{+}(z)\right| &\leq \lambda_o, \end{aligned}$$

$$\max (h,k)(z) \geq -\lambda_o, \qquad \left(\text{para } z \in \overline{\Delta_o}\right).$$

Entonces, por (i), existe una constante c_o tal que

$$\sup_{\Delta\left(0,\frac{r_o}{2}\right)} h = \sup_{\Delta\left(0,\frac{r_o}{2}\right)} \operatorname{Re} f \leq c_o \lambda_o,$$

y

$$\sup_{\Delta\left(0,\frac{r_o}{2}\right)} k = \sup_{\Delta\left(0,\frac{r_o}{2}\right)} \operatorname{Im} f \leq c_o \lambda_o,$$

para toda $f \in \mathfrak{G}$. Luego por el Ejercicio 6) $|f(z)| \leq C_o$ para todo z en Δ_o y $f \in \mathfrak{G}$, luego $|f(z_1)| \leq C_o$. Aplicando nuevamente (i) y la desigualdad de Borel-Caratheodory (Ejercicio 6) tenemos que $|f(z)| \leq C_1$, es decir, $\mathfrak{G}$ es uniformemente acotada por una constante C_1 en Δ_1. Continuando de esta forma llegamos a que $|f| \leq C_m$ en Δ_m para $f \in \mathfrak{G}$. En particular $|f| \leq C_a$ en D_a. Dado K compacto en D, $K \subseteq \bigcup_{a \in K} D_a$; luego existen $a_1, \ldots, a_l \in K$ tales que

$$K \subseteq \bigcup_{i=1}^{l} D_{a_i}.$$

Por consiguiente $|f|$ esta acotado por $\max\{C_{a_i}/i = 1, \ldots, l\}$ en K.

Sea $\{\xi_n\}$ un subconjunto denso y contable de K.

Sea (f_n) cualquier sucesión en $\mathfrak{G}$. Existe una constante $M_1 > 0$ tal que

$$|f_n(\xi_1)| < M_1, \qquad (n = 1, 2, \ldots).$$

Extraemos una subsucesión convergente $\left\{f_{n_r}^{(1)}(\xi_1)\right\}$, tal que $f_{n_1}^{(1)}(\xi_1), f_{n_2}^{(1)}(\xi_1), \ldots$ converge.

La sucesión $\left\{f_{n_r}^{(1)}(\xi_2)\right\}$ es acotada. Extraemos una subsucesión $\left\{f_{n_r}^{(2)}\right\}$ que converge en ξ_1 y ξ_2. Continuamos el proceso, hasta construir la sucesión diagonal $\left\{f_{n_r}^{(r)}\right\}$ que converge en ξ_n, $n = 1, 2, \ldots$.

Llamemos

$$g_r = f_{n_r}^{(r)}.$$

Entonces $\mathfrak{G}$ es equicontinuo en K. En efecto,

$$\mathfrak{G}' = \left\{f'/f \in \mathfrak{G}\right\},$$

es localmente acotada en K, entonces

$$\begin{aligned} \left|f(z) - f\left(z'\right)\right| &= \left|\int_z^{z'} f'(\xi)\, d\xi\right| \leq \int_z^{z'} \left|f'(\xi)\right| |d\xi| \qquad (1.13) \\ &< M\left|z - z'\right| \qquad (M > 0, \text{ constante}). \end{aligned}$$

Sea $\epsilon > 0$. Escojamos $\delta = \frac{\epsilon}{M}$.

Si $z, z' \in K$, $|z - z'| < \delta$, entonces por (1.13)

$$\left|f(z)-f\left(z'\right)\right|<\epsilon, \qquad (\forall f\in\mathfrak{G}).$$

Por lo tanto $\mathfrak{G}$ es equicontinua en K.

Así, dado $\epsilon>0$, existe $\delta>0$ tal que si $z,z'\in K$,

$$\left|z-z'\right|<\delta\Longrightarrow\left|g_n(z)-g_n\left(z'\right)\right|<\frac{\epsilon}{3} \quad (n=1,2,\ldots).$$

La compacidad de K implica que

$$K\subset\bigcup_{j=1}^{P}\Delta\left(\xi_j,\delta\right) \quad (\text{para } \xi_1,\ldots,\xi_P\in K).$$

Existe η_o tal que $n,m\geq\eta_o$ implica

$$\left|g_n\left(\xi_j\right)-g_m\left(\xi_j\right)\right|<\frac{\epsilon}{3} \quad (j=1,\ldots,P).$$

Finalmente, sea $z\in K$, existe un $j\in\{1,\ldots,P\}$ tal que $z\in\Delta\left(\xi_j,\delta\right)$. Si $n,m\geq\eta_o$

$$\begin{aligned}\left|g_n(z)-g_m(z)\right| &\leq \left|g_n(z)-g_n\left(\xi_j\right)\right|+\left|g_n\left(\xi_j\right)-g_m\left(\xi_j\right)\right| \\ &\quad+\left|g_m\left(\xi_j\right)-g_m(z)\right| \\ &< \epsilon.\end{aligned}$$

Así, (g_r) es una sucesión uniformemente Cauchy. Podemos concluir que existe una subsucesión $f_{n_j}\longrightarrow f$ localmente, uniformemente, donde f es holomorfa en D.

Ahora consideremos $\mathfrak{H}:=\{f\in\mathfrak{F}/\left|f(z_o)\right|>1\}$, (que ∞ es límite de una sucesión de funciones en $\mathfrak{H}$ se puede ver tomando las funciones constantes).

Si $f\in\mathfrak{H}$ entonces $\frac{1}{f}$ es holomorfa en D puesto que f nunca se anula. Además $\frac{1}{f}$ nunca se anula y nunca toma el valor de 1, más aún $\left|\frac{1}{f}(z_o)\right|\leq 1$. Entonces $\widetilde{\mathfrak{H}}:=\left\{\frac{1}{f}/f\in\mathfrak{H}\right\}\subset\mathfrak{G}$. Así, si (f_n) es una sucesión en $\mathfrak{H}$ existe una subsucesión (f_{n_r}) y una función $\widetilde{f}$ holomorfa en D tal que una subsucesión $\frac{1}{f_{n_r}}\longrightarrow\widetilde{f}\in\widetilde{h}$ localmente, uniformemente, para $\widetilde{f}\in\widetilde{\mathfrak{H}}$ y por el Teorema de Hurwitz $\widetilde{f}\equiv 0$ o $\widetilde{f}$ nunca se anula. Si $\widetilde{f}\equiv 0$ entonces $f_{n_r}(z)\longrightarrow\infty$ localmente, uniformemente en D. Si $\widetilde{f}$ nunca se anula $\frac{1}{\widetilde{f}}$ es holomorfa y entonces $f_{n_r}(z)\longrightarrow\frac{1}{\widetilde{f}(z)}$ localmente, uniformemente en D. ∎

2 Funciones Subarmónicas

2.1 Funciones Semicontinuas Superiormente

Las funciones subarmónicas son semicontinuas superiormente, por lo tanto le daremos primero una mirada a las funciones semicontinuas.

Definición 2.1.1 *Sea X un espacio topológico. Decimos que una función $u : X \longrightarrow [-\infty, \infty)$ es* **semicontinua superiormente** *si el conjunto $\{x \in X / u(x) < \alpha\}$ es abierto en X para cada $\alpha \in \mathbb{R}$. También $v : X \longrightarrow (-\infty, \infty]$ es* **semicontinua inferiormente** *si $-v$ es semicontinua superiormente.*

Un chequeo directo muestra que u es semicontinua superiormente si y sólo si

$$\limsup_{y \longrightarrow x} u(y) \leq u(x) \qquad\qquad (x \in X).$$

En particular la función u es **continua** si y sólo si es semicontinua superior e inferiormente. En efecto

"$\Longrightarrow$" $(\alpha, \infty]$ y $[-\infty, \alpha)$ son abiertos en $[-\infty, \infty]$. Entonces como la función u es continua $u^{-1}((\alpha, \infty])$ y $u^{-1}([-\infty, \alpha))$ son abiertos en X.

"$\Longleftarrow$" Por definición, $u : X \longrightarrow \mathbb{R}$.

Sea G abierto en $[-\infty, \infty]$.

$$u^{-1}(G) = u^{-1}(G \cap \mathbb{R})$$

y $G \cap \mathbb{R}$ es abierto en $\mathbb{R}$. Basta considerar G abierto en $\mathbb{R}$.

G es una unión disjunta y contable de intervalos abiertos.

$$\begin{aligned}(a,+\infty) &= \bigcup_{n=1}^{\infty}(a+n-1,a+n+1)\\ (-\infty,b) &= \bigcup_{n=1}^{\infty}(b-n-1,b-n+1)\\ (a,b) &= [-\infty,b)\cap(a,+\infty]\\ u^{-1}((a,b)) &= \underbrace{u^{-1}([-\infty,b))}_{\text{abierto}}\cap\underbrace{u^{-1}(a,+\infty]}_{\text{abierto}}\end{aligned}$$

puesto que u es semicontinua superior e inferiormente.

Luego u es continua. ■

Ahora veremos algunos teoremas básicos de compacidad.

Teorema 2.1.2 *Sea u una función semicontinua superiormente en un espacio topológico X, y* sea *K un subconjunto compacto de X. Entonces u es acotada superiormente en K y alcanza un valor máximo en K.*

Prueba:

Sea

$$G_n=\{x\in X/u(x)<n\},\quad (n\geq 1)$$

una colección de conjuntos abiertos. Entonces $\bigcup_{n=1}^{\infty}G_n$ es un cubrimiento abierto de K el cual admite un subcubrimiento finito. Luego u es acotada superiormente en K. Sea $M=\sup_K u$. Entonces la colección de conjuntos abiertos $A_n=\left\{x\in X/u(x)<M-\frac{1}{n}\right\},\quad (n\geq 1)$ no cubre a K, puesto que esta colección no admite un subcubrimiento finito. Así $u(x)=M$ para algún $x\in K$. Pues en caso contrario $u(x)<M$ para toda $x\in K$, entonces existe n tal que

$$\begin{aligned}u(x) &< M-\frac{1}{n}\\ &\therefore\quad x\in G_n.\end{aligned}$$

De donde $\{G_n/n\in\mathbb{N}\}$ recubre a K. Llegamos a una contradicción.

Luego existe $x\in K$ tal que $u(x)=M$ para al menos un $x\in K$. ■

Teorema 2.1.3 *Sea u una función semicontinua superiormente en un espacio métrico (X,d), y supongamos que u es acotada superiormente en X. Entonces existe una sucesión de funciones continuas $\varphi_n \colon X \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $\varphi_1 \geq \varphi_2 \geq \cdots \geq u$ en X y $\lim_{n\to\infty}\varphi_n = u$.*

Prueba:

Supongamos que $u \not\equiv -\infty$. (En el otro caso tomamos $\varphi_n \equiv -n$).

Para $n \geq 1$, definamos $\varphi_n \colon X \longrightarrow \mathbb{R}$ por

$$\varphi_n(x) := \sup_{y\in X}(u(y) - nd(x,y)) \quad (x \in X).$$

Entonces para cada n tenemos

$$\left|\varphi_n(x) - \varphi_n\left(x'\right)\right| \leq nd\left(x,x'\right) \quad \left(x,x' \in X\right),$$

Así φ_n es continua en X.

Sean $x, x', y \in X$

$$\begin{aligned}
d(x,y) &\leq d\left(x',x\right) + d(x,y) \\
u(y) - nd(x,y) &\leq u(y) - nd\left(x',y\right) + nd\left(x',x\right) \\
\sup_{y\in X}(u(y) - nd(x,y)) &\leq \sup_{y\in X}\left(u(y) - nd\left(x',y\right) + nd\left(x',x\right)\right) \\
\varphi_n(x) &\leq \varphi_n\left(x'\right) + nd\left(x',x\right).
\end{aligned}$$

También

$$\varphi_1 \geq \varphi_2 \geq \cdots \geq u$$

puesto que

$$\begin{aligned}
\varphi_n(x) \;&\geq\; u(y) - nd(x,y) \geq u(y) - (n+1)\,d(x,y) \\
&\therefore\;\; \varphi_n(x) \geq \varphi_{n+1}(x) \\
&\therefore\;\; \sup_{y\in X}(u(y) - nd(x,y)) \geq u(x) - nd(x,x) = u(x).
\end{aligned}$$

En particular

$$\lim_{n\longrightarrow\infty}\varphi_n \geq u.$$

Escribiendo $\Delta(x,\rho)$ para la bola $\{y \in X / d(x,y) < \rho\}$, entonces

$$\varphi_n(x) \leq \max\left(\sup_{\Delta(x,\rho)} u, \sup_X u - n\rho\right) : = M(\rho,n) \quad (x \in X,\, \rho > 0),$$

$$\sup_{y\in\Delta(x,\rho)} u(y) \leq \sup_{y\in X} u(y) - n\rho.$$

$$\varphi_n(x) = \sup_{y \in X} \left(u(y) - nd(x,y) \right).$$

Si $d(x,y) \leq \rho$

$$\begin{aligned} u(y) - nd(x,y) &\leq u(y) \\ &\leq \sup_{y \in \Delta(x,\rho)} u(y) \\ &\leq M(\rho, n) \end{aligned}$$

Si $d(x,y) \geq \rho$

$$-n\rho \geq -nd(x,y).$$

$$\begin{aligned} u(y) - nd(x,y) &\leq u(y) - n\rho \\ &\leq \sup_{y \in X} \left(u(y) - n\rho \right) \\ &= \sup_{y \in X} u(y) - n\rho \\ &\leq M(\rho, n) \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} -\infty. \end{aligned}$$

$$u(y) - nd(x,y) \leq M(\rho, n) \qquad (\forall y \in X)$$

$$\therefore\ \varphi_n(x) \leq M(\rho, n) \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} \sup_{y \in \Delta(x,\rho)} u(y).$$

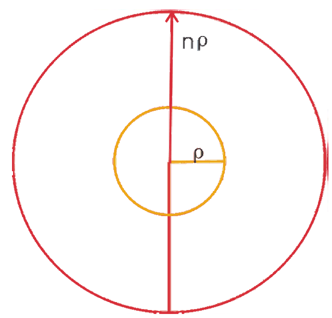


Figura 10

Así que

$$\alpha := \lim_{n \longrightarrow \infty} \varphi_n(x) \leq \sup_{\Delta(x,\rho)} u \qquad (x \in X,\, \rho > 0).$$

Entonces, dado $\epsilon > 0$, $\alpha \leq u(x) + \epsilon$. Como u es semicontinua superiormente, hacemos que $\rho \longrightarrow 0^+$ y entonces $\lim_{n \to \infty} \varphi_n(x) \leq u(x)$. ■

Ejercicios 2.1

1. Sea S un subconjunto de un espacio topológico X. Muestre que 1_S, la función característica de S, es semicontinua superiormente si y sólo si S es cerrado en X.

2. Sea u una función semicontinua superiormente en un espacio métrico (X, d).

   Para $n \geq 0$ defina
   $$\begin{aligned} F_n &= \{x \in X / u(x) \geq n\}, \\ \psi_n(x) &= \max\left(0, 1 - n\,\mathrm{dist}(x, F_n)\right) \qquad (x \in X). \end{aligned}$$
   Pruebe que $\sum_{n \geq 0} \psi_n$ converge localmente, uniformemente a una función continua $\psi : X \to \mathbb{R}$ tal que $\psi \geq u$ en X. Considerando $u - \psi$, deduzca que el Teorema 2.1.3 permanece válido sin la asunción de que u es acotada superiormente en X.

3. Sean (X_1, d_1) y (X_2, d_2) espacios métricos, y sea $f : X_1 \longrightarrow X_2$ una función arbitraria. Dado $x \in X_1$, la *oscilación* de f en x está definida por
$\omega_f(x) = \lim\limits_{\rho \longrightarrow 0} \left(\sup\left\{d_2\left(f(y), f(y')\right) / d_1(x,y) < \rho, d_1(x,y') < \rho\right\}\right).$

   (i) Muestre que f es continua en x si y sólo si $\omega_f(x) = 0$.

   (ii) Pruebe que el conjunto $\{x/\omega_f(x) < \alpha\}$ es abierto en X_1 para cada $\alpha > 0$, y deduzca que los puntos en los cuales f es continua forman un subconjunto G_δ de X_1.

   (iii) Suponga también que (X_1, d_1) es completo, y que f es el límite puntual de una sucesión de funciones continuas $f_n : X_1 \to X_2$. Pruebe que el conjunto $\{x/\omega_f(x) < \alpha\}$ es denso en X_1 para cada $\alpha > 0$, y deduzca que los puntos en los cuales f es continua forman un subconjunto denso G_δ de X_1. (Sugerencia: use el Teorema de Categoria de Baire).

   Concluya que una función semicontinua superiormente en un espacio métrico completo es continua en un conjunto de puntos denso G_δ .

Ejercicios Resueltos 2.1

1. ■ Sea S un subconjunto de un espacio topológico X. Muestre que 1_S, la función característica de S, es semicontinua superiormente si y sólo si S es cerrado en X.

   Prueba:
$$1_S(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in S; \\ 0 & \text{si } x \notin S. \end{cases}$$
$$1_S^{-1}([-\infty, \alpha)) = \begin{cases} \rho \to \infty & \text{si } \alpha \leq 0; \\ S^c & \text{si } 0 < \alpha \leq 1; \\ X & \text{si } \alpha > 1. \end{cases}$$
   Así la función 1_S es semicontinua superiormente si y sólo si S es cerrado en X. ■

2. ■ Sea u una función semicontinua superiormente en un espacio métrico (X, d).

   Para $n \geq 0$ defina
$$\begin{aligned} F_n &= \{x \in X/u(x) \geq n\}, \\ \psi_n(x) &= \max(0, 1 - n\mathrm{dist}(x, F_n)) \qquad (x \in X). \end{aligned}$$
   Pruebe que $\sum_{n\geq 0} \psi_n$ converge localmente, uniformemente a una función continua $\psi : X \to \mathbb{R}$ tal que $\psi \geq u$ en X. Considerando $u - \psi$, deduzca que el Teorema 2.1.3 permanece válido sin la asunción de que

u es acotada superiormente en X.

Prueba:

$$F_n = \{x \in X \ / u(x) \geq n\} \quad \text{es cerrado.}$$

Sean K compacto en X y $x \in K$.

$$d(x, F_n) \geq d(K, F_n) := \text{dist}(K, F_n)$$

$$\begin{aligned} \psi_n(x) &= \max(0, 1 - n\text{dist}(x, F_n)) \\ &\leq \max(0, 1 - n\text{dist}(K, F_n)) := M_n \qquad (M_n \geq 0). \end{aligned}$$

$$F_{n+1} \subset F_n.$$

$$\begin{aligned} d(K, F_{n+1}) &\geq d(K, F_n) \\ (n+1)\, d(K, F_{n+1}) &\geq (n+1)\, d(K, F_n) \geq nd(K, F_n) \end{aligned}$$

$$1 - nd(K, F_n) \geq 1 - (n+1)\, d(K, F_{n+1}).$$

Analicemos la convergencia de $\sum_{n=0}^{\infty} M_n$.

Supongamos que $\text{dist}(K, F_n) = 0$ para cada n.

Por lo tanto, $\exists x_n \in K$ tal que $u(x_n) \geq n$. Por ser K compacto, $\exists x_{n_j} \to x \in K$, cuando $j \to \infty$. De esto se deduce que $\overline{\lim}_{n\to\infty} u(x_n) = \infty$. Pero $\overline{\lim}_{n\to\infty} u(x_n) \leq u(x)$, ya que u es semicontinua superiormente. Esto es una contradicción.

Luego $(\exists N)\,(d(K, F_N) > 0)$.

Si $n \geq N$, $nd(K, F_n) \geq nd(K, F_N) \to \infty$ cuando $n \to \infty$.

Luego $\exists N_o \geq N$ tal que si $n \geq N_o$.

$$nd(K, F_n) > 1$$

y por lo tanto $M_n = 0 \quad \forall n \geq N_o$.

En consecuencia

$$\sum_{n=1}^{\infty} M_n = \sum_{n=1}^{N_o - 1} M_n = c \quad \text{(constante)} < \infty.$$

Por el Criterio-M de WEIERSSTRAS

$$\sum_{n=1}^{\infty} \psi_n(x) \text{ converge uniformemente en } K.$$

Entonces $\psi_n(x)$ converge uniformemente en compactos a una cierta función ψ continua, porque las ψ_n son continuas.

$$X = \bigcup_{n=0}^{\infty} F_n \cup G = F_o \cup G, \text{ donde } G = \{x \ / \ u(x) < 0\}.$$

Si $x \in G$, trivialmente $\psi(x) \geq 0$ porque $\psi_n(x) \geq 0 \quad \forall n$ y entonces $\psi(x) \geq u(x)$.

Si $x \in F_o$. Sea $N = \max\{n \ / \ x \in F_n\}$, entonces $N \leq u(x) < N + 1$ y

$$\begin{aligned} d(x, F_n) &= 0, \quad 0 \leq n \leq N. \\ 1 - nd(x, F_n) &= 1, \quad 0 \leq n \leq N \end{aligned}$$

$$\psi_n(x) = 1, \quad 0 \leq n \leq N.$$

De donde

$$\psi(x) \geq N + 1 > u(x).$$

Ahora consideremos $u - \psi$.

Sea $v = u - \psi \leq 0$. Como ψ es continua y u es semicontinua superiormente, entonces v es semicontinua superiormente. Por el Teorema 2.1.3, existen funciones $\varphi_n \colon X \longrightarrow \mathbb{R}$ continuas, tales que

$$\varphi_{1\geq}\varphi_2 \geq \cdots\cdots\cdots \geq v$$

y

$$\begin{aligned} \varphi_n \quad &\rightarrow \quad v = u - \psi \\ &\therefore \quad u = \psi + v, \end{aligned}$$

luego $\psi + \varphi_n \rightarrow u$. Claramente

$$\begin{aligned} \varphi_n \quad &\geq \quad \varphi_{n+1} \\ &\therefore \quad \psi + \varphi_n \geq \psi + \varphi_{n+1.} \quad \blacksquare \end{aligned}$$

3. $\blacksquare$ Sean (X_1, d_1) y (X_2, d_2) espacios métricos, y sea $f : X_1 \longrightarrow X_2$ una función arbitraria. Dado $x \in X_1$, la *oscilación* de f en x está definida por

$$\omega_f(x) = \lim_{\rho \longrightarrow 0} \left(\sup \left\{ d_2\left(f(y), f\left(y'\right)\right) / d_1(x, y) < \rho, d_1\left(x, y'\right) < \rho \right\}\right).$$

(i) Muestre que f es continua en x si y sólo si $\omega_f(x) = 0$.

(ii) Pruebe que el conjunto $\{x / \omega_f(x) < \alpha\}$ es abierto en X_1 para cada $\alpha > 0$, y deduzca que los puntos en los cuales f es continua forman un subconjunto G_δ de X_1.

(iii) Suponga también que (X_1, d_1) es completo y que el conjunto $\{x / \omega_f(x) < \alpha\}$ es denso en X_1 para cada $\alpha > 0$, y deduzca que los puntos en los cuales f es continua forman un subconjunto denso G_δ de X_1.

Prueba:

(i) "$\Longrightarrow$"

Sea $\epsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ tal que si $y \in B(x, \delta)$, entonces $d_2(f(x), f(y)) < \frac{\epsilon}{3}$.

Sea $\rho < \delta$.

Si $y, y' \in B(x, \rho)$, entonces $y, y' \in B(x, \delta)$. Luego $d_2(f(y), f(y')) < \frac{2\epsilon}{3}$. (Por la Desigualdad Triangular.)

$$\therefore \ \sup \left\{ d_2\left(f(y), f\left(y'\right)\right) / y, y' \in B(x, \rho) \right\} \leq \frac{2\epsilon}{3} < \epsilon.$$

De donde

$$\begin{aligned} \omega_f(x) &= \lim_{\rho \longrightarrow 0} \left(\sup \left\{ d_2\left(f(y), f\left(y'\right)\right) / d_1(x, y) < \rho, d_1\left(x, y'\right) < \rho \right\}\right) \\ &= 0. \end{aligned}$$

$$\therefore\ \omega_f(x) = 0.$$

"$\Longleftarrow$"

Sea $\omega_f(x) = 0$.

Dado $\epsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ tal que si $0 < \rho < \delta$, entonces
$$\sup\left\{d_2\left(f(y), f\left(y'\right)\right)/y, y' \in B(x,\rho)\right\} < \epsilon,$$
luego si $y \in B(x,\delta)$,
$$d_2(f(x), f(y)) < \epsilon.$$
(ii) Sean $f : (X_1, d_1) \longrightarrow (X_2, d_2)$ y $x \in X_1$.
$$\omega_f(x) = \lim_{\rho\to 0} \sup_{y,y'\in B_\rho(x)} \left\{d_2\left(f(y), f\left(y'\right)\right)\right\}.$$

$$B(x,\rho) = \{t \in X_1/d_1(t,x) < \rho\}.$$
Sea
$$G = \{x \in X_1/\omega_f(x) < \alpha\}.$$
Veamos que G es abierto.

Sea $x \in G$. Entonces $\omega_f(x) < \alpha$.

Para $\epsilon = \alpha - \omega_f(x) > 0$ existe $\delta > 0$ tal que para todo ρ, si $0 < \rho < \delta$, entonces
$$\left|\sup_{y,y'\in B(x,\rho)} d_2\left(f(y), f\left(y'\right)\right) - \omega_f(x)\right| < \epsilon.$$

$$\therefore \sup_{y,y'\in B(x,\rho)} d_2\left(f(y), f\left(y'\right)\right) < \alpha.$$

Probemos que $B\left(x, \frac{\delta}{2}\right) \subseteq G$.

Sea $y \in B\left(x, \frac{\delta}{2}\right)$. Entonces $d_1(x,y) < \frac{\delta}{2}$. Si $t \in B(y, \delta_1)$,
$$\begin{aligned} d_1(t,x) &\leq d_1(t,y) + d_1(y,x) \\ &< \delta_1 + \frac{\delta_2}{2} :\ = \rho_1 < \delta. \end{aligned}$$
Llamemos $\delta_1 = \frac{\delta}{2} - d_1(x,y)$.

$$\begin{aligned} B(y,\delta_1) &\subseteq B(x,\rho_1) \\ \sup_{t,z\in B(y,\delta_1)} d_2(f(t), f(z)) &\leq \sup_{s,s'\in B(x,\rho_1)} d_2\left(f(s), f\left(s'\right)\right) < \alpha. \\ \therefore&\quad \omega_f(y) < \alpha \\ \therefore&\quad y \in G. \end{aligned}$$
Luego $B\left(x, \frac{\delta}{2}\right) \subseteq G$, o sea que G es abierto. Luego los puntos donde la función es continua son los x tales que $\omega_f(x) = 0$.
$$\{x/\omega_f(x) = 0\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \left\{x/\omega_f(x) < \frac{1}{n}\right\},$$

que es un G_δ.

(iii) Como para todo α,

$$\{x : \omega_f(x) < \alpha\} \quad \text{es denso en } X_1,$$

entonces $\forall n \in \mathbb{N}$, $G_n = \left\{x : \omega_f(x) < \frac{1}{n}\right\}$ es denso en X_1. Luego por el Teorema de Categoría de Baire

$$\{x/\omega_f(x) = 0\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} G_n$$

es un subconjunto denso G_δ de X_1. ■

2.2 Funciones Subarmónicas

Una función u es subarmónica si su Laplaciano satisface que $\Delta u \geq 0$. Pero veremos otras definiciones para funciones subarmónicas que no implican que las funciones sean suaves, lo que las hace mucho más flexibles.

Para definirlas haremos una analogía con las *Funciones Convexas* en $\mathbb{R}$. Si $\psi \in C^2(\mathbb{R})$, entonces ψ es convexa si y sólo si $\psi'' \geq 0$. Pero existen funciones convexas que no son suaves como por ejemplo $\psi(t) = |t|$, por lo cual se hace necesario definir las funciones convexas mediante otra propiedad. Veremos esta definición en la sección 2.6. Siguiendo este modelo, trataremos de definir la subarmonicidad usando una propiedad que cumplen todas las funciones armónicas en el plano.

Definición 2.2.1 *Sea U un subconjunto abierto de $\mathbb{C}$. Una función $u : U \longrightarrow [-\infty, \infty)$ es llamada* **subarmónica** *si es semicontinua superiormente y satisface localmente la* **desigualdad Submedia,** *esto es, dado $w \in U$, existe $\rho > 0$ tal que*

$$u(w) \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u\left(w + re^{it}\right) dt \qquad (0 \leq r < \rho). \tag{2.1}$$

También $v : U \longrightarrow (-\infty, \infty]$ es **superarmónica** *si $-v$ es subarmónica.*

Nota:

1. La integral en (2.1) ha sido interpretada como la diferencia de las correspondientes integrales de u^+ y de u^-. Por el Teorema 2.1.2, u^+ es acotada en $\partial\Delta(w, r)$, por lo tanto su integral es finita. Así siempre es posible hacer la diferencia de las dos integrales, aunque la integral de u^- sea infinita. Veremos más tarde que esto último sólo sucede

cuando $u \equiv -\infty$ en toda la componente de U que contiene a w.

Según nuestra definición $u \equiv -\infty$ es una función subarmónica, aunque algunos autores la excluyen.

2. Puesto que la subarmonicidad es definida vía la desigualdad Submedia *local* (es decir, ρ puede depender de w), es una propiedad local. Esto significa que si (U_α) es un cubrimiento abierto de U, entonces u es subarmónica en U si y sólo si es subarmónica en cada U_α.

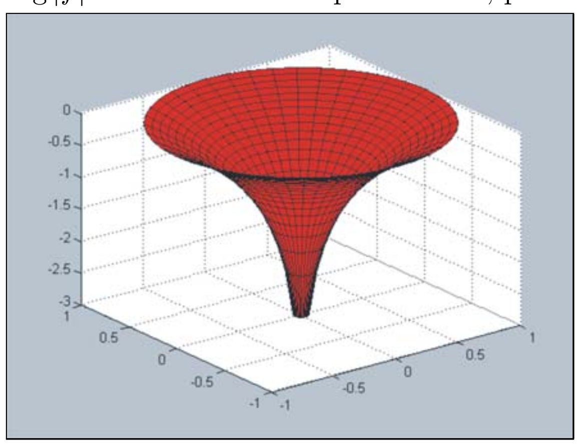
3. Observemos que una función es armónica si y sólo si es subarmónica y superarmónica. Esto se sigue del Teorema 1.1.6 o del Teorema 1.2.7.

Ahora veremos algunos ejemplos de funciones subarmónicas.

Teorema 2.2.2 *Si f es holomorfa en un conjunto abierto U en $\mathbb{C}$, entonces* $\log|f|$ *es subarmónica en U.*

Prueba:

La función $u := \log|f|$ es semicontinua superiormente, por ser continua.



$\log|z|$

Figura 11

También se satisface la desigualdad Submedia local en cada $w \in U$ para el cual $u(w) > -\infty$, puesto que cerca a cada uno de estos puntos $\log|f|$ es realmente armónica. En otro caso si $u(w) = -\infty$, entonces (2.1) es obvia. ■

Teorema 2.2.3 *Sean u y v funciones subarmónicas en un conjunto abierto U en $\mathbb{C}$. Entonces:*

(a) $\max(u,v)$ *es subarmónica en* U;

(b) $\alpha u+\beta v$ *es subarmónica en* U *para todo* $\alpha,\beta\geq 0$.

Prueba:

(a) Sean $\overline{\Delta}(w,\rho)\subseteq U$ y $0\leq r<\rho$. Entonces

$$\begin{aligned}\max\{u(w),v(w)\} &\leq \max\left\{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}u\left(w+re^{it}\right)dt,\ \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}v\left(w+re^{it}\right)dt\right\}\\ &\leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\max\left[u\left(w+re^{it}\right),\ v\left(w+re^{it}\right)\right]dt.\end{aligned}$$

Así el $\max(u,v)$ es subarmónica.

(b) Se sigue de la Definición 2.2.1 y de las propiedades de la integral. ∎

> De (a) se sigue que no es necesario que las funciones subarmónicas sean suaves. Tampoco tienen que ser continuas; en el Ejercicio 2 veremos un ejemplo de una función subarmónica que no es continua.

Ejercicios 2.2

1. Use la desigualdad de Cauchy-Schwarz para probar que si h es una función armónica en un conjunto abierto U en $\mathbb{C}$, entonces h^2 es subarmónica en U.

2. Pruebe que si $\zeta\in\mathbb{C}$ y $r>0$ entonces

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log\left|re^{it}-\zeta\right|dt=\begin{cases}\log|\zeta|, & \text{si } r\leq|\zeta|,\\ \log r, & \text{si } r>|\zeta|.\end{cases}\tag{2.2}$$

   Use esto para probar que la función

$$u(z):=\sum_{n\geq 1}2^{-n}\log\left|z-2^{-n}\right|$$

   es subarmónica en $\mathbb{C}$. Pruebe también que u es discontinua en 0.

Ejercicios Resueltos 2.2

1. ∎ Use la desigualdad de Cauchy-Schwarz para probar que si h es una función armónica en un conjunto abierto U en $\mathbb{C}$, entonces h^2 es subarmónica en U.

Prueba:

Sea $\Delta = \Delta(w,\rho)$ tal que $\overline{\Delta} \subset U$. Entonces si $0 \le r < \rho$,

$$\begin{aligned} h(w) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} h\left(w+re^{it}\right) dt. \\ h^2(w) &= \left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} h\left(w+re^{it}\right) dt\right)^2 \\ &\le \left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} h^2\left(w+re^{it}\right) dt\right)\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} dt\right) \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} h^2\left(w+re^{it}\right) dt. \end{aligned}$$

Por lo tanto h^2 es subarmónica en U. ∎

2. ∎ Pruebe que si $\zeta \in \mathbb{C}$ y $r > 0$ entonces

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log\left|re^{it}-\zeta\right| dt = \begin{cases} \log|\zeta|, & \text{si } \quad r \le |\zeta|, \\ \log r, & \text{si } \quad r > |\zeta|. \end{cases} \tag{2.2}$$

Use esto para probar que la función

$$u(z) := \sum_{n\ge 1} 2^{-n}\log\left|z-2^{-n}\right|$$

es subarmónica en $\mathbb{C}$. Pruebe también que u es discontinua en 0.

Prueba:

Si $\zeta = 0$

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log\left|re^{it}\right| dt = \log|r| = \log r.$$

Sea $r \le |\zeta|$.

Si $\zeta = |\zeta| e^{i\operatorname{Arg}\zeta}$, $\mathbb{C}_\zeta = \mathbb{C}\setminus\{t\zeta / t \le 0\}$, entonces la función $z+\zeta$ no se anula en $\mathbb{C}_\zeta$. Luego existe una rama de $\log(z+\zeta)$ en $\mathbb{C}_\zeta$.

La función $\operatorname{Re}[\log(z+\zeta)] = \log|z+\zeta| = u(z)$ es armónica en $\mathbb{C}_\zeta$.

Sea $\gamma(t) = \zeta + re^{it}$,

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log\left|re^{it}-\zeta\right| dt = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log\left|\zeta+re^{it}\right| dt = \log|\zeta|.$$

Si $u(z) = \log|z-\zeta|$,

$\gamma(t) = re^{it}$,

$$\log|\zeta| = u(0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u\left(re^{it}\right)dt = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log\left|re^{it}-\zeta\right|dt.$$

Ahora sea $r > |\zeta|$, entonces por el Teorema 2.2.2 $\log\left|re^{it}-\zeta\right|$ es subarmónica en $\mathbb{C}$ y armónica $\mathbb{C}\backslash\zeta$, así para $\gamma(t) = re^{it}-\zeta$

$$\int_0^{2\pi} \log\left|re^{it}-\zeta\right|dt = (2\pi)\,n(\gamma,\zeta)\log\left|re^{it}\right|.$$

$$\therefore\ \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log\left|re^{it}-\zeta\right|dt = \frac{2\pi}{2\pi}\cdot(1)\cdot\log r = \log r$$

Ahora probemos que la función

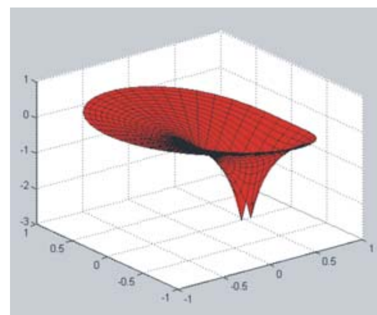
$$u(z) := \sum_{n\geq 1} 2^{-n}\log\left|z-2^{-n}\right|$$

es subarmónica en $\mathbb{C}$.

La función tiene singularidades en el conjunto

$$S = \left\{\frac{1}{2^n}/n\in\mathbb{Z}^+\right\}.$$

En subconjuntos compactos de $\mathbb{C}\backslash S$ la serie es uniformemente convergente,



$\log|z-2^{-n}|$

Figura 12

$$\begin{aligned}
\log\left|z-2^{-n}\right| &\leq M, \quad (\forall z\in B,\ \forall n).\\
2^{-n}\log\left|z-2^{-n}\right| &\leq 2^{-n}M\\
\sum_{n\geq 1} 2^{-n}\log\left|z-2^{-n}\right| &\leq \sum_{n\geq 1} 2^{-n}M.
\end{aligned}$$

Para cualquier $z_o \neq \frac{1}{2^n}$, $n = 1, 2, \ldots$ y $\quad z \neq 0$.

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u\left(z_o+re^{it}\right)dt &= \sum_{n\geq 1} 2^{-n}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log\left|z_o+re^{it}-2^{-n}\right|dt\\
&= \sum_{n\geq 1} 2^{-n}\log\left|z_o-2^{-n}\right|\\
&= u(z_o),
\end{aligned}$$

entonces en estos subconjuntos la función es armónica.

Sea $z\in B\left(2^{-k},\delta\right)$,

$$\lim_{z\to 2^{-k}} 2^{-k}\log\left|z-2^{-k}\right| = -\infty$$

$$\sum_{n\neq k} 2^{-n}\log\left|z-2^{-n}\right| \leq M.$$

$$\delta < \left|z-2^{-n}\right| \leq C \qquad \left(\forall z\in B\left(2^{-k},\delta\right),\ \forall n\neq k\right),$$

$$\begin{aligned} \log\left|z-2^{-n}\right| &\leq \log C \\ 2^{-n}\log\left|z-2^{-n}\right| &\leq 2^{-n}\log C, \end{aligned}$$

entonces $\text{lím}_{z\to 2^{-k}} = -\infty$.

Por lo tanto la función es subarmónica en el plano menos el cero.

La última serie es convergente por el criterio de la raíz. En efecto, sean b_1, b_2 tales que $b_1 \leq |z-2^{-n}| \leq b_2$ y $b = \text{máx}\left\{|\log b_1|, |\log b_2|\right\}$, entonces

$$\left|2^{-n}\log\left|z-2^{-n}\right|\right| \leq 2^{-n}b.$$

$$\therefore\ \sqrt[n]{2^{-n}\log|z-2^{-n}|} \leq \sqrt[n]{2^{-n}b} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{2} < 1.$$

¿A qué converge $u(z_n)$ cuando $z_n \to 0$, $\quad z_n \neq 2^{-n}$?.

Tomemos $N\in\mathbb{Z}^+$ tal que $2^{-N} < r$.

Analicemos las series

$$\begin{aligned} \sum_{n\geq N} 2^{-n}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log\left|re^{it}-2^{-n}\right|dt &= \sum_{n\geq N} 2^{-n}\log r, \\ \sum_{n=1}^{N} 2^{-n}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log\left|re^{it}-2^{-n}\right|dt &= \sum_{n=1}^{N} 2^{-n}\log 2^{-n}. \end{aligned}$$

Si $n\geq N$

$$\begin{aligned} 2^{-n} &\leq r \\ \log 2^{-n} &< \log r \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum_{n\geq N}^{\infty} 2^{-n}\log 2^{-n} &\leq \sum_{n\geq N} 2^{-n}\log r \\ &= \sum_{n\geq N} 2^{-n}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log\left|re^{it}-2^{-n}\right|dt. \end{aligned}$$

Si $1\leq n<N$

$$\sum_{1\leq n<N} 2^{-n}\log 2^{-n} = \sum_{1\leq n<N} 2^{-n}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log\left|re^{it}-2^{-n}\right|dt.$$

Sumando

$$u(0) \leq \sum_{n\geq 1} 2^{-n}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log\left|re^{it}-2^{-n}\right|dt \leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}u\left(re^{it}\right)dt.$$

Si $r \neq 2^{-k}$, para todo k.

Cuando r es pequeño $\log|z-2^{-n}|$ es una sucesión de funciones negativas.

Sea

$$g_k(t) = -\sum_{n=1}^{k} 2^{-n}\log\left|z-2^{-n}\right|,$$

entonces

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} \liminf g_k(t)\,dt &= -\int_0^{2\pi} u\left(re^{it}\right)dt\\ \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \liminf g_k(t)\,dt &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u\left(re^{it}\right)dt.\end{aligned}$$

Si $r \neq 2^{-k}$, para todo k la convergencia de la serie es uniforme en el círculo re^{it}.

Si $r = 2^{-k}$, para algún k,

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n}\log\frac{1}{|re^{it}-2^{-n}|}dt &= \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log\frac{1}{|re^{it}-2^{-n}|}dt\\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\sum_{n=1}^{\infty}2^{-n}\log\left|re^{it}-2^{-n}\right|dt\\ &= -\sum_{n=1}^{\infty}2^{-n}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log\left|re^{it}-2^{-n}\right|dt.\end{aligned}$$

La última igualdad se cumple por el Teorema de la Convergencia Monótona.

Veamos que $u(z)$ es discontinua en cero.

Sea $z_n = \frac{1}{2^n}$ entonces $z_n = \frac{1}{2^n} \to 0$ cuando $n \to \infty$,

$$u(z_n) = \sum_{n\geq 1} 2^{-n}\log\left(z_n - \frac{1}{2^n}\right) \to -\infty$$

mientras que $u(0) = -\log 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n}$ es convergente.

Por lo tanto u es discontinua en 0. ■

2.3 El Principio del Máximo

La importancia del Principio del Máximo en el estudio de las funciones subarmónicas está en el hecho de que las propiedades locales implican conclusiones globales, lo que permite ampliar la Propiedad Submedia.

Teorema 2.3.1 (Principio del Máximo)

Sea u una función subarmónica en un dominio D en $\mathbb{C}$.

(a) *Si u alcanza un máximo global en D, entonces u es constante.*

(b) *Si $\limsup_{z\longrightarrow\zeta} u(z) \leq 0$ para todo $\zeta \in \partial D$, entonces $u \leq 0$ en D.*

En la parte (a), u puede alcanzar un máximo local o un mínimo global sin ser constante en D. Por ejemplo, la función subarmónica no-constante $u(z) := \max(\text{Re}z, 0)$ alcanza ambos en $\mathbb{C}$.
Por el Teorema 1.1.8, sabemos que la parte (b) es válida por la convención de que $\infty \in \partial D$, donde D no es acotado.

Prueba:

(a) Supongamos que u alcanza un valor máximo M en D. Definamos

$$A: = \{z \in D / u(z) < M\} \text{ y } B: = \{z \in D / u(z) = M\}.$$

El conjunto A es abierto puesto que u es semicontinua superiormente. El conjunto B es abierto, puesto que si $u(w) = M$ por la desigualdad submedia local $u = M$ en todo circulo suficientemente pequeño alrededor de w.

A y B forman una partición de D, y como D es conexo, $A = D$ o $B = D$; por suposición $B \neq \phi$, así $B = D$.

(b) Extendamos u a ∂D definiendo

$$u(\xi) := \limsup_{z\longrightarrow\xi} u(z) \qquad (\xi \in \partial D).$$

Entonces u es semicontinua superiormente en $\overline{D}$, el cual es compacto; así, por el Teorema 2.1.2, u alcanza un máximo en algún $w \in \overline{D}$. Si $w \in \partial D$, entonces por suposición $u(w) \leq 0$; así, $u \leq 0$ en D.

Por otra parte, si $w \in D$, entonces por la parte (a), u es constante en D, por lo tanto en $\overline{D}$ y otra vez

$$u \leq 0 \text{ en } D. \qquad \blacksquare$$

En la parte (b), si u no crece muy rápidamente en infinito es posible reemplazar ∂D por $\partial D \setminus \{\infty\}$.

Teorema 2.3.2 (Principio de Phragmén-Lindelöf)

Sea u una función subarmónica en un dominio no acotado D en $\mathbb{C}$ tal que

$$\limsup_{z \longrightarrow \xi} u(z) \leq 0 \qquad (\xi \in \partial D \setminus \{\infty\}).$$

Suponga también que existe una función v superarmónica de valores finitos en D, tal que

$$\liminf_{z \longrightarrow \infty} v(z) > 0 \quad y \quad \limsup_{z \longrightarrow \infty} \frac{u(z)}{v(z)} \leq 0.$$

Entonces $u \leq 0$ en D.

Prueba:

Supongamos primero que $v > 0$ en D. Sea $\epsilon > 0$ y tomemos $u_\epsilon = u - \epsilon v$. Entonces u_ϵ es subarmónica en D, y $\limsup_{z \longrightarrow \xi} u_\xi(z) \leq 0$ para toda $\xi \in \partial D$ (aún ∞).

Si $\limsup\limits_{z \longrightarrow z_o} \frac{u(z)}{v(z)} \leq 0$,

$$\begin{aligned} \limsup_{z \longrightarrow z_o} \frac{u(z)}{v(z)} &= \lim_{\delta \longrightarrow 0} \sup_{z \in \Delta(z_o, \delta)} \frac{u(z)}{v(z)} \\ &\leq 0 \\ &< \epsilon \qquad (\forall \varepsilon > 0). \end{aligned}$$

Entonces $\forall z \in B(z_o, \delta)$,

$$\begin{aligned} u(z) &< \epsilon v(z) \\ \therefore \quad & u_\epsilon < 0 \text{ si } z \in B(\infty, \delta). \end{aligned}$$

Así por el Teorema 2.3.1 (b), $u_\epsilon \leq 0$ en D. Haciendo que $\epsilon \to 0$ tenemos que $u \leq 0$ en D.

Ahora consideremos una función v general. Sean $\eta > 0$ y

$$F_\eta : = \{z \in D / u(z) \geq \eta\} = u^{-1}([\eta, +\infty)).$$

Puesto que v es semicontinua inferiormente y $\liminf_{z\to\infty} v(z) > 0$, entonces v es acotada inferiormente en F_η. Sin pérdida de generalidad, adicionando una constante a v si es necesario, podemos suponer que $v > 0$ en F_η.

Sea $V := \{z \in D / v(z) > 0\}$. V es un conjunto no acotado. Entonces para $\zeta \in \partial V \setminus \{\infty\}$, tenemos:

$$\limsup_{z\longrightarrow\zeta} \{u(z) - \eta\} \leq \left\{ \begin{array}{ll} \limsup_{z\to\zeta} u(z), & \text{si } \zeta \in \partial D\setminus\{\infty\} \\ u(\zeta) - \eta, & \text{si } \zeta \in D \cap \partial V \end{array} \right\} \leq 0.$$

Aplicando un caso especial del Teorema ya probado a $u - \eta$ en cada componente de V, tenemos que $u - \eta \leq 0$ en V. Como $F_\eta \subset V$, por la construcción de V entonces $u \leq \eta$ en F_η y $u \leq \eta$ en $D\setminus F_\eta$. Luego para toda $z \in D$, $u(z) \leq \eta$ para toda $\eta > 0$. Es decir $u \leq \eta$ en D. Tomando límite cuando $\eta \longrightarrow 0$, deducimos que $u \leq 0$ en D. ■

Corolario 2.3.3 Sea *u una función subarmónica en un subdominio propio no acotado D de $\mathbb{C}$ tal que*

$$\limsup_{z\longrightarrow\zeta} u(z) \leq 0 \quad (\zeta \in \partial D\setminus\{\infty\}) \quad y \quad \limsup_{z\longrightarrow\infty} \frac{u(z)}{\log|z|} \leq 0.$$

Entonces $u \leq 0$ en D.

Prueba:

Tomemos $w \in \partial D$ y apliquemos el Teorema 2.3.2 con $v(z) = \log|z-w|$.

$v(z) = \log|z-w|$ es armónica en D.

$\liminf\limits_{z\longrightarrow\infty} v(z) = +\infty.$

Ahora,

$$\begin{aligned} \limsup_{z\longrightarrow\infty} \frac{u(z)}{\log|z-w|} &= \limsup_{z\longrightarrow\infty} \left(\frac{u(z)}{\log|z|} \frac{\log|z|}{\log|z-w|} \right) \\ &\leq M \limsup_{z\longrightarrow\infty} \frac{u(z)}{\log|z|} \leq 0. \quad (M=1). \end{aligned}$$

En efecto,

$$0 \leq \frac{\log|z|}{\log|z-w|} \leq \frac{\log|z|}{\log(|z|-|w|)} \underset{z\longrightarrow\infty}{\longrightarrow} 1 \quad (|z-w| \geq |z| - |w|).$$

Y $\log|z-w| \leq \log(|z|+|w|)$, entonces, cuando $z \longrightarrow \infty$

$$1 \longleftarrow \frac{\log|z|}{\log(|z|+|w|)} \leq \frac{\log|z|}{\log|z-w|} \leq \frac{\log|z|}{\log(|z|-|w|)} \longrightarrow 1.$$

Por lo tanto $\limsup\limits_{z\longrightarrow\infty}\frac{u(z)}{\log|z-w|}\leq 0$ y por el Teorema anterior $u\leq 0$ en D. ■

Corolario 2.3.4 (Teorema de Liouville)

Sea *u una función subarmónica en $\mathbb{C}$ tal que*

$$\limsup_{z\longrightarrow\infty}\frac{u(z)}{\log|z|}\leq 0.$$

Entonces u es constante en $\mathbb{C}$. En particular, toda función subarmónica en $\mathbb{C}$ acotada superiormente es constante.

Prueba:

Si $u\equiv-\infty$, entonces u es constante.

Sea $u\not\equiv-\infty$. Escojamos $w\in\mathbb{C}$ con $u(w)>-\infty$, y apliquemos el Corolario 2.3.3 a $u-u(w)$ en $\mathbb{C}\setminus\{w\}$.

Sea $\widehat{u}=u-u(w)$, entonces

$$\begin{aligned}\limsup_{z\longrightarrow w}\widehat{u}(z) &\leq u(w)-u(w)=0.\\ \frac{u(z)-u(w)}{\log|z|} &= \frac{u(z)}{\log|z|}-\frac{u(w)}{\log|z|}.\end{aligned}$$

Luego $u(z)\leq u(w)\quad\forall z\in\mathbb{C}$. Por el Teorema 2.3.1($a$) concluimos que u es constante. ■

En algunos dominios de formas particulares no se necesita conocer mucho acerca del crecimiento de u cerca a infinito. Por ejemplo las formas clásicas del Principio de Phragmén-Lindelöf se estudian en franjas y sectores.

Teorema 2.3.5 *Sea S_γ la franja $\left\{z\in\mathbb{C}/\,|\mathrm{Re}\,z|<\frac{\pi}{2\gamma}\right\}$, donde $\gamma>0$, y sea u una función subarmónica en S_γ tal que, para algunas constantes $A<\infty$ y $\alpha<\gamma$,*

$$u(x+iy)\leq Ae^{\alpha|y|}\quad(x+iy\in S_\gamma).$$

Si $\limsup_{z\to\infty}u(z)\leq 0$ para toda $\zeta\in\partial S_\gamma\setminus\{\infty\}$, entonces $u\leq 0$ en S_γ.

La función $u(z):=\mathrm{Re}(\cos(\gamma z))=\cos(\gamma x)\cosh(\gamma y)$ muestra que el resultado no es cierto cuando $\alpha=\gamma$.

Prueba:

Escojamos β de tal forma que $\alpha < \beta < \gamma$, y definamos $v : S_\gamma \longrightarrow \mathbb{R}$ por

$$v(z) : = \operatorname{Re}(\cos(\beta z)) = \cos(\beta x)\cosh(\beta y) \quad (z = x + iy \in S_\gamma).$$

Entonces v es armónica en S_γ,

$$\liminf_{z \longrightarrow \infty} v(z) \geq \liminf_{|y| \longrightarrow \infty} \cos\left(\frac{\beta\pi}{2\gamma}\right)\cosh(\beta y) = \infty,$$

y

$$\limsup_{z \longrightarrow \infty} \frac{u(z)}{v(z)} \leq \limsup_{|y| \longrightarrow \infty} \frac{Ae^{\alpha|y|}}{\cos\left(\frac{\beta\pi}{2\gamma}\right)\cosh(\beta y)} = 0.$$

El resultado se sigue del Teorema 2.3.2. ■

Corolario 2.3.6 (Teorema de las Tres-Rectas)

Sea u una función subarmónica en la franja $S : = \{z / 0 < \operatorname{Re} z < 1\}$ tal que para algunas constantes $A < \infty$ y $\alpha < \pi$,

$$u(x + iy) \leq Ae^{\alpha|y|} \qquad (x + iy \in S).$$

Si

$$\limsup_{z \longrightarrow \zeta} u(z) \leq \begin{cases} M_o, & \operatorname{Re}\zeta = 0, \\ M_1, & \operatorname{Re}\zeta = 1, \end{cases}$$

entonces

$$u(x + iy) \leq M_o(1 - x) + M_1 x \qquad (x + iy \in S).$$

Prueba:

Definamos $\widetilde{u} : S \longrightarrow [-\infty, \infty)$ por

$$\widetilde{u}(z) = u(z) - \operatorname{Re}(M_o(1 - z) + M_1 z) \quad (z \in S).$$

Tomando $\gamma = \pi$, aplicamos el Teorema 2.3.5 (haciendo primero una traslación) y obtenemos que $\widetilde{u} \leq 0$ en S. ■

Teorema 2.3.7 Sea T_γ *el sector* $\left\{z \in \mathbb{C}\backslash\{0\} / |\arg(z)| < \frac{\pi}{2\gamma}\right\}$, *donde $\gamma > \frac{1}{2}$, y sea u una función subarmónica en T_γ tal que para algunas constantes $A, B < \infty$ y $\alpha < \gamma$,*

$$u(z) \leq A + B|z|^\alpha \qquad (z \in T_\gamma).$$

Si $\limsup_{z \longrightarrow \zeta} u(z) \leq 0$ *para toda* $\zeta \in \partial T_\gamma \backslash \{\infty\}$, *entonces* $u \leq 0$ *en* T_γ.

Prueba:

Escojamos β de manera que $\alpha < \beta < \gamma$, y definamos $v : T_\gamma \longrightarrow \mathbb{R}$ por

$$v(z) = \mathrm{Re}\left(z^{\beta}\right) = r^{\beta}\cos(\beta t) \qquad \left(z = re^{it} \in T_{\gamma}\right).$$

Entonces v es armónica en T_{γ},

$$\liminf_{z\longrightarrow\infty} v(z) \geq \liminf_{r\longrightarrow\infty} r^{\beta}\cos\left(\frac{\beta\pi}{2\gamma}\right) = \infty,$$

y

$$\limsup_{z\longrightarrow\infty}\frac{u(z)}{v(z)} \leq \limsup_{r\longrightarrow\infty}\frac{A+Br^{\alpha}}{r^{\beta}\cos\left(\frac{\beta\pi}{2\gamma}\right)} = 0.$$

El resultado se sigue del Teorema 2.3.2. ■

La función $u(z) :\ = \mathrm{Re}(z^{\gamma})$ muestra que el teorema no es cierto cuando $\alpha = \gamma$.

Corolario 2.3.8 *Sea u una función subarmónica en el semiplano $\mathbb{H} := \{z/\,\mathrm{Re}\,z > 0\}$ tal que, para algunas constantes $A, B < \infty$,*

$$u(z) \leq A + B|z| \qquad (z \in \mathbb{H}).$$

Si $\limsup_{z\to\zeta} u(z) \leq 0$ *para todo* $\zeta \in \partial H\backslash\{\infty\}$, *y* $\limsup_{x\to\infty}\frac{u(x)}{x} = L$, *entonces*

$$u(z) \leq L(\mathrm{Re}\,z) \qquad (z \in \mathbb{H}).$$

Prueba:

Dado $L' > L$, definamos $\widetilde{u}\colon \mathbb{H} \longrightarrow [-\infty, \infty)$ por

$$\widetilde{u}(z) = u(z) - L'(\mathrm{Re}\,z) \qquad (z \in \mathbb{H}).$$

Entonces aplicando una rotación y el Teorema 2.3.7, con $\gamma = 2$ en cada uno de los sectores $\frac{-\pi}{2} < \arg(z) < 0$ y $0 < \arg(z) < \frac{\pi}{2}$, deducimos que $\widetilde{u}$ es acotada superiormente en $\mathbb{H}$. Volvemos a aplicar el Teorema 2.3.7 con $\gamma = 1$, entonces tenemos que $\widetilde{u} \leq 0$ en $\mathbb{H}$. Entonces $u(z) \leq L'(\mathrm{Re}\,z)$, como esto se cumple para cada $L' > L$, entonces

$$u(z) \leq L(\mathrm{Re}\,z) \qquad (z \in \mathbb{H}). \qquad ■$$

Ejercicios 2.3

1. Sea $u_1, \ldots, u_n$ una sucesión de funciones subarmónicas en un dominio D en $\mathbb{C}$, suponga que su suma $u_1 + \cdots + u_n$ alcanza un máximo en D. Pruebe que cada función u_j es armónica en D.

2. Sea u una función subarmónica en $\triangle(0,1)$ tal que $u < 0$. Pruebe que

para cada $\zeta \in \partial \triangle (0,1)$,

$$\limsup_{r \longrightarrow 1^-} \frac{u(r\zeta)}{1-r} < 0.$$

[Sugerencia: aplique el *Principio del Máximo* a $u(z) + c \log |z|$ en el conjunto $\left\{ \frac{1}{2} < |z| < 1 \right\}$ para una constante adecuada c.]

3. Sean $\triangle = \triangle(0,1)$ y $f : \triangle \to \triangle$ una función holomorfa tal que

$$f(z) = z + o\left(|1-z|^3\right) \text{ cuando } z \to 1.$$

(i) Sea $\phi(z) = \frac{(1+z)}{(1-z)}$ y $u(z) = \operatorname{Re}(\phi(z) - \phi(f(z)))$. Pruebe que $\limsup_{z \to \zeta} u(z) \leq 0$ para cada $\zeta \in \partial \triangle \setminus \{1\}$, y que $u(z) = o(|1-z|)$ cuando $z \to 1$.

(ii) Use el *Principio del Máximo* para deducir que $u \leq 0$, y entonces el Ejercicio 2 muestra que $u \equiv 0$.

(iii) Concluya que $f(z) \equiv z$.

De un ejemplo que muestre que la conclusión en (iii) falla si sólamente suponemos que $f(z) = z + O\left(|1-z|^3\right)$ cuando $z \longrightarrow 1$.

4. Sea u una función subarmónica en $\triangle(0,1)$ tal que

$$u(z) \leq -\log |\mathrm{Im}\ z| \qquad (|z| < 1).$$

Pruebe que

$$u(z) \leq -\log \left| \frac{1-z^2}{2} \right| \qquad (|z| < 1).$$

[Sugerencia: aplique *el Principio del Máximo* a $u(z) + \log \left| \frac{(r^2 - z^2)}{2r} \right|$ en $\triangle(0,r)$, para $r < 1$, y entonces tome límite cuando $r \to 1$.]

5. Sea u una función subarmónica en $\mathbb{H} := \{z / \mathrm{Re}\ z > 0\}$, suponga que existen constantes $A, B < \infty$ y $\alpha > 0$ tales que

$$\begin{cases} u(z) \leq A + B|z| & (z \in \mathbb{H}), \\ \limsup\limits_{z \longrightarrow \zeta} u(z) \leq -\alpha |\zeta| & (\zeta \in \partial \mathbb{H} \setminus \{\infty\}). \end{cases} \tag{2.3}$$

(i) Aplique el Teorema 2.3.7 a $u(z) - A - B(\mathrm{Re}\, z) + \alpha (\mathrm{Im}\, z)$ en el sector $0 < \arg(z) < \frac{\pi}{2}$ para probar que

$$u(z) \leq B(\mathrm{Re}\, z) - \alpha(\mathrm{Im}\, z) \quad \left(0 < \arg(z) < \frac{\pi}{2}\right).$$

(ii) Deduzca que u es acotada superiormente en la recta $\arg(z) = \theta$, donde $\tan \theta = \frac{\beta}{\alpha}$.

(iii) Aplique el Teorema 2.3.7 en los sectores $-\frac{\pi}{2} < \arg(z) < \theta$ y $\theta < \arg(z) < \frac{\pi}{2}$ para probar que u es acotada superiormente en $\mathbb{H}$.

(iv) Aplique el Teorema 2.3.7 en $\mathbb{H}$ para probar que $u \leq 0$ en $\mathbb{H}$.

(v) pruebe que si $M > 0$ entonces $\widetilde{u} := u + M(\operatorname{Re} z)$ también satisface (2.3) (con diferentes constantes), y deduzca que $u \leq -M(\operatorname{Re} z)$ en $\mathbb{H}$.

(vi) Concluya que $u \equiv -\infty$ en $\mathbb{H}$.

6. Sea f una función holomorfa en $\mathbb{H} := \{z/\operatorname{Re} z > 0\}$ tal que, para algunas constantes $C < \infty$ y $\gamma < \pi$,
$$|f(z)| \leq Ce^{\gamma|z|} \qquad (z \in \mathbb{H}).$$
Supongamos también que $f(n) = 0$ para cada entero $n \geq 1$. Pruebe que
$$u(z) := \log\left|\frac{f(z)}{2C\operatorname{sen}(\pi z)}\right|$$
es subarmónica en $\mathbb{H}$, y que satisface (2.3) con $\alpha = \pi - \gamma > 0$. Deduzca que $f \equiv 0$ en $\mathbb{H}$.

Ejercicios Resueltos 2.3

1. ■ Sea $u_1, \ldots, u_n$ una sucesión de funciones subarmónicas en un dominio D en $\mathbb{C}$, suponga que su suma $u_1 + \cdots + u_n$ alcanza un máximo en D. Pruebe que cada función u_j es armónica en D.

Prueba:

Sea $u = u_1 + \cdots + u_n$. Entonces u es subarmónica.

Como u alcanza el máximo en D entonces u es constante en D, por lo tanto $u = C$.

De donde
$$u_j = C - u_1 - \cdots - u_{j-1} - u_{j+1} - \cdots - u_n \quad \begin{pmatrix} -u_i \text{ es superarmónica} \\ \text{para } i = 1, \ldots, n \end{pmatrix}.$$
Así u_j es una suma de funciones superarmónicas y como suma de funciones superarmónicas es superarmónica entonces u_j es superarmónica y es subarmónica en D, por lo tanto u_j es armónica en D. ■

2. ■ Sea u una función subarmónica en $\triangle(0,1)$ tal que $u < 0$. Pruebe que para cada $\zeta \in \partial\triangle(0,1)$,
$$\limsup_{r \longrightarrow 1^-} \frac{u(r\zeta)}{1-r} < 0.$$

Prueba:

$$\begin{aligned} \limsup_{z \to z_o} u(z) &\leq u(z_o) \leq u(w) < 0, \\ \limsup_{z \to \zeta} u(z) &\leq 0. \end{aligned}$$
Sea $\frac{1}{2} < |z| < 1$,

$$\begin{aligned}
\limsup_{z\to z_o}\left(u\left(z\right)+c\log\left|z\right|\right) &\leq M-c\log 2<0 \qquad \left(c>0,\ M<0\right),\\
u\left(z\right) &< -c\log\left|z\right| = c\log\frac{1}{\left|z\right|},\\
u\left(z\right)+c\log\left|z\right| &< 0. \qquad\qquad (\text{Fig. } 13)
\end{aligned}$$

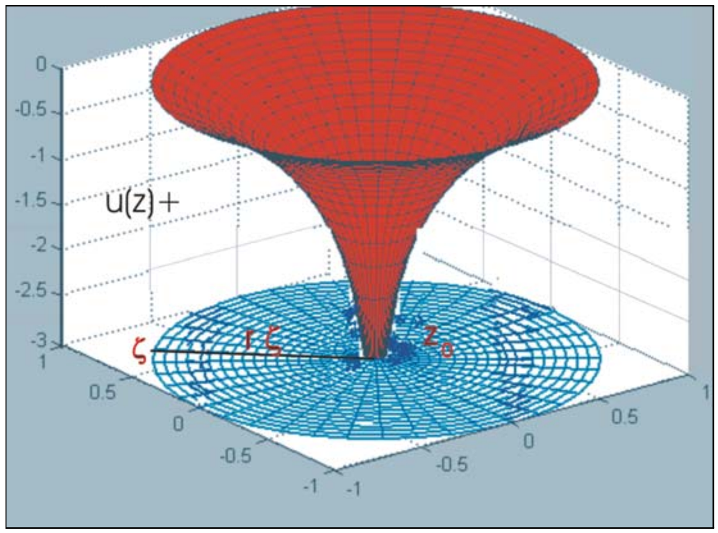


Figura 13

Entonces,

$$\begin{aligned}
\frac{u\left(r\zeta\right)}{1-r} &< c\,\frac{\log\frac{1}{r}}{1-r}\\
c\log\frac{1}{r} &< 1-r.\\
-c\,\frac{\log r}{1-r} &\longrightarrow -c\,\frac{\frac{1}{r}}{-1}=c. \qquad \left(\text{Cuando } r\to 1^{-}\right)
\end{aligned}$$

De donde

$$u\left(z\right)<-c\log\left|z\right|.$$

Sea

$$c_1=\frac{u\left(w\right)}{\log 2}\leq c,$$

Así

$$u\left(z\right)+c_1\log\left|z\right|\leq 0. \quad \blacksquare$$

3. ■ Sean $\triangle=\triangle\left(0,1\right)$ y $f:\triangle\to\triangle$ una función holomorfa tal que

$$f\left(z\right)=z+o\left(\left|1-z\right|^3\right) \text{ cuando } z\to 1.$$

(*i*) Sea $\phi(z) = \frac{(1+z)}{(1-z)}$ y $u(z) = \operatorname{Re}(\phi(z) - \phi(f(z)))$. Pruebe que $\limsup_{z\to\zeta} u(z) \leq 0$ para cada $\zeta \in \partial \triangle \setminus \{1\}$, y que $u(z) = o(|1-z|)$ cuando $z \to 1$.

(*ii*) Use el *Principio del Máximo* para deducir que $u \leq 0$, y entonces el Ejercicio 2 muestra que $u \equiv 0$.

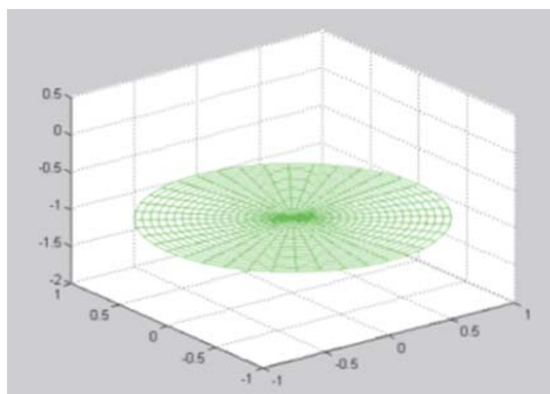
(*iii*) Concluya que $f(z) \equiv z$.

Prueba:

(*i*)

$$\begin{aligned} f(z) &= z + o\left(|1-z|^3\right) \text{ cuando } z \longrightarrow 1 \\ &\Longleftrightarrow \frac{f(z)-z}{|1-z|^3} \longrightarrow 0 \quad \text{cuando } z \longrightarrow 1. \end{aligned}$$

Figura 14



$\phi(z) = \frac{1+z}{1-z}$

$$\phi(z) = \frac{1+z}{1-z} \cdot \frac{1-\overline{z}}{1-\overline{z}} = \frac{1-|z|^2 + 2i \operatorname{Im} z}{|1-z|^2}.$$

Sea $\zeta \in \partial\Delta \setminus \{1\}$.

$$\limsup_{\substack{z\to\zeta\in\partial\triangle \\ \zeta\neq 1}} \operatorname{Re}\phi(z) = 0.$$

De donde

$$\limsup_{\substack{z\to\zeta\in\partial\triangle \\ \zeta\neq 1}} u(z) \leq 0 \qquad \left(\begin{array}{l} \phi(z) \text{ está en el semiplano derecho,} \\ \text{por lo tanto } \operatorname{Re}\phi(f(z)) > 0 \end{array}\right).$$

En efecto, puesto que $\forall z \in \triangle$, $\mathrm{Re}\phi\left(f\left(z\right)\right) > 0$, entonces

$$\limsup_{\substack{z\to\zeta\in\partial\triangle\\ \zeta\neq 1}} \mathrm{Re}\phi\left(f\left(z\right)\right) \geq 0.$$

Por lo tanto

$$\left(\forall z \in \triangle, \quad -\mathrm{Re}\phi\left(f\left(z\right)\right)\right) < 0.$$

Así

$$\limsup_{\substack{z\to\zeta\in\partial\triangle\\ \zeta\neq 1}} u\left(z\right) - \mathrm{Re}\phi\left(f\left(z\right)\right) \leq 0$$

y

$$\begin{aligned}
\limsup_{\substack{z\to\zeta\in\partial\triangle\\ \zeta\neq 1}} u\left(z\right) &= \limsup_{z\to\zeta} \mathrm{Re}\left(\phi\left(z\right) - \phi\left(f\left(z\right)\right)\right) \\
&= \mathrm{Re}\phi\left(\zeta\right) + \limsup_{z\to\zeta} - \mathrm{Re}\phi\left(f\left(z\right)\right) \\
&= 0 + \limsup_{z\to\zeta} - \mathrm{Re}\phi\left(f\left(z\right)\right) \\
&\leq 0.
\end{aligned}$$

Veamos que $u\left(z\right) = o\left(\left|1-z\right|\right)$ *cuando* $z \to 1$.

$$\phi\left(z\right) - \phi\left(f\left(z\right)\right) = \frac{1+z}{1-z} - \frac{1+f\left(z\right)}{1-f\left(z\right)}.$$

$$\begin{aligned}
\frac{u\left(z\right)}{\left|1-z\right|} &= 2\mathrm{Re}\left(\frac{z-f\left(z\right)}{\left(1-z\right)\left|1-z\right|\left(1-f\left(z\right)\right)}\right) \\
&\leq 2\frac{\left|z-f\left(z\right)\right|}{\left|1-z\right|^2\left|1-f\left(z\right)\right|} \\
&= \frac{2\left|z-f\left(z\right)\right|\left|1-z\right|}{\left|1-z\right|^3\left|1-f\left(z\right)\right|}.
\end{aligned}$$

Sea $g\left(z\right) = \frac{f(z)-z}{\left|1-z\right|^3}$ $\quad (z \neq 1)$, entonces

$$\begin{aligned}
f\left(z\right) - z &= g\left(z\right)\left|1-z\right|^3 \qquad \left(g\left(z\right) \longrightarrow 0 \text{ cuando } z \longrightarrow 1\right) \\
f\left(z\right) &= z + g\left(z\right)\left|1-z\right|^3 \\
f\left(z\right) - 1 &= z - 1 + g\left(z\right)\left|1-z\right|^3
\end{aligned}$$

$$\therefore \quad \frac{2\left|z-f\left(z\right)\right|\left|1-z\right|}{\left|1-z\right|^3\left|1-f\left(z\right)\right|} = \frac{2\left|z-f\left(z\right)\right|}{\left|1-z\right|^3}\frac{\left|1-z\right|}{\left|z-1+g\left(z\right)\left|1-z\right|^3\right|}$$

$$\leq \quad \frac{2\left|z-f\left(z\right)\right|\left|1-z\right|}{\left|1-z\right|^3\left(\left|g\left(z\right)\left|1-z\right|^3\right| - \left|1-z\right|\right)} \qquad \left(\begin{array}{l}\left|g\left(z\right)\left|1-z\right|^3 - \left(1-z\right)\right| \\ \geq \left|g\left(z\right)\left|1-z\right|^3\right| - \left|1-z\right|\end{array}\right)$$

$$= \quad \frac{2\left|z-f\left(z\right)\right|}{\left|1-z\right|^3\left|g\left(z\right)\left|1-z\right|^2 - 1\right|} \longrightarrow 0 \text{ cuando } z \longrightarrow 1.$$

(ii) Por lo anterior, $\limsup_{z\to 1} u\left(z\right) = 0$, luego $\limsup_{z\to\zeta} u\left(z\right) \leq 0$

para cualquier $\zeta \in \partial\Delta$. Por el Teorema 2.3.1(b), $u \leq 0$ en D. Cosideremos, entonces, los siguientes casos:

Caso1:

Si existe un $z_o \in \triangle$ tal que $u(z_o) = 0$; entonces por el Teorema 2.3.1(a), u es constante y por lo tanto idénticamente cero.

Caso 2:

$u < 0$.

Aplicando el Ejercicio 2,

$$\limsup_{z\to 1^-} \frac{u(r\zeta)}{1-r} < 0;$$

pero $\lim\limits_{z\to 1} \frac{u(\zeta)}{|1-z|} \longrightarrow 0$ y por lo tanto $\limsup\limits_{z\to 1^-} \frac{u(\zeta)}{|1-z|} \longrightarrow 0$, lo cual es un absurdo. Por lo tanto $u \equiv 0$.

(iii) Si $u \equiv 0$, entonces la función $h(z) = \phi(z) - \phi(f(z))$ es holomorfa en Δ y su parte real es constante, luego h es constante en Δ, o sea que $\phi(z) = \phi(f(z))$ para $z \in \Delta$. Pero ϕ es inyectiva (es una transformación de Möbius), luego $f(z) \equiv z$. ■

4. ■ Sea u una función subarmónica en $\triangle(0,1)$ tal que

$$u(z) \leq -\log|\mathrm{Im}\ z| \qquad (|z| < 1).$$

Pruebe que

$$u(z) \leq -\log\left|\frac{1-z^2}{2}\right| \qquad (|z| < 1).$$

Prueba:

Sea $\Delta = \triangle(0,1)$.

Sea, para $0 < r < 1$,

$$v_r(z) = u(z) + \log\left|\frac{r^2 - z^2}{2r}\right| \qquad (z \in \Delta)$$

Veamos que $\limsup_{z\longrightarrow\zeta} v_r(z) \leq 0$ para $\zeta \in \partial\triangle(0,r)$.

$$\begin{aligned} \limsup_{z\to\zeta} v_r(z) &\leq \limsup_{z\to\zeta} u(z) + \limsup_{z\to\zeta} \log\left|\frac{r^2-z^2}{2r}\right| \\ &\leq \limsup_{z\to\zeta} (-\log|\mathrm{Im}\ z|) + \limsup_{z\to\zeta} \log\left|\frac{r^2-z^2}{2r}\right|. \end{aligned}$$

Sea $\zeta \in \triangle\partial(0,r)$, sea $\zeta = re^{it}$, con $t \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} \limsup_{z\to\zeta} v_r(z) &\leq \limsup_{z\to\zeta} (-\log|\mathrm{Im}\ z|) + \log\frac{|r^2-\zeta^2|}{2r} \\ &= -\log|\mathrm{Im}\ \zeta| + \log\frac{r^2|1-e^{2it}|}{2r} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \log r - \log 2 + \log\left|1-e^{2it}\right| - \log|r\mathrm{sen}t| \\ &= \log\frac{\left|1-e^{2it}\right|}{2\,|\mathrm{sen}t|} \\ &= 0, \end{aligned}$$

ya que $1-e^{2it} = 1-\cos 2t - i\mathrm{sen}2t$, de donde

$$\left|1-e^{2it}\right|^2 = 1-2\cos t+1 = 2\left(1-\cos^2 t+\mathrm{sen}^2 t\right) = 4\mathrm{sen}^2 t.$$

$$\therefore\ \left|1-e^{2it}\right| = 2\,|\mathrm{sen}\,t|\,.$$

Así por el *Principio del Máximo*

$$v_r(z) \leq 0 \qquad \forall z \in \triangle(0,r)\,,$$

o sea

$$u(z) \leq \log\left|\frac{r^2-z^2}{2r}\right|.$$

Tomando límite cuando $r \to 1^-$, tenemos

$$\lim_{r\to 1^-} v_r(z) \leq 0.$$

Por lo tanto

$$u(z) \leq -\log\left|\frac{1-z^2}{2}\right| \qquad (|z|<1)\,. \qquad \blacksquare$$

6. ■ Sea f una función holomorfa en $\mathbb{H} := \{z/\mathrm{Re}\ z > 0\}$ tal que, para algunas constantes $C < \infty$ y $\gamma < \pi$,

$$|f(z)| \leq Ce^{\gamma|z|} \qquad (z \in \mathbb{H})\,.$$

Suponga también que $f(n) = 0$ para cada entero $n \geq 1$. Pruebe que

$$u(z) := \log\left|\frac{f(z)}{2C\mathrm{sen}(\pi z)}\right|$$

es subarmónica en $\mathbb{H}$, y que satisface

$$\begin{cases} u(z) \leq A + B\,|z| & (z \in \mathbb{H})\,, \\ \\ \limsup\limits_{z\to\zeta} u(z) \leq -\alpha\,|\zeta| & (\zeta \in \partial\mathbb{H}\backslash\{\infty\})\,. \end{cases}$$

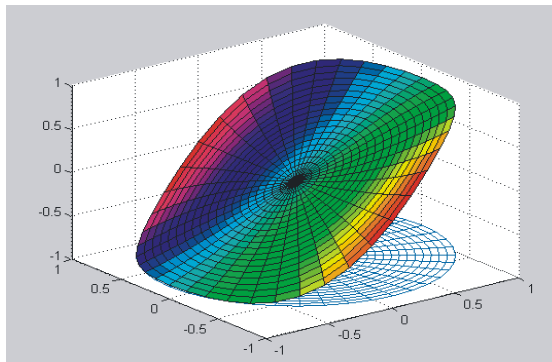
con $\alpha = \pi - \gamma > 0$. Deduzca que $f \equiv 0$ en $\mathbb{H}$.

Prueba:

La función u es subarmónica en $\mathbb{H}$ porque

$$\begin{aligned} |\mathrm{sen}\pi z| &= \left|\frac{e^{i\pi z}-e^{-i\pi z}}{2i}\right| \\ &\geq \frac{\left|\left|e^{i\pi z}\right|-\left|e^{-i\pi z}\right|\right|}{2} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{\left|e^{-\pi y}-e^{\pi y}\right|}{2} \\
&\geq \frac{\left|e^{\pi y}-e^{-\pi y}\right|}{2} \\
&= \begin{cases} \frac{e^{\pi y}-e^{-\pi y}}{2} & \text{si} \quad y \geq 0 \\ \frac{e^{-\pi y}-e^{\pi y}}{2} & \text{si} \quad y < 0 \end{cases} \\
&\geq \begin{cases} \frac{e^{\pi y}}{2} & \text{si} \quad y \geq 0 \\ \frac{e^{-\pi y}}{2} & \text{si} \quad y < 0 \end{cases}.
\end{aligned}
$$



sen (z)

Figura 15

De donde

$$\left|\frac{f(z)}{2C\operatorname{sen}\pi z}\right| \leq e^{\gamma|z|-\pi|y|}$$

luego

$$
\begin{aligned}
\log\left|\frac{f(z)}{2C\operatorname{sen}\pi z}\right| &\leq \gamma|z|-\pi|y| \\
&\leq \gamma|z|
\end{aligned}
$$

(Para $A=0$ y $B=\gamma$).

Para $(\zeta \in \partial\mathbb{H} \setminus \{\infty\})$ $\quad u(z) \leq \gamma|z|-\pi|\operatorname{Im} z|,$

$$\limsup_{z\to\zeta} u(z) \leq \gamma|\zeta|-\pi|\zeta| = -\alpha|\zeta|. \qquad \blacksquare$$

2.4 Criterio para Subarmonicidad

Teorema 2.4.1 Sean U *un subconjunto abierto de* $\mathbb{C}$, *y* $u : U \longrightarrow [-\infty, \infty)$ *una función semicontinua superiormente. Entonces los siguientes literales son equivalentes:*

(a) *La función u es subarmónica en U.*

(b) *Si $\overline{\Delta}(w,\rho) \subset U$, entonces para $r < \rho$ y $0 \leq t < 2\pi$*

$$u\left(w + re^{it}\right) \leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\rho^2 - r^2}{\rho^2 - 2\rho r\cos(\theta - t) + r^2} u\left(w + \rho e^{i\theta}\right) d\theta.$$

(c) *Si D es un subdominio relativamente compacto de U, y h es una función armónica en D que satisface*

$$\limsup_{z \longrightarrow \zeta} (u - h)(z) \leq 0 \qquad (\zeta \in \partial D),$$

entonces $u \leq h$ en D.

Prueba:

$(a) \Longrightarrow (c)$: Dados D un subdominio relativamente compacto de U y h una función armónica en D, entonces la función $u - h$ es subarmónica en D, luego por el Principio del Máximo (Teorema 2.3.1(b)), tenemos que $u \leq h$ en D.

$(c) \Longrightarrow (b)$: Supongamos que $\overline{\Delta} := \overline{\Delta}(w,\rho) \subset U$. Por el Teorema 2.1.3 existe una sucesión de funciones continuas $\phi_n : \partial\Delta \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $\phi_n \downarrow u$ en $\partial\Delta$. Por el Teorema 1.2.4 cada Integral de poisson $P_\Delta \phi_n$ es armónica en Δ y $\lim_{z \longrightarrow \zeta} P_\Delta \phi_n(z) = \phi_n(\zeta)$ para cada $\zeta \in \partial\Delta$, entonces

$$\limsup_{z \longrightarrow \zeta} (u - P_\Delta \phi_n)(z) \leq u(\zeta) - \phi_n(\zeta) \leq 0 \quad (\zeta \in \partial\Delta).$$

De (c) se sigue que $u \leq P_\Delta \phi_n$ en Δ. Tomando límite cuando $n \longrightarrow \infty$, por el Teorema de la Convergencia Monótona, tenemos que:

$$u\left(w + re^{it}\right) \leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\rho^2 - r^2}{\rho^2 - 2\rho r\cos(\theta - t) + r^2} u\left(w + \rho e^{i\theta}\right) d\theta.$$

$(b) \Longrightarrow (a)$ Por la Definición de función subarmónica. ■

Corolario 2.4.2 (Desigualdad Submedia Global)

Si u es una función subarmónica en un conjunto abierto U en $\mathbb{C}$, y si $\overline{\Delta}(w,\rho) \subset U$, entonces

$$u(w) \leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u\left(w + \rho e^{i\theta}\right) d\theta.$$

Prueba:

Basta que tomemos $r = 0$ en el Teorema 2.4.1(b). ∎

Corolario 2.4.3 *Si $f : U_1 \longrightarrow U_2$ es un mapeo conforme entre subconjuntos abiertos U_1 y U_2 de $\mathbb{C}$, y si u es subarmónica en U_2, entonces $u \circ f$ es subarmónica en U_1.*

Prueba:

Como f es conforme y u es subarmónica, entonces $u \circ f$ es semicontinua superiormente.

Sean $w \in U_1$ y $\overline{\Delta}(f(w), \rho) \subset U_2$. Entonces

$$\begin{aligned}(u \circ f)(w) &= u(f(w)) \leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u\left(f(w) + \rho e^{i\theta}\right) d\theta \\ &\leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} (u \circ f)\left(w + \rho e^{i\theta}\right) d\theta.\end{aligned}$$

Luego $u \circ f$ es subarmónica. ∎

Teorema 2.4.4 *Sea U un subconjunto abierto de $\mathbb{C}$, y sea $u \in C^2(U)$. Entonces u es subarmónica en U si y sólo si $\Delta u \geq 0$ en U.*

Prueba:

"$\Longleftarrow$" Supongamos ahora que $\Delta u \geq 0$ en U y utilicemos el Teorema 2.4.1 para probar que u es subarmónica.

Sea D un sudominio relativamente compacto de U, supongamos que h es una función armónica en D tal que $\limsup_{z \longrightarrow \zeta} (u - h)(z) \leq 0$ para toda $\zeta \in \partial D$.

Veamos que $u \leq h$ en D.

Dado $\epsilon > 0$, definamos

$$v_\epsilon(z) := \begin{cases} u(z) - h(z) + \epsilon |z|^2, & \text{si } z \in D, \\ \epsilon |z|^2, & \text{si } z \in \partial D. \end{cases}$$

Entonces v_ϵ es semicontinua superiormente en $\overline{D}$, y por lo tanto alcanza un máximo allí. Pero v_ϵ no puede alcanzar un máximo local en D porque

$\Delta v_\epsilon = \Delta u + 4\epsilon > 0$ en D. Por lo tanto el máximo se alcanza en ∂D, entonces $u - h \leq \sup_{\partial D} \epsilon |z|^2$ en D. Tomando límite cuando $\epsilon \longrightarrow 0$ tenemos que $u \leq h$ en D. Por el Teorema 2.4.1 concluimos que u es subarmónica en U.

"$\Longrightarrow$" Sea u subarmónica en U.

Supongamos que existe algún $w \in U$ para el cual $\Delta u(w) < 0$. Como $u \in C^2(U)$, entonces u es continua, luego existe $\rho > 0$ tal que $\Delta u \leq 0$ en $\Delta(w,\rho)$, es decir u es superarmónica en $\Delta(w,\rho)$, por lo tanto u es armónica allí. En particular $\Delta u(w) = 0$, lo cual contradice la suposición. Por lo tanto $\Delta u \geq 0$ en U. ■

Teorema 2.4.5 (Teorema del Pegamento)

Sea u una función subarmónica en un conjunto abierto U de $\mathbb{C}$, y sea v una función subarmónica en un subconjunto abierto V de U, tales que

$$\limsup_{z \longrightarrow \zeta} v(z) \leq u(\zeta) \qquad (\zeta \in U \cap \partial V).$$

Entonces $\widetilde{u}$ es subarmónica en U, donde

$$\widetilde{u} := \begin{cases} \max(u,v) & \text{en } V, \\ u & \text{en } U \backslash V. \end{cases}$$

Prueba:

Como $\limsup_{z \longrightarrow \zeta} v(z) \leq u(\zeta)$ $(\zeta \in U \cap \partial V)$, entonces $\widetilde{u}$ es semicontinua superiormente en U. Por el Teorema 2.2.3 (a) $\widetilde{u}$ satisface la Desigualdad Submedia local en cada $w \in V$ y también en cada $w \in U \backslash V$ puesto que $\widetilde{u} \geq u$ en U. ■

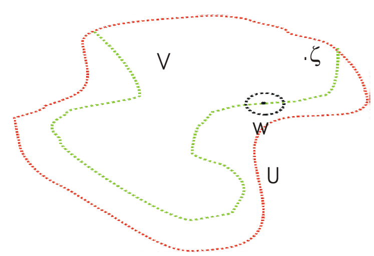


Figura 16

Concluiremos esta sección con tres teoremas acerca de familias infinitas de funciones subarmónicas, los cuales no se cumplirían si restringieramos las funciones subarmónicas a funciones continuas.

Teorema 2.4.6 *Sea $(u_n)_{n\geq 1}$ una sucesión de funciones subarmónicas en un conjunto abierto U en $\mathbb{C}$, y suponga que $u_1 \geq u_2 \geq u_3 \geq \cdots$ en U.*

Entonces $u := \lim_{n\longrightarrow\infty} u_n$ *es subarmónica en* U.

Prueba:

Sean $\alpha \in \mathbb{R}$ y $U_n = \{z/u_n(z) < \alpha\}$. U_n es abierto. Entonces $\{z/u(z) < \alpha\}$ para cada $\alpha \in \mathbb{R}$ es la unión de conjuntos U_n y por lo tanto es abierto y u es semicontinua superiormente.

Ahora, si $\overline{\Delta}(w,\rho) \subset U$, entonces para cada $n \geq 1$

$$u_n(w) \leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u_n\left(w+\rho e^{i\theta}\right) d\theta.$$

Sea $v_n = u_1 - u_n \geq 0$, v_n es creciente. En efecto,

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= u_1 - u_{n+1} \\ u_{n+1} &< u_n \\ \therefore \quad & -u_n < -u_{n+1} \\ \therefore \quad & u_1 - u_n < u_1 - u_{n+1}. \end{aligned}$$

Entonces, por el Teorema de la Convergencia Monótona

$$\int_0^{2\pi} u_1\left(w+\rho e^{i\theta}\right) d\theta - \lim_{n\to\infty}\int_0^{2\pi} u_n\left(w+\rho e^{i\theta}\right) d\theta = \lim_{n\to\infty}\int_0^{2\pi} v_n\left(w+\rho e^{i\theta}\right) d\theta$$

$$\begin{aligned} &= \lim_{n\to\infty}\int_0^{2\pi} (u_1-u_n)\left(w+\rho e^{i\theta}\right) d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} u_1\left(w+\rho e^{i\theta}\right) d\theta - \int_0^{2\pi} u\left(w+\rho e^{i\theta}\right) d\theta \end{aligned}$$

De donde

$$\begin{aligned} u(w) &= \lim_{n\to\infty} u_n(w) \\ &\leq \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u_n\left(w+\rho e^{i\theta}\right) d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u\left(w+\rho e^{i\theta}\right) d\theta. \end{aligned}$$

Por lo tanto u satisface la Desigualdad Submedia. ∎

El correspondiente resultado para sucesiones crecientes (u_n) no se cumple, porque aun un límite finito u puede no ser semicontinuo superiormente. Por ejemplo, si $u_n(z) = \left(\frac{1}{n}\right) \log|z|$ en $\Delta(0,1)$, entonces

$$u(z) = \begin{cases} 0, & \text{si } 0 < |z| < 1, \\ -\infty, & \text{si } z = 0. \end{cases}$$

Los dos resultados siguientes son la generalización de las partes (a) y (b) del Teorema 2.2.3.

Teorema 2.4.7 *Sea T un espacio topológico compacto, sea U un subconjunto abierto de $\mathbb{C}$, y sea $v : U \times T \longrightarrow [-\infty, \infty)$ una función tal que*:

(a) *v es semicontinua superiormente en $U \times T$;*

(b) *$z \longmapsto v(z,t)$ es subarmónica en U para cada $t \in T$.*

Entonces $u(z) :=\sup_{t\in T} v(z,t)$ es subarmónica en U.

Prueba:

Sean $w \in U$ y $u(w) < \alpha$. Sea $\alpha' \in (u(w), \alpha)$. Entonces para cada $t \in T$, $v(w,t) < \alpha'$. Como v es semicontinua superiormente, existen una vecindad N_t de t y $\rho_t > 0$ tales que $v < \alpha'$ en $\Delta(w, \rho_t) \times N_t$. Como T es compacto, admite un subcubrimiento finito $N_{t_1}, \ldots, N_{t_n}$. Entonces $u \leq \alpha'$ en $\Delta(w, \rho')$, donde $\rho' = \min\left(\rho_{t_1}, \ldots, \rho_{t_n}\right)$. Luego $u < \alpha$ en $\Delta(w, \rho')$. Esto muestra que u es semicontinua superiormente.

Ahora supongamos que $\overline{\Delta}(w,\rho) \subset U$. Entonces para cada $t \in T$,

$$v(w,t) \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} v\left(w + \rho e^{i\theta}, t\right) d\theta \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u\left(w + \rho e^{i\theta}\right) d\theta.$$

Luego $u(z) :=\sup_{t\in T} v(z,t)$ satisface la Desigualdad Submedia y por lo tanto es subarmónica en U. ∎

Teorema 2.4.8 *Sean (Ω, μ) un Espacio Medible con $\mu(\Omega) < \infty$, y U un subconjunto abierto de $\mathbb{C}$, y sea $v : U \times \Omega \longrightarrow [-\infty, \infty)$ una función medible tal que:*

(a) *v es medible en $U \times \Omega$;*

(b) *$z \longmapsto v(z,w)$ es subarmónica en U para cada $w \in \Omega$;*

(c) *$z \longmapsto \sup_{w\in\Omega} v(z,w)$ es localmente acotado superiormente en U.*

Entonces $u(z) := \int_\Omega v(z,w)\, d\mu(w)$ es subarmónica en U.

Prueba:

Es suficiente probar que u es subarmónica en cada subdominio relativamente compacto D de U.

Fijemos un tal D. Entonces (c) implica que $\sup_w v(z,w)$ es acotado superiormente en D, así, restando una constante si es necesario, suponemos que $v \leq 0$ en $D \times \Omega$. Ahora podemos utilizar el Lema de Fatou.

$$\begin{aligned}\limsup_{n\longrightarrow\infty} u(w_n) &= -\liminf_{n\longrightarrow\infty} (-u(w_n)) \\ &= -\liminf_{n\longrightarrow\infty}\left[-\int_\Omega v(w_n,w)\, d\mu(w)\right].\end{aligned}$$

Si $w_n \longrightarrow w$ en D, entonces por el Lema de Fatou

$$\begin{aligned}\limsup_{n\longrightarrow\infty} u(w_n) &\leq \int_\Omega \limsup_{n\longrightarrow\infty} v(w_n,w)\, d\mu(w) \\ &\leq \int_\Omega v(w,w)\, d\mu(w) = u(w).\end{aligned}$$

De aquí se sigue que u es semicontinua superiormente en D.

Si $\overline{\Delta}(w,\rho) \subset D$, entonces por el Teorema de Fubini

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u\left(w+\rho e^{i\theta}\right) d\theta &= \int_\Omega \left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} v\left(w+\rho e^{i\theta}, w\right) d\theta\right) d\mu(w) \\ &\geq \int_\Omega v(w,w)\, d\mu(w) = u(w).\end{aligned}$$

$-v \geq 0$, de donde

$$\int_\Omega \liminf_{n\longrightarrow\infty} \left(-v(w_n,w)\, d\mu(w)\right) \leq \liminf_{n\longrightarrow\infty} \int_\Omega -v(w_n,w)\, d\mu(w)$$

$$\begin{aligned}\therefore\ \limsup_{n\longrightarrow\infty} u(w_n) &= -\liminf_{n\longrightarrow\infty} \int_\Omega -v(w_n,w)\, d\mu(w) \\ &\leq \int_\Omega \liminf_{n\longrightarrow\infty} \left(-v(w_n,w)\, d\mu(w)\right) \\ &= \int_\Omega \limsup_{n\longrightarrow\infty} v(w_n,w)\, d\mu(w).\end{aligned}$$

Así que u satisface la Desigualdad Submedia en D. ■

Ejercicios 2.4

1. Sea u una función semicontinua superiormente en un subconjunto abierto U de $\mathbb{C}$. Suponga que para cada $w \in U$ con $u(w) > -\infty$, tenemos que
$$\limsup_{r \longrightarrow 0} \frac{1}{r^2} \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u\left(w + re^{it}\right) dt - u(w) \right) \geq 0.$$
Pruebe que u es subarmónica en U.

   [Sugerencia: Sea $\epsilon > 0$, tome $u_\epsilon = u + \epsilon |z|^2$. Repita los pasos principales previos al Corolario 2.4.2 para probar que u_ϵ satisface la Desigualdad Submedia. Luego tome límite cuando $\epsilon \longrightarrow 0$.]

2. (i) Pruebe que si $u(z)$ es subarmónica en una vecindad de 0, entonces $u\left(z^k\right)$ también es subarmónica para cada $k \geq 1$.

   (ii) Pruebe que si f es holomorfa en una vecindad de w y $f - f(w)$ tiene un cero de orden exactamente k en w, entonces existe una función holomorfa, inyectiva g en una vecindad de w tal que $f(z) = g(z)^k + f(w)$ allí.

   (iii) Combine (i) y (ii) para extender el Corolario 2.4.3 a funciones holomorfas arbitrarias.

3. Sea U un subconjunto abierto de $\mathbb{C}$. Pruebe que
$$u(z) := -\log \operatorname{dist}(z, \partial U)$$
es subarmónica en U.

Ejercicios Resueltos 2.4

1. Sea u una función semicontinua superiormente en un subconjunto abierto U de $\mathbb{C}$. Suponga que para cada $w \in U$ con $u(w) > -\infty$, tenemos que
$$\limsup_{r \longrightarrow 0} \frac{1}{r^2} \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u\left(w + re^{it}\right) dt - u(w) \right) \geq 0.$$
Pruebe que u es subarmónica en U.

   Prueba:

   Sea $\epsilon > 0$, y definamos
$$u_\epsilon : = u + \epsilon |z|^2 .$$
La función u es semicontinua superiormente y $\epsilon |z|^2$ es subarmónica, luego u_ϵ es semicontinua superiormente.

Sea $\bar{\Delta} = \bar{\Delta}(w, \rho)$ y $\phi_n : \partial\Delta \longrightarrow \mathbb{R}$ una sucesión de funciones Lebesgue-integrables, tales que $\phi_n \downarrow u_\epsilon$ en $\partial\Delta$. Entonces $P_\Delta \phi_n : \Delta \to \mathbb{R}$ es armónica en Δ y

$$\lim_{z \longrightarrow \zeta} P_\Delta \phi_n(z) = \phi_n(\zeta) \quad (\forall \zeta \in \partial\Delta).$$

Veamos que $u_\epsilon(\zeta) \leq \lim\limits_{z \longrightarrow \zeta} P_\Delta \phi_n(z) \qquad (\zeta \in \Delta)$.

Sean $0 < r < \rho$ y $0 \leq t < 2\pi$, entonces:

$$u_\epsilon\left(w + re^{it}\right) \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\rho^2 - r^2}{\rho^2 - 2\rho r \cos(\theta - t) + r^2} \phi_n\left(w + \rho e^{i\theta}\right) d\theta.$$

$$\lim_{n \to \infty} u_\epsilon\left(w + re^{it}\right) \leq \lim_{n \to \infty} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\rho^2 - r^2}{\rho^2 - 2\rho r \cos(\theta - t) + r^2} \phi_n\left(w + \rho e^{i\theta}\right) d\theta,$$

por el Teorema de la Convergencia Monótona

$$u_\epsilon\left(w + re^{it}\right) \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\rho^2 - r^2}{\rho^2 - 2\rho r \cos(\theta - t) + r^2} u_\varepsilon\left(w + \rho e^{i\theta}\right) d\theta.$$

Con $r = 0$

$$u_\epsilon(w) \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u_\varepsilon\left(w + \rho e^{i\theta}\right) d\theta.$$

$$\therefore\ u_\varepsilon \text{ es subarmónica.}$$

Entonces

$$u(w) + \epsilon |w|^2 \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(u\left(w + \rho e^{i\theta}\right) + \epsilon \left|w + \rho e^{i\theta}\right|^2 \right) d\theta$$

Tomando límite cuando $\epsilon \longrightarrow 0$, tenemos que u es subarmónica en U. ■

3. ■ Sea U un subconjunto abierto de $\mathbb{C}$. Pruebe que

$$u(z) := -\log \operatorname{dist}(z, \partial U)$$

es subarmónica en U.

Prueba:

$$\operatorname{dist}(z, \partial U) = \inf\{|z - c| / c \in \partial U\}.$$

$$\begin{aligned} f(z, c) &= \log\left|\frac{1}{z - c}\right| && \left(\begin{array}{l} (c \in \partial U), \quad f \text{ es armónica en } U \\ \text{como función de } z \end{array} \right). \\ h(z) &= \frac{1}{z - c} && \text{no se anula para } z \in U. \end{aligned}$$

Pregunta: ¿$\log \frac{1}{\operatorname{dist}(z,\partial U)} = \sup_{c\in\partial U} f(z,c)$?.

Sea $T = \partial U$.

$$\begin{aligned}
\operatorname{dist}(z,\partial U) &\leq |z-c| && \text{(para toda } c\in\partial U)\\
\frac{1}{|z-c|} &\leq \frac{1}{\operatorname{dist}(z,\partial U)} && \text{(para toda } c).\\
f(z,c) &= \log\frac{1}{|z-c|} \leq \log\frac{1}{\operatorname{dist}(z,\partial U)},
\end{aligned}$$

de donde

$$\sup_{c\in\partial U} f(z,c) \leq \log\frac{1}{\operatorname{dist}(z,\partial U)}.$$

Pero $\exists c_o \in \partial U$ tal que

$$\begin{aligned}
\operatorname{dis}(z,\partial U) &= |z-c_o|\\
\frac{1}{|z-c_o|} &= \frac{1}{\operatorname{dis}(z,\partial U)}.\\
f(z,c_o) &= \log\frac{1}{|z-c_o|}\\
&= \log\frac{1}{\operatorname{dis}(z,\partial U)}\\
&\leq \sup_{c\in\partial U} f(z,c)
\end{aligned}$$

de donde

$$\sup_{c\in\partial U} f(z,c) = \log\frac{1}{\operatorname{dis}(z,\partial U)}.$$

Luego por el Teorema 2.4.7 $u(z) := -\log\operatorname{dist}(z,\partial U)$ es subarmónica en u. ■

2.5 Integrabilidad

Como las funciones subarmónicas son semicontinuas superiormente, automaticamente son acotadas superiormente en conjuntos compactos (Teorema 2.1.2). El hecho de que tampoco pueden ser no-acotadas inferiormente es menos obvio.

Teorema 2.5.1 (Teorema de Integrabilidad)

Sea u una función subarmónica en un dominio D en $\mathbb{C}$, con $u \not\equiv -\infty$ en D. Entonces u es **Localmente Integrable** *en D, es decir $\int_K |u|\,dA < \infty$ para cada subconjunto compacto K de D.*

dA denota la medida de Lebesgue dos-dimensional.

Prueba:

Por un argumento simple de compacidad, es suficiente probar que para cada $w \in D$ existe $\rho > 0$ tal que

$$\int_{\Delta(w,\rho)} |u|\, dA < \infty. \tag{2.4}$$

Definamos los conjuntos A y B, como:

$$A: \quad = \quad \left\{ w \in D : \int_{\Delta(w,\rho)} |u|\, dA < \infty \ \text{ para algún } \rho > 0 \right\}.$$

$$B: \quad = \quad \left\{ w \in D : \int_{\Delta(w,\rho)} |u|\, dA = \infty \ \text{ para todo } \rho > 0 \text{ con } \Delta(w,\rho) \subseteq D \right\}.$$

Veamos que A y B son abiertos y que $u = -\infty$ en B. El resultado se sigue de la conexidad de D.

Sea $w \in A$. Escojamos $\rho > 0$ tal que (2.4) se cumpla.

Dado $w' \in \Delta(w,\rho)$, tomemos $\rho' = \rho - |w' - w|$. Entonces $\Delta(w',\rho') \subset \Delta(w,\rho)$; así

$$\int_{\Delta(w',\rho')} |u|\, dA < \infty.$$

Por lo tanto $\Delta(w,\rho) \subset A$, lo que prueba que A es abierto.

Ahora sea $w \in B$. Escojamos $\rho > 0$ tal que $\overline{\Delta}(w, 2\rho) \subset D$. Puesto que $w \in B$,

$$\int_{\Delta(w,\rho)} |u|\, dA = \infty.$$

Dado $w' \in \Delta(w,\rho)$, tomemos $\rho' = \rho + |w' - w|$. Entonces $\Delta(w',\rho') \supset \Delta(w,\rho)$ y u es acotada superiormente en $\overline{\Delta}(w',\rho')$, así

$$\infty = \int_{\Delta(w,\rho)} |u|\, dA \leq \underbrace{\int_{\Delta(w',\rho')} u^{+} dA}_{<\infty} + \underbrace{\int_{\Delta(w',\rho')} u^{-} dA}_{-\infty} = \infty.$$

Luego

$$\int_{\Delta(w',\rho')} u dA = \underbrace{\int_{\Delta(w',\rho')} u^{+} dA}_{<\infty} - \underbrace{\int_{\Delta(w',\rho')} u^{-} dA}_{-\infty} = -\infty$$

Como u satisface la Desigualdad Submedia

$$u\left(w'\right) \leq \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{2\pi} u\left(w' + re^{it}\right) dt \qquad \left(0 \leq r \leq \rho'\right);$$

así, multiplicando por $2\pi r$ e integrando desde $r = 0$ hasta $r = \rho'$, tenemos:

$$\pi\left(\rho'\right)^2 u\left(w'\right) \leq \int_{\Delta(w',\rho')} udA = -\infty.$$

Entonces $u = -\infty$ en $\Delta(w,\rho)$. Esto prueba que B es abierto y $u = -\infty$ en B.

Como D es conexo entonces (2.4) se cumple. ∎

Del teorema anterior se sigue también que las funciones subarmónicas son integrables en círculos.

Corolario 2.5.2 *Sea u una función subarmónica en un dominio D en $\mathbb{C}$, con $u \not\equiv \infty$. Si $\overline{\Delta}(w,\rho) \subset D$, entonces*

$$\frac{1}{2\pi}\int_{0}^{2\pi} u\left(w + \rho e^{i\theta}\right) d\theta > -\infty.$$

Prueba:

Tomemos $\overline{\Delta}(w,\rho) \subset D$, fijo.

Puesto que u es acotada superiormente en conjuntos compactos, sustrayendo una constante si es necesario, podemos suponer que $u \leq 0$ en $\overline{\Delta}(w,\rho)$. Por el Teorema 2.4.1$(b)$, si $r < \rho$ y $0 \leq t < 2\pi$ entonces

$$\begin{aligned} u\left(w + re^{it}\right) &\leq \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{2\pi} \frac{\rho^2 - r^2}{\rho^2 - 2\rho r\cos(\theta - t) + r^2} u\left(w + \rho e^{i\theta}\right) d\theta \\ &\leq \left(\frac{\rho + r}{\rho - r}\right)\frac{1}{2\pi}\int_{0}^{2\pi} u\left(w + \rho e^{i\theta}\right) d\theta. \end{aligned}$$

Si la última integral es $-\infty$, entonces $u \equiv \infty$ en $\Delta(w,\rho)$; esto contradice el Teorema 2.5.1. Por lo tanto la integral es finita. ∎

Otra consecuencia del Teorema 2.5.1 es que las funciones subarmónicas sólo pueden ser iguales a $-\infty$ en conjuntos relativamente pequeños.

Corolario 2.5.3 *Sea u una función subarmónica en un dominio D*

en $\mathbb{C}$*, con* $u \not\equiv \infty$ *en* D*. Entonces*

$$E:=\{z \in D / u(z)=-\infty\}$$

es un conjunto de medida de Lebesgue cero.

Prueba:

Sea $(K_n)_{n\geq 1}$ una sucesión de conjuntos compactos tales que

$$D=\bigcup_{n=1}^{\infty} K_n.$$

Para cada n tenemos $\int_{K_n} |u|\, dA < \infty$, así $E \cap K_n$ tiene medida cero. Puesto que $E=\bigcup_n (E \cap K_n)$, entonces E también tiene medida cero. ■

Por ejemplo si $u=\log|f|$ donde f es una función holomorfa, entonces E es el conjunto de ceros de f, que es un conjunto contable. Pero existen funciones subarmónicas que son iguales a $-\infty$ en conjuntos no-contables.

Teorema 2.5.4 *Sea* K *un subconjunto compacto de* $\mathbb{C}$ *sin puntos aislados, sea* $(w_n)_{n\geq 1}$ *una sucesión densa en* K*, y sea* $(a_n)_{n\geq 1}$ *una sucesión de números estrictamente positivos tal que* $\sum_n a_n < \infty$*. Defina* $u:\mathbb{C} \longrightarrow [-\infty,\infty)$ *por*

$$u(z)=\sum_{n\geq 1} a_n \log|z-w_n| \qquad (z \in \mathbb{C}).$$

Entonces:

(a) *u es subarmónica en* $\mathbb{C}$ *y* $u \not\equiv \infty$;

(b) $u=-\infty$ *en un subconjunto denso no-contable de* K;

(c) *u es discontinua casi en todo punto en* K.

Prueba:

(a) Sea μ la medida finita en $\mathbb{N}$ dada por $\mu(\{n\})=a_n \quad (n\geq 1)$. Definamos

$$\begin{array}{rccc} v: & \mathbb{C}\times\mathbb{N} & \longrightarrow & [-\infty,\infty) \\ & (z,n) & \longmapsto & v(z,n)=\log|z-w_n|. \end{array}$$

Entonces

$$\mu(\mathbb{N})=\sum_{n\geq 1} a_n < \infty;$$

luego

$$\int_{\mathbb{N}} v(z,n)\, d\mu(n) = \sum_{n\geq 1} a_n \log|z-w_n| = u(z) \quad (z\in\mathbb{C}).$$

Como v es continua, devuelve abiertos en abiertos y cualquier abierto de $\mathbb{C}\times\mathbb{N}$ es medible, luego v es medible.

$\log|z-w_n|$ es subarmónica por ser la parte real de una función holomorfa.

Para $n\geq 1$ fijo, tenemos $w_n\in K$ (acotado), luego si z varía en C, compacto en $\mathbb{C}$, $v(z,n)=\log(|z|+|w_n|)$ es acotado uniformemente.

Entonces por el Teorema 2.4.8 u es subarmónica en $\mathbb{C}$. También $u(z) > -\infty$ para toda $z\in\mathbb{C}\backslash K$.

Sean $n\in\mathbb{Z}^+$ y $w_n\in K$.

Dado $z\in\mathbb{C}\backslash K$ (fijo) $\operatorname{dist}(z,K):=d>0$, de donde

$$\begin{aligned} &\left(\forall n\in\mathbb{Z}^+\right)(|z-w_n|>d)\\ \therefore\quad & a_n\log|z-w_n| > a_n\log d\\ \therefore\quad & \sum_{n\geq 1} a_n\log|z-w_n| > \sum_{n\geq 1} a_n \log d > -\infty.\end{aligned}$$

Entonces $u\not\equiv -\infty$.

(b) Sea $E=\{z\in\mathbb{C}/u(z)=-\infty\}$. E es un subconjunto denso no contable de K, puesto que cada $w_n\in E$.

$$K\backslash E = \bigcup_{n\geq 1}\{z\in K/u(z)\geq -n\},$$

es una unión contable de conjuntos cerrados, densos en ninguna parte, entonces es contable, por lo tanto $K\backslash E$ es magro en K. Si E fuera contable, esto implicaria que K fuera magro en sí mismo, contradiciendo el Teorema de Categoria de Baire. Por lo tanto E no es contable.

(c) La función u es dicontinua en todo punto de $\overline{E}\backslash E$. Puesto que E es denso en K, y por el Corolario 2.5.3 E tiene medida cero, por lo tanto u es discontinua casi en todas partes en K. ■

Ejercicios 2.5

1. Sea u una función subarmónica en un dominio D en $\mathbb{C}$, y suponga que $u=-\infty$ en un segmento de recta L en D.

(i) Sea $\triangle$ un disco abierto en D tal que L contiene un diametro de $\triangle$, que divide a $\triangle$ en $\triangle^+$ y $\triangle^-$. Defina $v : \triangle \longrightarrow [-\infty, \infty)$ por

$$v(z) = \begin{cases} u(z), & \text{si } z \in \triangle^+, \\ \\ -\infty, & \text{si } z \in \Delta^- \cup L. \end{cases}$$

Pruebe que v es subarmónica en $\triangle$.

(ii) Pruebe que $v \equiv -\infty$ en $\triangle$, y deduzca que $u = -\infty$ en $\triangle^+$.

(iii) Concluya que $u \equiv -\infty$ en D.

2. ¿Es posible que una función subarmónica en un dominio D sea discontinua en *todo* punto de D?.

[Sugerencia: mire el Ejercicio 2.1.3.]

Ejercicios Resueltos 2.5

1. ■ Sea u una función subarmónica en un dominio D en $\mathbb{C}$, y suponga que $u = -\infty$ en un segmento de recta L en D.

(i) Sea $\triangle$ un disco abierto en D tal que L contiene un diametro de $\triangle$, que divide a $\triangle$ en $\triangle^+$ y $\triangle^-$.

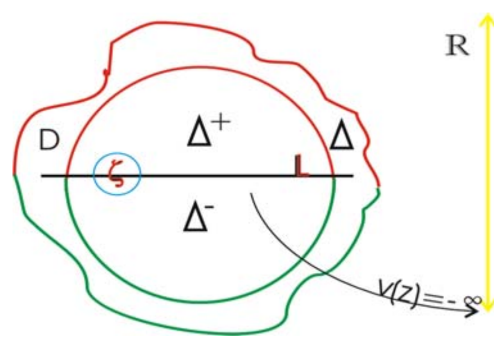


Figura 17

Defina $v : \triangle \longrightarrow [-\infty, \infty)$ por

$$v(z) = \begin{cases} u(z), & \text{si } z \in \triangle^+, \\ -\infty, & \text{si } z \in \Delta^- \cup L. \end{cases}$$

Pruebe que v es subarmónica en $\triangle$.

(ii) Pruebe que $v \equiv -\infty$ en $\triangle$, y deduzca que $u = -\infty$ en $\triangle^+$.

(iii) Concluya que $u \equiv -\infty$ en D.

Prueba:

(i) Sean $\widehat{u} \equiv -\infty$ y $\widehat{v} = u$ en $\triangle$. Entonces

$$\begin{aligned} \limsup_{z\to\zeta} \widehat{v}(z) &\leq u(\zeta) \qquad\qquad (\zeta \in \Delta \cap L). \\ &= -\infty \\ &= \widehat{u}(\zeta). \end{aligned}$$

$$v = \begin{cases} \max\{\widehat{u}, \widehat{v}\}, & \text{en } \triangle^{+}; \\ \widehat{u} = -\infty, & \text{en } \triangle - \triangle^{+} = \triangle^{-} \cup L. \end{cases}$$

Por el Teorema del pegamento (Teorema 2.4.5), v es subarmónica en $\triangle$.

(ii) Si v no es idénticamente $-\infty$, entonces v es localmente integrable. Pero esto contradice el Teorema 2.5.3. Por lo tanto $v \equiv -\infty$ y $u = -\infty$ en Δ^{+} puesto que $u = v$ en $\triangle^{+}$.

(iii) Si u no es idénticamente $-\infty$ en D, u es localmente integrable; lo cual es una contradicción. ■

2.6 Convexidad

En esta sección examinaremos la relación que existe entre las funciones subarmónicas en $\mathbb{C}$ y las funciones convexas en $\mathbb{R}$.

Definición 2.6.1 *Sea $-\infty \leq a < b \leq \infty$. Una función $\psi : (a,b) \to \mathbb{R}$ es llamada* **convexa** *si cuando $t_1, t_2 \in (a,b)$,*

$$\psi((1-\lambda)t_1 + \lambda t_2) \leq (1-\lambda)\psi(t_1) + \lambda\psi(t_2) \quad (0 \leq \lambda \leq 1).$$

Las funciones convexas continuas son muy conocidas. También es muy conocido que dada $\psi \in C^2(a,b)$, entonces ψ es convexa si y sólo si $\psi'' \geq 0$ en (a,b). Ahora estudiaremos una desigualdad básica que cumplen las funciones convexas.

Teorema 2.6.2 (Desigualdad de Jensen)

Sea $-\infty \leq a < b \leq \infty$, y sea $\psi : (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$ una función convexa. Sean también (Ω, μ) un espacio medible con $\mu(\Omega) = 1$ y $f : \Omega \longrightarrow (a,b)$ una función integrable. Entonces

$$\psi\left(\int_\Omega f d\mu\right) \leq \int_\Omega \psi \circ f d\mu.$$

Prueba:

Sea $c = \int_\Omega f d\mu$, entonces $c \in (a,b)$. Por la convexidad, si $a < t_1 < c < t_2 < b$, entonces

$$\begin{aligned} \psi(c) &\leq \frac{t_2 - c}{t_2 - t_1}\psi(t_1) + \frac{c - t_1}{t_2 - t_1}\psi(t_2). \\ (t_2 - t_1)\psi(c) &\leq (t_2 - c)\psi(t_1) + (c - t_1)\psi(t_2) \end{aligned}$$

Entonces

$$\begin{aligned} (t_2 - t_1)\psi(c) - (t_2 - c)\psi(t_1) &\leq (c - t_1)\psi(t_2) \\ \frac{(t_2 - t_1)\psi(c) - (t_2 - c)\psi(t_1)}{c - t_1} &\leq \psi(t_2). \end{aligned}$$

De donde

$$\sup_{t_1 \in (a,c)} \frac{\psi(c) - \psi(t_1)}{c - t_1} \leq \psi(t_2).$$

Y

$$\begin{aligned} (t_2 - t_1)\psi(c) - (c - t_1)\psi(t_2) &\leq (t_2 - c)\psi(t_1) \\ \frac{(t_2 - t_1)\psi(c) - (c - t_1)\psi(t_2)}{(t_2 - c)} &\leq \psi(t_1) \end{aligned}$$

De donde

$$\sup_{t_1 \in (a,c)} \frac{\psi(c) - \psi(t_1)}{c - t_1} \leq \inf_{t_2 \in (c,b)} \frac{\psi(t_2) - \psi(c)}{(t_2 - c)}.$$

Entonces existe una constante M tal que

$$\psi(t) \geq \psi(c) + M(t - c) \qquad (t \in (a,b)).$$

Tomando $t = f(w)$ e integrando con respecto a μ, tenemos

$$\int_\Omega \psi(f(w))\, d\mu(w) \geq \int_\Omega \psi(c)\, d\mu(w) + M \int_\Omega (f(w) - c)\, d\mu(w) = \psi(c),$$

entonces

$$\psi\left(\int_\Omega f d\mu\right) \leq \int_\Omega \psi \circ f d\mu. \qquad \blacksquare$$

Teorema 2.6.3 *Sean $-\infty \leq a < b \leq \infty$, $u : U \longrightarrow [a,b)$ una función subarmónica en un conjunto abierto U en $\mathbb{C}$, y $\psi : (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$ una función convexa creciente. Entonces $\psi \circ u$ es subarmónica en U, donde $\psi(a) := \lim_{t \longrightarrow a} \psi(t)$.*

Prueba:

Escojamos una sucesión $(a_n)_{n \geq 1} \in (a,b)$ tal que $a_n \downarrow a$ y para cada n tomemos $u_n = \max(u, a_n)$, entonces u_n es subarmónica, por lo tanto

$\psi \circ u_n$ es semicontinua superiormente en U.

Así, si $\overline{\Delta}(w,\rho) \subset U$, entonces

$$\begin{aligned} \psi \circ u_n(w) &\leq \psi\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u_n\left(w+\rho e^{i\theta}\right)d\theta\right) \\ &\leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \psi \circ u_n\left(w+\rho e^{i\theta}\right)d\theta, \end{aligned}$$

La última desigualdad se cumple por la Desigualdad de Jensen aplicada a la medida $\frac{d\theta}{2\pi}$ en $[0,2\pi)$.

Entonces $\psi \circ u_n$ es subarmónica en U. Puesto que $\psi \circ u_n \downarrow \psi \circ u$ cuando $n \longrightarrow \infty$, por el Teorema 2.4.6 $\psi \circ u$ es subarmónica en U. ■

Corolario 2.6.4 *Si u es subarmónica en un subconjunto abierto U de $\mathbb{C}$, entonces $\exp u$ también es subarmónica en U.*

Prueba:

Sea $\psi(t) = e^t$, entonces ψ es creciente y convexa. Así $\psi \circ u = e^u$ es subarmónica en U. ■

Aplicando el Corolario anterior a $u := \alpha \log|f|$, donde f es holomorfa y $\alpha > 0$, tenemos que $|f|^\alpha$ es subarmónica.

Teorema 2.6.5 *Sea $u : U \longrightarrow [0,\infty)$ una función definida en un conjunto abierto U en $\mathbb{C}$. Entonces $\log u$ es subarmónica en U si y sólo si $u|e^q|$ es subarmónica en U para todo polinomio complejo q.*

Prueba:

"$\Longrightarrow$" Supongamos que $\log u$ es subarmónica. Entonces $\log u + \operatorname{Re} q$ también es subarmónica para cada polinomio q. Luego $e^{(\log u + \operatorname{Re} q)} = ue^{\operatorname{Re} q} = u|e^q|$ también es subarmónica por el Corolario 2.6.4.

"$\Longleftarrow$" Recíprocamente supongamos que $u|e^q|$ es subarmónica en U para todo polinomio complejo q. Tomando $q = 0$, vemos que u es subarmónica y en particular semicontinua superiormente. Entonces $\log u$ también es semicontinua superiormente.

Veamos que $\log u$ cumple la Desigualdad Submedia.

Sea $\Delta := \Delta(w,\rho)$ un disco con $\overline{\Delta} \subset U$. Escojamos una sucesión de funciones continuas $\phi_n : \partial\Delta \longrightarrow \mathbb{R}$ tales que $\phi_n \downarrow \log u$ en $\partial\Delta$. Por el Ejercicio 1.2.2 sabemos que para cada $n \geq 1$ podemos hallar un polinomio q_n tal que

$$0 \leq \operatorname{Re} q_n - \phi_n \leq \frac{1}{n} \qquad (\text{en } \partial\Delta).$$

Entonces

$$\limsup_{z \longrightarrow \zeta} u(z) \left| e^{-q_n(z)} \right| \leq e^{\phi_n(\zeta)} e^{-\operatorname{Re} q_n(\zeta)} \leq 1 \quad (\zeta \in \partial\Delta).$$

Puesto que $u\,|e^{-q_n}|$ es subarmónica, por el Principio del Máximo tenemos que $u\,|e^{-q_n}| \leq 1$ en Δ. Entonces

$$\begin{aligned} \log u(w) &\leq \operatorname{Re} q_n(w) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \operatorname{Re} q_n\left(w+\rho e^{i\theta}\right) d\theta \\ &\leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \phi_n\left(w+\rho e^{i\theta}\right) d\theta + \frac{1}{n}. \end{aligned}$$

Tomando límite cuando $n \longrightarrow \infty$ y aplicando el Teorema de la Convergencia Monótona, deducimos que

$$\log u(w) \leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log u\left(w+\rho e^{i\theta}\right) d\theta.$$

Entonces $\log u$ cumple la Desigualdad Submedia y por lo tanto es subarmónica en U. ■

Teorema 2.6.6 *Sea* $v : \Delta(0,\rho) \longrightarrow [-\infty,\infty)$ *una* **función radial** *(esto es* $v(z) = v(|z|)$ *para toda* z*). Suponga que* $v \not\equiv \infty$*. Entonces* v *es subarmónica en* $\Delta(0,\rho)$ *si y sólo si* $v(r)$ *es una función convexa, creciente de* $\log r$ $(0 < r < \rho)$ *con* $\lim_{r\longrightarrow 0} v(r) = v(0)$.

Prueba:

"$\Longrightarrow$" El "si" se sigue de la aplicación del Teorema 2.6.3 con $u(z) = \log|z|$ y $\psi(t) = v\left(e^t\right)$.

"$\Longleftarrow$" Supongamos que v es subarmónica en $\Delta(0,\rho)$. Dados $r_1, r_2 \in [0,\rho)$ con $r_1 < r_2$, por el Principio de Máximo aplicado a v en $\Delta(0,r_2)$ se cumple que

$$v(r_1) \leq \sup_{\partial\Delta(0,r_2)} v = v(r_2).$$

Entonces v es creciente en $[0,\rho)$ y $\text{líminf}_{r\longrightarrow 0}\, v(r) \geq v(0)$. En el otro caso, la semicontinuidad superior implica $\text{límsup}_{r\longrightarrow 0}\, v(r) \leq v(0)$, luego $\text{lím}_{r\longrightarrow 0} v(r) = 0$.

Falta probar que $v(r)$ es una función convexa de $\log r$.

Notemos primero que por el Corolario 2.5.2 $v(r) > -\infty$ para $r > 0$. Dados $r_1, r_2 \in (0,\rho)$ con $r_1 < r_2$, escojamos constantes α, β tales que $\alpha + \beta \log r = v(r)$ para $r = r_1, r_2$. Aplicando el Principio del Máximo a $v(z) - \alpha - \beta \log |z|$ en $\{z/r_1 < |z| < r_2\}$, tenemos:

$$v(r) \leq \alpha + \beta \log r \qquad (r_1 < r < r_2).$$

Entonces si $0 \leq \lambda \leq 1$ y $\log r = (1-\lambda)(\alpha)\log r_1 + \lambda \log r_2$, entonces

$$\begin{aligned} v(r) &\leq \alpha + \beta \log r \\ &= (1-\lambda)(\alpha + \beta \log r_1) + \lambda(\alpha + \beta \log r_2) \\ &= (1-\lambda) v(r_1) + \lambda v(r_2), \end{aligned}$$

Así queda probada la convexidad. ■

Definición 2.6.7 *Sea u una función subarmónica en el disco $\Delta(0,\rho)$, con $u \not\equiv \infty$. Para $0 < r < \rho$, definimos*

$$\begin{aligned} M_u(r) : &= \sup_{|z|=r} u(z), \\ C_u(r) : &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u\left(re^{it}\right) dt, \\ B_u(r) : &= \frac{1}{\pi r^2}\int_{\Delta(0,r)} u\, dA. \end{aligned}$$

Notemos que por el Teorema 2.5.1 y por el Corolario 2.5.2, $M_u(r)$, $C_u(r)$ y $B_u(r)$ son todas finitas. También tenemos que $C_u(r)$ y $B_u(r)$ cumplen la relación

$$B_u(r) = \frac{2}{r^2}\int_0^r C_u(s)\, ds. \tag{2.5}$$

Teorema 2.6.8 *Con la notación de la definición 2.6.7:*

(a) $M_u(r)$, $C_u(r)$ *y* $B_u(r)$ *son funciones convexas,crecientes de* $\log r$;

(b) $M_u(r) \geq C_u(r) \geq B_u(r) \geq u(0) \qquad (0 < r < \rho)$;

(c) $\lim_{r \longrightarrow 0} M_u(r) = \lim_{r \longrightarrow 0} C_u(r) = \lim_{r \longrightarrow 0} B_u(r) = u(0)$.

Prueba:

(a) Observemos que para $0 < r < \rho$,

$$M_u(r) = v(r) \quad \text{cuando} \quad v(z) = \sup_{t \in [0,2\pi]} u\left(ze^{it}\right),$$

$$C_u(r) = v(r) \quad \text{cuando} \quad v(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u\left(ze^{it}\right) dt,$$

$$B_u(r) = v(r) \quad \text{cuando} \quad v(z) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^1 u\left(zse^{it}\right) sdsdt.$$

En cada caso v es subarmónica en $\Delta(0,\rho)$. En el primer caso por el Teorema 2.4.7 y en los otros dos por el Teorema 2.4.8. Cada v también es radial. Luego el resultado se sigue del Teorema 2.6.6.

(b) La primera desigualdad es clara.

De (a) tenemos que $C_u(r) \geq C_u(s) \geq u(0) \quad (r \geq s)$. Multiplicando por $\frac{2s}{r^2}$ e integrando desde $s = 0$ hasta $s = r$, tenemos

$$\int_0^r C_u(r) \frac{2s}{r^2} ds \geq \int_0^r C_u(s) \frac{2s}{r^2} ds \geq \frac{2s}{r^2} \int_0^r u(0) \frac{2s}{r^2} ds \tag{2.6}$$

$$\frac{2}{r^2} C_u(r) \left. \frac{s^2}{2} \right]_0^r \geq \frac{2}{r^2} \int_0^r C_u(s)\, sds \geq u(0)$$

$$C_u(r) \geq \frac{2}{r^2} \int_0^{2\pi} C_u(s)\, sds \geq u(0).$$

Combinando (2.5) y (2.6) tenemos que $C_u(r) \geq B_u(r) \geq u(0)$.

(c) Por (b), es suficiente probar que $\limsup_{r \longrightarrow 0} M_u(r) \leq u(0)$, y esto es inmediato de la semicontinuidad superior de u. ∎

Ejercicios 2.6

1. Sea $-\infty \leq a < b \leq \infty$, sea $h : U \to (a,b)$ una función armónica en un

conjunto abierto U en $\mathbb{C}$, y sea $\psi : (a,b) \to \mathbb{R}$ una función convexa (no necesariamente creciente). Pruebe que $\psi_o h$ es subarmónica en U.

2. Sea $u : U \longrightarrow [0,\infty)$ una función en un conjunto abierto U en $\mathbb{C}$. Pruebe que $\log u$ es subarmónica en U si y sólo si u^α es subarmónica en U para cada $\alpha > 0$.

   [Sugerencia para el $''si''$: Pruebe que $\frac{(u^\alpha - 1)}{\alpha}$ decrece a $\log u$ cuando $\alpha \downarrow 0$.]

3. Pruebe que si $\log u$ y $\log v$ son ambas funciones subarmónicas en U, entonces $\log (u+v)$ también lo es.

4. Pruebe que toda función convexa en $\mathbb{R}$, acotada superiormente es constante. Use esto para dar otra prueba del Teorema de Liouville (Teorema 2.3.4), *que toda función subarmónica en* $\mathbb{C}$, *acotada superiormente es constante.*

5. Pruebe que con la notación de la definición 2.6.7,
$$B_u(r) \geq C_u\left(\frac{r}{\sqrt{e}}\right) \qquad (0 < r < \rho).$$
   [Sugerencia: escriba $C_u(r)$ como $\psi(\log r)$, donde ψ es convexa, y aplique la Desigualdad de Jensen a $B_u(r) := \frac{1}{r^2}\int_0^r C_u(s)\, sds$. (2.5) .]

6. Pruebe que si $\log u$ es una función subarmónica en el disco $\triangle(0,\rho)$, entonces $\log M_u(r)$, $\log C_u(r)$ y $\log B_u(r)$ son todas funciones convexas de $\log r$.

   [Sugerencia: repita la prueba del Teorema 2.6.8 junto con la del Teorema 2.6.5.]

7. (i) Sean $(a_j)_{j\geq 0}$ y $(b_j)_{j\geq 0}$ números no negativos, y para $k \geq 0$ defina $c_k = \sum_{j=0}^k a_j b_{k-j}$. Use la Desigualdad de Cauchy-Schwarz para probar que
$$\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{c_k^2}{k+1}\right) \leq \left(\sum_{j=0}^{\infty} a_j^2\right)\left(\sum_{j=0}^{\infty} b_j^2\right).$$
   (ii) Sean f y g funciones holomorfas en $\triangle(0,\rho)$. Expandiendolas como series de Taylor, pruebe que para $0 < r < \rho$,
$$\frac{1}{\pi r^2}\int_{\Delta(0,r)} |f|^2 |g|^2\, dA \leq \left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \left|f\left(re^{it}\right)\right|^2 dt\right)\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \left|g\left(re^{it}\right)\right|^2 dt\right).$$
   (iii) Deduzca que si u y v son funciones positivas en $\triangle(0,\rho)$ tales

que $\log u$ y $\log v$ son funciones subarmónicas, entonces

$$B_{uv}(r) \leq C_u(r)\, C_v(r) \qquad (0 < r < \rho).$$

[Sugerencia: haga una adaptación de la idea usada en la prueba del Teorema 2.6.5]

(iv) De una interpretación geométrica de la última desigualdad en el caso en el que $u = v = |f'|$, donde f es un mapeo conforme de $\triangle(0,\rho)$ en un dominio D.

8. Sea $u : \triangle(0,\rho) \to \mathbb{R}$ una función tal que $u(x+iy)$ es convexa en x para cada y fija, y convexa en y para cada x fija. Pruebe que u es subarmónica en $\triangle(0,\rho)$. Dé un ejemplo para mostrar que el recíproco es falso.

Ejercicios Resueltos 2.6

1. ■ Sea $-\infty \leq a < b \leq \infty$, sea $h : U \longrightarrow (a,b)$ una función armónica en un conjunto abierto U en $\mathbb{C}$, y sea $\psi : (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$ una función convexa (no necesariamente creciente). Pruebe que $\psi_o h$ es subarmónica en U.

Prueba:

$$\begin{aligned} h(w) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} h\left(w + re^{it}\right) dt, \\ \psi(h(w)) &= \psi\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} h\left(w + re^{it}\right) dt\right) \\ &\leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \psi\left(h\left(w + re^{it}\right)\right) dt. \end{aligned} \tag{2.7}$$

(2.7) se cumple por la DESIGUALDAD DE JENSEN. ■

2. ■ Sea $u : U \longrightarrow [0,\infty)$ una función en un conjunto abierto U en $\mathbb{C}$. Pruebe que $\log u$ es subarmónica en U si y sólo si u^α es subarmónica en U para cada $\alpha > 0$.

Prueba:

Sea $u^\alpha = g_o u$, dado $g(z) = z^\alpha = \exp(\alpha \log(z))$, entonces $u^\alpha = \exp(\alpha \log(u))$,

$$\frac{u^x - 1}{x} = \frac{e^{\alpha \log u} - 1}{\alpha} \longrightarrow e^{x \log u} \log u \longrightarrow \log u.$$

Es subarmónica por ser suma de subarmónicas. ■

3. ■ Pruebe que si $\log u$ y $\log v$ son ambas funciones subarmónicas en U,

entonces $\log(u+v)$ también lo es.

Prueba:

$$(u+v)\left|e^{q}\right| = u\left|e^{q}\right| + v\left|e^{q}\right|,$$

(Suma de subarmónicas). ■

4. ■ Pruebe que toda función convexa en $\mathbb{R}$, acotada superiormente es constante. Use esto para dar otra prueba del Teorema de LIOUVILLE (Teorema 2.3.4): *toda función subarmónica en* $\mathbb{C}$, *acotada superiormente es constante.*

Prueba:

Sea $\lambda \in (0,1)$, entonces

$$\begin{aligned} x_2 &: = \frac{1}{\lambda}\left[x_1 - (1-\lambda)\, x_o\right] \\ x_1 &: = (1-\lambda)\, x_o + \lambda x_2 \\ f(x_1) &\leq (1-\lambda)\, f(x_o) + \lambda f(x_2) \\ &\leq (1-\lambda)\, f(x_o) + \lambda M \qquad (\forall \lambda \in (0,1)) \end{aligned}$$

Tomando límite cuando $\lambda \to 0^{+}$ obtenemos

$$f(x_1) \leq f(x_o).$$

(La otra desigualdad se hace en forma semejante).

Luego f es constante.

Prueba del Teorema de Liouville:

$u(z) \leq c$,

$M(r) = \psi(\log(r))$, ψ convexa y creciente.

$$\psi(z) = M\left(e^{t}\right) \leq c \qquad (t = \log r,\ r \in (0,\infty),\ t \in (-\infty,\infty)),$$

ψ es constante.

$$M(r) = \sup_{|z|=r} u(z) \leq c,$$

M es constante.

$M(r) = M(0) = u(0)$,

$$\begin{aligned} u(z) &= M(r), \\ u(z) &= u(0) \to \text{Máximo global en } z = 0, \end{aligned}$$

por el Teorema 2.3.1 u es constante. ■

5. ■ Pruebe que con la notación de la definición 2.6.7,

$$B_u(r) \geq C_u\left(\frac{r}{\sqrt{e}}\right) \qquad (0 < r < \rho).$$

Prueba:

$C_u(r) = \psi(\log r)$, entonces

$$\begin{aligned}
B_u(r) &= \frac{2}{r^2}\int_0^r C_u(s)\,sds \\
&= \frac{2}{r^2}\int_0^r \psi(\log s)\,sds, \\
&= \frac{2}{r^2}\int_0^{\frac{r^2}{2}} \psi\left(\log\sqrt{2t}\right)dt \qquad \left(s=\sqrt{2t},\ t=\frac{s^2}{2},\ dt=sds\right) \\
&\geq \psi\left(\frac{2}{r^2}\int_0^{\frac{r^2}{2}} \log\sqrt{2t}dt\right). \qquad (\text{Por la Desigualdad de Jensen}).
\end{aligned}$$

Ahora,

$$\begin{aligned}
\int_0^{\frac{r^2}{2}} \log\sqrt{2t}dt &= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{r^2}{2}} (\log 2+\log t)\,dt \\
&= \left(\frac{1}{2}\log 2\right)t\Big]_0^{\frac{r^2}{2}} + \frac{1}{2}\int_0^{\frac{r^2}{2}} (\log t)\,dt \\
&= \left(\frac{1}{2}\log 2\right)\left(\frac{r^2}{2}\right) + \frac{1}{2}\,t(\log t-1)\Big]_0^{\frac{r^2}{2}} \\
&= \frac{r^2}{4}\log 2+\frac{r^2}{4}\log\frac{r^2}{2}-\frac{r^2}{4}.
\end{aligned}$$

Entonces

$$\begin{aligned}
\frac{2}{r^2}\int_0^{\frac{r^2}{2}} \log\sqrt{2t}dt &= \frac{1}{2}\log 2+\frac{1}{2}\log\frac{r^2}{2}-\frac{1}{2} \\
&= \frac{1}{2}\log r^2-\frac{1}{2} \\
&= \frac{1}{2}\left(\log r^2-\log e\right) \\
&= \frac{1}{2}\log\frac{r^2}{e} \\
&= \log\frac{r}{\sqrt{e}}.
\end{aligned}$$

Por lo tanto $B_u(r) \geq C_u\left(\frac{r}{\sqrt{e}}\right) \qquad (0<r<\rho)$. ■

6. ■ Pruebe que si $\log u$ es una función subarmónica en el disco $\triangle(0,\rho)$, entonces $\log M_u(r)$, $\log C_u(r)$ y $\log B_u(r)$ son todas funciones convexas de $\log r$.

Prueba:

$$\begin{aligned} v(z) &= \sup_{t\in[0,2\pi]} u\left(ze^{it}\right) \\ v(z)\left|e^{q(z)}\right| &= \sup_{t\in[0,2\pi]} \left[u\left(ze^{it}\right)\left|e^{q(z)}\right|\right], \end{aligned}$$

$u\left(ze^{it}\right)\left|e^{q(z)}\right|$ es subarmónica por el Teorema 2.6.5. Entonces por el Teorema 2.6.6 $v(z)\left|e^{q(z)}\right|$ es convexa y creciente. ■

7. ■ (i) Sean $(a_j)_{j\geq 0}$ y $(b_j)_{j\geq 0}$ números no negativos, y para $k\geq 0$ defina $c_k :=\sum_{j=0}^{k} a_j b_{k-j}$. Use la Desigualdad de CAUCHY-SCHWARZ para probar que

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{c_k^2}{k+1}\right)\leq\left(\sum_{j=0}^{\infty}a_j^2\right)\left(\sum_{j=0}^{\infty}b_j^2\right).$$

Prueba:

$$\begin{aligned} \left(\sum_{k=0}^{N} a_k b_k\right)^2 &\leq \left(\sum_{k=0}^{N} a_k^2\right)\left(\sum_{k=0}^{N} b_k^2\right). \\ c_k &= \sum_{j=0}^{k} a_j b_{k-j}. \\ \frac{c_k^2}{1+k} &= \frac{1}{1+k}\left(\sum_{j=0}^{k} a_j b_{k-j}\right)^2 \\ &\leq \frac{1}{1+k}\left(\sum_{j=0}^{k} a_j^2\right)\left(\sum_{j=0}^{k} b_{k-j}^2\right). \\ \left(\sum_{k=0}^{N}\frac{c_k^2}{1+k}\right)^2 &= \left(\sum_{k=0}^{N}\frac{c_k}{\sqrt{1+k}}\cdot\frac{c_k}{\sqrt{1+k}}\right)^2. \end{aligned}$$

Tomando límite cuando $N\longrightarrow\infty$, tenemos la desigualdad deseada. ■

2.7 Suavidad

Aunque las funciones subarmónicas no son necesariamente suaves, siempre pueden ser aproximadas por otras funciones que si son suaves. Una forma estándar de hacerlo es usando convoluciones.

Definición 2.7.1 *Sea U un subconjunto abierto de $\mathbb{C}$. Para $r > 0$ definamos*

$$U_r = \{z \in U / \operatorname{dist}(z, \partial U) > r\}.$$

Sea $u \colon U \longrightarrow [-\infty, \infty)$ una función localmente integrable, y sea $\phi : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{R}$ una función continua con $\operatorname{Sop}\phi \subset \Delta(0, r)$. Entonces su **convolución** *es la función $u * \phi : U_r \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por*

$$u * \phi = \int_{\mathbb{C}} u(z - w)\, \phi(w)\, dA(w) \qquad (z \in U_r).$$

Haciendo un cambio de variable, también se puede escribir como

$$u * \phi(z) = \int_{\mathbb{C}} u(w)\, \phi(z - w)\, dA(w) \qquad (z \in U_r).$$

De aquí vemos que si $\phi \in C^{\infty}$, entonces $u * \phi \in C^{\infty}$, ya que bajo el signo de integral podemos diferenciar arbitrariamente, las veces que queramos.

Teorema 2.7.2 (Teorema de Suavizamiento)

Sea u una función subarmónica en un dominio D en $\mathbb{C}$, con $u \not\equiv \infty$. Sea $\chi : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{R}$ una función que satisface:

$$\chi \in C^{\infty}, \quad \chi \geq 0, \quad \chi(z) = \chi(|z|), \quad \operatorname{Sop}\chi \subset \Delta(0, 1), \quad \int_{\mathbb{C}} \chi dA = 1.$$

Para $r > 0$ definimos

$$\chi_r(z) = \frac{1}{r^2}\chi\left(\frac{z}{r}\right) \qquad (z \in \mathbb{C}).$$

Entonces $u * \chi_r$ es una función C^{∞}, subarmónica en D_r para cada $r > 0$, y $(u * \chi_r) \downarrow u$ en D cuando $r \downarrow 0$.

Por ejemplo una función χ que satisface las hipótesis anteriores es

$$\chi(z) = \begin{cases} C \exp\left(-\frac{1}{(1-4|z|^2)}\right), & \text{si } |z| < \frac{1}{2}, \\ 0, & \text{si } |z| \geq \frac{1}{2}, \end{cases}$$

donde C es una constante escogida de tal forma que $\int \chi dA = 1$.

Prueba:

Por el Teorema 2.5.1 u es localmente integrable, entonces $u * \chi_r$ también lo es y además es C^{∞} en D_r. Entonces para probar que es subarmónica en D_r, aplicamos el Teorema 2.4.8 con $(\Omega, \mu) = (\mathbb{C}, \chi_r dA)$ y $v(z, w) = u(z - w)$.

Ahora fijamos $\zeta \in D$. Para $0 < r < \operatorname{dist}(\zeta, \partial D)$ tenemos

$$u * \chi_r(\zeta) = \int_0^{2\pi} \int_0^r u\left(\zeta - se^{it}\right) r^{-2} \chi\left(\frac{s}{r}\right) sdsdt.$$

Haciendo las sustituciones $\sigma = \frac{s}{r}$ y $v(z) = u(\zeta - z)$, nos queda

$$u * \chi_r(\zeta) = 2\pi \int_0^1 C_v(r\sigma)\, \chi(\sigma)\, \sigma d\sigma.$$

Por el Teorema 2.6.8 $C_v(r\sigma)$ decrece a $v(0)$ cuando $r \downarrow 0$. Entonces por el Teorema de la Convergencia Monótona $u * \chi_r(\zeta)$ decrece a

$$2\pi \int_0^1 v(0)\, \chi(\sigma)\, \sigma d\sigma = u(\zeta) \int_{\mathbb{C}} \chi dA = u(\zeta).$$

Así $(u * \chi_r) \downarrow u$ en D. ∎

Corolario 2.7.3 Sea *u una función subarmónica en un conjunto abierto U en $\mathbb{C}$, y sea D un subdominio relativamente compacto de U. Entonces existe una sucesión de funciones subarmónicas $(u_n)_{n\geq 1} \in C^{\infty}(D)$ tal que $u_1 \geq u_2 \geq \cdots \geq u$ en D y $\lim_{n\longrightarrow\infty} u_n = u$.*

Prueba:

Si $u \equiv -\infty$ en D, tomamos $u_n \equiv -n$. En otro caso, escojemos $r > 0$ tal que $D \subset U_r$, y luego tomamos $u_n = u * \frac{\chi_r}{n}$. ∎

Teorema 2.7.4 *Sea $f : U_1 \longrightarrow U_2$ un mapeo holomorfo entre subconjuntos abiertos U_1, U_2 de $\mathbb{C}$. Si u es subarmónica en U_2, entonces $u \circ f$ es subarmónica en U_1.*

Prueba:

Sea D_1 un subdominio relativamente compacto de U_1. Es suficiente que probemos que $u \circ f$ es subarmónica en D_1. Sea $D_2 = f(D_1)$, escojamos una sucesión de funciones subarmónicas $(u_n)_{n\geq 1} \in C^{\infty}(D_2)$ tal que $u_n \downarrow u$ en D_2. Por el Teorema 2.4.4 $\Delta u_n \geq 0$ en D_2 para cada n. Entonces

$$\Delta(u_n \circ f) = ((\Delta u_n) \circ f) \left|f'\right|^2 \quad \text{en } D_1.$$

Entonces $\Delta(u_n \circ f) \geq 0$ en D_1, y aplicando el Teorema 2.4.4 nuevamente, deducimos que $u_n \circ f$ es subarmónica en D_1. Tomando límite cuando $n \longrightarrow \infty$ y usando el Teorema 2.4.6, tenemos que $u \circ f$ es subarmónica en D_1. ∎

Teorema 2.7.5 (Principio Débil de Identidad)

Suponga que u *y* v *son funciones subarmónicas en un conjunto abierto* U *en* $\mathbb{C}$ *tales que* $u = v$ *casi en todas partes en* U. *Entonces* $u \equiv v$ *en* U.

Prueba:

Supongamos primero que u y v son acotadas inferiormente en U. Sea χ como en el Teorema 2.7.2, entonces $u * \chi_r = v * \chi_r$ en U_r. Así tomando límite cuando $r \longrightarrow 0$ deducimos que $u = v$ en U.

El caso general se sigue aplicando lo anterior a $u_n := \text{máx}(u, -n)$ y $v_n := \text{máx}(v, -n)$, y tomando límite cuando $n \longrightarrow \infty$. ■

Este Principio de Identidad no es tan fuerte como el de las funciones armónicas (Teorema 1.1.7), por ejemplo, $u(z) := \text{máx}(\operatorname{Re} z, 0)$ y $v(z) := 0$ coinciden en un subconjunto abierto de $\mathbb{C}$ sin ser iguales en todo $\mathbb{C}$.

Ejercicios 2.7

1. Sean U un subconjunto abierto de $\mathbb{C}$ y $u : U \longrightarrow [-\infty, \infty)$ una función Borel-medible la cual es localmente acotada superior e inferiormente, y satisface la Desigualdad Submedia local (pero no es necesariamente semicontinua superiormente).

   (i) Con χ como en el Teorema 2.7.2, pruebe que $u * \chi_r$ es subarmónica en U_r para cada $r > 0$, y que $\lim_{r \longrightarrow 0} u * \chi_r = u^*$, donde u^* es la *regularización semicontinua superiormente de* u, dada por
   $$u^*(z) = \lim_{r \longrightarrow 0} \left(\sup_{\Delta(z,r)} u \right) \qquad (z \in U).$$

   (ii) Pruebe que si $r, s > 0$, entonces
   $$(u * \chi_r) * \chi_s = (u * \chi_s) * \chi_r \quad (\text{en } U_{r+s}).$$
   Deduzca que $u * \chi_r$ decrece con r, y que $u * \chi_r = u^* * \chi_r$ en U_r para cada $r > 0$.

   (iii) Concluya que u^* es subarmónica en U, y que $u^* = u$ casí en todas partes en U.

   (iv) Considerando $u_n := \text{máx}(u, -n)$ $(n \geq 1)$ pruebe que las conclusiones en *(iii)* permanecen válidas si quitamos la condición de que u sea localmente acotada inferiormente.

2. Sea u una función subarmónica en un conjunto abierto U en $\mathbb{C}$, y sea

v una función semicontinua superiormente en U tal que $u \leq v$ casi en todas partes. Pruebe que $u < v$ en todas partes.

3. Pruebe que el Principio de Phragmén-Lindelöf (Teorema 2.3.2) permanece válido aún si, en vez de asumir que v es finita, sólamente asumimos que $v \not\equiv +\infty$.

A Teoría del Potencial

La Teoría del Potencial ha sido muy estudiada en espacios Euclídeos $n-$dimensionales con $n \geq 3$. Existe una diferencia esencial en los potenciales entre el plano complejo y $\mathbb{R}^n$ para $n \geq 3$; el potencial estándar para $\mathbb{C}$, es el *Potencial Logarítmico de* μ definido para una medida de soporte compacto μ en $\mathbb{C}$, como la función

$$L_\mu (z) : \ = \int \log |z - w|^{-1} \, d\mu (w) .$$

L_μ está definida en todo punto del plano, mientras que en dimensiones más altas el potencial estándar es el Potencial Newtoniano.

Los potenciales son una fuente muy importante de ejemplos de funciones subarmónicas; ellos nos permiten construir funciones subarmónicas con varias propiedades prescritas.

A pesar de su naturaleza especial aparentemente rara, son fáciles de estudiar.

Los potenciales se comportan algunas veces como funciones subarmónicas arbitrarias y para muchos propósitos las dos clases son equivalentes.

Terminamos este trabajo con la definición de Potencial para medidas finitas de soporte compacto.

Defínción A.1.1 *Sea μ una medida de Borel finita con soporte compacto. Su* **potencial** *es la función p_μ:$\mathbb{C} \longrightarrow [-\infty, \infty)$ definida por*

$$p_\mu (z) = \int_{\mathrm{Sop}\,\mu} \log |z - w| \, d\mu (w) \qquad (z \in \mathbb{C}) .$$

La función $p_\mu (z)$ es subarmónica en $\mathbb{C}$ y armónica en $\mathbb{C} \backslash (\mathrm{Sop}\,\mu)$.
También

$$p_\mu (z) = \mu (\mathbb{C}) \log |z| + O\left(|z|^{-1}\right) \qquad (\text{cuando } z \longrightarrow \infty) .$$

B Conceptos

En éste apéndice veremos algunas Definiciones y Teoremas que utilizamos a través del trabajo y las referencias de los libros donde se hallan las pruebas.

Definición B.1.1 Sea $f : X \longrightarrow [-\infty, \infty]$ *una función cualquiera, entonces*

$$\begin{aligned} f^+ &= \begin{cases} f & si \ f \geq 0, \\ 0 & si \ f < 0; \end{cases} \\ f^- &= \begin{cases} 0 & si \ f \geq 0, \\ -f & si \ f < 0. \end{cases} \end{aligned}$$

La función $f^+ = \max(f, 0)$ *se denomina la* ***parte positiva*** *de* f *y* $f^- = -\min(f, 0)$ *se denomina la* **parte negativa** *de* f.

Notemos que

$$\begin{aligned} f^+ &\geq 0, \quad f^- \geq 0, \\ f &= f^+ - f^-, \\ |f| &= f^+ + f^-, \quad \text{y} \\ f^+ f^- &= 0. \end{aligned}$$

Teorema B.1.2 (Teorema de la Función Abierta)

Sean D *un dominio y* f *una función holomorfa no constante en* D, *entonces para cualquier conjunto abierto* U *en* D, $f(U)$ *es abierto.*

Prueba: [3, p. 99].

Teorema B.1.3 (Teorema de la Convergencia Monótona de Lebesgue)

Sea $(f_n)_{n \geq 1}$ *una sucesión de funciones medibles en un conjunto* X, *tales* *que*

$$0 \leq f_1 \leq f_2 \leq \cdots .$$

Entonces

$$\lim_{n\to\infty} \int_X f_n d\mu = \int_X \left(\lim_{n\to\infty} f_n \right) d\mu.$$

Prueba: [2, p. 211].

Lema B.1.4 (Lema de Fatou)

Sea $(f_n)_{n\geq 1}$ *una sucesión de funciones medibles no negativas. Entonces*

$$\int \left(\liminf_{n\longrightarrow\infty} \right) d\mu \leq \liminf_{n\longrightarrow\infty} \int f_n d\mu.$$

Prueba: [7, p. 129].

Teorema B.1.5 (Teorema de la Convergencia Dominada de Lebesgue)

Supongamos que $(f_n)_{n\geq 1}$ *es una sucesión de funciones medibles en* X *tales que*

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x) \qquad (\forall x \in X).$$

Si existe una función $g \in L^1(\mu)$ *tal que*

$$|f_n(x)| \leq g(x) \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots; x \in X),$$

entonces $f \in L^1(\mu)$,

$$\lim_{n\to\infty} \int_X |f_n - f| \, d\mu = 0$$

y

$$\lim_{n\to\infty} \int_X f_n d\mu = \int_X f d\mu.$$

Prueba: [11, p. 29].

Teorema B.1.6 (Criterio-M de Weierstrass)

Una serie de funciones de valor real $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$, *donde* $(f_k)_{k\geq 1}$ *es una sucesión definida en un conjunto* E, *converge uniformemente en* E *si* $|f_k| \leq M_k$ *en* E, *para algunas constantes* M_k, $k = 1, 2, \ldots$ *y* $\sum_{k=1}^{\infty} M_k$ *convergente.*

Prueba: [2, p. 82].

Definición B.1.7 (Sucesiones Uniformemente Cauchy)

Una sucesión de funciones$(f_n)_{n\geq 1}$ *es llamada una* **sucesión Uniformemente Cauchy** *en un conjunto* A *si para cada* $\epsilon > 0$ *existe* $N \in \mathbb{N}$, $N = N(\epsilon)$ *tal que* $|f_m(z) - f_n(z)| < \epsilon$ *se cumple para todo* $z \in A$ *siempre que* $m > n \geq N$. [9, p. 246].

Definición B.1.8 *Sea* U *un conjunto abierto, no vacío en* $\mathbb{C}$. *Decimos que un subconjunto* S *de* U *es* **denso** *en* U *si* U *está contenido en* $\overline{S}$, *es decir si* $S \cap \Delta(z, r) \neq \phi$ *para toda* $z \in U$ *y todo* $r > 0$.

[9, p. 280].

Teorema B.1.9 (Teorema del Mapeo Riemann)

Si U *es un conjunto abierto holomorfamente simplemente conexo en* $\mathbb{C}$ *y* $U \neq \mathbb{C}$, *entonces* U *es conformemente equivalente al disco unidad.* [6, p. 199].

Teorema B.1.10 (Teorema de Hurwitz)

Sean D *un dominio en* $\mathbb{C}$ *y* $(f_n)_{n\geq 1}$ *una sucesión de funciones holomorfas en* D *tal que* $f_n \longrightarrow f$. *Si* $f \not\equiv 0$, $\overline{\Delta}(z_o, R) \subset D$, *y* $f(z) \neq 0$ *para* $|z - z_o| = R$ *entonces existe un entero* N *tal que para* $n \geq N$, f y f_n *tienen el mismo número de ceros en* $\Delta(z_o, R)$.

Prueba: [3, p. 152].

Definición B.1.11 (Categoría)

Un Subconjunto S *de un espacio métrico* X *se dice que es*

(a) **Denso en ninguna parte o diseminado** *en* X *si su clausura* $\overline{S}$ *no tiene puntos interiores.*

(b) **Magro o de primera categoría** *en* X *si* S *es una unión de conjuntos contables cada uno de los cuales es diseminado en* X.

(c) **No-Magro o de segunda categoría** *en* X *si* S *no es* ***diseminado*** *en* X.

[11, p. 111]

Teorema B.1.12 (Teorema de Categoría de Baire)

Si X es un espacio métrico completo, la intersección de toda colección numerable de subconjuntos abiertos, densos de X es densa en X.

Prueba: [11, p. 110]

Definición B.1.13 (Desigualdad de Cauchy-Schwarz)

Sean f y g funciones continuas, de valor real, Riemann integrables en $[c, d]$, entonces

$$\left[\int_c^d f(x)\, g(x)\, dx\right]^2 \leq \left(\int_c^d [f(x)]^2\, dx\right) \cdot \left(\int_c^d [g(x)]^2\, dx\right).$$

[9, p. 430].

C Bibliografía

[1] Armitage, David H. and Gardiner, Stephen J.: *Classical Potential Theory,* Springer, 2001.

[2] Burk, Frank: *Lebesgue Measure and Integration,* Wiley-Interscience, 1998.

[3] Conway, John B.: *Functions of One Complex Variable I,* Springer-Verlag, 1978.

[4] Conway, John B.: *Functions of One Complex Variable II,* Springer-Verlag, 1995.

[5] Flanigan, Francis J.: *Complex Variables,* Dover Publications, Inc.,New York, 1983.

[6] Greene, Robert E. and Krantz, Steven G.: *Function Theory of One Complex Variable,* Wiley-Interscience, 1997.

[7] Jones, Frank: *Integration on Eucidean Space,* Jones and Bartlett Publishers, 1993.

[8] Krantz, Steven G. and Parks Harold R.: *A Primer of Real Analytic Functions,* Birkhäuser Verlag, 1992.

[9] Palka, Bruce P.: *An Introduction to Complex Function Theory*, Springer, 1991.

[10] Ransford, Thomas J.: *Potential Theory in the Complex Plane,* Cambridge University Press, 1995.

[11] Rudin, Walter: *Análisis Real y Complejo,* 3rd edition, McGraw-Hill, España 1987.