

# Modificaciones en Poliedros con Caras Identificadas

por

Pablo Simón Isaza Peñaloza

Trabajo presentado como requisito parcial  
para optar al Título de

Magister en Matemáticas

Directora: Débora María Tejada Jiménez

Universidad Nacional de Colombia  
Sede Medellín

Facultad de Ciencias

Escuela de Matemáticas

Junio 2011

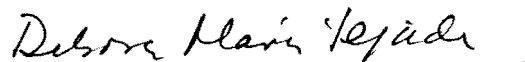
Este trabajo ha sido apoyado parcialmente por COLCIENCIAS,  
Código 1118-521-28160.

Medellín, 14 de junio de 2011

Señores  
Biblioteca Efe Gómez  
La Sede

Apreciados Señores,

Como directora de la tesis de maestría “Modificaciones en Poliedros con Caras Identificadas” del estudiante Pablo Simón Isaza Peñaloza, certifico que la versión que él está enviando a la biblioteca en medio electrónico es la versión definitiva. Cordial saludo,



Débora María Tejada Jiménez  
Profesora Titular  
Escuela de Matemáticas  
Universidad Nacional de Colombia- Sede Medellín

# Resumen

En el presente trabajo desarrollamos parte de la teoría de poliedros con caras identificadas y caracterizamos los espacios producidos por los mismos, probando que dichos espacios corresponden a cierta clase de pseudovarietades.

Posteriormente investigamos el estrecho vínculo entre los poliedros con caras identificadas y las espinas de 3-variedades compactas conexas orientables y sin frontera. Mostramos que todo poliedro con caras identificadas que produce una variedad, produce de paso una espina bidimensional homogénea de la misma; y que dada una variedad con una espina bidimensional homogénea, existe un poliedro que las produce a ambas.

Finalmente, examinamos una serie de movidas entre poliedros con caras identificadas que no alteran el espacio cociente de los mismos. Entre otras cosas, agrupamos a dichos poliedros en clases, de modo que los poliedros en cada clase, y sólo ellos, produzcan una misma variedad y una misma espina. Por último, veremos cómo un poliedro que produce una pseudovarietad puede modificarse para obtener un poliedro que produzca una 3-variedad.

# Contenido

<b>Introducción</b>	<b>vi</b>
<b>1 Poliedros con Caras Identificadas</b>	<b>1</b>
1.1 Definición . . . . .	1
1.2 Restricción de la Definición . . . . .	5
1.3 Pseudovariedades . . . . .	6
1.4 Tres Teoremas sobre Pseudovariedades . . . . .	10
1.5 Espacios de Identificación . . . . .	13
<b>2 Espinas y Cicatrices</b>	<b>16</b>
2.1 Espinas . . . . .	16
2.2 Cicatrices . . . . .	22
<b>3 Modificaciones sobre Poliedros</b>	<b>27</b>
3.1 Inserción y Remoción de Aristas Dobles . . . . .	27
3.2 Cerramiento de Mariposas . . . . .	33
3.3 Cortar y Pegar . . . . .	35
3.4 Reducción de Caras . . . . .	36
3.5 Cortar y Pegar Pequeños Trozos . . . . .	38
3.6 Reducción de Ciclo . . . . .	38
3.7 Reducción Total de Ciclo . . . . .	41
3.8 Reducción Total de Orden . . . . .	43
3.9 Remoción de Singularidades sobre Poliedros . . . . .	48
<b>4 Comentarios Finales</b>	<b>50</b>
<b>Bibliografía</b>	<b>51</b>

# Agradecimientos

Quiero agradecer especialmente a la directora de este trabajo, la Profesora Débora Tejada, por haber sido mi guía y principal maestra durante los últimos años; a los Profesores José María Montesinos, Mike Hilden y Margarita Toro por su orientación y sus enseñanzas; a la Universidad Nacional de Colombia; a mi abuela por su contribución a mis estudios; y a mi padre por su apoyo permanente e incondicional.

# Introducción

Una de las iniciativas más importantes en Topología, y que más impulso ha dado a esta ciencia, ha sido la de clasificar las variedades. Para dimensión dos, la cuestión ha sido resuelta con el Teorema de Clasificación de 2-Variedades (véase [13]); mientras que para dimensiones mayores o iguales que cuatro, el Teorema de Markov ha mostrado que el problema no puede resolverse. El interés se ha centrado entonces en la clasificación de las 3-variedades, que aún es un problema abierto, y ha motivado grandes desarrollos matemáticos.

La demostración del Teorema de Clasificación de 2-Variedades se basa en la presentación de 2-variedades por medio de polígonos con lados identificados. La prueba consiste en tomar un polígono con lados identificados, cuyo espacio cociente sea una 2-variedad, y transformarlo, por medio de movidas que no alteren el espacio cociente, en un polígono fundamental cuyo espacio cociente se sabe de antemano que es una esfera, una suma conexa de toros, o una suma conexa de planos proyectivos. Las ideas de esta demostración, sin embargo, no son inmediatamente generalizables a tres dimensiones.

De la demostración del Teorema de Clasificación de 2-Variedades surgen dos iniciativas. La primera es construir una presentación para las 3-variedades por medio de poliedros con caras identificadas, que sea análoga a la presentación de las 2-variedades por medio de polígonos con lados identificados. La segunda es encontrar modificaciones o movidas que transformen unos poliedros en otros, de modo que el espacio cociente no sea alterado. Estos son dos de los tres objetivos primordiales de este trabajo. Nos referiremos al tercero más adelante.

La iniciativa de construir una presentación para las 3-variedades por medio de poliedros con caras identificadas ya había sido trabajada brevemente en la tesis de pregrado del autor [10], que trataba sobre Descomposiciones de Heegaard y Cirugías. Sin embargo, los aspectos desarrollados en ese trabajo son en su mayoría disjuntos con los que desarrollaremos aquí, y también más elementales. Durante esa exploración de los poliedros con caras identificadas, se hizo evidente que éstos tenían una estrecha e importante relación con la presentación de variedades por espinas, que ha sido trabajada extensamente por S. Matveev, entre otros (véase [15]). El tercer objetivo primordial de este trabajo es entonces puntualizar esa relación.

De otra parte, durante el examen del vínculo entre los poliedros con caras identificadas y las espinas, vimos que dicha relación dependía de una modificación que se puede hacer sobre poliedros sin alterar el espacio cociente, y que llamamos inserción y remoción de aristas dobles. Además, vimos que las movidas en poliedros frecuentemente se traducen en movidas en espinas, y viceversa. Esto sirvió de impulso adicional para estudiar este tipo de modificaciones.

Una última motivación debe ser mencionada. Existe un tipo especial de poliedro con caras identificadas que ha sido ampliamente estudiado por los Profesores Hilden, Montesinos, Tejada y Toro, que es el de las mariposas. De hecho, movidas sobre mariposas han sido investigadas

por los mismos autores (véanse [8], [28]). Estas mariposas se caracterizan por el hecho de que todas sus caras son adyacentes a lo que aquí llamaremos una arista de ciclo 1, y se sabe que el espacio cociente de toda mariposa es  $S^3$ . Un interrogante natural que surge es si todo poliedro con caras identificadas que produzca a  $S^3$  tiene una arista de ciclo 1. La respuesta nos fue proporcionada rápidamente a la Profesora Tejada y al autor por el Profesor Montesinos, quien nos mostró un contraejemplo. Sin embargo, ese contraejemplo se dejaba reducir, por medio del tipo de modificaciones que aquí estudiamos, a poliedros más manejables; y que de hecho tenían aristas de ciclo 1. Surgió entonces la pregunta de si todo poliedro cuyo espacio de identificación sea una variedad simplemente conexa podría simplificarse, por medio de este tipo de modificaciones, hasta conseguir un poliedro del que se sepa que representa a  $S^3$ . Por ahora esta cuestión parece imposible de resolver, y ello es presumible porque una respuesta afirmativa a ella implicaría una respuesta afirmativa a la Conjetura de Poincaré. Sin embargo, el trabajo sobre mariposas y el asomo a estas preguntas han servido de motivación y oportunidad para desarrollar la teoría aquí expuesta.

Pasaremos ahora a describir la estructura del trabajo. En el primer capítulo definiremos a los poliedros con caras identificadas. Posteriormente probaremos algunos teoremas sobre pseudovariedades, y caracterizaremos a los espacios cociente de los poliedros con caras identificadas como el conjunto de las pseudovariedades que llamaremos de tipo  $\mathcal{P}_1o$ . Estas pseudovariedades serán aquellas con un número finito de singularidades, y tales que toda singularidad tiene una vecindad regular homeomorfa al cono de una superficie orientable. De esta forma, si bien no mostraremos que los poliedros con caras identificadas son una presentación de las 3-variedades, mostraremos que son una presentación de las pseudovariedades de tipo  $\mathcal{P}_1o$ , que incluyen a las 3-variedades compactas, conexas, orientables y sin frontera.

En el segundo capítulo expondremos algunos aspectos básicos de la teoría de espinas, y mostraremos su relación con los poliedros con caras identificadas. Veremos que todo poliedro cuyo espacio cociente es una 3-variedad, produce de manera natural una espina de la misma; y recíprocamente, que toda espina de una 3-variedad  $M$ , si es un complejo bidimensional homogéneo, es producida por un poliedro cuyo espacio cociente es  $M$ . También veremos qué tipo de poliedros producen espinas especiales.

En el tercer capítulo estudiaremos una serie de modificaciones que pueden hacerse sobre poliedros con caras identificadas sin alterar su espacio cociente. En la primera sección veremos que el espacio cociente de un poliedro depende únicamente de una relación de equivalencia en la superficie del poliedro, y agruparemos en clases a los poliedros que producen la misma relación. Con la intención de saber cuándo dos poliedros están en la misma clase, desarrollaremos una movida que relaciona a un poliedro con cualquier otro poliedro de su clase, y únicamente con poliedros de su clase. Tal movida consiste en la inserción y remoción de las aristas que llamaremos de ciclo 2. También veremos que dado un poliedro que produzca una variedad y una espina, los poliedros de su clase, y únicamente ellos, producen a la vez la misma variedad y la misma espina. En las siete secciones siguientes desarrollaremos más movidas sobre poliedros, y veremos cómo estas modificaciones se traducen en modificaciones de espinas. Finalmente, en la última sección veremos cómo un poliedro que produce una pseudovariedad puede modificarse para obtener un poliedro que produzca una 3-variedad.



# Capítulo 1

## Poliedros con Caras Identificadas

En este capítulo definiremos a los poliedros con caras identificadas, y a los espacios producidos por los mismos, como una generalización tridimensional de la presentación de 2-variedades por medio de polígonos con lados identificados. Posteriormente definiremos las pseudovariedades de tipo  $\mathcal{P}_1o$  como aquellas pseudovariedades con un número finito de singularidades, y tales que toda singularidad tiene una vecindad homeomorfa al cono de una superficie orientable. Observaremos que toda 3-variedad compacta conexa orientable y sin frontera es una pseudovariiedad de tipo  $\mathcal{P}_1o$ , y probaremos algunos teoremas sobre este tipo de pseudovariedades. Finalmente, probaremos que el conjunto de los espacios cociente de los poliedros con caras identificadas es exactamente el conjunto de pseudovariedades de tipo  $\mathcal{P}_1o$  (Teoremas 1.7 y 1.9).

### 1.1 Definición

Los poliedros con caras identificadas son una herramienta importante en el estudio de las 3-variedades. Intuitivamente podemos pensar en ellos de la siguiente manera. Consideremos un poliedro sólido orientado con un número par de caras poligonales. Además consideremos que tales caras están identificadas por pares, invirtiendo la orientación de las caras inducida por la orientación del poliedro, y haciendo corresponder vértices con vértices y aristas con aristas (ver la Figura 1.1). A estos poliedros los entendemos intuitivamente como poliedros con caras identificadas, y su importancia radica en que toda 3-variedad compacta conexa y orientable se puede ver como el espacio cociente de uno de estos poliedros, bajo la respectiva identificación, como demostraremos posteriormente.

De aquí en adelante trataremos a los grafos desde el punto de vista topológico, es decir, entenderemos por grafo a un complejo simplicial (o celular) unidimensional. Además, el término grafo se usará para hacer referencia a grafos y a pseudografos por igual.

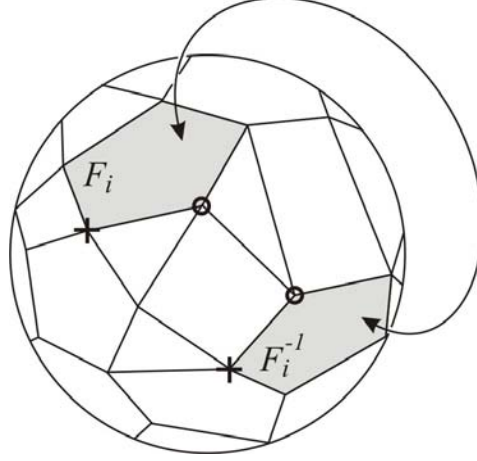


Figura 1.1. Un poliedro con caras identificadas, donde se ilustra la identificación de las caras  $F_i$  y  $F_i^{-1}$ .

Pasaremos ahora a la definición formal de poliedro con caras identificadas. Sean  $B^3$  la bola cerrada tridimensional,  $G$  un grafo conexo contenido en  $\partial B^3 = S^2$ , y  $T$  una triangulación de  $G$ . Diremos en este caso que  $\langle B^3, G, T \rangle$  es una *bola celular*. Los vértices y aristas de  $T$  se llamarán los *vértices* y *aristas* de la bola, respectivamente. Notemos que esta definición no depende únicamente de la topología de  $G$  sino de la estructura de complejo simplicial que tenga, pues diferentes triangulaciones darán como resultado diferentes conjuntos de vértices y aristas.

**Lema 1.1** *Bajo las anteriores hipótesis,  $\partial B^3 - G$  es una unión de  $k$  discos abiertos bidimensionales disjuntos.*

*Demostración.* Razonemos por el absurdo. Sea  $E$  una componente conexa de  $\partial B^3 - G$  que no sea simplemente conexa, y sea  $\gamma$  una curva de Jordan no trivial en  $E$ . Entonces, se puede concluir del Teorema de la Curva de Jordan que  $\partial B^3 - \gamma$  consiste en dos discos abiertos disjuntos  $D_1$  y  $D_2$ . Como  $\gamma$  está contenida en  $E$ , que es abierto, puede verse que las intersecciones de  $E$  con  $D_1$  y con  $D_2$  son no vacías. Además, las intersecciones de  $E^c = \partial B^3 - E$  con  $D_1$  y con  $D_2$  también son no vacías, pues de lo contrario uno de ambos discos estaría contenido en  $E$ , y  $\gamma$  sería una curva trivial en  $E$ .

Veamos que  $E$  tiene puntos de frontera  $z_1$  en  $D_1$  y  $z_2$  en  $D_2$ . Sean  $x \in E \cap D_1$ ,  $y \in E^c \cap D_1$ , y  $f : [0, 1] \rightarrow D_1$  continua, inyectiva, y tal que  $f(0) = x$  y  $f(1) = y$ . Entonces el conjunto  $A = \{t \in [0, 1] \mid f(t) \in E\}$ , es acotado superiormente en  $[0, 1]$  por 1, y por lo tanto tiene un supremo,  $s$ , en  $[0, 1]$ . Claramente  $z_1 = f(s)$  es un punto de frontera de  $E$  en  $D_1$ . Similarmente, obtenemos un punto de frontera  $z_2$  de  $E$  en  $D_2$ .

Ahora, obviamente  $z_1$  y  $z_2$  pertenecen a  $G$ , y como  $\gamma$  no interseca a  $G$ , concluimos que  $G$  no es conexo. Nótese que el número  $k$  del enunciado es un natural cualquiera, e igual a 1 en caso de que  $G$  sea un árbol.  $\square$

Podemos ahora formular la siguiente definición. Si  $\langle B^3, G, T \rangle$  es una bola celular, a las clausuras de los  $k$  discos abiertos que componen  $\partial B^3 - G$  las llamaremos las *caras* de dicha bola. Por otro lado, para cualquier natural  $m$ , denotemos por  $P_m$  al polígono en  $\mathbb{C}$  cuyos vértices son las  $m$  raíces de la unidad y que es homeomorfo al disco unitario cerrado de  $\mathbb{R}^2$ . Consideremos entonces, para todo  $m$ , a  $P_m$  con una orientación arbitraria. Además, consideremos una bola celular  $\langle B^3, G, T \rangle$  con un número par de caras  $k = 2n$ , y supongamos que cada cara está orientada de manera inducida por una orientación arbitraria de  $B^3$ .

Ahora, supongamos que las  $2n$  caras de  $\langle B^3, G, T \rangle$  pueden agruparse por pares, bajo la condición de que para cada par  $\{F_i, F_i^{-1}\}$ , existen funciones continuas  $f_i^+ : P_{m_i} \rightarrow F_i$  y  $f_i^- : P_{m_i} \rightarrow F_i^{-1}$ , donde  $m_i$  es algún entero, que satisfacen las siguientes condiciones:

- I.  $f_i^+$  y  $f_i^-$  restringidas a  $\mathring{P}_{m_i}$  son homeomorfismos.
- II.  $f_i^+$  y  $f_i^-$  envían vértices en vértices y aristas en aristas.
- III. De  $f_i^+$  y  $f_i^-$ , una conserva la orientación y la otra la invierte.
- IV.  $f_i^+$  y  $f_i^-$ , restringidas a las aristas de  $P_{m_i}$ , son PL.

Estas funciones permiten definir una relación  $\epsilon_i$  entre  $F_i$  y  $F_i^{-1}$ , según la cual  $x \in F_i$  está relacionado con  $y \in F_i^{-1}$  si y sólo si existe  $z \in P_{m_i}$  tal que  $f_i^+(z) = x$  y  $f_i^-(z) = y$ . Así, tomando para cada par de caras la respectiva relación  $\epsilon_i$ , obtenemos el conjunto  $\epsilon := \{\epsilon_1, \dots, \epsilon_n\}$  que llamamos un *esquema de identificación* para la bola celular  $\langle B^3, G, T \rangle$ . Además, a la cuádrupla  $\langle B^3, G, T, \epsilon \rangle$  la llamamos un *poliedro con caras identificadas*. Notemos que todo  $\epsilon_i$  es uno a uno (1-1) en  $F_i - G$ , y a lo más 2-1 ó 1-2 en las aristas de  $G$ . La notación  $\epsilon = \{\epsilon_1, \dots, \epsilon_n\}$  será recurrente.

Dado el poliedro  $\langle B^3, G, T, \epsilon \rangle$ , las órbitas de los puntos de  $\partial B^3$  bajo  $\epsilon$  inducen una relación de equivalencia en  $\partial B^3$  que denotaremos por  $E\epsilon$  y llamaremos la *relación producida por el poliedro*. Mientras que al espacio cociente  $B^3/E\epsilon$  lo llamamos el *espacio producido por el poliedro*.

Por otro lado, como para todo  $i$ , se tiene que  $f_i^+$  y  $f_i^-$  envían aristas en aristas, tenemos que dada una arista en  $F_i$ , el conjunto en  $F_i^{-1}$  con el que esa arista se identifica bajo  $\epsilon_i$  es una arista de  $F_i^{-1}$ . De esta manera, podemos considerar las órbitas de las aristas de  $\langle B^3, G, T, \epsilon \rangle$  bajo  $\epsilon$ . Como el conjunto de aristas es finito, estas órbitas serán finitas, y serán clases de equivalencia en el conjunto de aristas. De hecho, como para cada arista hay únicamente dos caras adyacentes, entonces hay únicamente dos relaciones en  $\epsilon$  que la identifican con otras aristas. Así, las órbitas de las aristas son cíclicas bajo  $\epsilon$ . A la órbita de aristas  $\{a_1, \dots, a_n\}$ , junto con las relaciones en

$\epsilon$  asociadas a cada par  $\{a_i, a_{i+1}\}$ , la llamamos el *ciclo* de dichas aristas y lo denotamos por

$$a_1 \xrightarrow{\epsilon_{i_1}} a_2 \xrightarrow{\epsilon_{i_2}} \dots \xrightarrow{\epsilon_{i_{n-1}}} a_n \xrightarrow{\epsilon_{i_n}} a_1$$

Esta notación recoge toda la información del ciclo.

De manera similar a como ocurre con las aristas,  $\epsilon$  induce clases de equivalencia en el conjunto de vértices, aunque estas no son cíclicas. Entonces, al cardinal de la clase de una arista lo llamaremos (de nuevo) el *ciclo* de dicha arista, y al cardinal de la clase de un vértice le llamaremos el *orden* de dicho vértice. A las aristas de ciclo 2 las llamaremos aristas *dobles*, y a las de ciclo 3, *triples*.

Finalizaremos esta sección con un ejemplo que ilustra las anteriores definiciones. Quizás el ejemplo más famoso de un poliedro con caras identificadas lo constituye el dodecaedro en el que se basa la construcción clásica del espacio dedecaédrico de Poincaré. Otro ejemplo conocido, también basado en un dodecaedro, ha sido estudiado por Thurston y es el que examinaremos a continuación. Consideremos el poliedro con caras identificadas mostrado al lado izquierdo de la siguiente figura. Este poliedro es un cubo cuyas caras han sido divididas a la mitad por unas aristas que llamaremos troncos (mostradas gruesas), dando como resultado un dodecaedro. La identificación de las caras está dada de la siguiente manera. Si dos caras son adyacentes a un mismo tronco, entonces esas caras se identifican por una reflexión sobre dicho tronco.

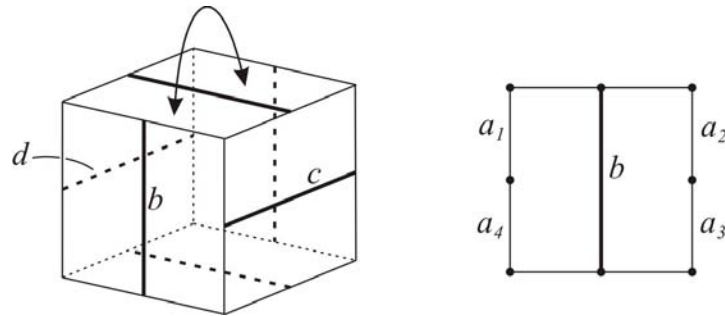


Figura 1.2. Ejemplo de un poliedro con caras identificadas.

Examinemos ahora los ciclos y órdenes de algunas aristas y vértices. Sean  $\rho_b$ ,  $\rho_c$  y  $\rho_d$  las reflexiones sobre los troncos  $b$ ,  $c$  y  $d$  respectivamente. Consideremos a la arista  $a_1$  mostrada al lado derecho de la figura, que ilustra la cara frontal de nuestro cubo. Entonces, vemos que  $\rho_b$  identifica a  $a_1$  con  $a_2$ ,  $\rho_c$  a  $a_2$  con  $a_3$ ,  $\rho_b$  a  $a_3$  con  $a_4$ , y, finalmente,  $\rho_d$  a  $a_4$  con  $a_1$ . Así, el ciclo de  $a_1$  es

$$a_1 \xrightarrow{\rho_b} a_2 \xrightarrow{\rho_c} a_3 \xrightarrow{\rho_b} a_4 \xrightarrow{\rho_d} a_1$$

Y como dicho ciclo o clase consta de cuatro aristas, decimos que  $a_1$  es una arista de ciclo 4. En

contraste, vemos que el ciclo de  $b$  es

$$b \xrightarrow{\rho_b} b$$

Por lo que  $b$  es una arista de ciclo 1.

Con respecto a los vértices, tenemos que el poliedro consta de 20 vértices, de los cuales 8 son los 8 vértices del cubo, y 12 se encuentran en los extremos de los troncos. Dado un vértice en el extremo de un tronco, vemos que éste se identifica con un único vértice del mismo tipo. Por ejemplo, la reflexión  $\rho_b$  sobre  $b$  identifica un extremo del tronco  $c$  con uno del tronco  $d$ . De esta forma, los vértices de este tipo son de orden 2. Por otro lado, vemos que los 8 vértices del cubo están todos identificados entre sí, por lo que son de orden 8. Así, el poliedro cuenta con 12 vértices de orden 2 y 8 vértices de orden 8.

## 1.2 Restricción de la Definición

Recordemos que en nuestra definición de un poliedro con caras identificadas  $\langle B^3, G, T, \epsilon \rangle$ , la triangulación  $T$  de  $G$  juega un papel importante, pues determina los vértices y las aristas del poliedro. Sin embargo dicha triangulación, como veremos, es redundante. Por ello es deseable modificar la definición de poliedro para que dependa únicamente de la topología del grafo  $G$  y de las relaciones en  $\epsilon$ , lo cual es el objetivo de esta sección.

Sean  $\langle B^3, G, T_1, \epsilon \rangle$  y  $\langle B^3, G, T_2, \eta \rangle$  dos poliedros con caras identificadas. Notemos que los dos poliedros tienen el mismo grafo  $G$ , y que por tanto las bolas celulares  $\langle B^3, G, T_1 \rangle$  y  $\langle B^3, G, T_2 \rangle$  son iguales en sus aspectos topológicos, y difieren únicamente en la elección de una triangulación para  $G$ . Entonces, si  $\epsilon = \eta$  (bajo isotopía), decimos que  $\langle B^3, G, T_1, \epsilon \rangle$  y  $\langle B^3, G, T_2, \eta \rangle$  son *esencialmente iguales*. Claramente los poliedros esencialmente iguales forman clases de equivalencia en el conjunto de los poliedros con caras identificadas. Veremos ahora la construcción de un representante estándar para cada clase.

Sean  $G$  un grafo y  $T$  una triangulación de  $G$ . Entonces, decimos que un vértice de  $G$  (entendiendo a  $G$  como triangulado bajo  $T$ ) es *topológicamente superfluo* si es adyacente a exactamente dos aristas. Consideremos ahora un poliedro con caras identificadas  $\langle B^3, G, T, \epsilon \rangle$ , y un vértice  $v_1$  de  $\langle B^3, G, T \rangle$ . Notemos que todos los puntos en la órbita de  $v_1$  son también vértices. Diremos que  $v_1$  es un vértice *despreciable* en  $\langle B^3, G, T, \epsilon \rangle$  si cumple con las siguientes dos condiciones:

- (1) Todos los puntos  $v_1, \dots, v_n$  en la órbita de  $v_1$  son vértices topológicamente superfluos en  $G$ .
- (2) No existe una arista de  $T$  cuyos dos vértices pertenezcan ambos al conjunto  $\{v_1, \dots, v_n\}$ .

Sea  $T_0$  una triangulación obtenida al eliminar todos los vértices despreciables de  $T$ . Se entiende que con la eliminación de cada vértice, las dos aristas adyacentes a él se funden en una única arista. Es fácil probar que  $T_0$  es en efecto una triangulación. Entonces a  $T_0$  la llamamos la *triangulación estándar* para  $\langle B^3, G, T, \epsilon \rangle$ .

Puede probarse que si  $T_0$  es la triangulación estándar para el poliedro  $\langle B^3, G, T, \epsilon \rangle$ , entonces  $\langle B^3, G, T_0, \epsilon \rangle$  es un poliedro con caras identificadas. A  $\langle B^3, G, T_0, \epsilon \rangle$  lo llamaremos el *poliedro estándar* para  $\langle B^3, G, T, \epsilon \rangle$ . Puede verse que poliedros esencialmente iguales tienen el mismo poliedro estándar, por lo que también diremos que  $\langle B^3, G, T_0, \epsilon \rangle$  es el poliedro estándar de la clase de  $\langle B^3, G, T_0, \epsilon \rangle$ . Claramente,  $\langle B^3, G, T_0, \epsilon \rangle$  es esencialmente igual a  $\langle B^3, G, T, \epsilon \rangle$ , por lo que de hecho el poliedro estándar de una clase es un miembro de dicha clase.

En adelante entenderemos a los poliedros esencialmente iguales como un mismo poliedro. Por ello, en vez de trabajar con el conjunto de poliedros con caras identificadas, trabajaremos con el conjunto de clases de poliedros esencialmente iguales o, equivalentemente, con el conjunto de poliedros estándar. De esta forma, restringiremos nuestra definición de poliedro con caras identificadas para incluir únicamente a aquellos que sean poliedros estándares.

También usaremos la siguiente notación. Sea  $\langle B^3, G, T_0, \epsilon \rangle$  el poliedro estándar para la clase de un poliedro dado  $\langle B^3, G, T, \epsilon \rangle$ . Dicha clase, y por tanto su poliedro estándar, está determinada únicamente por el grafo  $G$  y el esquema de identificación  $\epsilon$ . Entonces, esto nos permite denotar a  $\langle B^3, G, T_0, \epsilon \rangle$  simplemente por  $\langle B^3, G, \epsilon \rangle$ . Esta es la notación que adoptaremos de aquí en adelante.

### 1.3 Pseudovariedades

Desviaremos nuestra atención ahora a las 3-pseudovariedades. Éstas son un tipo de espacios topológicos similares a las 3-variedades, pero que cuentan con una serie de singularidades topológicas; que son puntos cuyas vecindades no son homeomorfas a bolas o a medias bolas tridimensionales.

Comenzaremos con algunas definiciones preliminares.

**Definición** *Decimos que un complejo simplicial  $K$ , de dimensión  $n$ , es homogéneo si todo tetraedro de dimensión menor que  $n$  es una cara de un tetraedro de dimensión mayor. Además, decimos que un complejo simplicial homogéneo  $K$ , de dimensión  $n$ , es orientable si para el conjunto de tetraedros  $\{\sigma_i^n\}$  de dimensión  $n$ , existe un conjunto de orientaciones  $\{O_i\}$  (donde  $O_i$  es una orientación de  $\sigma_i^n$ ) que satisface la siguiente propiedad: Si  $\rho^{n-1}$  es simultáneamente una cara de dos tetraedros  $\sigma_i^n$  y  $\sigma_j^n$ , entonces  $O_i$  y  $O_j$  inducen en  $\rho^{n-1}$  orientaciones inversas. En este caso, decimos que  $\{O_i\}$  es un conjunto de orientaciones coherente, o que los elementos de  $K$  están orientados coherentemente.*

**Definición** Dado un complejo simplicial  $K$ , y un subcomplejo  $L$  de  $K$ . Definimos una vecindad regular abierta de  $L$  en  $K$ , como el interior de la unión de todos los tetraedros en la segunda subdivisión baricéntrica  $K''$  de  $K$  que intersectan a  $L$ . Similarmente definimos una vecindad regular cerrada de  $L$  en  $K$ , como la unión de todos los tetraedros en  $K''$  que intersectan a  $L$  (véanse [24], [9]).

De aquí en adelante, será costumbre denotar a la subdivisión baricéntrica de un complejo simplicial con un apóstrofo. Además, cuando hablemos de una vecindad regular nos referiremos a una vecindad regular abierta, a menos que se especifique lo contrario. Puede verse que dado un espacio topológico triangulable  $X$ , y un subespacio suyo  $Y$ , entonces una vecindad regular de  $Y$  (abierta o cerrada) está definida independientemente de la triangulación de  $X$  que se tome (véanse [24], [9]).

**Definición** Sean  $C_1, \dots, C_n$  copias de  $S^1$  y, para cada  $i \in \{1, \dots, n\}$ , sea  $a_i$  un punto en  $C_i$ . Al espacio cociente  $(C_1 \cup \dots \cup C_n) / \{a_1, \dots, a_n\}$  lo llamamos un moño de género  $n$ .

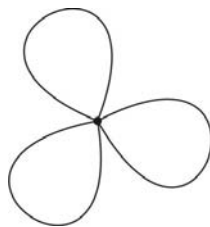


Figura 1.3. Moño de género 3.

**Definición** Sea  $X$  un espacio topológico. Entonces, definimos al cono de  $X$ ,  $C(X)$ , como el espacio cociente  $(X \times [0, 1]) / \sim$ , donde  $\sim$  es la relación de equivalencia que identifica a todos los puntos de la forma  $(x, 0)$ , con  $x \in X$ , en un único punto  $k$ . A tal  $k$  lo llamamos el ápice del cono.

Notemos lo siguiente acerca de esta última definición. Sea  $G$  un cuerpo de asas de género  $g$ ; y sea  $K$  un moño del mismo género, inmerso en  $\overset{\circ}{G}$  de manera que todo elemento de  $\pi_1(G)$  sea homótopo a un elemento de  $\pi_1(K)$ , como se ilustra en la siguiente figura para un cuerpo de género 3. Entonces  $\partial G$  una superficie orientable de género  $g$ , y el espacio cociente  $G/K$  es el cono de  $\partial G$ . Además, el ápice de dicho cono es el punto resultante de la identificación de  $K$ . Ésta es de hecho quizás la mejor manera de visualizar al cono de una superficie orientable, pues basta con imaginar que el moño  $K$ , que recorre el interior de  $G$ , es un solo punto.

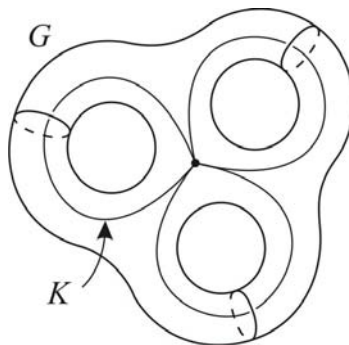


Figura 1.4. Cuerpo de asas con un moño inmerso.

Con estas definiciones, pasaremos ahora a tratar a las pseudovariedades. Varias definiciones de clases amplias de 3-pseudovariedades son posibles, pero estamos interesados únicamente en las que llamaremos de tipo  $\Pi_0$ .

Sea  $M$  una 3-variedad orientable sin frontera, y sean  $K_1, \dots, K_m$  un número finito, posiblemente nulo, de moños inmersos disjuntamente en  $M$ , cada uno de género cualquiera. Notemos que bajo estas condiciones los moños pueden estar anudados de cualquier forma. Entonces, identificando cada uno de los  $K_i$  en un único punto  $k_i$  obtenemos un espacio  $M/(K_1, \dots, K_m)$  al que llamamos una 3-pseudovariedad de tipo  $\Pi_0$ . Al conjunto de todas las pseudovariedades de este tipo lo denotamos igualmente por  $\Pi_0$ . A los puntos  $k_i$  que provienen de las identificaciones de los  $K_i$  los llamamos las *singularidades* de la pseudovariedad. Notemos que toda 3-variedad es una pseudovariedad de tipo  $\Pi_0$ , pues toda variedad es igual a ella misma tras identificar un número nulo de moños.

**Teorema 1.2** *Si  $k$  es una singularidad de la pseudovariedad  $P$ , entonces  $k$  tiene una vecindad  $W$  homeomorfa al interior de un cono  $C(X)$ , donde  $X$  es una suma conexa de toros. Mas aún, si  $x$  es el ápice de  $C(X)$ , y  $f : W \rightarrow C(X)$  es un homeomorfismo, entonces  $f(k) = x$ .*

*Demostración.* Sean  $M$  una 3-variedad orientable sin frontera, y  $P = M/(K_1, \dots, K_m)$  una pseudovariedad. Entonces, el Teorema de Moise ([16]) garantiza que  $M$  es triangulable, por lo que podemos considerar una vecindad regular  $V$  de  $K_1$ . Recordemos que una 3-variedad es no orientable si y sólo si contiene una botella de Klein sólida. Entonces necesariamente  $V$  es un cuerpo de asas, y como observábamos,  $V/K_1$  es el cono de una suma conexa de toros. Por otro lado,  $V/K_1$  es una vecindad de  $k_1$  en  $P$ , con lo que tenemos el teorema.  $\square$

De hecho, la demostración del teorema permite concluir que  $K_1$ ,  $V$ , y  $\partial(V/K_1)$ , como están allí definidos, son del mismo género.

Veamos ahora un ejemplo de una pseudovariedad. Sea  $K$  el nudo del 8, ilustrado al lado izquierdo de la siguiente figura, inmerso en  $S^3$ . Resulta claro que todo nudo, y en particular  $K$ ,



es un moño de género 1 inmerso en  $S^3$ . De esta manera el espacio  $S^3/K$  es una pseudovariiedad de acuerdo con nuestra definición.

Además, puede verse que  $S^3/K$  es homeomorfo al espacio obtenido al pegar a dos tetraedros por sus caras, de acuerdo con el esquema descrito en el lado derecho de la figura (véanse [7], [27]), y que la singularidad  $k$  de  $S^3/K$  es de hecho el punto que resulta de la identificación de (todos) los vértices de ambos tetraedros.

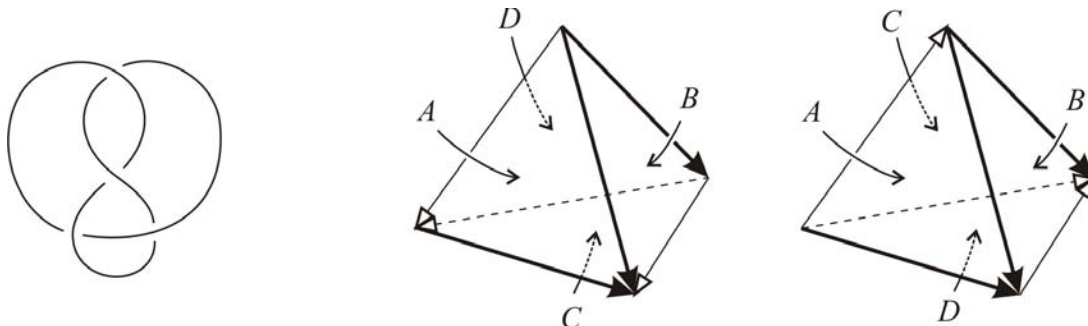


Figura 1.5. A la izquierda el nudo del 8. A la derecha, un esquema de identificación para las caras de dos tetraedros. Las caras con la misma letra deben identificarse, de modo que las aristas, gruesas y delgadas, y sus respectivas direcciones, coincidan.

Comprobemos ahora que  $k$ , en efecto, tiene una vecindad  $W$  homeomorfa al cono de un toro. Una forma de verlo es siguiendo la demostración del Teorema 1.2. Sea  $U$  es una vecindad regular de  $K$  en  $S^3$ . Entonces  $U/K$  es una vecindad de  $k$  en  $S^3/K$ . Por otro lado, como  $K$  es homeomorfa a  $S^1$ , y como  $S^3$  es orientable, entonces  $U$  es un toro sólido, y  $K$  es el generador de su grupo fundamental. Con ello,  $U/K = W$  es el cono de un toro.

Una segunda forma de verlo es utilizando la representación de  $S^3/K$  como el espacio cociente de los dos tetraedros de la figura. Sea  $T$  uno de tales tetraedros, y sea  $v$  un vértice de  $T$ . Si consideramos una vecindad regular  $U$  de  $v$  en  $T$ , obtendremos un pequeño entorno de  $v$ , con forma de tetraedro o pirámide. Dicha pirámide tendrá tres caras contenidas en diferentes caras de  $T$ , y una cara con interior contenido en  $\overset{\circ}{T}$ . A esta última cara la llamaremos la base de  $U$ . Si para cada uno de los ocho vértices  $v_1, \dots, v_8$  de ambos tetraedros consideramos una vecindad regular de este tipo, obtendremos ocho pequeñas pirámides  $U_1, \dots, U_8$ , respectivamente, como se ilustra en la Figura 1.6.

Entonces, es claro que el resultado de la identificación de  $U_1, \dots, U_8$  es una vecindad regular  $W$  de  $k$  en  $S^3/K$ . Además, la identificación de las bases de los  $U_i$  da como resultado la frontera de  $W$ , que es una 2-variedad compacta y sin frontera.

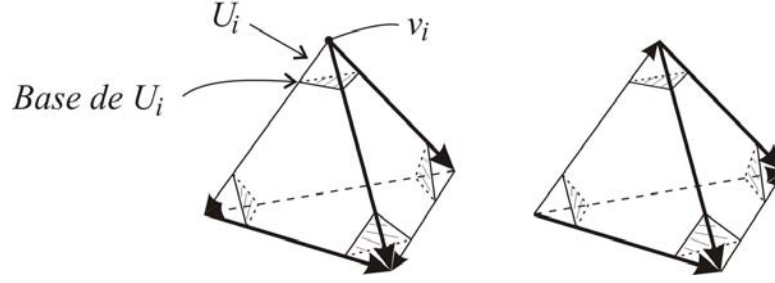


Figura 1.6. Vecindades regulares piramidales de los vértices de los dos tetraedros.

Si para cada punto  $x$  en la base de cada  $U_i$ , consideramos el segmento de recta que va desde  $x$  hasta  $v_i$ , y lo parametrizamos desde 1 hasta 0; entonces es fácil ver que  $W$  es de hecho el cono de  $\partial W$ .

Además, las bases de los  $U_i$  nos proporcionan una triangulación de  $\partial W$ , y haciendo la cuenta de su característica de Euler puede verse que  $\partial W$  es en efecto un toro. Así pues, podemos concluir que  $W$  es el cono de un toro.

## 1.4 Tres Teoremas sobre Pseudovariedades

Veremos ahora un teorema que será fundamental para caracterizar a los espacios producidos por los poliedros con caras identificadas.

**Teorema 1.3** *Toda pseudovariiedad de tipo  $\Pi_0$  es triangulable.*

*Demostración.* Sea  $P$  una pseudovariiedad de tipo  $\Pi_0$ . Entonces, existe una 3-variedad sin frontera  $M$ , y un conjunto de moños disjuntos  $K_1, \dots, K_m$  inmersos en  $M$  de tal forma que  $P = M / (K_1, \dots, K_m)$ . Como toda 3-variedad es triangulable, podemos considerar una triangulación  $T$  de  $M$ . De hecho, podemos tomar a  $T$  de forma tal que para todo  $i$ ,  $K_i$  sea una unión de vértices y aristas de los tetraedros en  $T''$ , la segunda subdivisión baricéntrica de  $T$ .

Consideremos, para cada  $K_i$ , una vecindad regular suya  $V_i$  tomada en  $T''$ . Entonces  $V_1, \dots, V_m$  son disjuntas. De otra parte, para cada  $i$ , sea  $W_i = V_i / K_i$ . Es claro que  $M - \bigcup_{i=1}^m V_i$  es homeomorfo a  $P - \bigcup_{i=1}^m W_i$ , y que es triangulable con un subconjunto de  $T''$ . Entonces, para probar que  $P$  es triangulable, basta mostrar que cada  $\overline{W}_i$  es triangulable, bajo una triangulación coherente con la triangulación de  $\partial W_i$  inducida por  $T''$ .

Centremos nuestra atención en un  $V_i$  cualquiera, con  $i \in \{1, \dots, m\}$ . Entonces,  $V_i$  es un cuerpo de asas de cierto género  $g$ , y  $\overline{W}_i$  es el cono de una suma conexa de  $g$  toros. Además,  $\partial V_i = \partial W_i$  es homeomorfa a dicha suma de  $g$  toros; y posee una triangulación  $S(i)$ , que llamaremos simplemente  $S$ , inducida por  $T''$ , constituida por  $n$  triángulos  $S_1, \dots, S_n$  que son

caras de tetraedros en  $T$ . Ahora, sea  $R$  un conjunto con  $n$  copias  $R_1, \dots, R_n$  del tetraedro tridimensional común, y para cada  $j$ , identifiquemos a  $S_j$  con una cara arbitraria de  $R_j$ .

Sea  $a$  una arista de un triángulo en  $S$ . Es claro que  $a$  es adyacente únicamente a dos triángulos en  $S$ , que llamaremos  $S_i$  y  $S_j$ , y que son caras de dos tetraedros en  $R$ , que llamaremos  $R_i$  y  $R_j$ , respectivamente. Entonces, como la intersección de  $R_i$  y  $R_j$  es únicamente la arista  $a$ , existen exactamente cuatro triángulos que son caras de  $R_i$  y  $R_j$  y que son adyacentes a la arista  $a$ . Dos de esos triángulos son  $S_i$  y  $S_j$ , y a los otros dos los llamaremos  $Q_i$  y  $Q_j$ , donde  $Q_i \subseteq R_i$  y  $Q_j \subseteq R_j$ . Podemos proceder entonces a identificar a  $Q_i$  y a  $Q_j$  por medio de un homeomorfismo lineal que fije a cada punto de  $a$ .

Repitiendo el procedimiento con cada arista de cada triángulo de  $S$  obtenemos que los tetraedros de  $R$ , así identificados, forman el cono de una superficie orientable de género  $g$ . Así pues,  $R$  es una triangulación de  $\overline{W}_i$  que, por construcción, es coherente con la triangulación  $S$  de  $\partial V_i = \partial W_i$  inducida por  $T''$ . De esta forma tenemos el resultado.  $\square$

Con este teorema vemos que tiene sentido hablar de la orientabilidad de una pseudovariedad de tipo  $\text{IIo}$ . El siguiente corolario es fácil de probar utilizando la demostración del teorema anterior.

**Teorema 1.4** *Toda pseudovariedad de tipo  $\text{IIo}$  es orientable.*

Veremos ahora una caracterización de las pseudovariedades de tipo  $\text{IIo}$ . Sea  $X$  un espacio topológico 2-contable que satisfaga las siguientes condiciones:

- (a) Todo punto de  $X$ , excepto quizás un número finito, tiene una vecindad homeomorfa a una bola abierta tridimensional.
- (b) Si  $x \in X$  no tiene una vecindad de este tipo, tiene una vecindad cuya clausura es homeomorfa al cono de una suma conexa de toros.

En este caso decimos que  $X$  es una *pseudovariedad de tipo  $\mathcal{P}_1$* . Mediante una demostración esencialmente idéntica a la del Teorema 1.3, puede verse que toda pseudovariedad de tipo  $\mathcal{P}_1$  es triangulable. Decimos entonces que  $X$  es *de tipo  $\mathcal{P}_1\text{o}$*  si es orientable, y *de tipo  $\mathcal{P}_1n$*  si no es orientable. Los conjuntos de las pseudovariedades de tipo  $\mathcal{P}_1$ ,  $\mathcal{P}_1\text{o}$ , y  $\mathcal{P}_1n$  se denotarán igualmente por  $\mathcal{P}_1$ ,  $\mathcal{P}_1\text{o}$ , y  $\mathcal{P}_1n$ .

La siguiente definición será importante para probar el próximo teorema. Sean  $G$  un cuerpo de asas de género  $g$ , y  $K$  un moño del mismo género inmerso en  $\overset{\circ}{G}$ , de tal forma que  $G/K$  sea homeomorfo al cono de  $\partial G$ . Consideremos la función  $f : G \longrightarrow G/K$  definida por  $f(x) = x$  para todo  $x \in G - K$ , y  $f(x) = k$  para todo  $x \in K$ , donde  $k$  es al ápice de  $G/K$ . Entonces, si  $m_1, \dots, m_g$  son los meridianos de  $G$ , Decimos que  $f(m_1), \dots, f(m_g)$  son *meridianos proyectados*

para  $G/K$ . Notemos que los meridianos proyectados de  $G/K$  son un conjunto de curvas características en  $\partial(G/K)$ , que es una superficie orientable (véanse [22],[23],[10]).

La anterior definición cuenta con la desventaja de que los meridianos de un cuerpo de asas (y por tanto los meridianos proyectados del cono de una superficie orientable) dependen la una inmersión del cuerpo de asas en  $\mathbb{R}^3$ , y diferentes inmersiones darán como resultado diferentes conjuntos de meridianos (véase [22]). Sin embargo, ello no será un problema a la hora de construir variedades pegando a una variedad con frontera cuerpos de asas con diferentes conjuntos de meridianos, o conos de superficies orientables con diferentes conjuntos de meridianos proyectados. Ello se afirma en el siguiente lema.

**Lema 1.5** *Sea  $N$  una pseudovariiedad de tipo  $\mathcal{P}_1o$ , y  $H$  un cuerpo de asas de género  $g$  inmerso en  $N$ , de tal forma que  $\partial H$  no contenga ninguna singularidad. Sea  $M = N - H$ . Entonces  $\partial M$  es homeomorfa a una superficie orientable de género  $g$ . Ahora, sean  $G$  un cuerpo de asas de género  $g$  con meridianos  $m_1, \dots, m_g$ , y  $\varphi : \partial G \rightarrow \partial M$  un homeomorfismo. Si  $l_1, \dots, l_g$  es otra colección de meridianos para  $G$ , y  $\psi : \partial G \rightarrow \partial M$  es un homeomorfismo que envía a cada  $l_i$  en  $\varphi(m_i)$ , entonces  $M \cup_{\varphi} G$  y  $M \cup_{\psi} G$  son espacios homeomorfos. Lo mismo es cierto en caso de que  $G$  no sea un cuerpo de asas sino el cono de una superficie orientable, y de que  $\{m_1, \dots, m_g\}$  y  $\{l_1, \dots, l_g\}$  sean conjuntos de meridianos proyectados.*

*Demostración.* Este lema, para el caso en el que  $G$  es un cuerpo de asas, es apenas una variación del teorema que afirma que, dada una descomposición de Heegaard  $M_1 \cup_h M_2$  de una variedad  $M$ , entonces  $M$  está determinada unívocamente por las imágenes en  $M_2$  bajo  $h$  de los meridianos de  $M_1$ , es decir, por las curvas características (véanse [22],[23],[10]). La demostración del lema en el caso de un cuerpo de asas sigue exactamente el mismo argumento que la demostración de este teorema. El caso del cono de una superficie orientable se sigue de manera natural del caso de un cuerpo de asas.  $\square$

Ahora podemos probar la siguiente caracterización de las pseudovariiedades de tipo  $\Pi o$ .

**Teorema 1.6**  $\Pi o = \mathcal{P}_1o$ .

*Demostración.* Que  $\Pi o \subseteq \mathcal{P}_1o$  se sigue trivialmente de nuestra definición de pseudovariiedad y del Teorema 1.2. La orientabilidad se tiene por el Teorema 1.4.

Veamos la otra contención. Sea  $P \in \mathcal{P}_1o$ , y sean  $k_1, \dots, k_n$  ( $n$  posiblemente 0) los puntos de  $P$  sin vecindades homeomorfas a bolas. Entonces, para cada  $i$ , sea  $W_i$  una vecindad de  $k_i$ , tal que  $\overline{W}_i$  sea homeomorfa al cono de una superficie. Sin pérdida de generalidad  $\overline{W}_1, \dots, \overline{W}_n$  pueden tomarse disjuntas.

Consideremos una de estas vecindades  $W_i$ . Sea pues  $\{n_1, \dots, n_k\}$  un conjunto de meridianos proyectados para  $\overline{W}_i$ . Por otro lado, sea  $G_i$  un cuerpo de asas de género  $k$ , y sea  $K_i$  un moño del

mismo género inmerso en  $G$  de manera que cada elemento de  $\pi_1(G_i)$  sea homótopo a un elemento de  $\pi_1(K_i)$ . Por último, sean  $m_1, \dots, m_k$  meridianos para  $G$ . Entonces si  $\varphi : \partial G_i \rightarrow \partial W_i$  es un homeomorfismo que envía a cada  $m_j$  en  $n_j$ , podemos considerar el espacio  $[(P - W_i) \cup G_i] / \varphi$  que, por el lema anterior, está determinado unívocamente.

Repetiendo este proceso para cada  $W_i$  obtenemos el espacio

$$M = [(P - \cup W_i) \cup (\cup G_i)] / \varphi_1, \dots, \varphi_n$$

que es orientable, dado que  $P$  es orientable. Además obtenemos un conjunto de moños  $K_1, \dots, K_n$  inmersos disjuntamente en  $M$ . Claramente  $P = M / (K_1, \dots, K_n)$ , por lo que  $P \in \Pi_0$ .  $\square$

Notemos que en la demostración anterior la variedad  $M$  no está determinada de manera unívoca, sino que diferentes elecciones de meridianos proyectados para  $\overline{W}_1, \dots, \overline{W}_n$  resultan en la construcción de diferentes variedades.

## 1.5 Espacios de Identificación

Ahora veremos algunos teoremas importantes sobre poliedros con caras identificadas. Con estos teoremas, el conjunto de los espacios de identificación de dichos poliedros queda completamente determinado.

**Teorema 1.7** *El espacio producido por cualquier poliedro con caras identificadas siempre es una 3-pseudovariación de tipo  $\mathcal{P}_1o$ .*

*Esbozo de la demostración.* Describiremos tan solo la línea principal de la prueba, pero una versión detallada puede encontrarse en [10]. La demostración consiste en observar dos hechos. En primer lugar que si  $P$  es el espacio producido por el poliedro dado, entonces  $P$  es triangulable y orientable. Y en segundo lugar, que todos los puntos de  $P$ , salvo un número finito, tienen una vecindad homeomorfa a la bola cerrada tridimensional  $B$ ; y el resto de puntos tienen una vecindad homeomorfa al cono de una superficie orientable.

Es fácil ver que  $P$  es triangulable. Si  $\langle B^3, G, \epsilon \rangle$  es nuestro poliedro, podemos, desde cada punto de  $G$ , trazar un segmento de recta hasta el centro de  $B^3$ , dividiendo a  $B^3$  en una serie de celdas. Si llevamos a cabo el mismo proceso en cada una de las celdas obtenidas, obtendremos un complejo celular homeomorfo a  $P$ . Como todo complejo celular es triangulable,  $P$  es triangulable. La orientabilidad de  $P$  se deriva de la condición (III) de la definición de poliedro con caras identificadas (véase la Sección 1.1).

Ahora veamos que los puntos de  $P$  tienen vecindades de la forma adecuada. Primero observamos que todos los puntos de  $P$  provenientes del interior del poliedro tienen una vecindad homeomorfa a  $B$ . Luego, observamos que un punto que provenga del interior de una cara

también tiene una vecindad homeomorfa a  $B$ , la cual está conformada por dos medias bolas pegadas. Una vez más, observamos que un punto en el interior de una arista de ciclo  $n$  tiene una vecindad homeomorfa a  $B$ , formada por la identificación de  $n$  cuñas esféricas, como los cascos de una naranja. Para ello son esenciales las condiciones (III) y (IV) de la definición de poliedro con caras identificadas (véase la Sección 1.1).

Sólo resta entonces observar el caso de los puntos provenientes de vértices, que son finitos. El análisis de este caso es una versión general de aquel hecho en la Sección 1.3 para el ejemplo de  $S^3/K$ , donde  $K$  es el nudo del 8. Sea  $v$  un punto de  $P$  que sea el producto de la identificación de  $n$  vértices del poliedro. Sean  $v_1, \dots, v_n$  dichos vértices. Entonces, si en  $B^3$  tomamos una vecindad regular de cada  $v_i$ , obtenemos una serie de pirámides  $U_1, \dots, U_n$ , que al identificarse producen una vecindad  $V$  de  $v$ . Además,  $V$  es el cono de  $\partial V$ , que es una superficie. De hecho, la orientabilidad de  $P$  implica que  $\partial V$  es una superficie orientable, pues los conos de superficies no orientables no son orientables.  $\square$

**Teorema 1.8** *Para toda 3-variedad compacta, conexa, orientable y sin frontera, existe un poliedro con caras identificadas que produce dicha variedad.*

*Demostración.* Sea  $M$  una 3-variedad que satisfaga las hipótesis del teorema. Sabemos que  $M$  es triangulable, por lo que podemos considerar una triangulación  $\mathcal{T}$  para  $M$ , con tetraedros  $T_1, \dots, T_k$ , y caras triangulares  $t_1, \dots, t_{2k}$ . Consideraremos estas caras dentro de  $M$ , con lo cual tendremos exactamente el doble de caras triangulares que de tetraedros. Entonces podemos cortar a  $M$  por estas caras triangulares, produciendo dos copias  $t_i, t_i^{-1}$  de cada una, y considerarla como el espacio producido al pegar los tetraedros  $T_1, \dots, T_k$  por sus caras, según homeomorfismos  $\delta_1 : t_1 \longrightarrow t_1^{-1}, \dots, \delta_{2k} : t_{2k} \longrightarrow t_{2k}^{-1}$ .

Tomemos a  $T_1$ . Como  $M$  es conexa, existe  $T_i \neq T_1$  que se pega a  $T_1$  por una de sus caras de acuerdo a un homeomorfismo  $\delta_j$ . Sin pérdida de generalidad, supongamos que  $T_i = T_2$  y  $\delta_j = \delta_1$ ; y observemos que  $T_1 \cup T_2 / \delta_1$  es homeomorfo a  $B^3$ . Ahora, como  $M$  es conexa, existe  $T_i \notin \{T_1, T_2\}$  que se pega a  $T_1 \cup T_2 / \delta_1$  por una de sus caras de acuerdo con un homeomorfismo  $\delta_j$ . De nuevo, sin pérdida de generalidad, suponemos que  $T_i = T_3$  y  $\delta_j = \delta_2$ ; y  $T_1 \cup T_2 \cup T_3 / \delta_1, \delta_2$  es homeomorfo a  $B^3$ . Inductivamente, tras repetir  $n$  veces, existe  $T_i \notin \{T_1, \dots, T_n\}$  que se pega a  $T_1 \cup \dots \cup T_n / \delta_1, \dots, \delta_{n-1}$  por una de sus caras de acuerdo con un homeomorfismo  $\delta_j$ ; y suponiendo que  $T_i = T_{n+1}$  y  $\delta_j = \delta_n$ ; tenemos que  $T_1 \cup \dots \cup T_{n+1} / \delta_1, \dots, \delta_n$  homeomorfo a  $B^3$ . Al terminar este proceso, obtenemos que  $T = T_1 \cup \dots \cup T_k / \delta_1, \dots, \delta_{k-1}$  es homeomorfo a  $B^3$ . De hecho,  $T$  es una bola celular con caras triangulares, y es tal que  $T / \delta_k, \dots, \delta_{2k} = M$ . Así, hemos obtenido un poliedro con caras identificadas que produce a  $M$ .  $\square$

El procedimiento de la prueba del teorema anterior, en conjunción con el hecho de que toda pseudovariedad de tipo  $\mathcal{P}_1o$  es triangulable, permite probar la siguiente versión más general del mismo teorema.

**Teorema 1.9** *Para toda 3-pseudovariiedad de tipo  $\mathcal{P}_1o$ , existe un poliedro con caras identificadas que produce dicha pseudovariiedad.*

Con esto tenemos que el conjunto de los espacios producidos por los poliedros con caras identificadas es exactamente el conjunto de las pseudovariiedades de tipo  $\mathcal{P}_1o$ .

# Capítulo 2

## Espinas y Cicatrices

En la primera sección de este capítulo introduciremos brevemente las espinas de 3-variedades. Definiremos las espinas especiales, y probaremos los teoremas fundamentales de espinas especiales, que afirman que toda 3-variedad compacta conexa y sin frontera tiene una espina especial (Teorema 2.3), y que si una variedad de este tipo tiene una espina especial, no hay otra variedad que tenga esa misma espina (Teorema 2.4). Con ello se tendrá que las espinas especiales son una presentación de las 3-variedades compactas conexas y sin frontera.

En la segunda sección examinaremos la estrecha relación que tienen las espinas de 3-variedades con los poliedros con caras identificadas. Definiremos la cicatriz de un poliedro con caras identificadas; y probaremos que un espacio topológico es la cicatriz de un poliedro que produce una 3-variedad si y sólo si es una espina de dicha variedad, y además es un complejo celular bidimensional homogéneo (Teoremas 2.7 y 2.8.). También veremos que las espinas especiales de las variedades orientables son exactamente las cicatrices de los poliedros que llamaremos especiales (Corolario 2.9).

### 2.1 Espinas

A partir de las 3-variedades pueden construirse ciertos objetos llamados espinas, que guardan mucha información acerca de las 3-variedades. De entre estas espinas, las llamadas espinas especiales, que estudiaremos más adelante, son de particular importancia pues forman una presentación de las 3-variedades (y pueden definirse sin hacer referencia a las 3-variedades). Las espinas están además fuertemente ligadas con los poliedros con caras identificadas. Esto se debe, entre otras cosas, a que todo poliedro que produzca una 3-variedad produce también, de manera implícita, una espina de ella. Con el fin de estudiar esta relación trataremos a las espinas brevemente. Una buena exposición de la teoría que surge alrededor de las espinas puede encontrarse en [15].

Sea  $K$  un complejo celular. Decimos que una  $n$ -celda  $\sigma^n$  en  $K$  es *principal* si no es una cara de otra celda en  $K$  (salvo de ella misma). Además, decimos que una  $(n - 1)$ -celda  $\rho^{n-1}$  en  $K$  es una *cara libre* de  $\sigma^n$  si es una cara propia de la celda  $\sigma^n$  y de ninguna otra celda.

En el complejo  $K$  de la figura, por ejemplo,  $\sigma_1^2$ ,  $\sigma_2^2$ , y  $\rho_1^1$  son las únicas celdas principales. Por otro lado,  $\delta_1^0$  es una cara libre de  $\rho_1^1$ , ya que no es cara de ninguna otra celda, y  $\rho_2^1$  es una



cara libre de  $\sigma_2^2$ . En contraste,  $\delta_2^0$  y  $\rho_3^1$  no son caras libres de ninguna celda.

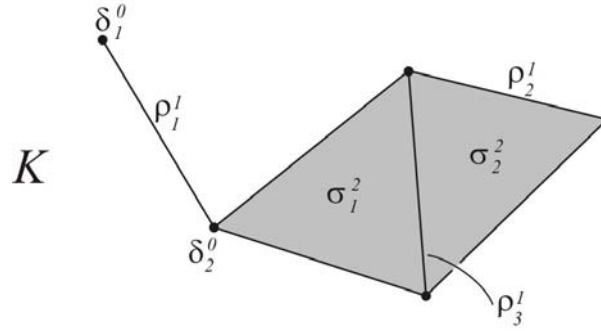


Figura 2.1. Un complejo simplicial.

Ahora, si  $\sigma$  es principal en  $K$  y  $\rho$  es una cara libre de  $\sigma$ , decimos que el complejo  $K$  *colapsa elementalmente* al complejo  $K - (\overset{\circ}{\sigma} \cup \overset{\circ}{\rho})$ , y escribimos  $K \searrow K - (\overset{\circ}{\sigma} \cup \overset{\circ}{\rho})$ . Ahora, si  $L$  es un subcomplejo de  $K$ , y es posible llegar de  $K$  a  $L$  por medio de una secuencia finita de colapsos elementales  $K \searrow \cdots \searrow L$ , decimos que  $K$  *colapsa* a  $L$ , y escribimos  $K \searrow L$ .

Por ejemplo, el complejo  $K$  de la figura 2.1 colapsa elementalmente al complejo  $K - (\overset{\circ}{\sigma}_2^2 \cup \overset{\circ}{\rho}_2^1)$  de la siguiente figura.

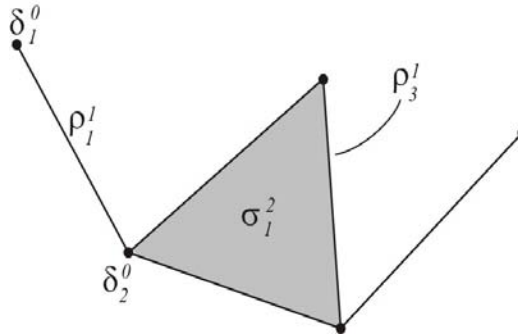


Figura 2.2. Un complejo simplicial obtenido del complejo de la figura 2.1 por un colapso elemental.

Sea  $M$  una 3-variedad compacta y conexa, y sea  $K$  una celulación de  $M$ , es decir, un complejo celular homeomorfo a  $M$ . Sea  $S$  un subcomplejo de  $K$ . Entonces, si  $M$  tiene frontera, decimos que  $S$  es una *espina* de  $M$  si  $M \searrow S$ . Por otro lado, si  $M$  no tiene frontera, decimos que  $S$  es una *espina* de  $M$  si  $S$  es una espina de  $M - B$ , donde  $B$  es una bola abierta tridimensional cualquiera con clausura en  $M - S$  (Notemos que sin pérdida de generalidad,  $B$  es una bola cualquiera en  $M$ ).

Por ejemplo, un punto en una bola cerrada tridimensional es una espina de dicha bola. Por otro lado, si extraemos de  $S^3$  una bola abierta  $B$ , obtendremos que  $S^3 - B$  es una bola cerrada

tridimensional. Como dicha bola tiene como espina a cualquiera de sus puntos, concluimos que un punto cualquiera en  $S^3$  es una espina de  $S^3$ .

Para mostrar otro ejemplo, consideremos a la circunferencia  $S^1$  inmersa en un toro sólido  $G$ , de manera que  $S^1$  sea homótopa al generador del grupo fundamental de  $G$ . Entonces  $S^1$  es una espina de  $G$ , dado que podemos colapsar  $G$  a  $S^1$ . Notemos que  $S^1$  también es una espina de una botella de Klein sólida.

Veamos ahora el siguiente teorema.

**Teorema 2.1** *Sea  $M$  una 3-variedad compacta, conexa y con frontera, y sea  $S$  un subcomplejo de una celulación  $K$  de  $M$ , con  $S \cap \partial M = \emptyset$ . Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes.*

- (a)  $S$  es una espina de  $M$ .
- (b)  $M$  es homeomorfa a una vecindad regular cerrada de  $S$  en  $M$ .
- (c)  $M - S$  es homeomorfa a  $\partial M \times [0, 1)$ .

La demostración de este teorema puede encontrarse en [15].

**Corolario 2.2** *Sea  $M$  una 3-variedad compacta, conexa y sin frontera, y sea  $S$  un subcomplejo de una celulación  $K$  de  $M$ . Entonces  $S$  es una espina de  $M$  si y sólo si  $M - S$  es una bola abierta tridimensional.*

*Demostración.* De izquierda a derecha tenemos que si  $S$  es una espina de  $M$ , y  $B$  una bola abierta con clausura en  $M - S$ , entonces  $S$  es una espina de  $M - B$ . Como  $M - B$  es una variedad con frontera  $\partial(M - B) = S^2$ , entonces  $(M - B) - S$  es homeomorfa a  $S^2 \times [0, 1)$ . Más aún, la frontera de  $B$  en  $M - S$  corresponde a los puntos de la forma  $S^2 \times \{0\}$  en  $(M - S) - B$ . Sean pues  $f$  un homeomorfismo entre  $(S^2 \times \{0\}) \subseteq (S^2 \times [0, 1))$  y la frontera de la clausura  $\overline{B}$  de  $B$  en  $M - S$ . Entonces  $M - S = ([S^2 \times [0, 1)] \cup B) / f$ , espacio que es una bola abierta tridimensional.

De derecha a izquierda, si  $M - S$  es una bola abierta tridimensional, entonces es claro que si  $B$  es una bola abierta con clausura en  $M - S$ , entonces  $(M - S) - B$  es homeomorfa a  $S^2 \times [0, 1)$ . Como  $S^2$  es la frontera de  $M - B$ , podemos concluir que  $S$  es una espina de  $M - B$ . De ahí que  $S$  sea una espina de  $M$ .  $\square$

Ahora, es posible que variedades distintas tengan espinas homeomorfas, como vimos en los ejemplos de un toro sólido y una botella de Klein sólida, presentados inmediatamente antes del Teorema 2.1. Para evitar esta circunstancia, las espinas pueden restringirse a cierto tipo, el de las llamadas espinas especiales, que definiremos a continuación.

Sea  $R$  un complejo celular bidimensional. Decimos que  $R$  es un *complejo simple* si todo punto en  $R$  tiene una vecindad regular cerrada de una de las siguientes formas:

- (a) Un disco cerrado.
- (b) Tres medios discos cerrados, identificados linealmente por sus tres diámetros.
- (c) Un disco cerrado  $D$  y dos medios discos cerrados  $D_1$  y  $D_2$  identificados de la siguiente manera. El diámetro de  $D_1$  se identifica con un diámetro  $x$  de  $D$ , y el diámetro de  $D_2$  se identifica con otro diámetro  $y$  de  $D$  diferente de  $x$ .

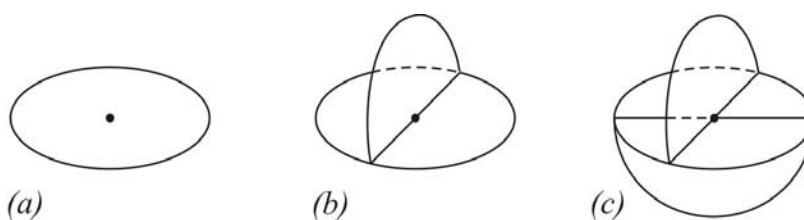


Figura 2.3. Vecindades regulares con las formas descritas en la definición anterior.

A los puntos con vecindades regulares cerradas de las formas (a), (b) y (c) los llamamos respectivamente *puntos no singulares*, *puntos triples* y *vértices verdaderos*. Por otro lado, llamaremos un *n-anillo cerrado* al espacio formado por  $S^2$  tras extraerle  $n + 1$  discos abiertos con clausuras disjuntas. También llamaremos un *n-anillo abierto* al interior de un n-anillo cerrado.

Ahora, sea  $R$  un complejo simple. Notemos que  $R$  puede dividirse en componentes de diferentes dimensiones agrupando puntos que tengan el mismo tipo de vecindad regular. Así, sean  $C_2$ ,  $C_1$ , y  $C_0$  los conjuntos de los puntos no singulares, de los puntos triples, y de los vértices verdaderos de  $R$ , respectivamente. Entonces definimos una *2-componente* de  $R$  como una componente conexa de  $C_2$ , y de manera análoga definimos una *1-componente* y una *0-componente* de  $R$ . Notemos que  $C_0$  es un conjunto de puntos aislados, por lo que las 0-componentes de  $R$  serán singuletes (conjuntos de un punto) y por tanto 0-celdas. Sin embargo, para  $i > 0$ , tenemos que una  $i$ -componente de  $R$  no tiene que ser necesariamente una celda. Una 1-componente puede ser un círculo, y una 2-componente puede ser un  $n$ -anillo abierto, o una banda de Möbius, por ejemplo.

Decimos que un complejo simple es *celular* si toda  $i$ -componente es una celda abierta de dimensión  $i$ . Alternativamente, llamaremos un *complejo especial* a un complejo simple y celular. Por último, si una espina de una variedad es un complejo especial, diremos que es una *espina especial*. Veremos ahora dos teoremas que explican la importancia de las espinas especiales.

**Teorema 2.3** *Toda 3-variedad compacta, conexa y sin frontera tiene una espina especial.*

*Demostración.* Sea  $M$  una 3-variedad de este tipo y  $T$  una triangulación de  $M$ . Entonces, cada tetraedro  $T_i$  en  $T$  contiene una pieza  $X_i$  en la forma ilustrada en la siguiente figura, que puede definirse haciendo uso de la subdivisión baricéntrica de  $T$  ( $X_i$  se muestra sombreada).

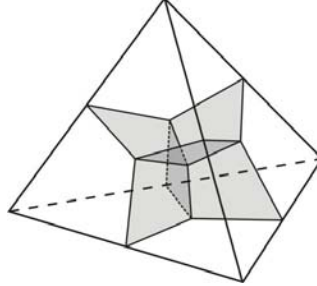


Figura 2.4.  $T_i$  y  $X_i$ .

Considerando la unión de todas las piezas  $X_i$ , obtenemos un complejo especial  $S'$  inmerso en  $M$ .

Veamos que en efecto  $S'$  es un complejo especial. Claramente  $S'$  es un complejo celular homogéneo. Observemos además que todo punto en  $S'$  tiene una vecindad de forma (a), (b) o (c), como listamos en la definición de complejo simple, por lo que  $S'$  es de hecho un complejo simple. Veamos entonces que  $S'$  es celular, es decir, que toda  $i$ -componente suya es una celda. Una 0-componente es un punto y por tanto una 0-celda. Una 1-componente es un segmento de recta que conecta los centros de dos tetraedros que comparten una cara, y es por tanto una 1-celda.

Veamos por último lo que ocurre con una 2-componente. Notemos que cada  $X_i$  está compuesto de seis deltoides o cometas, y que la triangulación  $T$  nos permite entender a  $M$  como un complejo simplicial. Sea pues  $a$  una arista de  $T$ . Entonces  $a$  es una arista de un número finito  $n$  de tetraedros de  $T$ , que rodean a  $a$  en orden cíclico. Sean  $T_1, \dots, T_n$  esos tetraedros, tomados en dicho orden. Entonces, cada  $T_i$  tiene un único deltoide  $Y_i \subseteq X_i$  que intersecta a  $a$ . Vemos entonces que la unión  $Y_1 \cup \dots \cup Y_n$  forma un disco cerrado  $D$ , que intersecta a  $a$  transversalmente, y del cual cada deltoide es un sector circular. De hecho, el centro de  $D$  es el punto medio de  $a$ . Obviamente  $\overset{\circ}{D}$  es una celda abierta, y además es una 2-componente de  $S'$ . Además, todas las 2-componentes de  $S'$  son de esta forma, de donde se concluye que  $S'$  es celular.

Así pues,  $S'$  es un complejo especial. Sin embargo,  $S'$  no es necesariamente una espina de  $M$ . Sea  $n$  el número de puntos en  $M$  correspondientes a vértices identificados de tetraedros en  $T$ . Entonces, vemos que  $M - S'$  es una unión de  $n$  cámaras o celdas tridimensionales abiertas  $B_1, \dots, B_n$ . Sea  $B$  una bola abierta contenida en  $M$ . Entonces, sin pérdida de generalidad, podemos suponer que  $B \subseteq B_1$ . Luego si  $n > 1$ , las bolas  $B_2, \dots, B_n$  no podrán colapsar a  $S'$ ,

por lo que  $M - B$  no podrá colapsar a  $S'$ . De esta forma  $S'$  es una espina de  $M$  únicamente en el caso en que  $n = 1$ .

Esta situación puede remediarse de la siguiente manera. Sea  $C^2$  una 2-celda simultáneamente en la frontera de dos cámaras  $B_i$  y  $B_j$ . Sea además  $x$  un punto triple en  $\partial C^2$ , y  $V$  una vecindad regular de  $x$ . Entonces podemos conectar a  $B_i$  y  $B_j$  por medio de la construcción descrita en la siguiente figura, reemplazando a  $V$ , ilustrada a la izquierda, con la vecindad  $V'$  ilustrada a la derecha.

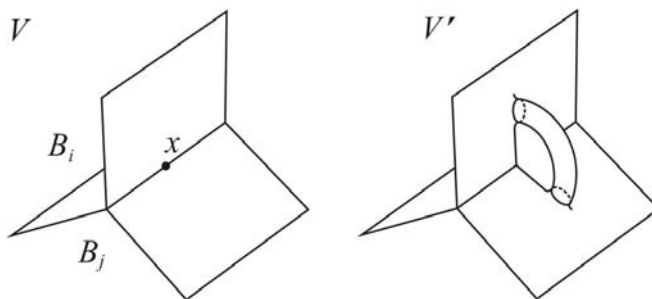


Figura 2.5. La vecindad  $V$  es reemplazada por la vecindad  $V'$ .

En efecto, dicha construcción implica conectar a las cámaras  $B_i$  y  $B_j$  por medio de la inserción de un túnel que permite pasar libremente de la una a la otra. De esta forma  $B_i$  y  $B_j$  dan lugar a una única celda abierta. Como el número de  $B_i$ 's es finito, y  $M$  es conexa, entonces podemos iterar este proceso hasta conectar a todos los  $B_i$ 's en una sola celda abierta. Notemos que el complejo  $S$  obtenido al final de este proceso sigue siendo especial. Además,  $M - S$  es una bola abierta tridimensional, lo que basta para afirmar que  $S$  es una espina de  $M$ . Así,  $S$  es una espina especial de  $M$ .  $\square$

**Teorema 2.4** *Si dos variedades compactas, conexas y sin frontera  $M_1$  y  $M_2$  tienen espinas especiales homeomorfas, entonces  $M_1$  y  $M_2$  son homeomorfas.*

*Demostración.* En el curso de la prueba utilizaremos la siguiente notación: Si  $B, A_1, \dots, A_n$  son subconjuntos de una variedad, denotaremos a la unión  $B \cup A_1 \cup \dots \cup A_n$  por  $B \cup \{A_i\}$ . Además recordemos que por vecindad regular nos referimos siempre a vecindades regulares abiertas.

Sean  $S_1$  y  $S_2$  espinas especiales homeomorfas de dos variedades  $M_1$  y  $M_2$ , y sean  $V_1$  y  $V_2$  vecindades regulares cerradas de  $S_1$  y  $S_2$  en  $M_1$  y  $M_2$ , respectivamente. Entonces, por el Teorema 2.1, se tiene que para probar que  $M_1$  y  $M_2$  son homeomorfas, basta ver que si  $\varphi$  es un homeomorfismo de  $S_1$  en  $S_2$ , entonces  $\varphi$  puede extenderse a un homeomorfismo  $\psi$  entre  $V_1$  y  $V_2$ .

Empecemos por notar que  $V_1$  puede descomponerse en bolas tridimensionales de la siguiente manera. Tomemos en  $M_1$  vecindades regulares disjuntas para cada vértice verdadero de  $S_1$ , y denotemos a tales vecindades por  $X_1, \dots, X_n$ . Ahora, tomemos en  $M_1 - \cup X_i$  vecindades regulares

disjuntas de lo que queda de las aristas de  $S_1$  en  $M_1 - \cup X_i$ , y denotémoslas por  $Y_1, \dots, Y_m$ . Por último, tomemos en  $(M_1 - \cup X_i) - \cup Y_j$  vecindades regulares disjuntas de lo que queda de las caras de  $S_1$  en  $(M_1 - \cup X_i) - \cup Y_j$ , y denotémoslas por  $Z_1, \dots, Z_l$ . Es claro que la clausura de cada  $X_i$ ,  $Y_j$  y  $Z_k$  es una bola cerrada en  $M_1$ . Además el conjunto de todas estas clausuras,  $\{\overline{X}_i, \overline{Y}_j, \overline{Z}_k\}$ , forma una descomposición celular para  $V_1$ , es decir, un complejo celular igual a  $V_1$ . Similarmente tendremos una descomposición  $\{\overline{X}'_i, \overline{Y}'_j, \overline{Z}'_k\}$  para  $V_2$ .

Veamos primero que  $\varphi$  puede extenderse a un homeomorfismo  $\varphi_1$  de  $S_1 \cup \{\overline{X}_i\}$  a  $S_2 \cup \{\overline{X}'_i\}$ . Sea  $x$  un vértice verdadero de  $S_1$ , y sean  $\overline{X}_i$  la bola que contiene a ése vértice, y  $\overline{X}'_i$  la bola que contiene al vértice  $\varphi(x)$  de  $S_2$ . Sean también  $U_1 = \overline{X}_i \cap S_1$  y  $U_2 = \overline{X}'_i \cap S_2$ . Entonces,  $U_1$  es una vecindad regular cerrada de  $x$  en  $S_1$ , y  $U_1 \cap \partial X_1$  es un grafo completo de orden 4 (un grafo de 4 vértices donde todo par de vértices está conectado por una arista, que es única). Similarmente ocurre en  $S_2$ . Además  $\varphi|_{U_1}: U_1 \rightarrow U_2$  es un homeomorfismo. Ahora, como el grafo completo de orden 4 tiene una única manera, salvo isotopía, de sumergirse en  $S^2$ ; entonces existe una única extensión de  $\varphi|_{U_1}: U_1 \rightarrow U_2$  a un homeomorfismo entre  $\overline{X}_i$  y  $\overline{X}'_i$ , salvo isotopía. Si consideramos para cada  $X_i$  una extensión de tal tipo, obtenemos un homeomorfismo  $\varphi_1$  de  $S_1 \cup \{\overline{X}_i\}$  a  $S_2 \cup \{\overline{X}'_i\}$ , que es una extensión de  $\varphi$ .

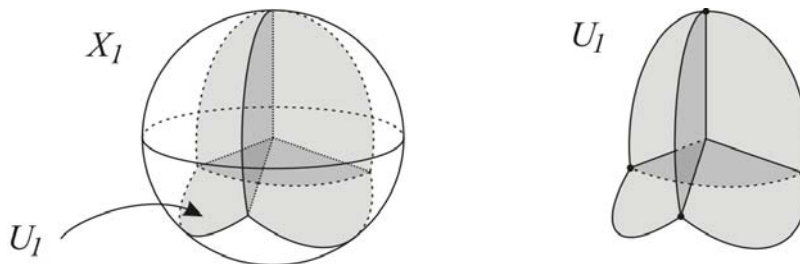


Figura 2.6.  $X_1$  y  $U_1$ .

Un procedimiento casi idéntico muestra que  $\varphi_1$  puede extenderse de manera única, salvo isotopía, a un homeomorfismo  $\varphi_2$  de  $S_1 \cup \{\overline{X}_i, \overline{Y}_j\}$  a  $S_2 \cup \{\overline{X}'_i, \overline{Y}'_j\}$ . Y similarmente  $\varphi_2$  puede extenderse de manera única, salvo isotopía, a un homeomorfismo  $\psi$  entre  $S_1 \cup \{\overline{X}_i, \overline{Y}_j, \overline{Z}_k\}$  y  $S_2 \cup \{\overline{X}'_i, \overline{Y}'_j, \overline{Z}'_k\}$ , es decir, entre  $V_1$  y  $V_2$ . Esto completa la demostración del teorema.  $\square$

## 2.2 Cicatrices

Sea  $\langle B^3, G, \epsilon \rangle$  un poliedro con caras identificadas. Entonces, al espacio  $\partial B^3 / E\varrho\epsilon$  lo llamamos *la cicatriz del poliedro*. Lo importante sobre las cicatrices es que, si un poliedro produce una 3-variedad, entonces su cicatriz es una espina de la misma, lo cual probaremos más adelante en esta sección. De hecho, toda espina de una 3-variedad, que sea un complejo bidimensional homogéneo, es la cicatriz de un poliedro que produce esa variedad. De esta forma, las cicatrices

de poliedros, y las espinas bidimensionales homogéneas, pueden pensarse como objetos equivalentes. Las espinas especiales, además, corresponderán a una clase particular de poliedros.

Notemos que la cicatriz producida por un poliedro siempre puede verse como un subespacio del espacio producido por el mismo, ya que  $\partial B^3/Eq\epsilon \subseteq B^3/Eq\epsilon$ . Notemos también que la cicatriz de un poliedro es un complejo celular bidimensional homogéneo. Cada par de caras del poliedro da lugar, al identificarse, a una 2-celda abierta o cara en la cicatriz. Similarmente, cada clase de  $n$  aristas de ciclo  $n$  en el poliedro da lugar a una 1-celda abierta o arista en la cicatriz; y, finalmente, cada clase de  $m$  vértices de orden  $m$  da lugar a una 0-celda o vértice en la cicatriz.

Además, las vecindades de los puntos de la cicatriz están determinadas por los ciclos de las aristas y los órdenes de los vértices. Si un punto está en el interior de una cara de la cicatriz, obviamente su vecindad regular cerrada en la misma será un disco cerrado. Si un punto  $x$  está en el interior de una arista de la cicatriz, y esa arista es producto de la identificación de  $n$  aristas de ciclo  $n$ , entonces la vecindad regular cerrada de  $x$  será un conjunto de  $n$  medios discos cerrados, identificados linealmente por sus diámetros. En particular, si  $x$  está en el interior de una arista proveniente de 2 aristas dobles (i.e. de ciclo 2), su vecindad regular será un disco. Por último, si  $x$  es un vértice de la cicatriz producido al identificar  $m$  vértices de orden  $m$ , su vecindad regular cerrada consistirá en una serie de sectores circulares cerrados, donde uno de los dos radios en la frontera de cada sector, o ambos, están identificados linealmente con otros radios semejantes, de manera que los centros de todos los sectores queden identificados en un mismo punto  $x$ . Los arcos de circunferencia de los sectores circulares forman, en este caso, un grafo que se puede sumergir en una 2-variedad compacta, conexa y sin frontera, dividiéndola en  $m$  discos abiertos. Tal 2-variedad será aquella cuyo cono es la vecindad de  $x$  en la pseudovariiedad producida por el poliedro. De esta forma, si el poliedro produce una 3-variedad, dicho grafo se podrá sumergir en  $S^2$ , es decir, será un grafo planar.

De esta manera podemos definir las 2-componentes, 1-componentes y 0-componentes de una cicatriz, y de hecho de un complejo celular homogéneo cualquiera, de manera análoga a como lo hicimos para los complejos simples. A las *2-componentes* las definimos como las componentes conexas del espacio de puntos cuyas vecindades son discos. A las *1-componentes* los definimos como los componentes conexos del espacio de puntos con vecindades construidas a partir de  $n$  medios discos, en la manera que ilustrábamos, con  $n \neq 2$ . Finalmente a las *0-componentes* las definimos como los puntos con cualquier otro tipo de vecindad. Decimos que una cicatriz es *celular* si toda  $i$ -componente es una celda abierta de dimensión  $i$ . De la discusión anterior se desprenden los dos lemas siguientes.

**Lema 2.5** *Una cicatriz es un complejo simple si y sólo si existe un poliedro que la produzca tal que los ciclos de todas sus aristas sean iguales a 2 o a 3, y los órdenes de sus vértices no sean mayores que 4.*

El lema se tiene porque las aristas de ciclos 2 y 3 producen puntos no singulares y puntos triples, respectivamente; mientras que los vértices de órdenes 2, 3 y 4 producen puntos no singulares, puntos triples, y vértices verdaderos, respectivamente. Con respecto a los vértices de orden 1, la inexistencia de aristas de ciclo 1 implica la inexistencia de dichos vértices. Por otro lado, es fácil ver que las aristas y vértices no contemplados en el lema producen puntos que no son singulares, ni triples, ni vértices verdaderos.

**Lema 2.6** *Una cicatriz es celular si y sólo si existe un poliedro que la produzca sin aristas dobles.*

Para ilustrar el Lema 2.6 veamos un ejemplo de cómo un poliedro que tenga aristas dobles puede tener una cicatriz que no sea celular. En la siguiente figura se muestran caras  $F_i$  y  $F_i^{-1}$  de un poliedro. Supongamos que las aristas  $a_1$  y  $a_2$  ilustradas son aristas dobles en el mismo ciclo, es decir, identificadas una con otra. Entonces  $F_i$  y  $F_i^{-1}$  producen al identificarse un anillo  $\mathring{A}$ . Suponiendo que no haya más aristas dobles adyacentes a  $F_i$  y  $F_i^{-1}$ , tenemos que  $A$  es una 2-componente de la cicatriz, por lo que esta última no es celular.

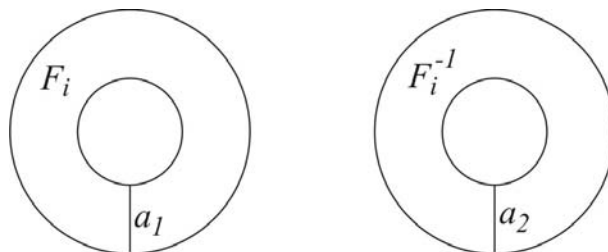


Figura 2.7. Caras que al identificarse producen un anillo.

Veamos ahora los teoremas siguientes, que relacionan a las espinas con las cicatrices.

**Teorema 2.7** *Si  $M$  es el espacio producido por un poliedro con caras identificadas,  $C$  la cicatriz de ese poliedro, y  $B$  una bola en  $M$ , entonces  $M - B \searrow C$ . En particular, si  $M$  es una 3-variedad, entonces  $C$  es una espina de  $M$ . Además, en este caso se tiene que*

- (a) *La cicatriz es una espina simple si y sólo si existe un poliedro que la produzca tal que los ciclos de todas sus aristas sean iguales a 2 o a 3, y los órdenes de sus vértices no mayores que 4.*
- (b) *La cicatriz es una espina especial si y sólo si existe un poliedro que la produzca sólo con aristas de ciclo 3 y vértices de orden 4.*



*Demostración.* Sea  $\langle B^3, G, \epsilon \rangle$  el poliedro que produce a  $M$ . Entonces, dada la celulación que  $G$  induce en  $\partial B^3$ , podemos considerar una triangulación  $T_1$  de  $\partial B^3$  que sea una subdivisión de esta celulación, y que sea coherente con la identificación de las caras. Es decir, que si dos caras  $F_i$  y  $F_i^{-1}$  están identificadas, y trianguladas por  $T_1$ , esa identificación envíe vértices en vértices y aristas en aristas. Ahora, consideremos la triangulación  $T_2$  de  $B^3$ , cuyos tetraedros consisten en los triángulos de  $T_1$  extendidos radialmente hasta el centro de  $B^3$ .

Sea  $T_2''$  la segunda subdivisión baricéntrica de  $T_2$ , y sea  $A$  el conjunto de tetraedros en  $T_2''$  que contienen puntos en la frontera de  $B^3$ . Entonces los tetraedros en  $T_2'' - A$  forman una bola cerrada con interior  $B$ . Ahora, sea  $B'$  una bola abierta arbitraria en  $M$ , entonces, sin pérdida de generalidad  $B'$  proviene de  $B$ , es decir  $B' = B/Eq\epsilon$ . Así pues, tenemos que  $(B^3 - B)/Eq\epsilon = M - B'$ . Además sabemos que  $\partial B^3/Eq\epsilon = C$ . Como  $(B^3 - B) \searrow \partial B^3$ , entonces  $M - B' \searrow C$ , por lo que  $C$  es una espina de  $M$ .

Las afirmaciones (a) y (b) se derivan trivialmente de los Lemas 2.4 y 2.5.  $\square$

**Teorema 2.8** *Si una espina de una 3-variedad compacta conexa orientable y sin frontera es un complejo bidimensional homogéneo, entonces dicha espina es la cicatriz de un poliedro que produce esa variedad.*

*Demostración.* A lo largo de esta demostración tendremos en mente que una relación entre dos conjuntos  $A$  y  $B$  es un subconjunto de  $A \times B$ . Los símbolos de contención y diferencia, aplicados a relaciones, se entenderán pues como contención y diferencia de conjuntos.

Del Corolario 2.2 se tiene que si una variedad compacta conexa orientable y sin frontera  $M$  tiene una espina  $S$ , entonces  $M - S$  es una bola abierta tridimensional  $B$ . Como  $S$  es un complejo bidimensional homogéneo, podemos considerar una triangulación  $T$  de  $S$ . Así, podemos considerar también una triangulación de  $M$ , cuyos tetraedros  $\Delta_1, \dots, \Delta_k$  son los triángulos en  $T''$  extendidos radialmente hasta el centro de  $B$ . Sean  $\Delta'_1, \dots, \Delta'_k$  tetraedros tridimensionales cerrados disjuntos en  $\mathbb{R}^3$ . Entonces,  $M$  puede verse como un espacio cociente  $\cup \Delta'_i / \sim$ , para cierta relación de equivalencia ( $\sim$ ) en la unión de los  $\Delta'_i$ .

Por otro lado, consideremos los conjuntos  $\Lambda_1, \dots, \Lambda_k$  definidos por  $\Lambda_i = \Delta_i \cap B$ . Entonces, existen subconjuntos  $\Lambda'_1 \subseteq \Delta'_1, \dots, \Lambda'_k \subseteq \Delta'_k$ , tales que  $B$  puede verse como un espacio cociente  $\cup \Lambda'_i / \simeq$ , donde ( $\simeq$ ) es la restricción de ( $\sim$ ) a la unión de los  $\Lambda'_i$ .

Ahora, si consideramos a  $B$  como inmersa en  $\mathbb{R}^3$ , y consideramos allí su clausura  $\bar{B}$ , tendremos que  $B$  tiene una triangulación natural inducida por  $\Lambda_1, \dots, \Lambda_k$ . Los elementos de esta triangulación son  $k$  tetraedros de  $\mathbb{R}^3$ , que puede pensarse, son los mismos tetraedros  $\Delta'_1, \dots, \Delta'_k$ . Además, esa triangulación es tal que  $\bar{B} = \cup \Delta_i / \approx$ , para cierta extensión  $\approx$  de  $\simeq$ , con  $(\simeq) \subset (\approx) \subset (\sim)$ . Consideremos ahora a los conjuntos  $D_i = \Delta_i \cap \partial \bar{B}$ . Vemos que para todo  $i$ ,  $\cup \partial D_i$  es un grafo inmerso en  $\partial \bar{B}$ , y que  $\overset{\circ}{D}_i$  es un disco. Así,  $\langle \bar{B}, \cup \partial D_i \rangle$  es una bola

celulada. Además,  $(\sim) - (\approx)$  es una relación en  $\partial\overline{B}$  que se puede ver como producida por un esquema de identificación  $\epsilon$  en las caras de  $\langle\overline{B}, \cup\partial D_i\rangle$  (i.e.  $[(\sim) - (\approx)] = Eq\epsilon$ ). De esta forma tenemos que

$$\overline{B}/[(\sim) - (\approx)] = [\cup\Delta_i/\approx]/[(\sim) - (\approx)] = \cup_i\Delta_i/\sim = M$$

De donde  $\langle\overline{B}, \cup\partial D_i\rangle$  bajo la relación  $(\sim) - (\approx)$  es un poliedro con caras identificadas para  $M$ . Como el espacio de identificación  $B/[(\sim) - (\approx)]$  es  $M - S$ , claramente  $\partial B/[(\sim) - (\approx)]$  es  $S$ , por lo que  $S$  es de hecho la cicatriz del poliedro.  $\square$

De los dos teoremas anteriores se obtiene que el conjunto de las cicatrices de una variedad es igual al conjunto de sus espinas bidimensionales homogéneas (es decir, espinas bidimensionales que sean complejos celulares homogéneos). También obtenemos el siguiente corolario.

**Corolario 2.9** *Sea  $M$  una 3-variedad compacta, conexa y con frontera, y sea  $S$  un subcomplejo de una celulación  $K$  de  $M$ . Entonces  $S$  es una espina especial de  $M$  si y sólo si  $S$  es la cicatriz de un poliedro que produzca a  $M$  sólo con aristas de ciclo 3 y vértices de orden 4.*

*Demostración.* Si  $S$  es una espina especial de  $M$ , entonces por el teorema anterior, es la cicatriz de un poliedro que la produce. En tal caso,  $S$  es una cicatriz y una espina especial, y por la afirmación (b) del Teorema 2.7,  $S$  es la cicatriz de algún poliedro sólo con aristas de ciclo 3 y vértices de orden 4. Inversamente, si  $S$  es la cicatriz de un poliedro de tal tipo, de nuevo por la afirmación (b) del Teorema 2.7,  $S$  es una espina especial de  $M$ .  $\square$

De ahora en adelante, a los poliedros que tengan solamente aristas de ciclo 3 y vértices de orden 4 los llamaremos *poliedros especiales*. Es importante anotar que lo que aquí llamaremos un poliedro especial difiere radicalmente de lo que en alguna literatura, como en [15], se llama un poliedro especial. El corolario anterior afirma entonces que las espinas especiales de las 3-variedades compactas, conexas, orientables y sin frontera pueden caracterizarse como las cicatrices de los poliedros especiales.

Por otro lado, a la cicatriz de un poliedro la llamaremos también la *espina producida* por dicho poliedro. Además, diremos que la cicatriz de un poliedro que produce una variedad es una *cicatriz de dicha variedad*. Para finalizar, el siguiente teorema afirma que la clase de los poliedros con caras identificadas que producen una misma espina especial determina una variedad unívocamente.

**Teorema 2.10** *Si dos poliedros con caras identificadas producen espinas especiales homeomorfas, entonces producen variedades homeomorfas.*

*Demostración.* Se sigue trivialmente de los Teoremas 2.7 y 2.4.  $\square$

# Capítulo 3

## Modificaciones sobre Poliedros

En este capítulo estudiaremos una serie de modificaciones que se pueden efectuar sobre un poliedro para obtener otro poliedro que produzca el mismo espacio cociente. En la primera sección veremos que el espacio cociente de un poliedro depende únicamente de la relación  $Eq\epsilon$  que el esquema de identificación  $\epsilon$  produce sobre la superficie del poliedro, y agruparemos en clases, que llamaremos de semejanza, a los poliedros que tengan la misma relación  $Eq\epsilon$  sobre sus superficies. Posteriormente definiremos la inserción y remoción de aristas dobles en un poliedro, y veremos que dos poliedros están en la misma clase de semejanza si y sólo si uno puede ser llevado al otro por medio de la inserción y remoción de aristas dobles (Teorema 3.2). Luego haremos un análisis de las clases de semejanza y probaremos un teorema que afirma que dada una 3-variedad compacta, conexa, orientable y sin frontera, y una espina bidimensional homogénea de esa variedad, entonces existe una única clase de semejanza tal que los poliedros en esa clase, y sólo ellos, producen a la vez dicha variedad y dicha espina (Teorema 3.4). Esto nos permitirá eventualmente identificar a las espinas especiales de las variedades orientables con los poliedros especiales (Corolario 3.6).

En las siete secciones siguientes definiremos varias modificaciones que se pueden hacer sobre poliedros sin afectar el espacio cociente. Dichas movidas permitirán, entre otras cosas, alterar los números de caras, aristas y vértices del poliedro, así como cambiar los ciclos y los órdenes de las aristas y los vértices. Para finalizar, veremos en la Sección 3.9 una última modificación que llamamos remoción de singularidades y que, a diferencia de todas las otras movidas estudiadas, sí altera el espacio cociente producido por el poliedro. La modificación sirve para, dado un poliedro arbitrario que produzca una pseudovariedad, obtener un poliedro que produzca una 3-variedad (Teorema 3.20).

### 3.1 Inserción y Remoción de Aristas Dobles

Ahora pasaremos a estudiar modificaciones que pueden hacerse sobre poliedros con caras identificadas de modo que el espacio que producen no se afecte. Empezaremos por mostrar una modificación que determina cuándo dos poliedros producen la misma relación de equivalencia  $Eq\epsilon$  en  $\partial B^3$ .

Notemos que dado un poliedro con caras identificadas  $\langle B^3, G, \epsilon \rangle$ , su espacio cociente está

determinado únicamente por la relación de equivalencia  $Eq\epsilon$ , y no por el grafo  $G$  o las relaciones en  $\epsilon$ . Esto significa que es posible que distintos poliedros produzcan la misma relación de equivalencia  $Eq\epsilon$  (y por ende el mismo espacio cociente). Si dos poliedros producen la misma relación de equivalencia (bajo isotopía) diremos que son *semejantes*. El siguiente teorema se deduce fácilmente.

**Teorema 3.1** *La semejanza entre poliedros es una relación de equivalencia. Además, poliedros semejantes producen el mismo espacio cociente y la misma cicatriz.*

Veremos ahora cómo obtener el conjunto de todos los poliedros semejantes a un poliedro determinado  $\langle B^3, G, \epsilon \rangle$ . Para ello definiremos una movida que nos permita pasar entre poliedros semejantes. La notación “:” se usará para adyacencia entre celdas. Sea  $\{a_1, a_2\}$  una clase de dos aristas dobles en un poliedro  $\langle B^3, G, \epsilon \rangle$ , y sean  $F_1$  y  $F_2$  las caras del poliedro tales que  $F_1 : a_1 : F_2$  y  $F_1^{-1} : a_2 : F_2^{-1}$ . Sea  $G' = G - (\overset{\circ}{a}_1 \cup \overset{\circ}{a}_2)$ . Además, si  $\epsilon = \{\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3, \dots, \epsilon_n\}$ , sea  $\delta = \{\epsilon_1 \cup \epsilon_2, \epsilon_3, \dots, \epsilon_n\}$ . Entonces, si  $G'$  es conexo,  $\langle B^3, G', \delta \rangle$  es un poliedro semejante a  $\langle B^3, G, \epsilon \rangle$ , y decimos que el primero se obtiene del segundo por la *remoción de una arista doble*. Inversamente definimos la *inserción de una arista doble*. Ahora veamos que la inserción y remoción de aristas dobles es una relación de equivalencia, y que sus clases son las mismas clases que produce la relación de semejanza.

**Teorema 3.2** *Dados dos poliedros con caras identificadas, uno de ellos se puede obtener del otro por inserción y remoción de aristas dobles si y sólo si ambos poliedros están en la misma clase de semejanza.*

*Demostración.* La implicación de izquierda a derecha se obtiene directamente de la definición de inserción y remoción de aristas dobles. Para la otra implicación, tenemos lo siguiente. Sean  $\langle B^3, G, \epsilon \rangle$  y  $\langle B^3, H, \eta \rangle$  los dos poliedros en la misma clase. Entonces, podemos considerar el grafo  $G \cup H$ . Si  $G \cup H$  es desconexo, podemos conectarlo mediante la inserción de una arista doble, y obtener un nuevo grafo  $J$ . Si  $G \cup H$  es conexo, tomemos a  $J$  definido simplemente como  $J = G \cup H$ . Entonces, como  $J$  es conexo,  $\langle B^3, J \rangle$  es una bola celular. Restringiendo la relación  $Eq\epsilon = Eq\eta$  a cada una de las caras de  $\langle B^3, J \rangle$  obtenemos relaciones  $\delta_1, \dots, \delta_n$ , tales que  $\delta$  es un esquema de identificación para  $\langle B^3, J \rangle$ . Así,  $\langle B^3, J, \delta \rangle$  es un poliedro con caras identificadas en la clase de  $\langle B^3, G, \epsilon \rangle$  y  $\langle B^3, H, \eta \rangle$ .

Veamos ahora que el conjunto  $\Gamma$  de todos los puntos  $x$  en  $\partial B^3$ , cuyas clases de equivalencia bajo  $Eq\epsilon$  tienen cardinal distinto de 2, está contenido en  $G \cap H$ . De la discusión del capítulo 2 sobre las formas de las vecindades de los puntos en las cicatrices, se desprende que los puntos en  $\Gamma$  no pueden tener vecindades homeomorfas a discos en la cicatriz, y por tanto deben pertenecer a  $G$ . Como  $Eq\epsilon = Eq\eta$ , tales puntos también deben pertenecer a  $H$ .

Por el mismo argumento,  $\Gamma$  está contenido en  $G \cap J$  y en  $H \cap J$ . Como  $G$  y  $H$  son subgrafos de  $J$ , concluimos que tanto  $\langle B^3, G, \epsilon \rangle$  como  $\langle B^3, H, \eta \rangle$  pueden obtenerse de  $\langle B^3, J, \delta \rangle$  por remoción de aristas dobles, con lo que se tiene el teorema.  $\square$

Consideremos ahora a  $B^3$  junto con la relación  $Eq\epsilon$  en  $\partial B^3$ , producida por algún poliedro fijo  $\langle B^3, G, \epsilon \rangle$ . Sea  $\Gamma$  definido como en la demostración del teorema anterior, es decir, como el conjunto de todos los puntos  $x$  en  $\partial B^3$  cuyas clases de equivalencia bajo  $Eq\epsilon$  tienen cardinal distinto de 2. A  $\Gamma$  lo llamamos el *grafo esencial* de la clase de semejanza  $\langle B^3, G, \epsilon \rangle$ . Como  $\Gamma$  se define a partir de la relación  $Eq\epsilon$ , que es igual para todos los poliedros en la clase de  $\langle B^3, G, \epsilon \rangle$ , es obvio que la definición no depende del representante de clase. Además, si  $\langle B^3, H, \eta \rangle$  es un poliedro arbitrario que induzca a  $Eq\epsilon$ , se desprende de lo visto en la Sección 2.2 que  $\Gamma$  es un subgrafo (topológico) de  $H$ , y que de hecho, es el subgrafo de  $H$  formado por la unión de las aristas y vértices en  $H$  con ciclos y órdenes distintos de 2. Notemos que eventualmente  $\Gamma$  puede ser vacío, aunque se puede probar que esto sólo ocurre en el caso de cierto poliedro para el espacio proyectivo.

**Teorema 3.3** *Sea  $\Gamma$  el grafo esencial de la clase de un poliedro  $\langle B^3, G, \epsilon \rangle$ ,  $\Gamma \neq \phi$ . Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes.*

- (a)  $\Gamma$  es conexo.
- (b) La cicatriz de  $\langle B^3, G, \epsilon \rangle$ , que es la misma cicatriz de cualquier otro poliedro en su clase, es celular.
- (c)  $\langle B^3, \Gamma \rangle$  es una bola celularada.

*Demostración.* La equivalencia entre (a) y (c) se tiene por definición de bola celularada. Veamos que (c) implica a (b). Recordemos que  $\Gamma$  es el subgrafo de  $G$  formado por la unión de las aristas y vértices de  $G$  con ciclos y órdenes distintos de 2. Entonces, como  $\langle B^3, \Gamma \rangle$  es una bola celularada, al remover todas las aristas dobles de  $\langle B^3, G, \epsilon \rangle$  obtenemos un poliedro  $\langle B^3, \Gamma, \gamma \rangle$  en la clase de semejanza de  $\langle B^3, G, \epsilon \rangle$ . Obviamente  $\langle B^3, \Gamma, \gamma \rangle$  no tiene aristas dobles, y por el Lema 2.6, su cicatriz, que es la misma cicatriz de  $\langle B^3, G, \epsilon \rangle$ , es celular.

Veamos ahora que (b) implica a (c). Sea  $C$  la cicatriz de  $\langle B^3, G, \epsilon \rangle$ . Entonces, si  $C$  es celular, por el Lema 2.6 tenemos que existe un poliedro  $\langle B^3, H, \eta \rangle$  sin aristas dobles que produce a  $C$ . De hecho, la construcción de la demostración del Teorema 2.8 nos permite construir a  $\langle B^3, H, \eta \rangle$  de manera que esté en la misma clase de semejanza que  $\langle B^3, G, \epsilon \rangle$ . Como  $\langle B^3, H, \eta \rangle$  no tiene aristas dobles, y como  $\Gamma$  es el subgrafo de  $H$  formado por la unión de las aristas y vértices en  $H$  con ciclos y órdenes distintos de 2, entonces  $\Gamma = H$ . Luego  $\Gamma$  es conexo y  $\langle B^3, \Gamma \rangle = \langle B^3, H \rangle$  es una bola celularada.  $\square$

Analizaremos ahora el caso en el que la clase de un poliedro  $\langle B^3, G, \epsilon \rangle$  tiene grafo esencial conexo no vacío  $\Gamma$ . En este caso  $\langle B^3, \Gamma \rangle$  es una bola celulada, y removiendo todas las aristas dobles de  $\langle B^3, G, \epsilon \rangle$ , obtenemos un poliedro  $\langle B^3, \Gamma, \gamma \rangle$  en la clase de semejanza de  $\langle B^3, G, \epsilon \rangle$ . Las relaciones  $\gamma_1, \dots, \gamma_m$  en  $\gamma$  serán de hecho las restricciones de  $Eq\epsilon$  a las caras de  $\langle B^3, \Gamma \rangle$ . A  $\langle B^3, \Gamma, \gamma \rangle$  lo llamamos *el poliedro mínimo de la clase de semejanza de  $\langle B^3, G, \epsilon \rangle$* , o poliedro mínimo asociado a  $\langle B^3, G, \epsilon \rangle$ .

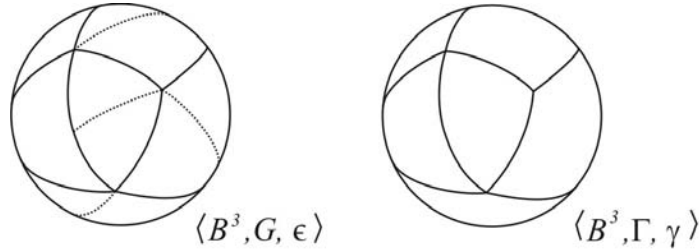


Figura 3.1. Un poliedro (izquierda) y su poliedro mínimo (derecha). Las aristas dobles se muestran punteadas.

La buena definición del poliedro mínimo se tiene por lo siguiente. Sea  $\langle B^3, H, \eta \rangle$  un poliedro arbitrario en la clase de  $\langle B^3, G, \epsilon \rangle$ , y sea  $\langle B^3, \Gamma, \gamma \rangle$  el poliedro producido por la remoción de todas las aristas dobles de  $\langle B^3, G, \epsilon \rangle$ . Como  $Eq\epsilon = Eq\eta$ , y como  $\Gamma$  es el subgrafo de  $H$  formado por la unión de las aristas y vértices de  $H$  con ciclos y órdenes distintos de 2, entonces el poliedro obtenido al remover todas las aristas dobles de  $\langle B^3, H, \eta \rangle$  es igualmente  $\langle B^3, \Gamma, \gamma \rangle$ .

Tenemos de esta forma que una clase de semejanza con grafo esencial conexo consiste en un poliedro mínimo para la clase que no contiene aristas dobles, y en una serie de poliedros que se obtienen de él por la inserción de aristas dobles. La siguiente figura ilustra la forma de una clase de semejanza con grafo esencial conexo.

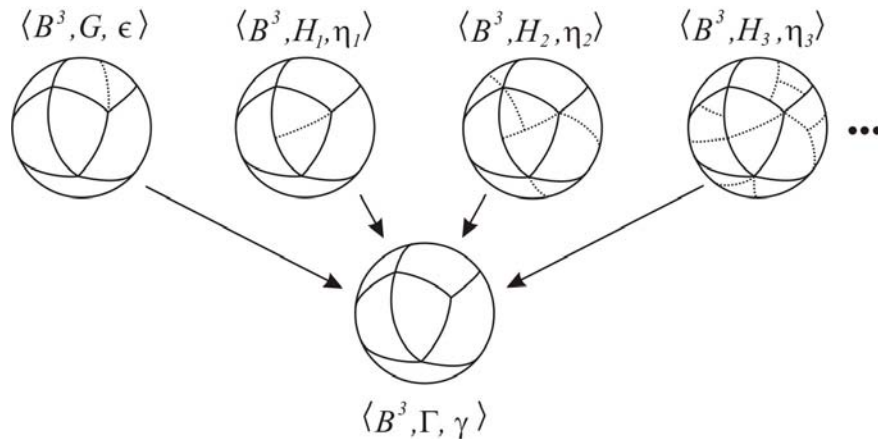


Figura 3.2. Clase de un poliedro  $\langle B^3, G, \epsilon \rangle$  con grafo esencial conexo.

Observemos que si  $\langle B^3, G, \epsilon \rangle$  no tiene aristas dobles, entonces  $G$  es el grafo esencial de la clase de  $\langle B^3, G, \epsilon \rangle$ . En tal caso, como  $G$  es conexo, tenemos de hecho que  $\langle B^3, G, \epsilon \rangle$  es el poliedro mínimo de su clase. Diremos entonces que  $\langle B^3, G, \epsilon \rangle$  es un *poliedro mínimo*.

Veamos ahora el caso en el que la clase de un poliedro  $\langle B^3, G, \epsilon \rangle$  tiene grafo esencial  $\Gamma$  desconexo o vacío. En este caso  $\langle B^3, \Gamma \rangle$  no es una bola celular y, si  $\Gamma \neq \phi$ , entonces  $\partial B^3 - \Gamma$  consiste en una unión disjunta de discos abiertos y  $k$ -anillos abiertos. Por esta razón, no podemos definir un poliedro mínimo  $\langle B^3, \Gamma, \gamma \rangle$  como lo hicimos antes. Sin embargo, podremos definir una serie de poliedros minimales.

Definamos la relación ( $\leq$ ) en el conjunto de poliedros con caras identificadas de la siguiente manera. Dados poliedros  $\langle B^3, G, \epsilon \rangle$  y  $\langle B^3, H, \eta \rangle$ , decimos que  $\langle B^3, G, \epsilon \rangle \leq \langle B^3, H, \eta \rangle$  si  $\langle B^3, G, \epsilon \rangle$  es igual a  $\langle B^3, H, \eta \rangle$  o se puede obtener de  $\langle B^3, H, \eta \rangle$  por remoción de aristas dobles. Claramente ( $\leq$ ) es una relación de orden. También es claro que en el caso examinado antes, en el que una clase de poliedros tiene grafo esencial conexo y no vacío; si  $\langle B^3, \Gamma, \gamma \rangle$  es el poliedro mínimo de dicha clase, entonces  $\langle B^3, \Gamma, \gamma \rangle \leq \langle B^3, H, \eta \rangle$  para todo  $\langle B^3, H, \eta \rangle$  en la clase.

A un poliedro que sea un elemento minimal en el conjunto de poliedros con caras identificadas, bajo la relación ( $\leq$ ), lo llamaremos un *poliedro minimal*. Claramente todo poliedro mínimo es minimal. Además, un poliedro  $\langle B^3, \Delta, \delta \rangle$  es minimal si y sólo si cumple con la propiedad de que si se le remueve cualquier arista doble, el grafo  $\Delta$ , o bien se desconecta, o desaparece.

Ahora, es claro que un poliedro arbitrario  $\langle B^3, G, \epsilon \rangle$  tiene un número finito de aristas dobles. Entonces, es claro que al remover dichas aristas sucesivamente, necesariamente el proceso terminará en el hallazgo de un poliedro minimal  $\langle B^3, \Delta_G, \delta_G \rangle$ , con  $\langle B^3, \Delta_G, \delta_G \rangle \leq \langle B^3, G, \epsilon \rangle$ . En este caso decimos que  $\langle B^3, \Delta_G, \delta_G \rangle$  es un *poliedro minimal para*  $\langle B^3, G, \epsilon \rangle$ . Vemos que todo poliedro minimal es el único poliedro minimal para sí mismo.

Resulta claro que en una clase con grafo esencial conexo y no vacío, el poliedro mínimo es el único poliedro minimal para todos los poliedros en su clase. Notemos, sin embargo, que en una clase con grafo esencial desconexo o vacío, un poliedro  $\langle B^3, G, \epsilon \rangle$  puede tener varios poliedros minimales. Además, habrá varios poliedros minimales en la clase, y habrá poliedros que no tengan ningún poliedro minimal en común (por ejemplo, los poliedros minimales en sí). Tenemos así que una clase de semejanza con grafo esencial desconexo o vacío, consiste en un conjunto de poliedros minimales, unido a un conjunto de poliedros "mayores" obtenidos de los minimales por inserción de aristas dobles. La siguiente figura ilustra la forma de una de dichas clases. Notemos que como  $\langle B^3, \Gamma, \gamma \rangle$  no tiene grafo conexo, no es un poliedro y por tanto no pertenece a la clase.

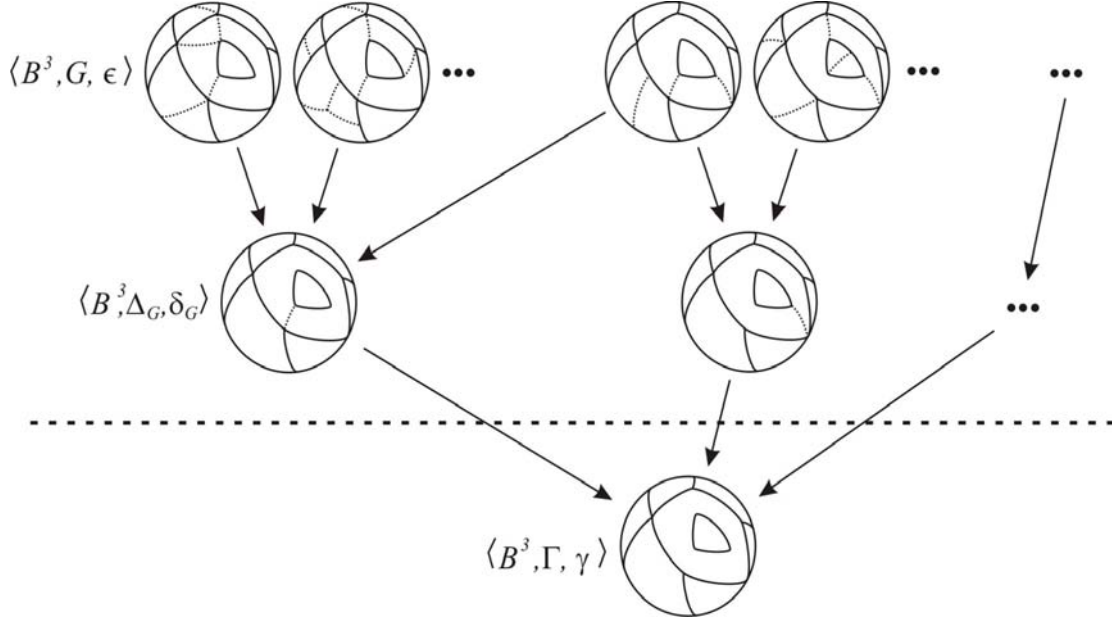


Figura 3.3 Clase de un poliedro  $\langle B^3, G, \epsilon \rangle$  con grafo esencial desconexo. La clase consiste en los poliedros por encima de la línea punteada.

**Teorema 3.4** Sean  $M$  una 3-variedad compacta, conexa, orientable y sin frontera, y  $S$  una espina bidimensional homogénea de  $M$ . Entonces, existe una única clase de semejanza que produce tanto a  $M$  como a  $S$ .

*Demostración.* La prueba se basa en la demostración del Teorema 2.8. De este teorema sabemos que  $S$  es la cicatriz de un poliedro con caras identificadas que produce a  $M$ . Observemos que dada una triangulación  $T$  de  $S$ , la construcción de ese poliedro, tal y como se hizo en la demostración del teorema, es única; por lo que podemos denotar a dicho poliedro por  $\langle B^3, G_T, \epsilon_T \rangle$ .

Veamos que los poliedros obtenidos de diferentes triangulaciones por este método son semejantes. Consideremos dos triangulaciones  $P$  y  $Q$  de  $S$ , y tomemos una triangulación más,  $R$ , que sea una subdivisión común de  $P$  y  $Q$ . Entonces  $\langle B^3, G_R, \epsilon_R \rangle$  puede obtenerse tanto de  $\langle B^3, G_P, \epsilon_P \rangle$  como de  $\langle B^3, G_Q, \epsilon_Q \rangle$  por inserción de aristas dobles, por lo que  $\langle B^3, G_P, \epsilon_P \rangle$  y  $\langle B^3, G_Q, \epsilon_Q \rangle$  son semejantes.

Ahora, sea  $\langle B^3, H, \eta \rangle$  un poliedro arbitrario que produzca a  $M$  y a  $S$ . Veamos que  $\langle B^3, H, \eta \rangle$  es semejante a  $\langle B^3, G_T, \epsilon_T \rangle$  para cierta triangulación  $T$  de  $S$ . Mediante la inserción de aristas dobles en  $\langle B^3, H, \eta \rangle$  puede obtenerse un poliedro  $\langle B^3, H', \eta' \rangle$  cuyas caras sean todas triangulares. Claramente  $H'$  induce una triangulación  $T_0$  en  $S$ , y es fácil ver que  $\langle B^3, H', \eta' \rangle = \langle B^3, G_{T_0}, \epsilon_{T_0} \rangle$ . Entonces  $T_0$  es una triangulación de  $S$  tal que  $\langle B^3, H, \eta \rangle$  es semejante a  $\langle B^3, G_{T_0}, \epsilon_{T_0} \rangle$ .



De esta forma tenemos que si  $T$  es una triangulación de  $S$ , todos los poliedros que producen a  $M$  y a  $S$  son semejantes a  $\langle B^3, G_T, \epsilon_T \rangle$ . Por otro lado, sabemos que todo poliedro semejante a  $\langle B^3, G_T, \epsilon_T \rangle$  produce a  $M$  y a  $S$ , lo cual concluye la demostración del teorema.  $\square$

Este teorema nos permite construir una relación biyectiva entre las clases de semejanza de los poliedros con caras identificadas que producen variedades, y los pares de la forma  $(M, S)$ , donde  $M$  es una variedad, y  $S$  una espina de  $M$ . Los poliedros de cada clase, y únicamente ellos, producen el par  $(M, S)$  que corresponde a dicha clase según la relación biyectiva. Ahora, recordemos que una espina se dice especial si es un simple y celular (Sección 2.1) y que un poliedro se dice especial si sólo tiene aristas de ciclo 3 y vértices de orden 4 (Sección 2.2). El siguiente teorema es un corolario del anterior.

**Teorema 3.5** *Sean  $M$  una 3-variedad compacta, conexa, orientable y sin frontera, y  $S$  una espina especial de  $M$ . Entonces, la clase de semejanza que produce a  $M$  y a  $S$  tiene grafo esencial conexo, y su poliedro mínimo es especial.*

*Demostración.* Del Corolario 2.9 se tiene que existe un poliedro especial  $\langle B^3, G, \epsilon \rangle$  que produce a  $M$  y a  $S$ . Como los poliedros especiales no tienen aristas dobles, entonces  $G$ , que es conexo, es el grafo esencial de la clase de  $\langle B^3, G, \epsilon \rangle$ . De esta forma se tiene además que  $\langle B^3, G, \epsilon \rangle$ , que es especial, es el poliedro mínimo de su clase.  $\square$

El siguiente corolario nos permite identificar a las espinas especiales de las variedades orientables con los poliedros especiales.

**Corolario 3.6** *Si  $S$  es una espina especial (de alguna 3-variedad compacta, conexa, orientable y sin frontera), entonces existe un único poliedro especial que produce a  $S$ .*

*Demostración.* Del Teorema 2.4 se tiene que la 3-variedad  $M$  de la cual  $S$  es una espina está unívocamente determinada por  $S$ . Por el Teorema 3.4, el par  $(M, S)$  es producido por una única clase de poliedros, y por el Teorema anterior, esa clase tiene un poliedro mínimo, que es especial. Claramente este poliedro mínimo es el único poliedro especial en su clase, dado que los poliedros especiales no tienen aristas dobles. Con ello se obtiene el corolario.  $\square$

## 3.2 Cerramiento de Mariposas

Veamos ahora otro movimiento que puede hacerse entre poliedros sin alterar el espacio cociente. En este caso, sin embargo, la cicatriz sí es alterada. Sea  $\langle B^3, G, \epsilon \rangle$  un poliedro con una arista de ciclo 1 entre dos caras  $F$  y  $F^{-1}$ . A la pareja  $\{F, F^{-1}\}$  la llamamos una *mariposa*. Ahora consideremos la relación  $\epsilon_i$  que indica cómo deben pegarse  $F$  y  $F^{-1}$ . Si  $F \cup F^{-1}$  es homeomorfo a

un disco cerrado, entonces el espacio  $B^3/\epsilon_i$  es una bola. Más aún, si  $G'$  es el grafo inducido por  $G$  en  $\partial(B^3/\epsilon_i)$ , y si  $\delta_1, \dots, \widehat{\delta_i}, \dots, \delta_n$  (el circunflejo denota omisión) son las relaciones inducidas por  $\epsilon_1, \dots, \widehat{\epsilon_i}, \dots, \epsilon_n$  en  $\partial(B^3/\epsilon_i)$ , entonces  $\langle B^3/\epsilon_i, G', \delta \rangle$  es claramente un poliedro con caras identificadas, cuyo espacio de identificación coincide con el de  $\langle B^3, G, \epsilon \rangle$ . Decimos entonces que  $\langle B^3/\epsilon_i, G', \delta \rangle$  se obtiene de  $\langle B^3, G, \epsilon \rangle$  al cerrar la mariposa  $\{F, F^{-1}\}$ .

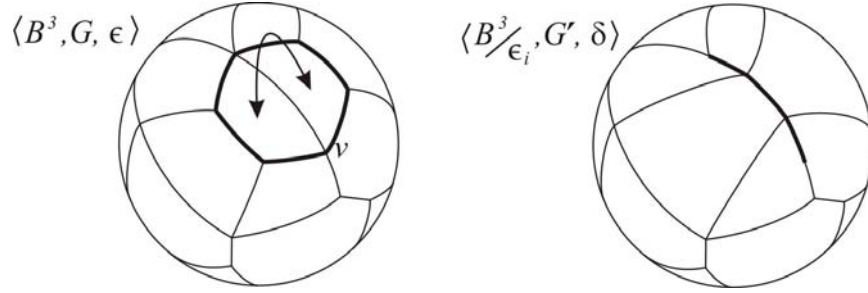


Figura 3.4.  $\langle B^3/\epsilon_i, G', \delta \rangle$  se obtiene de  $\langle B^3, G, \epsilon \rangle$  al cerrar una mariposa.

El siguiente teorema es claro.

**Teorema 3.7** *Si un poliedro con caras identificadas se obtiene de otro al cerrar una mariposa, ambos poliedros producen el mismo espacio cociente.*

Observemos que cerrar una mariposa produce una alteración en la cicatriz del poliedro, que consiste en la remoción de la celda procedente de  $F$  y  $F^{-1}$ . Esta celda tiene una arista de la cicatriz que es únicamente adyacente a ella, y que procedía de la arista de ciclo 1 en el poliedro. Dicho de otra forma, si  $C_1$  es la cicatriz de  $\langle B^3, G, \epsilon \rangle$  y  $C_2$  la de  $\langle B^3/\epsilon_i, G', \delta \rangle$ , entonces la celda  $\sigma^2$  de  $C_1$  proveniente de  $F$  y  $F^{-1}$  es principal, y la celda  $\rho^1$  proveniente de la arista de ciclo 1 entre  $F$  y  $F^{-1}$  es una cara libre de  $\sigma$  (ver Sección 2.1). Así,  $C_1 \searrow C_2 = C_1 - (\overset{\circ}{\sigma} \cup \overset{\circ}{\rho})$ , por lo que  $C_2$  se obtiene de  $C_1$  por un colapso elemental.

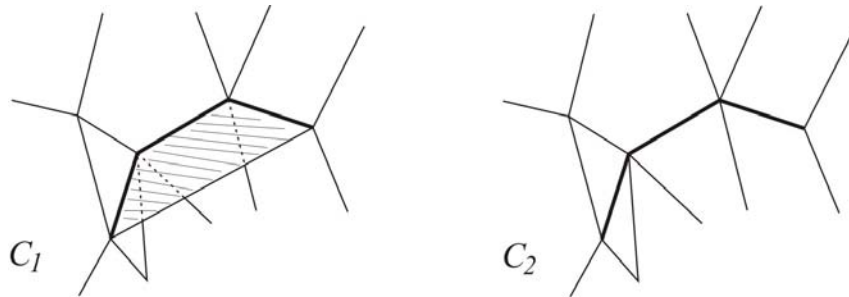


Figura 3.5.  $C_2$  se obtiene de  $C_1$  por un colapso elemental.

Si consideremos la equivalencia establecida en el Teorema 3.4, obtenemos también un recíproco del teorema anterior. Introduciremos primero la siguiente notación. Sean  $X_1$  y  $X_2$  complejos celulares, no necesariamente de la misma dimensión, con  $X_1 \supseteq X_2$ . Sean  $P$  y  $Q$

triangulaciones de  $X_1$  y  $X_2$  tales que  $P$  restringido a  $X_2$  sea igual a  $Q$ . Entonces diremos que  $(P, Q)$  es una triangulación de  $(X_1, X_2)$ .

Ahora, sean  $C_1$  y  $C_2$  espinas bidimensionales homogéneas de una 3-variedad compacta, conexa, orientable y sin frontera  $M$ , y supongamos que  $C_2$  se obtiene de  $C_1$  por un colapso elemental. Sea  $(P, Q)$  una triangulación de  $(C_1, C_2)$ . Entonces es claro que el poliedro obtenido de  $C_2$  mediante el proceso de la demostración del Teorema 2.8, es el resultado de cerrar una mariposa en el obtenido de  $C_1$  mediante el mismo proceso. Tenemos así el siguiente teorema.

**Teorema 3.8** *Sean  $C_1$  y  $C_2$  espinas bidimensionales homogéneas de una 3-variedad compacta, conexa, orientable y sin frontera  $M$ . Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes.*

- (a)  $C_2$  se obtiene de  $C_1$  por un colapso elemental.
- (b) Existe un poliedro en la clase de semejanza asociada a  $(M, C_2)$  que se obtiene de un poliedro en la clase asociada a  $(M, C_1)$  al cerrar una mariposa.

### 3.3 Cortar y Pegar

Llamamos un *circuito cerrado de aristas* a un ciclo en  $G$ , es decir, a una unión de aristas que sea imagen de  $S^1$  bajo una función continua. Dados un poliedro  $\langle B^3, G, \epsilon \rangle$  y un circuito cerrado de aristas  $\gamma$  que sea simple (esto es, homeomorfo a  $S^1$ ), podemos considerar una superficie  $F$  homeomorfa a un disco cerrado tal que  $\overset{\circ}{F} = F \cap \overset{\circ}{B^3}$  y  $\partial F = F \cap \partial B^3 = \gamma$ . A la superficie  $F$  la llamamos el *disco expandido por  $\gamma$* . Entonces, dados  $\gamma$  y  $F$  de esta forma, podemos partir a la bola  $B^3$  por  $F$ , generando dos copias  $F_0$  y  $F_0^{-1}$  de  $F$ , y una relación  $\epsilon_0$  que identifique a los puntos de  $F_0$  y  $F_0^{-1}$  provenientes de un mismo punto original en  $F$ . A las dos partes obtenidas al partir a  $B^3$  de esta forma las llamaremos por ahora  $B_1^3$  y  $B_2^3$ .

Por otro lado, si  $\langle B^3, G, \epsilon \rangle$  tiene un par de caras a identificar  $F_i$  y  $F_i^{-1}$  que han quedado separadas, una en  $B_1^3$  y otra en  $B_2^3$ , podemos considerar el espacio  $B_1^3 \cup_{\epsilon_i} B_2^3$  que es homeomorfo a  $B^3$ . Este espacio contiene un grafo  $G'$ , inducido por  $G$ , que divide a su frontera en las caras  $F_0, F_0^{-1}, F_1, F_1^{-1}, \dots, \widehat{F}_i, \widehat{F}_i^{-1}, \dots, F_n, F_n^{-1}$ , donde  $F_1, F_1^{-1}, \dots, F_i, F_i^{-1}, \dots, F_n, F_n^{-1}$  son las caras originales de  $\langle B^3, G \rangle$ . Así pues,  $\langle B_1^3 \cup_{\epsilon_i} B_2^3, G' \rangle$  es una bola celular. Además, si tomamos las relaciones  $\{\epsilon_0, \epsilon_1, \dots, \widehat{\epsilon}_i, \dots, \epsilon_n\} := \delta$  entre dichas caras, tendremos que  $\langle B_1^3 \cup_{\epsilon_i} B_2^3, G', \delta \rangle$  es un poliedro con caras identificadas, que claramente produce el mismo espacio cociente que  $\langle B^3, G, \epsilon \rangle$ . Decimos entonces que  $\langle B_1^3 \cup_{\epsilon_i} B_2^3, G', \delta \rangle$  se obtiene de  $\langle B^3, G, \epsilon \rangle$  al *cortar por  $F$  y pegar por  $F_i$* .

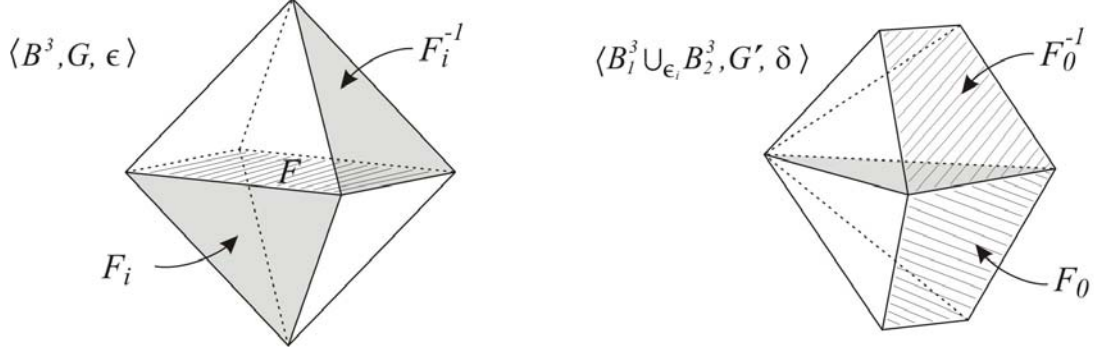


Figura 3.6.  $\langle B_1^3 \cup_{\epsilon_i} B_2^3, G', \delta \rangle$  se obtiene de  $\langle B^3, G, \epsilon \rangle$  al cortar por  $F$  y pegar por  $F_i$ .

El siguiente teorema es claro.

**Teorema 3.9** *Si un poliedro con caras identificadas se obtiene de otro al cortar por una cara y pegar por otra, ambos poliedros producen el mismo espacio cociente.*

Vemos que cortar por  $F$  y pegar por  $F_i$  produce una alteración en la cicatriz del poliedro que consiste en la remoción de la membrana o celda  $F_i$ , procedente de  $F_i$  y  $F_i^{-1}$ , y la posterior inserción de la celda  $F$ .

### 3.4 Reducción de Caras

El proceso de cortar y pegar puede usarse de para disminuir el número de caras y aristas de un poliedro, pero aumentando el ciclo de algunas aristas. A continuación describiremos cómo hacerlo.

Sea  $\{a_1, \dots, a_n\}$  un conjunto de  $n$  aristas de ciclo  $n$  en un poliedro con caras identificadas  $\langle B^3, G, \epsilon \rangle$ , y sean  $F_1, \dots, F_n$  caras distintas de dicho poliedro tales que

$$F_1 : a_1 : F_2^{-1} \quad , \quad F_2 : a_2 : F_3^{-1} \quad , \dots \quad , \quad F_{n-1} : a_{n-1} : F_n^{-1} \quad , \quad F_n : a_n : F_1^{-1}$$

Supongamos que los conjuntos  $F_1 \cup F_2^{-1}$ ,  $\dots$ ,  $F_n \cup F_1^{-1}$  son todos homeomorfos a discos cerrados bidimensionales, y consideremos los circuitos  $\gamma_1 = \partial(F_1 \cup F_2^{-1})$ ,  $\dots$ ,  $\gamma_{n-1} = \partial(F_{n-1} \cup F_n^{-1})$ . Entonces, si cortamos por los discos expandidos por  $\gamma_1, \dots, \gamma_{n-1}$ , creando nuevas caras  $F_{\gamma_1}, F_{\gamma_2}^{-1}, \dots, F_{\gamma_{n-1}}, F_{\gamma_{n-1}}^{-1}$ , y luego pegamos a  $F_1, \dots, F_n$  con sus respectivas parejas, obtendremos un nuevo poliedro  $\langle B^3, H, \eta \rangle$ . Decimos entonces que  $\langle B^3, H, \eta \rangle$  se obtiene de  $\langle B^3, G, \epsilon \rangle$  por una *reducción de caras sobre la arista  $a_n$* . Notemos que  $a_n$  se distingue de las otras aristas en su ciclo por el hecho de que es la única para la cual no tomamos un circuito  $\gamma_n$  alrededor de la unión de sus caras adyacentes  $F_n \cup F_1^{-1}$ .

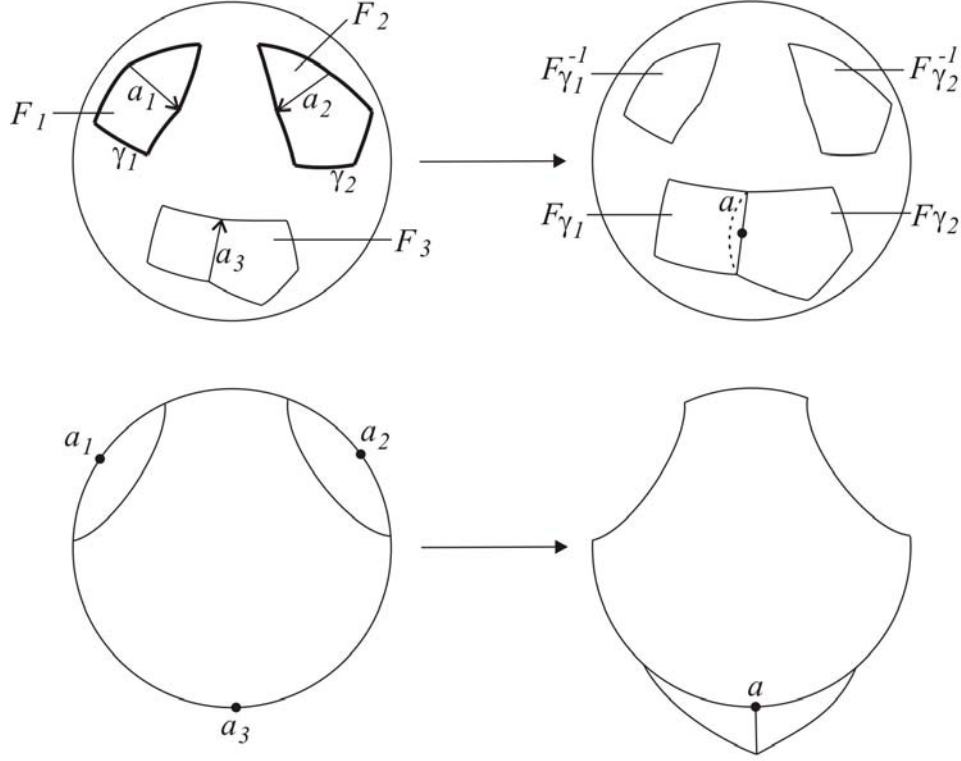


Figura 3.7 Proceso de reducción de caras sobre una arista  $a_3$  de ciclo 3 (arriba), y esquema bidimensional del mismo proceso (abajo).

**Teorema 3.10** Si un poliedro  $\langle B^3, H, \eta \rangle$  se obtiene de otro poliedro  $\langle B^3, G, \epsilon \rangle$  por una reducción de caras sobre una arista  $a$ , entonces ambos poliedros tienen el mismo espacio cociente. Además,  $\langle B^3, H, \eta \rangle$  tiene, en comparación con  $\langle B^3, G, \epsilon \rangle$ , un par de caras menos y una clase de aristas menos.

*Demostración.* El proceso de efectuar una reducción de caras sobre  $a$  consiste en cortar y pegar  $n - 1$  veces, y finalmente cerrar una mariposa. El hecho de que  $\langle B^3, H, \eta \rangle$  tenga un par de caras y una clase de aristas menos que  $\langle B^3, G, \epsilon \rangle$  proviene de la definición de la reducción.  $\square$

Notemos que al efectuar una reducción de caras, aunque los números de caras y de ciclos de aristas se reducen en 1, todas las aristas adyacentes a  $F_{\gamma_1}, F_{\gamma_2}^{-1}, \dots, F_{\gamma_{n-1}}, F_{\gamma_{n-1}}^{-1}$  incrementan su ciclo en 1. Cabe decir también que esta reducción puede definirse en contextos un poco más generales, pero hacerlo es complicado teóricamente y no proporciona beneficios razonables.

Vemos también que la reducción de caras produce una alteración en la cicatriz del poliedro. En nuestro caso, si  $\tilde{F}_i$  es la celda de la cicatriz obtenida al pegar a  $F_i$  con  $F_i^{-1}$ ,  $i \in \{1, \dots, n\}$ ; la alteración consiste en la remoción de las celdas  $\tilde{F}_1, \dots, \tilde{F}_n$ , y la inserción de los discos expandidos por  $\gamma_1, \dots, \gamma_{n-1}$ .

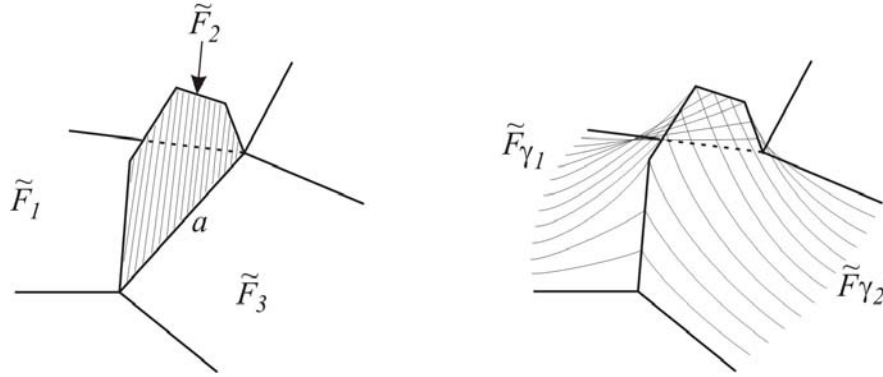


Figura 3.8 Efecto sobre la cicatriz de la reducción de caras ilustrada en la Figura 3.7. Los discos expandidos por  $\gamma_1$  y  $\gamma_2$  han sido nombrados  $\tilde{F}_{\gamma_1}$  y  $\tilde{F}_{\gamma_2}$ , respectivamente.

### 3.5 Cortar y Pegar Pequeños Trozos

Dado un poliedro, por medio de la inserción de aristas dobles podemos fraccionar sus caras en caras más pequeñas. Así, al ejecutar la técnica de cortar, no es necesario que el corte sea a través del disco expandido por un circuito de aristas originales del poliedro, sino que también pueden utilizarse las nuevas aristas dobles insertadas. Igualmente, al ejecutar la técnica de pegar, no es necesario pegar por una cara original del poliedro, sino que podemos pegar por una de las caras más pequeñas creadas tras la inserción de las aristas dobles.

Sea  $\langle B^3, G, \epsilon \rangle$  un poliedro en el que hemos insertado aristas dobles, y luego ejecutado la técnica de cortar y pegar para obtener un nuevo poliedro  $\langle B^3, H, \eta \rangle$ . El corte, por supuesto, es realizado por el disco expandido por un circuito de aristas. Entonces, si ese circuito contiene alguna de las nuevas aristas dobles insertadas, decimos que  $\langle B^3, H, \eta \rangle$  se obtiene de  $\langle B^3, G, \epsilon \rangle$  al *cortar y pegar pequeños trozos*. Es claro que este proceso no altera el espacio producido por el poliedro, dado que consiste en la sucesión de dos de los procedimientos que ya hemos visto. En las secciones siguientes veremos diversos ejemplos de poliedros obtenidos de otros al cortar y pegar pequeños trozos.

### 3.6 Reducción de Ciclo

Introduzcamos ahora la siguiente definición. Si en un poliedro,  $n$  aristas de ciclo  $n$  se identifican para crear una arista  $a$  en su espacio de identificación, convendremos en llamar a  $a$  una *arista identificada de ciclo  $n$* . Tal como a las aristas comunes, a las aristas identificadas de ciclos 2 y 3 las llamaremos *dobles* y *triples* respectivamente. Análogamente tendremos también *vértices identificados de orden  $k$* . Debemos ser cuidadosos de no confundir las aristas y vértices de un poliedro con sus aristas identificadas y vértices identificados.

Ahora, dado un poliedro, el proceso de cortar y pegar pequeños trozos puede usarse para reducir el ciclo de una arista identificada  $a$ , incrementando el número de caras y aristas del poliedro.

La manera de hacerlo se ilustra en la Figura 3.9. Consideremos tres aristas consecutivas  $a_1$ ,  $a_2$  y  $a_3$  en el ciclo de una arista identificada  $a$  (1). Ahora, tomemos una de las caras adyacentes a  $a_2$  (en gris claro) e insertemos en su interior una arista doble  $b_1$ , con su respectivo par  $b_2$ , de forma que los vértices de  $b_1$  sean los mismos de  $a_2$ . Repitamos el mismo proceso en la otra cara adyacente a  $a_2$  (en gris oscuro), obteniendo similarmente aristas  $b'_1$  y  $b'_2$  (2). Con esto, podemos cortar una cuña esférica, con diámetro  $a_2$ , a través de la lúnula acotada por  $b_1$  y  $b'_1$ , y cuyo interior está en el interior del poliedro (3). Llamemos  $F_1$  y  $F_2$  a las dos caras de la cuña. Entonces, podemos proceder a pegar de nuevo la cuña al poliedro soldando por  $F_1$  (4). Finalmente, dado que, adyacentes a las copias de la lúnula, han quedado dos aristas dobles correspondidas  $c_1$  y  $c_2$ ; podemos eliminar éstas para fundir las caras procedentes de la lúnula (sombreadas) con las caras al otro lado de  $c_1$  y  $c_2$  (5).

El resultado de este proceso es la creación de un nuevo par de caras ( $F_2$ ) y de una nueva arista identificada triple (i.e. de ciclo 3), producto de la identificación de las aristas que hemos llamado  $d_1$ ,  $d_2$  y  $d_3$ . También se tiene que el ciclo de aristas triples  $a_1 \mapsto a_2 \mapsto a_3 \mapsto a_1$  ha desaparecido y ha sido reemplazado por un ciclo doble  $\tilde{a}_1 \mapsto a_3 \mapsto \tilde{a}_1$ . De hecho el ciclo  $\tilde{a}_1 \mapsto a_3 \mapsto \tilde{a}_1$  produce la misma arista identificada  $a$  que antes era producida por  $a_1 \mapsto a_2 \mapsto a_3 \mapsto a_1$ , y así, el ciclo de  $a$  se ha reducido en 1. Cabe decir que aunque técnicamente  $a_1$  y  $\tilde{a}_1$  no son la misma arista, en la práctica convendrá pensar en ellas como la misma, y entender que el ciclo de  $a$  se ha reducido en 1 mediante la desaparición de la arista  $a_2$ .

A este proceso lo llamamos una *reducción de ciclo sobre  $a$* , y es claro que los poliedros que resultan de ella producen el mismo espacio cociente que el poliedro original.

**Teorema 3.11** *Si un poliedro con caras identificadas se obtiene de otro por una reducción de ciclo, entonces ambos poliedros producen el mismo espacio cociente.*

*Demostración.* El proceso de reducción de ciclo consiste en una inserción de aristas dobles, seguida de una operación de cortar y pegar, y luego de una eliminación de aristas dobles. También podemos decir que el proceso consiste en una operación de cortar y pegar pequeños trozos, seguida de una remoción de aristas dobles.  $\square$

En la Figura 3.9, la transición directa de (1) a (4) provee un método rápido para ejecutar la reducción. Puede verse que es posible revertir cualquier reducción de ciclo por medio de una reducción de caras sobre la arista que en la figura hemos llamado  $d_2$ . El recíproco de esta afirmación no es cierto, pues no toda reducción de caras es revertible por medio una reducción

de ciclo. Sin embargo, nos abstendremos de profundizar en estos hechos porque se salen de los intereses del presente trabajo.

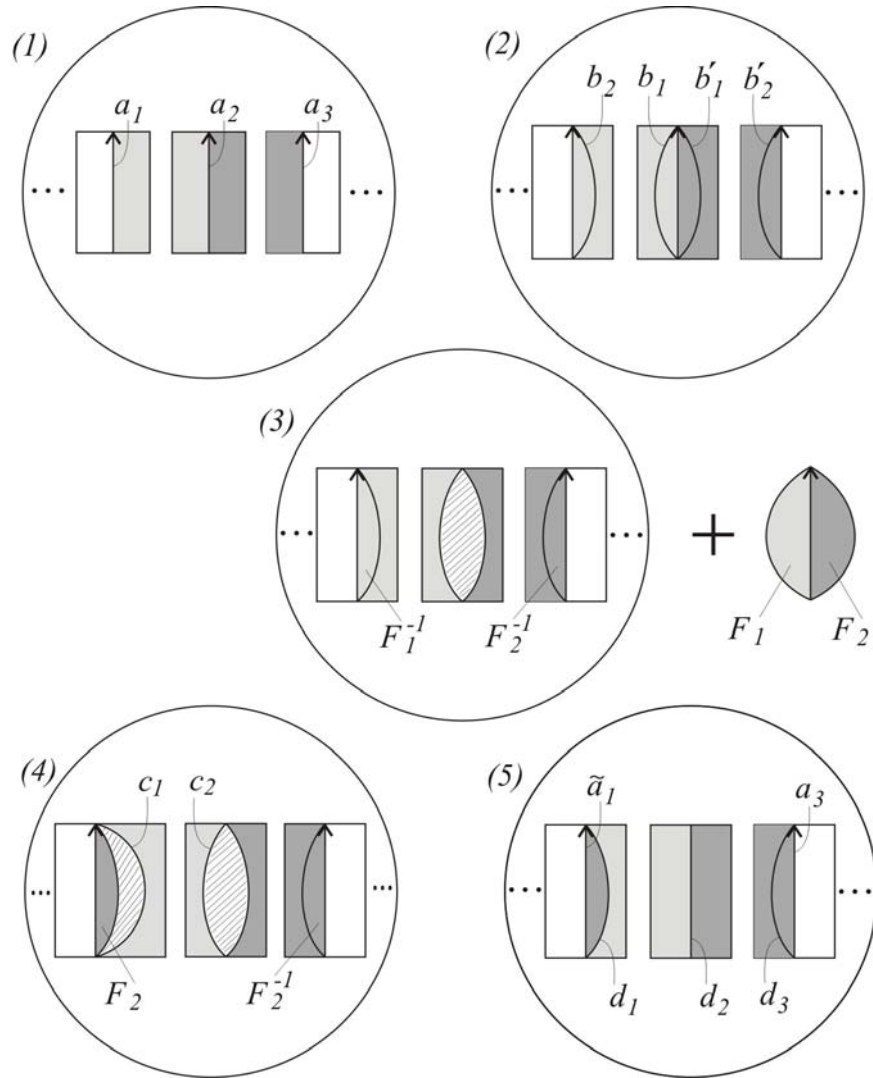


Figura 3.9. Reducción de ciclo sobre  $a$ .

Por último, observamos que una reducción de ciclo produce un efecto en la cicatriz del poliedro, que vemos ilustrado en la siguiente figura.



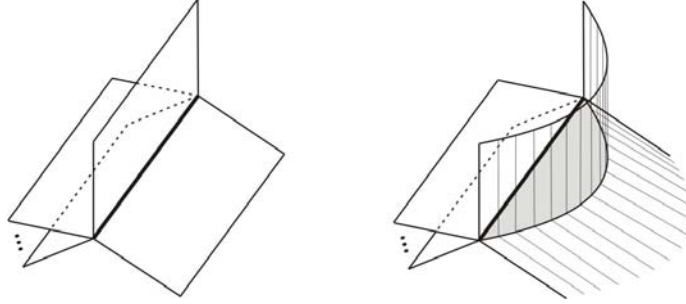


Figura 3.10. Efecto sobre la cicatriz al efectuar una reducción de ciclo sobre una arista.

### 3.7 Reducción Total de Ciclo

La reducción de ciclo en una arista identificada  $a$ , de ciclo  $n > 3$ , puede iterarse  $n - 3$  veces para reemplazar por completo a  $a$  en el espacio de identificación, por  $n - 2$  nuevas aristas identificadas triples, produciendo también  $n - 3$  caras nuevas en la cicatriz. En el poliedro, esto corresponde a reemplazar  $n$  aristas de ciclo  $n$  por  $3(n - 2)$  aristas de ciclo 3 produciendo  $2(n - 3)$  caras nuevas.

**Teorema 3.12** *Sea  $\langle B^3, G, \epsilon \rangle$  un poliedro con caras identificadas, y sea  $a$  una arista identificada de  $\langle B^3, G, \epsilon \rangle$ . Entonces, efectuar  $n - 3$  reducciones de ciclo sobre  $a$  implica reemplazar a  $a$  por  $n - 2$  aristas identificadas triples. El proceso también conlleva la aparición de  $n - 3$  caras nuevas en la cicatriz.*

*Demostración.* Cada reducción de ciclo sobre  $a$  produce una cara y una arista identificada triple. Entonces al efectuar las  $n - 3$  reducciones se producen  $n - 3$  caras nuevas y  $n - 3$  aristas triples. Además, el ciclo de  $a$  se reduce en  $n - 3$ , por lo que  $a$  se convierte en una arista triple. Si convenimos en practicar en las cercanías de  $a$  una pequeña isotopía, o simplemente en llamar a  $a$  de otra manera, podemos pensar que la arista  $a$  ha desaparecido y que en su lugar hemos conseguido una arista triple. Así obtenemos el total de  $n - 2$  aristas triples.  $\square$

Al proceso de efectuar  $n - 3$  reducciones de ciclo sobre una arista identificada  $a$ , de ciclo  $n > 3$ , lo llamamos una *reducción total (de ciclo) sobre  $a$* . Dado que el proceso consiste en una sucesión de reducciones de ciclo, el siguiente teorema es claro.

**Teorema 3.13** *Si un poliedro con caras identificadas se obtiene de otro por una reducción total de ciclo, entonces ambos poliedros producen el mismo espacio cociente.*

En la Figura 3.11 vemos ilustrada, de manera simplificada, una reducción total sobre una arista  $a$  de ciclo 4. Dadas las aristas  $a_1, a_2, a_3$  y  $a_4$  en el ciclo de  $a$  (1), podemos cortar alrededor de cada una de ellas una cuña esférica. Luego podemos identificar las cuatro cuñas

obtenidas formando una bola  $B$  cuya frontera esta compuesta por las lúnulas de las cuatro cuñas, separadas por cuatro meridianos (2). Vemos que la arista identificada  $a$  es un diámetro de  $B$  que se prolonga entre los extremos de los mencionados meridianos. Posteriormente, podemos proceder a pegar de nuevo a  $B$  con el poliedro, soldando una de las lúnulas por las que previamente habíamos cortado (3). Por último, podemos remover los dos pares de aristas dobles que se crean mediante este último pegado (4).

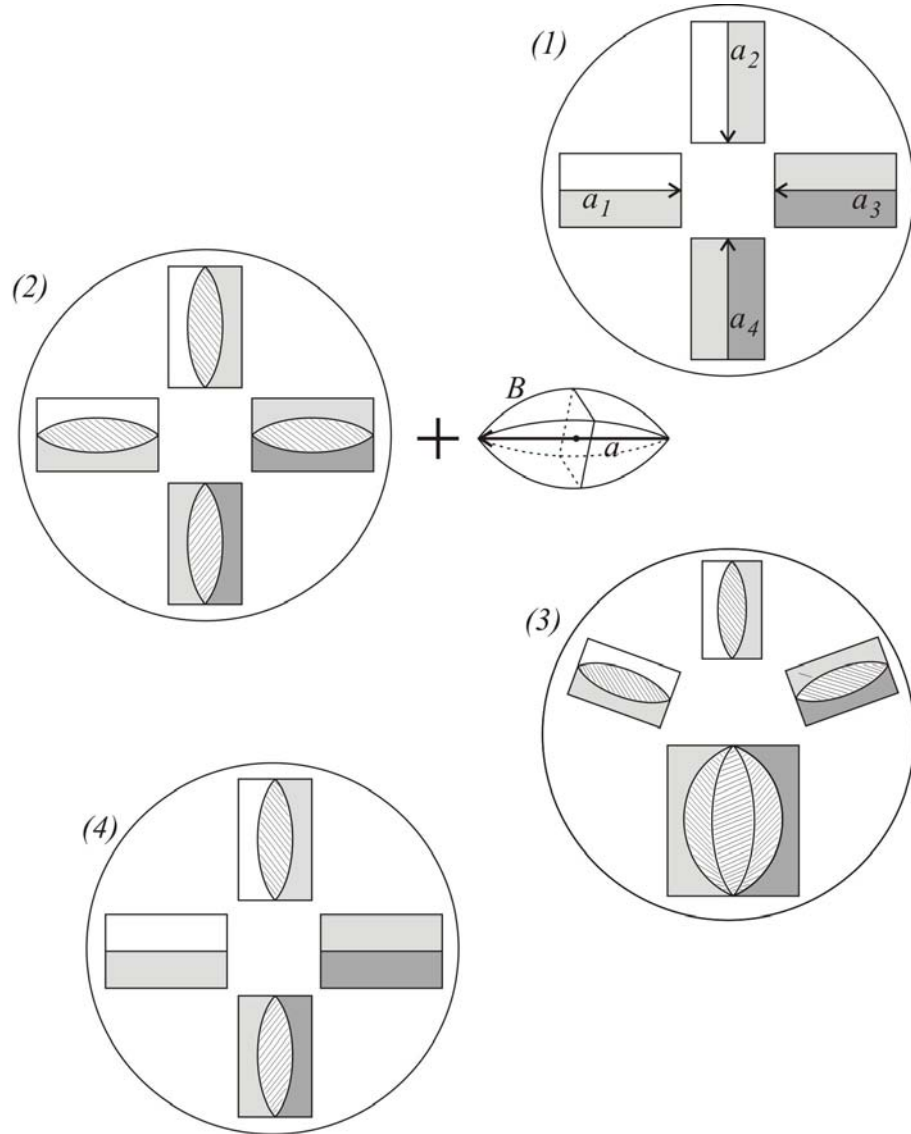


Figura 3.11. Proceso simplificado de reducción total de ciclo sobre una arista  $a$  de ciclo 4.

Observemos que una reducción total de ciclo sobre una arista produce un efecto sobre la cicatriz del poliedro. En la Figura 3.12 ilustramos dicho efecto para nuestro ejemplo de una arista  $a$  de ciclo 4. El mismo efecto para una arista de ciclo arbitrario puede entenderse por

medio de una sencilla generalización. Al lado izquierdo de la figura vemos a la arista identificada  $a$  antes de que la reducción se realice, con las cuatro celdas de la cicatriz que son adyacentes a ella. Para efectos de ilustración imaginamos un plano que corta al conjunto transversalmente por dos rectas, mostradas punteadas, dividiéndolo en una parte anterior y una posterior. Al lado derecho de la figura, vemos cómo ha quedado la parte posterior del conjunto después de la reducción total. La parte anterior es una reflexión de la posterior sobre el plano que hemos imaginado, y se ha omitido para no complicar la figura.

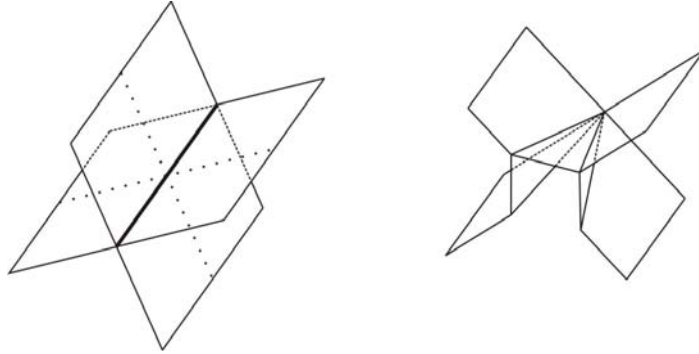


Figura 3.12. Efecto sobre la cicatriz al efectuar la reducción total de ciclo descrita en la Figura 3.11.

### 3.8 Reducción Total de Orden

Veamos ahora otro posible uso del proceso de cortar y pegar pequeños trozos. Dado un poliedro que produzca una 3-variedad, puede usarse un proceso análogo a la reducción total de ciclo para reemplazar un vértice identificado  $v$  de orden  $n$ , por una multitud de vértices identificados de orden menor o igual que  $n$ . Para esta operación es esencial que el vértice identificado en cuestión tenga una vecindad homeomorfa a una bola abierta tridimensional, y de ahí el requerimiento de que el poliedro produzca una 3-variedad.

El proceso se describe en la Figura 3.13. En primer lugar se consideran todos los vértices en el poliedro que dan lugar a un vértice identificado  $v$  (1). Luego, se procede a amputar una pequeña pirámide de base poligonal alrededor de cada uno de estos vértices, o si se quiere, una pequeña vecindad regular. Ello tras haber insertado las aristas dobles correspondientes. Como el espacio de identificación del poliedro es una 3-variedad, digamos  $M$ , entonces al identificar a todas las pirámides por sus caras triangulares se obtiene una bola cerrada tridimensional  $V$  con centro en  $v$ , cuya frontera está compuesta por las bases poligonales de las pirámides (2). Dicha bola corresponde a una vecindad regular de  $v$  en  $M$ . Por último, se pega a  $V$  con el poliedro por una cualquiera de las bases poligonales, por las que previamente habíamos cortado (3).

A este proceso lo llamamos una *reducción total (de orden) sobre  $v$* , y puede observarse que es el análogo para los vértices de la reducción total de ciclo. También existe para los vértices

un proceso análogo a la reducción -no total- de ciclo, pero es complicado y de poca utilidad.

La reducción total de orden, como todos los procesos que hemos descrito, lleva a poliedros que producen el mismo espacio cociente que el poliedro original, como expresa el siguiente teorema.

**Teorema 3.14** *Si un poliedro con caras identificadas se obtiene de otro por una reducción total de orden, entonces ambos poliedros producen el mismo espacio cociente.*

*Demostración.* Basta con observar que la reducción total de orden puede llevarse a cabo como una sucesión de operaciones de cortar y pegar pequeños trozos y de cerrar mariposas.  $\square$

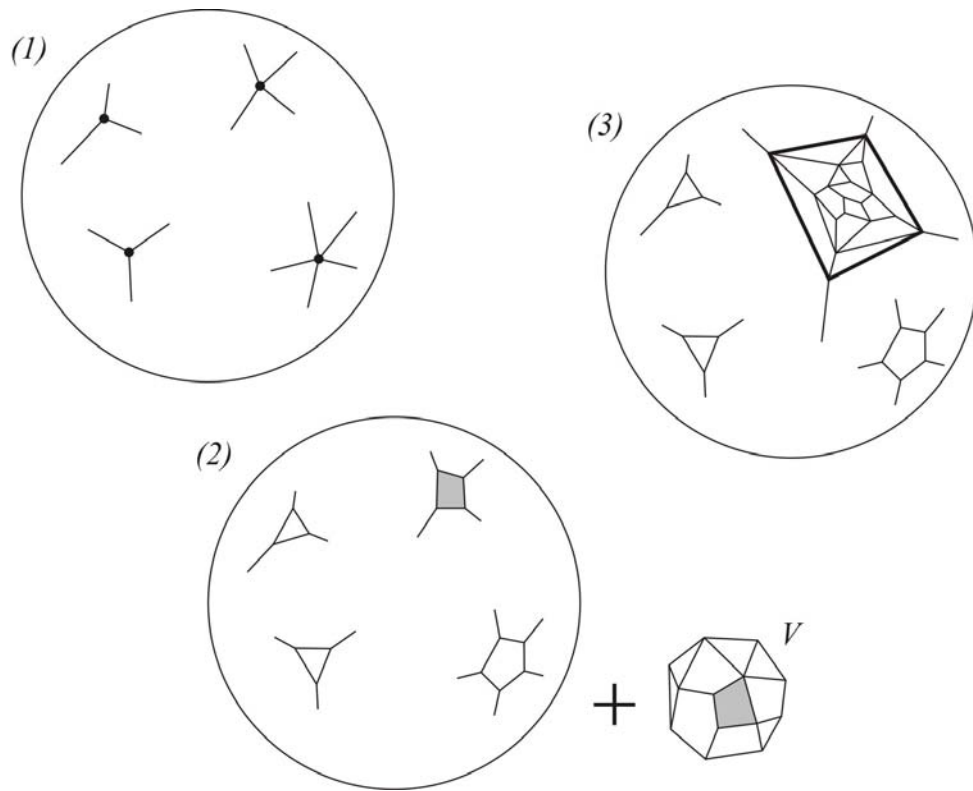


Figura 3.13. Reducción total de orden sobre un vértice.

El efecto que tiene sobre la cicatriz del poliedro la reducción total de orden sobre un vértice identificado  $v$  corresponde a efectuar la siguiente operación en dicha cicatriz. En el espacio de identificación, tomamos a  $V$ , que es una vecindad regular de  $v$ . Luego incorporamos  $\partial V$  a la cicatriz, y removemos de la misma todo lo que esté contenido en  $\overset{\circ}{V}$ . Por último, extirpamos del complejo obtenido la celda correspondiente a la base poligonal por la que la pegamos  $V$  al poliedro.

Con respecto a la reducción total de orden, vemos que ésta suprime un vértice identificado  $v$  de orden  $n$ , y genera una multitud de vértices identificados de orden menor o igual que  $n$ , que provienen de los vértices de las bases poligonales de las pirámides que describimos. También genera nuevas aristas y nuevas caras, provenientes de las aristas de las bases poligonales, y a las bases en sí. El número de caras, aristas y vértices identificados que se producen, y sus respectivos ciclos u órdenes, pueden calcularse por medio de las fórmulas expresadas en los siguientes teoremas.

**Teorema 3.15** Sean  $\langle B^3, G, \epsilon \rangle$  un poliedro con caras identificadas, y  $v$  un vértice identificado de  $\langle B^3, G, \epsilon \rangle$ . Entonces, sin pérdida de generalidad, no hay aristas identificadas de ciclos 1 o 2 adyacentes a  $v$ .

*Demostración.* Si hay una arista doble adyacente a  $v$ , y su eliminación no desconecta a  $G$ , entonces podemos removerla. Si por el contrario su eliminación desconecta a  $G$ , entonces podemos removerla y reconectar a  $G$  mediante la inserción de otra arista doble que no sea adyacente a  $v$ . Ahora, si hay una arista de ciclo 1, podemos o bien cerrar la mariposa  $F$  que comprende dicha arista; o bien cerrar una mariposa más pequeña, adyacente al vértice y lograda dividiendo a  $F$  en dos mediante la inserción de una arista doble que no sea adyacente a  $v$ .  $\square$

**Teorema 3.16** Sean  $\langle B^3, G, \epsilon \rangle$  un poliedro con caras identificadas, y  $v$  un vértice identificado de orden  $k$  de  $\langle B^3, G, \epsilon \rangle$ . Supongamos que no hay aristas identificadas de ciclos 1 o 2 adyacentes a  $v$ . Entonces, si  $\langle B^3, H, \eta \rangle$  se obtiene de  $\langle B^3, G, \epsilon \rangle$  por una reducción total de orden sobre  $v$ , el proceso crea  $k - 1$  pares de caras nuevos en el poliedro.

El teorema se sigue directamente de la definición del proceso. Los  $k - 1$  pares de caras nuevos corresponden a las  $k$  caras de la pequeña bola que llamamos  $V$  en la figura, excluyendo la cara por la que la pegamos al poliedro. En adelante, llamaremos a esa cara  $H$ . Daremos ahora una serie de definiciones que nos permitirán hacer la cuenta de vértices y aristas, con sus respectivos órdenes y ciclos.

Sean  $F_1, \dots, F_k$  las  $k$  caras de  $V$  y, sin pérdida de generalidad, sea  $F_1 = H$ . Observemos que cada una de estas caras es un polígono. Entonces, para cada  $i$ , con  $1 \leq i \leq k$ , sea  $p_i$  el número de lados de  $F_i$ .

Por otro lado, observemos que el vértice identificado  $v$  en el espacio producido por  $\langle B^3, G, \epsilon \rangle$  es adyacente a un número  $n$  de aristas identificadas que llamaremos  $k_1, \dots, k_n$ . Tales aristas pueden ser adyacentes a  $v$  por un solo extremo, o por ambos. En el primer caso definamos  $f(k_i) = 1$ , y en el segundo caso  $f(k_i) = 2$ . Sea pues  $r = f(k_1) + \dots + f(k_n)$ . Entonces  $r - n$  es el número de aristas adyacentes a  $v$  por ambos extremos, y  $n - (r - n) = 2n - r$  es el número de aristas adyacentes a  $v$  por un único extremo.

Por último, notemos que la bola  $V$  es en sí misma una bola celular. Además, una vecindad regular de  $v$  en el espacio producido por  $\langle B^3, G, \epsilon \rangle$  intersecta a las aristas  $k_1, \dots, k_n$  en un total de  $r$  puntos. De ahí se tiene que  $V$  tiene  $r$  vértices, y que éstos yacen en las aristas  $k_1, \dots, k_n$ . Sea entonces  $q$  el número de vértices de  $H$  que yazcan en aristas triples del conjunto  $\{k_1, \dots, k_n\}$ . Ahora podemos formular el siguiente teorema.

**Teorema 3.17** *Bajo las hipótesis del Teorema 3.16, se tiene que el proceso de reducción total de orden sobre  $v$  crea  $(1/2)(p_1 + \dots + p_k) - p_1 - q$  aristas identificadas nuevas, todas ellas triples.*

*Demostración.* Sea  $s_1 = (1/2)(p_1 + \dots + p_k)$ . Es claro de la construcción del proceso de reducción total que las aristas nuevas corresponden a aristas de la bola  $V$ , que es una bola celular con  $s_1$  aristas. Tomemos entonces a las  $s_1$  aristas  $b_1, \dots, b_{s_1}$  de  $V$ , en el espacio de identificación de  $\langle B^3, H, \eta \rangle$ , como candidatas a ser aristas identificadas nuevas producidas por la reducción.

Notemos que si una de estas aristas  $b_i$  no es un lado de  $H$ , entonces tiene ciclo 3, y que si por el contrario es un lado de  $H$ , entonces tiene ciclo 2. Claramente estas aristas dobles son removibles, por lo que podemos omitirlas de nuestra lista de candidatas  $b_1, \dots, b_{s_1}$ . Sin pérdida de generalidad, tales aristas dobles son las últimas de la lista, y como  $H$  tiene  $p_1$  lados, nuestra lista queda reducida a  $b_1, \dots, b_{s_2}$ , donde  $s_2 = s_1 - p_1$ .

Por último, sea  $k \in \{k_1, \dots, k_n\}$  una arista triple. Si  $w$  es un vértice de  $H$  que yace en  $k$ , entonces en el espacio de identificación de  $\langle B^3, H, \eta \rangle$  hay únicamente dos aristas identificadas adyacentes a  $w$  (originalmente habría cuatro, pero hemos removido dos de ellas por ser dobles). Una de ellas es una arista triple  $b_i$  con  $1 \leq i \leq s_2$ , y la otra es el remanente de  $k$ . Como ambas aristas son triples, puede verse que de hecho  $w$  no es un vértice verdadero, y que  $b_i$  y  $k$  son una misma arista. De esta forma, siendo  $k$  una arista preexistente, consideramos a  $b_i$  como parte de  $k$ , y por ello la sacamos de nuestra lista de candidatas.

Esto nos da el total de  $(1/2)(p_1 + \dots + p_k) - p_1 - q$  aristas identificadas nuevas, todas ellas triples.  $\square$

**Teorema 3.18** *Bajo las hipótesis del Teorema 3.16, se tiene que el proceso de reducción total de orden sobre  $v$  crea  $r - q$  vértices identificados nuevos.*

*Demostración.* Es claro de la construcción del proceso que los vértices nuevos corresponden a los vértices de la bola  $V$ . Tomemos entonces a los  $r$  vértices  $w_1, \dots, w_r$  de  $V$ , en el espacio de identificación de  $\langle B^3, H, \eta \rangle$ , como candidatos a ser vértices identificados nuevos producidos por la reducción.

Ahora, sea  $k \in \{k_1, \dots, k_n\}$  una arista triple. Si  $w$  es un vértice de  $H$  que yace en  $k$ , entonces, como vimos anteriormente,  $w$  no es un vértice verdadero sino un punto en el interior de una

arista identificada, por lo que lo removemos de nuestra lista de candidatos. Esto nos da el total de  $r - q$  vértices identificados nuevos.  $\square$

Los órdenes de los vértices pueden calcularse de la siguiente manera. Sean  $l_1, \dots, l_n$  los ciclos de  $k_1, \dots, k_n$  respectivamente. Entonces, dado un vértice identificado nuevo  $w$ , éste yace en una arista  $k_i$ , y podemos considerar dos casos. Si  $w$  no es un vértice de  $H$ , entonces su orden es  $l_i + 1$ . Por el contrario, si  $w$  es un vértice de  $H$ , entonces su orden es  $l_i$ . Es fácil ver que para todo  $i$ ,  $l_i + 1 \leq n$ . El número de aristas y vértices (no identificados) del poliedro se puede calcular simplemente haciendo la sumatoria de los ciclos de las aristas identificadas, y la sumatoria de los órdenes de los vértices.

Finalizaremos esta sección observando que dada una variedad  $M$ , entonces casi cualquier poliedro que produzca a  $M$  puede ser transformado en un poliedro especial por medio de las modificaciones que hemos estudiado.

**Teorema 3.19** *Sea  $M$  una 3-variedad compacta, conexa, orientable y sin frontera, y  $\langle B^3, G, \epsilon \rangle$  un poliedro que produzca a  $M$ . Entonces tenemos lo siguiente:*

- (a) Existe un poliedro especial que produce a  $M$ .
- (b) Si  $\langle B^3, G, \epsilon \rangle$  no tiene aristas de ciclos 1 y 2, entonces puede transformarse en un poliedro especial  $\langle B^3, H, \eta \rangle$  que produzca a  $M$ , por medio de reducciones totales de ciclo y de orden.

*Demostración.* Del Teorema 2.3 se tiene que  $M$  tiene una espina especial  $S$ . Además, del Teorema 3.5 se tiene que la clase de semejanza que produce a  $M$  y a  $S$  tiene un poliedro mínimo que es especial, de donde se obtiene la primera afirmación.

Ahora, si  $\langle B^3, G, \epsilon \rangle$  no tiene aristas de ciclos 1 y 2, entonces podemos practicar una reducción total de ciclo sobre cada arista de  $\langle B^3, G, \epsilon \rangle$  con ciclo mayor que 3, y obtener un poliedro  $\langle B^3, L, \lambda \rangle$  cuyas aristas sean todas triples. Luego, en  $\langle B^3, L, \lambda \rangle$ , podemos practicar una reducción total de orden sobre cada vértice con orden mayor que 4. Como  $\langle B^3, L, \lambda \rangle$  solo tiene aristas triples, las cuentas de los ciclos y los órdenes de las aristas y vértices producidos en las reducciones totales de orden, que desarrollamos antes en esta sección, muestran que el proceso produce únicamente aristas triples y vértices de orden 4. Así obtenemos un poliedro especial  $\langle B^3, H, \eta \rangle$  que produce a  $M$ .  $\square$

Este teorema puede de hecho generalizarse, debido a que también contamos con modificaciones que pueden eliminar las aristas de ciclos 1 y 2. Tales modificaciones son la remoción de aristas dobles, el cerramiento de mariposas, y la reducción de caras. La reducción de caras puede usarse para incrementar los ciclos de las aristas porque, al eliminar una cara, aumenta

el ciclo de algunas aristas, como vimos en la Sección 3.4. La reducción de caras, además, puede aplicarse en contextos más generales que remoción de aristas dobles y el cerramiento de mariposas.

### 3.9 Remoción de Singularidades sobre Poliedros

Recordemos que el conjunto de los espacios de identificación de los poliedros con caras identificadas es exactamente el conjunto de las pseudovarietades de tipo  $\mathcal{P}_1o$ . Veremos ahora cómo un poliedro que produzca una pseudovarietad  $P$  puede modificarse para obtener un poliedro que produzca una 3-variedad.

Sean  $P$  una pseudovarietad de tipo  $\mathcal{P}_1o$  y  $\langle B^3, G, \epsilon \rangle$  un poliedro que produzca a  $P$ . El proceso que describiremos es una variación de la reducción total de orden expuesta en la sección pasada. Sea  $v$  una singularidad de  $P$  (si la hay). Entonces, sabemos que  $v$  es el resultado de la identificación de ciertos vértices  $v_1, \dots, v_n$  de  $\langle B^3, G, \epsilon \rangle$ . De esta forma, al igual que como hicimos para la reducción total de orden, podemos cortar una pequeña pirámide con base poligonal alrededor de cada vértice  $v_i$ . Sean  $R_1, \dots, R_n$  las bases poligonales de las  $n$  pirámides. Entonces, al identificar las pirámides por sus caras triangulares, obtenemos el cono  $X$  de una superficie orientable de género  $g$ , ya que  $P$  es orientable. Además la frontera de  $X$  es obviamente una superficie orientable de género  $g$ , y tiene una celulación compuesta por las  $n$  bases poligonales  $R_1, \dots, R_n$ . Sea  $Y$  un cuerpo de asas de género  $g$ , y  $f : \partial X \rightarrow \partial Y$  un homeomorfismo. Entonces, la celulación  $R_1, \dots, R_n$  de  $\partial X$  induce, a través de  $f$ , una celulación  $f(R_1), \dots, f(R_n)$  de  $\partial Y$ . Por conveniencia, seguiremos denotando a cada  $f(R_i)$  por  $R_i$ .

Ahora, sean  $m_1, \dots, m_g$  los meridianos de  $Y$ . Además, para cada  $m_i$ , sea  $\gamma_i$  un circuito de aristas en  $\partial Y$ , bajo la celulación  $R_1, \dots, R_n$ , que sea homótopo a un meridiano  $m_i$ . La existencia de  $\gamma_i$  se deriva de que todo  $R_j$  es simplemente conexo. Entonces  $\gamma_i$  expande un disco  $D_i$  cuyo interior está en el interior de  $Y$ , y cuya frontera es  $\gamma_i$ . Podemos así cortar por cada  $D_i$  para obtener una bola  $B$ . Si consideramos las dos copias  $D_i^1$  y  $D_i^{-1}$  obtenidas a partir de cada  $D_i$  mediante estos cortes, tenemos que  $R_1, \dots, R_n, D_1^1, D_1^{-1}, \dots, D_g^1, D_g^{-1}$  es una celulación para  $\partial B$ . Para finalizar, procedemos a pegar a  $B$  con el poliedro por medio de una de las bases poligonales  $R_i$  por las que previamente habíamos cortado.

A este proceso lo llamamos una *remoción de singularidades sobre*  $\langle B^3, G, \epsilon \rangle$ , y efectuado sobre cada una de las singularidades de  $P$  lo llamamos una *remoción total de singularidades*. Vemos que el resultado de la remoción total sobre  $\langle B^3, G, \epsilon \rangle$  es un poliedro  $\langle B^3, H, \eta \rangle$  cuyo espacio de identificación es una 3-variedad, como lo expresa el siguiente teorema.

**Teorema 3.20** *Sean  $P$  una pseudovarietad y  $\langle B^3, G, \epsilon \rangle$  un poliedro que produzca a  $P$ . Si  $\langle B^3, H, \eta \rangle$  se obtiene de  $\langle B^3, G, \epsilon \rangle$  por una remoción total de singularidades, entonces el espacio producido por  $\langle B^3, H, \eta \rangle$  es una 3-variedad.*



La demostración proviene directamente de la construcción de  $\langle B^3, H, \eta \rangle$ .

# Capítulo 4

## Comentarios Finales

En este trabajo hemos desarrollado los aspectos más generales de la teoría de presentación de 3-variedades por poliedros con caras identificadas. Sin embargo, algunos asuntos relacionados con esta teoría se han quedado sin abordar. Dos de ellos, relativamente sencillos, son la relación de los poliedros con las descomposiciones de Heegaard, que fue brevemente tratada en [10], y la relación de los poliedros con la suma conexa de variedades. Otros aspectos más complicados, y que requerirían mayores estudios, son la relación de los poliedros con la presentación por cirugías, y la relación de los poliedros con la presentación de 3-variedades como cubiertas ramificadas de  $S^3$ . Esta última relación ha sido estudiada lateralmente por el Profesor José María Montesinos en su trabajo sobre cubiertas ramificadas (Véanse [17], [18], [19]), aunque este estudio es llevado a cabo en términos algo diferentes de los de este trabajo, y con otros propósitos.

De otra parte, una pequeña modificación en la definición de poliedro con caras identificadas lleva a poliedros que, a diferencia de los aquí estudiados, producen espacios no orientables. El estudio de esos poliedros, y de las pseudovariedades que constituyen sus espacios cociente, es también un tema de interés que puede ser desarrollado en futuros trabajos.

# Bibliografía

- [1] I. Bobtcheva y R. Piergallini, *Covering Moves and Kirby Calculus*. Preimpreso.
- [2] G. Burde y H. Zieschang, *Knots*. De Gruyter Studies in Mathematics 5, New York, 1985.
- [3] J. W. Cannon, W. J. Floyd y W. R. Parry, *Introduction to Twisted Face-Pairings*. Math. Res. Lett. 7 (2000), 477-491.
- [4] J. W. Cannon, W. J. Floyd y W. R. Parry, *Twisted Face-Pairing 3-Manifolds*. Trans. Amer. Math. Soc. 354 (2002), 2369-2397.
- [5] J. W. Cannon, W. J. Floyd y W. R. Parry, *Heegaard Diagrams and Surgery Descriptions for Twisted Face-Pairing 3-Manifolds*. Algebr. Geom. Topol. 3 (2003), 235-285.
- [6] N. A. Capitelli, *Colapsabilidad en Variedades Combinatorias y Espacios de Deformaciones*. Tesis de Licenciatura, Universidad Buenos Aires, Buenos Aires, 2009.
- [7] G. K. Francis, *A Topological Picturebook*, Springer-Verlag, New York, 1987.
- [8] M. H. Hilden, J. M. Montesinos, D. M. Tejada y M. M. Toro, *A New Representation of Links: Butterflies*. Preimpreso.
- [9] J. F. P. Hudson, *Piecewise Linear Topology*. Benjamin, 1969.
- [10] P. S. Isaza, *Descomposiciones de Heegaard y Cirugías de Dehn*. Trabajo de grado, Universidad Nacional de Colombia, Medellín, 2009.
- [11] W. Jaco, *Lectures on Three-Manifold Topology*. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1997.
- [12] C. Maclachlan, A. W. Reid, *The Arithmetic of Hyperbolic 3-Manifolds*. Springer-Verlag, New York, 2003.
- [13] W. S. Massey, *Algebraic topology: an introduction*. Springer-Verlag, New York, Heidelberg, Berlin, 1967.

- [14] S. Matveev, *Transformations of Special Spines and the Zeeman Conjecture*. Math. USSR-izv. 31 (1988), 3-25.
- [15] S. Matveev, *Algorithmic Topology and Classification of 3-Manifolds*. Springer-Verlag, Berlin, 2007.
- [16] E. E. Moise, *Affine Structures in 3-Manifolds: V. The Triangulation Theorem and Hauptvermutung*. Ann. Math. Second Series 56 (1952), 96–114.
- [17] J. M. Montesinos, *Sobre la Conjetura de Poincaré y los Recubridores Ramificados sobre un Nudo*. Tesis doctoral, Publicada en Departamento de Publicaciones de la Facultad de Ciencias de la Universidad Complutense de Madrid, 1971.
- [18] J. M. Montesinos, *Nota a un Teorema de Alexander*. Rev. Mat. Hisp. Amer. 32, (1972), 167-187
- [19] J. M. Montesinos, *Reducción de la Conjetura de Poincaré a otras Conjeturas Geométricas*. Rev. Mat. Hisp. Amer. 32 (1972), 33-51
- [20] J. R. Munkres, *Topology: A First Course*, Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, NJ, 1975.
- [21] R. Piergallini, *Covering Moves*. Trans. Amer. Math. Soc. 325 (1991), 903-920.
- [22] V. V. Prasolov y A. B. Sossinsky, *Knots, Links, Braids and 3-Manifolds. An Introduction to the New Invariants in Low-Dimensional Topology*. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1997.
- [23] D. Rolfsen, *Knots and Links*, Publish or Perish, Inc., Berkeley, CA, 1976.
- [24] C. P. Rourke, B. J. Sanderson, *Introduction to Piecewise-Linear Topology*. Springer-Verlag, Berlin, 1982.
- [25] H. Seifert, y W. Threlfall, *Lehrbuch der Topologie*. Teubner, Leipzig, 1934.
- [26] W. P. Thurston, *The Geometry and Topology of 3-Manifolds*. Princeton Lecture Notes, 1979.
- [27] W. P. Thurston, *Three-Dimensional Geometry and Topology*. Vol. 1, Edited by S. Levy. Princeton Mathematical Series, 35, Princeton University Press, Princeton, NJ, 1997.
- [28] M. M. Toro, *Enlaces de tres Puentes y Mariposas*. Trabajo de promoción a Profesora Titular, Universidad Nacional de Colombia, Medellín, 2010.