Comportamiento asintótico del núcleo asociado a polinomios ortogonales en varias variables

Wilmer Merardo Gómez Blanco

Código: 01830509

Universidad Nacional de Colombia

Facultad de Ciencias

Departamento de Matemáticas

Bogotá, D.C.

Mayo de 2014

Comportamiento asintótico del núcleo asociado a polinomios ortogonales en varias variables

WILMER MERARDO GÓMEZ BLANCO
CÓDIGO: 01830509

TRABAJO DE GRADO PRESENTADO COMO REQUISITO PARCIAL
PARA OPTAR AL TÍTULO DE:
MAGÍSTER EN CIENCIAS MATEMÁTICAS

DIRECTOR
PH.D. HERBERT ALONSO DUEÑAS RUIZ

LÍNEA DE INVESTIGACIÓN
POLINOMIOS ORTOGONALES

UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA
FACULTAD DE CIENCIAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS
BOGOTÁ, D.C.
MAYO DE 2014

Resumen: Se estudia un producto interno tipo Sobolev para polinomios ortogonales en varias variables. Se analiza el comportamiento asintótico de las funciones núcleo asociadas a los polinomios ortogonales tipo Sobolev sobre la bola unidad en d variables, evaluando en puntos como el origen y puntos con norma 1.

Abstract: We study a Sobolev type inner product for orthogonal polynomials in several variables. We analyze the asymptotic behavior of the kernel functions associated with Sobolev type orthogonal polynomials on the unit ball in d variables, evaluated in points as the origin and points with norm 1.

Palabras clave: Polinomios ortogonales en varias variables. Producto interno tipo Sobolev. Funciones núcleo. Comportamiento asintótico..

Keywords: Orthogonal polynomials in several variables. Sobolev-type inner product. Kernel functions. Asymptotic behavior.

Agradecimientos

Agradezco en especial al Ph.D. Herbert Alonso Dueñas Ruiz, director de este trabajo, por su asesoría, paciencia y gran colaboración en el dearrollo del trabajo.

Agradezco al profesor Luis Alfonso Salcedo Plazas, por su colaboración para hacer posible la realización de los estudios de Maestría.

Agradezco a los profesores Hector Súarez y Veronica Cifuentes, quienes desde un principio me apoyaron en la realización de los estudios de Maestría.

Índice general

Índice de tablas

Introducción

En los últimos años se le ha brindado especial atención a las clases de polinomios ortogonales no estándar, dentro de los que encontramos los polinomios ortogonales tipo Sobolev, los cuales están asociados con productos internos definidos sobre el espacio lineal de los polinomios con coeficientes reales. Estos productos internos son de la forma:

$$\begin{aligned}\langle p, q\rangle &= \langle p, q\rangle_\sigma + \sum_{i=0}^{j} \lambda_i p^{(i)}(\xi) q^{(i)}(\xi) \\ &= \int_E p(x)q(x)d\sigma(x) + \sum_{i=0}^{j} \lambda_i p^{(i)}(\xi) q^{(i)}(\xi),\end{aligned} \tag{1}$$

donde $E \subseteq \mathbb{R}$, $j \in \mathbb{N}$. $\xi \in \mathbb{R}$, $\lambda_i \in \mathbb{R}^+$ y σ es en general una medida positiva, aunque se ha prestado especial atención a las medidas correspondientes a los polinomios clásicos (Jacobi, Laguerre, Hermite).

Las características no estándar de esta clase de productos internos radica en la presencia de derivadas y que el operador asociado a la multiplicación por x, no es simétrico, es decir:

$$\langle xp, q\rangle \neq \langle p, xq\rangle,$$

para cualquier par de polinomios p y q.

Los polinomios asociados al producto interno (1), se denominan *polinomios ortogonales tipo Sobolev* o *polinomios perturbados* y los polinomios ortogonales asociados al producto interno $\langle p, q\rangle_\sigma$ se denominan *polinomios originales*.

Nosotros estudiamos un caso particular del producto interno (1), para polinomios ortogonales en varias variables. Al igual que en [10], las derivadas son remplazadas por un operador gradiente de orden j; a partir de allí, se busca una expresión para los polinomios perturbados en términos de los polinomios originales y una expresión para las funciones núcleo asociadas a los polinomios perturbados en términos de las funciones núcleo asociadas a los polinomios originales. Además, se realiza un análisis del comportamiento asintótico de las funciones núcleo asociadas tanto a los polinomios originales como a los perturbados.

En [10], los autores analizan el comportamiento asintótico de las funciones núcleo, asociadas a los polinomios ortogonales originales y perturbados para una elección en particular de medida $\sigma \in \mathbb{R}^d$ en los puntos $\mathbf{x} = \mathbf{0} = (0, 0, \ldots, 0)$ y $\mathbf{y} = \mathbf{0} = (0, 0, \ldots, 0)$ de la bola unidad en d variables, para lo cual obtienen expresiones de las funciones núcleo y sus derivadas hasta de cuarto orden, lo cual es una continuación del trabajo realizado en [8]. El presente trabajo pretende continuar con este caso particular de una elección de medida σ, pero realizar el análisis del comportamiento asintótico no únicamente en los puntos $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ y $\mathbf{y} = \mathbf{0}$, sino ampliar el análisis evaluando en cualquier punto de la bola unidad en d variables que tengan norma 1.

CAPÍTULO 1

Polinomios ortogonales en la recta real

En este capítulo presentamos las definiciones y propiedades más relevantes de polinomios ortogonales en una variable, las cuales servirán de herramienta fundamental para el estudio de polinomios ortogonales en varias variables. Además, se dan a conocer los polinomios ortogonales clásicos, en particular los polinomios de Jacobi que serán empleados en el capítulo 3. Las demostraciones de los teoremas 1.1 al 1.11 se pueden consultar en [6] o [14].

1.1. Función gamma

La función gamma denotada por $\Gamma(x)$, emplea la integral para generalizar la función factorial de los números enteros no negativos a otros valores reales. Una manera de definir la función gamma para cualquier real positivo es:

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}dt, \qquad x > 0.$$

Una de las propiedades más importantes de la función gamma es la fórmula de recurrencia:

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x), \qquad x > 0, \tag{1.1}$$

la cual se obtiene al aplicar integración por partes en la definición dada.

A partir de la fórmula de recurrencia se pueden deducir las siguientes propiedades:

- Dado n un entero no negativo,

$$\Gamma(n+1) = n!,$$

-

$$\left(\begin{array}{c} n \\ k \end{array} \right) = \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(k+1)\Gamma(n-k+1)}.$$

Para el estudio de propiedades de la función gamma, entre ellas, las que tienen que ver con su comportamiento asintótico, se emplea la fórmula de Stirling (ver [5]):

$$\frac{\Gamma(n+k)}{\Gamma(n+1)} = n^{k-1}(1+\mathcal{O}(n^{-1})), \qquad n \to \infty.$$

1.2. Funcionales de momentos

Sean $\{\mu_n\}_{n\geqslant 0}$ una sucesión de números reales y $\mathcal{L}$ un funcional lineal en el espacio $\mathcal{P}$ de los polinomios con coeficientes reales, tal que:

$$\mathcal{L}\left[x^n\right] = \mu_n, \qquad n = 0, 1, 2, ...$$

$\mathcal{L}$ se denomina un *funcional de momentos* asociado a la *sucesión de momentos* $\{\mu_n\}_{n\geqslant 0}$. Además, el número μ_n se denomina el *momento de orden* n del funcional lineal $\mathcal{L}$.

Si

$$\phi(x) = \sum_{k=0}^{n} c_k x^k,$$

es un polinomio con coeficientes reales, entonces

$$\mathcal{L}\left[\phi(x)\right] = \sum_{k=0}^{n} c_k \mu_k.$$

1.3. Polinomios ortogonales

Una sucesión de polinomios $\{P_n(x)\}_{n\geqslant 0}$ se denomina una *sucesión de polinomios ortogonales (SPO)* respecto a un funcional de momentos $\mathcal{L}$, si para cualquier par de números naturales n y m se cumple:

1. El grado de $P_n(x)$ es n,
2. $\mathcal{L}\left[P_n(x)P_m(x)\right] = R_n\delta_{mn}, \qquad R_n \neq 0,$

donde δ_{mn} es la función *delta de Kronecker* definida por:

$$\delta_{mn} = \begin{cases} 0 & \text{si } m \neq n \\ 1 & \text{si } m = n. \end{cases}$$

Si $\{P_n(x)\}_{n\geqslant 0}$ es una SPO respecto a un funcional de momentos $\mathcal{L}$ y además $\mathcal{L}\left[P_n(x)P_n(x)\right] = \mathcal{L}\left[P_n^2(x)\right] = 1$ para todo $n \geqslant 0$, entonces se dice que $\{P_n(x)\}_{n\geqslant 0}$ es una *sucesión de polinomios ortonormales.*

Siempre que se tenga una SPO $\{P_n(x)\}_{n\geqslant 0}$, ésta se puede normalizar y obtener una sucesión de polinomios ortonormales multiplicando por una constante adecuada cada polinomio de la SPO, así:

$$Q_n(x) = \left\{\mathcal{L}\left[P_n^2(x)\right]\right\}^{-1/2} \cdot P_n(x),$$

donde $\{Q_n(x)\}_{n\geqslant 0}$ es la sucesión de polinomios ortonormales correspondientes a la SPO $\{P_n(x)\}_{n\geqslant 0}$.

Si el coeficiente principal de cada $P_n(x)$ es 1, se dice que $\{P_n(x)\}_{n\geqslant 0}$ es una *sucesión de polinomios ortogonales mónicos SPOM.*

Siempre que se tenga una SPO existe la correspondiente SPOM, basta con multiplicar cada polinomio por el inverso de su coeficente principal, así:

$$\tilde{P}_n(x) = k_n^{-1} P_n(x),$$

donde k_n es el coeficiente principal del polinomio $P_n(x)$. $\left\{\tilde{P}_n(x)\right\}_{n\geqslant 0}$ es la SPOM correspondiente a la SPO $\{P_n(x)\}_{n\geqslant 0}$.

Teorema 1.1. *Dados $\mathcal{L}$ un funcional de momentos y $\{P_n(x)\}_{n\geqslant 0}$ una sucesión de polinomios. Las siguientes proposiciones son equivalentes:*

1. $\{P_n(x)\}_{n\geqslant 0}$ *es una SPO con respecto a $\mathcal{L}$,*
2. *Dado $\phi(x)$ un polinomio cualquiera de grado m,*

$$\mathcal{L}\left[\phi(x)P_n(x)\right] = \begin{cases} 0 & si\ m < n \\ a_n \neq 0 & si\ m = n, \end{cases}$$

3. $\mathcal{L}\left[x^m P_n(x)\right] = R_n \delta_{mn}, \quad R_n \neq 0, \quad m = 0, 1, ..., n.$

El Teorema 1.1 indica que para verificar si una sucesión de polinomios $\{P_n(x)\}_{n\geqslant 0}$ es una SPO, no se necesita verificar las dos condiciones de la definición original de SPO con todos los $P_n(x)$ de la sucesión; es suficiente mirar la ortogonalidad de cada polinomio $P_n(x)$ de la sucesión con respecto a los monomios $\{1, x, x^2, x^3, ..., x^n\}$.

Teorema 1.2. *Sea $\{P_n(x)\}_{n\geqslant 0}$ una SPO respecto a $\mathcal{L}$. Entonces para cada polinomio $\phi(x)$ de grado n, $\phi(x)$ esta dado por:*

$$\phi(x) = \sum_{k=0}^{n} c_k P_k(x),$$

donde

$$c_k = \frac{\mathcal{L}\left[\phi(x)P_k(x)\right]}{\mathcal{L}\left[P_k^2(x)\right]}, \qquad k = 0, 1, 2, ...n.$$

El Teorema 1.2 determina que cualquier SPO es una base para el espacio $\mathcal{P}$ de los polinomios con coeficientes reales.

Teorema 1.3. *Salvo constantes, una SPO $\{P_n(x)\}_{n\geqslant 0}$ es única. Es decir, dada una SPO $\{P_n(x)\}_{n\geqslant 0}$ respecto a $\mathcal{L}$, si $\{Q_n(x)\}_{n\geqslant 0}$ es también una SPO respecto a $\mathcal{L}$, entonces existe $c_n \neq 0$ tal que:*

$$Q_n(x) = c_n P_n(x), \qquad n = 0, 1, 2, ...$$

Para determinar condiciones de existencia de una SPO, tomamos la matriz de Hankel que está definida mediante:

$$\mathrm{H}=\begin{pmatrix} \mu_0 & \mu_1 & \mu_2 & \cdots & \mu_n & \cdots \\ \mu_1 & \mu_2 & \mu_3 & \cdots & \mu_{n+1} & \cdots \\ \mu_2 & \mu_3 & \mu_4 & \cdots & \mu_{n+2} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \\ \mu_n & \mu_{n+1} & \mu_{n+2} & \cdots & \mu_{2n} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \ddots \end{pmatrix}.$$

Un funcional de momentos $\mathcal{L}$ se denomina *cuasi-definido* o *regular* si y solo si $\Delta_n \neq 0$ para $n \geq 0$, donde $\Delta_n = det(\mathrm{H}_n)$ es el determinante de orden $n+1$ de la submatriz principal de Hankel de orden $n+1$:

$$\Delta_n = det(\mu_{i+j})_{i,j=0}^{n} = \begin{vmatrix} \mu_0 & \mu_1 & \mu_2 & \cdots & \mu_n \\ \mu_1 & \mu_2 & \mu_3 & \cdots & \mu_{n+1} \\ \mu_2 & \mu_3 & \mu_4 & \cdots & \mu_{n+2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \mu_n & \mu_{n+1} & \mu_{n+2} & \cdots & \mu_{2n} \end{vmatrix}.$$

El siguiente teorema determina condiciones necesarias y suficientes para la existencia de una SPO $\{P_n(x)\}_{n\geqslant 0}$ respecto a un funcional de momentos $\mathcal{L}$ asociado a $\{\mu_n\}_{n\geqslant 0}$.

Teorema 1.4. *Una condición necesaria y suficiente para la existencia de una SPO con respecto a un funcional de momentos* $\mathcal{L}$ *asociado a* $\{\mu_n\}_{n\geqslant 0}$ *es que* $\mathcal{L}$ *sea regular.*

Teorema 1.5. *Sea* $\{P_n(x)\}_{n\geqslant 0}$ *una SPO respecto a* $\mathcal{L}$*. Entonces para todo polinomio* $\phi_n(x)$ *de grado* n*:*

$$\mathcal{L}\left[\phi_n(x)P_n(x)\right] = a_n\mathcal{L}\left[x^nP_n(x)\right] = \frac{a_nk_n\Delta_n}{\Delta_{n-1}}, \quad \Delta_{-1}=1,$$

donde a_n *denota el coeficiente principal de* $\phi_n(x)$ *y* k_n *denota el coeficiente principal de* $P_n(x)$*.*

Un funcional de momentos $\mathcal{L}$ se denomina *definido positivo* si $\mathcal{L}\left[\phi(x)\right] > 0$ para todo polinomio $\phi(x)$ que no es idénticamente cero y es no negativo para todo real x.

Dado $S \subset \mathbb{R}$. Un funcional de momentos $\mathcal{L}$ se denomina *definido positivo sobre* S si y solo si $\mathcal{L}\left[\phi(x)\right] > 0$ para todo polinomio $\phi(x)$ que no es idénticamente cero sobre S y es no negativo sobre S. El conjunto S se denomina un *conjunto soporte* para $\mathcal{L}$.

A continuación, se muestran varios resultados importantes en el estudio de polinomios ortogonales: la relación de recurrencia a tres términos, el Teorema de Favard, la fórmula de Christoffel-Darboux y algunas propiedades de los ceros de los polinomios ortogonales.

Teorema 1.6. *(Relación de recurrencia a tres términos) Sean $\mathcal{L}$ un funcional de momentos cuasi-definido y $\{P_n(x)\}_{n\geqslant 0}$ la correspondiente SPOM. Entonces existen sucesiones de números reales $\{a_n\}_{n\geqslant 0}$ y $\{b_n\}_{n\geqslant 0}$ con $b_n \neq 0$ para cada $n \in \mathbb{N}$, tales que:*

$$P_{n+1}(x) = (x - a_n)P_n(x) - b_n P_{n-1}(x), \qquad n = 0, 1, 2, ..., \tag{1.2}$$

con $P_{-1}(x) = 0$, $P_0(x) = 1$.

Además, cada elemento de las sucesiones $\{a_n\}_{n\geqslant 0}$ y $\{b_n\}_{n\geqslant 0}$ está dado por:

$$a_n = \frac{\mathcal{L}\left[xP_n^2(x)\right]}{\mathcal{L}\left[P_n^2(x)\right]},$$

$$b_{n+1} = \frac{\mathcal{L}\left[P_{n+1}^2(x)\right]}{\mathcal{L}\left[P_n^2(x)\right]}.$$

Si $\{P_n(x)\}_{n\geqslant 0}$ es una SPO no mónica, denotando $P_n(x) = k_n\tilde{P}_n(x)$, donde $\tilde{P}_n(x)$ es mónico, entonces $\{P_n(x)\}_{n\geqslant 0}$ satisface una relación de recurrencia de la forma:

$$P_{n+1}(x) = (A_n x - B_n)P_n(x) - C_n P_{n-1}(x), \qquad n = 0, 1, 2, ...,$$

con

$$A_n = k_n^{-1}k_{n+1}, \qquad B_n = a_{n+1}k_n^{-1}k_{n+1}, \qquad C_n = b_{n+1}k_n^{-1}k_{n+1}, \qquad n \geq 0,$$

donde $k_{-1} = 1$, y a_n, b_n están dados por el Teorema 1.6 en términos de $\{\tilde{P}_n(x)\}$.

El recíproco de la relación de recurrencia a tres términos es verdadero y es el siguiente resultado:

Teorema 1.7. *(El Teorema de Favard) Sean $\{a_n\}_{n\geqslant 0}$ y $\{b_n\}_{n\geqslant 0}$ sucesiones de números reales y $\{P_n(x)\}_{n\geqslant 0}$ una sucesión de polinomios dada por:*

$$P_{n+1}(x) = (x - a_n)P_n(x) - b_n P_{n-1}(x), \qquad n = 0, 1, 2, ...,$$

con

$$P_{-1}(x) = 0, \qquad P_0(x) = 1.$$

Entonces existe un único funcional de momentos $\mathcal{L}$ tal que:

$$\mathcal{L}[1] = b_0, \qquad \mathcal{L}[P_n(x)P_m(x)] = 0 \quad \text{para} \quad n \neq m, \quad n, m \in \mathbb{N}.$$

$\mathcal{L}$ es cuasi-definido y $\{P_n(x)\}_{n\geqslant 0}$ es la correspondiente SPOM si y solo si $b_n \neq 0$. Además, $\mathcal{L}$ es definido positivo si y sólo si $b_n > 0$ $(n \geq 1)$.

Teorema 1.8. *(La fórmula de Christoffel-Darboux) Sea $\{P_n(x)\}_{n\geqslant 0}$ la SPOM correspondiente al funcional de momentos $\mathcal{L}$. Entonces para $n \in \mathbb{N}$:*

$$K_n(x, y) = \sum_{k=0}^{n} \frac{P_k(x)P_k(y)}{\|P_k\|^2} = \frac{P_{n+1}(x)P_n(y) - P_n(x)P_{n+1}(y)}{\|P_n\|^2 (x - y)}. \tag{1.3}$$

$K_n(x, y)$ denota el n-ésimo polinomio núcleo.

Se emplea la siguiente notación para las derivadas parciales de $K_n(x,y)$:

$$\frac{\partial^{i+j}(K_n(x,y))}{\partial^i x \partial^j y} = K_n^{(i,j)}(x,y).$$

Los ceros de los polinomios ortogonales satisfacen las siguientes propiedades:

Teorema 1.9. *Sean S el conjunto soporte de un funcional de momentos definido positivo $\mathcal{L}$ y $\{P_n(x)\}_{n\geqslant 0}$ la SPOM correspondiente a $\mathcal{L}$. Entonces, para cada n, los ceros de $P_n(x)$ son reales, simples y están en el interior de la envoltura convexa de S.*

Teorema 1.10. *(Propiedad de entrelazamiento) Para cada n, entre dos ceros consecutivos de $P_n(x)$ hay un cero de $P_{n-1}(x)$. Es decir, suponemos que $x_{1,n} < x_{2,n} < \cdots < x_{n,n}$ son los ceros de $P_n(x)$, entonces:*

$$x_{n,i} < x_{n-1,i} < x_{n,i+1}, \qquad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Teorema 1.11. *Si $\{P_n(x)\}_{n\geqslant 0}$ es una SPO, los ceros de $P_n(x)$ son los autovalores de la matriz de Jacobi J_n truncada:*

$$J_n = \begin{pmatrix} b_0 & a_0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_0 & b_1 & a_1 & \cdots & 0 \\ 0 & a_1 & b_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & b_n \end{pmatrix},$$

donde a_n y b_n son los coeficientes de la relación de recurrencia a tres términos (1.2) que satisfacen los polinomios ortonormales.

1.4. Polinomios ortogonales clásicos

Las familias de polinomios ortogonales más estudiadas por sus diversas aplicaciones en campos como teoría de aproximaciones, física cuántica, análisis armónico, etc, son las llamadas clásicas. Las propiedades más importantes que caracterizan a estas familias de polinomios ortogonales de las demás familias son sus propiedades diferenciales. Dichas familias están formadas por los polinomios de Jacobi, Laguerre y Hermite, las cuales están asociados a funcionales definidos positivos.

En la literatura no hay una definición única para las familias de polinomios clásicos. A continuación se presentan dos tipos de definición, las cuales se puede probar que son equivalentes.

1. Una SPO $\{P_n(x)\}_{n\geqslant 0}$ se denomina *clásica*, si cada polinomio de la sucesión es solución polinómica de una ecuación diferencial de segundo orden del tipo:

$$\pi(x)y''(x) + \tau(x)y'(x) + \lambda_n y(x) = 0, \tag{1.4}$$

donde $\pi(x)$ es un polinomio de grado a lo sumo 2, $\tau(x)$ es un polinomio de grado 1 y λ_n representa un número real.

2. Una SPO $\{P_n(x)\}_{n\geqslant 0}$ se denomina *clásica*, si cada polinomio de la sucesión puede ser generado por una fórmula que contiene derivadas de orden n, del tipo:

$$P_n(x) = [K_n\omega(x)]^{-1}\frac{d^n}{dx^n}\left[\rho^n(x)\omega(x)\right], \qquad n = 0, 1, 2, \ldots, \tag{1.5}$$

   donde $\rho(x)$ es un polinomio independiente de n, de grado a lo sumo 2 y $\omega(x)$ es una función positiva e integrable sobre un conjunto (a, b), la cual se denomina *función peso*.

La ecuación (1.4) se denomina *ecuación diferencial hipergeométrica*, ya que satisface la *propiedad de hipergeometricidad* que consiste en que sus soluciones y son tales que sus n-ésimas derivadas $y^{(n)}$ cumplen una ecuación del mismo tipo. Por tal razón a los polinomios clásicos también se les denomina *polinomios hipergeométricos*.

La ecuación diferencial hipergeométrica clasifica a los polinomios ortogonales clásicos en tres familias en función del grado del polinomio $\pi(x)$. Cuando $\pi(x)$ es un polinomio de grado 2 los polinomios correspondientes se denominan *polinomios de Jacobi* $P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$, cuando $\pi(x)$ es de grado 1 *polinomios de Laguerre* $L_n^{\alpha}(x)$ y cuando $\pi(x)$ es de grado 0 *polinomios de Hermite* $H_n(x)$.

La siguiente tabla presenta los parámetros de la ecuación diferencial hipergeométrica para las sucesiones de polinomios ortogonales mónicos clásicos.

	$P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$	$L_n^{\alpha}(x)$	$H_n(x)$
$\pi(x)$	$(1-x)(1+x)$	x	1
$\tau(x)$	$-(\alpha+\beta+2)x+\beta-\alpha$	$-x+\alpha+1$	$-2x$
λ_n	$n(n+\alpha+\beta+1)$	n	$2n$

Tabla 1.1. Ecuación diferencial hipergeométrica

La ecuación (1.5) se denomina *fórmula de Rodrigues*, donde para los polinomios de Jacobi, Laguerre y Hermite se tiene:

	$P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$	$L_n^{\alpha}(x)$	$H_n(x)$
K_n	$(-2)^n n!$	$n!$	$(-1)^n$
$\rho(x)$	$(1-x)(1+x)$	x^n	1
$\omega(x)$	$(1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta}$	$x^{\alpha}e^{-x}$	e^{-x^2}
(a,b)	$(-1,1)$	$(0,\infty)$	$(-\infty,\infty)$

Tabla 1.2. Fórmula de Rodrigues

Además, para las familias de polinomios clásicos se cumple (ver [6]):

$$\frac{d^k}{dx^k}\left[\rho^n(x)\omega(x)\right] = 0, \quad 0 \leq k < n, \tag{1.6}$$

en $x = a$ y $x = b$.

A continuación se enuncian las propiedades más relevantes de las familias de los polinomios clásicos de Jacobi, Laguerre y Hermite, siendo los primeros objeto de estudio en el presente trabajo, y por ende se realizan las demostraciones de varias propiedades para los polinomios ortogonales de Jacobi; para los Laguerre y Hermite se omiten, advirtiendo que se pueden realizar de manera análoga a partir de la definición de cada familia de polinomios ortogonales clásicos.

1.4.1. Polinomios ortogonales de Jacobi

Los polinomios de Jacobi $P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$ están definidos por la fórmula:

$$P_n^{(\alpha,\beta)}(x) = (-2)^{-n}(n!)^{-1}\,(1-x)^{-\alpha}\,(1+x)^{-\beta}\,\frac{d^n}{dx^n}\left[(1-x)^{n+\alpha}\,(1+x)^{n+\beta}\right], \tag{1.7}$$

donde α , β son parámetros mayores que -1.

Dependiendo de los valores de α y β, existen tipos de polinomios de Jacobi que merecen especial atención. A continuación los más importantes:

- Cuando $\alpha = \beta = -\frac{1}{2}$ (Polinomios de Chebyshev de primera especie).
- Cuando $\alpha = \beta = \frac{1}{2}$ (Polinomios de Chebyshev de segunda especie).
- Cuando $\alpha = \frac{1}{2}$ y $\beta = -\frac{1}{2}$ (Polinomios de Chebyshev de tercera especie).
- Cuando $\alpha = -\frac{1}{2}$ y $\beta = \frac{1}{2}$ (Polinomios de Chebyshev de cuarta especie).
- Cuando $\alpha = \beta = 0$ (Polinomios de Legendre).
- Cuando $\alpha = \beta$ (Polinomios ultraesféricos o polinomios de Gegenbauer).

La ecuación diferencial hipergeométrica que satisfacen los polinomios ortogonales de Jacobi es:

$$(1-x^2)y^{''}(x) + [-(2+\alpha+\beta)x - \alpha + \beta]\,y^{'}(x) + n(n+1+\alpha+\beta)y(x) = 0. \tag{1.8}$$

Teorema 1.12. *La sucesión de polinomios ortogonales de Jacobi* $\{P_n^{(\alpha,\beta)}(x)\}_{n\in\mathbb{N}}$*, satisface:*

1.
$$P_n^{(\alpha,\beta)}(x) = 2^{-n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n+\alpha}{n-k}\binom{n+\beta}{k}(x-1)^k(x+1)^{n-k}. \tag{1.9}$$

2.
$$P_n^{(\alpha,\beta)}(1) = \binom{n+\alpha}{n} = \frac{\Gamma(n+\alpha+1)}{\Gamma(n+1)\Gamma(\alpha+1)}. \tag{1.10}$$

3.
$$P_n^{(\alpha,\beta)}(-1) = (-1)^n P_n^{(\beta,\alpha)}(1) = (-1)^n\binom{n+\beta}{n} = (-1)^n\frac{\Gamma(n+\beta+1)}{\Gamma(n+1)\Gamma(\beta+1)}. \tag{1.11}$$

4. *El coeficiente principal del polinomio de Jacobi de grado n, $P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$ es:*

$$k_n = 2^{-n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n+\alpha}{k}\binom{n+\beta}{n-k} = 2^{-n}\binom{2n+\alpha+\beta}{n}. \tag{1.12}$$

5. *Los polinomios de Jacobi cumplen la siguiente relación de ortogonalidad:*

$$\int_{-1}^{1} P_m^{(\alpha,\beta)}(x)P_n^{(\alpha\beta)}(x)d\sigma(x) = \frac{2^{\alpha+\beta+1}\Gamma(n+\alpha+1)\Gamma(n+\beta+1)}{n!(2n+\alpha+\beta+1)\Gamma(n+\alpha+\beta+1)}\delta_{mn}, \quad n,m\geq 0, \tag{1.13}$$

$$d\sigma(x) = \omega(x)dx = (1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta}dx, \quad x\in[-1,1], \quad \alpha,\beta>-1.$$

6.
$$\frac{dP_n^{(\alpha,\beta)}(x)}{dx} = C_{n,\alpha,\beta}P_{n-1}^{(\alpha+1,\beta+1)}(x), \qquad C_{n,\alpha,\beta} = \frac{1}{2}(n+\alpha+\beta+1). \tag{1.14}$$

7. *Cuando $n\to\infty$,*

$$P_n^{(a,b)}(1) = \frac{1}{\Gamma(a+1)}n^a(1+\mathcal{O}(n^{-1})). \tag{1.15}$$

$$P_n^{(a,b)}(-1) = \frac{1}{\Gamma(b+1)}(-1)^n n^b(1+\mathcal{O}(n^{-1})). \tag{1.16}$$

$$C_{n,a,b} = n(1+\mathcal{O}(n^{-1})). \tag{1.17}$$

Demostración. 1. Recordemos la fórmula de Leibniz para la n-ésima derivada de un producto:

$$(f\cdot g)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}f^{(n)}(x)g^{(n-k)}(x).$$

De (1.7) se obtiene:

$$A = (-2)^n n!\,(1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta}P_n^{(\alpha,\beta)}(x) = \frac{d^n}{dx^n}\left[(1-x)^{n+\alpha}(1+x)^{n+\beta}\right],$$

aplicando la fórmula de Leibniz, derivando k veces $(1+x)^{n+\beta}$ y junto con (1.1),

$$\begin{aligned} A &= (-2)^n n!\,(1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta}P_n^{(\alpha,\beta)}(x) \\ &= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{\Gamma(n+\beta+1)}{\Gamma(n+\beta-k+1)}(1+x)^{n+\beta-k}\frac{d^{n-k}}{dx^{n-k}}\left[(1-x)^{n+\alpha}\right], \end{aligned}$$

derivando $(n-k)$ veces $(1-x)^{n+\alpha}$ y junto con (1.1),

$$\begin{aligned} A &= (-2)^n n!\,(1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta}P_n^{(\alpha,\beta)}(x) \\ &= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{\Gamma(n+\beta+1)}{\Gamma(n+\beta-k+1)}(1+x)^{n+\beta-k}\frac{\Gamma(n+\alpha+1)}{\Gamma(\alpha+k+1)}(-1)^{n-k}(1-x)^{\alpha+k}, \end{aligned}$$

empleando (1.1) y operaciones elementales se obtiene que los polinomios de Jacobi están dados por:

$$P_n^{(\alpha,\beta)}(x) = 2^{-n} \sum_{k=0}^{n} \binom{n+\alpha}{n-k} \binom{n+\beta}{k} (x-1)^k (x+1)^{n-k}.$$

2. Se obtiene directamente evaluando (1.9) en $x = 1$, pues solo sobrevive en la sumatoria $k = 0$.

3. Se obtiene directamente evaluando (1.9) en $x = -1$, pues solo sobrevive en la sumatoria $k = n$.

4. Se obtiene por inducción, aplicando (1.1).

5. A partir del Teorema 5, (1.7) y (1.12),

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1} P_m^{(\alpha,\beta)}(x) P_n^{(\alpha\beta)}(x) d\sigma(x) &= \int_{-1}^{1} 2^{-m} \binom{2m+\alpha+\beta}{m} x^m P_n^{(\alpha\beta)}(x)(1-x)^\alpha (1+x)^\beta dx \\ &= \frac{2^{-m}}{(-2)^n n!} \binom{2m+\alpha+\beta}{m} \\ &\quad \int_{-1}^{1} x^m \frac{d^n}{dx^n} \left[(1-x)^{n+\alpha} (1+x)^{n+\beta} \right] dx,\end{aligned}$$

integrando por partes y usando (1.6),

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1} P_m^{(\alpha,\beta)}(x) P_n^{(\alpha\beta)}(x) d\sigma(x) &= -\frac{2^{-m}}{(-2)^n n!} \binom{2m+\alpha+\beta}{m} m \\ &\quad \int_{-1}^{1} x^{m-1} \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} \left[(1-x)^{n+\alpha} (1+x)^{n+\beta} \right] dx,\end{aligned}$$

Asumiendo que $0 \leq m \leq n$ y repitiendo el procedimiento de integrar por partes m veces,

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1} P_m^{(\alpha,\beta)}(x) P_n^{(\alpha\beta)}(x) d\sigma(x) &= \frac{2^{-m}(-1)^m m!}{(-2)^n n!} \binom{2m+\alpha+\beta}{m} \\ &\quad \int_{-1}^{1} \frac{d^{n-m}}{dx^{n-m}} \left[(1-x)^{n+\alpha} (1+x)^{n+\beta} \right] dx \\ &= \frac{(-1)^{m-n} m!}{2^{m+n} n!} \binom{2m+\alpha+\beta}{m} \\ &\quad \int_{-1}^{1} \frac{d^{n-m}}{dx^{n-m}} \left[(1-x)^{n+\alpha} (1+x)^{n+\beta} \right] dx. \qquad (1.18)\end{aligned}$$

Consideremos dos casos:

i. $m < n$.

Integrando una vez más en (1.18),

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1} P_m^{(\alpha,\beta)}(x)P_n^{(\alpha\beta)}(x)d\sigma(x) &= \frac{(-1)^{m-n}m!}{2^{m+n}n!}\left(\begin{array}{c}2m+\alpha+\beta\\ m\end{array}\right)\\ &\left[\frac{d^{n-m-1}}{dx^{n-m-1}}\left[(1-x)^{n+\alpha}(1+x)^{n+\beta}\right]\right]_{-1}^{1},\end{aligned}$$

y aplicando (1.6),

$$\int_{-1}^{1} P_m^{(\alpha,\beta)}(x)P_n^{(\alpha\beta)}(x)d\sigma(x) = 0, \qquad m<n. \tag{1.19}$$

ii. $m=n$.

(1.18) se convierte en:

$$\int_{-1}^{1} P_m^{(\alpha,\beta)}(x)P_n^{(\alpha\beta)}(x)d\sigma(x) = \frac{1}{2^{2n}}\left(\begin{array}{c}2n+\alpha+\beta\\ n\end{array}\right)\int_{-1}^{1}\left[(1-x)^{n+\alpha}(1+x)^{n+\beta}\right]dx,$$

integrando,

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1} P_m^{(\alpha,\beta)}(x)P_n^{(\alpha\beta)}(x)d\sigma(x) &= \frac{2^{2n+\alpha+\beta+1}}{2^{2n}}\left(\begin{array}{c}2n+\alpha+\beta\\ n\end{array}\right)\\ &\frac{\Gamma(n+\alpha+1)\Gamma(n+\beta+1)}{\Gamma(2n+\alpha+\beta+2)},\end{aligned}$$

empleando (1.1),

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1} P_m^{(\alpha,\beta)}(x)P_n^{(\alpha\beta)}(x)d\sigma(x) &= 2^{\alpha+\beta+1}\frac{\Gamma(2n+\alpha+\beta+1)}{\Gamma(n+\alpha+\beta+1)n!}\\ &\frac{\Gamma(n+\alpha+1)\Gamma(n+\beta+1)}{\Gamma(2n+\alpha+\beta+2)}\\ &= \frac{2^{\alpha+\beta+1}\Gamma(n+\alpha+1)\Gamma(n+\beta+1)}{(2n+\alpha+\beta+1)\Gamma(n+\alpha+\beta+1)n!}.\end{aligned} \tag{1.20}$$

De (1.19) y (1.20) se obtiene lo esperado:

$$\int_{-1}^{1} P_m^{(\alpha,\beta)}(x)P_n^{(\alpha\beta)}(x)d\sigma(x) = \frac{2^{\alpha+\beta+1}\Gamma(n+\alpha+1)\Gamma(n+\beta+1)}{n!(2n+\alpha+\beta+1)\Gamma(n+\alpha+\beta+1)}\delta_{mn}.$$

6. De (1.12) se obtiene que el coeficiente principal del polinomio de Jacobi de grado $n-1$ y parámetros $\alpha+1,\beta+1$, $P_{n-1}^{(\alpha+1,\beta+1)}(x)$ es:

$$2^{-(n-1)}\left(\begin{array}{c}2(n-1)+\alpha+1+\beta+1\\ n-1\end{array}\right) = 2^{-n+1}\left(\begin{array}{c}2n+\alpha+\beta\\ n-1\end{array}\right).$$

Además el coeficiente principal del polinomio de grado $n-1$, $\frac{dP_n^{(\alpha,\beta)}(x)}{dx}$ es:

$$2^{-n} n \binom{2n+\alpha+\beta}{n},$$

por la propiedad de hipergeometricidad de los polinomios ortogonales de Jacobi, la sucesión $\left\{\frac{dP_n^{(\alpha,\beta)}(x)}{dx}\right\}_{n\geq 1}$ también es una SPO y el polinomio $\frac{dP_n^{(\alpha,\beta)}(x)}{dx}$ es de grado $n-1$, por el Teorema 1.3:

$$\frac{dP_n^{(\alpha,\beta)}(x)}{dx} = C_{n,\alpha,\beta} P_{n-1}^{(\alpha+1,\beta+1)}(x),$$

para alguna constante $C_{n,\alpha,\beta}$.

En particular, para el coeficiente principal de los dos polinomios se debe cumplir:

$$2^{-n} n \binom{2n+\alpha+\beta}{n} = C_{n,\alpha,\beta} 2^{-n+1} \binom{2n+\alpha+\beta}{n-1}.$$

Empleando (1.1) al despejar $C_{n,\alpha,\beta}$, se obtiene:

$$C_{n,\alpha,\beta} = \frac{1}{2}(n+\alpha+\beta+1). \tag{1.21}$$

Por tanto,

$$\frac{dP_n^{(\alpha,\beta)}(x)}{dx} = \frac{1}{2}(n+\alpha+\beta+1) P_{n-1}^{(\alpha+1,\beta+1)}(x).$$

7. (1.15), (1.16) y (1.17) se obtienen aplicando la fórmula de Stirling en (1.10), (1.11) y (1.14) respectivamente.

□

Teorema 1.13. *Sea* $\{\tilde{P}_n^{(\alpha,\beta)}(x)\}_{n\geq 0}$ $(\alpha > -1, \beta > -1)$ *la sucesión de polinomios ortogonales mónicos de Jacobi. Entonces,*

1. *(Relación de recurrencia a tres términos) Para todo* $n \in \mathbb{N}$,

$$\tilde{P}_{n+1}^{(\alpha,\beta)}(x) = \left(x - \zeta_n^{\alpha,\beta}\right) \tilde{P}_n^{(\alpha,\beta)}(x) - \gamma_n^{\alpha,\beta} \tilde{P}_{n-1}^{(\alpha,\beta)}(x), \tag{1.22}$$

con

$$\zeta_n^{\alpha,\beta} = \frac{\beta^2 - \alpha^2}{(2n+\alpha+\beta)(2n+2+\alpha+\beta)},$$

$$\gamma_n^{\alpha,\beta} = \frac{4n(n+\alpha)(n+\beta)(n+\alpha+\beta)}{(2n+\alpha+\beta-1)(2n+\alpha+\beta)^2(2n+\alpha+\beta+1)},$$

$\tilde{P}_0^{(\alpha,\beta)}(x) = 1$, *y* $\tilde{P}_1^{(\alpha,\beta)}(x) = x + \frac{\alpha-\beta}{\alpha+\beta+2}$.

2. *Para todo* $n \in \mathbb{N}$,

$$(1-x^2)\left(\tilde{P}_n^{(\alpha,\beta)}(x)\right)' = \phi_n^{\alpha,\beta}\tilde{P}_{n+1}^{(\alpha,\beta)}(x) + \psi_n^{\alpha,\beta}\tilde{P}_n^{(\alpha,\beta)}(x) + \varphi_n^{\alpha,\beta}\tilde{P}_{n-1}^{(\alpha,\beta)}(x),$$

donde

$$\phi_n^{\alpha,\beta} = -n,$$
$$\psi_n^{\alpha,\beta} = \frac{2n(n-\alpha)(n+\alpha+\beta+1)}{(2n+\alpha+\beta)(2n+2+\alpha+\beta)},$$
$$\varphi_n^{\alpha,\beta} = \frac{4n(n+\alpha)(n+\beta)(n+\alpha+\beta)(n+\alpha+\beta+1)}{(2n+\alpha+\beta-1)(2n+\alpha+\beta)^2(2n+\alpha+\beta+1)}.$$

3. *Para todo* $n \in \mathbb{N}$,

$$\tilde{P}_n^{(\alpha,\beta)}(x) = \tilde{P}_n^{(\alpha+1,\beta)}(x) - \frac{2n(n+\beta)}{(2n+\alpha+\beta)(2n+\alpha+\beta+1)}\tilde{P}_{n-1}^{(\alpha+1,\beta)}(x).$$

4. *Para todo* $n \in \mathbb{N}$,

$$K_n(x,1) = A_n P_n^{(\alpha+1,\beta)}(x), \qquad A_n = \frac{P_n^{(\alpha,\beta)}(1)}{\left\|P_n^{(\alpha,\beta)}(x)\right\|_{\alpha,\beta}^2},$$

donde

$$\left\|P_n^{(\alpha,\beta)}(x)\right\|_{\alpha,\beta}^2 = \int_{-1}^{1} x^n P_n^{(\alpha,\beta)}(x)(1-x)^\alpha(1+x)^\beta dx.$$

1.4.2. Polinomios ortogonales de Laguerre

Los polinomios de Laguerre $L_n^\alpha(x)$ están definidos por la fórmula:

$$L_n^\alpha(x) = (n!)^{-1}x^{-\alpha}e^x\frac{d^n}{dx^n}\left[x^{n+\alpha}e^{-x}\right], \tag{1.23}$$

donde α es un parámetro mayor que -1.

Al igual que los polinomios ortogonales de Jacobi, empleando la fórmula de Leibniz para la n-ésima derivada de un producto se puede deducir:

$$L_n^\alpha(x) = \sum_{k=0}^{n}\binom{n+\alpha}{n-k}\frac{(-x)^k}{k!}. \tag{1.24}$$

Además, el coeficiente principal del polinomio de Laguerre de grado n, es:

$$k_n = \frac{(-1)^n}{n!}. \tag{1.25}$$

La ecuación diferencial hipergeométrica que satisfacen los polinomios ortogonales de Laguerre es:

$$xy''(x) + (\alpha+1-x)\,y'(x) + ny(x) = 0. \tag{1.26}$$

Teorema 1.14. *La sucesión de polinomios ortogonales mónicos de Laguerre* $\{\tilde{L}_n^{\alpha}(x)\}_{n\in\mathbb{N}}$*,* $\alpha > -1$*, satisface:*

1. $$\tilde{L}_n^{\alpha}(0) = (-1)^n \frac{\Gamma(n+\alpha+1)}{\Gamma(\alpha+1)}. \tag{1.27}$$

2. *La relación de ortogonalidad,*

$$\int_0^{\infty} \tilde{L}_m^{\alpha}(x)\tilde{L}_n^{\alpha}(x)d\sigma(x) = n!\Gamma(n+\alpha+1)\delta_{mn}, \qquad n,m \geq 0, \tag{1.28}$$

$$d\sigma(x) = \omega(x)dx = x^{\alpha}e^{-x}dx, \qquad x \in [0,\infty)\,, \qquad \alpha > -1.$$

3. $$\frac{d\tilde{L}_n^{\alpha}(x)}{dx} = -\tilde{L}_{n-1}^{\alpha+1}(x). \tag{1.29}$$

4. *(Relación de recurrencia a tres términos) Para todo* $n \in \mathbb{N}$*,*

$$\tilde{L}_{n+1}^{\alpha}(x) = \left[x - (2n+\alpha-1)\right]\tilde{L}_n^{\alpha}(x) - (n-1)(n+\alpha-1)\tilde{L}_{n-1}^{\alpha}(x), \tag{1.30}$$

$\tilde{L}_0^{\alpha}(x) = 1,$ *y* $\tilde{L}_1^{\alpha}(x) = x - (\alpha+1).$

5. *Para todo* $n \in \mathbb{N}$*,*

$$x\frac{d\tilde{L}_n^{\alpha}(x)}{dx} = n\tilde{L}_n^{\alpha}(x) - n(n+\alpha)\tilde{L}_{n-1}^{\alpha}(x). \tag{1.31}$$

6. *Para todo* $n \in \mathbb{N}$*,*

$$\tilde{L}_n^{\alpha}(x) = \tilde{L}_n^{\alpha+1}(x) + n\tilde{L}_{n-1}^{\alpha+1}(x). \tag{1.32}$$

7. *Para todo* $n \in \mathbb{N}$*,*

$$K_n(x,0) = \frac{(-1)^n}{n!\Gamma(\alpha+1)}\left(\tilde{L}_{n+1}^{\alpha}(x) + (n+\alpha+1)\tilde{L}_n^{\alpha}(x)\right). \tag{1.33}$$

1.4.3. Polinomios ortogonales de Hermite

Los polinomios de Hermite $H_n(x)$ están definidos por la fórmula:

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2}\frac{d^n}{dx^n}\left[e^{-x^2}\right]. \tag{1.34}$$

Otra forma de expresar los polinomios ortogonales de Hermite es:

$$H_n(x) = n!\sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} \frac{(-1)^k(2x)^{n-2k}}{(n-2k)!k!}. \tag{1.35}$$

Además, el coeficiente principal del polinomio de Hermite de grado n, es:

$$k_n = 2^n. \tag{1.36}$$

La ecuación diferencial hipergeométrica que satisfacen los polinomios ortogonales de Hermite es:

$$y^{''}(x) - 2xy^{'}(x) + 2ny(x) = 0. \tag{1.37}$$

Teorema 1.15. *La sucesión de polinomios ortogonales mónicos de Hermite $\{\tilde{H}_n(x)\}_{n\in\mathbb{N}}$, satisface:*

1. *Para todo $n \in \mathbb{N}$,*
$$\tilde{H}_n(-x) = (-1)^n \tilde{H}_n(x). \tag{1.38}$$

2. *La relación de ortogonalidad,*
$$\int_{-\infty}^{\infty} \tilde{H}_m(x)\tilde{H}_n(x)d\sigma(x) = \frac{n!\sqrt{\pi}}{2^n}\delta_{mn}, \qquad n, m \geq 0, \tag{1.39}$$
$$d\sigma(x) = \omega(x)dx = e^{-x^2}, \qquad x \in (-\infty, \infty).$$

3. *Para todo $n \in \mathbb{N}$,*
$$\frac{d\tilde{H}_n(x)}{dx} = n\tilde{H}_{n-1}(x). \tag{1.40}$$

4. *(Relación de recurrencia a tres términos) Para todo $n \in \mathbb{N}$,*
$$\tilde{H}_{n+1}(x) = x\tilde{H}_n(x) - \frac{1}{2}n\tilde{H}_{n-1}(x), \qquad n \geq 0. \tag{1.41}$$

1.5. Productos internos estándar y tipo Sobolev

Sea $\phi(x)$ un polinomio y $\mathcal{L}$ un funcional de momentos definido positivo. Entonces $\mathcal{L}$ admite la siguiente representación integral (ver [6] o [14]):

$$\mathcal{L}\left[\phi(x)\right] = \int_{\mathbb{R}} \phi(x)d\sigma(x),$$

donde σ es una medida positiva no trivial, cuyo conjunto soporte es un conjunto infinito de puntos de $\mathbb{R}$.

Si $\mathcal{L}$ es definido positivo y se define:

$$\langle p(x), q(x)\rangle = \mathcal{L}\left[p(x)q(x)\right], \tag{1.42}$$

para dos polinomios cualesquiera $p(x)$ y $q(x)$, entonces (1.42) define un producto interno sobre el espacio vectorial $\mathcal{P}$ de todos los polinomios con coeficientes reales.

Si $\{P_n(x)\}_{n\geqslant 0}$ es una SPO para $\mathcal{L}$, entonces:

$$\langle P_n(x), P_m(x)\rangle = \mathcal{L}\left[P_n(x)P_m(x)\right] = \begin{cases} 0 & \text{si } m \neq n \\ a_n \neq 0 & \text{si } m = n. \end{cases}$$

Un producto interno definido sobre $\mathcal{P}$, se denomida *tipo Sobolev* si es de la forma:

$$\begin{aligned}\langle p(x), q(x)\rangle &= \langle p(x), q(x)\rangle_\sigma + \sum_{i=0}^{j} \lambda_i p^{(i)}(\xi) q^{(i)}(\xi) \\ &= \int_E p(x)q(x)d\sigma(x) + \sum_{i=0}^{j} \lambda_i p^{(i)}(\xi) q^{(i)}(\xi), \end{aligned} \tag{1.43}$$

donde $E \subseteq \mathbb{R}$, $j \in \mathbb{N}$, $\xi \in \mathbb{R}$, $\lambda_i \in \mathbb{R}^+$ y σ es una medida positiva.

La familia de polinomios asociados al producto interno (1.43) se denominan *polinomios ortogonales tipo Sobolev* o *polinomios perturbados*, al producto interno $\langle p, q\rangle_\sigma$ se le denomina *estándar* y la familia de polinomios ortogonales asociados al producto interno $\langle p, q\rangle_\sigma$ se denominan *polinomios originales.*

En [1], [2], [3] y [4] se han realizado estudios de casos particulares acerca de los polinomios ortogonales respecto a (1.43), donde se analizaran propiedades asintóticas, algebraicas, etc. Además, en [9] se hace un estudio de algunas propiedades de los polinomios ortogonales con respecto a (1.43) correspondiente al caso general diagonal de los polinomios ortogonales de tipo Laguerre.

CAPÍTULO 2

Polinomios ortogonales en varias variables

En este capítulo presentamos las definiciones y propiedades más relevantes de polinomios ortogonales en varias variables, lo cual se puede ampliar viendo [7], [15] y [16]. Las demostraciones de los teoremas 2.2 al 2.6 se pueden consultar en [7].

2.1. Preliminares

Dado $\kappa = (\kappa_1, \kappa_2, \ldots, \kappa_d) \in \mathbb{N}^d$ un multindice y $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_d) \in \mathbb{R}^d$, se define un monomio en d variables como:

$$\mathbf{x}^\kappa = x_1^{\kappa_1} x_2^{\kappa_2} \ldots x_d^{\kappa_d}.$$

El número entero $|\kappa| = \kappa_1 + \kappa_2 + \cdots + \kappa_d$ es llamado el *grado total* de $\mathbf{x}^\kappa$.

Un polinomio $P(\mathbf{x})$ en d variables es una combinación lineal de monomios,

$$P(\mathbf{x}) = \sum_\kappa c_\kappa \mathbf{x}^\kappa,$$

donde los coeficientes c_κ son elementos de un campo $\mathbf{C}$, generalmente los números reales $\mathbb{R}$ o los números complejos $\mathbb{C}$. El grado de un polinomio en d variables es definido como el grado total más alto de sus monomios.

Para un polinomio $P(\mathbf{x})$ en varias variables se denota la derivada parcial respecto a la i-ésima componente por:

$$\partial_i P(\mathbf{x}) = \frac{\partial P(\mathbf{x})}{\partial x_i}.$$

Se denota:

- $M_{m\times n}(\mathbb{R})$, el espacio vectorial de matrices $m \times n$ con entradas en los números reales.

- Π^d, el conjunto de todos los polinomios en d variables con coeficientes reales,

$$\Pi^d = \left\{ \sum_{\kappa} c_\kappa \mathbf{x}^\kappa : \quad c_\kappa \in \mathbb{R}, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^d \right\}.$$

- Π_n^d, el subespacio de Π^d que consta de todos los polinomios de grado total a lo sumo n,

$$\Pi_n^d = \left\{ \sum_{|\kappa| \leq n} c_\kappa \mathbf{x}^\kappa : \quad c_\kappa \in \mathbb{R}, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^d \right\}.$$

Un polinomio se denomina *homogéneo* si todos sus monomios tienen igual grado total. $\mathcal{H}_n^d$ denota el espacio de polinomios homogéneos de grado n en d variables,

$$\mathcal{H}_n^d = \left\{ \sum_{|\kappa| = n} c_\kappa \mathbf{x}^\kappa : \quad c_\kappa \in \mathbb{R}, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^d \right\}.$$

Cualquier polinomio de Π_n^d puede ser escrito como una combinación lineal de polinomios homogéneos, para $P(x) \in \Pi_n^d$:

$$P(x) = \sum_{i=0}^{n} \sum_{|\kappa| = i} c_\kappa \mathbf{x}^\kappa.$$

Una base para $\mathcal{H}_n^d$ es $\{\mathbf{x}^\kappa : |\kappa| = n\}$ y la dimensión de $\mathcal{H}_n^d$ denotada por r_n^d esta dada por (ver [7]):

$$dim\mathcal{H}_n^d = r_n^d = \left(\begin{array}{c} n+d-1 \\ n \end{array} \right),$$

además,

$$dim\Pi_n^d = \left(\begin{array}{c} n+d \\ n \end{array} \right).$$

Una diferencia esencial de los polinomios en una variable con respecto a los polinomios en varias variables, radica en el orden de los monomios. El orden usual entre monomios de una variable es el orden dado por el grado, los monomios en una variable se ordenan por el grado como 1, x, x^2, x^3, $\ldots$. Para polinomios en varias variables existen muchas elecciones bien definidas de ordenes totales. A continuación se describen dos ordenes para los monomios en varias variables.

Orden lexicográfico

Dados $\kappa = (\kappa_1, \kappa_2, \ldots, \kappa_d)$, $\eta = (\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_d)$ dos multindices. Se dice que $\kappa \succ_L \eta$ si la primera entrada no cero en la diferencia $\kappa - \eta = (\kappa_1 - \eta_1, \kappa_2 - \eta_2, \ldots, \kappa_d - \eta_d)$ es positiva.

En el caso $d = 2$ denotando $x = x_1$ y $y = x_2$, los respectivos monomios son ordenados como:

$$1, x, x^2, \ldots, x^n, \ldots,$$

$$y, xy, x^2y, x^3y, \ldots, x^ny, \ldots,$$

$$y^m, xy^m, x^2y^m, x^3y^m, \ldots, x^ny^m, \ldots.$$

El orden lexicográfico no respeta el grado total de los polinomios. Por ejemplo,

Multindice	*Grado total*
$\gamma = (0, 5, 4)$	$\lvert\gamma\rvert = 9$
$\eta = (2, 3, 2)$	$\lvert\eta\rvert = 7$
$\kappa = (4, 1, 0)$	$\lvert\kappa\rvert = 5$
$\nu = (1, 0, 0)$	$\lvert\nu\rvert = 1$

En este caso,

$$\kappa \ \succ_L \ \eta \ \succ_L \ \nu \ \succ_L \ \gamma.$$

Orden lexicográfico graduado

Dados $\kappa = (\kappa_1, \kappa_2, \ldots, \kappa_d)$, $\eta = (\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_d)$ dos multindices. Se dice que $\kappa \succ_{GL} \eta$ si $|\kappa| > |\eta|$ o si la primera entrada no cero en la diferencia $\kappa - \eta = (\kappa_1 - \eta_1, \kappa_2 - \eta_2, \ldots, \kappa_d - \eta_d)$ es positiva.

En el caso $d = 2$, los respectivos monomios son ordenados como:

$$1, \quad xy, \quad x^2, xy, y^2, \quad x^3, x^2y, xy^2, y^3, \quad \ldots, \quad x^ny^m, \quad \ldots.$$

El orden lexicográfico graduado si respeta el grado total de los polinomios.

2.2. Funcionales de momentos y polinomios ortogonales

Una multisucesión $\mu : \mathbb{N}^d \longrightarrow \mathbb{R}$ es escrita de la forma $\mu = \{\mu_\kappa\}_{\kappa \in \mathbb{N}^d}$. Para cada multisucesión $\mu = \{\mu_\kappa\}_{\kappa \in \mathbb{N}^d}$, sea $\mathcal{L}_\mu$ un funcional lineal definido sobre Π^d por:

$$\mathcal{L}_\mu \left[\mathbf{x}^\kappa\right] = \mu_\kappa, \qquad \kappa \in \mathbb{N}^d; \tag{2.1}$$

$\mathcal{L}_\mu$ se denomina un *funcional de momentos* definido por la sucesión μ.

Si

$$P(\mathbf{x}) = \sum_\kappa c_\kappa \mathbf{x}^\kappa$$

es un polinomio en Π^d, entonces

$$\mathcal{L}_\mu \left[P(\mathbf{x})\right] = \sum_\kappa c_\kappa \mu_\kappa.$$

Un funcional de momentos lineal $\mathcal{L}_\mu$ se denomina *definido positivo* si

$$\mathcal{L}_\mu[P^2(\mathbf{x})] > 0, \quad \forall P(\mathbf{x}) \in \Pi^d, \quad P(\mathbf{x}) \neq 0.$$

Además, $\{\mu_\kappa\}$ se denomina *definida positiva* cuando $\mathcal{L}_\mu$ es definido positivo.

En adelante se escribe $\mathcal{L}$ en cambio de $\mathcal{L}_\mu$ cuando μ no es dada de forma explícita. Un funcional lineal $\mathcal{L}$ definido positivo genera un producto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$ sobre Π^d, el cual admite la siguiente representación integral:

$$\langle P(\mathbf{x}), Q(\mathbf{x}) \rangle_\sigma = \mathcal{L}[P(\mathbf{x})Q(\mathbf{x})] = \int_E P(\mathbf{x})Q(\mathbf{x})d\sigma(\mathbf{x}), \tag{2.2}$$

donde $P(\mathbf{x}), Q(\mathbf{x}) \in \Pi^d$, $E \subset \mathbb{R}^d$ es un dominio con interior no vacío y σ una medida positiva sobre el domino E.

Dos polinomios $P(\mathbf{x}) \in \Pi_n^d$ y $Q(\mathbf{x}) \in \Pi_n^d$ se denominan mutuamente ortogonales con respecto a (2.2) si $\langle P(\mathbf{x}), Q(\mathbf{x}) \rangle_\sigma = 0$.

Un polinomio $P(\mathbf{x}) \in \Pi_n^d$ se denomina un *polinomio ortogonal de grado* n, si $P(\mathbf{x})$ es ortogonal a todo polinomio de grado menor, es decir:

$$\langle P(\mathbf{x}), Q(\mathbf{x}) \rangle_\sigma = 0, \qquad \forall Q(\mathbf{x}) \in \Pi_{n-1}^d.$$

Para $n \geq 0$, se denota por V_n^d el espacio vectorial de polinomios de grado total n, ortogonales con respecto a (2.2), es decir:

$$V_n^d = \left\{ P(\mathbf{x}) \in \Pi_n^d : \langle P(\mathbf{x}), Q(\mathbf{x}) \rangle_\sigma = 0, \ \ \forall Q(\mathbf{x}) \in \Pi_{n-1}^d \right\}.$$

La dimensión de V_n^d es la misma que de $\mathcal{H}_n^d$, es decir:

$$dim V_n^d = r_n^d = \binom{n+d-1}{n}.$$

Una sucesión de polinomios $\{P_\kappa^n(\mathbf{x}) : |\kappa| = n\}_{n\geq 0}$ se denomina una *sucesión de polinomios ortogonales (SPO)* asociada a $\mathcal{L}$ si:

1. El grado de $P_\kappa^n(\mathbf{x})$ es $|\kappa| = n \geq 0$,
2. $\mathcal{L}\left[P_\kappa^n(\mathbf{x})P_\eta^n(\mathbf{x})\right] = R_\kappa \delta_{\kappa,\eta}, \qquad R_\kappa \neq 0,$

donde $\delta_{\kappa,\eta} = \delta_{\kappa_1\eta_1}\delta_{\kappa_2\eta_2}\cdots\delta_{\kappa_d\eta_d}$. Además si $R_\kappa = 1$ para todo multindice κ, la sucesión $\{P_\kappa^n(\mathbf{x}) : |\kappa| = n\}_{n\geq 0}$ se denomina una *sucesión de polinomios ortonormales.*

Un funcional de momentos se denomina *regular* si existe una SPO asociada a él.

Otra diferencia entre polinomios ortogonales en una variable respecto a los polinomios ortogonales en varias variables, radica en que para una variable existe una única SPO excepto un múltiplo, para $d \geq 2$ variables existen infinitas SPOs (independientes), de acuerdo al orden, igualmente diferentes bases ortonormales.

2.3. Sistema de polinomios ortogonales

Consideremos la ortogonalidad únicamente en términos de polinomios de diferentes grados, es decir, polinomios de igual grado son ortogonales a polinomios de grado menor; pero polinomios de igual grado no son ortogonales entre ellos mismos. Para ser más precisos se introduce la siguiente notación.

Dada $\{P^n_{\kappa_i}(\mathbf{x}) : |\kappa_i| = n, 1 \leq i \leq r^d_n\}_{n\geq 0}$ una sucesión de polinomios en Π^d_n, nosotros escribimos esta sucesión como un polinomio vector columna $\mathbb{P}_n(\mathbf{x})$, así (ver[7]):

$$\mathbb{P}_n(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} P^n_{\kappa_1}(\mathbf{x}) \\ P^n_{\kappa_2}(\mathbf{x}) \\ P^n_{\kappa_3}(\mathbf{x}) \\ \vdots \\ P^n_{\kappa_{r^d_n}}(\mathbf{x}) \end{pmatrix}_{r^d_n \times 1},$$

donde $\kappa_1, \kappa_2, \ldots, \kappa_{r^d_n}$ son elementos en $\{\kappa \in \mathbb{N}^d : |\kappa| = n\}$, ordenados de acuerdo al orden lexicográfico inverso.

Se denota la derivada parcial respecto a la i-ésima componente de un polinomio vector columna por:

$$\partial_i\mathbb{P}_n(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} \partial_i P^n_{\kappa_1}(\mathbf{x}) \\ \partial_i P^n_{\kappa_2}(\mathbf{x}) \\ \partial_i P^n_{\kappa_3}(\mathbf{x}) \\ \vdots \\ \partial_i P^n_{\kappa_{r^d_n}}(\mathbf{x}) \end{pmatrix}_{r^d_n \times 1}.$$

Una sucesión de polinomios vector columna $\{\mathbb{P}_n(\mathbf{x})\}_{n\geq 0}$ se denomina un *sistema de polinomios (SP)*, si $\left\{P^n_{\kappa_1}(\mathbf{x}), P^n_{\kappa_2}(\mathbf{x}), \ldots, P^n_{\kappa_{r^d_n}}(\mathbf{x})\right\}$ es una base para Π^d_n.

Un ejemplo de SP, para $d = 2$ es la denominada base canónica. La base canónica sobre Π^2 puede ser escrita como un sistema de polinomios,

$$\mathbb{X}_0 = \begin{pmatrix} 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbb{X}_1 = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad \mathbb{X}_2 = \begin{pmatrix} x^2 \\ xy \\ y^2 \end{pmatrix}, \quad \mathbb{X}_3 = \begin{pmatrix} x^3 \\ x^2y \\ xy^2 \\ y^3 \end{pmatrix},$$

$$\mathbb{X}_4 = \begin{pmatrix} x^4 \\ x^3y \\ x^2y^2 \\ xy^3 \\ y^4 \end{pmatrix}, \quad \mathbb{X}_5 = \begin{pmatrix} x^5 \\ x^4y \\ x^3y^2 \\ x^2y^3 \\ xy^4 \\ y^5 \end{pmatrix}, \quad \mathbb{X}_6 = \begin{pmatrix} x^6 \\ x^5y \\ x^4y^2 \\ x^3y^3 \\ x^2y^4 \\ xy^5 \\ y^6 \end{pmatrix}, \quad \mathbb{X}_7 = \begin{pmatrix} x^7 \\ x^6y \\ x^5y^2 \\ x^4y^3 \\ x^3y^4 \\ x^2y^5 \\ xy^6 \\ y^7 \end{pmatrix}, \cdots$$

Dado $\mathcal{L}$ un funcional de momentos regular, un SP $\{\mathbb{P}_n(\mathbf{x})\}_{n\geq 0}$ se denomina un *sistema de polinomios ortogonales* asociada a $\mathcal{L}$ si:

$$\mathcal{L}\left[\mathbb{P}_n(\mathbf{x})\mathbb{P}_m^T(\mathbf{x})\right] = \begin{cases} 0 & \text{si } m < n \\ H_n & \text{si } m = n, \end{cases} \tag{2.3}$$

donde H_n es una matriz de tamaño $r_n^d \times r_n^d$ simétrica e invertible. Si H_n es la matriz identidad $I_{r_n^d}$ para todo $n \geq 0$, entonces el sistema de polinomios ortogonales se denomina *sistema de polinomios ortonormales*, el cual en adelante será denotado por $\{\tilde{\mathbb{P}}_n(\mathbf{x})\}_{n\geqslant 0}$. El proceso de ortogonalización de Gram-Schmidt (ver [6]), permite obtener la sucesión de polinomios ortonormales a partir de la sucesión de polinomios ortogonales en el caso real, generalizando dicho proceso, siempre es posible a partir de un sistema de polinomios ortogonales $\{\mathbb{P}_n(\mathbf{x})\}_{n\geqslant 0}$ obtener un sistema de polinomios ortonormales $\{\tilde{\mathbb{P}}_n(\mathbf{x})\}_{n\geqslant 0}$.

Dados dos sistemas de polinomios ortogonales $\{\mathbb{P}_n(\mathbf{x})\}_{n\geq 0}$ y $\{\mathbb{Q}_n(\mathbf{x})\}_{n\geq 0}$, se dice que $\mathbb{P}_n(\mathbf{x})$ y $\mathbb{Q}_n(\mathbf{x})$ tienen igual coeficiente principal si $\mathbb{P}_n(\mathbf{x}) - \mathbb{Q}_n(\mathbf{x}) \in \Pi_{n-1}^d$ para $n \geq 1$.

Teorema 2.1. *Dados $\mathcal{L}$ un funcional de momentos y $\{\mathbb{P}_n(\mathbf{x})\}_{n\geq 0}$ un sistema de polinomios ortogonales. El conjunto $\{\mathbb{P}_0(\mathbf{x}), \mathbb{P}_1(\mathbf{x}), \ldots, \mathbb{P}_n(\mathbf{x})\}$ forma una base para Π_n^d.*

Demostración. Sean $a_0, a_1, \ldots, a_n$ constantes cualesquiera donde $a_i \in \mathbb{R}^{r_i^d}$, tales que:

$$a_0\mathbb{P}_0(\mathbf{x}) + a_1\mathbb{P}_1(\mathbf{x}) + \cdots + a_n\mathbb{P}_n(\mathbf{x}) = 0.$$

Multiplicando a derecha por $\mathbb{P}_j(\mathbf{x})$ $(0 \leq j \leq n)$ y aplicando $\mathcal{L}$,

$$\mathcal{L}\left[a_0\mathbb{P}_0(\mathbf{x})\mathbb{P}_j(\mathbf{x}) + a_1\mathbb{P}_1(\mathbf{x})\mathbb{P}_j(\mathbf{x}) + \cdots + a_n\mathbb{P}_n(\mathbf{x})\mathbb{P}_j(\mathbf{x})\right] = 0,$$

como $\{\mathbb{P}_n(\mathbf{x})\}_{n\geq 0}$ es un sistema de polinomios ortogonales, se obtiene:

$$a_j\mathcal{L}\left[a_j\mathbb{P}_j^2(\mathbf{x})\right] = a_jH_j = 0,$$

y por ser H_j invertible, $a_j = 0$ para toda j, $(0 \leq j \leq n)$. Por tanto $\{P_\kappa^n(\mathbf{x})\}_{|\kappa|\leq n}$ es linealmente independiente y forman una base para Π_n^d.

□

Dados los elementos del conjunto $\left\{\kappa \in \mathbb{N}^d : |\kappa| = n\right\}$ ordenados como $\kappa^{(1)}, \kappa^{(2)}, \kappa^{(3)}, \ldots, \kappa^{(r_n^d)}$ de acuerdo al orden lexicográfico. Para cada $n \in \mathbb{N}^d$ se denota el vector columna $\mathfrak{x}^n$ por:

$$\mathfrak{x}^n = (\mathbf{x}^\kappa)_{|\kappa|=n} = (\mathbf{x}^{\kappa^j})_{j=1}^{r_n^d} = \begin{pmatrix} \mathbf{x}^{\kappa^{(1)}} \\ \mathbf{x}^{\kappa^{(2)}} \\ \mathbf{x}^{\kappa^{(3)}} \\ \vdots \\ \mathbf{x}^{\kappa^{(r_n^d)}} \end{pmatrix}_{r_n^d \times 1}.$$

Es decir, $\mathfrak{x}^n$ es un vector columna cuyos elementos son los monomios $\mathbf{x}^\kappa$ para $|\kappa| = n$, ordenados de acuerdo al orden lexicográfico.

Empleando la notación vector, el polinomio ortogonal $\mathbb{P}_n(\mathbf{x})$ puede escribirse como:

$$\mathbb{P}_n(\mathbf{x}) = G_n\mathfrak{x}^n + G_{n,n-1}\mathfrak{x}^{n-1} + G_{n,n-2}\mathfrak{x}^{n-2} + \cdots + G_{n,0}\mathfrak{x}^0,$$

donde $G_{n,i}$ son matrices de tamaño $r_n^d \times r_{n-i}^d$. Se denota $G_n = G_{n,n}$ al coeficiente principal de $\mathbb{P}_n(\mathbf{x})$. En [7] los autores prueban que la matriz G_n es invertible.

Se define para $i, j \in \mathbb{N}^d$ vectores de momentos $\mathbf{u}_i$ y matrices de momentos $\mathbf{u}_{\{i\}+\{j\}}$ por:

$$\mathbf{u}_i = \mathcal{L}_\mu\left[\mathfrak{x}^i\right], \quad y \quad \mathbf{u}_{\{i\}+\{j\}} = \mathcal{L}_\mu\left[\mathfrak{x}^i(\mathfrak{x}^j)^T\right]. \tag{2.4}$$

Es de observar que $\mathbf{u}_{\{i\}+\{j\}}$ es una matriz de tamaño $r_i^d \times r_j^d$, sus elementos son $\mathcal{L}_\mu\left[\mathbf{x}^{\kappa+\eta}\right]$ para $|\kappa| = i$ y $|\eta| = j$. Además, para cada $n \in \mathbb{N}^d$, $\mathbf{u}_{\{i\}+\{j\}}$ es empleado como bloques para definir la matriz:

$$M_{n,d} = \left\{\mathbf{u}_{\{i\}+\{j\}}\right\}_{i,j=0}^n, \qquad \Delta_{n,d} = det M_{n,d}. \tag{2.5}$$

$M_{n,d}$ se denomina *matriz de momentos*, cuyas entradas son $\mathcal{L}_\mu\left[\mathbf{x}^{\kappa+\eta}\right]$ para $|\kappa| \leq n$ y $|\eta| \leq n$.

Teorema 2.2. *Dado $\mathcal{L}$ un funcional de momentos. Un sistema de polinomios ortogonales en varias variables existe si y solo si*

$$\Delta_{n,d} \neq 0, \qquad n \in \mathbb{N}^d.$$

2.3.1. Relación de recurrencia a tres términos

Sea $\left\{\tilde{\mathbb{P}}_n(\mathbf{x})\right\}_{n\geq 0}$ un sistema de polinomios ortonormales con respecto a un funcional lineal definido positivo $\mathcal{L}$. Para $n \geq 0$, existen matrices $A_{n,i} : r_n^d \times r_{n+1}^d$ y $B_{n,i} : r_n^d \times r_n^d$, tales que:

$$A_{n,i}\tilde{\mathbb{P}}_{n+1}(\mathbf{x}) = (x_i - B_{n,i})\,\tilde{\mathbb{P}}_n(\mathbf{x}) - A_{n-1,i}^T\tilde{\mathbb{P}}_{n-1}(\mathbf{x}), \quad 1 \leq i \leq d, \tag{2.6}$$

con $\tilde{\mathbb{P}}_{-1}(\mathbf{x}) = 0$ y $A_{-1,i} = 0$.

Además, las matrices en la relación de recurrencia (2.6) se pueden expresar como:

$$A_{n,i} = \mathcal{L}\left[x_i\tilde{\mathbb{P}}_n(\mathbf{x})\tilde{\mathbb{P}}_{n+1}^T(\mathbf{x})\right], \tag{2.7}$$

$$B_{n,i} = \mathcal{L}\left[x_i\tilde{\mathbb{P}}_n(\mathbf{x})\tilde{\mathbb{P}}_n^T(\mathbf{x})\right]. \tag{2.8}$$

La prueba que un sistema de polinomios ortonormales cumple la anterior relación de recurrencia es análoga a la relación de recurrencia a tres términos en una variable (ver [7]).

Como una consecuencia se puede observar que las matrices $B_{n,i}$ son simétricas.

Si se toma un sistema de polinomios ortogonales $\{\mathbb{P}_n(\mathbf{x})\}_{n\geq 0}$, el cual no necesariamente es un sistema de polinomios ortonormales, la relación de recurrencia a tres términos tiene la forma:

$$A_{n,i}\mathbb{P}_{n+1}(\mathbf{x}) = (x_i - B_{n,i})\,\mathbb{P}_n(\mathbf{x}) - C_{n,i}^T\mathbb{P}_{n-1}(\mathbf{x}), \quad 1 \leq i \leq d, \tag{2.9}$$

donde $C_{n,i} : r_n^d \times r_{n-1}^d$ se relaciona con $A_{n,i}$ de la siguiente manera:

$$A_{n,i}H_{n+1} = H_nC_{n+1,i}, \tag{2.10}$$

H_n definida en (2.3).

Comparando el mayor coeficiente de las matrices de ambos lados de (2.6), se sigue que:

$$A_{n,i}G_{n+1} = G_nF_{n,i}, \quad 1 \leq i \leq d, \tag{2.11}$$

donde $F_{n,i}$ son matrices de tamaño $r_n^d \times r_{n+1}^d$, las cuales se pueden definir por:

$$F_{n,i}\mathbf{x}^{n+1} = x_i\mathbf{x}^n, \quad 1 \leq i \leq d.$$

De donde, rank $F_{n,i} = r_n^d$, y rank $F_n = r_{n+1}^d$ con $F_n = \left(F_{n,1}^T|\cdots|F_{n,d}^T\right)^T$.

De la relación (2.11) y el hecho que G_n es invertible, se deduce que las matrices $A_{n,i}$ satisfacen la siguiente condición:

Para $n \geq 0$, rank $A_{n,i} = r_n^d$ para $1 \leq i \leq d$ y

$$rank A_n = r_{n+1}^d, \qquad A_n = \left(A_{n,1}^T, \ldots, A_{n,d}^T\right)^T. \tag{2.12}$$

La condición (2.12) es denominada *condición de rango.*

Teorema 2.3. *(Teorema de Favard) Sea* $\{\mathbb{P}_n(\mathbf{x})\}_{n\geq 0} = \{P_\kappa^n(\mathbf{x}) : |\kappa| = n\}_{n\geq 0}$, $\mathbb{P}_0(\mathbf{x}) = 1$, *un sistema de polinomios cualquiera en* Π^d*. Entonces, las siguientes proposiciones son equivalentes.*

1. *Existe un funcional lineal definido positivo* $\mathcal{L}$ *sobre* Π^d*, respecto al cual* $\{\mathbb{P}_n(\mathbf{x})\}_{n\geq 0}$ *es un sistema de polinomios ortonormales en* Π^d*.*
2. *Para* $n \geq 0$, $1 \leq i \leq d$*, existen matrices* $A_{n,i} : r_n^d \times r_{n+1}^d$ *y* $B_{n,i} : r_n^d \times r_n^d$ *tales que:*
   - *i) Los polinomios* $\mathbb{P}_n(\mathbf{x})$ *satisfacen la relación de recurrencia (2.6),*
   - *ii) Las matrices en la relación satisfacen la condición de rango.*

El siguiente teorema evidencia condiciones conmutativas de los coeficientes de la relación de recurrencia a tres términos.

Teorema 2.4. *(Condiciones de conmutatividad) Los coeficientes de la relación de recurrencia a tres términos (2.6) de un sistema de polinomios ortonormales satisfacen:*

$$A_{k,i}A_{k+1,j} = A_{k,j}A_{k+1,i},$$

$$A_{k,i}B_{k+1,j} + B_{k,i}A_{k,j} = B_{k,j}A_{k,i} + A_{k,j}B_{k+1,i},$$

$$A_{k-1,i}^TA_{k-1,j} + B_{k,i}B_{k,j} + A_{k,i}A_{k,j}^T = A_{k-1,j}^TA_{k-1,i} + B_{k,j}B_{k,i} + A_{k,j}A_{k,i}^T,$$

para $i \neq j$, $1 \leq i, j \leq d$, *y* $k \geq 0$, *donde* $A_{-1,i} = 0$.

La idea fundamental de la prueba es que las relaciones anteriores se obtienen al calcular las matrices $\langle x_i x_j \mathbb{P}_k(\mathbf{x}), \mathbb{P}_{k+2}^T(\mathbf{x})\rangle$, $\langle x_i x_j \mathbb{P}_k(\mathbf{x}), \mathbb{P}_k^T(\mathbf{x})\rangle$ y $\langle x_i x_j \mathbb{P}_k(\mathbf{x}), \mathbb{P}_{k+1}^T(\mathbf{x})\rangle$ de dos formas diferentes, empleando la relación de recurrencia a tres términos, remplazando $x_i\mathbb{P}_n(\mathbf{x})$ y $x_j\mathbb{P}_n(\mathbf{x})$ respectivamente.

2.3.2. Funciones núcleo

Se define, la función núcleo o función kernel de V_i^d por:

$$P_j(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \mathbb{P}_j^T(\mathbf{x}) H_j^{-1} \mathbb{P}_j(\mathbf{y}) = P_j(\mathbf{y},\mathbf{x}), \qquad j \geq 0, \tag{2.13}$$

y la función núcleo de Π_n^d por:

$$K_n(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \sum_{j=0}^{n} P_j(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \sum_{j=0}^{n} \mathbb{P}_j^T(\mathbf{x}) H_j^{-1} \mathbb{P}_j(\mathbf{y}) = K_n(\mathbf{y},\mathbf{x}), \qquad n \geq 0. \tag{2.14}$$

Diferente a los polinomios ortogonales en una variable, el sistema de polinomios ortogonales en varias variables no es único; esto como consecuencia de los diferentes ordenes en los vectores polinomios que se pueden abordar y de los posibles cambios de base. Además, la definición de $K_n(x,y)$ no depende de la base que se usa (ver [7]). Generalmente por facilidad se emplea una base ortonormal, por lo cual, la función núcleo adopta una expresión más simple,

$$K_n(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \sum_{j=0}^{n} \mathbb{P}_j^T(\mathbf{x}) \mathbb{P}_j(\mathbf{y}).$$

Como consecuencia de la relación de recurrencia a tres términos (2.6), se puede extender la fórmula de Christoffel-Darboux de una variable a polinomios ortogonales en varias variables (ver [7]). Sea $K_n(x,y)$ definido como en (2.14), entonces se tiene:

Fórmula de Christoffel-Darboux.

Sean $\mathcal{L}$ un funcional lineal definido positivo y $\{\mathbb{P}_n(\mathbf{x})\}_{n\geq 0} = \{P_\alpha^n(\mathbf{x}) : |\kappa| = n\}_{n\geq 0}$ un sistema de polinomios ortogonales asociado a $\mathcal{L}$. Para $n \geq 0$, $1 \leq i \leq d$,

$$K_n(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \frac{\left[A_{n,i}\mathbb{P}_{n+1}(\mathbf{x})\right]^T H_n^{-1} \mathbb{P}_n(\mathbf{y}) - \mathbb{P}_n^T(\mathbf{x}) H_n^{-1} \left[A_{n,i}\mathbb{P}_{n+1}(\mathbf{y})\right]}{x_i - y_i}, \tag{2.15}$$

con $x_i \neq y_i$ y

$$K_n(\mathbf{x},\mathbf{x}) = \mathbb{P}_n^T(\mathbf{x}) H_n^{-1} A_{n,i} \partial_i \mathbb{P}_{n+1}(\mathbf{x}) - \left[A_{n,i}\mathbb{P}_{n+1}(\mathbf{x})\right]^T H_n^{-1} \partial_i \mathbb{P}_n(\mathbf{x}). \tag{2.16}$$

Si $\{\mathbb{P}_n(\mathbf{x})\}_{n\geq 0}$ es un sistema de polinomios ortonormal, entonces

$$K_n(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \frac{\left[A_{n,i}\mathbb{P}_{n+1}(\mathbf{x})\right]^T \mathbb{P}_n(\mathbf{y}) - \mathbb{P}_n^T(\mathbf{x}) \left[A_{n,i}\mathbb{P}_{n+1}(\mathbf{y})\right]}{x_i - y_i},$$

con $x_i \neq y_i$ y

$$K_n(\mathbf{x},\mathbf{x}) = \mathbb{P}_n^T(\mathbf{x}) A_{n,i} \partial_i \mathbb{P}_{n+1}(\mathbf{x}) - \left[A_{n,i}\mathbb{P}_{n+1}(\mathbf{x})\right]^T \partial_i \mathbb{P}_n(\mathbf{x}).$$

2.3.3. Ceros comunes

El conjunto de ceros para un polinomio en varias variables puede ser un punto, una curva, en general una variedad algebráica, la cual presenta dificultad al estudiarla. Un cero común de un conjunto de polinomios es un cero para cada polinomio del conjunto.

Dado $\mathcal{L}$ un funcional lineal definido positivo y $\{\mathbb{P}_n(\mathbf{x})\}_{n\geq 0}$ un sistema de polinomios ortogonales asociado a $\mathcal{L}$; un cero común de $\mathbb{P}_n$ es un cero para todo $P_\kappa(\mathbf{x})$, es decir un cero común $\zeta \in \mathbb{R}^d$ de $\mathbb{P}_n(\mathbf{x})$, es un cero para cada componente de $\mathbb{P}_n(\mathbf{x})$, $P_j^n(\zeta) = 0$ para todo $1 \leq j \leq r_n^d$.

Los ceros comunes de $\mathbb{P}_n(\mathbf{x})$ son caracterizados en los dos teoremas siguientes:

Teorema 2.5. *Todos los ceros comunes de $\mathbb{P}_n(\mathbf{x})$ son reales, simples y puntos en $\mathbb{R}^d$. Cada polinomio ortogonal $\mathbb{P}_n(\mathbf{x})$ tiene al menos $N = dim\Pi_{n-1}^d$ ceros comunes y $\mathbb{P}_n(\mathbf{x})$ tiene N ceros comunes si y solo si*

$$A_{n-1,i}A_{n-1,j}^T = A_{n-1,j}A_{n-1,i}^T, \qquad 1 \leq i, j \leq d. \tag{2.17}$$

Para $n \in \mathbb{N}$, se definen las *matrices truncadas por bloques de Jacobi* $J_{n,i}$ por:

$$J_{n,i} = \begin{pmatrix} B_{0,i} & A_{0,i} & 0 & \cdots & 0 \\ A_{0.i}^T & B_{1,i} & A_{1,i} & \cdots & 0 \\ 0 & A_{1,i}^T & B_{2,i} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & B_{n-1,i} \end{pmatrix}, \qquad 1 \leq i \leq d.$$

$J_{n,i}$ es una matriz cuadrada de tamaño $N \times N$ con $N = dim\Pi_{n-1}^d$.

Se dice que $\Lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_d)^T \in \mathbb{R}^d$ es un *autovalor conjunto* de $J_{n,1}, \ldots, J_{n,d}$, si existe un $\xi \neq 0$, $\xi \in \mathbb{R}^{\mathbf{N}}$, tal que $J_{n,i}\xi = \lambda_i\xi$ para $i = 1, \ldots, d$; el vector ξ es denominado *autovector conjunto* asociado a Λ.

Teorema 2.6. *Un punto $\Lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_d)^T \in \mathbb{R}^d$ es un cero común de $\mathbb{P}_n(\mathbf{x})$ si y sólo si Λ es un autovalor conjunto de $J_{n,1}, \ldots, J_{n,d}$; además, un autovector conjunto de Λ es $\left(\mathbb{P}_0^T(\Lambda), \ldots, \mathbb{P}_{n-1}^T(\Lambda)\right)$.*

CAPÍTULO 3

Producto interno tipo Sobolev de orden superior (gradiente)

En este capítulo consideramos polinomios en varias variables ortogonales con respecto a un producto interno tipo Sobolev planteado en [10], obtenido al añadir una perturbación de operador gradiente de orden j a un producto interno estándar. Se presenta una expresión para los polinomios ortogonales tipo Sobolev en términos de la familia de polinomios asociados con el producto interno estándar. Además, se ilustra un ejemplo usando polinomios en la bola unidad y se analiza el comportamiento asintótico del núcleo asociado a polinomios ortogonales tipo Sobolev en varias variables.

3.1. Operador gradiente y funciones núcleo

Sea $f(\mathbf{x})$ una función en d variables con imagen en los reales. Se define el operador gradiente ∇ como:

$$\nabla f(\mathbf{x}) = (\partial_1 f(\mathbf{x}), \partial_2 f(\mathbf{x}), \ldots, \partial_d f(\mathbf{x})) \in M_{1\times d}(\Pi^d).$$

El operador gradiente puede extenderse para polinomios vector columna. Si $\{\mathbb{P}_n(\mathbf{x})\}_{n\geq 0}$ es un sistema de polinomios ortogonales, para $n \geq 0$,

$$\begin{aligned}\nabla\mathbb{P}_n = \nabla\mathbb{P}_n(\mathbf{x}) &= (\partial_1\mathbb{P}_n(\mathbf{x})|\partial_2\mathbb{P}_n(\mathbf{x})|\ldots|\partial_d\mathbb{P}_n(\mathbf{x})) \\ &= \begin{pmatrix} \partial_1 P_{\kappa_1(\mathbf{x})} & \partial_2 P_{\kappa_1(\mathbf{x})} & \partial_3 P_{\kappa_1(\mathbf{x})} & \cdots & \partial_d P_{\kappa_1(\mathbf{x})} \\ \partial_1 P_{\kappa_2(\mathbf{x})} & \partial_2 P_{\kappa_2(\mathbf{x})} & \partial_3 P_{\kappa_2(\mathbf{x})} & \cdots & \partial_d P_{\kappa_2(\mathbf{x})} \\ \partial_1 P_{\kappa_3(\mathbf{x})} & \partial_2 P_{\kappa_3(\mathbf{x})} & \partial_3 P_{\kappa_3(\mathbf{x})} & \cdots & \partial_d P_{\kappa_3(\mathbf{x})} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \partial_1 P_{\kappa_{r_n^d}(\mathbf{x})} & \partial_2 P_{\kappa_{r_n^d}(\mathbf{x})} & \partial_3 P_{\kappa_{r_n^d}(\mathbf{x})} & \cdots & \partial_d P_{\kappa_{r_n^d}(\mathbf{x})} \end{pmatrix} \in M_{r_n^d\times d}(\Pi^d),\end{aligned}$$

y un gradiente de orden superior se define:

$$\nabla^{(j)}\mathbb{P}_n = \nabla^{(j)}\mathbb{P}_n(\mathbf{x}) = \left(\partial^j_{\beta_1}\mathbb{P}_n(\mathbf{x})|\partial^j_{\beta_2}\mathbb{P}_n(\mathbf{x})|\ldots|\partial^j_{\beta^j_d}\mathbb{P}_n(\mathbf{x})\right) \in M_{r_n^d\times d^j}(\Pi^d), \tag{3.1}$$

donde, $\partial^j_{\beta_i} = \frac{\partial^j}{\partial x_1^{\gamma_1}\partial x_2^{\gamma_2}\ldots\partial^j\partial x_d^{\gamma_d}}$ y β_i recorre todas las d^j combinaciones de j derivadas totales con respecto a d variables diferentes (es decir todas las diferentes combinaciones de $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_d \in \mathbb{N}$ tal que $\gamma_1 + \gamma_2 + \cdots + \gamma_d = j$, de acuerdo al orden lexicográfico).

Se definen los vectores:

$$K_n^{(j,0)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_{j=0}^{n} (\nabla^{(j)}\mathbb{P}_j(\mathbf{x}))^T H_j^{-1}\mathbb{P}_j(\mathbf{y}) \in M_{d^j\times 1}(\Pi^d), \tag{3.2}$$

$$K_n^{(0,j)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_{j=0}^{n} \mathbb{P}_j^T(\mathbf{x}) H_j^{-1}\nabla^{(j)}\mathbb{P}_j(\mathbf{y}) \in M_{1\times d^j}(\Pi^d), \tag{3.3}$$

los cuales satisfacen $K_n^{(j,0)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (K_n^{(0,j)}(\mathbf{y}, \mathbf{x}))^T$, y la matriz

$$K_n^{(j,j)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (\partial^j_{\beta_i}\partial^j_{\eta_k} K_n(\mathbf{x}, \mathbf{y}))_{i,k=1}^{d^j}, \tag{3.4}$$

donde como antes, β_i (igual para η_k) recorre todas las d^j combinaciones de un total de j derivadas con respecto a d variables en $\mathbf{x}$ (resp $\mathbf{y}$).

Lema 3.1. Sea $\lambda \geq 0$ un número real positivo y $\xi \in \mathbb{R}^d$ un punto fijo. Para $n \geq 0$, $I_{d^j} + \lambda K_n^{(j,j)}(\xi, \xi)$ es una matriz simétrica y no singular.

La prueba del Lema (3.1) se puede revisar en [10].

3.2. Producto interno tipo Sobolev de orden superior

Consideremos el siguiente producto interno tipo Sobolev:

$$\begin{aligned}\langle P(\mathbf{x}), Q(\mathbf{x})\rangle_\mu &= \langle P(\mathbf{x}), Q(\mathbf{x})\rangle_\sigma + \lambda\nabla^{(j)}P(\xi)(\nabla^{(j)}Q(\xi))^T \\ &= \int_E P(\mathbf{x})Q(\mathbf{x})d\sigma(\mathbf{x}) + \lambda\nabla^{(j)}P(\xi)(\nabla^{(j)}Q(\xi))^T,\end{aligned} \tag{3.5}$$

donde $\xi \in \mathbb{R}^d$, $\lambda \in \mathbb{R}^+$, $E \subseteq \mathbb{R}^d$, $j \in \mathbb{N}$ y σ es una medida positiva en $\mathbb{R}^d$.

Se denota por $\{\mathbb{Q}_n(\mathbf{x})\}_{n\geq 0}$ el sistema de polinomios ortonormales con respecto a (3.5) y $\{\mathbb{P}_n(\mathbf{x})\}_{n\geq 0}$ el sistema de polinomios ortonormales asociado con $\langle P(\mathbf{x}), Q(\mathbf{x})\rangle_\sigma$.

El siguiente teorema cuya demostración aparece en [10] y aquí hemos ampliado los detalles, establece una relación entre $\{\mathbb{Q}_n(\mathbf{x})\}_{n\geq 0}$ y $\{\mathbb{P}_n(\mathbf{x})\}_{n\geq 0}$.

Teorema 3.1. *Sea $\{\mathbb{P}_n(\mathbf{x})\}_{n\geq 0}$ el sistema de polinomios ortonormales asociado con el producto interno $\langle P(\mathbf{x}), Q(\mathbf{x})\rangle_\sigma$ y $\{\mathbb{Q}_n(\mathbf{x})\}_{n\geq 0}$ el sistema de polinomios ortonormales correspondiente a (3.5), normalizados tal que $\mathbb{P}_n(\mathbf{x})$ y $\mathbb{Q}_n(\mathbf{x})$ tengan el mismo coeficiente principal. Entonces $\mathbb{P}_0 = \mathbb{Q}_0$, y para $n > 0$,*

$$\mathbb{Q}_n(\mathbf{x}) = \mathbb{P}_n(\mathbf{x}) - \lambda\nabla^{(j)}\mathbb{P}_n(\xi)(I_{d^j} + \lambda K_{n-1}^{(j,j)}(\xi, \xi))^{-1}K_{n-1}^{(j,0)}(\xi, x). \tag{3.6}$$

Recíprocamente, si se define $\mathbb{Q}_n(\mathbf{x})$ como en (3.6), $\{\mathbb{Q}_n(\mathbf{x})\}_{n\geq 0}$ representa un sistema de polinomios ortogonales con respecto a (3.5).

Demostración. Sea $\{\mathbb{P}_n(\mathbf{x})\}_{n\geq 0}$ el sistema de polinomios ortonormales asociado con (2.2) y sea $\{\mathbb{Q}_n(\mathbf{x})\}_{n\geq 0}$ el sistema de polinomios ortonormales asociado con (3.5), tal que $\mathbb{P}_n(\mathbf{x})$ y $\mathbb{Q}_n(\mathbf{x})$ tienen el mismo coeficiente principal, es decir, $\mathbb{Q}_n(\mathbf{x})-\mathbb{P}_n(\mathbf{x})\in\Pi^d_{n-1}$ para $n\geq 0$. Esto demuestra en particular que $\mathbb{P}_0=\mathbb{Q}_0$.

Como $\{\mathbb{P}_n(\mathbf{x})\}_{n\geq 0}$ es una base para Π^d_n, para cada $n\geq 1$ existen matrices constantes A^n_i de tamaño $r^d_n\times r^d_n$ tales que:

$$\mathbb{Q}_n(\mathbf{x})=\mathbb{P}_n(\mathbf{x})+\sum_{i=0}^{n-1}A^n_i\mathbb{P}_i(\mathbf{x}),$$

donde

$$A^n_i=\langle\mathbb{Q}_n(\mathbf{x}),\mathbb{P}_i(\mathbf{x})\rangle_\sigma=\langle\mathbb{Q}_n(\mathbf{x}),\mathbb{P}_i(\mathbf{x})\rangle_\mu-\lambda\nabla^{(j)}\mathbb{Q}_n(\xi)(\nabla^{(j)}\mathbb{P}_i(\xi))^T,$$

y por la ortogonalidad de $\mathbb{Q}_n(\mathbf{x})$ respecto a μ,

$$A^n_i=-\lambda\nabla^{(j)}\mathbb{Q}_n(\xi)(\nabla^{(j)}\mathbb{P}_i(\xi))^T.$$

Por tanto,

$$\begin{aligned}\mathbb{Q}_n(\mathbf{x})&=\mathbb{P}_n(\mathbf{x})+\sum_{i=0}^{n-1}-\lambda\nabla^{(j)}\mathbb{Q}_n(\xi)(\nabla^{(j)}\mathbb{P}_i(\xi))^T\mathbb{P}_i(\mathbf{x})\\&=\mathbb{P}_n(\mathbf{x})-\lambda\nabla^{(j)}\mathbb{Q}_n(\xi)\sum_{i=0}^{n-1}(\nabla^{(j)}\mathbb{P}_i(\xi))^T\mathbb{P}_i(\mathbf{x})\\&=\mathbb{P}_n(\mathbf{x})-\lambda\nabla^{(j)}\mathbb{Q}_n(\xi)K^{(j,0)}_{n-1}(\xi,\mathbf{x}).\end{aligned}\tag{3.7}$$

Aplicando $\nabla^{(j)}$ en ambos lados con respecto a la variable $\mathbf{x}$,

$$\begin{aligned}\nabla^{(j)}\mathbb{Q}_n(\mathbf{x})&=\nabla^{(j)}\left(\mathbb{P}_n(\mathbf{x})-\lambda\nabla^{(j)}\mathbb{Q}_n(\xi)K^{(j,0)}_{n-1}(\xi,\mathbf{x})\right)\\&=\nabla^{(j)}\mathbb{P}_n(\mathbf{x})-\lambda\nabla^{(j)}\mathbb{Q}_n(\xi)K^{(j,j)}_{n-1}(\xi,\mathbf{x}).\end{aligned}$$

Evaluando en $\mathbf{x}=\xi$,

$$\nabla^{(j)}\mathbb{Q}_n(\xi)=\nabla^{(j)}\mathbb{P}_n(\xi)-\lambda\nabla^{(j)}\mathbb{Q}_n(\xi)K^{(j,j)}_{n-1}(\xi,\xi)$$

$$\nabla^{(j)}\mathbb{Q}_n(\xi)+\lambda\nabla^{(j)}\mathbb{Q}_n(\xi)K^{(j,j)}_{n-1}(\xi,\xi)=\nabla^{(j)}\mathbb{P}_n(\xi)$$

$$\nabla^{(j)}\mathbb{Q}_n(\xi)\left(I_{d^j}+\lambda K^{(j,j)}_{n-1}(\xi,\xi)\right)=\nabla^{(j)}\mathbb{P}_n(\xi).$$

Por el Lema (3.1),

$$\nabla^{(j)}\mathbb{Q}_n(\xi)=\nabla^{(j)}\mathbb{P}_n(\xi)\left(I_{d^j}+\lambda K^{(j,j)}_{n-1}(\xi,\xi)\right)^{-1}.\tag{3.8}$$

Remplazando (3.8) en (3.7),

$$\mathbb{Q}_n(\mathbf{x})=\mathbb{P}_n(\mathbf{x})-\lambda\nabla^{(j)}\mathbb{P}_n(\xi)\left(I_{d^j}+\lambda K^{(j,j)}_{n-1}(\xi,\xi)\right)^{-1}K^{(j,0)}_{n-1}(\xi,\mathbf{x}).$$

Recíprocamente, un cálculo directo demuestra que (3.6) es un sistema de polinomios ortogonales con respecto a (3.5). □

El siguiente teorema da una expresión para $G_n = \langle \mathbb{Q}_n(\mathbf{x}), \mathbb{Q}_n^T(\mathbf{x})\rangle_\mu$ $(n \geq 0)$, en términos del sistema de polinomios ortonormales $\{\mathbb{P}_n(\mathbf{x})\}_{n\geq 0}$.

Teorema 3.2. *Sea* $\{\mathbb{Q}_n\}_{n\geq 0}$ *el sistema de polinomios ortonormales con respecto a (3.5), y sea* $G_n = \langle \mathbb{Q}_n(\mathbf{x}), \mathbb{Q}_n^T(\mathbf{x})\rangle_\mu$*. Entonces*

$$G_n = I_{r_n^d} + \lambda \nabla^{(j)}\mathbb{P}_n(\xi)\left(I_{d^j} + \lambda K_{n-1}^{(j,j)}(\xi,\xi)\right)^{-1}(\nabla^{(j)}\mathbb{P}_n(\xi))^T, \tag{3.9}$$

$$G_n^{-1} = I_{r_n^d} - \lambda \nabla^{(j)}\mathbb{P}_n(\xi)\left(I_{d^j} + \lambda K_{n}^{(j,j)}(\xi,\xi)\right)^{-1}(\nabla^{(j)}\mathbb{P}_n(\xi))^T. \tag{3.10}$$

Demostración. De (3.5),

$$\begin{aligned} G_n = \langle \mathbb{Q}_n(\mathbf{x}), \mathbb{Q}_n^T(\mathbf{x})\rangle_\mu &= \langle \mathbb{Q}_n(\mathbf{x}), \mathbb{P}_n^T(\mathbf{x})\rangle_\mu \\ &= \langle \mathbb{Q}_n(\mathbf{x}), \mathbb{P}_n^T(\mathbf{x})\rangle_\sigma + \lambda\nabla^{(j)}\mathbb{Q}_n(\xi)(\nabla^{(j)}\mathbb{P}_n(\xi))^T, \end{aligned}$$

empleando la ortogonalidad de $\{\mathbb{P}_n(\mathbf{x})\}_{n\geq 0}$ y (3.8),

$$G_n = I_{r_n^d} + \lambda \nabla^{(j)}\mathbb{P}_n(\xi)\left(I_{d^j} + \lambda K_{n-1}^{(j,j)}(\xi,\xi)\right)^{-1}(\nabla^{(j)}\mathbb{P}_n(\xi))^T.$$

Falta por verificar (3.10), para ello primero calculamos $\lambda(\nabla^{(j)}\mathbb{P}_n(\xi))^T\nabla^{(j)}\mathbb{P}_n(\xi)$,

$$\begin{aligned} K_n^{(j,j)}(\xi,\xi) &= \sum_{i=0}^{n}(\nabla^{(j)}\mathbb{P}_i(\xi))^T\nabla^{(j)}\mathbb{P}_i(\xi) \\ &= (\nabla^{(j)}\mathbb{P}_n(\xi))^T\nabla^{(j)}\mathbb{P}_n(\xi) + \sum_{i=0}^{n-1}(\nabla^{(j)}\mathbb{P}_i(\xi))^T\nabla^{(j)}\mathbb{P}_i(\xi) \\ &= (\nabla^{(j)}\mathbb{P}_n(\xi))^T\nabla^{(j)}\mathbb{P}_n(\xi) + K_{n-1}^{(j,j)}(\xi,\xi). \end{aligned}$$

Luego,

$$(\nabla^{(j)}\mathbb{P}_n(\xi))^T\nabla^{(j)}\mathbb{P}_n(\xi) = K_n^{(j,j)}(\xi,\xi) - K_{n-1}^{(j,j)}(\xi,\xi).$$

$$\begin{aligned} \lambda(\nabla^{(j)}\mathbb{P}_n(\xi))^T\nabla^{(j)}\mathbb{P}_n(\xi) &= \lambda\left[K_n^{(j,j)}(\xi,\xi) - K_{n-1}^{(j,j)}(\xi,\xi)\right] \\ &= \left(I_{r_n^d} + K_n^{(j,j)}(\xi,\xi)\right) - \left(I_{r_n^d} + K_{n-1}^{(j,j)}(\xi,\xi)\right). \end{aligned} \tag{3.11}$$

Luego calculamos $J_n = G_n\left[I_{r_n^d} - \lambda\nabla^{(j)}\mathbb{P}_n(\xi)(I_{d^j} + \lambda K_n^{(j,j)}(\xi,\xi))^{-1}(\nabla^{(j)}\mathbb{P}_n(\xi))^T\right]$ y observamos que $J_n = I_{r_n^d}$, para así demostrar (3.10),

$$\begin{aligned}
J_n &= G_n \left[I_{r_n^d} - \lambda \nabla^{(j)} \mathbb{P}_n(\xi) \left(I_{d^j} + \lambda K_n^{(j,j)}(\xi,\xi) \right)^{-1} (\nabla^{(j)} \mathbb{P}_n(\xi))^T \right] \\
&= \left[I_{r_n^d} + \lambda \nabla^{(j)} \mathbb{P}_n(\xi) \left(I_{d^j} + \lambda K_{n-1}^{(j,j)}(\xi,\xi) \right)^{-1} (\nabla^{(j)} \mathbb{P}_n(\xi))^T \right] \\
&\quad \left[I_{r_n^d} - \lambda \nabla^{(j)} \mathbb{P}_n(\xi) \left(I_{d^j} + \lambda K_n^{(j,j)}(\xi,\xi) \right)^{-1} (\nabla^{(j)} \mathbb{P}_n(\xi))^T \right] \\
&= I_{r_n^d} - \lambda \nabla^{(j)} \mathbb{P}_n(\xi) \left(I_{d^j} + \lambda K_{n-1}^{(j,j)}(\xi,\xi) \right)^{-1} (\nabla^{(j)} \mathbb{P}_n(\xi))^T \\
&\quad \lambda \nabla^{(j)} \mathbb{P}_n(\xi) \left(I_{d^j} + \lambda K_n^{(j,j)}(\xi,\xi) \right)^{-1} (\nabla^{(j)} \mathbb{P}_n(\xi))^T \\
&= I_{r_n^d} - \lambda \nabla^{(j)} \mathbb{P}_n(\xi) \left(I_{d^j} + \lambda K_{n-1}^{(j,j)}(\xi,\xi) \right)^{-1} \left[(\nabla^{(j)} \mathbb{P}_n(\xi))^T \lambda \nabla^{(j)} \mathbb{P}_n(\xi) \right] \\
&\quad \left(I_{d^j} + \lambda K_n^{(j,j)}(\xi,\xi) \right)^{-1} (\nabla^{(j)} \mathbb{P}_n(\xi))^T.
\end{aligned}$$

Empleando (3.11),

$$\begin{aligned}
J_n &= I_{r_n^d} - \lambda \nabla^{(j)} \mathbb{P}_n(\xi) \left(I_{d^j} + \lambda K_{n-1}^{(j,j)}(\xi,\xi) \right)^{-1} \\
&\quad \left[\left(I_{d^j} + \lambda K_n^{(j,j)}(\xi,\xi) \right) - \left(I_{d^j} + \lambda K_{n-1}^{(j,j)}(\xi,\xi) \right) \right] \left(I_{d^j} + \lambda K_n^{(j,j)}(\xi,\xi) \right)^{-1} (\nabla^{(j)} \mathbb{P}_n(\xi))^T \\
&= I_{r_n^d} - \lambda \nabla^{(j)} \mathbb{P}_n(\xi) \left[\left(I_{d^j} + \lambda K_{n-1}^{(j,j)}(\xi,\xi) \right)^{-1} - \left(I_{d^j} + \lambda K_n^{(j,j)}(\xi,\xi) \right)^{-1} \right] (\nabla^{(j)} \mathbb{P}_n(\xi))^T \\
&= I_{r_n^d}.
\end{aligned}$$

□

Ahora, definimos las funciones núcleo de V_i^d asociadas con $\{\mathbb{Q}_n(\mathbf{x})\}_{n\geq 0}$. Para $i \geq 0$,

$$Q_i(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \mathbb{Q}_i^T(\mathbf{x}) G_i^{-1} \mathbb{Q}_j(\mathbf{y}) = Q_i(\mathbf{y},\mathbf{x}), \tag{3.12}$$

y las funciones núcleo de Π_n^d asociadas con $\{\mathbb{Q}_n(\mathbf{x})\}_{n\geq 0}$. Para $n \geq 0$,

$$\tilde{K}_n(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \sum_{i=0}^{n} Q_i(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \sum_{i=0}^{n} \mathbb{Q}_i^T(\mathbf{x}) G_i^{-1} \mathbb{Q}_i(\mathbf{y}). \tag{3.13}$$

El siguiente teorema presenta una fórmula para $\tilde{K}_n(\mathbf{x},\mathbf{y})$ en términos de $K_n(\mathbf{x},\mathbf{y})$ y sus derivadas.

Teorema 3.3. *Para $i \geq 1$, se cumple:*

$$\begin{aligned}
Q_i(\mathbf{x},\mathbf{y}) = P_i(\mathbf{x},\mathbf{y}) &- \lambda (K_i^{(j,0)}(\xi,\mathbf{x}))^T \left(I_{d^j} + \lambda K_i^{(j,j)}(\xi,\xi) \right)^{-1} K_i^{(j,0)}(\xi,\mathbf{y}) \\
&+ \lambda (K_{i-1}^{(j,0)}(\xi,\mathbf{x}))^T \left(I_{d^j} + \lambda K_{i-1}^{(j,j)}(\xi,\xi) \right)^{-1} K_{i-1}^{(j,0)}(\xi,\mathbf{y}),
\end{aligned} \tag{3.14}$$

asumiendo que $K_0^{(j,0)}(\mathbf{x},\mathbf{y}) = 0$. Además,

$$\tilde{K}_n(\mathbf{x},\mathbf{y}) = K_n(\mathbf{x},\mathbf{y}) - \lambda (K_n^{(j,0)}(\xi,\mathbf{x}))^T \left(I_{d^j} + \lambda K_n^{(j,j)}(\xi,\xi) \right)^{-1} K_n^{(j,0)}(\xi,\mathbf{y}). \tag{3.15}$$

Demostración. A partir de (3.6) y (3.10),

$$
\begin{aligned}
\mathbb{Q}_i^T(\mathbf{x})G_i^{-1} &= \left[\mathbb{P}_i^T(\mathbf{x}) - \lambda\left(K_{i-1}^{(j,0)}(\xi,\mathbf{x})\right)^T\left(I_{d^j} + \lambda K_{i-1}^{(j,j)}(\xi,\xi)\right)^{-1}\left(\nabla^{(j)}\mathbb{P}_n(\xi)\right)^T\right] \\
&\quad \left[I_{r_i^d} - \lambda\nabla^{(j)}\mathbb{P}_i(\xi)\left(I_{d^j} + \lambda K_i^{(j,j)}(\xi,\xi)\right)^{-1}\left(\nabla^{(j)}\mathbb{P}_i(\xi)\right)^T\right] \\
&= \mathbb{P}_i^T(\mathbf{x}) - \lambda\mathbb{P}_i^T(\mathbf{x})\nabla^{(j)}\mathbb{P}_i(\xi)\left(I_{d^j} + \lambda K_i^{(j,j)}(\xi,\xi)\right)^{-1}\left(\nabla^{(j)}\mathbb{P}_i(\xi)\right)^T \\
&\quad -\lambda\left(K_{i-1}^{(j,0)}(\xi,\mathbf{x})\right)^T\left(I_{d^j} + \lambda K_{i-1}^{(j,j)}(\xi,\xi)\right)^{-1}\left(\nabla^{(j)}\mathbb{P}_n(\xi)\right)^T \\
&\quad +\lambda\left(K_{i-1}^{(j,0)}(\xi,\mathbf{x})\right)^T\left(I_{d^j} + \lambda K_{i-1}^{(j,j)}(\xi,\xi)\right)^{-1}\left(\nabla^{(j)}\mathbb{P}_n(\xi)\right)^T \\
&\quad \lambda\nabla^{(j)}\mathbb{P}_i(\xi)\left(I_{d^j} + \lambda K_i^{(j,j)}(\xi,\xi)\right)^{-1}\left(\nabla^{(j)}\mathbb{P}_i(\xi)\right)^T,
\end{aligned}
$$

empleando (3.11), tenemos:

$$
\begin{aligned}
\mathbb{Q}_i^T(\mathbf{x})G_i^{-1} &= \mathbb{P}_i^T(\mathbf{x}) - \lambda\mathbb{P}_i^T(\mathbf{x})\nabla^{(j)}\mathbb{P}_i(\xi)\left(I_{d^j} + \lambda K_i^{(j,j)}(\xi,\xi)\right)^{-1}\left(\nabla^{(j)}\mathbb{P}_i(\xi)\right)^T \\
&\quad -\lambda\left(K_{i-1}^{(j,0)}(\xi,\mathbf{x})\right)^T\left(I_{d^j} + \lambda K_{i-1}^{(j,j)}(\xi,\xi)\right)^{-1}\left(\nabla^{(j)}\mathbb{P}_n(\xi)\right)^T \\
&\quad +\lambda\left(K_{i-1}^{(j,0)}(\xi,\mathbf{x})\right)^T\left(I_{d^j} + \lambda K_{i-1}^{(j,j)}(\xi,\xi)\right)^{-1} \\
&\quad \left[\left(I_{d^j} + \lambda K_i^{(j,j)}(\xi,\xi)\right) - \left(I_{d^j} + \lambda K_{i-1}^{(j,j)}(\xi,\xi)\right)\right] \\
&\quad \left(I_{d^j} + \lambda K_i^{(j,j)}(\xi,\xi)\right)^{-1}\left(\nabla^{(j)}\mathbb{P}_i(\xi)\right)^T \\
&= \mathbb{P}_i^T(\mathbf{x}) - \lambda\mathbb{P}_i^T(\mathbf{x})\nabla^{(j)}\mathbb{P}_i(\xi)\left(I_{d^j} + \lambda K_i^{(j,j)}(\xi,\xi)\right)^{-1}\left(\nabla^{(j)}\mathbb{P}_i(\xi)\right)^T \\
&\quad -\lambda\left(K_{i-1}^{(j,0)}(\xi,\mathbf{x})\right)^T\left(I_{d^j} + \lambda K_{i-1}^{(j,j)}(\xi,\xi)\right)^{-1}\left(\nabla^{(j)}\mathbb{P}_n(\xi)\right)^T \\
&\quad +\lambda\left(K_{i-1}^{(j,0)}(\xi,\mathbf{x})\right)^T\left(I_{d^j} + \lambda K_{i-1}^{(j,j)}(\xi,\xi)\right)^{-1}\left(\nabla^{(j)}\mathbb{P}_i(\xi)\right)^T \\
&\quad -\lambda\left(K_{i-1}^{(j,0)}(\xi,\mathbf{x})\right)^T\left(I_{d^j} + \lambda K_i^{(j,j)}(\xi,\xi)\right)^{-1}\left(\nabla^{(j)}\mathbb{P}_i(\xi)\right)^T \\
&= \mathbb{P}_i^T(\mathbf{x}) - \lambda\mathbb{P}_i^T(\mathbf{x})\nabla^{(j)}\mathbb{P}_i(\xi)\left(I_{d^j} + \lambda K_i^{(j,j)}(\xi,\xi)\right)^{-1}\left(\nabla^{(j)}\mathbb{P}_i(\xi)\right)^T \\
&\quad -\lambda\left(K_{i-1}^{(j,0)}(\xi,\mathbf{x})\right)^T\left(I_{d^j} + \lambda K_i^{(j,j)}(\xi,\xi)\right)^{-1}\left(\nabla^{(j)}\mathbb{P}_i(\xi)\right)^T \\
&= \mathbb{P}_i^T(\mathbf{x}) - \lambda\left(K_i^{(j,0)}(\xi,\mathbf{x})\right)^T\left(I_{d^j} + \lambda K_i^{(j,j)}(\xi,\xi)\right)^{-1}\left(\nabla^{(j)}\mathbb{P}_i(\xi)\right)^T.
\end{aligned}
$$

Por tanto,

$$
\begin{aligned}
\mathbb{Q}_i^T(\mathbf{x})G_i^{-1}\mathbb{Q}_i(\mathbf{y}) &= \left[\mathbb{P}_i^T(\mathbf{x}) - \lambda\left(K_i^{(j,0)}(\xi,\mathbf{x})\right)^T \left(I_{d^j} + \lambda K_i^{(j,j)}(\xi,\xi)\right)^{-1}\left(\nabla^{(j)}\mathbb{P}_i(\xi)\right)^T\right] \\
&\quad \left[\mathbb{P}_i(\mathbf{y}) - \lambda\nabla^{(j)}\mathbb{P}_i(\xi)\left(I_{d^j} + \lambda K_{i-1}^{(j,j)}(\xi,\xi)\right)^{-1} K_{i-1}^{(j,0)}(\xi,\mathbf{y})\right] \\
&= \mathbb{P}_i^T(\mathbf{x})\mathbb{P}_i(\mathbf{y}) - \lambda\mathbb{P}_i^T(\mathbf{x})\nabla^{(j)}\mathbb{P}_i(\xi)\left(I_{d^j} + \lambda K_{i-1}^{(j,j)}(\xi,\xi)\right)^{-1} K_{i-1}^{(j,0)}(\xi,\mathbf{y}) \\
&\quad -\lambda\left(K_i^{(j,0)}(\xi,\mathbf{x})\right)^T \left(I_{d^j} + \lambda K_i^{(j,j)}(\xi,\xi)\right)^{-1}\left(\nabla^{(j)}\mathbb{P}_i(\xi)\right)^T \mathbb{P}_i(\mathbf{y}) \\
&\quad +\lambda\left(K_i^{(j,0)}(\xi,\mathbf{x})\right)^T \left(I_{d^j} + \lambda K_i^{(j,j)}(\xi,\xi)\right)^{-1}\left(\nabla^{(j)}\mathbb{P}_i(\xi)\right)^T \\
&\quad \lambda\nabla^{(j)}\mathbb{P}_i(\xi)\left(I_{d^j} + \lambda K_{i-1}^{(j,j)}(\xi,\xi)\right)^{-1} K_{i-1}^{(j,0)}(\xi,\mathbf{y}).
\end{aligned}
$$

Nuevamente, usando (3.11),

$$
\begin{aligned}
\mathbb{Q}_i^T(\mathbf{x})G_i^{-1}\mathbb{Q}_i(\mathbf{y}) &= \mathbb{P}_i^T(\mathbf{x})\mathbb{P}_i(\mathbf{y}) - \lambda\mathbb{P}_i^T(\mathbf{x})\nabla^{(j)}\mathbb{P}_i(\xi)\left(I_{d^j} + \lambda K_{i-1}^{(j,j)}(\xi,\xi)\right)^{-1} K_{i-1}^{(j,0)}(\xi,\mathbf{y}) \\
&\quad -\lambda\left(K_i^{(j,0)}(\xi,\mathbf{x})\right)^T \left(I_{d^j} + \lambda K_i^{(j,j)}(\xi,\xi)\right)^{-1}\left(\nabla^{(j)}\mathbb{P}_i(\xi)\right)^T \mathbb{P}_i(\mathbf{y}) \\
&\quad +\lambda\left(K_i^{(j,0)}(\xi,\mathbf{x})\right)^T \left(I_{d^j} + \lambda K_i^{(j,j)}(\xi,\xi)\right)^{-1} \\
&\quad \left[\left(I_{d^j} + \lambda K_i^{(j,j)}(\xi,\xi)\right) - \left(I_{d^j} + \lambda K_{i-1}^{(j,j)}(\xi,\xi)\right)\right] \\
&\quad \left(I_{d^j} + \lambda K_{i-1}^{(j,j)}(\xi,\xi)\right)^{-1} K_{i-1}^{(j,0)}(\xi,\mathbf{y}) \\
&= \mathbb{P}_i^T(\mathbf{x})\mathbb{P}_i(\mathbf{y}) - \lambda\mathbb{P}_i^T(\mathbf{x})\nabla^{(j)}\mathbb{P}_i(\xi)\left(I_{d^j} + \lambda K_{i-1}^{(j,j)}(\xi,\xi)\right)^{-1} K_{i-1}^{(j,0)}(\xi,\mathbf{y}) \\
&\quad -\lambda\left(K_i^{(j,0)}(\xi,\mathbf{x})\right)^T \left(I_{d^j} + \lambda K_i^{(j,j)}(\xi,\xi)\right)^{-1}\left(\nabla^{(j)}\mathbb{P}_i(\xi)\right)^T \mathbb{P}_i(\mathbf{y}) \\
&\quad +\lambda\left(K_i^{(j,0)}(\xi,\mathbf{x})\right)^T \left(I_{d^j} + \lambda K_{i-1}^{(j,j)}(\xi,\xi)\right)^{-1} K_{i-1}^{(j,0)}(\xi,\mathbf{y}) \\
&\quad -\lambda\left(K_i^{(j,0)}(\xi,\mathbf{x})\right)^T \left(I_{d^j} + \lambda K_i^{(j,j)}(\xi,\xi)\right)^{-1} K_{i-1}^{(j,0)}(\xi,\mathbf{y}) \\
&= \mathbb{P}_i^T(\mathbf{x})\mathbb{P}_i(\mathbf{y}) - \lambda\left(K_i^{(j,0)}(\xi,\mathbf{x})\right)^T \left(I_{d^j} + \lambda K_i^{(j,j)}(\xi,\xi)\right)^{-1} K_i^{(j,0)}(\xi,\mathbf{y}) \\
&\quad \lambda\left(K_i^{(j,0)}(\xi,\mathbf{x})\right)^T \left(I_{d^j} + \lambda K_{i-1}^{(j,j)}(\xi,\xi)\right)^{-1} K_{i-1}^{(j,0)}(\xi,\mathbf{y}),
\end{aligned}
$$

y de (2.13), se obtiene:

$$
\begin{aligned}
Q_i(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \mathbb{Q}_i^T(\mathbf{x})G_i^{-1}\mathbb{Q}_i(\mathbf{y}) &= P_i(\mathbf{x},\mathbf{y}) - \lambda(K_i^{(j,0)}(\xi,\mathbf{x}))^T \left(I_{d^j} + \lambda K_i^{(j,j)}(\xi,\xi)\right)^{-1} K_i^{(j,0)}(\xi,\mathbf{y}) \\
&\quad + \lambda(K_{i-1}^{(j,0)}(\xi,\mathbf{x}))^T \left(I_{d^j} + \lambda K_{i-1}^{(j,j)}(\xi,\xi)\right)^{-1} K_{i-1}^{(j,0)}(\xi,\mathbf{y}).
\end{aligned}
$$

Para deducir (3.15) realizamos la suma de la anterior expresión desde $j = 0, 1, \ldots, n$.

$$\begin{aligned}
\tilde{K}_n(\mathbf{x},\mathbf{y}) &= \sum_{i=1}^{n} Q_i(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{Q}_i^T(\mathbf{x}) G_i^{-1} \mathbb{Q}_i(\mathbf{y}) \\
&= \sum_{i=1}^{n} P_i(\mathbf{x},\mathbf{y}) - \sum_{i=1}^{n} \lambda (K_i^{(j,0)}(\xi,\mathbf{x}))^T \left(I_{d^j} + \lambda K_i^{(j,j)}(\xi,\xi) \right)^{-1} K_i^{(j,0)}(\xi,\mathbf{y}) \\
&\quad + \sum_{i=1}^{n} \lambda (K_{i-1}^{(j,0)}(\xi,\mathbf{x}))^T \left(I_{d^j} + \lambda K_{i-1}^{(j,j)}(\xi,\xi) \right)^{-1} K_{i-1}^{(j,0)}(\xi,\mathbf{y}).
\end{aligned}$$

A partir de (2.14) y cancelando algunos términos se obtiene lo esperado,

$$\tilde{K}_n(\mathbf{x},\mathbf{y}) = K_n(\mathbf{x},\mathbf{y}) - \lambda (K_n^{(j,0)}(\xi,\mathbf{x}))^T \left(I_{d^j} + \lambda K_n^{(j,j)}(\xi,\xi) \right)^{-1} K_n^{(j,0)}(\xi,\mathbf{y}).$$

□

3.3. Un ejemplo: La bola unidad en $\mathbb{R}^d$

Como es usual, se define:

la bola unidad

$$B^d = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d : \|\mathbf{x}\| \leq 1\},$$

la esfera unidad

$$S^{d-1} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d : \|\mathbf{x}\| = 1\},$$

donde $\|\mathbf{x}\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_d^2}$, es la norma euclidea y se denota $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_d y_d$ el producto interno estándar sobre $\mathbb{R}^d$.

Consideramos la función peso:

$$W_\mu(\mathbf{x}) = (1 - \|\mathbf{x}\|^2)^{\mu - \frac{1}{2}}, \qquad \mu \geq -\frac{1}{2}, \qquad \mathbf{x} \in B^d. \tag{3.16}$$

Asociado a $W_\mu(\mathbf{x})$ se define el producto interno sobre la bola unidad,

$$\langle f, g \rangle_\sigma = N_\mu \int_{B^d} f(\mathbf{x}) g(\mathbf{x}) W_\mu(\mathbf{x}) dx, \tag{3.17}$$

donde N_μ es una constante normalizadora tal que $\langle 1, 1 \rangle_\sigma = 1$ y esta dada por:

$$N_\mu = \left(\int_{B^d} W_\mu(\mathbf{x}) dx \right)^{-1} = \frac{\Gamma(\mu + \frac{d+1}{2})}{\pi^{\frac{d}{2}} \Gamma(\mu + \frac{1}{2})}.$$

La familia de polinomios ortogonales con respecto al producto interno $\langle f, g \rangle_\sigma$ se llaman *polinomios ortogonales clásicos sobre la bola unidad.*

En [10] se estudió la familia de polinomios ortogonales asociada al producto interno tipo Sobolev definido en (3.5), para un caso particular, donde la medida es $(1 - \|\mathbf{x}\|^2)^{\mu - \frac{1}{2}}$

y se analizó el comportamiento asintótico de la correspondiente función núcleo $K_n(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ y la matriz (3.4) para $j = 2$ y $\mathbf{x} = \mathbf{y} = 0 \in \mathbb{R}^d$, es decir, $K_n^{(2,2)}(0,0)$. Continuando con lo realizado en [10], primero vamos a hacer el análisis del comportamiento asintótico del núcleo ya no solo evaluando en los puntos $\mathbf{x} = \mathbf{y} = 0 \in \mathbb{R}^d$, sino evaluando en los puntos $\mathbf{x} = 0 \in \mathbb{R}^d$ y $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^d$ con $\|\mathbf{y}\| = 1$. Luego, evaluamos en los puntos $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^d$ tal que $\|\mathbf{x}\| = 1 = \|\mathbf{y}\|$. Es decir, analizamos el comportamiento asintótico para $K_n^{(2,2)}(0, \mathbf{y}_{\|\mathbf{y}\|=1})$ y $K_n^{(2,2)}(\mathbf{x}_{\|\mathbf{x}\|=1}, \mathbf{y}_{\|\mathbf{y}\|=1})$ respectivamente, donde $\mathbf{y}_{\|\mathbf{y}\|=1}$ significa un punto $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^d$ tal que $\|\mathbf{y}\| = 1$ (similar para $\mathbf{x}_{\|\mathbf{x}\|=1}$).

3.3.1. La función núcleo $K_n^{(2,2)}(0, \mathbf{y}_{\|\mathbf{y}\|=1})$

Consideremos los polinomios ortogonales con respecto al producto interno tipo Sobolev (3.5). Nos interesa analizar el comportamiento asintótico de la correspondiente función núcleo para $j = 2$, $\xi_1 = 0$ y $\|\xi_2\| = 1$, primero se encontrará una expresión para $K_n^{(0,2)}(0, \mathbf{y})$ y luego una expresión para $K_n^{(2,2)}(0, \mathbf{y}_{\|\mathbf{y}\|=1})$.

Teniendo en cuenta que (ver [17]):

$$K_n(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = b_\mu A_n \int_{-1}^{1} P_n^{(\alpha,\alpha-1)}(w)(1-t^2)^{\mu-1}dt, \tag{3.18}$$

donde

$$b_\mu = \left[\int_{-1}^{1}(1-t^2)^{\mu-1}dt\right]^{-1} = \frac{\Gamma(\mu+\frac{1}{2})}{\sqrt{\pi}\Gamma(\mu)}, \tag{3.19}$$

$$\alpha(\mu, d) = \alpha = \mu + \frac{d}{2},$$

$$A_n = \frac{2\Gamma(\alpha+1)\Gamma(n+2\alpha)}{\Gamma(2\alpha+1)\Gamma(n+\alpha)}, \tag{3.20}$$

$$w(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t) = w = \langle \mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle + \sqrt{1-\|\mathbf{x}\|^2}\sqrt{1-\|\mathbf{y}\|^2}t.$$

Derivando $K_n(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ respecto a la variable x_r (se emplea constantemente (1.14)),

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x_r}K_n(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= \frac{\partial}{\partial x_r}\left[b_\mu A_n \int_{-1}^{1} P_n^{(\alpha,\alpha-1)}(w)(1-t^2)^{\mu-1}dt\right] \\
&= b_\mu A_n C_{n,\alpha,\alpha-1}\int_{-1}^{1} P_{n-1}^{(\alpha+1,\alpha)}(w)\left(y_r - \frac{\sqrt{1-\|\mathbf{y}\|^2}t}{\sqrt{1-\|\mathbf{x}\|^2}}x_r\right)(1-t^2)^{\mu-1}dt \\
&= y_r b_\mu A_n C_{n,\alpha,\alpha-1}\int_{-1}^{1} P_{n-1}^{(\alpha+1,\alpha)}(w)(1-t^2)^{\mu-1}dt \\
&\quad -\frac{\sqrt{1-\|\mathbf{y}\|^2}}{\sqrt{1-\|\mathbf{x}\|^2}}x_r b_\mu A_n C_{n,\alpha,\alpha-1}\int_{-1}^{1} P_{n-1}^{(\alpha+1,\alpha)}(w)t(1-t^2)^{\mu-1}dt.
\end{aligned}$$

Aplicando integración por partes,

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x_r}K_n(\mathbf{x},\mathbf{y}) &= y_r b_\mu A_n C_{n,\alpha,\alpha-1}\int_{-1}^{1} P_{n-1}^{(\alpha+1,\alpha)}(w)(1-t^2)^{\mu-1}dt \\ &\quad -\frac{1-\|\mathbf{y}\|^2}{2\mu}x_r b_\mu A_n C_{n,\alpha,\alpha-1}C_{n-1,\alpha+1,\alpha} \\ &\quad \int_{-1}^{1} P_{n-2}^{(\alpha+2,\alpha+1)}(w)(1-t^2)^{\mu}dt.\end{aligned}$$

Derivando $\frac{\partial}{\partial x_r}K_n(\mathbf{x},\mathbf{y})$ respecto a la variable x_s,

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2}{\partial x_s\partial x_r}K_n(\mathbf{x},\mathbf{y}) &= y_r y_s b_\mu A_n C_{n,\alpha,\alpha-1}C_{n-1,\alpha+1,\alpha}\int_{-1}^{1} P_{n-2}^{(\alpha+2,\alpha+1)}(w)(1-t^2)^{\mu-1}dt \\ &\quad -\frac{1-\|\mathbf{y}\|^2}{2\mu}\delta_{r,s} b_\mu A_n C_{n,\alpha,\alpha-1}C_{n-1,\alpha+1,\alpha}\int_{-1}^{1} P_{n-2}^{(\alpha+2,\alpha+1)}(w)(1-t^2)^{\mu}dt \\ &\quad -\frac{1-\|\mathbf{y}\|^2}{2\mu}(x_s y_r + x_r y_s) b_\mu A_n C_{n,\alpha,\alpha-1}C_{n-1,\alpha+1,\alpha}C_{n-2,\alpha+2,\alpha+1} \\ &\quad \int_{-1}^{1} P_{n-3}^{(\alpha+3,\alpha+2)}(w)(1-t^2)^{\mu}dt \\ &\quad +\frac{\left(1-\|\mathbf{y}\|^2\right)^2}{4\mu(\mu+1)}x_r x_s b_\mu A_n C_{n,\alpha,\alpha-1}C_{n-1,\alpha+1,\alpha}C_{n-2,\alpha+2,\alpha+1} \\ &\quad C_{n-3,\alpha+3,\alpha+2}\int_{-1}^{1} P_{n-4}^{(\alpha+4,\alpha+3)}(w)(1-t^2)^{\mu+1}dt. \end{aligned} \tag{3.21}$$

Evaluando $\frac{\partial^2}{\partial x_s\partial x_r}K_n(\mathbf{x},\mathbf{y})$ en $\mathbf{x}=0$,

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2}{\partial x_s\partial x_r}K_n(0,\mathbf{y}) &= y_r y_s b_\mu A_n C_{n,\alpha,\alpha-1}C_{n-1,\alpha+1,\alpha} \\ &\quad \int_{-1}^{1} P_{n-2}^{(\alpha+2,\alpha+1)}\left(\sqrt{1-\|\mathbf{y}\|^2}t\right)(1-t^2)^{\mu-1}dt \\ &\quad -\frac{1-\|\mathbf{y}\|^2}{2\mu}\delta_{r,s} b_\mu A_n C_{n,\alpha,\alpha-1}C_{n-1,\alpha+1,\alpha} \\ &\quad \int_{-1}^{1} P_{n-2}^{(\alpha+2,\alpha+1)}\left(\sqrt{1-\|\mathbf{y}\|^2}t\right)(1-t^2)^{\mu}dt. \end{aligned} \tag{3.22}$$

Por otra parte, empleando (ver [12]),

$$\int_{-1}^{1} P_{n-1}^{(\mu+\frac{d}{2}+1,\mu+\frac{d}{2})}\left(\sqrt{1-\|\mathbf{y}\|^2}t\right)(1-t^2)^{\mu-1}dt = h_{n,u,d}P_{[\frac{n-1}{2}]}^{(\frac{d}{2}+1,\mu-\frac{1}{2})}(1-2\|\mathbf{y}\|^2), \tag{3.23}$$

con

$$h_{n,u,d} = \frac{4\Gamma(\mu+\frac{1}{2})\Gamma([\frac{n-1}{2}]+\mu+\frac{d+1}{2}+1)\Gamma(n+2\mu+d)}{\Gamma(\mu+\frac{d+1}{2})\Gamma([\frac{n-1}{2}]+\mu+\frac{1}{2})\Gamma(n+2\mu+d+1)b_\mu A_n}, \tag{3.24}$$

de (3.22), (3.23) y como $\alpha = \mu + \frac{d}{2}$, se deduce:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial x_s \partial x_r} K_n(0,\mathbf{y}) &= y_r y_s B_1 P^{(\frac{d}{2}+2,\mu-\frac{1}{2})}_{[\frac{n-2}{2}]}(1-2\|\mathbf{y}\|^2) \\ &\quad -(1-\|\mathbf{y}\|^2)\delta_{r,s} B_2 P^{(\frac{d}{2}+1,\mu+\frac{1}{2})}_{[\frac{n-2}{2}]}(1-2\|\mathbf{y}\|^2), \end{aligned} \tag{3.25}$$

con

$$B_1 = b_\mu A_n C_{n,\mu+\frac{d}{2},\mu+\frac{d}{2}-1} C_{n-1,\mu+\frac{d}{2}+1,\mu+\frac{d}{2}} h_{n-1,\mu,d+2},$$

$$B_2 = (2\mu)^{-1} b_\mu A_n C_{n,\mu+\frac{d}{2},\mu+\frac{d}{2}-1} C_{n-1,\mu+\frac{d}{2}+1,\mu+\frac{d}{2}} h_{n-1,\mu+1,d}.$$

Derivando $\frac{\partial^2}{\partial x_s \partial x_r} K_n(0,\mathbf{y})$ respecto a la variable y_i,

$$\begin{aligned} \frac{\partial^3}{\partial y_i \partial x_s \partial x_r} K_n(0,\mathbf{y}) &= -4 y_i y_r y_s B_1 C_{[\frac{n-2}{2}],\frac{d}{2}+2,\mu-\frac{1}{2}} P^{(\frac{d}{2}+3,\mu+\frac{1}{2})}_{[\frac{n-2}{2}]-1}(1-2\|\mathbf{y}\|^2) \\ &\quad +(y_r\delta_{s,i} + y_s\delta_{r,i}) B_1 P^{(\frac{d}{2}+2,\mu-\frac{1}{2})}_{[\frac{n-2}{2}]}(1-2\|\mathbf{y}\|^2) \\ &\quad +2y_i\delta_{r,s} B_2 P^{(\frac{d}{2}+1,\mu+\frac{1}{2})}_{[\frac{n-2}{2}]}(1-2\|\mathbf{y}\|^2) \\ &\quad +4(1-\|\mathbf{y}\|^2) y_i \delta_{r,s} B_2 C_{[\frac{n-2}{2}],\frac{d}{2}+1,\mu+\frac{1}{2}} P^{(\frac{d}{2}+2,\mu+\frac{3}{2})}_{[\frac{n-2}{2}]-1}(1-2\|\mathbf{y}\|^2). \end{aligned}$$

Ahora derivando $\frac{\partial^3}{\partial y_i \partial x_s \partial x_r} K_n(0,\mathbf{y})$ respecto a la variable y_j y evaluando en $\|\mathbf{y}\| = 1$, se obtiene:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^4}{\partial y_j \partial y_i \partial x_s \partial x_r} K_n(0,\mathbf{y}_{\|\mathbf{y}\|=1}) &= -4\left[y_i y_r \delta_{s,j} + y_i y_s \delta_{r,j} + y_r y_s \delta_{i,j} + y_j y_r \delta_{s,i} + y_j y_s \delta_{r,i}\right] \\ &\quad B_1 C_{[\frac{n-2}{2}],\frac{d}{2}+2,\mu-\frac{1}{2}} P^{(\frac{d}{2}+3,\mu+\frac{1}{2})}_{[\frac{n-2}{2}]-1}(-1) \\ &\quad +(\delta_{r,j}\delta_{s,i} + \delta_{s,j}\delta_{r,i}) B_1 P^{(\frac{d}{2}+2,\mu-\frac{1}{2})}_{[\frac{n-2}{2}]}(-1) \\ &\quad +16 y_j y_i y_r y_s B_1 C_{[\frac{n-2}{2}],\frac{d}{2}+2,\mu-\frac{1}{2}} C_{[\frac{n-2}{2}]-1,\frac{d}{2}+3,\mu+\frac{1}{2}} P^{(\frac{d}{2}+4,\mu+\frac{3}{2})}_{[\frac{n-2}{2}]-2}(-1) \\ &\quad +2\delta_{i,j}\delta_{r,s} B_2 P^{(\frac{d}{2}+1,\mu+\frac{1}{2})}_{[\frac{n-2}{2}]}(-1) \\ &\quad -16 y_i y_j \delta_{r,s} B_2 C_{[\frac{n-2}{2}],\frac{d}{2}+1,\mu+\frac{1}{2}} P^{(\frac{d}{2}+2,\mu+\frac{3}{2})}_{[\frac{n-2}{2}]-1}(-1). \end{aligned} \tag{3.26}$$

Denotamos,

$$z_1 = -4B_1 C_{[\frac{n-2}{2}],\frac{d}{2}+2,\mu-\frac{1}{2}} P^{(\frac{d}{2}+3,\mu+\frac{1}{2})}_{[\frac{n-2}{2}]-1}(-1), \tag{3.27}$$

$$z_2 = B_1 P^{(\frac{d}{2}+2,\mu-\frac{1}{2})}_{[\frac{n-2}{2}]}(-1), \tag{3.28}$$

$$z_3 = 16B_1 C_{[\frac{n-2}{2}],\frac{d}{2}+2,\mu-\frac{1}{2}} C_{[\frac{n-2}{2}]-1,\frac{d}{2}+3,\mu+\frac{1}{2}} P^{(\frac{d}{2}+4,\mu+\frac{3}{2})}_{[\frac{n-2}{2}]-2}(-1), \tag{3.29}$$

$$z_4 = 2B_2 P^{(\frac{d}{2}+1,\mu+\frac{1}{2})}_{[\frac{n-2}{2}]}(-1), \tag{3.30}$$

$$z_5 = -16B_2 C_{[\frac{n-2}{2}],\frac{d}{2}+1,\mu+\frac{1}{2}} P^{(\frac{d}{2}+2,\mu+\frac{3}{2})}_{[\frac{n-2}{2}]-1}(-1). \tag{3.31}$$

Como una consecuencia, la matriz $K_n^{(2,2)}(0, \mathbf{y}_{\|\mathbf{y}\|=1})$ de tamaño d^2 x d^2, cuyas entradas son organizadas de acuerdo a los órdenes de las derivadas parciales, sus elementos son:

$$z_1(y_i y_r \delta_{s,j} + y_i y_s \delta_{r,j} + y_r y_s \delta_{i,j} + y_j y_r \delta_{s,i} + y_j y_s \delta_{r,i})$$

$$+z_2(\delta_{r,j}\delta_{s,i} + \delta_{s,j}\delta_{r,i}) + z_3 y_j y_i y_r y_s + z_4 \delta_{i,j}\delta_{r,s} + z_5 y_i y_j \delta_{r,s},$$

donde $1 \leq r, s, i, j \leq d$.

A partir de las deltas de Kronecker se puede observar (entre otras),

1. z_3 sobrevive en todas las entradas de las matriz.
2. Si i, j, r, s son diferentes dos a dos, unicamente sobrevive z_3.
3. z_5 sobrevive si $r = s$.
4. z_4 sobrevive si $r = s \wedge i = j$.
5. z_2 sobrevive si $(i = s \wedge r = j) \vee (j = s \wedge r = i)$.

Aunque no se ha logrado una expresión general para la matriz $K_n^{(2,2)}(0, \mathbf{y}_{\|\mathbf{y}\|=1})$, con ayuda computacional se obtiene la matriz para cualquier elección de $d \geq 2$ (d variables). A continuación se dan casos particulares de la matriz para $d = 2, 3$ y 4 ordenando las entradas a partir de operaciones elementales de matrices.

- $d = 2$

  $\mathbf{y} = (y_1, y_2)$

$$K_n^{(2,2)}(0, \mathbf{y}_{\|\mathbf{y}\|=1}) = \begin{pmatrix} \mathbf{a} & \mathbf{b} & A & A \\ \mathbf{c} & \mathbf{d} & B & B \\ C & D & \mathbf{E} & \mathbf{E} \\ C & D & \mathbf{E} & \mathbf{E} \end{pmatrix},$$

  donde

  $\mathbf{a} = 5y_1^2 z_1 + 2z_2 + y_1^4 z_3 + z_4 + y_1^2 z_5,$
  $\mathbf{b} = y_1^2 z_1 + y_1^2 y_2^2 z_3 + z_4 + y_2^2 z_5,$
  $\mathbf{c} = y_2^2 z_1 + y_1^2 y_2^2 z_3 + z_4 + y_1^2 z_5,$
  $\mathbf{d} = 5y_2^2 z_1 + 2z_2 + y_2^4 z_3 + z_4 + y_2^2 z_5,$
  $A = 2y_1 y_2 z_1 + y_1^3 y_2 z_3 + y_1 y_2 z_5,$
  $B = 2y_1 y_2 z_1 + y_1 y_2^3 z_3 + y_1 y_2 z_5,$
  $C = 3y_1 y_2 z_1 + y_1^3 y_2 z_3,$
  $D = 3y_1 y_2 z_1 + y_1 y_2^3 z_3,$
  $\mathbf{E} = (y_1^2 + y_2^2) z_1 + z_2 + y_1^2 y_2^2 z_3 = z_1 + z_2 + y_1^2 y_2^2 z_3.$

- $d = 3$

  $\mathbf{y} = (y_1, y_2, y_3)$

$$K_n^{(2,2)}(0,\mathbf{y}_{\|\mathbf{y}\|=1}) = \begin{pmatrix} \mathbf{a} & \mathbf{b} & \mathbf{e} & A & A & F & F & G & G \\ \mathbf{c} & \mathbf{d} & \mathbf{f} & B & B & H & H & I & I \\ \mathbf{g} & \mathbf{h} & \mathbf{i} & J & J & K & K & L & L \\ C & D & M & \mathbf{E} & \mathbf{E} & N & N & O & O \\ C & D & M & \mathbf{E} & \mathbf{E} & N & N & O & O \\ P & O & Q & N & N & \mathbf{R} & \mathbf{R} & M & M \\ P & O & Q & N & N & \mathbf{R} & \mathbf{R} & M & M \\ N & S & T & O & O & M & M & \mathbf{U} & \mathbf{U} \\ N & S & T & O & O & M & M & \mathbf{U} & \mathbf{U} \end{pmatrix},$$

donde $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}, A, B, C, D, \mathbf{E}$ están dados en $d = 2$ y

$$\mathbf{e} = y_1^2 z_1 + y_1^2 y_3^2 z_3 + z_4 + y_3^2 z_5,$$
$$\mathbf{f} = y_2^2 z_1 + y_2^2 y_3^2 z_3 + z_4 + y_3^2 z_5,$$
$$\mathbf{g} = y_3^2 z_1 + y_1^2 y_3^2 z_3 + z_4 + y_1^2 z_5,$$
$$\mathbf{h} = y_3^2 z_1 + y_2^2 y_3^2 z_3 + z_4 + y_2^2 z_5,$$
$$\mathbf{i} = 5 y_3^2 z_1 + 2 z_2 + y_3^4 z_3 + z_4 + y_3^2 z_5,$$
$$F = 2 y_1 y_3 z_1 + y_1^3 y_3 z_3 + y_1 y_3 z_5,$$
$$G = y_1^2 y_2 y_3 z_3 + y_2 y_3 z_5,$$
$$H = y_1 y_2^2 y_3 z_3 + y_1 y_3 z_5,$$
$$I = 2 y_2 y_3 z_1 + y_2^3 y_3 z_3 + y_2 y_3 z_5,$$
$$J = y_1 y_2 y_3^2 z_3 + y_1 y_2 z_5,$$
$$K = 2 y_1 y_3 z_1 + y_1 y_3^3 z_3 + y_1 y_3 z_5,$$
$$L = 2 y_2 y_3 z_1 + y_2 y_3^3 z_3 + y_2 y_3 z_5,$$
$$M = y_1 y_2 z_1 + y_1 y_2 y_3^2 z_3,$$
$$N = y_2 y_3 z_1 + y_1^2 y_2 y_3 z_3,$$
$$O = y_1 y_3 z_1 + y_1 y_2^2 y_3 z_3,$$
$$P = 3 y_1 y_3 z_1 + y_1^3 y_3 z_3,$$
$$Q = 3 y_1 y_3 z_1 + y_1 y_3^3 z_3,$$
$$\mathbf{R} = (y_1^2 + y_3^2) z_1 + z_2 + y_1^2 y_3^2 z_3,$$
$$S = 3 y_2 y_3 z_1 + y_2^3 y_3 z_3,$$
$$T = 3 y_2 y_3 z_1 + y_2 y_3^3 z_3,$$
$$\mathbf{U} = (y_2^2 + y_3^2) z_1 + z_2 + y_2^2 y_3^2 z_3.$$

- $d = 4$

  $\mathbf{y} = (y_1, y_2, y_3, y_4)$.

  Para $d = 4$ la matriz $K_n^{(2,2)}(0,\mathbf{y}_{\|\mathbf{y}\|=1})$ esta dada por:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{a} & \mathbf{b} & \mathbf{e} & \mathbf{j} & A & A & F & F & G & G & V & V & W & W & X & X \\ \mathbf{c} & \mathbf{d} & \mathbf{f} & \mathbf{k} & B & B & H & H & I & I & I_1 & I_1 & J_1 & J_1 & K_1 & K_1 \\ \mathbf{g} & \mathbf{h} & \mathbf{i} & \mathbf{l} & J & J & K & K & L & L & R_1 & R_1 & S_1 & S_1 & T_1 & T_1 \\ \mathbf{m} & \mathbf{n} & \mathbf{o} & \mathbf{p} & X_1 & X_1 & Y_1 & Y_1 & A_2 & A_2 & Z_1 & Z_1 & B_2 & B_2 & C_2 & C_2 \\ C & D & M & B_1 & \mathbf{E} & \mathbf{E} & N & N & O & O & Y & Y & Z & Z & A_1 & A_1 \\ C & D & M & B_1 & \mathbf{E} & \mathbf{E} & N & N & O & O & Y & Y & Z & Z & A_1 & A_1 \\ P & O & Q & E_1 & N & N & \mathbf{R} & \mathbf{R} & M & M & C_1 & C_1 & A_1 & A_1 & D_1 & D_1 \\ P & O & Q & E_1 & N & N & \mathbf{R} & \mathbf{R} & M & M & C_1 & C_1 & A_1 & A_1 & D_1 & D_1 \\ N & S & T & N_1 & O & O & M & M & \mathbf{U} & \mathbf{U} & A_1 & A_1 & L_1 & L_1 & M_1 & M_1 \\ N & S & T & N_1 & O & O & M & M & \mathbf{U} & \mathbf{U} & A_1 & A_1 & L_1 & L_1 & M_1 & M_1 \\ F_1 & Z & D_1 & H_1 & Y & Y & C_1 & C_1 & A_1 & A_1 & \mathbf{G}_1 & \mathbf{G}_1 & B_1 & B_1 & E_1 & E_1 \\ F_1 & Z & D_1 & H_1 & Y & Y & C_1 & C_1 & A_1 & A_1 & \mathbf{G}_1 & \mathbf{G}_1 & B_1 & B_1 & E_1 & E_1 \\ Y & O_1 & M_1 & Q_1 & Z & Z & A_1 & A_1 & L_1 & L_1 & B_1 & B_1 & \mathbf{P}_1 & \mathbf{P}_1 & N_1 & N_1 \\ Y & O_1 & M_1 & Q_1 & Z & Z & A_1 & A_1 & L_1 & L_1 & B_1 & B_1 & \mathbf{P}_1 & \mathbf{P}_1 & N_1 & N_1 \\ C_1 & L_1 & U_1 & W_1 & A_1 & A_1 & D_1 & D_1 & M_1 & M_1 & E_1 & E_1 & N_1 & N_1 & \mathbf{V}_1 & \mathbf{V}_1 \\ C_1 & L_1 & U_1 & W_1 & A_1 & A_1 & D_1 & D_1 & M_1 & M_1 & E_1 & E_1 & N_1 & N_1 & \mathbf{V}_1 & \mathbf{V}_1 \end{pmatrix},$$

donde $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}, \mathbf{e}, \mathbf{f}, \mathbf{g}, \mathbf{h}, \mathbf{i}, A, B, C, D, \mathbf{E}, F, G, H, I, J, K, L, M, N, O, P, Q, \mathbf{R}, S, T, \mathbf{U}$ están dados en $d = 3$ y

$$\mathbf{j} = y_1^2 z_1 + y_1^2 y_4^2 z_3 + z_4 + y_4^2 z_5,$$
$$\mathbf{k} = y_2^2 z_1 + y_2^2 y_4^2 z_3 + z_4 + y_4^2 z_5,$$
$$\mathbf{l} = y_3^2 z_1 + y_3^2 y_4^2 z_3 + z_4 + y_4^2 z_5,$$
$$\mathbf{m} = y_4^2 z_1 + y_1^2 y_4^2 z_3 + z_4 + y_1^2 z_5,$$
$$\mathbf{n} = y_4^2 z_1 + y_2^2 y_4^2 z_3 + z_4 + y_2^2 z_5,$$
$$\mathbf{o} = y_4^2 z_1 + y_3^2 y_4^2 z_3 + z_4 + y_3^2 z_5,$$
$$\mathbf{p} = 5y_4^2 z_1 + 2z_2 + y_4^4 z_3 + z_4 + y_4^2 z_5,$$
$$V = 2y_1 y_4 z_1 + y_1^3 y_4 z_3 + y_1 y_4 z_5,$$
$$W = y_1^2 y_2 y_4 z_3 + y_2 y_4 z_5,$$
$$X = y_1^2 y_3 y_4 z_3 + y_3 y_4 z_5,$$
$$Y = y_2 y_4 z_1 + y_1^2 y_2 y_4 z_3,$$
$$Z = y_1 y_4 z_1 + y_1 y_2^2 y_4 z_3,$$
$$A_1 = y_1 y_2 y_3 y_4 z_3,$$
$$B_1 = y_1 y_2 z_1 + y_1 y_2 y_4^2 z_3,$$
$$C_1 = y_3 y_4 z_1 + y_1^2 y_3 y_4 z_3,$$
$$D_1 = y_1 y_4 z_1 + y_1 y_3^2 y_4 z_3,$$
$$E_1 = y_1 y_3 z_1 + y_1 y_3 y_4^2 z_3,$$
$$F_1 = 3y_1 y_4 z_1 + y_1^3 y_4 z_3,$$
$$\mathbf{G}_1 = (y_1^2 + y_4^2) z_1 + z_2 + y_1^2 y_4^2 z_3,$$
$$H_1 = 3y_1 y_4 z_1 + y_1 y_4^3 z_3,$$
$$I_1 = y_1 y_2^2 y_4 z_3 + y_1 y_4 z_5,$$
$$J_1 = 2y_2 y_4 z_1 + y_2^3 y_4 z_3 + y_2 y_4 z_5,$$
$$K_1 = y_2^2 y_3 y_4 z_3 + y_3 y_4 z_5,$$
$$L_1 = y_3 y_4 z_1 + y_2^2 y_3 y_4 z_3,$$
$$M_1 = y_2 y_4 z_1 + y_2 y_3^2 y_4 z_3,$$
$$N_1 = y_2 y_3 z_1 + y_2 y_3 y_4^2 z_3,$$
$$O_1 = 3y_2 y_4 z_1 + y_2^3 y_4 z_3,$$
$$\mathbf{P}_1 = (y_2^2 + y_4^2) z_1 + z_2 + y_2^2 y_4^2 z_3,$$
$$Q_1 = 3y_2 y_4 z_1 + y_2 y_4^3 z_3,$$
$$R_1 = y_1 y_3^2 y_4 z_3 + y_1 y_4 z_5,$$
$$S_1 = y_2 y_3^2 y_4 z_3 + y_2 y_4 z_5,$$
$$T_1 = 2y_3 y_4 z_1 + y_3^3 y_4 z_5,$$
$$U_1 = 3y_3 y_4 z_1 + y_3^3 y_4 z_3,$$
$$\mathbf{V}_1 = (y_3^2 + y_4^2) z_1 + z_2 + y_3^2 y_4^2 z_3,$$
$$W_1 = 3y_3 y_4 z_1 + y_3 y_4^3 z_3,$$
$$X_1 = y_1 y_2 y_4^2 z_3 + y_1 y_2 z_5,$$
$$Y_1 = y_1 y_3 y_4^2 z_3 + y_1 y_3 z_5,$$
$$Z_1 = 2y_1 y_4 z_1 + y_1 y_4^3 z_3 + y_1 y_4 z_5,$$
$$A_2 = y_2 y_3 y_4^2 z_3 + y_2 y_3 z_5,$$
$$B_2 = 2y_2 y_4 z_1 + y_2 y_4^3 z_3 + y_2 y_4 z_5,$$
$$C_2 = 2y_3 y_4 z_1 + y_3 y_4^3 z_3 + y_3 y_4 z_5.$$

Primera conjetura

Se puede conjeturar (manualmente y numéricamente se verificó hasta $d = 12$ variables) que la matriz $K_n^{(2,2)}(0, \mathbf{y}_{\|\mathbf{y}\|=1})$, presenta una estructura algo semejante a simetría por bloques. Además, las d^4 entradas de la matriz $K_n^{(2,2)}(0, \mathbf{y}_{\|\mathbf{y}\|=1})$ se distribuyen de la siguiente forma:

1. d^2 entradas aparecen sólo una vez.
2. $\frac{d(d-1)(d+2)}{2}$ entradas aparecen 2 veces cada una.
3. $\frac{d(d-1)}{2}$ entradas aparecen 4 veces cada una.
4. $\frac{d(d-1)(d-2)}{2}$ entradas aparecen 10 veces cada una.
5. $\frac{d(d-1)(d-2)(d-3)}{24}$ entradas aparecen 24 veces cada una.

Lema 3.2. Dados b_μ, A_n y $h_{n,u,d}$ definidos en (3.19), (3.20) y (3.24) respectivamente. Cuando $n \longrightarrow \infty$,

$$b_\mu A_n = \frac{2\Gamma(\mu+\frac{1}{2})\Gamma(\mu+\frac{d}{2}+1)}{\sqrt{\pi}\Gamma(\mu)\Gamma(2\mu+d+1)} n^{\mu+\frac{d}{2}}(1+\mathcal{O}(n^{-1})), \tag{3.32}$$

$$h_{n,u,d} = \frac{2\sqrt{\pi}\Gamma(\mu)\Gamma(2\mu+d+1)}{\Gamma(\mu+\frac{d+1}{2})\Gamma(\mu+\frac{d}{2}+1)} n^{-\mu}(1+\mathcal{O}(n^{-1})). \tag{3.33}$$

Demostración. Se obtiene directamente aplicando la fórmula de Stirling a las definiciones dadas de b_μ, A_n y $h_{n,u,d}$.

□

Teorema 3.4. *Dados z_1, z_2, z_3, z_4 y z_5 definidos de (3.27) a (3.31). Cuando $n \longrightarrow \infty$,*

$$z_1 = n^{\frac{d}{2}+\mu+\frac{7}{2}}(1+\mathcal{O}(n^{-1})), \tag{3.34}$$

$$z_2 = n^{\frac{d}{2}+\mu+\frac{3}{2}}(1+\mathcal{O}(n^{-1})), \tag{3.35}$$

$$z_3 = n^{\frac{d}{2}+\mu+\frac{11}{2}}(1+\mathcal{O}(n^{-1})), \tag{3.36}$$

$$z_4 = n^{\frac{d}{2}+\mu+\frac{3}{2}}(1+\mathcal{O}(n^{-1})), \tag{3.37}$$

$$z_5 = n^{\frac{d}{2}+\mu+\frac{7}{2}}(1+\mathcal{O}(n^{-1})). \tag{3.38}$$

Demostración. Se obtiene directamente aplicando (3.16), (3.17), (3.32) y (3.33) a las definiciones dadas y multiplicando por algunas constantes que dependen de μ y d.

□

3.3.2. La función núcleo $K_n^{(2,2)}(\mathbf{x}_{\|\mathbf{x}\|=1}, \mathbf{y}_{\|\mathbf{y}\|=1})$

Consideremos los polinomios ortogonales con respecto al producto interno tipo Sobolev (3.5). Nos interesa analizar el comportamiento asintótico de la correspondiente función núcleo para $j=2$, $\|\xi_1\|=1$ y $\|\xi_2\|=1$, primero se encontrará una expresión para $K_n^{(0,2)}(\mathbf{x}_{\|\mathbf{x}\|=1}, \mathbf{y})$ y luego una expresión para $K_n^{(2,2)}(\mathbf{x}_{\|\mathbf{x}\|=1}, \mathbf{y}_{\|\mathbf{y}\|=1})$.

(3.21) nos indica,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2}{\partial x_s \partial x_r} K_n(\mathbf{x},\mathbf{y}) \quad = \quad & y_r y_s b_\mu A_n C_{n,\alpha,\alpha-1} C_{n-1,\alpha+1,\alpha} \int_{-1}^{1} P_{n-2}^{(\alpha+2,\alpha+1)}(w)(1-t^2)^{\mu-1} dt \\
& - \frac{1-\|\mathbf{y}\|^2}{2\mu} \delta_{r,s} b_\mu A_n C_{n,\alpha,\alpha-1} C_{n-1,\alpha+1,\alpha} \int_{-1}^{1} P_{n-2}^{(\alpha+2,\alpha+1)}(w)(1-t^2)^{\mu} dt \\
& - \frac{1-\|\mathbf{y}\|^2}{2\mu} (x_s y_r + x_r y_s) b_\mu A_n C_{n,\alpha,\alpha-1} C_{n-1,\alpha+1,\alpha} C_{n-2,\alpha+2,\alpha+1} \\
& \int_{-1}^{1} P_{n-3}^{(\alpha+3,\alpha+2)}(w)(1-t^2)^{\mu} dt \\
& + \frac{\left(1-\|\mathbf{y}\|^2\right)^2}{4\mu(\mu+1)} x_r x_s b_\mu A_n C_{n,\alpha,\alpha-1} C_{n-1,\alpha+1,\alpha} C_{n-2,\alpha+2,\alpha+1} \\
& C_{n-3,\alpha+3,\alpha+2} \int_{-1}^{1} P_{n-4}^{(\alpha+4,\alpha+3)}(w)(1-t^2)^{\mu+1} dt.
\end{aligned}$$

Evaluando en $\|\mathbf{x}\| = 1$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2}{\partial x_s \partial x_r} K_n(\mathbf{x}_{\|\mathbf{x}\|=1}, \mathbf{y}) &= y_r y_s b_\mu A_n C_{n,\alpha,\alpha-1} C_{n-1,\alpha+1,\alpha} P_{n-2}^{(\alpha+2,\alpha+1)}\left(\left\langle \mathbf{x}_{\|\mathbf{x}\|=1}, \mathbf{y}\right\rangle\right) \\
&\quad \int_{-1}^{1} (1-t^2)^{\mu-1} dt \\
&\quad -\frac{1-\|\mathbf{y}\|^2}{2\mu} \delta_{r,s} b_\mu A_n C_{n,\alpha,\alpha-1} C_{n-1,\alpha+1,\alpha} \\
&\quad P_{n-2}^{(\alpha+2,\alpha+1)}\left(\left\langle \mathbf{x}_{\|\mathbf{x}\|=1}, \mathbf{y}\right\rangle\right) \int_{-1}^{1} (1-t^2)^{\mu} dt \\
&\quad -\frac{1-\|\mathbf{y}\|^2}{2\mu} (x_s y_r + x_r y_s) b_\mu A_n C_{n,\alpha,\alpha-1} C_{n-1,\alpha+1,\alpha} C_{n-2,\alpha+2,\alpha+1} \\
&\quad P_{n-3}^{(\alpha+3,\alpha+2)}\left(\left\langle \mathbf{x}_{\|\mathbf{x}\|=1}, \mathbf{y}\right\rangle\right) \int_{-1}^{1} (1-t^2)^{\mu} dt \\
&\quad +\frac{\left(1-\|\mathbf{y}\|^2\right)^2}{4\mu(\mu+1)} x_r x_s b_\mu A_n C_{n,\alpha,\alpha-1} C_{n-1,\alpha+1,\alpha} C_{n-2,\alpha+2,\alpha+1} \\
&\quad C_{n-3,\alpha+3,\alpha+2} P_{n-4}^{(\alpha+4,\alpha+3)}\left(\left\langle \mathbf{x}_{\|\mathbf{x}\|=1}, \mathbf{y}\right\rangle\right) \int_{-1}^{1} (1-t^2)^{\mu+1} dt.
\end{aligned}$$

De (3.19) (aplicando (1.1)), se obtiene $2\mu b_{\mu+1} = (2\mu+1) b_\mu$. Por tanto:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2}{\partial x_s \partial x_r} K_n(\mathbf{x}_{\|\mathbf{x}\|=1}, \mathbf{y}) &= \left(y_r y_s - \frac{1-\|\mathbf{y}\|^2}{2\mu+1} \delta_{r,s} \right) A_n C_{n,\alpha,\alpha-1} C_{n-1,\alpha+1,\alpha} \\
&\quad P_{n-2}^{(\alpha+2,\alpha+1)}\left(\left\langle \mathbf{x}_{\|\mathbf{x}\|=1}, \mathbf{y}\right\rangle\right) \\
&\quad -\frac{1-\|\mathbf{y}\|^2}{2\mu+1} (x_s y_r + x_r y_s) A_n C_{n,\alpha,\alpha-1} C_{n-1,\alpha+1,\alpha} C_{n-2,\alpha+2,\alpha+1} \\
&\quad P_{n-3}^{(\alpha+3,\alpha+2)}\left(\left\langle \mathbf{x}_{\|\mathbf{x}\|=1}, \mathbf{y}\right\rangle\right) \\
&\quad +\frac{\left(1-\|\mathbf{y}\|^2\right)^2}{(2\mu+1)(2\mu+3)} x_r x_s A_n C_{n,\alpha,\alpha-1} C_{n-1,\alpha+1,\alpha} C_{n-2,\alpha+2,\alpha+1} \\
&\quad C_{n-3,\alpha+3,\alpha+2} P_{n-4}^{(\alpha+4,\alpha+3)}\left(\left\langle \mathbf{x}_{\|\mathbf{x}\|=1}, \mathbf{y}\right\rangle\right).
\end{aligned}$$

Derivando $\frac{\partial^2}{\partial x_s \partial x_r} K_n(\mathbf{x}_{\|\mathbf{x}\|=1}, \mathbf{y})$ respecto a las variables y_i y y_j. Luego, evaluando en $\|\mathbf{y}\| = 1$, obtenemos:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial^4}{\partial y_j \partial y_i \partial x_s \partial x_r} K_n\left(\mathbf{x}_{\|\mathbf{x}\|=1}, \mathbf{y}_{\|\mathbf{y}\|=1}\right) \quad = \quad & \left(\delta_{r,j}\delta_{s,i} + \delta_{s,j}\delta_{r,i} + \frac{2}{2\mu+1}\delta_{i,j}\delta_{r,s}\right) g_1 \\
& + \delta_{s,i}\left(x_j y_r + \frac{2}{2\mu+1} x_r y_j\right) g_2 \\
& + \delta_{r,i}\left(x_j y_s + \frac{2}{2\mu+1} x_s y_j\right) g_2 \\
& + \delta_{s,j}\left(x_i y_r + \frac{2}{2\mu+1} x_r y_i\right) g_2 \\
& + \delta_{r,j}\left(x_i y_s + \frac{2}{2\mu+1} x_s y_i\right) g_2 \\
& + \delta_{r,s}\left(x_j y_i + \frac{2}{2\mu+1} x_i y_j\right) g_2 \\
& + \delta_{i,j}\left(x_s y_r + \frac{2}{2\mu+1} x_r y_s\right) g_2 \\
& + \left(x_j x_i y_r y_s + \frac{4}{2\mu+3} x_r x_s y_j y_i\right) g_3 \\
& + \frac{2}{2\mu+1}\left(x_i x_s y_j y_r + x_i x_r y_j y_s\right) g_3 \\
& + \frac{2}{2\mu+1}\left(x_j x_s y_i y_r + x_j x_r y_i y_s\right) g_3,
\end{aligned}
$$

donde

$$
g_1 = A_n C_{n,\alpha,\alpha-1} C_{n-1,\alpha+1,\alpha} P_{n-2}^{(\alpha+2,\alpha+1)}\left(\left\langle \mathbf{x}_{\|\mathbf{x}\|=1}, \mathbf{y}_{\|\mathbf{y}\|=1}\right\rangle\right), \tag{3.39}
$$

$$
g_2 = A_n C_{n,\alpha,\alpha-1} C_{n-1,\alpha+1,\alpha} C_{n-2,\alpha+2,\alpha+1} P_{n-3}^{(\alpha+3,\alpha+2)}\left(\left\langle \mathbf{x}_{\|\mathbf{x}\|=1}, \mathbf{y}_{\|\mathbf{y}\|=1}\right\rangle\right), \tag{3.40}
$$

$$
g_3 = A_n C_{n,\alpha,\alpha-1} C_{n-1,\alpha+1,\alpha} C_{n-2,\alpha+2,\alpha+1} C_{n-3,\alpha+3,\alpha+2} P_{n-4}^{(\alpha+4,\alpha+3)}\left(\left\langle \mathbf{x}_{\|\mathbf{x}\|=1}, \mathbf{y}_{\|\mathbf{y}\|=1}\right\rangle\right) \tag{3.41}
$$

Como una consecuencia, la matriz $K_n^{(2,2)}(\mathbf{x}_{\|\mathbf{x}\|=1}, \mathbf{y}_{\|\mathbf{y}\|=1})$ de tamaño d^2 x d^2, cuyas entradas son organizadas de acuerdo a los órdenes de las derivadas parciales, sus elementos son:

$$
\begin{aligned}
& g_1\left(\delta_{r,j}\delta_{s,i} + \delta_{s,j}\delta_{r,i} + \frac{2}{2\mu+1}\delta_{i,j}\delta_{r,s}\right) \\
& + g_2\left[\delta_{s,i}\left(x_j y_r + \frac{2}{2\mu+1} x_r y_j\right) + \delta_{r,i}\left(x_j y_s + \frac{2}{2\mu+1} x_s y_j\right) + \delta_{s,j}\left(x_i y_r + \frac{2}{2\mu+1} x_r y_i\right)\right] \\
& + g_2\left[\delta_{r,j}\left(x_i y_s + \frac{2}{2\mu+1} x_s y_i\right) + \delta_{r,s}\left(x_j y_i + \frac{2}{2\mu+1} x_i y_j\right) + \delta_{i,j}\left(x_s y_r + \frac{2}{2\mu+1} x_r y_s\right)\right] \\
& + g_3\left[\left(x_j x_i y_r y_s + \frac{4}{2\mu+3} x_r x_s y_j y_i\right) + \frac{2}{2\mu+1}\left(x_i x_s y_j y_r + x_i x_r y_j y_s + x_j x_s y_i y_r + x_j x_r y_i y_s\right)\right].
\end{aligned}
$$

donde $1 \leq r, s, i, j \leq d$.

A partir de las deltas de Kronecker se puede observar (entre otras),

1. Dadas $j, i, r, s,\ g_1$ unicamente sobrevive en dos casos: cuando todas son iguales y cuando son iguales dos de ellas entre si y las otras dos son iguales entre si.
2. Si j, i, r, s son diferentes dos a dos, no sobrevive g_2.
3. g_3 sobrevive en todas las entradas de las matriz.

No se ha logrado una expresión general para la matriz $K_n^{(2,2)}(\mathbf{x}_{\|\mathbf{x}\|=1}, \mathbf{y}_{\|\mathbf{y}\|=1})$, con ayuda computacional se obtiene la matriz para cualquier elección de $d \geq 2$ (d variables). A continuación se dan casos particulares de la matriz para $d = 2, 3$ y 4 ordenando las entradas a partir de operaciones elementales de matrices.

- $d = 2$

  $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$, $\mathbf{y} = (y_1, y_2)$

$$K_n^{(2,2)}(\mathbf{x}_{\|\mathbf{x}\|=1}, \mathbf{y}_{\|\mathbf{y}\|=1}) = \begin{pmatrix} a & b & A_a & A_a \\ c & d & B_a & B_a \\ C_a & D_a & E_a & E_a \\ C_a & D_a & E_a & E_a \end{pmatrix},$$

  donde

  $a = 4\frac{\mu+1}{2\mu+1}g_1 + 4x_1y_1\frac{2\mu+5}{2\mu+1}g_2 + x_1^2y_1^2\frac{4\mu^2+32\mu+31}{(2\mu+1)(2\mu+3)}g_3,$

  $b = \frac{2}{2\mu+1}g_1 + \frac{4}{2\mu+1}(x_1y_1 + x_2y_2)g_2 + \left(x_2^2y_1^2 + \frac{8}{2\mu+1}x_1x_2y_1y_2 + \frac{4}{2\mu+3}x_1^2y_2^2\right)g_3,$

  $c = \frac{2}{2\mu+1}g_1 + \frac{4}{2\mu+1}(x_1y_1 + x_2y_2)g_2 + \left(x_1^2y_2^2 + \frac{8}{2\mu+1}x_1x_2y_1y_2 + \frac{4}{2\mu+3}x_2^2y_1^2\right)g_3,$

  $d = 4\frac{\mu+1}{2\mu+1}g_1 + 4x_2y_2\frac{2\mu+5}{2\mu+1}g_2 + x_2^2y_2^2\frac{4\mu^2+32\mu+31}{(2\mu+1)(2\mu+3)}g_3$

  $A_a = \frac{2}{2\mu+1}\left(2(\mu+1)x_2y_1 + 3x_1y_2\right)g_2 + \frac{1}{2\mu+1}\left((2\mu+5)x_1x_2y_1^2 + 16\frac{\mu+1}{2\mu+3}x_1^2y_1y_2\right)g_3,$

  $B_a = \frac{2}{2\mu+1}\left(2(\mu+1)x_1y_2 + 3x_2y_1\right)g_2 + \frac{1}{2\mu+1}\left((2\mu+5)x_1x_2y_2^2 + 16\frac{\mu+1}{2\mu+3}x_2^2y_1y_2\right)g_3,$

  $C_a = \frac{2}{2\mu+1}\left(2(\mu+1)x_1y_2 + 3x_2y_1\right)g_2 + \frac{1}{2\mu+1}\left((2\mu+5)x_1^2y_1y_2 + 16\frac{\mu+1}{2\mu+3}x_1x_2y_1^2\right)g_3,$

  $D_a = \frac{2}{2\mu+1}\left(2(\mu+1)x_2y_1 + 3x_1y_2\right)g_2 + \frac{1}{2\mu+1}\left((2\mu+5)x_2^2y_1y_2 + 16\frac{\mu+1}{2\mu+3}x_1x_2y_2^2\right)g_3,$

  $E_a = g_1 + \frac{2\mu+3}{2\mu+1}\left(x_1y_1 + x_2y_2\right)g_2 + \frac{1}{2\mu+1}\left(\frac{4\mu^2+24\mu+19}{2\mu+3}x_1x_2y_1y_2 + 2(x_1^2y_2^2 + x_2^2y_1^2)\right)g_3.$

- $d = 3$

  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$, $\mathbf{y} = (y_1, y_2, y_3)$

$$K_n^{(2,2)}(\mathbf{x}_{\|\mathbf{x}\|=1},\mathbf{y}_{\|\mathbf{y}\|=1}) = \begin{pmatrix} a & b & e & A_a & A_a & F_a & F_a & N_a & N_a \\ c & d & f & B_a & B_a & O_a & O_a & G_a & G_a \\ g & h & i & P_a & P_a & K_a & K_a & H_a & H_a \\ C_a & D_a & S_a & E_a & E_a & W_a & W_a & X_a & X_a \\ C_a & D_a & S_a & E_a & E_a & W_a & W_a & X_a & X_a \\ I_a & Q_a & J_a & Z_a & Z_a & T_a & T_a & V_a & V_a \\ I_a & Q_a & J_a & Z_a & Z_a & T_a & T_a & V_a & V_a \\ R_a & L_a & M_a & Y_a & Y_a & A_{a1} & A_{a1} & U_a & U_a \\ R_a & L_a & M_a & Y_a & Y_a & A_{a1} & A_{a1} & U_a & U_a \end{pmatrix},$$

donde $a, b, c, d, A_a, B_a, C_a, D_a, E_a$ están dados en $d = 2$ y

$e = \frac{2}{2\mu+1}g_1 + \frac{4}{2\mu+1}(x_1y_1 + x_3y_3)g_2 + \left(x_3^2y_1^2 + \frac{8}{2\mu+1}x_1x_3y_1y_3 + \frac{4}{2\mu+3}x_1^2y_3^2\right)g_3,$

$f = \frac{2}{2\mu+1}g_1 + \frac{4}{2\mu+1}(x_2y_2 + x_3y_3)g_2 + \left(x_3^2y_2^2 + \frac{8}{2\mu+1}x_2x_3y_2y_3 + \frac{4}{2\mu+3}x_2^2y_3^2\right)g_3,$

$g = \frac{2}{2\mu+1}g_1 + \frac{4}{2\mu+1}(x_1y_1 + x_3y_3)g_2 + \left(x_1^2y_3^2 + \frac{8}{2\mu+1}x_1x_3y_1y_3 + \frac{4}{2\mu+3}x_3^2y_1^2\right)g_3,$

$h = \frac{2}{2\mu+1}g_1 + \frac{4}{2\mu+1}(x_2y_2 + x_3y_3)g_2 + \left(x_2^2y_3^2 + \frac{8}{2\mu+1}x_2x_3y_2y_3 + \frac{4}{2\mu+3}x_3^2y_2^2\right)g_3,$

$i = 4\frac{\mu+1}{2\mu+1}g_1 + 4x_3y_3\frac{2\mu+5}{2\mu+1}g_2 + x_3^2y_3^2\frac{4\mu^2+32\mu+31}{(2\mu+1)(2\mu+3)}g_3,$

$F_a = \frac{4}{2\mu+1}\left[(\mu+1)x_3y_1 + x_1y_3\right]g_2 + \frac{1}{2\mu+1}\left[16\frac{\mu+1}{2\mu+3}x_1^2y_1y_3 + (2\mu+5)x_1x_3y_1^2\right]g_3,$

$G_a = \frac{4}{2\mu+1}\left[(\mu+1)x_3y_2 + x_2y_3\right]g_2 + \frac{1}{2\mu+1}\left[16\frac{\mu+1}{2\mu+3}x_2^2y_2y_3 + (2\mu+5)x_2x_3y_2^2\right]g_3,$

$H_a = \frac{4}{2\mu+1}\left[(\mu+1)x_2y_3 + x_3y_2\right]g_2 + \frac{1}{2\mu+1}\left[16\frac{\mu+1}{2\mu+3}x_2^2y_2y_3 + (2\mu+5)x_2x_3y_3^2\right]g_3,$

$I_a = \frac{4}{2\mu+1}\left[(\mu+1)x_1y_3 + x_3y_1\right]g_2 + \frac{1}{2\mu+1}\left[16\frac{\mu+1}{2\mu+3}x_1x_3y_1^2 + (2\mu+5)x_1^2y_1y_3\right]g_3,$

$J_a = \frac{4}{2\mu+1}\left[(\mu+1)x_3y_1 + x_1y_3\right]g_2 + \frac{1}{2\mu+1}\left[16\frac{\mu+1}{2\mu+3}x_1x_3y_3^2 + (2\mu+5)x_3^2y_1y_3\right]g_3,$

$K_a = \frac{4}{2\mu+1}\left[(\mu+1)x_1y_3 + x_3y_1\right]g_2 + \frac{1}{2\mu+1}\left[16\frac{\mu+1}{2\mu+3}x_3^2y_1y_3 + (2\mu+5)x_1x_3y_2^2\right]g_3,$

$L_a = \frac{4}{2\mu+1}\left[(\mu+1)x_2y_3 + x_3y_2\right]g_2 + \frac{1}{2\mu+1}\left[16\frac{\mu+1}{2\mu+3}x_2x_3y_2^2 + (2\mu+5)x_2^2y_2y_3\right]g_3,$

$M_a = \frac{4}{2\mu+1}\left[(\mu+1)x_3y_2 + x_2y_3\right]g_2 + \frac{1}{2\mu+1}\left[16\frac{\mu+1}{2\mu+3}x_2x_3y_3^2 + (2\mu+5)x_3^2y_2y_3\right]g_3,$

$N_a = \frac{2}{2\mu+1}(x_2y_3+x_3y_2)g_2+\left(\frac{4}{2\mu+1}x_1x_2y_1y_3 + \frac{4}{2\mu+1}x_1x_3y_1y_2 + \frac{4}{2\mu+3}x_1^2y_2y_3 + x_2x_3y_1^2\right)g_3,$

$O_a = \frac{2}{2\mu+1}(x_1y_3+x_3y_1)g_2+\left(\frac{4}{2\mu+1}x_1x_2y_2y_3 + \frac{4}{2\mu+1}x_2x_3y_1y_2 + \frac{4}{2\mu+3}x_2^2y_1y_3 + x_1x_3y_2^2\right)g_3,$

$P_a = \frac{2}{2\mu+1}(x_1y_2+x_2y_1)g_2+\left(\frac{4}{2\mu+1}x_1x_3y_2y_3 + \frac{4}{2\mu+1}x_2x_3y_1y_3 + \frac{4}{2\mu+3}x_3^2y_1y_2 + x_1x_2y_3^2\right)g_3,$

$Q_a = \frac{2}{2\mu+1}(x_1y_3+x_3y_1)g_2+\left(\frac{4}{2\mu+1}x_1x_2y_2y_3 + \frac{4}{2\mu+1}x_2x_3y_1y_2 + \frac{4}{2\mu+3}x_1x_3y_2^2 + x_2^2y_1y_3\right)g_3,$

$R_a = \frac{2}{2\mu+1}(x_2y_3+x_3y_2)g_2+\left(\frac{4}{2\mu+1}x_1x_2y_1y_3 + \frac{4}{2\mu+1}x_1x_3y_1y_2 + \frac{4}{2\mu+3}x_2x_3y_1^2 + x_1^2y_2y_3\right)g_3,$

$S_a = \frac{2}{2\mu+1}(x_1y_2+x_2y_1)g_2+\left(\frac{4}{2\mu+1}x_1x_3y_2y_3 + \frac{4}{2\mu+1}x_2x_3y_1y_3 + \frac{4}{2\mu+3}x_1x_1y_3^2 + x_3^2y_1y_2\right)g_3,$

$T_a = g_1 + \frac{2\mu+3}{2\mu+1}(x_1y_1 + x_3y_3)g_2 + \frac{1}{2\mu+1}\left[2x_1^2y_3^2 + \frac{4\mu^2+24\mu+19}{2\mu+3}x_1x_3y_1y_3 + 2x_3^2y_1^2\right]g_3,$

$$U_a = g_1 + \tfrac{2\mu+3}{2\mu+1}(x_2y_2 + x_3y_3)g_2 + \tfrac{1}{2\mu+1}\left[2x_2^2y_3^2 + \tfrac{4\mu^2+24\mu+19}{2\mu+3}x_2x_3y_2y_3 + 2x_3^2y_2^2\right]g_3,$$

$$\begin{aligned}
V_a &= \left(x_2y_1 + \tfrac{2}{2\mu+1}x_1y_2\right)g_2 \\
&\quad + \tfrac{1}{2\mu+1}\left[2x_3^2y_1y_2 + 2\tfrac{8\mu+5}{2\mu+3}x_1x_3y_2y_3 + (2\mu+3)x_2x_3y_1y_3 + 2x_1x_2y_3^2\right]g_3, \\
W_a &= \left(x_3y_2 + \tfrac{2}{2\mu+1}x_2y_3\right)g_2 \\
&\quad + \tfrac{1}{2\mu+1}\left[2x_1^2y_2y_3 + 2\tfrac{8\mu+5}{2\mu+3}x_1x_2y_1y_3 + (2\mu+3)x_1x_3y_1y_2 + 2x_2x_3y_1^2\right]g_3, \\
X_a &= \left(x_3y_1 + \tfrac{2}{2\mu+1}x_1y_3\right)g_2 \\
&\quad + \tfrac{1}{2\mu+1}\left[2x_2^2y_1y_3 + 2\tfrac{8\mu+5}{2\mu+3}x_1x_2y_2y_3 + (2\mu+3)x_2x_3y_1y_2 + 2x_1x_3y_2^2\right]g_3, \\
Y_a &= \left(x_1y_3 + \tfrac{2}{2\mu+1}x_3y_1\right)g_2 \\
&\quad + \tfrac{1}{2\mu+1}\left[2x_1x_3y_1^2 + 2\tfrac{8\mu+5}{2\mu+3}x_2x_3y_1y_2 + (2\mu+3)x_1x_2y_2y_3 + 2x_2^2y_1y_3\right]g_3, \\
Z_a &= \left(x_2y_3 + \tfrac{2}{2\mu+1}x_3y_2\right)g_2 \\
&\quad + \tfrac{1}{2\mu+1}\left[2x_1^2y_2y_3 + 2\tfrac{8\mu+5}{2\mu+3}x_1x_3y_1y_2 + (2\mu+3)x_1x_2y_1y_3 + 2x_2x_3y_1^2\right]g_3, \\
A_{a1} &= \left(x_1y_2 + \tfrac{2}{2\mu+1}x_2y_1\right)g_2 \\
&\quad + \tfrac{1}{2\mu+1}\left[2x_1x_2y_3^2 + 2\tfrac{8\mu+5}{2\mu+3}x_2x_3y_1y_3 + (2\mu+3)x_1x_3y_2y_3 + 2x_3^2y_1y_2\right]g_3.
\end{aligned}$$

- $d = 4$

$\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4)$, $\mathbf{y} = (y_1, y_2, y_3, y_4)$.

Para $d = 4$ la matriz $K_n^{(2,2)}(\mathbf{x}_{\|\mathbf{x}\|=1}, \mathbf{y}_{\|\mathbf{y}\|=1})$ esta dada por:

$$\begin{pmatrix}
a & b & e & j & A_a & A_a & F_a & F_a & N_a & N_a & B_{a1} & B_{a1} & Y_{a2} & Y_{a2} & V_{a2} & V_{a2} \\
c & d & f & k & E_a & E_a & O_a & O_a & G_a & G_a & Z_{a2} & Z_{a2} & F_{a1} & F_{a1} & U_{a2} & U_{a2} \\
g & h & i & l & P_a & P_a & K_a & K_a & H_a & H_a & O_{a2} & O_{a2} & P_{a2} & P_{a2} & H_{a1} & H_{a1} \\
m & n & o & p & I_{a2} & I_{a2} & T_{a2} & T_{a2} & X_{a2} & X_{a2} & E_{a1} & E_{a1} & G_{a1} & G_{a1} & I_{a1} & I_{a1} \\
C_a & D_a & S_a & J_{a2} & E_a & E_a & W_a & W_a & X_a & X_a & P_{a1} & P_{a1} & R_{a1} & R_{a1} & A_{a3} & A_{a3} \\
C_a & D_a & S_a & J_{a2} & E_a & E_a & W_a & W_a & X_a & X_a & P_{a1} & P_{a1} & R_{a1} & R_{a1} & A_{a3} & A_{a3} \\
I_a & Q_a & J_a & K_{a2} & Z_a & Z_a & T_a & T_a & V_a & V_a & Q_{a1} & Q_{a1} & D_{a3} & D_{a3} & T_{a1} & T_{a1} \\
I_a & Q_a & J_a & K_{a2} & Z_a & Z_a & T_a & T_a & V_a & V_a & Q_{a1} & Q_{a1} & D_{a3} & D_{a3} & T_{a1} & T_{a1} \\
R_a & L_a & M_a & S_{a2} & Y_a & Y_a & A_{a1} & A_{a1} & U_a & U_a & F_{a3} & F_{a3} & B_{a2} & B_{a2} & C_{a2} & C_{a2} \\
R_a & L_a & M_a & S_{a2} & Y_a & Y_a & A_{a1} & A_{a1} & U_a & U_a & F_{a3} & F_{a3} & B_{a2} & B_{a2} & C_{a2} & C_{a2} \\
M_{a1} & M_{a2} & N_{a2} & L_{a1} & N_{a1} & N_{a1} & O_{a1} & O_{a1} & B_{a3} & B_{a3} & G_{a2} & G_{a2} & S_{a1} & S_{a1} & U_{a1} & U_{a1} \\
M_{a1} & M_{a2} & N_{a2} & L_{a1} & N_{a1} & N_{a1} & O_{a1} & O_{a1} & B_{a3} & B_{a3} & G_{a2} & G_{a2} & S_{a1} & S_{a1} & U_{a1} & U_{a1} \\
Q_{a2} & C_{a1} & L_{a2} & J_{a1} & V_{a1} & V_{a1} & E_{a3} & E_{a3} & W_{a1} & W_{a1} & X_{a1} & X_{a1} & H_{a2} & H_{a2} & Z_{a1} & Z_{a1} \\
Q_{a2} & C_{a1} & L_{a2} & J_{a1} & V_{a1} & V_{a1} & E_{a3} & E_{a3} & W_{a1} & W_{a1} & X_{a2} & X_{a1} & H_{a2} & H_{a2} & Z_{a1} & Z_{a1} \\
R_{a2} & W_{a2} & D_{a1} & K_{a1} & C_{a3} & C_{a3} & D_{a2} & D_{a2} & E_{a2} & E_{a2} & Y_{a1} & Y_{a1} & A_{a2} & A_{a2} & F_{a2} & F_{a2} \\
R_{a2} & W_{a2} & D_{a1} & K_{a1} & C_{a3} & C_{a3} & D_{a2} & D_{a2} & E_{a2} & E_{a2} & Y_{a1} & Y_{a1} & A_{a2} & A_{a2} & F_{a2} & F_{a2}
\end{pmatrix},$$

donde a, b, c, d, e, f, g, h, i, A_a, B_a, C_a, D_a, E_a, F_a, G_a, H_a, I_a, J_a, K_a, L_a, M_a, N_a, O_a, P_a, Q_a, R_a, S_a, T_a, U_a, V_a, W_a, X_a, Y_a, Z_a, A_{a1} están dados en $d = 3$ y

$$j = \tfrac{2}{2\mu+1}g_1 + \tfrac{4}{2\mu+1}(x_1y_1 + x_4y_4)g_2 + \left(x_4^2y_1^2 + \tfrac{8}{2\mu+1}x_1x_4y_1y_4 + \tfrac{4}{2\mu+3}x_1^2y_4^2\right)g_3,$$

$$k = \tfrac{2}{2\mu+1}g_1 + \tfrac{4}{2\mu+1}(x_2y_2 + x_4y_4)g_2 + \left(x_4^2y_2^2 + \tfrac{8}{2\mu+1}x_2x_4y_2y_4 + \tfrac{4}{2\mu+3}x_2^2y_4^2\right)g_3,$$

$$l = \tfrac{2}{2\mu+1}g_1 + \tfrac{4}{2\mu+1}(x_3y_3 + x_4y_4)g_2 + \left(x_4^2y_3^2 + \tfrac{8}{2\mu+1}x_3x_4y_3y_4 + \tfrac{4}{2\mu+3}x_3^2y_4^2\right)g_3,$$

$$m = \tfrac{2}{2\mu+1}g_1 + \tfrac{4}{2\mu+1}(x_1y_1 + x_4y_4)g_2 + \left(x_1^2y_4^2 + \tfrac{8}{2\mu+1}x_1x_4y_1y_4 + \tfrac{4}{2\mu+3}x_4^2y_1^2\right)g_3,$$
$$n = \tfrac{2}{2\mu+1}g_1 + \tfrac{4}{2\mu+1}(x_2y_2 + x_4y_4)g_2 + \left(x_2^2y_4^2 + \tfrac{8}{2\mu+1}x_2x_4y_2y_4 + \tfrac{4}{2\mu+3}x_4^2y_2^2\right)g_3,$$
$$o = \tfrac{2}{2\mu+1}g_1 + \tfrac{4}{2\mu+1}(x_3y_3 + x_4y_4)g_2 + \left(x_3^2y_4^2 + \tfrac{8}{2\mu+1}x_3x_4y_3y_4 + \tfrac{4}{2\mu+3}x_4^2y_3^2\right)g_3,$$
$$p = 4\tfrac{\mu+1}{2\mu+1}g_1 + 4x_4y_4\tfrac{2\mu+5}{2\mu+1}g_2 + x_4^2y_4^2\tfrac{4\mu^2+32\mu+31}{(2\mu+1)(2\mu+3)}g_3,$$
$$B_{a1} = \tfrac{4}{2\mu+1}\left[(\mu+1)x_4y_1 + x_1y_4\right]g_2 + \tfrac{1}{2\mu+1}\left[16\tfrac{\mu+1}{2\mu+3}x_1^2y_1y_4 + (2\mu+5)x_1x_4y_1^2\right]g_3,$$
$$C_{a1} = \tfrac{4}{2\mu+1}\left[(\mu+1)x_2y_4 + x_4y_2\right]g_2 + \tfrac{1}{2\mu+1}\left[16\tfrac{\mu+1}{2\mu+3}x_2x_4y_2^2 + (2\mu+5)x_2^2y_2y_4\right]g_3,$$
$$D_{a1} = \tfrac{4}{2\mu+1}\left[(\mu+1)x_3y_4 + x_4y_3\right]g_2 + \tfrac{1}{2\mu+1}\left[16\tfrac{\mu+1}{2\mu+3}x_3x_4y_3^2 + (2\mu+5)x_3^2y_3y_4\right]g_3,$$
$$E_{a1} = \tfrac{4}{2\mu+1}\left[(\mu+1)x_1y_4 + x_4y_1\right]g_2 + \tfrac{1}{2\mu+1}\left[16\tfrac{\mu+1}{2\mu+3}x_4^2y_1y_4 + (2\mu+5)x_1x_4y_4^2\right]g_3,$$
$$F_{a1} = \tfrac{4}{2\mu+1}\left[(\mu+1)x_4y_2 + x_2y_4\right]g_2 + \tfrac{1}{2\mu+1}\left[16\tfrac{\mu+1}{2\mu+3}x_2^2y_2y_4 + (2\mu+5)x_2x_4y_2^2\right]g_3,$$
$$G_{a1} = \tfrac{4}{2\mu+1}\left[(\mu+1)x_2y_4 + x_4y_2\right]g_2 + \tfrac{1}{2\mu+1}\left[16\tfrac{\mu+1}{2\mu+3}x_4^2y_2y_4 + (2\mu+5)x_2x_4y_4^2\right]g_3,$$
$$H_{a1} = \tfrac{4}{2\mu+1}\left[(\mu+1)x_4y_3 + x_3y_4\right]g_2 + \tfrac{1}{2\mu+1}\left[16\tfrac{\mu+1}{2\mu+3}x_3^2y_3y_4 + (2\mu+5)x_3x_4y_3^2\right]g_3,$$
$$I_{a1} = \tfrac{4}{2\mu+1}\left[(\mu+1)x_3y_4 + x_4y_3\right]g_2 + \tfrac{1}{2\mu+1}\left[16\tfrac{\mu+1}{2\mu+3}x_4^2y_3y_4 + (2\mu+5)x_3x_4y_4^2\right]g_3,$$
$$J_{a1} = \tfrac{4}{2\mu+1}\left[(\mu+1)x_4y_2 + x_2y_4\right]g_2 + \tfrac{1}{2\mu+1}\left[16\tfrac{\mu+1}{2\mu+3}x_2x_4y_4^2 + (2\mu+5)x_4^2y_2y_4\right]g_3,$$
$$K_{a1} = \tfrac{4}{2\mu+1}\left[(\mu+1)x_4y_3 + x_3y_4\right]g_2 + \tfrac{1}{2\mu+1}\left[16\tfrac{\mu+1}{2\mu+3}x_3x_4y_4^2 + (2\mu+5)x_4^2y_3y_4\right]g_3,$$
$$L_{a1} = \tfrac{4}{2\mu+1}\left[(\mu+1)x_4y_1 + x_1y_4\right]g_2 + \tfrac{1}{2\mu+1}\left[16\tfrac{\mu+1}{2\mu+3}x_1x_4y_4^2 + (2\mu+5)x_4^2y_1y_4\right]g_3,$$
$$M_{a1} = \tfrac{4}{2\mu+1}\left[(\mu+1)x_1y_4 + x_4y_1\right]g_2 + \tfrac{1}{2\mu+1}\left[16\tfrac{\mu+1}{2\mu+3}x_1x_4y_1^2 + (2\mu+5)x_1^2y_1y_4\right]g_3,$$
$$\begin{aligned}N_{a1} &= \left(x_2y_4 + \tfrac{2}{2\mu+1}x_4y_2\right)g_2\\ &\quad + \tfrac{1}{2\mu+1}\left[2x_1^2y_2y_4 + 2\tfrac{8\mu+5}{2\mu+3}x_1x_4y_1y_2 + (2\mu+3)x_1x_2y_1y_4 + 2x_2x_4y_1^2\right]g_3,\end{aligned}$$
$$\begin{aligned}O_{a1} &= \left(x_3y_4 + \tfrac{2}{2\mu+1}x_4y_3\right)g_2\\ &\quad + \tfrac{1}{2\mu+1}\left[2x_1^2y_3y_4 + 2\tfrac{8\mu+5}{2\mu+3}x_1x_4y_1y_3 + (2\mu+3)x_1x_3y_1y_4 + 2x_3x_4y_1^2\right]g_3,\end{aligned}$$
$$\begin{aligned}P_{a1} &= \left(x_4y_2 + \tfrac{2}{2\mu+1}x_2y_4\right)g_2\\ &\quad + \tfrac{1}{2\mu+1}\left[2x_1^2y_2y_4 + 2\tfrac{8\mu+5}{2\mu+3}x_1x_4y_1y_2 + (2\mu+3)x_1x_2y_1y_4 + 2x_2x_4y_1^2\right]g_3,\end{aligned}$$
$$\begin{aligned}Q_{a1} &= \left(x_4y_3 + \tfrac{2}{2\mu+1}x_3y_4\right)g_2\\ &\quad + \tfrac{1}{2\mu+1}\left[2x_1^2y_3y_4 + 2\tfrac{8\mu+5}{2\mu+3}x_1x_4y_1y_3 + (2\mu+3)x_1x_3y_1y_4 + 2x_3x_4y_1^2\right]g_3,\end{aligned}$$
$$\begin{aligned}R_{a1} &= \left(x_4y_1 + \tfrac{2}{2\mu+1}x_1y_4\right)g_2\\ &\quad + \tfrac{1}{2\mu+1}\left[2x_2^2y_1y_4 + 2\tfrac{8\mu+5}{2\mu+3}x_1x_2y_2y_4 + (2\mu+3)x_2x_4y_1y_2 + 2x_1x_4y_2^2\right]g_3,\end{aligned}$$
$$S_{a1} = \left(x_2y_1 + \tfrac{2}{2\mu+1}x_1y_2\right)g_2$$

$$+\tfrac{1}{2\mu+1}\left[2x_4^2y_1y_2+2\tfrac{8\mu+5}{2\mu+3}x_2x_4y_1y_4+(2\mu+3)x_1x_4y_2y_4+2x_1x_2y_4^2\right]g_3,$$

$$T_{a1}=\left(x_4y_1+\tfrac{2}{2\mu+1}x_1y_4\right)g_2$$
$$+\tfrac{1}{2\mu+1}\left[2x_3^2y_1y_4+2\tfrac{8\mu+5}{2\mu+3}x_1x_3y_3y_4+(2\mu+3)x_3x_4y_1y_3+2x_1x_4y_3^2\right]g_3,$$

$$U_{a1}=\left(x_3y_1+\tfrac{2}{2\mu+1}x_1y_3\right)g_2$$
$$+\tfrac{1}{2\mu+1}\left[2x_4^2y_1y_3+2\tfrac{8\mu+5}{2\mu+3}x_3x_4y_1y_4+(2\mu+3)x_1x_4y_3y_4+2x_1x_3y_4^2\right]g_3,$$

$$V_{a1}=\left(x_1y_4+\tfrac{2}{2\mu+1}x_4y_1\right)g_2$$
$$+\tfrac{1}{2\mu+1}\left[2x_2^2y_1y_4+2\tfrac{8\mu+5}{2\mu+3}x_2x_4y_1y_2+(2\mu+3)x_1x_2y_2y_4+2x_1x_4y_2^2\right]g_3,$$

$$W_{a1}=\left(x_3y_4+\tfrac{2}{2\mu+1}x_4y_3\right)g_2$$
$$+\tfrac{1}{2\mu+1}\left[2x_2^2y_3y_4+2\tfrac{8\mu+5}{2\mu+3}x_2x_3y_2y_4+(2\mu+3)x_2x_4y_2y_3+2x_3x_4y_2^2\right]g_3,$$

$$X_{a1}=\left(x_1y_2+\tfrac{2}{2\mu+1}x_2y_1\right)g_2$$
$$+\tfrac{1}{2\mu+1}\left[2x_4^2y_1y_2+2\tfrac{8\mu+5}{2\mu+3}x_2x_4y_1y_4+(2\mu+3)x_1x_4y_2y_4+2x_1x_2y_4^2\right]g_3,$$

$$Y_{a1}=\left(x_1y_3+\tfrac{2}{2\mu+1}x_3y_1\right)g_2$$
$$+\tfrac{1}{2\mu+1}\left[2x_4^2y_1y_3+2\tfrac{8\mu+5}{2\mu+3}x_3x_4y_1y_4+(2\mu+3)x_1x_4y_3y_4+2x_1x_3y_4^2\right]g_3,$$

$$Z_{a1}=\left(x_3y_2+\tfrac{2}{2\mu+1}x_2y_3\right)g_2$$
$$+\tfrac{1}{2\mu+1}\left[2x_4^2y_2y_3+2\tfrac{8\mu+5}{2\mu+3}x_2x_4y_3y_4+(2\mu+3)x_3x_4y_2y_4+2x_2x_3y_4^2\right]g_3,$$

$$A_{a2}=\left(x_2y_3+\tfrac{2}{2\mu+1}x_3y_2\right)g_2$$
$$+\tfrac{1}{2\mu+1}\left[2x_4^2y_2y_3+2\tfrac{8\mu+5}{2\mu+3}x_3x_4y_2y_4+(2\mu+3)x_2x_4y_3y_4+2x_2x_3y_4^2\right]g_3,$$

$$B_{a2}=\left(x_4y_3+\tfrac{2}{2\mu+1}x_3y_4\right)g_2$$
$$+\tfrac{1}{2\mu+1}\left[2x_2^2y_3y_4+2\tfrac{8\mu+5}{2\mu+3}x_1x_3y_2y_3+(2\mu+3)x_2x_3y_2y_4+2x_3x_4y_2^2\right]g_3,$$

$$C_{a2}=\left(x_4y_2+\tfrac{2}{2\mu+1}x_2y_4\right)g_2$$
$$+\tfrac{1}{2\mu+1}\left[2x_3^2y_2y_4+2\tfrac{8\mu+5}{2\mu+3}x_3x_4y_2y_3+(2\mu+3)x_2x_3y_3y_4+2x_2x_4y_3^2\right]g_3,$$

$$D_{a2}=\left(x_1y_4+\tfrac{2}{2\mu+1}x_4y_1\right)g_2$$
$$+\tfrac{1}{2\mu+1}\left[2x_3^2y_1y_4+2\tfrac{8\mu+5}{2\mu+3}x_3x_4y_1y_3+(2\mu+3)x_1x_3y_3y_4+2x_1x_4y_3^2\right]g_3,$$

$$E_{a2}=\left(x_2y_4+\tfrac{2}{2\mu+1}x_4y_2\right)g_2$$
$$+\tfrac{1}{2\mu+1}\left[2x_3^2y_2y_4+2\tfrac{8\mu+5}{2\mu+3}x_3x_4y_2y_3+(2\mu+3)x_2x_3y_3y_4+2x_2x_4y_3^2\right]g_3,$$

$$F_{a2}=g_1+\tfrac{2\mu+3}{2\mu+1}\left(x_3y_3+x_4y_4\right)g_2+\tfrac{1}{2\mu+1}\left(\tfrac{4\mu^2+24\mu+19}{2\mu+3}x_3x_4y_3y_4+2(x_3^2y_4^2+x_4^2y_3^2)\right)g_3,$$

$$G_{a2}=g_1+\tfrac{2\mu+3}{2\mu+1}\left(x_1y_1+x_4y_4\right)g_2+\tfrac{1}{2\mu+1}\left(\tfrac{4\mu^2+24\mu+19}{2\mu+3}x_1x_4y_1y_4+2(x_1^2y_4^2+x_4^2y_1^2)\right)g_3,$$

$$H_{a2} = g_1 + \tfrac{2\mu+3}{2\mu+1}\left(x_2y_2 + x_4y_4\right) g_2 + \tfrac{1}{2\mu+1}\left(\tfrac{4\mu^2+24\mu+19}{2\mu+3}x_2x_4y_2y_4 + 2(x_2^2y_4^2 + x_4^2y_2^2)\right) g_3,$$

$$I_{a2} = \tfrac{2}{2\mu+1}(x_1y_2+x_2y_1)g_2+\left(\tfrac{4}{2\mu+1}x_1x_4y_2y_4 + \tfrac{4}{2\mu+1}x_2x_4y_1y_4 + \tfrac{4}{2\mu+3}x_4^2y_1y_2 + x_1x_2y_4^2\right) g_3,$$

$$J_{a2} = \tfrac{2}{2\mu+1}(x_1y_2+x_2y_1)g_2+\left(\tfrac{4}{2\mu+1}x_1x_4y_2y_4 + \tfrac{4}{2\mu+1}x_2x_4y_1y_4 + \tfrac{4}{2\mu+3}x_1x_2y_4^2 + x_4^2y_1y_2\right) g_3,$$

$$K_{a2} = \tfrac{2}{2\mu+1}(x_1y_3+x_3y_1)g_2+\left(\tfrac{4}{2\mu+1}x_1x_4y_3y_4 + \tfrac{4}{2\mu+1}x_3x_4y_1y_4 + \tfrac{4}{2\mu+3}x_1x_3y_4^2 + x_4^2y_1y_3\right) g_3,$$

$$L_{a2} = \tfrac{2}{2\mu+1}(x_2y_4+x_4y_2)g_2+\left(\tfrac{4}{2\mu+1}x_2x_3y_3y_4 + \tfrac{4}{2\mu+1}x_3x_4y_2y_3 + \tfrac{4}{2\mu+3}x_2x_4y_3^2 + x_3^2y_2y_4\right) g_3,$$

$$M_{a2} = \tfrac{2}{2\mu+1}(x_1y_4+x_4y_1)g_2+\left(\tfrac{4}{2\mu+1}x_1x_2y_2y_4 + \tfrac{4}{2\mu+1}x_2x_4y_1y_2 + \tfrac{4}{2\mu+3}x_1x_4y_2^2 + x_2^2y_1y_4\right) g_3,$$

$$N_{a2} = \tfrac{2}{2\mu+1}(x_1y_4+x_4y_1)g_2+\left(\tfrac{4}{2\mu+1}x_1x_3y_3y_4 + \tfrac{4}{2\mu+1}x_3x_4y_1y_3 + \tfrac{4}{2\mu+3}x_1x_4y_3^2 + x_3^2y_1y_4\right) g_3,$$

$$O_{a2} = \tfrac{2}{2\mu+1}(x_1y_4+x_4y_1)g_2+\left(\tfrac{4}{2\mu+1}x_1x_3y_3y_4 + \tfrac{4}{2\mu+1}x_3x_4y_1y_3 + \tfrac{4}{2\mu+3}x_3^2y_1y_4 + x_1x_4y_3^2\right) g_3,$$

$$P_{a2} = \tfrac{2}{2\mu+1}(x_2y_4+x_4y_2)g_2+\left(\tfrac{4}{2\mu+1}x_2x_3y_3y_4 + \tfrac{4}{2\mu+1}x_3x_4y_2y_3 + \tfrac{4}{2\mu+3}x_3^2y_2y_4 + x_2x_4y_3^2\right) g_3,$$

$$Q_{a2} = \tfrac{2}{2\mu+1}(x_2y_4+x_4y_2)g_2+\left(\tfrac{4}{2\mu+1}x_1x_2y_1y_4 + \tfrac{4}{2\mu+1}x_1x_4y_1y_2 + \tfrac{4}{2\mu+3}x_2x_4y_1^2 + x_1^2y_2y_4\right) g_3,$$

$$R_{a2} = \tfrac{2}{2\mu+1}(x_3y_4+x_4y_3)g_2+\left(\tfrac{4}{2\mu+1}x_1x_3y_1y_4 + \tfrac{4}{2\mu+1}x_1x_4y_1y_3 + \tfrac{4}{2\mu+3}x_3x_4y_1^2 + x_1^2y_3y_4\right) g_3,$$

$$S_{a2} = \tfrac{2}{2\mu+1}(x_2y_3+x_3y_2)g_2+\left(\tfrac{4}{2\mu+1}x_2x_4y_3y_4 + \tfrac{4}{2\mu+1}x_3x_4y_2y_4 + \tfrac{4}{2\mu+3}x_2x_3y_4^2 + x_4^2y_2y_3\right) g_3,$$

$$T_{a2} = \tfrac{2}{2\mu+1}(x_1y_3+x_3y_1)g_2+\left(\tfrac{4}{2\mu+1}x_1x_4y_3y_4 + \tfrac{4}{2\mu+1}x_3x_4y_1y_4 + \tfrac{4}{2\mu+3}x_4^2y_1y_3 + x_1x_3y_4^2\right) g_3,$$

$$U_{a2} = \tfrac{2}{2\mu+1}(x_3y_4+x_4y_3)g_2+\left(\tfrac{4}{2\mu+1}x_2x_3y_2y_4 + \tfrac{4}{2\mu+1}x_2x_4y_2y_3 + \tfrac{4}{2\mu+3}x_2^2y_3y_4 + x_3x_4y_2^2\right) g_3,$$

$$V_{a2} = \tfrac{2}{2\mu+1}(x_3y_4+x_4y_3)g_2+\left(\tfrac{4}{2\mu+1}x_1x_3y_1y_4 + \tfrac{4}{2\mu+1}x_1x_4y_1y_3 + \tfrac{4}{2\mu+3}x_1^2y_3y_4 + x_3x_4y_1^2\right) g_3,$$

$$W_{a2} = \tfrac{2}{2\mu+1}(x_3y_4+x_4y_3)g_2+\left(\tfrac{4}{2\mu+1}x_2x_3y_2y_4 + \tfrac{4}{2\mu+1}x_2x_4y_2y_3 + \tfrac{4}{2\mu+3}x_3x_4y_2^2 + x_2^2y_3y_4\right) g_3,$$

$$X_{a2} = \tfrac{2}{2\mu+1}(x_2y_3+x_3y_2)g_2+\left(\tfrac{4}{2\mu+1}x_2x_4y_3y_4 + \tfrac{4}{2\mu+1}x_3x_4y_2y_4 + \tfrac{4}{2\mu+3}x_4^2y_2y_3 + x_2x_3y_4^2\right) g_3,$$

$$Y_{a2} = \tfrac{2}{2\mu+1}(x_2y_4+x_4y_2)g_2+\left(\tfrac{4}{2\mu+1}x_1x_2y_1y_4 + \tfrac{4}{2\mu+1}x_1x_4y_1y_2 + \tfrac{4}{2\mu+3}x_1^2y_2y_4 + x_2x_4y_1^2\right) g_3,$$

$$Z_{a2} = \tfrac{2}{2\mu+1}(x_1y_4+x_4y_1)g_2+\left(\tfrac{4}{2\mu+1}x_1x_2y_2y_4 + \tfrac{4}{2\mu+1}x_2x_4y_1y_2 + \tfrac{4}{2\mu+3}x_2^2y_1y_4 + x_1x_4y_2^2\right) g_3,$$

$$\begin{aligned} A_{a3} &= \tfrac{2}{2\mu+1}\left(x_1x_3y_2y_4 + x_1x_4y_2y_3 + x_2x_3y_1y_4 + x_2x_4y_1y_3\right) g_3 \\ &\quad + \left(\tfrac{4}{2\mu+3}x_1x_2y_3y_4 + x_3x_4y_1y_2\right) g_3, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B_{a3} &= \tfrac{2}{2\mu+1}\left(x_1x_2y_3y_4 + x_1x_3y_2y_4 + x_2x_4y_1y_3 + x_3x_4y_1y_2\right) g_3 \\ &\quad + \left(\tfrac{4}{2\mu+3}x_1x_4y_2y_3 + x_2x_3y_1y_4\right) g_3. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C_{a3} &= \tfrac{2}{2\mu+1}\left(x_1x_3y_2y_4 + x_1x_4y_2y_3 + x_2x_3y_1y_4 + x_2x_4y_1y_3\right) g_3 \\ &\quad + \left(\tfrac{4}{2\mu+3}x_3x_4y_1y_2 + x_1x_2y_3y_4\right) g_3, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D_{a3} &= \tfrac{2}{2\mu+1}\left(x_1x_2y_3y_4 + x_1x_4y_2y_3 + x_2x_3y_1y_4 + x_3x_4y_1y_2\right) g_3 \\ &\quad + \left(\tfrac{4}{2\mu+3}x_1x_3y_2y_4 + x_2x_4y_1y_3\right) g_3, \end{aligned}$$

$$E_{a3} = \tfrac{2}{2\mu+1}\left(x_1x_2y_3y_4 + x_1x_4y_2y_3 + x_2x_3y_1y_4 + x_3x_4y_1y_2\right) g_3$$

$$+\left(\tfrac{4}{2\mu+3}x_2x_4y_1y_3+x_1x_3y_2y_4\right)g_3,$$

$$F_{a3}=\tfrac{2}{2\mu+1}\left(x_1x_2y_3y_4+x_1x_3y_2y_4+x_2x_4y_1y_3+x_3x_4y_1y_2\right)g_3$$
$$+\left(\tfrac{4}{2\mu+3}x_2x_3y_1y_4+x_1x_4y_2y_3\right)g_3,$$

Segunda conjetura

Se puede conjeturar (manualmente y numéricamente se verificó hasta $d=11$ variables) que la matriz $K_n^{(2,2)}(\mathbf{x}_{\|\mathbf{x}\|=1},\mathbf{y}_{\|\mathbf{y}\|=1})$ tiene sus d^4 entradas distribuidas de la siguiente forma:

1. d^2 entradas aparecen sólo una vez.
2. $d^2(d-1)$ entradas aparecen 2 veces cada una.
3. $\left[\frac{d(d-1)}{2}\right]^2$ entradas aparecen 4 veces cada una.

Lema 3.3. Dado A_n, definidos en (3.20). Cuando $n\longrightarrow\infty$,

$$A_n=\frac{2\Gamma(\mu+\frac{d}{2}+1)}{\Gamma(2\mu+d+1)}n^{\mu+\frac{d}{2}}(1+\mathcal{O}(n^{-1})),\tag{3.42}$$

Demostración. Se obtiene directamente aplicando la fórmula de Stirling en (3.20). □

A continuación se analiza el comportamiento de g_1, g_2 y g_3, en dos situaciones: cuando $\mathbf{x}=\mathbf{y}$ y cuando $\mathbf{x}=-\mathbf{y}$,

Teorema 3.5. *Dados g_1, g_2 y g_3 definidos en (3.39), (3.40) y (3.41). Cuando $n\longrightarrow\infty$.*

1. *Si* $\mathbf{x}=\mathbf{y}$

$$g_1=n^{2\mu+d+4}(1+\mathcal{O}(n^{-1})),\tag{3.43}$$
$$g_2=n^{2\mu+d+6}(1+\mathcal{O}(n^{-1})),\tag{3.44}$$
$$g_3=n^{2\mu+d+8}(1+\mathcal{O}(n^{-1})),\tag{3.45}$$

2. $\mathbf{x}=-\mathbf{y}$

$$g_1=n^{2\mu+d+3}(1+\mathcal{O}(n^{-1})),\tag{3.46}$$
$$g_2=n^{2\mu+d+5}(1+\mathcal{O}(n^{-1})),\tag{3.47}$$
$$g_3=n^{2\mu+d+7}(1+\mathcal{O}(n^{-1})),\tag{3.48}$$

Demostración. 1. Cuando $\mathbf{x}=\mathbf{y}$, g_1, g_2 y g_3 estan dados por:

$$g_1=A_nC_{n,\alpha,\alpha-1}C_{n-1,\alpha+1,\alpha}P_{n-2}^{(\alpha+2,\alpha+1)}(1)\,,$$

$$g_2=A_nC_{n,\alpha,\alpha-1}C_{n-1,\alpha+1,\alpha}C_{n-2,\alpha+2,\alpha+1}P_{n-3}^{(\alpha+3,\alpha+2)}(1)\,,$$

$$g_3 = A_n C_{n,\alpha,\alpha-1} C_{n-1,\alpha+1,\alpha} C_{n-2,\alpha+2,\alpha+1} C_{n-3,\alpha+3,\alpha+2} P_{n-4}^{(\alpha+4,\alpha+3)}(1)\,.$$

Aplicando (1.15), (1.17), el Lema 3.3. y multiplicando por algunas constantes que dependen de μ y d, cuando $n \longrightarrow \infty$,

$$g_1 = n^{2\mu+d+4}(1+\mathcal{O}(n^{-1})),$$
$$g_2 = n^{2\mu+d+6}(1+\mathcal{O}(n^{-1})),$$
$$g_3 = n^{2\mu+d+8}(1+\mathcal{O}(n^{-1})),$$

2. Cuando $\mathbf{x} = -\mathbf{y}$, g_1, g_2 y g_3 estan dados por:

$$g_1 = A_n C_{n,\alpha,\alpha-1} C_{n-1,\alpha+1,\alpha} P_{n-2}^{(\alpha+2,\alpha+1)}(-1)\,,$$

$$g_2 = A_n C_{n,\alpha,\alpha-1} C_{n-1,\alpha+1,\alpha} C_{n-2,\alpha+2,\alpha+1} P_{n-3}^{(\alpha+3,\alpha+2)}(-1)\,,$$

$$g_3 = A_n C_{n,\alpha,\alpha-1} C_{n-1,\alpha+1,\alpha} C_{n-2,\alpha+2,\alpha+1} C_{n-3,\alpha+3,\alpha+2} P_{n-4}^{(\alpha+4,\alpha+3)}(-1)\,.$$

Aplicando (1.16), (1.17), el lema 3.3. y multiplicando por algunas constantes que dependen de μ y d, cuando $n \longrightarrow \infty$,

$$g_1 = n^{2\mu+d+3}(1+\mathcal{O}(n^{-1})),$$
$$g_2 = n^{2\mu+d+5}(1+\mathcal{O}(n^{-1})),$$
$$g_3 = n^{2\mu+d+7}(1+\mathcal{O}(n^{-1})),$$

□

3.3.3. Dos teoremas importantes

Teorema 3.6. *Dada la función núcleo $K_n(\mathbf{x},\mathbf{y})$ asociada con $\{\mathbb{P}_n(\mathbf{x})\}_{n\geqslant 0}$, la SPO con respecto a (3.17).uando $n \longrightarrow \infty$ se tiene:*

1. $K_n^{(0,2)}(0,\mathbf{y}) = n^{d+2}(1+\mathcal{O}(n^{-1}))$ *si* $\|\mathbf{y}\| = 0$,
2. $K_n^{(0,2)}(0,\mathbf{y}) = n^{\frac{d+3}{2}}(1+\mathcal{O}(n^{-1}))$ *uniformemente dentro del compacto* $B^d - \{0\}$,
3. $K_n^{(0,2)}(0,\mathbf{y}) = n^{\mu+\frac{d+3}{2}}(1+\mathcal{O}(n^{-1}))$ *si* $\|\mathbf{y}\| = 1$.

Demostración. 1. Se toma (3.25), cuando se evalúa en $\|\mathbf{y}\| = 0$ el primer término desaparece y considerando (1.15), (1.17) y el Lema 3.2. se obtiene la expresión esperada.

2. Se obtiene empleando el hecho que $\left|P_n^{(a,b)}(t)\right| \leq Cn^{-1/2}$ uniformemente dentro del compacto $t \in (-1,1)$ y (1.17) y el Lema 3.2.

3. Se toma (3.25), cuando se evalúa en $\|\mathbf{y}\| = 1$ el segundo término desaparece y considerando (1.16), (1.17)y el Lema 3.2. se obtiene la expresión esperada.

□

Teorema 3.7. *Sea* $\tilde{K}_n(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ *la función núcleo asociada con* $\{\mathbb{Q}_n(\mathbf{x})\}_{n\geq 0}$*, el sistema de polinomios ortogonales respecto a (3.5), donde* $\langle f, g \rangle_\sigma$ *es como en (3.17) . Sea* $K_n(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ *la función núcleo asociada con* $\{\mathbb{P}_n(\mathbf{x})\}_{n\geq 0}$*, el sistema de polinomios ortogonales clásicos sobre la bola unidad respecto a (3.17). Entonces, cuando* $n \longrightarrow \infty$*,*

$$\left| \tilde{K}_n(\mathbf{x}, \mathbf{y}) - K_n(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \right| \longrightarrow 0 \text{ en un subconjunto compacto en el interior de } B^d - \{0\}.$$

La prueba del teorema anterior se puede consultar en [11].

CAPÍTULO 4

Problemas abiertos

1. En el capítulo 3 se realizaron dos conjeturas acerca de la distribución de las d^4 entradas de las matrices $K_n^{(2,2)}(0, \mathbf{y}_{\|\mathbf{y}\|=1})$ y $K_n^{(2,2)}(\mathbf{x}_{\|\mathbf{x}\|=1}, \mathbf{y}_{\|\mathbf{y}\|=1})$, queda para un próximo trabajo analizar estas conjeturas y demostrarlas.

2. En el presente trabajo se analizó el siguiente producto interno tipo Sobolev de orden superior:

$$\begin{aligned}\langle P(\mathbf{x}), Q(\mathbf{x})\rangle_\mu &= \langle P(\mathbf{x}), Q(\mathbf{x})\rangle_\sigma + \lambda \nabla^{(j)} P(\xi)(\nabla^{(j)} Q(\xi))^T \\ &= \int_E P(\mathbf{x})Q(\mathbf{x})d\sigma(\mathbf{x}) + \lambda \nabla^{(j)} P(\xi)(\nabla^{(j)} Q(\xi))^T,\end{aligned}$$

   donde $\xi \in \mathbb{R}^d$, $\lambda \in \mathbb{R}^+$, $E \subseteq \mathbb{R}^d$, $j \in \mathbb{N}$ y σ es una medida positiva en $\mathbb{R}^d$; para un ejemplo en particular de polinomios en varias variables sobre la bola unidad.

   Queda pendiente realizar el estudio del producto interno anterior con una medida positiva σ diferente a la empleada en el capítulo 3, incluso no necesariamente una medida en la bola unidad en d variables, sino en otros conjuntos como por ejemplo el simplex en d variables.

3. Generalizar el producto interno tipo Sobolev del literal anterior, no solamente perturbando con un operador gradiente de orden j, sino perturbando con la suma de n operadores gradientes de orden a lo sumo n. Es decir,

$$\langle P(\mathbf{x}), Q(\mathbf{x})\rangle_\omega = \langle P(\mathbf{x}), Q(\mathbf{x})\rangle_\sigma + \sum_{k=0}^{n} \lambda_k \nabla^{(k)} P(\xi)(\nabla^{(k)} Q(\xi))^T.$$

4. Realizar un estudio del comportamiento asintótico para funciones núcleo asociadas a polinomios en varias variables con otro tipo de perturbaciones. Por ejemplo productos internos tipo Sobolev de la forma:

$$\langle P(\mathbf{x}), Q(\mathbf{x})\rangle_\upsilon = \langle P(\mathbf{x}), Q(\mathbf{x})\rangle_\sigma + \lambda \sum_{k=0}^{n} \frac{\partial P(\xi)}{\partial n} \frac{\partial Q(\xi)}{\partial n},$$

donde $\xi \in \mathbb{R}^d$, $\lambda \in \mathbb{R}^+$ y $\frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial n}$ denota la derivada normal sobre la esfera unidad en d variables S^{d-1}, es decir:

$$\frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial n} = x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} f(x) + x_2 \frac{\partial}{\partial x_2} f(x) + \cdots + x_d \frac{\partial}{\partial x_d} f(x).$$

Bibliografía

[1] M. Alfaro, F. Marcellán, M. L. Rezola and A. Ronveaux, *On orthogonal polynomials of Sobolev type: algebraic properties and zeros*, SIAM J. Math. Anal, **23**, (1992).

[2] M. Alfaro, G. López and M. L. Rezola, *Some properties of zeros of Sobolev-type orthogonal polynomials*, J. Comput. Appl. Math, **69**, 171-179, (1996).

[3] R. Álvarez - Nodarse and F. Marcellán, *A generalization of the classical Laguerre polynomials: asymptotic properties and zeros*, Appl. Anal, **62**, 349-366, (1996).

[4] R. Álvarez - Nodarse and J. J. Moreno-Balcázar, *Asymptotic properties of generalized Laguerre orthogonal polynomials*, Indag. Math. N.S, **15**, 151-165, (2004).

[5] R. Askey, *Orthogonal polynomials and special funtions*, Reg, Conf in Appl. Math. 21, SIAM, Philadelpha, (1975).

[6] T.S. Chihara, *An introduction to orthogonal polynomials*, Gordon and Breach, New York (1978).

[7] C.F. Dunkl and Y. Xu, *Orthogonal polynomials of several variables*, Encyclopedia of Mathematics and its Applications, Vol.**81**, Cambridge University Press, Cambridge, (2001).

[8] A. M. Delgado, T. E. Pérez and M. A. Piñar, *Sobolev-type orthogonal polynomials on the unit ball*, Journal of Approximation Theory, **170**, 94-106, (2013).

[9] H. Dueñas, J. García and L. Garza, *The diagonal general case of the Laguerre-Sobolev type orthogonal polynomials*, Revista Colombiana de Matemáticas. Vol **47**, 39-66, (2013).

[10] H. Dueñas, L. Garza and M. Piñar, *A higher order Sobolev-type inner product for orthogonal polynomials in several variables*, Numerical Algorithms, http://link.springer.com/article/10.1007 %2Fs11075-014-9836-x.

[11] F. Marcellán and W. Van Assche, *Relative asymptotics for orthogonal polynomials with a Sobolev inner product*, J. Approx. Theory, **72**, 193-209, (1993).

[12] A. Martínez - Finkelshtein, *Asymptotic properties of Sobolev orthogonal polynomials*, J. Comput. App. Math, **99**, 491-510, (1998).

[13] M. V. Mello, V. C. Paschoa, T. E. Pérez and M. A. Piñar, *Multivariate Sobolev-type orthogonal polynomials*, Jaen Journal of Approx, **3**, No 2, 241-259, (2011).

[14] G. Szego, *Orthogonal polynomials*, 4th ed. Amer. Math. Soc. Colloq. Publ. Series, Vol **23**, Providence, RI, Amer, Math. Soc, (1975).

[15] Y. Xu, *Asymptotics for orthogonal polynomials and Chistoffel functions on a ball*, Methods Appl. Anal, 3, 257-272, (1996).

[16] Y. Xu, *On orthogonal polynomials in several variables*, Special functions, q-series, and related topics, Fields Institute Communications Series, vol. **14**, 247-270, (1997).

[17] Y. Xu, *Summability of Fourier orthogonal series for Jacobi weight on a ball in* $\mathbb{R}^d$, Trans. Amer. Math. Soc. **351**, No 6, 2439–2458, (1999).