Existencia de soluciones globales débiles a un tipo de sistemas hiperbólicos

Trabajo final para optar al título de Magister en Ciencias- Matemáticas

Margui Angélica Romero Pinedo
Código: 830293

Director
Leonardo Rendón Arbeláez

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS
FACULTAD DE CIENCIAS
UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA
SEDE BOGOTÁ
2010

Existencia de soluciones globales débiles a un tipo de sistemas hiperbólicos

Introducción

Las leyes de conservación surgen del estudio de fenómenos físicos que involucran cantidades conservadas como la materia, la energía o el momento. Generalmente estos sistemas admiten soluciones discontinuas y por lo tanto no diferenciables en algún tiempo; por esta razón, se buscan soluciones generalizadas para este tipo de sistemas. En teoría de elasticidad, surge el sistema de 2 ecuaciones dado por:

$$u_t + (u\phi)_x = 0$$

$$v_t + (v\phi)_x = 0$$

éste modela la propagación de las ondas delantera y transversa en una cadena estrecha, elástica. [3]. En este trabajo se estudiarán este sistema y el no homogéneo, suponiendo que la función ϕ es radial y C^2, los resultados de existencia de soluciones globales débiles obtenidos en [5] y [7] se logran a través de las soluciones del sistema parabólico relacionado y utilizando compacidad de funciones de variación acotada y compacidad compensada. En el primer capítulo se presentan los sistemas de leyes de conservación, y algunos ejemplos. Se definen además, los pares de entropía-flujo, que se requieren en la prueba de la convergencia débil de las aproximaciones viscosas. En el segundo capítulo se presentan los lemas necesarios para obtener los resultados de existencia de soluciones para el caso homogéneo y el no homogéneo del sistema simétrico en mención, y se darán un par de ejemplos a los que se aplica el resultado obtenido.

Capítulo 1

Sistemas hiperbólicos de leyes de conservación

En este capítulo nos dedicaremos a las generalidades de los sistemas hiperbólicos de leyes de conservación.

1.1. Leyes de conservación

Un sistema de la forma

$$u_t + f(u)_x = 0 \tag{1.1}$$

donde $u = (u_1, u_2, ..., u_n) \in \mathbb{R}^n$, $n \geq 1, (x,t) \in \mathbb{R} \times (0, \infty)$, $f : \Omega \longmapsto \mathbb{R}^n$, Ω un dominio y $f \in C^2(\Omega)$ se conoce como sistema de *Leyes de conservación.* Recibe este nombre en analogía con algunos fenómenos que surgen en física y son descritos mediante ecuaciones de la forma (1.1). El vector $u = (u_1, u_2, ..., u_n)$ se conoce como el vector de **cantidades conservadas** y f el vector de **flujo**.

Ejemplo 1.1.1. Algunos ejemplos de sistemas de la forma (1.1), surgen en mecánica de fluidos:

- Conservación de la masa $v_t - u_x = 0$
- Conservación del momento $u_t + p_x = 0$
- Conservación de la energía $E_t + (up)_x = 0$

Donde v es el volumen específico, u la velocidad, E la energía específica, $E = e + \frac{u^2}{2}$ con e la energía interna, y la presión p es una función dada de e y v.

Para estos sistemas en general, si se desea suavidad en las soluciones, ésta sólo se puede obtener en tiempo finito, ya que incluso si el dato inicial es suave la solución puede desarrollar choques en tiempo finito. Por tanto las soluciones globales se buscan dentro de un espacio de funciones discontinuas, y las soluciones son interpretadas en un sentido distribucional.

Definición 1.1.1 (Solución débil)**.** Dado el problema de valor inicial

$$\begin{cases} u_t + f(u)_x = 0 \\ u(x,0) = u_0(x), x \in \mathbb{R} \end{cases} \tag{1.2}$$

Se dice que u es una *Solución débil* de (1.2) si para toda función $\Phi \in C^\infty$ de soporte compacto se satisface:

$$\int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty u\Phi_t + f(u)\Phi_x dxdt + \int_{t=0} u_0 \Phi dx = 0 \tag{1.3}$$

Esta noción de solución es, en realidad una extensión del sentido usual, ya que si u satisface (1.3) y además es diferenciable, entonces u es solución clásica de (1.2).

Definición 1.1.2 (Sistema hiperbólico)**.** Se dice que el sistema (1.1) es hiperbólico si los valores propios de $Df(u)$ son reales. Si además de ser reales, son distintos; se dice que el sistema es **estríctamente hiperbólico**.

Definición 1.1.3. Dados $\lambda_1, ..., \lambda_n$ los valores propios de Df, con correspondientes vectores propios $r_1, ...r_n$ Se dice que el campo característico r_i es genuinamente no lineal si $\nabla\lambda_i \cdot r_i \neq 0$. Se dice que el campo característico r_i es linealmente degenerado en un conjunto A, si $\nabla\lambda_i \cdot r_i = 0$ en A.

1.2. Método de viscosidad nula

Uno de los métodos utilizados para solucionar el problema de Cauchy (1.1) es el método de viscosidad nula, con éste se obtienen soluciones aproximadas o aproximaciones viscosas. Se agrega un término viscoso para obtener una familia de ecuaciones parabólicas:

$$u_t^\epsilon + f(u^\epsilon)_x = \epsilon u_{xx} \tag{1.4}$$

El término viscoso suavizará los choques y si éstos pueden evitarse, las soluciones viscosas de (1.4) existirán para todo tiempo y bajo ciertas hipótesis convergerán fuertemente a una solución global débil de (1.1) cuando $\epsilon \to 0$.

Definición 1.2.1. Una función continuamente diferenciable $\eta : \mathbb{R}^n \longmapsto \mathbb{R}$ es llamada una **entropía** para el sistema de leyes de conservación (1.1), con **flujo** de entropía $q : \mathbb{R}^n \longmapsto \mathbb{R}$ (o simplemente (η, q) forman un par entropía-flujo) si para toda solución de (1.1), se satisface:

$$D\eta(u) \cdot Df(u) = Dq(u) \tag{1.5}$$

Si $n \leq 2$ generalmente es posible resolver este sistemas y encontrar una clase de entropías y sus correspondientes flujos. Si $n > 2$ el sistema puede resolverse sólo en casos especiales. Las aplicaciones del método de compacidad compensada dependen en gran medida de la construcción de pares de entropía-flujo, por esta razón la mayoría de resultados obtenidos son para sistemas 2×2.

Capítulo 2

Un sistema hiperbólico simétrico

En este capítulo presentaremos una parte de los trabajos de [Lu] y [Song] sobre un sistema hiperbólico simétrico, el primero homogéneo y el segundo con términos fuente. En los dos casos se obtiene la existencia global de soluciones bajo condiciones apropiadas.

Consideremos el sistema de dos ecuaciones dado por:

$$\begin{cases} u_t + (u\phi(r))_x = 0 \\ v_t + (v\phi(r))_x = 0 \end{cases} \tag{2.1}$$

con dato inicial

$$(u(x,0), v(x,0)) = (u_0(x), v_0(x)) \tag{2.2}$$

donde ϕ es no lineal, simétrica de u y v, con $r = u^2 + v^2$. Este sistema homogéneo es interesante porque nace de áreas tales como la teoría de la elasticidad, magnetohidrodinámica y mejoramiento en la recuperación del petróleo [3].

Veamos las características de este sistema.

Sea $f : \mathbb{R}^2 \longmapsto \mathbb{R}^2$ definido por: $f(u,v) = (u\phi(r), v\phi(r))$

$$Df = \begin{pmatrix} \phi(r) + 2u^2\phi'(r) & 2uv\phi'(r) \\ 2uv\phi'(r) & \phi(r) + 2v^2\phi'(r) \end{pmatrix}$$

De aquí, el polinomio característico de Df es:

$$\begin{aligned} p(\lambda) &= \lambda^2 - 2(\phi(r) + r\phi'(r)) + \phi(r)(\phi(r) + 2\phi'(r)) \\ &= (\lambda - \phi)(\lambda - (\phi(r) + 2r\phi'(r))) \end{aligned}$$

Así los dos valores propios de Df son:

$$\lambda_1 = \phi(r) \tag{2.3}$$

$$\lambda_2 = \phi(r) + 2r\phi'(r) \tag{2.4}$$

Con correspondientes vectores propios
$r_1 = (-v, u)^t$ y $r_2 = (u, v)^t$
De aquí se tiene:

$$\nabla\lambda_1 \cdot r_1 = (2u\phi'(r), 2v\phi'(r))(-v, u)^t = 0, \tag{2.5}$$

$$\nabla\lambda_2 \cdot r_2 = (2u\phi'(r), 2v\phi'(r))(-v, u)^t = 6r\phi'(r) + 4r^2\phi''(r) \tag{2.6}$$

De (2.3) y (2.4), vemos que la hiperbolicidad estricta del sistema falla en los puntos en que $r\phi'(r) = 0$, de (2.5) vemos que el primer campo característico es siempre linealmente degenerado y de (2.6) el segundo campo característico puede ser genuinamente no lineal o linealmente degenerado, dependiendo del comportamiento de ϕ.

El resultado obtenido en [5] es de existencia global para el problema de Cauchy (2.1)-(2.2), para ello, Lu consideró el sistema parabólico relacionado:

$$\begin{cases} u_t + (u\phi(r))_x = \epsilon u_{xx} \\ v_t + (v\phi(r))_x = \epsilon v_{xx} \end{cases} \tag{2.7}$$

con dato inicial (2.2), más específicamente demostró el siguiente teorema:

Teorema 2.0.1. *1. Sea $(u_0(x), v_0(x))$ medible y acotado. Entonces para cada $\epsilon > 0$, la solución viscosa $(u^\epsilon(x,t), v^\epsilon(x,t))$ del problema* (2.7)-(2.2) *existe y es uniformemente acotada con respecto al parámetro viscoso ϵ.*

2. Más aún, si $\phi \in C^2$ y el conjunto $A = \{r : 3\phi'(r) + 2r\phi''(r) = 0\}$ tiene medida de Lebesque 0, entonces existe una subsucesión de $r^\epsilon = (u^\epsilon)^2 + (v^\epsilon)^2$ que converge puntualmente a una función $l(x,t)$.

3. Si existe $c_0 > 0$ tal que $v_0(x) \geq c_0$ y la variación total de $\frac{u_0(x)}{v_0(x)}$ es acotada en $(-\infty, +\infty)$ entonces existe una subsucesión de (u^ϵ, v^ϵ) que converge puntualmente a un par de funciones $u(x,t), v(x,t)$ que satisfacen $l(x,t) = u^2(x,t) + v^2(x,t)$, que combinado con (2), implica que el límite (u, v) es una solución débil del sistema hiperbólico (2.1)-(2.2).

2.1. El sistema no homogéneo

Posteriormente, en [7], se estudió el sistema hiperbólico agregando términos fuente:

$$\begin{cases} u_t + (u\phi(r))_x + g_1(u,v) = 0 \\ v_t + (v\phi(r))_x + g_2(u,v) = 0 \\ (u(x,0), v(x,0)) = (u_0(x), v_0(x)) \end{cases} \tag{2.8}$$

donde el dato inicial es medible y acotado

El resultado obtenido para éste sistema también es de existencia global bajo ciertas hipótesis sobre las funciones g_1 y g_2.

Por los cálculos del problema homogéneo sabemos que el sistema es no estrictamente hiperbólico, el primer campo característico es linealmente degenerado y el segundo campo característico puede ser genuinamente no lineal o linealmente degenerado dependiendo del comportamiento de ϕ.

En el resultado de Song se requiere de nuevo suponer que $\phi \in C^2(\Omega)$, donde Ω es un dominio que contiene a $[0,\infty)$ y el conjunto $A = \{r : 3r\phi'(r) + 2r^2\phi''(r) = 0\}$ tiene medida (de Lebesque) 0. Así el segundo campo característico puede ser linealmente degenerado en un conjunto de medida 0. Para estudiar el problema de Cauchy (2.8), consideramos el sistema parabólico asociado:

$$\begin{cases} u_t + (u\phi(r))_x + g_1(u,v) = \epsilon u_{xx} \\ v_t + (v\phi(r))_x + g_2(u,v) = \epsilon v_{xx} \\ (u(x,0), v(x,0)) = (u_0(x), v_0(x)) \end{cases} \tag{2.9}$$

2.1.1. Algunos lemas

La existencia de las soluciones de viscosidad (u^ϵ, v^ϵ) de (2.9) se obtiene utilizando (entre otros) el teorema del punto fijo de Brouwer-Schauder.Utilizando la teoría de compacidad compensada, veremos que (una subsucesión de) $r^\epsilon = (u^\epsilon)^2 + (v^\epsilon)^2$ converge puntualmente a una función $l(x,t)$, y utilizando compacidad de funciones de variación acotada, veremos que una subsucesión de (u^ϵ, v^ϵ) converge puntualmente a (u,v), donde $u^2(x,t) + v^2(x,t) = l(x,t)$, y este límite (u,v) será una solución débil del problema hiperbólico. Para probar esta conclusión, primero introducimos algunos lemas que se requieren en el resultado principal.

Consideremos el problema de Cauchy, para el sistema general parabólico con términos fuente:

$$
\begin{cases}
u_t + f_1(u,v)_x + k_1(u,v) = \epsilon u_{xx} \\
v_t + f_2(u,v)_x + k_2(u,v) = \epsilon v_{xx} \\
(u(x,0), v(x,0)) = (u_0(x), v_0(x))
\end{cases}
\tag{2.10}
$$

Lema 2.1.1. *Suponga que el dato inicial* $(u_0(x), v_0(x))$ *es medible y acotado.* $(|u_0(x)| \leq M, |v_0(x)| \leq M)$ $f_1(u,v), f_2(u,v) \in C^1(\mathbb{R}^2)$*,* $k_1(u,v)$ *y* $k_2(u,v)$ *funciones continuas localmente Lipschitz. Entonces:*

(1) El problema de Cauchy (2.10) *tiene una única solución* $(u^\epsilon(x,t), v^\epsilon(x,t)) \in C^\infty(\mathbb{R} \times (0, t_0))$ *para un* $t_0 > 0$ *que depende sólo de la norma* L^∞ *del dato inicial y:*
$|u^\epsilon(x,t)| \leq 2M$*,* $|v^\epsilon(x,t)| \leq 2M$*, para todo* $(x,t) \in \mathbb{R} \times [0, t_0)$*.*

(2) Si además dado cualquier T *fijo, se tiene una estimación a priori:*
$|u^\epsilon(x,t)| \leq M(T)$*,* $|v^\epsilon(x,t \leq M(T)|$*, para todo* $(x,t) \in \mathbb{R} \times [0,T]$*. Donde* $M(T) > 0$ *y es independiente de* ϵ*, entonces la solución* $(u^\epsilon(x,t), v^\epsilon(x,t))$ *existe en* $\mathbb{R} \times [0,T]$

Demostración. (1)
Veamos que el problema de Cauchy (2.10) es equivalente a las siguientes ecuaciones integrales:

$$u(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} u_0(y) G^\epsilon(x-y,t)dy$$

$$+ \int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} [f_1(u(y,s), v(y,s)) G^\epsilon_y(x-y, t-s) - k_1(u(y,s), v(y,s)) G^\epsilon(x-y, t-s)] dyds$$

$$v(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} v_0(y) G^\epsilon(x-y,t)dy$$

$$+ \int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} [f_2(u(y,s), v(y,s)) G^\epsilon_y(x-y, t-s) - k_2(u(y,s), v(y,s)) G^\epsilon(x-y, t-\tau)] dyds$$

donde $G^\epsilon(x,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi\epsilon t}} e^{-\frac{x^2}{4\epsilon t}}$

Veamos la equivalencia para la primera de las ecuaciones:

$$\begin{gathered}
\widehat{u_t} + \widehat{f_1(u,v)}_x + \widehat{k_1(u,v)} = \widehat{\epsilon u_{xx}} \\
\leftrightarrow u(\hat{\xi},t)_t + \widehat{f_1(u,v)}_x + \widehat{k_1(u,v)} = -4\pi^2\epsilon\xi^2 u(\hat{\xi},t) \\
\leftrightarrow u(\hat{\xi},t)_t + 4\pi^2\epsilon\xi^2\widehat{u(\xi,t)} = -\widehat{f_1(u,v)}_x - \widehat{k_1(u,v)}
\end{gathered}$$

Multiplicando por $e^{4\pi^2\epsilon\xi^2 t}$ e integrando se obtiene:

$$e^{4\pi^2\epsilon\xi^2 t}\hat{u}(\xi,t) = \hat{u}(\xi,0) - \int_0^t e^{4\pi^2\epsilon\xi^2 s}(\widehat{f_1(u,v)}_x - \widehat{k_1(u,v)})ds,$$

$$\hat{u}(\xi,t) = e^{-4\pi^2\epsilon\xi^2 t}\hat{u}(\xi,0) - \int_0^t e^{-4\pi^2\epsilon\xi^2(t-s)}(\widehat{f_1(u,v)}_x - \widehat{k_1(u,v)})ds$$

Usando el hecho de que $\widehat{G^\epsilon(x,t)}(\xi) = e^{-4\epsilon\pi^2\xi^2 t}$ y las propiedades de la transformada de Fourier con respecto a la convolución, se tiene la igualdad deseada:

$$u(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} u_0(y)G^\epsilon(x-y,t)dy$$

$$+\int_0^t\int_{-\infty}^{\infty}[f_1(u(y,s),v(y,s))G^\epsilon_y(x-y,t-s) - k_1(u(y,s),v(y,s))G^\epsilon(x-y,t-s)]dyds$$

Ahora veremos que la aplicación dada por esta representación integral es una contracción en un espacio apropiado.

Para cada $\tau > 0$ Sea

$$B_\tau = \{(u,v) : u,v \in C^\infty(\mathbb{R}\times(0,\tau)) \text{ y } ||u||_{L^\infty(\mathbb{R}\times[0,\tau]))}, ||v||_{L^\infty(\mathbb{R}\times[0,\tau]))} \leq 2M\}$$

y

$$B = \{(u,v) : u,v \in C^\infty(\mathbb{R}\times(0,\tau)) \cap L^\infty(\mathbb{R}\times[0,\tau])\}$$

B es un espacio de Banach con la norma del producto:

$$||(u,v)||_B = ||u||_{L^\infty(\mathbb{R}\times[0,\tau]))} + ||v||_{L^\infty(\mathbb{R}\times[0,\tau])}$$

y B_τ es un subconjunto cerrado, acotado y convexo de B.

Ahora definimos en B_τ el operador $\mathbf{T}$ tal que:

$$\mathbf{T}(u,v) = (T_1(u), T_2(v))$$

donde

$$T_1(u,v)(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} u_0(y)^\epsilon(x-y,t)dy +$$

$$+\int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} [f_1(u(y,s),v(y,s))G_y^\epsilon(x-y,t-s) - k_1(u(y,s),v(y,s))G^\epsilon(x-y,t-s)]dyds$$

y

$$T_2(u,v)(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} v_0(y)^\epsilon(x-y,t)dy +$$

$$+\int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} [f_2(u(y,s),v(y,s))G_y^\epsilon(x-y,t-s) - k_2(u(y,s),v(y,s))G^\epsilon(x-y,t-s)]dyds$$

para cada $(u,v) \in B_\tau$.

Veamos que existe un $t_0 > 0$, tal que si $(u,v) \in B_{t_0}$ entonces $\mathbf{T}(u,v) \in B_{t_0}$ y $\mathbf{T}$ es una contracción en B_{t_0}:
En efecto, si $(u_1,v_1),(u_2,v_2) \in B_\tau$, como f_i, k_i son continuas para $i = 1,2.$, la imagen de B_τ es acotada, por tanto existe una constante $K > 0$ tal que:

$$f_i(u,v) \leq K, \text{ y } k_i(u,v) \leq K, \text{ para } i = 1,2$$

y como además, estas funciones son localmente Lipschitz, existe $L > 0$ tal que:

$$|f_i(u_1,v_1) - f_i(u_2,v_2)| \leq L(|u_1-u_2| + |v_1-v_2|) \tag{2.11}$$

$$|k_i(u_1,v_1)-k_i(u_2,v_2)| \leq L(|u_1-u_2|+|v_1-v_2|) \tag{2.12}$$

Dado que $\int_{-\infty}^{\infty} G^\epsilon(x-y,t)dy = 1$ $(t>0)$ y la hipótesis sobre el dato inicial, se cumple entonces la desigualdad:

$$\begin{aligned}|T_i(u,v)| &\leq M + \int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} |f_i(u,v)||G_y^\epsilon(x-y,t-s)|dyds + Kt \\ &\leq M + 2K\sqrt{\frac{t}{\pi\epsilon}} + Kt, \text{ para } i=1,2.\end{aligned}$$

y

$$\int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} |G_y^\epsilon(x-y,t-s)|dyds = \int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|x-y|}{4\epsilon(t-s)\sqrt{\pi\epsilon(t-s)}} e^{-\frac{(x-y)^2}{4\epsilon(t-s)}} dyds$$

$$= \int_0^t \frac{1}{\sqrt{\pi\epsilon(t-s)}} \int_{-\infty}^{\infty} |\eta e^{-\eta^2}| d\eta ds = \int_0^t \frac{1}{\sqrt{\pi\epsilon(t-s)}} ds = 2\sqrt{\frac{t}{\pi\epsilon}}$$

La anterior igualdad y las desigualdades (2.11) y (2.12) implican:

$$|T_i(u_1,v_1)-T_i(u_2,v_2)| \leq \left(2L\sqrt{\frac{t}{\pi\epsilon}} + Lt\right)(||u_1-u_2||_{L^\infty}+||v_1-v_2||_{L^\infty}) \ i=1,2.$$

Por tanto

$$||\mathbf{T}(u_1,v_1)-\mathbf{T}(u_2,v_2)||_B \leq 2L\left(2\sqrt{\frac{t}{\pi\epsilon}}+t\right)||(u_1,v_1)-(u_2,v_2)||_B$$

Así, al elegir $t_0 > 0$ tal que

$$2K\sqrt{\frac{t_0}{\pi\epsilon}} + Kt_0 \leq M, \ 2L\left(2\sqrt{\frac{t_0}{\pi\epsilon}}+t_0\right) < 1$$

obtenemos que $\mathbf{T}(u,v) \in B_{t_0}$ y $\mathbf{T}$ es una contracción; y por el teorema del punto fijo de Brouwer-Schauder existe una única $(u^\epsilon, v^\epsilon) \in B_{t_0}$ tal que

$$\mathbf{T}(u^\epsilon,v^\epsilon) = (u^\epsilon,v^\epsilon)$$

lo cuál significa que el problema parabólico (2.9) tiene una única solución suave $(u^\epsilon, v^\epsilon) \in C^\infty(\mathbb{R} \times (0, t_0))$ donde t_0 depende únicamente de la acotación del dato inicial, y:

$$|u^\epsilon(x,t)| \leq 2M, \;\; |v^\epsilon(x,t)| \leq 2M \text{ para todo } (x,t) \in \mathbb{R} \times [0, t_0)$$

2. Como la solución (u^ϵ, v^ϵ) satisface estimaciones a priori,

   $|u^\epsilon(x,t)| \leq M(T)$, $|v^\epsilon(x,t)| \leq M(T)$, para todo $(x,t) \in \mathbb{R} \times [0, T]$ luego:
   $|u_0^\epsilon(x)| \leq M(T)$, $|v_0^\epsilon(x) \leq M(T)|$
   por la parte 1), existe un $\tau > 0$ que depende sólo de $M(T)$ tal que el problema de Cauchy tiene solución única en $\mathbb{R} \times [0, \tau]$ y para todo $t \in [0, \tau]$:

   $$|u^\epsilon(x,t)| \leq 2M(T), |v^\epsilon(x,t) \leq 2M(T)|$$

   Si se considera el dato inicial τ, siguiendo el mismo proceso se muestra que la solución existe en $\mathbb{R} \times [\tau, 2\tau]$ y por los estimativos a priori:
   $|u^\epsilon(x,t)| \leq 2M(T)$, $|v^\epsilon(x,t) \leq 2M(T)|$ para todo $t \in [\tau, 2\tau]$
   Así la solución local puede extenderse paso por paso al tiempo T.

$\square$

Lema 2.1.2. *Sea $u(x,t)$ una solución para el problema de Cauchy de la ecuación parabólica:*

$$\begin{cases} u_t + a(u,x,t)u_x + g(u,x,t) = u_{xx} \\ \quad u(x,0) = u_0(x) \end{cases} \tag{2.13}$$

Si $u_0(x,t)$ y $g(u,x,t)$ satisfacen las condiciones:
$|u_0(x)| \leq M$, $|g(u,x,t)| \leq C|u| + \bar{C}$. Donde $C, \bar{C} > 0$ y $a(u,x,t)$ es acotada. Entonces para cualquier $T > 0$, existe $M(T) > 0$ tal que $|u(x,t)| \leq M(T)$ en $\mathbb{R} \times [0,T]$.

Demostración. Al multiplicar la primera ecuación de (2.13) por $2u$ se obtiene:

$$(u^2)_t + a(u,x,t)(u^2)_x = 2uu_{xx} - 2ug(u,x,t)$$

Por la hipótesis sobre g y la igualdad $(u^2)_{xx} = 2u_x^2 + 2uu_{xx}$ se cumple que:

$$2uu_{xx} - 2ug(u,x,t) \leq (2uu_x)_x - 2u_x^2 + 2|u|(C|u| + \bar{C})$$

$$\leq (u^2)_{xx} + 2C|u|^2 + 2\bar{C}|u|$$

$$\leq (u^2)xx + 2Cu^2 + u^2 + \bar{C}^2 = (u^2)_{xx} + u^2(2C+1) + \bar{C}^2$$

Por tanto

$$(u^2)_t + a(u,x,t)(u^2)_x \leq (u^2)_{xx} + u^2(2C+1) + \bar{C}^2 \tag{2.14}$$

Ahora definimos

$$w = (u^2 + \frac{\bar{C}^2}{2C+1})e^{-(2C+1)t}$$

$$w_t + a(u,x,t)w_x = (u^2)_t e^{-(2C+1)t} - (2C+1)e^{-(2C+1)t}(u^2 + \frac{\bar{C}^2)}{2C+1})+$$

$$a(u,x,t)(u^2)_x e^{-(2C+1)t} =$$

$$= e^{-(2C+1)t}((u^2)_t - (2C+1)(u^2 + \frac{\bar{C}^2)}{2C+1}) + a(u,x,t)(u^2)_x)$$

$$= e^{-(2C+1)t}((u^2)_t + a(u,x,t)(u^2)x - (2C+1)u^2 - \bar{C}^2)$$

usando la desigualdad (2.14):

$$\leq e^{-(2C+1)t}(u^2)_{xx} = w_{xx}$$

Luego

$$w_t + a(u,x,t)w_x \leq w_{xx} \tag{2.15}$$

Como el dato inicial $u_0 \leq M$, se cumple entonces:

$$w(x,0) = (u_0)^2 + \frac{\bar{C}^2}{2C+1} \leq M^2 + \frac{\bar{C}^2}{2C+1}$$

Usando el principio del máximo aplicado a (2.15), obtenemos $w(x,t) \leq M^2 + \frac{\bar{C}^2}{2C+1}$, y de la relación entre $w(x,t)$ y $u(x,t)$, se obtiene la siguiente estimación sobre $u(x,t)$:

$$|u(x,t)| \leq M(T), \ (x,t) \in \mathbb{R} \times [0,T]$$

donde $M(T) = [(M^2 + \frac{\bar{C}^2}{2C+1})e^{(2C+1)T}]^{\frac{1}{2}}$ □

Como consecuencia del lema anterior se obtiene el siguiente corolario:

Corolario 2.1.3. *Si* $u(x,t) \geq 0$ *satisface:*

$$u_t + a(u,x,t)u_x + g(u,x,t) \leq u_{xx}$$

y $|u(x,0)| \leq M$, $g(u,x,t) \geq Cu + \bar{C}$, *donde* $C, \bar{C} \in \mathbb{R}$ *y* $a(u,x,t)$ *es acotada. Entonces para cualquier* $T > 0$, *existe* $M(T) > 0$ *tal que* $u(x,t) \leq M(T)$ *en* $\mathbb{R} \times [0,T]$

Lema 2.1.4. *Sea* $(u^\epsilon(x,t), v^\epsilon(x,t))$ *una solución para el problema de Cauchy* (2.9) *Supongamos que se satisfacen:*

1) Las dos funciones $g_1(u,v)$ *y* $g_2(u,v)$ *son Lipschitz continuas.*

2) $g_2(u,v) = vh(u,v)$, $h(u,v) \in C(\mathbb{R}^2)$.

y que $v_0(x) \geq c_0 > 0$. *Si* $|u^\epsilon(x,t)| \leq M(\epsilon, c_0, T)$, $|v^\epsilon(x,t)| \leq M(\epsilon, c_0, T)$ *en* $\mathbb{R} \times [0,T]$, *entonces la solución satisface* $v^\epsilon(x,t) \geq c(t, c_0, \epsilon) > 0$ *en* $\mathbb{R} \times [0,T]$.

Demostración. Consideremos la segunda ecuación del sistema parabólico:

$$v_t + (v\phi(r))_x + g_2(u,v) = \epsilon v_{xx}$$

Si llamamos $w = \log v$, la anterior ecuación se puede escribir como

$$e^w w_t + e^w w_x \phi(r) + e^w \phi(r)_x + g_2(u,v) = \epsilon(e^w w_x^2 + e^w w_{xx})$$

que es equivalente a:

$$w_t + \phi(r)w_x + \phi(r)_x + h(u,v) = \epsilon(w_{xx} + w_x^2) \tag{2.16}$$

donde $h(u,v) = \frac{g_2(u,v)}{v}$
Por tanto:

$$w_t = \epsilon w_{xx} + \epsilon(w_x - \frac{\phi(r)}{2\epsilon})^2 - \phi(r)_x - \frac{\phi^2(r)}{4\epsilon} - h(u,v) \tag{2.17}$$

Considerando el problema (2.16), con dato inicial

$$w(x,0) = w_0(x) = \log v_0(x) \tag{2.18}$$

La solución w^ϵ de (2.16)-(2.18) tiene la representación dada por

$$\begin{aligned} w^\epsilon = \int_{-\infty}^{\infty} G^\epsilon(x-y,t)w_0(y)dy \ &+ \int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} [\epsilon(w_x - \frac{\phi(r)}{2\epsilon})^2 \\ &- \phi(r)_x - \frac{\phi^2(r)}{4\epsilon} - h(u,v)][G^\epsilon(x-y,t-s)]dyds \end{aligned} \tag{2.19}$$

donde $G^\epsilon(x,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi\epsilon t}} e^{-\frac{x^2}{4\epsilon t}}$
Como

$$\int_{-\infty}^{\infty} G^\epsilon(x-y,t)dy = 1 \text{ y } \int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} |G_y^\epsilon(x-y,t-s)|dyds = 2\sqrt{\frac{t}{\pi\epsilon}}, t > 0$$

Se sigue de (2.19), que

$$\begin{aligned} w^\epsilon \geq \log c_0 + \int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} (-\phi(r)_x - \frac{\phi^2(r)}{4\epsilon} - h(u,v))G^\epsilon(x-y,t-s)dyds \\ = \log c_0 + \int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} [\phi(r)G_y^\epsilon(x-y,t-s) \\ -(\frac{\phi^2(r)}{4\epsilon} + h(u,v))G^\epsilon(x-y,t-s)] \\ \geq \log c_0 - 2M_1\sqrt{\frac{t}{\pi\epsilon}} - M_2 t = -C(t,c_0,\epsilon) > -\infty \end{aligned}$$

Como $\log v^\epsilon \geq -C(t,c_0,\epsilon)$,
$v^\epsilon(x,t) \geq c_0(e^{-2M_1\sqrt{\frac{t}{\pi\epsilon}} - M_2 t}) = c(t,c_0,\epsilon) > 0$.. □

2.1.2. Leyes de conservación escalares

Consideraremos el problema de Cauchy para leyes de conservación escalares:

$$\begin{aligned} u_t + f(u)_x &= 0 \\ u(x,0) &= u_0(x) \end{aligned} \tag{2.20}$$

donde el dato inicial es medible y acotado.

Los siguientes lemas son acerca de compacidad de funciones de variación acotada y de compacidad compensada para el problema de Cauchy de ley de conservación escalar (2.20)

Lema 2.1.5. *Suponga que una sucesión de funciones $u^{\epsilon}(x,t)$ satisface:*

$$|u^{\epsilon}|_{L^{\infty}} \leq C|u_0|_{L^{\infty}}, VT(u^{\epsilon}) \leq CVT(u_0), \tag{2.21}$$

donde u^{ϵ} es una solución de viscosidad del problema (2.20) *, la constante C es independiente de ϵ y $VT(u)$ es la variación total de u. Entonces existe una subsucesión $\{u^{\epsilon_k}\}_{k=1}^{\infty}$ tal que*

$$u^{\epsilon_k}(t,x) \to u(t,x) \text{ en casi toda parte cuando } k \to \infty$$

Esta función límite es una solución débil acotada para el problema de Cauchy de leyes de conservación escalares (2.20)

Teorema 2.1.6. *Lema de Murat[2](págs. 29-33). Sea $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ una sucesión acotada en $W_{loc}^{-1,r}(\Omega)$ para algún r con $2 < r \leq \infty$, tal que $f_k = g_k + h_k$ ($k = 1, 2, ...$) donde g_k es precompacta en $W_{loc}^{-1,2}(\Omega)$ y h_k es acotada en el espacio $M(\Omega)$ (medidas de Radón en Ω). Entonces $\{f_k\}$ es precompacta en $W_{loc}^{-1,2}(\Omega)$*

El siguiente lema brinda una condición suficiente, bajo la cual las soluciones viscosas del problema parabólico asociado a (2.20) contienen una subsucesión que converge débil$-*$ a una solución débil del problema (2.20).

Lema 2.1.7. *[5] Suponga que una sucesión de funciones* $u^\epsilon(x,t)$ *satisface:* $|u^\epsilon(x,t)|_{L^\infty} \leq M$*, donde* $u^\epsilon(x,t)$ *es una aproximación viscosa del problema de Cauchy* (2.20) *y para los dos pares de entropía-flujo:*

$$(\eta_1(u), q_1(u)) = (u - k, f(u) - f(k))$$
$$(\eta_2(u), q_2(u)) = (f(u) - f(k)), \int_k^u f'(y)^2 dy$$

se satisface:
$\eta_i(u^\epsilon(x,t))_t + q_i(u^\epsilon(x,t))_x$ *es compacto en* $W_{loc}^{-1,2}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+)$*, donde* $k \in \mathbb{R}, i = 1, 2$*. Entonces:*

1. *Existe una subsucesión* $\{u^{\epsilon_k}\}_{k=1}^{\infty}$ *tal que:*
   $u^{\epsilon_k} \rightharpoonup^* u$ *cuando* $k \longrightarrow \infty$*, y* $f(u^{\epsilon_k}) \rightharpoonup^* u$ *cuando* $k \longrightarrow \infty$

2. *Más aún, si no existe un intervalo en que la función de flujo* $f(u)$ *sea lineal entonces la sucesión* $u^\epsilon(t,x)$ *es compacta en* $L^1_{loc}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+)$*. Esto es, si* $f \in C^2(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+)$ *y el conjunto* $\{u : f''(u) = 0\}$ *tiene medida 0, entonces* $u^\epsilon_k(t,x) \to u(t,x)$ *en casi toda parte. Esta función límite* $u(t,x)$ *es una solución débil acotada para el problema de Cauchy escalar* (2.20)*.*

2.1.3. El teorema principal

A continuación enunciaremos el teorema principal de existencia obtenido en [7]

Suponemos que las funciones $g_1(u,v)$ y $g_2(u,v)$ satisfacen las siguientes condiciones:

H1) Las dos funciones $g_1(u,v)$ y $g_2(u,v)$ son Lipschitz continuas.

H2) $ug_1(u,v) + vg_2(u,v) \geq Cr + \tilde{C}$, donde $C, \tilde{C}$ son constantes.

H3) $g_2(u,v) = vh(u,v)$, $h(u,v) \in C(\mathbb{R}^2)$.

H4) $\left|\frac{vg_1(u,v)-ug_2(u,v)}{v^2}\right| \leq C_1 \left|\frac{u}{v}\right| + \tilde{C}_1 > 0$

H5) Existe una función continua G tal que:

$$\frac{vg_1(u,v) - ug_2(u,v)}{v^2} = G(\frac{u}{v})$$

y $G'(w) \geq 0$.

Teorema 2.1.8. *1. Suponga que el dato inicial* $(u_0(x), v_0(x))$ *es medible y acotado, y se satisfacen (H1)-(H2). Entonces, para cada* $\epsilon > 0$, *la solución de viscosidad* $(u^\epsilon(x,t), v^\epsilon(x,t))$ *del problema de Cauchy* (2.9) *existe y es uniformemente acotada con respecto al parámetro viscoso* ϵ.

2. Si además se cumple que el conjunto $\{r : 3r\phi'(r) + 2r^2\phi''(r) = 0\}$ *tiene medida 0, entonces existe una subsucesión de* $r^\epsilon = (u^\epsilon)^2 + (v^\epsilon)^2$, (r^{ϵ_k}) *que converge puntualmente a una función* $l(x,t)$.

3. Si $v_0(x) \geq c_0 > 0$ *para una constante* c_0, *la variación de* $\frac{u_0(x)}{v_0(x)}$ *es acotada en* $(-\infty, \infty)$ *y se satisfacen las condiciones H1)-H5), entonces existe una subsucesión de* (u^ϵ, v^ϵ) *(ya renombrada* (u^ϵ, v^ϵ)*) que converge puntualmente a un par de funciones* $(u(x,t), v(x,t))$ *tales que* $l(x,t) = u^2(x,t) + v^2(x,t)$, *que, combinado con 2), implica que el límite débil* (u,v) *es una solución débil del sistema hiperbólico* (2.8).

Demostración. 1) Como el dato inicial es medible y acotado, $\phi \in C^2(\mathbb{R}^+)$ y por tanto $u\phi, v\phi \in C^1(\mathbb{R}^2)$, y dada la hipótesis H1), por el lema 2.1.1 existe una solución $(u^\epsilon, v^\epsilon) \in C^\infty(\mathbb{R} \times (0, t_0))$ para un tiempo pequeño t_0. Por el mismo lema (2) para demostrar la acotación uniforme, es suficiente obtener una estimación a priori sobre la solución para cada $T > 0$ fijo.

Multiplicamos la primera ecuación del sistema parabólico (2.9) por $2u$, la segunda por $2v$ y obtenemos:

$$(u^2)_t + (u^2)_x\phi(r) + 2u^2(\phi(r)_x)) + 2ug_1(u,v) = 2\epsilon u u_{xx}$$
$$(v^2)_t + (v^2)_x\phi(r) + 2v^2(\phi(r)_x)) + 2vg_1(u,v) = 2\epsilon v v_{xx}$$

al sumar las dos ecuaciones se obtiene:

$$r_t+\phi(r)r_x+2r(\phi(r))_x+2(ug_1(u,v)+vg_2(u,v)) = 2\epsilon(uu_{xx}+vv_{xx}) \quad (2.22)$$

como $r_{xx} = 2(uu_{xx} + vv_{xx}) + 2(u_x^2 + v_x^2)$, la anterior ecuación
es equivalente a:

$$r_t + \phi(r)r_x + 2r(\phi(r))_x + 2ug_1 + 2vg_2 = \epsilon r_{xx} - 2\epsilon(u_x^2 + v_x^2) \quad (2.23)$$

Haciendo $f(r) = \int_0^r \phi(s) + 2r\phi'(s)ds$ escribimos la igualdad como

$$r_t + f(r)_x + 2(ug_1(u,v) + vg_2(u,v)) = \epsilon r_{xx} - 2\epsilon(u_x^2 + v_x^2)$$

De esta igualdad y la hipótesis H2), se deduce:

$$r_t + f(r)_x + 2Cr + 2\tilde{C} \leq \epsilon r_{xx} \quad (2.24)$$

Como $u_0(x), v_0(x) \in L^\infty$ se cumple $r(x,0) = u^2(x,0) + v^2(x,0) \leq M$
Por el corolario 2.1.3 aplicado a (2.24), para todo $T > 0$ existe $M(T) > 0$
tal que $r^\epsilon(x,t) \leq M(T)$ donde $M(T)$ es independiente de ϵ, esto es:

$$r^\epsilon = (u^\epsilon)^2 + (v^\epsilon)^2 \leq M(T), (x,t) \in \mathbb{R} \times [0,T]$$

lo cual implica

$$|u^\epsilon(x,t)| \leq M(T), |v^\epsilon(x,t)| \leq M(T)$$

y por la parte 2) del lema 2.1.1 las aproximaciones viscosas existen en $\mathbb{R} \times [0,T]$.

2) Ahora veremos la convergencia fuerte de r^ϵ; para ello sea $\Phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^+)$ una función de testeo, tal que $\Phi_K = 1$, $0 \leq \Phi \leq 1$ donde K es un subconjunto compacto del soporte de Φ. Multiplicamos la ecuación (2.22) por Φ y obtenemos:

$$\int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty 2\epsilon((u_x^\epsilon)^2 + (v_x^\epsilon)^2)\Phi dxdt$$
$$= \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty [\epsilon r_{xx} - r_t - f(r)_x - ug_1(u,v) - vg_2(u,v)]\Phi dxdt$$
$$= \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty \epsilon r\Phi_{xx} + r\Phi_t + f(r)\Phi_x dxdt - \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty (ug_1(u,v) + vg_2(u,v))\Phi dxdt$$
$$\leq M(\Phi)$$

y por tanto

$$\epsilon(u_x^\epsilon)^2 \text{ y } \epsilon(v_x^\epsilon)^2 \text{ son acotadas en } L^1_{loc}(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^+). \tag{2.25}$$

Ahora sea $(\eta(r), q(r))$ un par de entropía-flujo para la ecuación escalar

$$r_t + f(r)_x + 2ug_1(u,v) + 2vg_2(u,v) = 0$$

Esto es: $\eta'(r)f'(r) = q'(r)$

Multiplicando (2.22) por $\eta'(r)$, se obtiene:

$$\eta'(r)r_t + \eta'(r)f(r)_x + \eta'(r)(2ug_1(u,v) + 2vg_2(u,v)) = \epsilon\eta'(r)r_{xx} - 2\epsilon\eta'(r)(u_x^2 + v_x^2)$$

luego

$$\eta(r)_t + q(r)_x = \epsilon(\eta'(r)r_x)_x - \epsilon\eta''(r)r_x^2 - 2\epsilon\eta'(r)(u_x^2 + v_x^2)$$
$$-\eta'(r)(2ug_1(u,v) + 2vg_2(u,v))$$
$$= \epsilon(\eta(r))_{xx} - \epsilon\eta''(r)r_x^2 - 2\epsilon\eta'(r)(u_x^2 + v_x^2)$$

$$
\begin{aligned}
&-2\eta'(r)(ug_1(u,v)+vg_2(u,v)) \\
&\quad = I_1 - I_2 - I_3 - I_4
\end{aligned} \tag{2.26}
$$

Como r^ϵ es acotada, y por (2.25), la sucesión $I_2 + I_3$ es acotada en $L^1_{loc}(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^+)$.

Además, por la parte 1) $I_4 \in L^\infty(\mathbb{R}\times[0,T])$

Y también I_1 es compacta en $W^{-1,2}_{loc}(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^+)$, luego I_4 es acotada en $L^1_{loc}(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^+)$, y por tanto $I_1 - I_2 - I_3 - I_4$ es compacta en $W^{-1,\alpha}_{loc}(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^+)$ para $\alpha \in (1,2)$ por (2.25).

Sean

$$(\eta_1(r), q_1(r)) = (r-k, f(r)-f(k))$$

y

$$(\eta_2(r), q_2(r)) = (f(r)-f(k), \int_k^r (f'(s))^2 ds)$$

con k una constante arbitraria.

Como $\eta(r)_t + q(r)_x$ es acotada en $W^{-1,\infty}$, usando el Lema de Murat se concluye que:

$$\eta_i(r^\epsilon(x,t))_t + q_i(r^\epsilon(x,t))_x \text{ es compacta en } W^{-1,2}_{loc}(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^+) \tag{2.27}$$

para $i = 1, 2$

Por la parte 2 del lema 2.1.7 como el segundo campo característico de F es linealmente degenerado en un conjunto de medida 0, existe una subsucesión de r^ϵ (nombrada de la misma forma) tal que $r^\epsilon(x,t) \to l(x,t)$ en casi toda parte.

3) Como se cumplen H1), H3) y $v_0(x) \geq c_0$, por el lema 2.1.4 obtenemos que $v^\epsilon \geq c(t, c_0, \epsilon)$.
Ahora probaremos la convergencia fuerte de $(u^\epsilon, v^\epsilon) \to (u, v)$.

Multiplicando la primera ecuación del sistema parabólico por v, la segunda por u, restando y dividiendo por v^2 (omitiendo el superíndice ϵ) se obtiene:

$$\frac{vu_t - uv_t + \phi(r)(vu_x - uv_x) + vg_1(u,v) - ug_2(u,v)}{v^2} = \frac{\epsilon(vu_{xx} - uv_{xx})}{v^2}$$

Utlizando las derivadas $\left(\frac{u}{v}\right)_t$, $\left(\frac{u}{v}\right)_x$ y $\left(\frac{u}{v}\right)_{xx} = \frac{vu_{xx}-uv_{xx}}{v^2} - \frac{2v_x}{v}\left(\frac{u}{v}\right)_x$, la igualdad anterior se puede escribir como:

$$\left(\frac{u^\epsilon}{v^\epsilon}\right)_t + \lambda_1\left(\frac{u^\epsilon}{v^\epsilon}\right)_x = \epsilon\left(\frac{u^\epsilon}{v^\epsilon}\right)_{xx} +$$

$$+2\epsilon\frac{v_x^\epsilon}{v^\epsilon}\left(\frac{u^\epsilon}{v^\epsilon}\right)_x - \frac{v^\epsilon g_1(u^\epsilon, v^\epsilon) - u^\epsilon g_2(u^\epsilon, v^\epsilon)}{(v^\epsilon)^2} \tag{2.28}$$

Utilizando H4) y usando el principio del máximo obtenemos que $\frac{u^\epsilon}{v^\epsilon}$ es uniformente acotada con respecto a ϵ.

De acuerdo al lema 2.1.5, es suficiente con mostrar que la variación total de $\left(\frac{u^\epsilon}{v^\epsilon}\right)_v$ es acotada en $(-\infty,\infty)$, para ésto derivamos (2.28) con respecto a x y tenemos:

$$\left(\frac{u^\epsilon}{v^\epsilon}\right)_{tx} + \lambda_1\left(\frac{u^\epsilon}{v^\epsilon}\right)_{xx} = \epsilon\left(\frac{u^\epsilon}{v^\epsilon}\right)_{xxx}$$

$$+2\epsilon\left(\frac{v_x^\epsilon}{v^\epsilon}\right)_x\left(\frac{u_x^\epsilon v^\epsilon - u^\epsilon v_x^\epsilon}{(v^\epsilon)^2}\right)_x - \left(\frac{v^\epsilon g_1(u\epsilon, v^\epsilon) - u^\epsilon g_2(u\epsilon, v^\epsilon)}{(v^\epsilon)^2}\right)_x$$

Luego multiplicamos el resultado por la sucesión de funciones suaves $m'(\theta,\alpha)$ donde $\theta = \left(\frac{u^\epsilon}{v^\epsilon}\right)$ y α es un parámetro, y obtenemos:

$$m(\theta,\alpha)_t + (\lambda_1 m(\theta,\alpha))_x + (m'(\theta,\alpha)\theta - m(\theta,\alpha))\lambda_{1x} =$$

$$= \epsilon m(\theta,\alpha)_{xx} - \epsilon m''(\theta,\alpha)\theta_x^2 + \left(2\epsilon\frac{v_x^\epsilon}{v^\epsilon}m(\theta,\alpha)\right)_x + \left(2\epsilon\frac{v_x^\epsilon}{v^\epsilon}\right)_x(m'(\theta,\alpha)\theta - m(\theta,\alpha))$$

$$-m'(\theta,\alpha)\left(\frac{v^\epsilon g_1(u^\epsilon, v^\epsilon) - u^\epsilon g_2(u^\epsilon, v^\epsilon)}{(v^\epsilon)^2}\right)_x$$

Escogiendo $m(\theta,\alpha)$ tal que $m''(\theta,\alpha)\geq 0$, $m'(\theta,\alpha)\to \operatorname{sgn}\theta$ y $m(\theta,\alpha)\to|\theta|$ cuando $\alpha\to 0$ tenemos que:

$$
\begin{aligned}
|\theta|_t + (\lambda_1|\theta|)_x \leq \epsilon|\theta|_{xx} + \left(2\epsilon\frac{v^\epsilon_x}{v^\epsilon}|\theta|\right)_x \\
- \operatorname{sgn}\theta\left(\frac{v^\epsilon g_1(u^\epsilon,v^\epsilon) - u^\epsilon g_2(u^\epsilon,v^\epsilon)}{(v^\epsilon)^2}\right)_x
\end{aligned}
$$

Usando la hipótesis H5), tenemos

$$
|\theta|_t + (\lambda_1|\theta|)_x \leq \epsilon|\theta|_{xx} + \left(2\epsilon\frac{v^\epsilon_x}{v^\epsilon}|\theta|\right)_x - G'\left(\frac{u^\epsilon}{v^\epsilon}\right)|\theta|
$$

por tanto

$$
|\theta|_t + (\lambda_1|\theta|)_x \leq \epsilon|\theta|_{xx} + \left(2\epsilon\frac{v^\epsilon_x}{v^\epsilon}|\theta|\right)_x \tag{2.29}
$$

integrando (2.29) en $\mathbb{R}\times[0,t]$, tenemos

$$
\int_{-\infty}^{\infty}|\theta(x,t)|dx \leq \int_{-\infty}^{\infty}|\theta(x,0)|dx \leq M
$$

Como $VT\left(\frac{u^\epsilon(x,t)}{v^\epsilon(x,t)}\right) = \int_{-\infty}^{\infty}|\theta(x,t)|dx$

$VT\left(\frac{u^\epsilon(x,t)}{v^\epsilon(x,t)}\right) \leq VT\left(\frac{u^\epsilon(x,0)}{v^\epsilon(x,0)}\right) \leq M$

Y de acuerdo al lema 2.1.5, esto implica la convergencia puntual de una subsucesión de $\frac{u^\epsilon}{v^\epsilon}$. De este resultado y la parte 2) del teorema, se obtiene una subsucesión de (u^ϵ,v^ϵ) que converge a (u,v), donde (u,v) es una solución global acotada del problema de Cauchy (2.8).

□

Si bien el resultado anterior es aplicable a una gran variedad de funciones ϕ, las restricciones impuestas a las funciones g_1 y g_2 son un poco fuertes. He aquí un ejemplo de funciones g_1 y g_2, que satisfacen las hipótesis H1)-H5).

Ejemplo 2.1.1. Sean $g_1(u,v)=au+bv$ y $g_2(u,v)=cv$ donde $a\geq c$.

- Estas funciones son localmente Lipschitz.
- Para verificar H2), veamos que la constante $k = \text{mín}\{\frac{2c+b}{2}, \frac{2c-b}{2}\}$ satisface la desigualdad $ug_1(u,v) + vg_2(u,v) = au^2 + buv + cv^2 \geq kr$:
  Si $u = 0$ o $v = 0$ se cumple la desigualdad ya que $a \geq c \geq k$. Si $u \neq 0, v \neq 0$,entonces:
  Claramente $2k \leq 2c + b$ y $2k \leq 2c - b$
  luego
  $2(c-k) + b\,\text{sgn}(uv) \geq 0$ y por tanto
  $(2(c-k) + b\,\text{sgn}(uv))|uv| \geq 0$
  esto es
  $2|uv|(c-k) + buv \geq 0$ como
  $2|uv| \leq u^2 + v^2$, entonces
  $c(u^2+v^2) - k(u^2+v^2) + buv \geq 0$
  luego $au^2 + buv + cv^2 \geq kr$ (ya que $a \geq c$).
- $g_2(u,v) = cv$, de modo que $h(u,v) = c$
- $|\frac{vg_1(u,v) - ug_2(u,v)}{v^2}| = |\frac{auv + bv^2 - cuv}{v^2}| \leq (a-c)|\frac{u}{v}| + |b|$
- $\frac{vg_1(u,v) - ug_2(u,v))}{v^2} = (a-c)\frac{u}{v} + b = G(\frac{u}{v})$, de modo que $G(w) = (a-c)w + b$ cumple la hipótesis requerida (ya que $G'(w) = a - c \geq 0$)

Bibliografía

[1] **Evans, Lawrence** *Partial differential equations* Graduate Studies in Mathematics, Vol 19, 1998.

[2] **Frid, Hermano** *Compacidade compensada aplicada as leis de conservaçao*

[3] **Keyfitz, Barbara. Kranzer Herbert** *A system of non-strictly hyperbolic conservation law arising in elasticity theory* C Dafermos, 1979.

[4] **Lu, Yunguang.**, *Hyperbolic conservation laws and the compensated compactness method*, Chapman and Hall, New York 2002. Vol 128

[5] **Lu, Yunguang**, *Global weak solution for a symmetrically hyperbolic system*, Appl. Math Lett. 19 (2006), 522-526.

[6] **Smoller, Joel**, *Shock Waves and reaction-diffusion equations* Springer-Verlag, New York, 1982.

[7] **Song, Guo Quiang**, *Existence of global weak solutions to a simmetrically hyperbolic system with a source*, Revista colombiana de matemáticas Vol. 42 (2008-2), 221–232.

[8] **Yan, Cheng, Tao** *Conservation laws I: viscosity solutions*, Revista colombiana de matemáticas, Vol. 41 (2007), 81-90.