UNA NUEVA CONSTRUCCIÓN DE LOS ESPACIOS TOPOLÓGICOS FINITOS DESDE LAS FUNCIONES SUBMODULARES

Leonardo Roa Leguizamón

Universidad Nacional de Colombia
Facultad de Ciencias,
Departamento de Matemáticas.
Bogotá D.C, Colombia
2012

UNA NUEVA CONSTRUCCIÓN DE LOS ESPACIOS TOPOLÓGICOS FINITOS DESDE LAS FUNCIONES SUBMODULARES

Leonardo Roa Leguizamón

Tesis o trabajo de grado presentado como requisito parcial para optar al título de:
Magister en Ciencias Matemáticas

Director:
Profesor Humberto Sarria Zapata

Universidad Nacional de Colombia
Facultad de Ciencias,
Departamento de Matemáticas.
Bogotá D.C, Colombia
2012

Resumen

En este trabajo se estudian las conexiones entre las FD-relaciones, las funciones submodulares y los espacios topológicos finitos. Los resultados obtenidos están basados en [7] y [18]. Se interpretan las propiedades de los operadores de clausura de un espacio topológico en términos de las FD-relaciones y las funciones submodulares, como también algunos conceptos y propiedades tales como: puntos de acumulación, punto exterior, conjunto cerrado, conjunto denso y axiomas de separación. Por último, se muestran algunos algoritmos que calculan los valores de las funciones submodulares relacionadas con topologías.

Abstract

In this paper we study the connections among FD-relations, submodular functions and finite topological spaces. The results that we show are based in [7] and [18]. We interpret the properties of closure operators of finite topological spaces, in terms of FD-relations and submodular functions, we also characterize concepts and properties such that: accumulation points, exterior point, closed set, dense set and separation axioms. Finally, we show some algorithms that determine the values of the submodular functions related with topologies.

Contenido

Introducción

Las estructuras de dependencia funcional comúnmente conocidas como FD-relaciones, son estructuras matemáticas propias de la Teoría de las bases de datos, introducidas por Armstrong en [1], aunque se han utilizado para comprender otra clase de dependencias entre objetos, tales como: retículos distributivos, conjunto de atributos de una relación, variables aleatorias, redes, matroides y topologías entre otros [Ver [7]].

La definición de FD-relación que se utiliza en este trabajo es la que presenta Matus en [7]. Allí el autor, da la defineión de FD-relación por medio de un sistema de axiomas desde un punto de vista conjuntista de la siguiente manera: Sea E un conjunto finito, una FD-relación $\mathcal{N}$ es un subconjunto de $2^E \times 2^E$ que satisface:

(FD1) $I \subseteq J \subseteq E$, entonces $(J, I) \in \mathcal{N}$,

(FD2) $(I, J), (J, K) \in \mathcal{N}$, entonces $(I, K) \in \mathcal{N}$,

(FD3) $(I, J), (I, K) \in \mathcal{N}$, entonces $(I, J \cup K) \in \mathcal{N}$.

Un operador $c : 2^E \to 2^E$ es de clausura si satisface las siguientes propiedades:

(CL1) $I \subseteq c(I)$ **Proyección**,

(CL2) $I \subseteq J$, entonces $c(I) \subseteq c(J)$ **Monotonía**,

(CL3) $c(I) = c(c(I))$ **Idempotencia**.

Si el operador de clausura satisface además las propiedades:

(CT4) $c(\phi) = \phi$,

(CT5) $c(\bigcup_{k=1}^{n} I_k) = \bigcup_{k=1}^{n} c(I_k)$.

Entonces, c define un espacio topológico.

Uno de los resultados más interesantes que se presentan en [7] y [18] es la relación biunívoca entre las FD-relaciones y los operadores de clausura. Este resultado es el punto de partida para la realización de este trabajo, el cual tiene como objetivo principal establecer las bases de las conexiones o puentes entre las FD-relaciones, las funciones submodulares y los espacios topológicos finitos.

Un subconjunto destacable de las funciones submodulares son los polimatroides, los cuales surgen como una generalización de la función rango de los matroides. Éstos tienen aplicaciones en la Teoría de Grafos, Teoría de Juegos y algunos problemas de optimización lineal los cuales se resuelven mediante algoritmos tipo Greedy [Ver [6]]. Además, los polimatroides permiten definir las desigualdades básicas de la Teoría de la Información conocidas como Desigualdades Shannon [Ver [16]]. En este trabajo, se presentan polimatroides los cuales están relacionados con la colección de conjuntos cerrados, conjuntos abiertos y los operadores de clausura de espacios topológicos finitos.

El trabajo se encuentra organizado de la siguiente manera: en el capítulo 1, se presenta una introducción a las definiciones y resultados básicos de los principales temas que se abordan en el trabajo: *FD-Relaciones, Operadores de Clausura y Funciones Submodulares.*

En el capítulo 2, se muestra la relación biunívoca entre los operadores de clausura y las FD-relaciones. Además, se definen FD-relaciones y operadores de clausura a partir de las funciones submodulares.

En el capítulo 3, se interpretan las propiedades $(CT4)$ y $(CT5)$ de los operadores de clausura de espacios topológicos finitos en las FD-relaciones y las funciones submodulares. De igual manera conceptos y propiedades de los espacios topológicos finitos tales como: *conjunto cerrado, conjunto denso, puntos de acumulación, punto exterior y axiomas de separación.*

En el capítulo 4, se caracterizan las topologías para las cuales el operador de clausura define un matroide (*topologías matroidales*) y se dan caracterizaciones de matroides para los cuales su operador de clausura define un espacio topológico (*matroides topológicos*).

Los aportes del presente trabajo son los siguientes:

- Se caracteriza la FD-relación más pequeña por contenencia, en términos de la cantidad de elementos del conjunto soporte.
- Se demuestra que las funciones submodulares no decrecientes determinan un cono convexo.

- Se demuestra que para cada FD-relación $\mathcal{N}$, existe una función submodular f a valor entero tal que $\mathcal{N} = \mathcal{N}_f$.
- Se caracterizan los espacios topológicos finitos y los conceptos: conjunto cerrado, punto de acumulación, punto exterior, conjunto denso y axiomas de separación T_0, T_1, regular y normal mediante las FD-relaciones y las funciones submodulares.
- Se construyen las funciones submodulares f_τ y $\overline{f}$, las cuales se encuentran relacionadas con los conjuntos abiertos y el operador de clausura de una topología, respectivamente.
- Se interpretan las funciones $f(X|Y)$ e $I(X \wedge Y)$ para los polimatroides $f_{\mathbb{Z}}$, f_τ y $\overline{f}$.
- Se describen los operadores de clausura de topologías que definen matroides.

CAPÍTULO 1

Definiciones, notación, teoremas básicos y preliminares

En este capítulo se presenta una introducción a los principales temas que son soporte de este trabajo: *FD-Relaciones, Operadores de Clausura y Funciones Submodulares.* En cuanto a las FD-relaciones o relaciones de dependencia funcional, se siguen los lineamientos de [7] y [18]. Para los operadores de clausura, se estudian los espacios topológicos y los matroides. Para el estudio de las funciones submodulares se siguen los lineamientos de [6] y [16].

1.1. FD-relaciones

Las Estructuras de Dependencia Funcional o FD-relaciones, son estructuras matemáticas que aparecen principalmente en las relaciones de la Teoría de las bases de datos, aunque se han utilizado para comprender otra clase de dependencia entre objetos tales como: retículos distributivos, conjunto de atributos de una relación, variables aleatorias, redes, matroides y topologías entre otros [Ver [7]].
Los axiomas que definen las estructuras de dependencia funcional, fueron introducidos por William Ward Armstrong en [1], de la siguiente manera: Sea $R(A, DEP)$, un esquema de relación, donde A es el conjunto de atributos de la relación y DEP es el conjunto de dependencias entre los atributos. Sean X y Y atributos de U, una FD-relación definida sobre U satisface los axiomas:

Reflexividad. $X \to X$

Proyectividad. Si $X \to Y$ y $Z \subseteq Y$, entonces $X \to Z$.

Aumentatividad. Si $X \to Y$ y $X \subseteq Z$, entonces $Z \to Y$.

Aditividad. Si $X \to Y$ y $Z \to V$, entonces $X \cup Z \to Y \cup V$.

Transitividad. Si $X \to Y$ y $Y \to Z$, entonces $X \to Z$.

Frantisek Matús en [7], presenta una colección de axiomas equivalentes a los de Armstrong desde un punto de vista conjuntista, y son los que se utilizan en este trabajo.

Definición 1.1.1. *Sea E un conjunto finito. Diremos que $\mathcal{N} \subseteq 2^E \times 2^E$ es una* FD-relación *sobre E, si satisface:*

(FD1) *$I \subseteq J \subseteq E$, entonces $(J, I) \in \mathcal{N}$,*

(FD2) *$(I, J), (J, K) \in \mathcal{N}$, entonces $(I, K) \in \mathcal{N}$,*

(FD3) *$(I, J), (I, K) \in \mathcal{N}$, entonces $(I, J \cup K) \in \mathcal{N}$.*

El conjunto E se denomina el conjunto soporte de la FD-relación. Si el conjunto E es infinito la condición $(FD3)$, se escribe como:

(FD3*) *$(I, J_\lambda) \in \mathcal{N}$, para todo $\lambda \in \Lambda$ implica $(I, \cup_{\lambda \in \Lambda} J_\lambda) \in \mathcal{N}$. [Ver [18]].*

Ejemplo 1.1.1. *Sea E un conjunto finito. La FD-relación más pequeña, corresponde a la colección de aquellas parejas en $2^E \times 2^E$ cuya segunda componente, es un subconjunto de la primera componente. Esta FD-relación se notará por $\mathcal{N}_E$. Observe que la FD-relación $\mathcal{N}_E$, es la generada por $(FD1)$ y por consiguiente cualquier otra FD-relación definida sobre E, deberá contener a $\mathcal{N}_E$.*

Sea $E = \{a, b\}$. La FD-relación más pequeña que se puede definir sobre E se muestra a continuación,

$$\mathcal{N}_E = \{(\phi, \phi), (\{a\}, \phi), (\{b\}, \phi), (\{a, b\}, \phi), (\{a\}, \{a\}), (\{b\}, \{b\}), (\{a, b\}, \{a\}), (\{a, b\}, \{b\}), (\{a, b\}, \{a, b\})\}.$$

Proposición 1.1.1. *El número de elementos en $\mathcal{N}_E$ es $3^{|E|}$.*

Demostración. Tal como se ilustró en el Ejemplo 1.1.1, la FD-relación $\mathcal{N}_E$, consiste de todas las parejas cuya segunda componente es un subconjunto de la primera componente. Entonces, si $I \subseteq E$, hay

$$\sum_{k=0}^{|I|} \binom{|I|}{k} = 2^{|I|}$$

elementos en $\mathcal{N}_E$ cuya primera componente es I. Para calcular el número total de elementos en $\mathcal{N}_E$ se tiene en cuenta cada subconjunto de E obteniendo

$$|\mathcal{N}_E| = \sum_{k=0}^{|E|} \binom{|E|}{k} 2^k = 3^{|E|}. \tag{1-1}$$

□

Una pregunta abierta, consiste en determinar el número de FD-relaciones no isomorfas que es posible definir sobre un conjunto finito. La Tabla **1-1**[1], muestra este número para conjuntos con n elementos, $0 \leq n \leq 4$.

n	Número total	FD no isomorfas
0	1	1
1	2	2
2	7	5
3	61	19
4	2480	184

Tabla 1-1: Número de FD-relaciones para $0 \leq n \leq 4$.

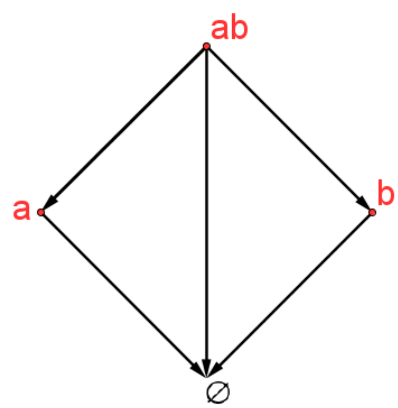

Figura 1-1: Representación gráfica de la FD-relación del Ejemplo 1.1.1. Por simplicidad, los elementos (I, I) no se representan gráficamente. Además, los conjuntos $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ se notan por $e_1 e_2 \ldots e_n$.

Las FD-relaciones con soporte finito, se representan gráficamente por medio de un grafo dirigido, la pareja (I, J) en la FD-relación se representa mediante una flecha que parte desde el punto I y llega al punto J. [Ver Figura 1.1]

1.2. Operadores de clausura

Uno de los objetos más conocidos en matemáticas son los operadores de clausura. Estos, permiten definir ciertas estructuras matemáticas, entre las cuales se encuentran los espacios topológicos y los matroides, que se estudiarán en esta sección.

[1]Tabla obtenida de [7]

Definición 1.2.1. *Sea E un conjunto. Diremos que el operador $c : 2^E \to 2^E$ es de* clausura, *si dados $I, J \subseteq E$:*

(CL1) $I \subseteq c(I)$ ***Proyección***,

(CL2) $I \subseteq J$, *entonces* $c(I) \subseteq c(J)$ ***Monotonía***,

(CL3) $c(I) = c(c(I))$ ***Idempotencia***.

Ejemplo 1.2.1. *Sea $E = \{a, b\}$. Los siguientes son los operadores de clausura no isomorfos que se pueden definir sobre E:*

$$\begin{aligned} c_1 : 2^E &\to 2^E \\ \phi &\mapsto \phi \\ \{a\} &\mapsto \{a\} \\ \{b\} &\mapsto \{b\} \\ \{a,b\} &\mapsto \{a,b\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} c_2 : 2^E &\to 2^E \\ \phi &\mapsto \phi \\ \{a\} &\mapsto \{a,b\} \\ \{b\} &\mapsto \{a,b\} \\ \{a,b\} &\mapsto \{a,b\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} c_3 : 2^E &\to 2^E \\ \phi &\mapsto \{a,b\} \\ \{a\} &\mapsto \{a,b\} \\ \{b\} &\mapsto \{a,b\} \\ \{a,b\} &\mapsto \{a,b\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} c_4 : 2^E &\to 2^E \\ \phi &\mapsto \{a\} \\ \{a\} &\mapsto \{a\} \\ \{b\} &\mapsto \{a,b\} \\ \{a,b\} &\mapsto \{a,b\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} c_5 : 2^E &\to 2^E \\ \phi &\mapsto \{a\} \\ \{a\} &\mapsto \{a,b\} \\ \{b\} &\mapsto \{a,b\} \\ \{a,b\} &\mapsto \{a,b\} \end{aligned}$$

Se invita al lector a comparar el número de FD-relaciones y el número de operadores de clausura que es posible definir sobre un conjunto finito.

1.2.1. Espacios topológicos

En esta sección, se introducen conceptos básicos de topología tales como: *conjuntos abiertos, conjuntos cerrados, operador de adherencia, punto adherente, punto de acumulación y axiomas de separación,* con el fin de definirlos posteriormente en términos de funciones submodulares y FD-relaciones.

Definición 1.2.2. *Una* topología τ *sobre un conjunto* E*, es un subconjunto de* 2^E *que satisface:*

(ET1) *si* $\{O_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda} \subseteq \tau$*, entonces* $\bigcup_{\lambda\in\Lambda} O_\lambda \in \tau$*,*

(ET2) *si* $\{O_\lambda\}_{i=1}^{n} \subseteq \tau$*, entonces* $\cap_{i=1}^{n} O_i \in \tau$*.*

(ET3) $E, \phi \in \tau$*.*

Los elementos de τ *se denominan conjuntos abiertos, los complementos de los conjuntos abiertos se denominan conjuntos cerrados. La pareja* (E, τ) *se denomina espacio topológico.*

Informalmente, puede decirse que una topología τ, es cualquier colección de subconjuntos de E cerrada para uniones arbitrarias e intersecciones finitas.

Ejemplo 1.2.2. *Dado un conjunto* E*,*

1. *la colección* $\mathcal{P}(E)$ *de todos los subconjuntos de* E *es una topología sobre* E *que recibe el nombre de topología discreta. La pareja* $(E, \mathcal{P}(E))$ *recibe el nombre de espacio topológico discreto. La topología discreta es la topología con la mayor cantidad de abiertos.*

2. *La colección* $\{\phi, E\}$ *es una topología sobre* E *que recibe el nombre de topología grosera. La pareja* $(E, \{\phi, E\})$ *recibe el nombre de espacio topológico grosero. La topología grosera es la topología con la menor cantidad de abiertos.*

Es posible definir la noción de topología a partir de la colección de conjuntos cerrados. Dado un conjunto E y una familia $\mathcal{C}$ de subconjuntos de E cerrada para intersecciones arbitrarias y uniones finitas, se define la topología τ como la colección de todos los A^c, (complemento del conjunto A), con $A \in \mathcal{C}$.

Proposición 1.2.1. τ *es una topología sobre* E*, si y sólo si, el conjunto*

$$\mathcal{C} = \{A : A = O^c \ \ \text{para algún } O \in \tau\} \tag{1-2}$$

satisface:

1. $\phi, E \in \mathcal{C}$*,*

2. *si* $\{A_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda} \subseteq \mathcal{C}$*, entonces* $\bigcap_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda \in \mathcal{C}$*, y*

3. si $\{A_\lambda\}_{i=1}^n \subseteq \mathcal{C}$*, entonces* $\cup_{i=1}^n A_i \in \mathcal{C}$.

Demostración. Ver [9] y [13]. □

Definición 1.2.3. *Sea* (E,τ) *un espacio topológico.*

1. *Sea* $V \subseteq E$*, se dirá que* V *es una* vecindad *de* $x \in E$*, si existe* $U \in \tau$ *tal que* $x \in U \subseteq V$*. Se notará por* V_x *a una vecindad del punto* x *y por* $\mathcal{V}(x)$ *al conjunto de todas las vecindades de* x*.*

2. *Para cada* $I \subseteq E$*, se define la* adherencia *de* I*, como*

$$\overline{I} = \bigcap \{F : F \text{ es cerrado, } I \subseteq F\}, \tag{1-3}$$

es decir, $\overline{I}$ *es el cerrado más pequeño que contiene a* I*.*

Proposición 1.2.2. *Sea* τ *una topología sobre* E*. El operador* $c_\tau : 2^E \to 2^E$ *tal que* $c_\tau(I) = \overline{I}$ *es un operador de clausura.*

Demostración. Sean $I, J \subseteq E$. Por definición de c_τ, $I \subseteq \overline{I}$. Si $I \subseteq J$, se tiene que $I \subseteq \overline{J}$ y como $\overline{I}$ es el cerrado más pequeño que contiene a I, entonces $\overline{I} \subseteq \overline{J}$, y $\overline{I} = \overline{\overline{I}}$. □

La definición actual de espacio topológico mediante el operador de clausura, fue introducida por Kazimierz Kuratowski, en su tesis Doctoral 1921, allí Kuratowski da los axiomas y realiza una discusión de la clausura en conjuntos arbitrarios de manera brillante. [Ver [15].]

Proposición 1.2.3. *Sea* E *un conjunto, y* $c : 2^E \to 2^E$ *un operador de clausura. Entonces,* c *es el operador de clausura de una única topología sobre* E*, si y sólo si, satisface las siguientes condiciones:*

(CT4) $c(\phi) = \phi$,

(CT5) $c(\bigcup_{k=1}^n I_k) = \bigcup_{k=1}^n c(I_k)$.

Los conjuntos cerrados son aquellos conjuntos para los cuales $c(A) = A$*.*

Demostración. Ver [9] y [13]. □

Ejemplo 1.2.3. *Los operadores de clausura* c_1 *y* c_2 *del Ejemplo 1.2.1, definen los espacios topológicos discreto y grosero, respectivamente.*

Definición 1.2.4. *Si* (E,τ) *es un espacio topológico, una base para* τ *es una subfamilia* $\mathcal{B} \subseteq \tau$*, tal que para cualquier conjunto* U *abierto y cualquier punto* $x \in U$*, existe* $B \in \mathcal{B}$ *tal que* $x \in B \subseteq U$*. Es decir, cada conjunto abierto es una unión de elementos en* $\mathcal{B}$*.*

Teorema 1.2.1. *Sea E un conjunto. $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{P}(E)$ es una base de una topología para E, si y sólo si, se cumple*

1. $E = \bigcup\{B : B \in \mathcal{B}\}$.

2. *Para cualquier par de conjuntos U y V en $\mathcal{B}$ y $x \in U \cap V$, existe $B \in \mathcal{B}$ con $x \in B \subseteq U \cap V$. Esto es, $U \cap V$ es unión de elementos de $\mathcal{B}$ para todo par de conjuntos U y V en $\mathcal{B}$.*

Demostración. Ver [9] y [13]. □

La "posición" de un punto respecto a un conjunto, es de gran importancia, pues permite caracterizar y determinar completamente los espacios topológicos.

Definición 1.2.5. *Sean (E, τ) un espacio topológico, $A \subseteq E$ y $b \in E$. Se dirá que:*

1. *b es un* punto adherente *o adherido a A, si b no puede ser separado del conjunto A por ninguna de sus vecindades. Es decir, para toda V_b se tiene $V_b \cap A \neq \phi$.*

2. *b es un* punto de acumulación *de A, o, b es un punto límite del conjunto A, si para cualquier V_b se tiene $(V_b - \{b\}) \cap A \neq \phi$. Es decir, cada vecindad del punto b contiene puntos de A diferentes de b, de donde $b \in c(A - \{b\})$. El conjunto de puntos de acumulación de A se denota por A^a.*

3. *b está en el* interior *de A, si existe un conjunto abierto U tal que $b \in U \subseteq A$. El conjunto de puntos interiores de A se denotará por $\mathring{A}$.*

4. *b es* exterior *a A, si existe una vecindad V_b tal que $V_b \subseteq A^c$. El conjunto de puntos exteriores a A se denotará por $Ext(A)$.*

5. *b es un* punto frontera *de A, si para toda V_b se tiene $V_b \cap A \neq \phi$ y $V_b \cap A^c \neq \phi$. El conjunto de puntos frontera de A se denotará por $Fr(A)$.*

Proposición 1.2.4. *Sean (E, τ) un espacio topológico y $A \subseteq E$, $\mathring{A}$ es el mayor abierto contenido en A.*

Corolario 1.2.1. *Sea (E, τ) un espacio topológico, $A \subseteq E$ es un conjunto abierto, si y sólo si, $\mathring{A} = A$.*

Definición 1.2.6. *Sean (E, τ) un espacio topológico y $A \subseteq E$, el conjunto A se dice* denso *si para cualquier V_x de cualquier $x \in E$ se tiene $V_x \cap A \neq \phi$.*

En espacios topológicos es interesante determinar, cuando puntos y/o conjuntos cerrados pueden ser separados, por medio de conjuntos abiertos. Este tipo de separaciones se estudian bajo la denominación de *axiomas de separación, T_k, $k = 0, 1, 2, 3, 4$, Normales o Regulares.* En el caso finito, los axiomas de separación se reducen a las caracterizaciones de los espacios T_0, T_1, Normales y Regulares, ya que $T_1 = T_2 = T_3 = T_4$.

Definición 1.2.7. *1. Un espacio topológico (E, τ), es T_0* o de Kolmogoroff, *si y sólo si, dados $x, z \in E$ con $x \neq z$ existe un conjunto U abierto que contiene a x y no contiene a z, o, existe un conjunto V abierto que contiene a z, y no contiene a x.*

2. Un espacio topológico (E, τ) es T_1 o accesible, *si y sólo si, dados $x, z \in E$ con $x \neq z$ existen conjuntos U y V abiertos que contienen a x y z, respectivamente, además $z \notin U$, $x \notin V$.*

3. Un espacio topológico (E, τ), es T_2 o de Hausdorff, *si y sólo si, dados $x, z \in E$ con $x \neq z$ existen conjuntos U y V abiertos que contienen a x, y z respectivamente, y además $U \cap V = \phi$.*

4. Un espacio topológico (E, τ) es regular, *si y sólo si, para cualquier $x \in E$ y cualquier $F \subseteq E$ cerrado con $x \notin F$, existen un par de conjuntos U y V abiertos y disyuntos que contienen a x y a F, respectivamente.*

5. Un espacio topológico (E, τ) se dice normal, *si y sólo si, para cada par de conjuntos F y G cerrados y disyuntos, existen un par de conjuntos U y V abiertos y disyuntos, que contienen a F y a G, respectivamente.*

6. Un espacio topológico (E, τ) que es regular y además T_1, se denomina espacio T_3.

7. Un espacio topológico (E, τ) que es normal y además T_1, se dice T_4.

1.2.2. Matroides

Los Matroides fueron introducidos inicialmente por Whitney en 1935, para intentar capturar abstractamente la idea de dependencia e independencia lineal, de álgebra lineal. [Ver [11]]. Aunque los matroides han sido trabajados clásicamente en el caso finito, en 1966 Rado pidió la elaboración de una teoría para matroides infinitos. El desafío de Rado causó que varios autores a finales de la década del 60 sugirieran numerosas definiciones para éstos. [Ver[3]].

Por conveniencia, en esta sección E denotará un conjunto finito, y el conjunto unitario $\{a\}$ será notado simplemente por a.

Definición 1.2.8. *Un* matroide *M es una pareja $(E, \mathcal{I})$, donde $\mathcal{I}$ es una colección de subconjuntos de E, que satisface las siguientes condiciones:*

(I1) $\phi \in \mathcal{I}$.

(I2) *Si $I \in \mathcal{I}$ y $I' \subseteq I$, entonces $I' \in \mathcal{I}$.*

(I3) *Si $I_1, I_2 \in \mathcal{I}$ y $\mid I_1 \mid < \mid I_2 \mid$, entonces existe un elemento e en $I_2 \setminus I_1$ tal que $I_1 \cup e \in \mathcal{I}$.*

El conjunto E se denomina el soporte del matroide M. Los elementos de $\mathcal{I}$ son los conjuntos independientes del matroide M. Si un elemento no está en $\mathcal{I}$, se dice dependiente. Un conjunto maximal independiente, respecto al orden parcial definido por $\subseteq$ sobre $\mathcal{I}$, se denomina una base del matroide, la colección de todas las bases del matroide M se denota por $\mathcal{B}(M)$. Un conjunto dependiente minimal es llamado circuito, la colección de todos los circuitos del matroide M se denota por $\mathcal{C}(M)$.

Ejemplo 1.2.4. *Sea $E = \{a, b\}$. Listamos a continuación la colección de independientes que se pueden definir sobre E:*

$$\begin{aligned}
\mathcal{I}_1 &= \{\phi\}, \\
\mathcal{I}_2 &= \{\phi, \{a\}\}, \\
\mathcal{I}_3 &= \{\phi, \{a\}, \{b\}\}, \\
\mathcal{I}_4 &= \{\phi, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}.
\end{aligned}$$

La definición de matroide, tiene equivalentes axiomáticos en términos de circuitos, bases, función rango y operador de clausura como se verá a continuación.

Proposición 1.2.5. *Sea $\mathcal{C}$ una colección de subconjuntos de un conjunto E. Entonces, $\mathcal{C}$ es la colección de circuitos de un matroide sobre E, si y soló si, satisface las siguientes condiciones:*

(C1) $\phi \notin \mathcal{C}$.

(C2) *Si C_1 y C_2 son elementos de $\mathcal{C}$ y $C_1 \subseteq C_2$, entonces $C_1 = C_2$.*

(C3) *Si C_1 y C_2 son elementos distintos de $\mathcal{C}$ y $e \in C_1 \cap C_2$, entonces existe un elemento C_3 de $\mathcal{C}$ tal que $C_3 \subseteq (C_1 \cup C_2) \setminus e$.*

Demostración. Ver [10]. □

Proposición 1.2.6. *Sea $\mathcal{B}$ una colección de subconjuntos de un conjunto E. Entonces, $\mathcal{B}$ es la colección de bases de un matroide sobre E, si y sólo si, satisface las siguientes condiciones:*

(B1) *$\mathcal{B}$ es no vacío.*

(B2) *Si B_1 y B_2 son elementos de $\mathcal{B}$ y $x \in B_1 - B_2$, entonces existe un elemento $y \in B_2 - B_1$ tal que $(B_1 - x) \cup y \in \mathcal{B}$.*

Demostración. Ver [10]. □

Para la definición de la función rango de un matroide $M = (E, \mathcal{I})$, se hace necesario construir un matroide a partir de un subconjunto X del soporte y una nueva colección de independientes que dependan de $\mathcal{I}$ y X.

Proposición 1.2.7. *Sean $M = (E, \mathcal{I})$ un matroide y $X \subseteq E$. Considere el conjunto*

$$\mathcal{I} \mid X := \{I \subseteq X : I \in \mathcal{I}\}, \tag{1-4}$$

entonces $M \mid X = (X, \mathcal{I} \mid X)$ define un matroide, el cual se denomina la restricción de M por X.

Definición 1.2.9. *Una función $r : 2^E \longrightarrow \mathbb{Z}^+$ se dice la* función rango *de un matroide, si para cada $X \subseteq E$, $r(X)$ está determinado por el número de elementos en una base del matroide $M \mid X$.*

Una forma alterna para calcular $r(X)$ consiste en determinar el tamaño del independiente más grande contenido en X. Esta forma resulta ser equivalente a la definición anterior.

Proposición 1.2.8. *Una función $r : 2^E \longrightarrow \mathbb{Z}^+$ es la función rango de un matroide sobre E, si y sólo si, r satisface las siguientes propiedades:*

(R1) *Si $X \subseteq E$, entonces $0 \leq r(X) \leq \mid X \mid$.*

(R2) *Si $X \subseteq Y \subseteq E$, entonces $r(X) \leq r(Y)$.*

(R3) *Si X, Y son subconjuntos de E, entonces*

$$r(X \cup Y) + r(X \cap Y) \leq r(X) + r(Y). \tag{1-5}$$

Demostración. Ver [10]. □

A partir de la función rango de un matroide se define el operador de clausura.

Definición 1.2.10. *La función $c : 2^E \longrightarrow 2^E$, definida para todo $X \subseteq E$, por*

$$c(X) = \{x \in E : r(X \cup x) = r(X)\}, \tag{1-6}$$

se denomina el operador de clausura *de un matroide.*

Proposición 1.2.9. *Una función $c : 2^E \longrightarrow 2^E$ es el operador de clausura de un matroide sobre E, si y sólo si, c satisface las siguientes condiciones:*

(CL1) *Si $X \subseteq E$, entonces $X \subseteq c(X)$.*

(CL2) *Si $X \subseteq Y \subseteq E$, entonces $c(X) \subseteq c(Y)$.*

(CL3) *Si $X \subseteq E$, entonces $c(c(X)) = c(X)$.*

(CL4) *Si $X \subseteq E$, $x \in E$ y $y \in c(X \cup x) - c(X)$, entonces $x \in c(X \cup y)$.*

La propiedad $(CL4)$ se conoce comúnmente como la propiedad de intercambio de Mac Lane-Steinitz.

Demostración. Ver [10]. □

1.3. Funciones submodulares

Un tópico más general que las funciones rango de las matroides, son las funciones submodulares, las cuales aparecen en la Teoría de Grafos, Teoría de Juegos y algunos problemas de optimización lineal donde se destaca su uso en el Algoritmo Greedy. [Ver [6]].

Tal como en la sección anterior, E denotará un conjunto finito.

Definición 1.3.1. *Sean E un conjunto y $f : 2^E \to \mathbb{R}$ una función. Entonces,*

1. *f se dice submodular si,*

$$f(A) + f(B) \geq f(A \cup B) + f(A \cap B), \text{ para todo } A, B \subseteq E. \tag{1-7}$$

   La función f, se dice supermodular, si $-f$ es submodular y f es modular, si es submodular y supermodular.

2. *f es no decreciente, si para todo $A \subseteq B \subseteq E$, $f(A) \leq f(B)$.*

Proposición 1.3.1. *El conjunto de todas las funciones submodulares, no decrecientes definidas sobre E forman un cono convexo que denotaremos por $\mathcal{C}_E$.*

Demostración. Sean E un conjunto, f y g dos funciones submodulares, no decrecientes definidas sobre 2^E y α, β números reales positivos. Entonces, si $A, B \subseteq E$,

$$\begin{aligned}
(\alpha f + \beta g)(A) &+ (\alpha f + \beta g)(B) \\
&= \alpha f(A) + \alpha f(B) + \beta g(A) + \beta g(B) \\
&\geq \alpha(f(A \cup B) + f(A \cap B)) + \beta(g(A \cup B) + g(A \cap B)) \\
&= (\alpha f + \beta g)(A \cup B) + (\alpha f + \beta g)(A \cap B).
\end{aligned}$$

La función submodular $(\alpha f + \beta g)$ es no decreciente, pues es suma de funciones no decrecientes y α, β son números reales positivos. □

Teorema 1.3.1. *Sea $f : 2^E \to \mathbb{R}$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. *f es submodular.*

2. *Para todo $A \subseteq E$ y para todo $x, z \in E - A$, $x \neq z$ se tiene:*

$$f(A \cup \{z\}) - f(A) \geq f(A \cup \{x, z\}) - f(A \cup \{x\}).$$

3. *Para todo $A, B \subseteq E$ con $A \subseteq B$ y $z \in E - B$ se tiene:*

$$f(A \cup \{z\}) - f(A) \geq f(B \cup \{z\}) - f(B).$$

4. Para todo $A, B, C \subseteq E$ *con* $A \subseteq B$ *y* $B \cap C = \phi$ *se tiene:*

$$f(A \cup C) - f(A) \geq f(B \cup C) - f(B).$$

Demostración. Ver [6]. □

Las funciones submodulares no decrecientes con la propiedad adicional, que evaluadas en el conjunto vacío, su valor es cero reciben el nombre de Polimatroides.

Definición 1.3.2. *Sea* E *un conjunto finito y* $f : 2^E \longrightarrow \mathbb{R}$ *una función. Diremos que el par* (E, f) *es un* polimatroide*, si satisface las siguientes propiedades:*

(P1) $f(\phi) = 0$.

(P2) f *es submodular y no decreciente.*

(P3) *Si* $A, B, C \subseteq E$*, entonces*

$$f(A \cup C) + f(B \cup C) \geq f(C) + f(A \cup B \cup C).$$

Proposición 1.3.2. *Las propiedades* $(P1)$ *y* $(P2)$ *son equivalentes a* $(P1)$ *y* $(P3)$.

Demostración. Ver [16]. □

A continuación se definen funciones que se originan a partir de funciones polimatroides y se ilustran algunas desigualdades que satisfacen los polimatroides, conocidas como las desigualdades de Shannon. [Ver [16] y [2]]. Si f es un polimatroide y $X, Y, Z \subseteq E$, se notará $f(X, Y)$ en vez de $f(X \cup Y)$.

Definición 1.3.3. *Si* f *es un polimatroide sobre* E *y* $X, Y, Z \subseteq E$*, se define*

$$f(X \mid Y) := f(X, Y) - f(Y) \tag{1-8}$$

$$I(X \wedge Y) := f(X) - f(X \mid Y) \tag{1-9}$$

$$I(X \wedge Y \mid Z) := f(X \mid Z) - f(X \mid Y, Z) \tag{1-10}$$

Proposición 1.3.3. *Si f es un polimatroide, entonces f satisface:*

$$f(\phi) = 0 \tag{1-11}$$

$$f(X) \geq 0 \tag{1-12}$$

$$f(X \mid Y) \geq 0 \tag{1-13}$$

$$I(X \wedge Y) \geq 0 \tag{1-14}$$

$$f(X \mid Z) + f(Y \mid Z) \geq f(X, Y \mid Z) \tag{1-15}$$

$$f(X, Z \mid Y) \geq f(X \mid Y) \geq f(X \mid Y, Z) \tag{1-16}$$

$$I(X \wedge Y) = f(X) + f(Y) - f(X, Y) \tag{1-17}$$

$$I(X \wedge Y \mid Z) = f(X, Z) + f(Y, Z) - f(Z) - f(X, Y, Z) \tag{1-18}$$

$$I(X \wedge (Y, Z)) = I(X \wedge Z) + I(X \wedge Y \mid Z) \tag{1-19}$$

$$I(X \wedge Y \mid Z) \geq 0 \tag{1-20}$$

$$f(X, Z) + f(Y, Z) \geq f(Z) + f(X, Y, Z) \tag{1-21}$$

Demostración. Ver [16]. □

CAPÍTULO 2

FD-relaciones, operadores de clausura y funciones submodulares

En este capítulo se presenta la relación que existe entre las FD-relaciones, los operadores de clausura y las funciones submodulares. En lo que sigue, el conjunto E denotará un conjunto finito y el conjunto unitario $\{a\}$, se denotará por a o su notación usual $\{a\}$.

2.1. FD-relaciones y operadores de clausura

Una observación interesante presentada en [7] y desarrollada en [18], es la biyección que existe entre las FD-relaciones y los operadores de clausura. En la siguiente proposición, se define el operador de clausura de una FD-relación, y la FD-relación de un operador de clausura.

Proposición 2.1.1. *1. Sea $\mathcal{N} \subseteq 2^E \times 2^E$ una FD-relación, el operador*

$$c_{\mathcal{N}}(I) = \bigcup_{(I,J)\in\mathcal{N}} J \tag{2-1}$$

es de clausura.

2. Sea c un operador de clausura sobre E. Entonces,

$$\mathcal{N}_c = \{(I, J) \in 2^E \times 2^E : J \subseteq c(I)\} \tag{2-2}$$

es una FD-relación.

Demostración. 1. Se mostrará que $c_{\mathcal{N}}$ satisface las propiedades de la definición 1.2.1.

(CL1) Como $(I, I) \in \mathcal{N}$, entonces $I \subseteq c_{\mathcal{N}}(I)$.

(CL2) Si $I \subseteq J$ y $x \in c_{\mathcal{N}}(I)$, entonces por $(FD1)$ $(J, I) \in \mathcal{N}$, y por la definición del operador $c_{\mathcal{N}}$, $(I, x) \in \mathcal{N}$. Luego por $(FD2)$, $(J, x) \in \mathcal{N}$, es decir, $x \in c_{\mathcal{N}}(J)$.

(CL3) Se mostrará ahora que, $c_{\mathcal{N}}(I) = c_{\mathcal{N}}(c_{\mathcal{N}}(I))$.

$\supseteq$) Si $x \in c_{\mathcal{N}}(c_{\mathcal{N}}(I))$, entonces $(c_{\mathcal{N}}(I), x) \in \mathcal{N}$. Ahora, como $c_{\mathcal{N}}(I) \subseteq c_{\mathcal{N}}(I)$ por $(FD1)$ se tendrá que $(I, c_{\mathcal{N}}(I)) \in \mathcal{N}$, entonces $(I, x) \in \mathcal{N}$ por $(FD2)$, es decir, $x \in c_{\mathcal{N}}(I)$.

$\subseteq$) La contenencia se sigue directamente de $(CL1)$ y $(CL2)$.

2. Se mostrará que $\mathcal{N}_c$ satisface las propiedades de la definición 1.1.1.

(FD1) Si $J \subseteq I$, entonces $J \subseteq c(I)$, es decir $(I, J) \in \mathcal{N}_c$.

(FD2) Si $(I, J), (J, K) \in \mathcal{N}_c$, entonces $J \subseteq c(I)$ y $K \subseteq c(J)$, por $(CL2)$ y $(CL3)$ se tiene que, $c(J) \subseteq c(c(I)) = c(I)$, así $K \subseteq c(I)$, es decir $(I, K) \in \mathcal{N}_c$.

(FD3) Si $(I, J), (I, K) \in \mathcal{N}_c$, entonces $J \subseteq c(I)$ y $K \subseteq c(I)$, luego $J \cup K \in c(I)$, de donde $(I, J \cup K) \in \mathcal{N}_c$.

□

Notación 2.1.1. *Se notará por $c_{\mathcal{N}}$, al operador de clausura definido por la FD-relación $\mathcal{N}$. $\mathcal{N}_c$ denotará, la FD-relación que determina el operador de clausura c y $\mathcal{N}_{c_{\mathcal{N}}}$ la FD-relación que determina el operador de clausura $c_{\mathcal{N}}$. $c_{\mathcal{N}_c}$ denotará el operador de clausura que define la FD-relación $\mathcal{N}_c$.*

Ejemplo 2.1.1. *Sean $E = \{a, b, c\}$ y la FD-relación con soporte E definida por:*

$$\begin{aligned}\mathcal{N} = \mathcal{N}_E \cup \{&(\{a\}, \{c\}), (\{a\}, \{a, c\}), (\{b\}, \{c\}), (\{b\}, \{b, c\}), (\{a, b\}, \{c\}),\\ &(\{a, b\}, \{b, c\}), (\{a, b\}, \{a, c\}), (\{a, b\}, \{a, b, c\})\}.\end{aligned}$$

Entonces, el operador de clausura $c_{\mathcal{N}}$ está determinado por:

$$\begin{aligned} c_{\mathcal{N}} : 2^E &\to 2^E \\ \phi &\mapsto \phi \\ \{a\} &\mapsto \{a, c\} \\ \{b\} &\mapsto \{b, c\} \\ \{c\} &\mapsto \{c\} \\ \{a, b\} &\mapsto \{a, b, c\} \\ \{a, c\} &\mapsto \{a, c\} \\ \{b, c\} &\mapsto \{b, c\} \\ \{a, b, c\} &\mapsto \{a, b, c\} \end{aligned}$$

Note que en el ejemplo anterior, la FD-relación $\mathcal{N}_{c_{\mathcal{N}}}$ coincide con la FD-relación inicial. La siguiente proposición muestra que para toda FD-relación $\mathcal{N}$ se cumple la igualdad $\mathcal{N}_{c_{\mathcal{N}}} = \mathcal{N}$, y que para todo operador de clausura c, se satisface la igualdad $c = c_{\mathcal{N}_c}$.

Proposición 2.1.2. *1. Si $\mathcal{N}$ es una FD-relación, entonces $\mathcal{N} = \mathcal{N}_{c_{\mathcal{N}}}$.*

2. Si c es un operador de clausura, entonces $c = c_{\mathcal{N}_c}$.

Demostración. 1. Sea $\mathcal{N}$ una FD-relación con soporte E.

$$(I, J) \in \mathcal{N} \Leftrightarrow J \in c_{\mathcal{N}}(I) \Leftrightarrow (I, J) \in \mathcal{N}_{c_{\mathcal{N}}}.$$

2. Sea c un operador de clausura definido sobre 2^E.

$$x \in c(I) \Leftrightarrow (I, x) \in \mathcal{N}_c \Leftrightarrow x \in c_{\mathcal{N}_c}.$$

□

De este modo, cualquier resultado que se presente desde el punto de vista de las FD-relaciones, tiene su equivalente en términos de operadores de clausura y viceversa.

2.2. FD-relaciones, operadores de clausura y funciones submodulares

En la siguientes proposiciones, se mostrará cómo definir FD-relaciones u operadores de clausura a partir de funciones submodulares no decrecientes. Además, se construirá una función submodular no decreciente, a valor entero, asociada a una FD-relación (operador de clausura) específica.
Puesto que no existe una biyección entre las FD-relaciones (operadores de clausura) y las funciones submodulares no decrecientes, se definirá una partición sobre el conjunto de funciones submodulares no decrecientes.

Proposición 2.2.1. *1. Sea f una función submodular no decreciente sobre un conjunto E. Entonces, el conjunto*

$$\mathcal{N}_f = \{(I, J) \in 2^E \times 2^E : f(I) = f(I \cup J)\} \tag{2-3}$$

es una FD-relación.

2. Sea f una función submodular no decreciente sobre un conjunto E. Entonces, el conjunto

$$c_f(I) = \{x \in E : f(I) = f(I \cup x)\} \tag{2-4}$$

es un operador de clausura.

Para la demostración de la proposición 2.2.1, se utilizará el siguiente lema, el cual surge como una generalización de un resultado de la teoría de matroides.

Lema 2.2.1. *Si $f : 2^E \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función submodular, no decreciente, y $X, Y \subseteq E$ tal que para todo $y \in Y - X$, $f(X \cup y) = f(X)$, entonces $f(X \cup Y) = f(X)$.*

Demostración. La demostración se realiza mediante inducción sobre el número de elementos en $Y - X$. Si $|Y - X| = 1$ no hay nada que probar. Supongamos que la afirmación es cierta para todo $X, Y \subseteq E$, con $|Y - X| = n - 1$, $n \geq 2$. Sea $Y - X = \{y_1, y_2, \ldots, y_n\}$, entonces por hipótesis de inducción

$$f(X) + f(X) = f(X \cup \{y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}\}) + f(X \cup y_n), \tag{2-5}$$

luego por ser f una función submodular no decreciente

$$f(X \cup \{y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}\}) + f(X \cup y_n) \geq f(X \cup Y) + f(X) \geq 2f(X). \tag{2-6}$$

Es decir, $f(X \cup Y) = f(X)$. □

Se demuestra a continuación la proposición 2.2.1.

Demostración. 1. Se mostrará que $\mathcal{N}_f$ satisface las propiedades de la definición 1.1.1.

(FD1) Sean $J \subseteq I \subseteq E$, entonces $f(I) = f(I \cup J)$, luego $(I, J) \in \mathcal{N}_f$.

(FD2) Si $(I, J), (J, K) \in \mathcal{N}_f$, entonces $f(I) = f(I \cup J)$ y $f(J) = f(J \cup K)$, aplicando la submodularidad y el no decrecimiento de la función f;

$$f(I \cup J) + f(J \cup K) \geq f(I \cup J \cup K) + f(J \cup (I \cap K)) \geq f(I \cup K) + f(J),$$

es decir,

$$f(I) + f(J) = f(I \cup J) + f(J \cup K) \geq f(I \cup K) + f(J),$$

de donde $f(I) \geq f(I \cup K)$ y como f es no decreciente $f(I) = f(I \cup K)$, luego $(I, K) \in \mathcal{N}_f$.

(FD3) Si $(I, J), (I, K) \in \mathcal{N}_f$, entonces $f(I) = f(I \cup J) = f(I \cup K)$, de donde por la submodularidad y el no decrecimiento de la función f,

$$\begin{aligned} f(I) + f(I) &= f(I \cup J) + f(I \cup K) \\ &\geq f(I \cup J \cup K) + f(I \cup (J \cap K)) \\ &\geq f(J \cup K) + f(I). \end{aligned}$$

Así, $f(I) = f(J \cup K)$ y $(I, J \cup K) \in \mathcal{N}_f$.

2. Veamos que c_f satisface las propiedades de la definición 1.2.1.

(CL1) Se sigue directamente de la definición del operador c_f.

(CL2) Supongamos que $I \subseteq J$ y sea $x \in c_f(I)$. Entonces

$$f(I) = f(I \cup x),$$

por la submodularidad de la función f,

$$f(I \cup J) + f(I \cup x) \geq f(I \cup J \cup x) + f(I \cup (J \cap x)) \geq f(J \cup x) + f(I).$$

Por lo tanto,

$$f(J) + f(I) \geq f(J \cup x) + f(I)$$

de aquí

$$f(J) \geq f(J \cup x).$$

Pero por el no decrecimiento de la función f,

$$f(J \cup x) \geq f(J)$$

de donde $f(J \cup x) = f(J)$ y por lo tanto $x \in c_f(J)$, luego $c_f(I) \subseteq c_f(J)$.

(CL3) Se mostrará que $c_f(I) = c_f(c_f(I))$.

$\supseteq$) Sea $x \in c_f(c_f(I))$, esto es $f(c_f(I)) = f(c_f(I) \cup x))$. Entonces, por el lema 2.2.1 y la definición de c_f, $f(c_f(I) \cup x) = f(I)$, pero por ser f no decreciente, $f(c_f(I) \cup x) \geq f(I \cup x) \geq f(I)$, es decir, $f(I) = f(I \cup x)$ y $x \in c_f(I)$.

$\subseteq$) Se sigue directamente de $(CL1)$ y $(CL2)$.

□

Ahora, dada una FD-relación $\mathcal{N}$, (o un operador de clausura c), nos preguntamos si existe una, ninguna o varias funciones submodulares que la definan, es decir tal que $\mathcal{N} = \mathcal{N}_f$, $(c = c_f)$. En lo que sigue, las proposiciones estarán enunciadas para FD-relaciones, recordando que éstas tendrán un único operador de clausura que las define.
La siguiente proposición muestra la existencia de una función submodular, no decreciente, a valor entero, que define una FD-relación dada.

Proposición 2.2.2. *Para cada FD-relación $\mathcal{N}$, existe por lo menos una función submodular f, no decreciente a valor entero, tal que $\mathcal{N} = \mathcal{N}_f$.*

Demostración. Para mostrar que la proposición es válida, se construye una función $f_{\mathbb{Z}}$, submodular, no decreciente a valor entero y se muestra que $\mathcal{N} = \mathcal{N}_{f_{\mathbb{Z}}}$.

Sea $\mathcal{N}$ una FD-relación con soporte E, consideremos el conjunto

$$\mathcal{C} = \{I \in 2^E : c_{\mathcal{N}}(I) = \bigcup_{(I,J) \in \mathcal{N}} J = I\}, \tag{2-7}$$

y definamos para todo $I \subseteq E$, y cada $J \in \mathcal{C}$, la función

$$\begin{aligned} q_J : 2^E &\to \mathbb{Z} \\ I &\mapsto q_J(I) = q_\phi(I - J), \end{aligned} \tag{2-8}$$

donde

$$\begin{aligned} q_\phi : 2^E &\to \mathbb{Z} \\ I &\mapsto q_\phi(I) = \begin{cases} 0, & \text{si } I = \phi, \\ 1, & \text{si } I \neq \phi. \end{cases} \end{aligned} \tag{2-9}$$

Note que la función q_J es submodular, pues si $A, B \subseteq E$

1. Si $A - J = \phi$ y $B - J = \phi$, entonces $(A \cup B) - J = \phi$, $(A \cap B) - J = \phi$ luego

$$q_J(A) + q_J(B) = q_J(A \cup B) + q_J(A \cap B) = 0.$$

2. Si $A - J = \phi$ y $B - J \neq \phi$, entonces $(A \cup B) - J \neq \phi$, $(A \cap B) - J = \phi$ luego

$$q_J(A) + q_J(B) = q_J(A \cup B) + q_J(A \cap B) = 1.$$

3. Si $A - J \neq \phi$ y $B - J \neq \phi$, entonces $(A \cup B) - J \neq \phi$, $(A \cap B) - J \supseteq \phi$ luego

$$2 = q_J(A) + q_J(B) \geq q_J(A \cup B) + q_J(A \cap B).$$

Además, la función q_J es no decreciente, si $A \subseteq B \subseteq E$, entonces $q_J(A) \leq q_J(B)$, pues $A - J \subseteq B - J$.

Por último, se define la función,

$$\begin{aligned} f_{\mathbb{Z}} : 2^E &\to \mathbb{Z} \\ I &\mapsto f_{\mathbb{Z}}(I) = \sum_{J \in \mathcal{C}} q_J(I). \end{aligned} \tag{2-10}$$

La función $f_{\mathbb{Z}}$ es submodular no decreciente, debido a que es suma de funciones submodulares no decrecientes.
A continuación, se mostrará que $\mathcal{N} = \mathcal{N}_{f_{\mathbb{Z}}}$.

$\subseteq$) Sea $(I, K) \in \mathcal{N}$, entonces por la proposición 2.1.1, $K \subseteq c_{\mathcal{N}}(I)$. Veamos que $q_J(I) = q_J(I \cup K)$, para cada $J \in \mathcal{C}$

1. si $q_J(I) = 1$, entonces $q_\phi(I - J) = 1$, es decir, $I - J \neq \phi$, luego $(I \cup K) - J \neq \phi$ y $q_\phi((I \cup K) - J) = 1$, de donde $q_J(I \cup K) = 1$.

2. Si $q_J(I) = 0$, entonces $I - J = \phi$, es decir, $I \subseteq J$ luego, $c_{\mathcal{N}}(I) - J = \phi$ (pues si $x \in c_{\mathcal{N}}(I) - J$, entonces $(I, x) \in \mathcal{N}$ y como $I \subseteq J$, $(J, I) \in \mathcal{N}$, luego por $(FD2)$, $(J, x) \in \mathcal{N}$, de donde $x \in c_{\mathcal{N}}(J) = J$ contradiciendo $x \in c_{\mathcal{N}}(I) - J$), y como $K \subseteq c_{\mathcal{N}}(I)$ se tiene que $K - J = \phi$, esto es $q_J(K) = 0$. Como $I - J = \phi$, entonces $q_J(I \cup K) = q_J(I) = 0$.

Ahora,

$$\begin{aligned} f_{\mathbb{Z}}(I) &= \sum_{J \in \mathcal{C}} q_J(I) \\ &= \sum_{J \in \mathcal{C}} q_J(I \cup K) \\ &= f_{\mathbb{Z}}(I \cup K). \end{aligned} \tag{2-11}$$

Luego por la proposición 2.2.1. $(I, K) \in \mathcal{N}_{f_{\mathbb{Z}}}$.

$\supseteq$) Sea $(I, K) \in \mathcal{N}_{f_{\mathbb{Z}}}$, entonces $f_{\mathbb{Z}}(I) = f_{\mathbb{Z}}(I \cup K)$, esto es $\sum_{J \in \mathcal{C}} q_J(I) = \sum_{J \in \mathcal{C}} q_J(I \cup K)$. Veamos que $q_J(I) = q_J(I \cup K)$ para todo $J \in \mathcal{C}$. Supongamos que para algún $J \in \mathcal{C}$, $q_J(I) = 0$ y $q_J(I \cup K) = 1$, como $f_{\mathbb{Z}}(I) = f_{\mathbb{Z}}(I \cup K)$, deberá existir J' tal que $q_{J'}(I) = 1$ y $q_{J'}(I \cup K) = 0$, es decir $I - J' \neq \phi$, de donde $(I \cup K) - J' \neq \phi$, de aquí $q_{J'}(I \cup K) = 1 \neq 0$. Entonces, $q_J(I) = q_J(I \cup K)$ para todo $J \in \mathcal{C}$.

Veamos ahora que, $(I, K) \in \mathcal{N}$. Si $I \subseteq E$, se tiene que $I \in \mathcal{C}$ o $I \notin \mathcal{C}$;

1. Si $I \in \mathcal{C}$ entonces, $q_I(I) = q_I(I \cup K) = 0$, de donde $(I \cup K) - I = K - I = \phi$, luego $K \subseteq I$, así por $(FD1)$, $(I, K) \in \mathcal{N}$
2. Si $I \notin \mathcal{C}$ entonces, $c_{\mathcal{N}}(I) \in \mathcal{C}$, luego $q_{c_{\mathcal{N}}(I)}(I) = q_{c_{\mathcal{N}}(I)}(I \cup K) = 0$, de donde $(I \cup K) - c_{\mathcal{N}}(I) = K - c_{\mathcal{N}}(I) = \phi$, así $K \subseteq c_{\mathcal{N}}(I)$ y $(I, K) \in \mathcal{N}$.

□

De este modo, se mostró que para una FD-relación $\mathcal{N}$ es posible definir una función submodular no decreciente a valor entero $f_{\mathbb{Z}}$, tal que $\mathcal{N} = \mathcal{N}_{f_{\mathbb{Z}}}$.

En el siguiente ejemplo, se mostrará que la función submodular $f_{\mathbb{Z}}$ no es única.

Ejemplo 2.2.1. *Sean $E = \{a, b, c\}$ y la FD-relación*

$$\mathcal{N} = \mathcal{N}_E \cup \{(\{a\}, \{c\})(\{a\}, \{a, c\})(\{a, b\}, \{c\}), (\{a, b\}, \{a, c\}), (\{a, b\}, \{b, c\}), (\{a, b\}, \{a, b, c\})\}.$$

Inicialmente se determinará la función submodular, no decreciente $f_{\mathbb{Z}}$ definida en la demostración de la proposición 2.2.2. Para ello, se considera el conjunto

$$\mathcal{C} = \{I \in 2^E : c_{\mathcal{N}}(I) = \bigcup_{(I,J) \in \mathcal{N}} J = I\} = \{\phi, \{b\}, \{c\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}. \tag{2-12}$$

Así la función $f_{\mathbb{Z}}$, $(2-10)$, está determinada por:

$$
\begin{aligned}
f_{\mathbb{Z}}(\phi) &= q_{\phi}(\phi) + q_{\{b\}}(\phi) + q_{\{c\}}(\phi) + q_{\{a,c\}}(\phi) + q_{\{b,c\}}(\phi) + q_{\{a,b,c\}}(\phi) \\
&= 0 \\
f_{\mathbb{Z}}(\{a\}) &= q_{\phi}(\{a\}) + q_{\{b\}}(\{a\}) + q_{\{c\}}(\{a\}) + q_{\{a,c\}}(\{a\}) + q_{\{b,c\}}(\{a\}) + q_{\{a,b,c\}}(\{a\}) \\
&= 4 \\
f_{\mathbb{Z}}(\{b\}) &= q_{\phi}(\{b\}) + q_{\{b\}}(\{b\}) + q_{\{c\}}(\{b\}) + q_{\{a,c\}}(\{b\}) + q_{\{b,c\}}(\{b\}) + q_{\{a,b,c\}}(\{b\}) \\
&= 3 \\
f_{\mathbb{Z}}(\{c\}) &= q_{\phi}(\{c\}) + q_{\{b\}}(\{c\}) + q_{\{c\}}(\{c\}) + q_{\{a,c\}}(\{c\}) + q_{\{b,c\}}(\{c\}) + q_{\{a,b,c\}}(\{c\}) \\
&= 2 \\
f_{\mathbb{Z}}(\{a,b\}) &= q_{\phi}(\{a,b\}) + q_{\{b\}}(\{a,b\}) + q_{\{c\}}(\{a,b\}) + q_{\{a,c\}}(\{a,b\}) + q_{\{b,c\}}(\{a,b\}) + \\
&\quad q_{\{a,b,c\}}(\{a,b\}) = 5 \\
f_{\mathbb{Z}}(\{a,c\}) &= q_{\phi}(\{a,c\}) + q_{\{b\}}(\{a,c\}) + q_{\{c\}}(\{a,c\}) + q_{\{a,c\}}(\{a,c\}) + q_{\{b,c\}}(\{a,c\}) + \\
&\quad q_{\{a,b,c\}}(\{a,c\}) = 4 \\
f_{\mathbb{Z}}(\{b,c\}) &= q_{\phi}(\{b,c\}) + q_{\{b\}}(\{b,c\}) + q_{\{c\}}(\{b,c\}) + q_{\{a,c\}}(\{b,c\}) + q_{\{b,c\}}(\{b,c\}) + \\
&\quad q_{\{a,b,c\}}(\{b,c\}) = 4 \\
f_{\mathbb{Z}}(\{a,b,c\}) &= q_{\phi}(\{a,b,c\}) + q_{\{b\}}(\{a,b,c\}) + q_{\{c\}}(\{a,b,c\}) + q_{\{a,c\}}(\{a,b,c\}) + q_{\{b,c\}}(\{a,b,c\}) + \\
&\quad q_{\{a,b,c\}}(\{a,b,c\}) = 5.
\end{aligned}
$$

Consideremos ahora la función submodular

$$
\begin{aligned}
f : 2^E &\to \mathbb{R} \\
\phi &\mapsto 0 \\
\{a\} &\mapsto \ln 62 - \frac{16}{62}\ln 2 \\
\{b\} &\mapsto \ln 62 - \frac{20}{62}\ln 2 \\
\{c\} &\mapsto \ln 62 - \frac{36}{62}\ln 2 \\
\{a,b\} &\mapsto \ln 62 \\
\{a,c\} &\mapsto \ln 62 - \frac{16}{62}\ln 2 \\
\{b,c\} &\mapsto \ln 62 - \frac{8}{62}\ln 2 \\
\{a,b,c\} &\mapsto \ln 62.
\end{aligned}
$$

Aplicando la proposición 2.2.1, se puede mostrar que la FD-relación $\mathcal{N}_f$ definida a partir de f, coincide con la FD-relación $\mathcal{N}$.

De este modo, tenemos dos funciones submodulares, no decrecientes que definen la misma FD-relación, en las siguientes definiciones y proposiciones se muestra que el número de funciones submodulares que definen la misma FD-relación no es finito.

Definición 2.2.1. *Dada una FD-relación $\mathcal{N}$, se define $\lambda(\mathcal{N})$, como el subconjunto de funciones submodulares no decrecientes tales que $\mathcal{N}_f = \mathcal{N}$,*

$$\lambda(\mathcal{N}) = \{f : \mathcal{N}_f = \mathcal{N}\}. \tag{2-13}$$

Note que la anterior forma de definir $\lambda(\mathcal{N})$, permite construir una partición sobre el conjunto de funciones submodulares no decrecientes, mediante la siguiente relación de equivalencia. Sean f y g funciones submodulares no decrecientes, entonces f está relacionado con g, $(f \simeq g)$, si y sólo si, $\mathcal{N}_f = \mathcal{N}_g$.

Proposición 2.2.3. *Sean $\mathcal{N}$ una FD-relación y $f \in \lambda(\mathcal{N})$. Si α es un número real positivo, entonces $f + \alpha$ y αf son funciones submodulares no decrecientes en $\lambda(\mathcal{N})$.*

Demostración. Sean $\mathcal{N}$ una FD-relación, $f \in \lambda(\mathcal{N})$ e $(I, J) \in \mathcal{N}_f$, es decir, $f(I) = f(I \cup J)$, de donde $f(I) + \alpha = f(I \cup J) + \alpha$, luego $\mathcal{N}_{f+\alpha} = \mathcal{N}_f$. Además, $\alpha f(I) = \alpha f(I \cup J)$ para $\alpha > 0$, entonces $\mathcal{N}_{\alpha f} = \mathcal{N}_f$. □

De la anterior proposición se puede concluir que el conjunto $\lambda(\mathcal{N})$ es invariante bajo traslaciones y dilataciones o contracciones.

Proposición 2.2.4. *El conjunto $\lambda(\mathcal{N})$ es cerrado bajo la suma usual entre funciones.*

Demostración. Sean $\mathcal{N}$ una FD-relación con soporte E, y f, g funciones en $\lambda(\mathcal{N})$, si $(I, J) \in \mathcal{N}$, entonces $f(I) = f(I \cup J)$ y $g(I) = g(I \cup J)$, de donde $(f + g)(I) = (f + g)(I \cup J)$, es decir $\mathcal{N} = \mathcal{N}_{f+g}$.

□

CAPÍTULO 3

Espacios topológicos finitos desde las FD-relaciones y las funciones submodulares

En este capítulo se dan propiedades que deben cumplir las FD-relaciones y las funciones submodulares para que los operadores de clausura c_f y $c_{\mathcal{N}}$, definan un espacio topológico finito. Además, se caracterizan algunos conceptos y propiedades de los espacios topológicos finitos en términos de las FD-relaciones y las funciones submodulares.

En los resultados que se presentan en este capítulo, se utilizan frecuentemente las proposiciones 2.1.1 y 2.2.1, las cuales relacionan las FD-relaciones, los operadores de clausura y las funciones submodulares. Además, E denotará un conjunto finito, c_τ el operador de clausura del espacio topológico (E, τ) y $\mathcal{N}_\tau$, la FD-relación que se obtiene a partir del operador de clausura c_τ, es decir, $\mathcal{N}_\tau = \mathcal{N}_{c_\tau}$.

3.1. Espacios topológicos finitos

Los operadores de clausura definen una gran variedad de estructuras matemáticas [Ver [18]], entre éstas se encuentran los espacios topológicos. Un operador de clausura c, que define un espacio topológico (E, τ), satisface las propiedades adicionales:

(CT4) $c(\phi) = \phi$,

(CT5) $c(\bigcup_{k=1}^{n} I_k) = \bigcup_{k=1}^{n} c(I_k)$.

En esta sección se extienden las propiedades $(CT4)$ y $(CT5)$ en términos de las funciones submodulares y las FD-relaciones. Esta interpretación permite plantear puentes entre la topología y un tipo especial de funciones submodulares llamadas polimatroides.

Proposición 3.1.1. *La FD-relación $\mathcal{N}_\tau$ con soporte E, satisface las propiedades adicionales:*

(FD4) *Si $(\phi, J) \in \mathcal{N}_\tau$ para algún $J \subseteq E$, entonces $J = \phi$,*

(FD5) *Si $(\bigcup_{k=1}^n I_k, J) \in \mathcal{N}_\tau$, entonces existe una colección $\{J_k\}_{k=1,\ldots,n}$ tal que, $J = \bigcup_{k=1}^n J_k$ con $(I_k, J_k) \in \mathcal{N}_\tau$ para todo $k = 1, \ldots, n$.*

Además, si una FD-relación $\mathcal{N}$ satisface $(FD4)$ y $(FD5)$, entonces el operador de clausura $c_\mathcal{N}$ satisface $(CT4)$ y $(CT5)$, es decir, $c_\mathcal{N}$ es el operador de clausura de una topología.

Demostración. Sea $\mathcal{N}_\tau$ la FD-relación con soporte E y $c_\tau = c_{\mathcal{N}_\tau}$ el operador de clausura de la topología τ. Se mostrará que $\mathcal{N}_\tau$ satisface $(FD4)$ y $(FD5)$.

(FD4) Si $(\phi, J) \in \mathcal{N}_\tau$, por la proposición 2.1.1, y la propiedad $(CT4)$,

$$J \subseteq c_{\mathcal{N}_\tau}(\phi) = \phi. \tag{3-1}$$

(FD5) Si $(\bigcup_{k=1}^n I_k, J) \in \mathcal{N}_\tau$, entonces por la proposición 2.1.1, y la propiedad $(CT5)$, $J \subseteq c_\tau\left(\bigcup_{k=1}^n I_k\right) = \bigcup_{k=1}^n c_\tau(I_k)$, luego existen conjuntos J_k, $k = 1, 2, \ldots, n$, tales que $J = \bigcup_{k=1}^n J_k$ y $J_k \subseteq c(I_k)$, es decir, $(I_k, J_k) \in \mathcal{N}_\tau$.

Por último se mostrará, que si la FD-relación $\mathcal{N}$ satisface $(FD4)$ y $(FD5)$, entonces $c_\mathcal{N}$ satisface $(CT4)$ y $(CT5)$.

(CT4) Se sigue de la propiedad $(FD4)$, $c_\mathcal{N}(\phi) = \bigcup_{(\phi,J)\in\mathcal{N}} J = \phi$.

(CT5) Veamos que $c_\mathcal{N}\left(\bigcup_{k=1}^n I_k\right) = \bigcup_{k=1}^n c_\mathcal{N}(I_k)$

$\subseteq$) Sea $x \in c_\mathcal{N}\left(\bigcup_{k=1}^n I_k\right)$, entonces por la proposición 2.1.1, $(\bigcup_{k=1}^n I_k, x) \in \mathcal{N}_{c_\mathcal{N}} = \mathcal{N}$, luego por la propiedad $(FD5)$, $(I_k, x) \in \mathcal{N}$ para algún $k = 1, \ldots, n$, así $x \in c_\mathcal{N}(I_k)$ y por consiguiente $x \in \bigcup_{k=1}^n c_\mathcal{N}(I_k)$.

$\supseteq$) Como $I_k \subseteq \bigcup_{k=1}^n I_k$, entonces por la propiedad de monotonía para operadores de clausura, $c_\mathcal{N}(I_k) \subseteq c_\mathcal{N}\left(\bigcup_{k=1}^n I_k\right)$, luego $\bigcup_{k=1}^n c_\mathcal{N}(I_k) \subseteq c_\mathcal{N}\left(\bigcup_{k=1}^n I_k\right)$.

□

Proposición 3.1.2. *Si f es una función submodular no decreciente en $\lambda(\mathcal{N}_\tau)$, entonces f satisface las siguientes condiciones:*

(T4) *Si $J \subseteq E$ y $f(\phi) = f(J)$, entonces $J = \phi$.*

(T5) *Si $f\left(\bigcup_{k=1}^n I_k\right) = f\left(\bigcup_{k=1}^n I_k \cup J\right)$, entonces existe una colección $\{J_k\}_{k=1,\ldots,n}$ tal que, $J = \bigcup_{k=1,\ldots,n} J_k$ con $f(I_k) = f(I_k \cup J_k)$ para todo $k = 1, \ldots n$.*

Además, si una función submodular no decreciente f satisface $(T4)$ y $(T5)$, entonces el operador de clausura c_f satisface $(CT4)$ y $(CT5)$, es decir, c_f es el operador de clausura de una topología.

Demostración. Sean $\mathcal{N}_\tau$ una FD-relación con soporte E y $f \in \lambda(\mathcal{N}_\tau)$. Se mostrara que f satisface las propiedades $(T4)$ y $(T5)$.

(T4) Supongamos que $f(\phi) = f(J)$, para algún $J \subseteq E$. Por la proposición 2.2.1, $(\phi, J) \in \mathcal{N}_\tau$. Entonces, por la propiedad $(FD4)$ de la proposición 3.1.1, $J = \phi$.

(T5) Si $f\left(\bigcup_{k=1}^{n} I_k\right) = f\left(\bigcup_{k=1}^{n} I_k \cup J\right)$, entonces por la proposición 2.2.1, $\left(\bigcup_{k=1}^{n} I_k, J\right) \in \mathcal{N}_\tau$, y por la propiedad $(FD5)$ de la proposición 3.1.1, existe una colección $\{J_k\}_{k=1,\ldots,n}$ tal que, $J = \bigcup_{k=1}^{n} J_k$ con $(I_k, J_k) \in \mathcal{N}_\tau$, luego como $f \in \lambda(\mathcal{N}_\tau)$ se sigue que $f(I_k) = f(I_k \cup J_k)$, para todo $k = 1, \ldots, n$.

Por último, se mostrará que si la función submodular f satisface $(T4)$ y $(T5)$, entonces el operador de clausura $c_{\mathcal{N}_f}$ satisface $(CT4)$ y $(CT5)$.

(CT4) Se sigue directamente de la proposición 2.2.1 y la propiedad $(T4)$.

(CT5) Veamos ahora que $c_{\mathcal{N}_f}\left(\bigcup_{k=1}^{n} I_k\right) = \bigcup_{k=1}^{n} c_{\mathcal{N}_f}(I_k)$.

$\subseteq$) Sea $x \in c_{\mathcal{N}_f}\left(\bigcup_{k=1}^{n} I_k\right)$. Por la proposición 2.2.1, $f\left(\bigcup_{k=1}^{n} I_k\right) = f\left(\bigcup_{k=1}^{n} I_k \cup x\right)$, entonces por $(T5)$, $f(I_k) = f(I_k \cup x)$ para algún $k = 1, \ldots, n$, así $x \in c_{\mathcal{N}_f}(I_k)$, es decir, $x \in \bigcup_{k=1}^{n} c_{\mathcal{N}_f}(I_k)$.

$\supseteq$) Se sigue de la propiedad de monotonía para los operadores de clausura y $c_{\mathcal{N}_f}$ es un operador de clausura.

$\square$

Ejemplo 3.1.1. *Consideremos la siguiente función f a valor entero, definida sobre el conjunto $E = \{a, b, c\}$,*

$$
\begin{aligned}
f : 2^E &\to \mathbb{Z} \\
\phi &\mapsto 0 \\
\{a\} &\mapsto 2 \\
\{b\} &\mapsto 3 \\
\{c\} &\mapsto 4 \\
\{a, b\} &\mapsto 4 \\
\{a, c\} &\mapsto 4 \\
\{b, c\} &\mapsto 5 \\
\{a, b, c\} &\mapsto 5.
\end{aligned}
$$

La función f es una función submodular no decreciente que satisface $(T4)$ y $(T5)$. El operador de clausura c_f asociado a la función submodular, no decreciente f está determinado por:

$$\begin{aligned} c_f : 2^E &\to 2^E \\ \phi &\mapsto \phi \\ \{a\} &\mapsto \{a\} \\ \{b\} &\mapsto \{b\} \\ \{c\} &\mapsto \{a, c\} \\ \{a, b\} &\mapsto \{a, b\} \\ \{a, c\} &\mapsto \{a, c\} \\ \{b, c\} &\mapsto \{a, b, c\} \\ \{a, b, c\} &\mapsto \{a, b, c\}, \end{aligned}$$

c_f es el operador de clausura de la topología:

$$\tau = \{\phi, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{a, b, c\}\}.$$

De este modo, se mostró que las FD-relaciones y las funciones submodulares que satisfacen ciertas propiedades definen el operador de clausura de un espacio topológico finito.

3.1.1. Algunos conceptos de espacios topológicos finitos

En las siguientes proposiciones, caracterizaremos definiciones y propiedades de los espacios topológicos finitos, mediante FD-relaciones y funciones submodulares.

Proposición 3.1.3. *Sean (E, τ) un espacio topológico, c_τ su operador de clausura, $f \in \lambda(\mathcal{N}_\tau)$ y $F \subseteq E$, las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. *F es un conjunto cerrado.*
2. *$(F, J) \in \mathcal{N}_\tau$, si y sólo si, $J \subseteq F$.*
3. *$f(F) = f(F \cup J)$, si y sólo si, $J \subseteq F$.*

Demostración.

$$\begin{aligned} \text{El conjunto } F \text{ es cerrado} &\Leftrightarrow c_\tau(F) = F \\ &\Leftrightarrow (F, J) \in \mathcal{N}_\tau, \quad \text{para cada } J \subseteq F \\ &\Leftrightarrow f(F) = f(F \cup J), \quad \text{para cada } J \subseteq F. \end{aligned}$$

□

Proposición 3.1.4. *Sean (E, τ) un espacio topológico, c_τ su operador de clausura, $f \in \lambda(\mathcal{N}_\tau)$ y $b \in E$, las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. *b es un punto de acumulación del conjunto A.*

2. *$(A - \{b\}, b) \in \mathcal{N}_\tau$.*

3. *$f(A) = f(A - \{b\})$.*

Demostración.

$$\begin{aligned} b \text{ es un punto de acumulación del conjunto A} &\Leftrightarrow b \in c_\tau(A - \{b\}) \\ &\Leftrightarrow (A - \{b\}, b) \in \mathcal{N}_\tau \\ &\Leftrightarrow f(A) = f(A - \{b\}). \end{aligned}$$

□

Proposición 3.1.5. *Sean, (E, τ) un espacio topológico, c_τ su operador de clausura y $A \subseteq E$, entonces*

$$c_\tau(A) = A \cup A^a. \tag{3-2}$$

Demostración. Sea $x \in c_\tau(A)$. Si $x \in A$, entonces por la propiedad de monotonía en operadores de clausura, $x \in c_\tau(A)$. Si $x \notin A$, $x \in A^a$, entonces $x \in c_\tau(A - x) \subseteq c_\tau(A)$. Luego $c_\tau(A) = A \cup A^a$. □

Proposición 3.1.6. *Sea (E, τ) un espacio topológico, c_τ su operador de clausura, $f \in \lambda(\mathcal{N}_\tau)$ y $A \subseteq E$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. *A es un conjunto cerrado.*

2. *$(A, A^a) \in \mathcal{N}_\tau$.*

3. *$f(A) = f(A \cup A^a)$.*

Demostración.

$$\begin{aligned} A \text{ un conjunto cerrado} &\Leftrightarrow c_\tau(A) = A \\ &\Leftrightarrow A^a \subseteq A \\ &\Leftrightarrow (A, A^a) \in \mathcal{N}_\tau \\ &\Leftrightarrow f(A) = f(A \cup A^a). \end{aligned}$$

□

Proposición 3.1.7. *Sean (E, τ) un espacio topológico, c_τ su operador de clausura, $f \in \lambda(\mathcal{N}_\tau)$, $A \subseteq E$ y $b \in E$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. *b es exterior a A.*
2. *$(A, b) \notin \mathcal{N}_\tau$.*
3. *$f(A) < f(A \cup b)$.*

Demostración.

$$\begin{aligned} b \text{ es un punto exterior del conjunto } A &\Leftrightarrow b \notin c_\tau(A) \\ &\Leftrightarrow (A, b) \notin \mathcal{N}_\tau \\ &\Leftrightarrow f(A) < f(A \cup b). \end{aligned}$$

□

Proposición 3.1.8. *Sean (E, τ) un espacio topológico, c_τ su operador de adherencia, $f \in \lambda(\mathcal{N}_\tau)$ y $A \subseteq E$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. *A es denso.*
2. *$(A, E) \in \mathcal{N}_\tau$.*
3. *$f(A) = f(E)$.*

Demostración.

$$\begin{aligned} A \text{ es un conjunto denso} &\Leftrightarrow c_\tau(A) = E \\ &\Leftrightarrow \text{para } f \in \lambda(\mathcal{N}_\tau),\ f(A) = f(E). \end{aligned}$$

□

Ejemplo 3.1.2. *Consideremos la función f submodular, no decreciente a valor entero, de-*

finida sobre el conjunto $E = \{a, b, c, d\}$*;*

$$
\begin{aligned}
f : 2^E &\to \mathbb{Z}\\
\phi &\mapsto 0\\
\{a\} &\mapsto 4\\
\{b\} &\mapsto 4\\
\{c\} &\mapsto 4\\
\{d\} &\mapsto 4\\
\{a, b\} &\mapsto 6\\
\{a, c\} &\mapsto 6\\
\{a, d\} &\mapsto 6\\
\{b, c\} &\mapsto 6\\
\{b, d\} &\mapsto 6\\
\{c, d\} &\mapsto 4\\
\{a, b, c\} &\mapsto 7\\
\{a, b, d\} &\mapsto 7\\
\{a, c, d\} &\mapsto 6\\
\{b, c, d\} &\mapsto 6\\
\{a, b, c, d\} &\mapsto 7.
\end{aligned}
$$

La función f *satisface las propiedades* $(T4)$ *y* $(T5)$*, es decir* c_f *es el operador de clausura de una topología. Entonces,*

1. *el conjunto* $\{a, d\}$ *no es cerrado, puesto que* $f(\{a, d\}) = f(\{a, c, d\})$*, pero* $\{c\} \nsubseteq \{a, d\}$*.*
2. *El punto* a*, no es un punto de acumulación del conjunto* $\{a, c, d\}$*, debido a que* $f(\{a, c, d\}) \neq f(\{c, d\})$*.*
3. *Los conjuntos densos son* $\{a, b, c\}, \{a, b, d\}, \{a, b, c, d\}$*.*
4. *El punto* c *no es exterior al conjunto* $\{a,b,d\}$*, puesto que* $f(a, b, d) = f(a, b, c, d)$*.*
5. *La colección de conjuntos cerrados es:*

$$\{\phi, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}, \{c, d\}, \{a, c, d\}, \{b, c, d\}, \{a, b, c, d\}\}.$$

3.1.2. Axiomas de separación

A continuación se caracterizan los espacios topológicos T_0, T_1, regular y normal por medio de las FD-relaciones y las funciones submodulares.

Proposición 3.1.9. *1. Sean (E, τ) un espacio topológico, c_τ su operador de clausura, y f una función submodular no decreciente en $\lambda(\mathcal{N}_\tau)$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

  I. *(E, τ) es un espacio topológico T_0.*

  II. *Para todo $x, z \in E$ con $x \neq z$, $x \notin c_\tau(z)$, o, $z \notin c_\tau(x)$.*

  III. *Para todo $x, z \in E$ con $x \neq z$, $(x, z) \notin \mathcal{N}_\tau$, o, $(z, x) \notin \mathcal{N}_\tau$.*

  IV. *Para todo $x, z \in E$ con $x \neq z$, $f(x) < f(x \cup z)$, o, $f(z) < f(x \cup z)$.*

2. Sean (E, τ) un espacio topológico, y f una función submodular no decreciente en $\lambda(\mathcal{N}_\tau)$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

  I. *(E, τ) es un espacio topológico T_1.*

  II. *Para todo $x, z \in E$ con $x \neq z$, $(x, z) \notin \mathcal{N}_\tau$, y, $(z, x) \notin \mathcal{N}_\tau$.*

  III. *Para todo $x, z \in E$ con $x \neq z$, $f(x) < f(x \cup z)$ y $f(z) < f(x \cup z)$.*

3. Sean (E, τ) un espacio topológico, y f una función submodular no decreciente en $\lambda(\mathcal{N}_\tau)$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

  I. *(E, τ) es un espacio topológico regular.*

  II. *Si F es un conjunto cerrado y $x \in E$ tal que $x \notin F$, existen un par de conjuntos U y V disyuntos y abiertos tales que $(V^c, x) \in \mathcal{N}_\tau$ y $(U^c, F) \in \mathcal{N}_\tau$.*

  III. *Si F es un conjunto cerrado y $x \in E$ tal que $x \notin F$, existen un par de conjuntos U y V disyuntos y abiertos tales que $f(V^c) = F(V^c \cup x)$ y $f(U^c) = F(U^c \cup F)$.*

4. Sean (E, τ) un espacio topológico, y f una función submodular no decreciente en $\lambda(\mathcal{N}_\tau)$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

  I. *(E, τ) es un espacio topológico normal.*

  II. *Si $F, G \subseteq E$, son cerrados y disyuntos, existen un par de conjuntos U y V disyuntos y abiertos, tales que $(V^c, F) \in \mathcal{N}_\tau$ y $(U^c, G) \in \mathcal{N}_\tau$.*

  III. *Si $F, G \subseteq E$, son cerrados, existen conjuntos U, V disyuntos y abiertos tal que $f(V^c) = f(V^c \cup F)$ y $f(U^c) = f(U^c \cup G)$.*

Demostración. 1. Sean $x, z \in E$ con $x \neq z$, y (E, τ) un espacio topológico T_0 con operador de clausura c_τ. Entonces, sin pérdida de generalidad existe un conjunto abierto U tal que $x \in U$ y $z \notin U$, si y sólo si,

$$\begin{aligned} z \notin c_\tau(x) &\Leftrightarrow (x, z) \notin \mathcal{N}_\tau \\ &\Leftrightarrow f(x) < f(x \cup z) \\ &\Leftrightarrow z \notin c_f(x) = c_\tau(x). \end{aligned}$$

2. Sean, (E,τ) un espacio topológico T_1 y c_τ su operador de clausura. Entonces, para todo $x, z \in E$ con $x \neq z$, existen conjuntos o vecindades abiertas U_x y V_z tales que $z \notin U_x$ y $x \notin V_z$, si y sólo si,

$$\begin{aligned} z \notin c_\tau(x), \;\; y \;\; x \notin c_\tau(z), \;\; &\Leftrightarrow (x,z) \notin \mathcal{N}_\tau \;\; y \;\; (z,x) \notin \mathcal{N}_\tau \\ &\Leftrightarrow f(x) < f(x \cup z) \;\; y \;\; f(z) < f(x \cup z). \end{aligned}$$

3. Sean, (E,τ) un espacio topológico regular y c_τ su operador de clausura. Entonces, para todo conjunto cerrado $F \subseteq E$ y $x \notin F$, existen un par de conjuntos abiertos y disyuntos U y V que contienen a x y a F respectivamente tales que,

$$\begin{aligned} x \in c_\tau(V^c), \;\; y \;\; F \subseteq c_\tau(U^c), \;\; &\Leftrightarrow (V^c, x) \in \mathcal{N}_\tau, \;\; y, \;\; (U^c, F) \in \mathcal{N}_\tau \\ &\Leftrightarrow f(V^c) = f(V^c \cup x), \;\; y, \;\; f(U^c) = f(U^c \cup F). \end{aligned}$$

4. Sean, (E,τ) un espacio topológico normal y c_τ su operador de clausura. Entonces, para todo par de conjuntos cerrados y disyuntos F y G, existen un par de conjuntos abiertos y disyuntos U y V que contienen a F y G respectivamente tales que;

$$\begin{aligned} F \subseteq V^c, \;\; y \;\; G \subseteq U^c, \;\; &\Leftrightarrow (V^c, F) \in \mathcal{N}_\tau, \;\; y, \;\; (U^c, G) \in \mathcal{N}_\tau \\ &\Leftrightarrow f(V^c) = f(V^c \cup F), \;\; y, \;\; f(U^c) = f(U^c \cup G). \end{aligned}$$

□

Ejemplo 3.1.3. *La función submodular del Ejemplo 3.1.2, define el operador de clausura c_f, de una topología regular.*

3.2. Funciones submodulares a valor entero relacionadas con espacios topológicos finitos

Se ha mostrado que las funciones submodulares que cumplan las propiedades adicionales $(T4)$ y $(T5)$, definen el operador de clausura de una topología. En esta sección se construirán las funciones $f_{\mathbb{Z}}$, f_τ y $\overline{f}$, submodulares, no decrecientes a valor entero, que satisfacen las propiedades $(T4)$ y $(T5)$. Además, se mostrará que para la función submodular $\overline{f}$ se satisface la igualdad $c_\tau = c_{\overline{f}}$ y por lo tanto $f_{\mathbb{Z}}$ y $\overline{f} \in \lambda(\mathcal{N}_\tau)$.

La función $f_{\mathbb{Z}}$, fue construida en la demostración de la Proposición 2.2.2. A continuación se presenta un algoritmo que permite calcular los valores de la función $f_{\mathbb{Z}}$, partiendo de la colección de conjuntos cerrados de un espacio topológico.

Definición 3.2.1. *Sea $c : 2^E \to 2^E$ un operador de clausura. Entonces, la familia*

$$\mathcal{C} = \{I \subseteq E : c(I) = I\} \tag{3-3}$$

se denomina sistema clausura. Note que si c es el operador de clausura de una topología, entonces $\mathcal{C}$ representa la colección de conjuntos de cerrados, en este caso notaremos el sistema clausura $\mathcal{C}$ por $\mathcal{C}_\tau$.

Algorithm 1 Determinar la función submodular, no decreciente a valor entero

$$f_{\mathbb{Z}} : 2^E \to \mathbb{Z}$$

Require: Un conjunto finito E y un sistema clausura $\mathcal{C}_\tau$.
Ensure: Para cada $I \subseteq E$ y cada $J \in \mathcal{C}_\tau$,

$$f_{\mathbb{Z}}(I) = \sum_{J \in C_\tau} q_J(I).$$

for $I \subseteq E$, $J \in \mathcal{C}_\tau$ **do**

$$\begin{aligned} q_J : 2^E &\to \mathbb{Z} \\ I &\to q_J(I) = q_\phi(I - J). \end{aligned}$$

donde $q_\phi : 2^E \to \mathbb{Z}$

$$q_\phi(I - J) = \begin{cases} 0, & \text{si } I - J = \phi, \\ 1, & \text{si } I - J \neq \phi. \end{cases}$$

end for

Note que, si $\mathcal{C}_\tau$ es la colección de conjuntos cerrados del espacio topológico (E, τ), e $I \subseteq E$, entonces: si $J \in \mathcal{C}_\tau$ y $q_J(I) = q_\phi(I - J) = 1$, se deberá tener que $I \nsubseteq J$, de donde claramente

$$f_{\mathbb{Z}}(I) = \sum_{J \in C_\tau} q_J(I),$$

es el número de conjuntos cerrados que no tienen como subconjunto a I

Ejemplo 3.2.1. *Sea $E = \{a, b, c\}$, consideremos el operador de clausura definido sobre E,*

$$\begin{aligned} c_\tau : 2^E &\to 2^E \\ \phi &\mapsto \phi \\ \{a\} &\mapsto \{a\} \\ \{b\} &\mapsto \{b, c\} \\ \{c\} &\mapsto \{b, c\} \\ \{a, b\} &\mapsto \{a, b, c\} \\ \{a, c\} &\mapsto \{a, b, c\} \\ \{b, c\} &\mapsto \{b, c\} \\ \{a, b, c\} &\mapsto \{a, b, c\} \end{aligned}$$

Entonces, la función submodular no decreciente $f_{\mathbb{Z}}$, está definida por;

$$\begin{aligned} f_{\mathbb{Z}}(\phi) &= 0 \\ f_{\mathbb{Z}}(\{a\}) &= q_\phi(\{a\}) + q_a(\{a\}) + q_{bc}(\{a\}) + q_{abc}(\{a\}) \\ &= 2 \\ f_{\mathbb{Z}}(\{b\}) &= q_\phi(\{b\}) + q_a(\{b\}) + q_{bc}(\{b\}) + q_{abc}(\{b\}) \\ &= 2 \\ f_{\mathbb{Z}}(\{c\}) &= q_\phi(\{c\}) + q_a(\{c\}) + q_{bc}(\{c\}) + q_{abc}(\{c\}) \\ &= 2 \\ f_{\mathbb{Z}}(\{a, b\}) &= q_\phi(\{a, b\}) + q_a(\{a, b\}) + q_{bc}(\{a, b\}) + q_{abc}(\{a, b\}) \\ &= 3 \\ f_{\mathbb{Z}}(\{a, c\}) &= q_\phi(\{a, c\}) + q_a(\{a, c\}) + q_{bc}(\{a, c\}) + q_{abc}(\{a, c\}) \\ &= 3 \\ f_{\mathbb{Z}}(\{b, c\}) &= q_\phi(\{b, c\}) + q_a(\{b, c\}) + q_{bc}(\{b, c\}) + q_{abc}(\{b, c\}) \\ &= 2 \\ f_{\mathbb{Z}}(\{a, b, c\}) &= q_\phi(\{a, b, c\}) + q_a(\{a, b, c\}) + q_{bc}(\{a, b, c\}) + q_{abc}(\{a, b, c\}) \\ &= 3 \end{aligned}$$

Siguiendo los lineamientos de la construcción para la función submodular $f_{\mathbb{Z}}$, es válido pensar en una función submodular, que cuente el número de elementos en la topología que no tengan como subconjunto a I, para ello se construirá una función supermodular decreciente, la cual transformaremos en la función submodular deseada.

Definición 3.2.2. *Sea τ una topología definida sobre E, se define*

$$\begin{aligned} f'_{\mathbb{Z}} &: 2^E \to \mathbb{Z} \\ I &\to f'_{\mathbb{Z}}(I) = \sum_{J\in\tau} \overline{q}_J(I). \end{aligned} \tag{3-4}$$

donde

$$\begin{aligned} \overline{q}_J &: 2^E \to \mathbb{Z} \\ I &\mapsto \overline{q}_J(I) = \begin{cases} 0, & si\ I \not\subseteq J, \\ 1, & si\ I \subseteq J. \end{cases} \end{aligned} \tag{3-5}$$

Note que por la forma en que fue construida la función $f'_{\mathbb{Z}}$, el valor $f'_{\mathbb{Z}}(I)$ determina el número de elementos en la topología que tienen como subconjunto a I.

Ejemplo 3.2.2. *Sea $E = \{a, b, c\}$, consideremos la topología τ definida sobre E,*

$$\tau = \{\phi, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\} \tag{3-6}$$

Entonces, la función $f'_{\mathbb{Z}}$, está definida por;

$$\begin{aligned}
f'_{\mathbb{Z}}(\phi) &= \overline{q}_\phi(\{\phi\}) + \overline{q}_a(\{\phi\}) + \overline{q}_b(\{\phi\}) + \overline{q}_{ab}(\{\phi\}) + \overline{q}_{bc}(\{\phi\}) + \overline{q}_{abc}(\{\phi\}) \\
&= 6 \\
f'_{\mathbb{Z}}(\{a\}) &= \overline{q}_\phi(\{a\}) + \overline{q}_a(\{a\}) + \overline{q}_b(\{a\}) + \overline{q}_{ab}(\{a\}) + \overline{q}_{bc}(\{a\}) + \overline{q}_{abc}(\{a\}) \\
&= 3 \\
f'_{\mathbb{Z}}(\{b\}) &= \overline{q}_\phi(\{b\}) + \overline{q}_a(\{b\}) + \overline{q}_b(\{b\}) + \overline{q}_{ab}(\{b\}) + \overline{q}_{bc}(\{b\}) + \overline{q}_{abc}(\{b\}) \\
&= 4 \\
f'_{\mathbb{Z}}(\{c\}) &= \overline{q}_\phi(\{c\}) + \overline{q}_a(\{c\}) + \overline{q}_b(\{c\}) + \overline{q}_{ab}(\{c\}) + \overline{q}_{bc}(\{c\}) + \overline{q}_{abc}(\{c\}) \\
&= 2 \\
f'_{\mathbb{Z}}(\{a, b\}) &= \overline{q}_\phi(\{a, b\}) + \overline{q}_a(\{a, b\}) + \overline{q}_b(\{a, b\}) + \overline{q}_{ab}(\{a, b\}) + \overline{q}_{bc}(\{a, b\}) + \overline{q}_{abc}(\{a, b\}) \\
&= 2 \\
f'_{\mathbb{Z}}(\{a, c\}) &= \overline{q}_\phi(\{a, c\}) + \overline{q}_a(\{a, c\}) + \overline{q}_b(\{a, c\}) + \overline{q}_{ab}(\{a, c\}) + \overline{q}_{bc}(\{a, c\}) + \overline{q}_{abc}(\{a, c\}) \\
&= 1 \\
f'_{\mathbb{Z}}(\{b, c\}) &= \overline{q}_\phi(\{b, c\}) + \overline{q}_a(\{b, c\}) + \overline{q}_b(\{b, c\}) + \overline{q}_{ab}(\{b, c\}) + \overline{q}_{bc}(\{b, c\}) + \overline{q}_{abc}(\{b, c\}) \\
&= 2 \\
f'_{\mathbb{Z}}(\{a, b, c\}) &= \overline{q}_\phi(\{a, b, c\}) + \overline{q}_a(\{a, b, c\}) + \overline{q}_b(\{a, b, c\}) + \overline{q}_{ab}(\{a, b, c\}) + \overline{q}_{bc}(\{a, b, c\}) \\
&\quad + \overline{q}_{abc}(\{a, b, c\}) = 1
\end{aligned}$$

Proposición 3.2.1. *La función $f'_{\mathbb{Z}}$ definida en la definición 3.2.2, es supermodular y decreciente.*

Demostración. Sea (E,τ) un espacio topológico, se mostrará inicialmente que la función $\overline{q}_J$ es supermodular para cada $J\in\tau$. Sean $A,B\subseteq E$:

1. Si $A\subseteq J$ y $B\subseteq J$, entonces $A\cap B\subseteq A\cup B\subseteq J$, luego,
$$2=\overline{q}_J(A)+\overline{q}_J(B)=\overline{q}_J(A\cup B)+\overline{q}_J(A\cap B). \tag{3-7}$$
2. Si $A\subseteq J$ y $B\nsubseteq J$, entonces $A\cup B\nsubseteq J$, y $A\cap B\subseteq A$ luego,
$$1=\overline{q}_J(A)+\overline{q}_J(B)=\overline{q}_J(A\cup B)+\overline{q}_J(A\cap B). \tag{3-8}$$
3. Si $A\nsubseteq J$ y $B\nsubseteq J$, entonces $A\cup B\nsubseteq J$, y $A\cap B$ podría ser un subconjunto de J, luego
$$0=\overline{q}_J(A)+\overline{q}_J(B)\leq\overline{q}_J(A\cup B)+\overline{q}_J(A\cap B)\leq 1. \tag{3-9}$$

De aquí, la función $\overline{q}_J$ es supermodular y por consiguiente la función $f'_{\mathbb{Z}}$ también lo es pues es suma de funciones supermodulares, las cuales determinan un cono convexo.

Ahora, si $A\subseteq B\subseteq E$ entonces, $\overline{q}_J(B)\leq\overline{q}_J(A)$ para todo $J\in\tau$, y por consiguiente, la función $f'_{\mathbb{Z}}$ es decreciente. □

Note que la función $f'_{\mathbb{Z}}$ alcanza su máximo valor en $f'_{\mathbb{Z}}(\phi)$, este hecho y la proposición 3.2.1, nos permite definir la siguiente función

$$\begin{aligned} f_\tau : 2^E &\to \mathbb{Z} \\ I &\to f_\tau(I)=f'_{\mathbb{Z}}(\phi)-f'_{\mathbb{Z}}(I). \end{aligned} \tag{3-10}$$

la cual resulta ser submodular y no decreciente. Además, el valor $f_\tau(I)$ determina el número de elementos en la topología que no tienen como subconjunto a I.

Ejemplo 3.2.3. *Sea $E=\{a,b,c\}$ y la topología τ definida sobre E:*

$$\tau=\{\phi,\{a\},\{b\},\{a,b\},\{b,c\},\{a,b,c\}\}.$$

La función f_τ está determinada por:

$$\begin{aligned} f_\tau(\phi)&=0\\ f_\tau(\{a\})&=3\\ f_\tau(\{b\})&=2\\ f_\tau(\{c\})&=4\\ f_\tau(\{a,b\})&=4\\ f_\tau(\{a,c\})&=5\\ f_\tau(\{b,c\})&=4\\ f_\tau(\{a,b,c\})&=5 \end{aligned}$$

Una observación importante en la función submodular f_τ, es que $c_{f_\tau} \neq c_\tau$ y por lo tanto $f \notin \lambda(\mathcal{N}_\tau)$.

A continuación se presenta el Algoritmo que permite calcular los valores de la función f_τ.

Algorithm 2 Determinar la función submodular, no decreciente a valor entero

$$f_\tau : 2^E \to \mathbb{Z}$$

Require: Un espacio topológico (E, τ).
Ensure: Para cada $I \subseteq E$ y cada $J \in \tau$,

$$f_\tau(I) = \sum_{J \in \tau} \overline{q}_J(\phi) - \sum_{J \in \tau} \overline{q}_J(I).$$

for $I \subseteq E$, $J \in \tau$ **do**

$$\begin{aligned} \overline{q}_J &: 2^E \to \mathbb{Z} \\ I &\to \overline{q}_J(I) = \begin{cases} 0, & \text{si } I \nsubseteq J, \\ 1, & \text{si } I \subseteq J. \end{cases} \end{aligned}$$

end for

En el capítulo 2 se mostró, que dada una FD-relación $\mathcal{N}$ la función $f_\mathbb{Z} \in \lambda(\mathcal{N})$, es decir, $\mathcal{N} = \mathcal{N}_{f_\mathbb{Z}}$, o lo que es equivalente $c = c_{f_\mathbb{Z}}$. A continuación se construye una función submodular no decreciente $\overline{f}$ para la cual $\overline{f} \in \lambda(\mathcal{N})$, solamente si $c_\mathcal{N}$ es el operador de clausura de un espacio topológico,

Definición 3.2.3. *Sea (E, τ) un espacio topológico y c_τ su operador de clausura. Se define*

$$\begin{aligned} \overline{f} &: 2^E \to \mathbb{Z} \\ I &\to \overline{f}(I) = |c_\tau(I)|. \end{aligned} \tag{3-11}$$

Proposición 3.2.2. *La función $\overline{f} : 2^E \to \mathbb{Z}$, es submodular y no decreciente.*

Demostración. Sean c_τ el operador de clausura de una topología definido sobre el conjunto E y $A, B \subseteq E$. Entonces, por el principio de inclusión y exclusión de la teoría de conjuntos y la propiedad

(CT5) $c_\tau(\bigcup_{k=1}^{n} I_k) = \bigcup_{k=1}^{n} c_\tau(I_k)$, se tiene que:

$$
\begin{aligned}
\overline{f}(A \cup B) + \overline{f}(A \cap B) &= |c_\tau(A \cup B)| + |c_\tau(A \cap B)| \\
&= |c_\tau(A) \cup c_\tau(B)| + |c_\tau(A \cap B)| \\
&= |c_\tau(A)| + |c_\tau(B)| - |c_\tau(A) \cap c_\tau(B)| + |c_\tau(A \cap B)| \\
&\leq |c_\tau(A)| + |c_\tau(B)| - |c_\tau(A) \cap c_\tau(B)| + |c_\tau(A) \cap c_\tau(B)| \\
&= \overline{f}(A) + \overline{f}(B).
\end{aligned}
$$

Si $A \subseteq B$, $c_\tau(A) \subseteq c_\tau(B)$ por la propiedad de monotonía de los operadores de clausura, entonces $\overline{f}(A) = |c_\tau(A)| \leq |c_\tau(B)| = \overline{f}(B)$. □

Proposición 3.2.3. *Sean (E, τ) un espacio topológico, c_τ su operador de clausura y $\overline{f}$ la función submodular no decreciente de la definición 3.2.3. Entonces, $c_{\overline{f}}(I) = c_\tau(I)$ para todo $I \subseteq E$.*

Demostración. Se mostrará que para el operador de clausura c_τ del espacio topológico (E, τ) se satisface la igualdad

$$c_\tau(I) = c_{\overline{f}}(I).$$

$\subseteq$) Sean $I \subseteq E$ y $x \in c_\tau(I)$, por la propiedad de monotonía para los operadores de clausura, $c_\tau(x) \subseteq c_\tau(I)$ entonces,

$$c_\tau(I \cup x) = c_\tau(I) \cup c_\tau(x) = c_\tau(I),$$

es decir, $\overline{f}(I) = \overline{f}(I \cup x)$ y por la proposición 2.2.1, $x \in c_{\overline{f}}(I)$.

$\supseteq$) Sean $I \subseteq E$ y $x \in c_{\overline{f}}(I)$, es decir,

$$\overline{f}(I) = |c_\tau(I)| = \overline{f}(I \cup x) = |c_\tau(I) \cup c_\tau(x)|, \tag{3-12}$$

entonces $c_\tau(x) \subseteq c_\tau(I)$ y por consiguiente $x \in c_\tau(I)$.

□

3.2.1. Relación de las funciones $f_{\mathbb{Z}}$, f_τ y $\overline{f}$, con propiedades de los polimatroides

Las funciones submodulares no decrecientes $f_{\mathbb{Z}}$,f_τ y $\overline{f}$, estudiadas anteriormente, tienen la propiedad adicional que evaluadas en el conjunto vacío, su valor es cero. El conjunto de funciones submodulares no decrecientes, con esta propiedad adicional reciben el nombre de Polimatroides.
En esta sección se ilustra la interpretación de las funciones

$$
\begin{aligned}
f(X \mid Y) &:= f(X, Y) - f(Y) \\
I(X \wedge Y) &:= f(X) - f(X \mid Y)
\end{aligned}
\tag{3-13}
$$

cuando el polimatroide f es la función $f_{\mathbb{Z}}$, f_τ y $\overline{f}$.

Ejemplo 3.2.4. *Consideremos el operador de clausura*

$$\begin{aligned} c_\tau : 2^E &\to 2^E \\ \phi &\mapsto \phi \\ \{a\} &\mapsto \{a\} \\ \{b\} &\mapsto \{b, c\} \\ \{c\} &\mapsto \{b, c\} \\ \{a, b\} &\mapsto \{a, b, c\} \\ \{a, c\} &\mapsto \{a, b, c\} \\ \{b, c\} &\mapsto \{b, c\} \\ \{a, b, c\} &\mapsto \{a, b, c\} \end{aligned}$$

rápidamente se puede ver que el sistema clausura o el conjunto de cerrados de la topología está determinado por $\mathcal{C} = \{\phi, \{a\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}$, *consideremos además la función submodular* $f_{\mathbb{Z}}$ *asociada*

$$\begin{aligned} f_{\mathbb{Z}}(\phi) &= 0 \\ f_{\mathbb{Z}}(\{a\}) &= 2 \\ f_{\mathbb{Z}}(\{b\}) &= 2 \\ f_{\mathbb{Z}}(\{c\}) &= 2 \\ f_{\mathbb{Z}}(\{a, b\}) &= 3 \\ f_{\mathbb{Z}}(\{a, c\}) &= 3 \\ f_{\mathbb{Z}}(\{b, c\}) &= 2 \\ f_{\mathbb{Z}}(\{a, b, c\}) &= 3 \end{aligned}$$

Las Tablas $3-1$ *y* $3-2$ *determinan los valores de las funciones* $f_{\mathbb{Z}}(X|Y)$ *e* $I(X \wedge Y)$.

$f_{\mathbb{Z}}(X\|Y)$	ϕ	{a}	{b}	{c}	{a,b}	{a,c}	{b,c}	{a,b,c}
ϕ	0	0	0	0	0	0	0	0
{a}	2	0	1	1	0	0	1	0
{b}	2	1	0	0	0	0	0	0
{c}	2	1	2	0	0	0	0	0
{a,b}	3	1	1	1	0	0	1	0
{a,c}	3	1	1	1	0	0	1	0
{b,c}	2	1	0	0	0	0	0	0
{a,b,c}	3	1	1	1	0	0	1	0

Tabla 3-1: Cálculo de valores para la función $f_{\mathbb{Z}}(X|Y) = f_{\mathbb{Z}}(X,Y) - f_{\mathbb{Z}}(Y)$. El conjunto X corresponde a la fila, y el conjunto Y corresponde a la columna.

$I(X \wedge Y)$	ϕ	{a}	{b}	{c}	{a,b}	{a,c}	{b,c}	{a,b,c}
ϕ	0	0	0	0	0	0	0	0
{a}	0	2	1	1	2	2	1	2
{b}	0	1	2	2	2	2	2	2
{c}	0	1	2	2	2	2	2	2
{a,b}	0	2	2	2	3	3	2	3
{a,c}	0	2	2	2	3	3	2	3
{b,c}	0	1	2	2	2	2	2	2
{a,b,c}	0	2	2	2	3	3	2	3

Tabla 3-2: Cálculo de valores para la función $I(X \wedge Y) = f_{\mathbb{Z}}(X) - f_{\mathbb{Z}}(X|Y)$.

Note que, $I(X \wedge Y)$ determina el número de conjuntos cerrados, que no tienen a X, ni a Y como subconjuntos, .

Proposición 3.2.4. *Sean (E, τ) un espacio topológico y $f_{\mathbb{Z}}$ la función submodular no decreciente asociada. Entonces,*

$$I(X \wedge Y) = f_{\mathbb{Z}}(X) - f_{\mathbb{Z}}(X|Y)$$

determina el número de conjuntos cerrados, que no tienen a X ni a Y como subconjuntos.

Demostración. Sean τ una topología definida sobre el conjunto E y $\mathcal{C}$ la colección de cerrados de la topología, siguiendo la construcción de la función $f_{\mathbb{Z}}$, (Ver Algoritmo 3.2), se tiene que para $I \subseteq E$,

$$f_{\mathbb{Z}}(I) = \sum_{J \in \mathcal{C}} q_J(I),$$

donde

$$\begin{aligned} q_J : 2^E &\to \mathbb{Z} \\ I \to q_J(I) &= \begin{cases} 0, & \text{si } I \subseteq J, \\ 1, & \text{si } I \nsubseteq J. \end{cases} \end{aligned}$$

Entonces, si $X, Y \subseteq E$

$$\begin{aligned} I(X \wedge Y) &= f_{\mathbb{Z}}(X) - f_{\mathbb{Z}}(X|Y) \\ &= f_{\mathbb{Z}}(X) + f_{\mathbb{Z}}(Y) - f_{\mathbb{Z}}(X,Y) \\ &= \sum_{J \in \mathcal{C}} q_J(X) + q_J(Y) - q_J(X,Y). \end{aligned}$$

Fijando $J \in \mathcal{C}$, se tiene que:

1. Si $q_J(X) = 0$ y $q_J(Y) = 0$, entonces $X \subseteq J$ y $Y \subseteq J$, así $X \cup Y \subseteq J$, es decir, $q_J(X \cup Y) = 0$, de donde
$$q_J(X) + q_J(Y) - q_J(X,Y) = 0.$$
2. Si $q_J(X) = 0$ y $q_J(Y) = 1$, entonces $X \subseteq J$ y $Y \nsubseteq J$, así $X \cup Y \nsubseteq J$, es decir, $q_J(X \cup Y) = 1$, de donde
$$q_J(X) + q_J(Y) - q_J(X,Y) = 0.$$
3. Si $q_J(X) = 1$ y $q_J(Y) = 0$, entonces $X \nsubseteq J$ y $Y \subseteq J$, así $X \cup Y \nsubseteq J$, es decir, $q_J(X \cup Y) = 1$, de donde
$$q_J(X) + q_J(Y) - q_J(X,Y) = 0.$$
4. Si $q_J(X) = 1$ y $q_J(Y) = 1$, entonces $X \nsubseteq J$ y $Y \nsubseteq J$, así $X \cup Y \nsubseteq J$, es decir, $q_J(X \cup Y) = 1$, de donde
$$q_J(X) + q_J(Y) - q_J(X,Y) = 1.$$

De este modo, el valor $q_J(X) + q_J(Y) - q_J(X,Y) = 1$ solo cuando $X \nsubseteq J$ y $Y \nsubseteq J$. Entonces

$$I(X \wedge Y) = \sum_{J \in \mathcal{C}} q_J(X) + q_J(Y) - q_J(X,Y),$$

determina el número de conjuntos cerrados, que no tienen a X ni a Y como subconjuntos. $\square$

Corolario 3.2.1. *Sean (E,τ) un espacio topológico y $f_{\mathbb{Z}}$ la función submodular no decreciente asociada. Entonces,*

$$f_{\mathbb{Z}}(X|Y) = f_{\mathbb{Z}}(X,Y) - f_{\mathbb{Z}}(Y)$$

determina el número de conjuntos cerrados, que no tienen a X como subconjunto, menos el número de conjuntos cerrados, que no tienen a X ni a Y como subconjuntos.

Proposición 3.2.5. *Sean (E,τ) un espacio topológico y f_τ la función submodular no decreciente asociada. Entonces,*

$$I(X \wedge Y) = f_\tau(X) - f_\tau(X|Y)$$

determina el número de conjuntos abiertos que no tienen a X ni a Y como subconjuntos.

Demostración. La demostración es similar a la realizada en la proposición 3.2.4. $\square$

Corolario 3.2.2. *Sean (E,τ) un espacio topológico y f_τ la función submodular no decreciente asociada. Entonces,*

$$f_\tau(X|Y) = f_\tau(X,Y) - f_\tau(Y)$$

determina el número de conjuntos abiertos que no tienen a X como subconjunto, menos el número de conjuntos abiertos que no tienen a X ni a Y como subconjuntos.

Para el polimatroide $\overline{f}$ la interpretación de las funciones $I(X \wedge Y)$ y $\overline{f}(X|Y)$ es la siguiente.

Proposición 3.2.6. *Sean (E,τ) un espacio topológico y $\overline{f}$ la función submodular no decreciente asociada. Entonces,*

$$I(X \wedge Y) = \overline{f}(X) - \overline{f}(X|Y)$$

determina el cardinal de $c_\tau(X) \cap c_\tau(Y)$.

Demostración.

$$\begin{aligned} I(X \wedge Y) &= \overline{f}(X) - \overline{f}(X|Y) \\ &= \overline{f}(X) + \overline{f}(Y) - \overline{f}(X,Y) \\ &= \overline{f}(X) + \overline{f}(Y) - \overline{f}(X) - \overline{f}(Y) + |c_\tau(X) \cap c_\tau(Y)| \\ &= |c_\tau(X) \cap c_\tau(Y)|. \end{aligned}$$

$\square$

Corolario 3.2.3. *Sean (E,τ) un espacio topológico y $\overline{f}$ la función submodular no decreciente asociada. Entonces,*

$$\overline{f}(X|Y) = \overline{f}(X,Y) - \overline{f}(Y)$$

determina el cardinal de $c_\tau(X)$ menos el cardinal de $c_\tau(X) \cap c_\tau(Y)$.

Uno de los modos de describir los polimatroides es por medio de su poliedro independiente y el poliedro base, los cuales se pueden representar gráficamente si el conjunto soporte tiene 2 o 3 elementos.

Definición 3.2.4. *Dado un polimatroide* (E, f) *se define el poliedro independiente* $P_+(f)$ *por*

$$p_+(f) := \{g \in \mathbb{R}^E : g \geq 0, g(X) \leq f(X) \quad \text{para cada } X \subseteq E\} \tag{3-14}$$

donde para cada $X \subseteq E$ *y* $g \in \mathbb{R}^E$,

$$g(X) = \sum_{e \in X} g(e) \quad y \quad g(\phi) = 0. \tag{3-15}$$

Se define además, el poliedro base $B(f)$ *por*

$$B(f) := \{g \in P_+(f) : g(E) = f(E)\}. \tag{3-16}$$

En el siguiente ejemplo, se muestra el polimatroide y el poliedro base para el polimatroide f_τ, asociado a las diferentes topologías que se pueden definir sobre un conjunto de 3 elementos.

Ejemplo 3.2.5. *Sea* $E = \{a, b, c\}$,

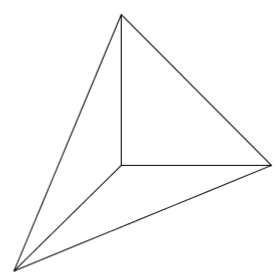

Figura 3-1: Poliedro independiente y poliedro base asociado a la función submodular f_τ, cuando τ es la topología grosera.

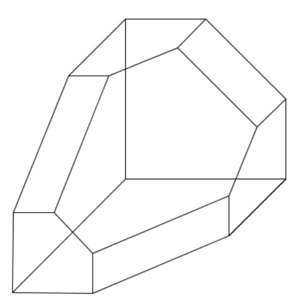

Figura 3-2: Poliedro independiente y poliedro base asociado a la función submodular f_τ, cuando τ es la topología discreta.

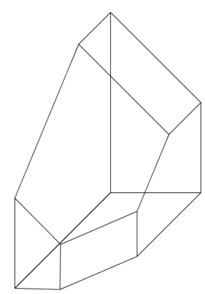

Figura 3-3: Poliedro independiente y poliedro base asociado a la función submodular f_τ, cuando $\tau = \{\phi, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}, \{b, c\}, E\}$.

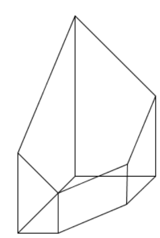

Figura 3-4: Poliedro independiente y poliedro base asociado a la función submodular f_τ, cuando $\tau = \{\phi, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}, E\}$.

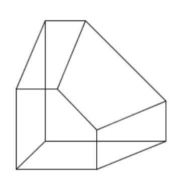

Figura 3-5: Poliedro independiente y poliedro base asociado a la función submodular f_τ, cuando $\tau = \{\phi, \{a\}, \{a, b\}, \{a, c\}, E\}$.

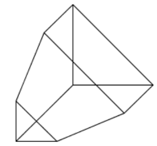

Figura 3-6: Poliedro independiente y poliedro base asociado a la función submodular f_τ, cuando $\tau = \{\phi, \{a\}, \{b, c\}, E\}$.

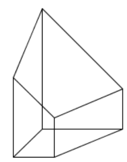

Figura 3-7: Poliedro independiente y poliedro base asociado a la función submodular f_τ, cuando $\tau = \{\phi, \{a\}, \{a, b\}, E\}$.

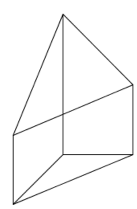

Figura 3-8: Poliedro independiente y poliedro base asociado a la función submodular f_τ, cuando $\tau = \{\phi, \{a, b\}, E\}$.

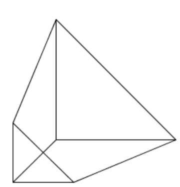

Figura 3-9: Poliedro independiente y poliedro base asociado a la función submodular f_τ, cuando $\tau = \{\phi, \{a\}, E\}$.

3.3. Función submodular no decreciente de entropía asociada a una topología

En esta sección, se estudiarán de manera general las funciones de entropía, las cuales son funciones submodulares, propias de la teoría de la información y se asociará una función de entropía a una FD-relación $\mathcal{N}_\tau$.

La entropía representa una medida de la incertidumbre asociada con cierta variable aleatoria y por tanto la cantidad de información. Las nociones de entropía para un número finito de variables aleatorias, e información mutua para dos variables aleatorias en Teoría de la información fueron introducidas inicialmente por Claude E. Shannon en [17]. Se notara $H(X, Y)$ en vez de $H(X \cup Y)$.

Sean X, Y, Z variables aleatorias discretas con función de probabilidad

$$p(x_i, y_j, z_k) = Pr\{X = x_i, Y = y_j, Z = z_k\} \tag{3-17}$$

se define

$$\begin{aligned}
p(x_i, y_j) &:= \sum_k p(x_i, y_j, z_k) \\
p(x_i, z_k) &:= \sum_j p(x_i, y_j, z_k) \\
p(y_j, z_k) &:= \sum_i p(x_i, y_j, z_k) \\
p(x_i) &:= \sum_{j,k} p(x_i, y_j, z_k) \\
p(y_j) &:= \sum_{i,k} p(x_i, y_j, z_k) \\
p(z_k) &:= \sum_{i,j} p(x_i, y_j, z_k) \\
p(x_i|y_j) &:= \frac{p(x_i, y_j)}{p(y_j)}, p(y_j) \neq 0 \\
p(x_i, y_j|z_k) &:= \frac{p(x_i, y_j, z_k)}{p(z_k)}, p(z_k) \neq 0 \\
p(x_i|y_j, z_k) &:= \frac{p(x_i, y_j, z_k)}{p(y_j, z_k)}, p(y_j, z_k) \neq 0
\end{aligned}$$

Definición 3.3.1.

La entropía $H(X)$ *de una variable aleatoria* X *se define como*

$$H(X) = -\sum_{i} p(x_i) \log_\alpha p(x_i), \tag{3-18}$$

la base del logaritmo puede ser cualquier $\alpha > 1$*.*

Por simplicidad se tomará $\log_\alpha$ como el logaritmo natural ln.

Definición 3.3.2. *Sean* X, Y *variables aleatorias, se define:*

1. *La* entropía mutua $H(X,Y)$ *por*

$$H(X,Y) = -\sum_{i,j} p(x_i, y_j) \ln p(x_i, y_j). \tag{3-19}$$

2. *La* entropía condicional *de* X *dado* Y *por*

$$H(X|Y) = -\sum_{i,j} p(x_i, y_j) \ln p(x_i|y_j). \tag{3-20}$$

3. *La* información mutua *entre* X *y* Y *por*

$$I(X \wedge Y) = \sum_{i,j} p(x_i, y_j) \ln \frac{p(x_i, y_j)}{p(x_i)p(y_j)}. \tag{3-21}$$

4. *La* información mutua condicional *entre* X *y* Y *dado* Z *por*

$$I(X \wedge Y|Z) = \sum_{i,j,k} p(x_i, y_j, z_k) \ln \frac{p(x_i, y_j|z_k)}{p(x_i|z_k)p(y_j|z_k)}. \tag{3-22}$$

Teorema 3.3.1. *1.*

$$H(X|Y) = H(X,Y) - H(Y). \tag{3-23}$$

2.

$$I(X \wedge Y) = H(X) - H(X|Y). \tag{3-24}$$

3.

$$I(X \wedge Y|Z) = H(X|Z) - H(X|Y,Z). \tag{3-25}$$

4.

$$H(X|Y,Z) = H(X,Y,Z) - H(Y,Z). \tag{3-26}$$

5.

$$I(X \wedge Y|Z) \geq 0. \tag{3-27}$$

Demostración. Ver [2]. □

Teorema 3.3.2. *La función de entropía es una función polimatroide.*

Demostración. Se mostrará que la función de entropía H satisface las propiedades $(P1)$ y $(P3)$ de la definición 1.3.2.

(P1) $H(\phi) = 0$, suponiendo que $0 \ln 0 = 0$.

(P3) Por demostrar

$$H(X, Z) + H(Y, Z) \geq H(Z) + H(X, Y, Z).$$

$$\begin{aligned} 0 \leq I(X \wedge Y|Z) &= H(X|Z) - H(X|Y, Z) \\ &= H(X|Z) - [H(X, Y, Z) - H(Y, Z)] \\ &= H(X|Z) - H(X, Y, Z) + H(Y, Z) \\ &= H(X, Z) - H(Z) - H(X, Y, Z) + H(Y, Z). \end{aligned}$$

□

De este modo las desigualdades estudiadas en la proposición 1.3.3, se pueden escribir para funciones de entropía como:

$$\begin{aligned} H(\phi) &= 0 \\ H(X) &\geq 0 \\ H(X \mid Y) &\geq 0 \\ I(X \wedge Y) &\geq 0 \\ H(X \mid Z) + H(Y \mid Z) &\geq H(X, Y \mid Z) \\ H(X, Z \mid Y) &\geq H(X \mid Y) \geq H(X \mid Y, Z) \\ I(X \wedge Y) &= H(X) + H(Y) - H(X, Y) \\ I(X \wedge Y \mid Z) &= H(X, Z) + H(Y, Z) - H(Z) - H(X, Y, Z) \\ I(X \wedge (Y, Z)) &= I(X \wedge Z) + I(X \wedge Y \mid Z) \\ I(X \wedge Y \mid Z) &\geq 0 \\ H(X, Z) + H(Y, Z) &\geq H(Z) + H(X, Y, Z). \end{aligned}$$

Es posible asociar a una FD-relación $\mathcal{N}$, una función de entropía r_A. [Ver [18]]. El subíndice A en la función se refiere al conjunto para el cual se satisface que $\mathcal{N}_A = \mathcal{N}_{r_A}$.

Sea $\mathcal{N}_\tau$ una FD-relación con soporte E, y sea p el número de elementos en $2^E \times 2^E$ que no pertenecen a $\mathcal{N}_\tau$, $X_i = \{1, 2, \ldots, 2p\}$ para $i \in E$, y $X_I = \prod_{i \in I} X_i$, por simplicidad $X = X_E$.

Además, identifiquemos cada pareja $(I,J) \notin \mathcal{N}_\tau$ con un único número k, $k = 1, 2, \dots, p$ y definamos $x^{2k-1}, x^{2k} \in X$ de la siguiente manera:

$$x_i^{2k-1} = 2k - 1, \text{para cada } i \in E \tag{3-28}$$

$$x_i^{2k} = \begin{cases} 2k-1, & \text{si } i \in c_{\mathcal{N}_\tau}(I), \\ 2k, & \text{en otro caso.} \end{cases} \tag{3-29}$$

donde

$$c_{\mathcal{N}_\tau} = \bigcup_{(I,J)\in\mathcal{N}_\tau} J$$

es el operador de clausura de la FD-relación $\mathcal{N}_\tau$.

Sea $A = \{x^n \in X : n = 1, 2, \dots, 2p\}$, y definamos la relación de equivalencia

$$R_I^A = \{(x,y) \in A \times A : x_I = y_I\}, \tag{3-30}$$

la cual para cada $I \subseteq E$, induce la partición A/R_I^A sobre el conjunto A.
Se define la función de entropía, $r_A : 2^E \to \mathbb{R}$

$$r_A(I) = -\sum_{G\in A/R_I^A} \frac{|G|}{|A|} \ln \frac{|G|}{|A|}. \tag{3-31}$$

Note que por la construcción del vector $x^n \in X$, se tiene que $|G|$ es 1 o 2.

Observación 3.3.1. 1. *Como $\mathcal{N}_\tau$ es una FD-relación que proviene del operador de clausura de un espacio topológico, entonces $\mathcal{N}_\tau$ es un subconjunto propio de $2^E \times 2^E$.*

2. *Si $n_I = |c_{\mathcal{N}_\tau}(I)|$, entonces el número de parejas en $2^E \times 2^E$ que tienen como primera componente a I y no están en $\mathcal{N}_\tau$ está dado por:*

$$F_I = 2^{|E|} - 2^{n_I}. \tag{3-32}$$

3. *El número de clases en A/R_I^A con dos elementos es;*

$$S_I = \sum_{I\in c_{\mathcal{N}_\tau}(J)} F_J \tag{3-33}$$

y por consiguiente el número de clases en A/R_I^A con un elementos es $|A| - 2S_I$.

Teniendo en cuenta las observaciones anteriores podemos escribir la función r_A de la siguiente manera:

$$r_A(I) = -\sum_{G\in A/R_I^A} \frac{|G|}{|A|} \ln \frac{|G|}{|A|} \tag{3-34}$$

$$= -S_I \left(\frac{2}{|A|} \ln \frac{2}{|A|} \right) - (|A| - 2S_I) \left(\frac{1}{|A|} \ln \frac{1}{|A|} \right) \tag{3-35}$$

$$= -\frac{2S_I}{|A|} \ln 2 + \ln |A|. \tag{3-36}$$

El siguiente algoritmo, obtiene los valores de la función r_A, a partir de una FD-relación $\mathcal{N}_\tau$, o, del operador de clausura c_τ.

Algorithm 3 Determinar la función submodular de entropía

$$r_A : 2^E \to \mathbb{R}$$

Require: Una FD-relación $\mathcal{N}_\tau$ definida sobre un conjunto finito E.
Ensure: Para cada $I \subseteq E$,

$$r_A(I) = \begin{cases} \ln|A| - \frac{2S_I}{|A|}\ln 2, & \text{si } I \neq \phi, \\ 0, & \text{si } I = \phi. \end{cases}$$

for $I \subseteq E$, **do**

$$c_{\mathcal{N}_\tau}(I) = \bigcup_{(I,J)\in\mathcal{N}} J.$$

$$n_I = |c_{\mathcal{N}_\tau}(I)|$$

end for
for $I \subseteq E$, **do**

$$F_I = 2^{|E|} - 2^{n_I}$$

$$|A| = 2\sum_{I\in 2^E} F_I.$$

end for
for $I \subseteq E$, $I \neq \phi$ **do**

$$S_I = \sum_{I\subseteq c_{\mathcal{N}_\tau}(J)} F_J.$$

end for

Ejemplo 3.3.1. *Sea $E = \{a, b, c\}$, consideremos el operador de clausura*

$$\begin{aligned} c_\tau : 2^E &\to 2^E \\ \phi &\mapsto \phi \\ \{a\} &\mapsto \{a, c\} \\ \{b\} &\mapsto \{b\} \\ \{c\} &\mapsto \{c\} \\ \{a, b\} &\mapsto \{a, b, c\} \\ \{a, c\} &\mapsto \{a, c\} \\ \{b, c\} &\mapsto \{b, c\} \\ \{a, b, c\} &\mapsto \{a, b, c\} \end{aligned}$$

Para cada $I \subseteq E$ calculemos F_I;

$$\begin{aligned} F_\phi &= 8 - 1 = 7 \\ F_{\{a\}} &= 8 - 4 = 4 \\ F_{\{b\}} &= 8 - 2 = 6 \\ F_{\{c\}} &= 8 - 2 = 6 \\ F_{\{a,b\}} &= 8 - 8 = 0 \\ F_{\{a,c\}} &= 8 - 4 = 4 \\ F_{\{b,c\}} &= 8 - 4 = 4 \\ F_{\{a,b,c\}} &= 8 - 8 = 0. \end{aligned}$$

Por lo anterior tenemos que:

$$\begin{aligned} |A| &= 2 \sum_{I \subseteq E} F_I \\ &= 62. \end{aligned}$$

Ahora para cada $I \subseteq E$ calculemos S_I;

$$\begin{aligned} S_{\{a\}} &= F_{\{a\}} + F_{\{a,b\}} + F_{\{a,c\}} + F_{\{a,b,c\}} = 8 \\ S_{\{b\}} &= F_{\{b\}} + F_{\{a,b\}} + F_{\{b,c\}} + F_{\{a,b,c\}} = 10 \\ S_{\{c\}} &= F_{\{a\}} + F_{\{c\}} + F_{\{a,b\}} + F_{\{a,c\}} + F_{\{b,c\}} + F_{\{a,b,c\}} = 18 \\ S_{\{a,b\}} &= F_{\{a,b\}} + F_{\{a,b,c\}} = 0 \\ S_{\{a,c\}} &= F_{\{a\}} + F_{\{a,b\}} + F_{\{a,c\}} + F_{\{a,b,c\}} = 8 \\ S_{\{b,c\}} &= F_{\{a,b\}} + F_{\{b,c\}} + F_{\{a,b,c\}} = 4 \\ S_{\{a,b,c\}} &= F_{\{a,b,c\}} = 0 \end{aligned}$$

Finalmente obtenemos la función

$$
\begin{aligned}
r_A : 2^N &\to \mathbb{R} \\
\phi &\mapsto 0 \\
\{a\} &\mapsto \ln 62 - \frac{16}{62}\ln 2 \\
\{b\} &\mapsto \ln 62 - \frac{20}{62}\ln 2 \\
\{c\} &\mapsto \ln 62 - \frac{36}{62}\ln 2 \\
\{a,b\} &\mapsto \ln 62 \\
\{a,c\} &\mapsto \ln 62 - \frac{16}{62}\ln 2 \\
\{b,c\} &\mapsto \ln 62 - \frac{8}{62}\ln 2 \\
\{a,b,c\} &\mapsto \ln 62.
\end{aligned}
$$

Observación 3.3.2. *1. En el método anterior, $|A|$ es dos veces el número de elementos en $2^E \times 2^E$ que no pertenecen a la FD-relación $\mathcal{N}_\tau$.*

2. $I \subseteq E$ es cerrado, si y sólo si, $F_I = 2^{|E|} - 2^{|I|}$.

3. $I \subseteq E$ es denso, si y sólo si, $F_I = 0$.

Proposición 3.3.1. *Sean $\mathcal{N}_\tau$ una FD-relación con soporte E e $I \subseteq E$, tales que $c_\tau(I) = E$, entonces*

$$r_A(I) = r_A(E) = \ln |A|.$$

Demostración. Para ver que $r_A(I) = r_A(E) = \ln |A|$, se mostrará que $S_I = 0$ si $c_\tau(I) = E$. Como

$$S_I = \sum_{I \subseteq c(J)} F_J, \tag{3-37}$$

note que si $I \subseteq c_\tau(J)$, por hipótesis $E = c_\tau(I) \subseteq c_\tau(J)$. Así, $S_I = \sum_J F_J$ tal que $c_\tau(J) = E$, pero para los $J \subseteq E$ tal que $c_\tau(J) = E$, $F_J = 0$, de donde $S_I = 0$ y por lo tanto $r_A(I) = r_A(E) = \ln |A|$. □

Proposición 3.3.2. *Sean $\mathcal{N}_\tau$ una FD-relación con soporte E e $I, J \subseteq E$, tales que $c_\tau(I) = c_\tau(J)$, entonces*

$$r_A(I) = r_A(J).$$

Demostración. Es suficiente mostrar que $S_I = S_J$ si $c_\tau(I) = c_\tau(J)$. Puesto que,

$$S_I = \sum_{I \in c_\tau(K)} F_K, \tag{3-38}$$

Ahora, si $I \subseteq c_\tau(K)$ entonces, $c_\tau(I) \subseteq c_\tau(K)$, luego como $c_\tau(I) = c_\tau(J)$ se tiene que $J \in c_\tau(K)$, es decir para todo $K \subseteq E$ tal que $I \in c_\tau(K)$ se tiene que $J \in c_\tau(K)$. Del mismo modo se puede mostrar que para cada $M \subseteq E$, si $J \in c_\tau(M)$, entonces $I \in c_\tau(M)$, luego $S_I = S_J$, entonces $r_A(I) = r_A(J)$. $\square$

3.4. Cálculo de las funciones $f_{\mathbb{Z}}$, f_τ y r_A en espacios topológicos con 2 y 3 elementos

En esta sección se calculan los valores de las funciones $f_{\mathbb{Z}}$, f_τ y r_A para los diferentes espacios topológicos que se definen sobre un conjunto de 2 y 3 elementos.

Sea $E = \{a, b\}$. Las topologías no isomorfas que se pueden definir sobre E son:

$$\begin{aligned}
\tau_1 &= \{\phi, \{a, b\}\} \\
\tau_2 &= \{\phi, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\} \\
\tau_3 &= \{\phi, \{a\}, \{a, b\}\},
\end{aligned}$$

y los valores de las funciones $f_{\mathbb{Z}}, f_\tau$ y r_A, se calculan a continuación

$f_{\mathbb{Z}}$	τ_1	τ_2	τ_3
ϕ	0	0	0
{a}	1	2	2
{b}	1	2	1
{a,b}	1	3	2

Tabla 3-3: Cálculo de valores para el polimatroide $f_{\mathbb{Z}} : 2^E \to \mathbb{Z}$, donde $E = \{a, b\}$.

f_τ	τ_1	τ_2	τ_3
ϕ	0	0	0
{a}	1	2	1
{b}	1	2	2
{a,b}	1	3	2

Tabla 3-4: Cálculo de valores para el polimatroide $f_\tau : 2^E \to \mathbb{Z}$, donde $E = \{a, b\}$.

r_A	τ_1	τ_2	τ_3
ϕ	0	0	0
{a}	$\ln 6$	$\ln 14 - \frac{2}{7}\ln 2$	$\ln 10$
{b}	$\ln 6$	$\ln 14 - \frac{2}{7}\ln 2$	$\ln 10 - \frac{2}{5}\ln 2$
{a,b}	$\ln 6$	$\ln 14$	$\ln 10$

Tabla 3-5: Cálculo de valores para la función de entropía $r_A : 2^E \to \mathbb{R}$, donde $E = \{a, b\}$.

Sea $E = \{a, b, c\}$. Las topologías no isomorfas que se pueden definir sobre E son:

$$
\begin{aligned}
\tau_1 &= \{\phi, \{a, b, c\}\}\\
\tau_2 &= \{\phi, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}\\
\tau_3 &= \{\phi, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}\\
\tau_4 &= \{\phi, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}, \{a, b, c\}\}\\
\tau_5 &= \{\phi, \{a\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{a, b, c\}\}\\
\tau_6 &= \{\phi, \{a\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}\\
\tau_7 &= \{\phi, \{a\}, \{a, b\}, \{a, b, c\}\}\\
\tau_8 &= \{\phi, \{a, b\}, \{a, b, c\}\}\\
\tau_9 &= \{\phi, \{a\}, \{a, b, c\}\}.
\end{aligned}
$$

Los valores de las funciones $f_{\mathbb{Z}}, f_\tau$ y r_A, se muestran a continuación

$f_{\mathbb{Z}}$	τ_1	τ_2	τ_3	τ_4	τ_5	τ_6	τ_7	τ_8	τ_9
ϕ	0	0	0	0	0	0	0	0	0
{a}	1	4	3	3	4	2	3	2	2
{b}	1	4	4	3	2	2	2	2	1
{c}	1	4	2	1	2	2	1	1	1
{a,b}	1	6	5	4	4	3	3	2	2
{a,c}	1	6	4	3	4	3	3	2	2
{b,c}	1	6	4	3	3	2	2	2	1
{a,b,c}	1	7	5	4	4	3	3	2	2

Tabla 3-6: Cálculo de valores para el polimatroide $f_{\mathbb{Z}} : 2^E \to \mathbb{Z}$, donde $E = \{a, b, c\}$.

f_τ	τ_1	τ_2	τ_3	τ_4	τ_5	τ_6	τ_7	τ_8	τ_9
ϕ	0	0	0	0	0	0	0	0	0
{a}	1	4	3	2	1	2	1	1	1
{b}	1	4	2	2	3	2	2	1	2
{c}	1	4	4	4	3	2	3	2	2
{a,b}	1	6	4	3	3	3	2	1	2
{a,c}	1	6	5	4	3	3	3	2	2
{b,c}	1	6	4	4	4	2	3	2	2
{a,b,c}	1	7	5	4	4	3	3	2	2

Tabla 3-7: Cálculo de valores para el polimatroide $f_\tau : 2^E \to \mathbb{Z}$, donde $E = \{a, b, c\}$.

r_A	τ_1	τ_2	τ_3	τ_4	τ_5	τ_6	τ_7	τ_8	τ_9
ϕ	0	0	0	0	0	0	0	0	0
{a}	$\ln 14$	$\ln 74 - \frac{14}{37}\ln 2$	$\ln 62 - \frac{10}{31}\ln 2$	$\ln 58 - \frac{8}{29}\ln 2$	$\ln 46$	$\ln 50 - \frac{12}{50}\ln 2$	$\ln 42$	$\ln 26$	$\ln 38 - \frac{8}{19}\ln 2$
{b}	$\ln 14$	$\ln 74 - \frac{14}{37}\ln 2$	$\ln 62 - \frac{8}{31}\ln 2$	$\ln 58 - \frac{8}{29}\ln 2$	$\ln 46 - \frac{10}{23}\ln 2$	$\ln 50 - \frac{12}{25}\ln 2$	$\ln 42 - \frac{8}{21}\ln 2$	$\ln 26$	$\ln 38 - \frac{12}{19}\ln 2$
{c}	$\ln 14$	$\ln 74 - \frac{14}{37}\ln 2$	$\ln 62 - \frac{18}{31}\ln 2$	$\ln 58 - \frac{22}{29}\ln 2$	$\ln 46 - \frac{10}{23}\ln 2$	$\ln 50 - \frac{12}{25}\ln 2$	$\ln 42 - \frac{14}{21}\ln 2$	$\ln 26 - \frac{6}{13}\ln 2$	$\ln 38 - \frac{12}{19}\ln 2$
{a,b}	$\ln 14$	$\ln 74 - \frac{4}{37}\ln 2$	$\ln 62$	$\ln 58$	$\ln 46$	$\ln 50$	$\ln 42$	$\ln 26$	$\ln 38 - \frac{8}{19}\ln 2$
{a,c}	$\ln 14$	$\ln 74 - \frac{4}{37}\ln 2$	$\ln 62 - \frac{4}{31}\ln 2$	$\ln 58 - \frac{8}{29}\ln 2$	$\ln 46$	$\ln 50$	$\ln 42$	$\ln 26$	$\ln 38 - \frac{8}{19}\ln 2$
{b,c}	$\ln 14$	$\ln 74 - \frac{4}{37}\ln 2$	$\ln 62 - \frac{8}{31}\ln 2$	$\ln 58 - \frac{8}{29}\ln 2$	$\ln 46 - \frac{4}{23}\ln 2$	$\ln 50 - \frac{12}{25}\ln 2$	$\ln 42 - \frac{8}{21}\ln 2$	$\ln 26$	$\ln 38 - \frac{12}{19}\ln 2$
{a,b,c}	$\ln 14$	$\ln 74$	$\ln 62$	$\ln 58$	$\ln 46$	$\ln 50$	$\ln 42$	$\ln 26$	$\ln 38$

Tabla 3-8: Cálculo de valores para el polimatroide $r_A : 2^E \to \mathbb{R}$, donde $E = \{a, b, c\}$.

CAPÍTULO 4

Topologías y matroides

Entre las estructuras matemáticas que definen los operadores de clausura se encuentran los espacios topológicos y los matroides [Ver [18]]. De este modo, es natural preguntarse bajo qué condiciones un operador de clausura que define un matroide, define una topología (*Matroides Topológicas*), y recíprocamente, es decir, cuando un operador de clausura que define una topología define un matroide (*Topologías Matroidales*). En este capítulo, se describen completamente los matroides topológicos y se muestran caracterizaciones a las topologías matroidales.

E denotará un conjunto finito y el conjunto unitario $\{a\}$, será notado por a o por su notación usual $\{a\}$.

4.1. Topologías matroidales y matroides topológicos

Un operador de clausura $c : 2^E \to 2^E$, define un matroide, si satisface la propiedad adicional

(CL4) Si $I \subseteq E$, $x \in E$, y, $y \in c(I \cup x) - c(I)$, entonces $x \in c(I \cup y)$.

Ahora, si c es el operador de clausura de una topología, la propiedad $(CL4)$ puede escribirse también como:

(CL4)' Sean $x, y \in E$, $y \in c(x)$, si y sólo si, $x \in c(y)$.

La afirmación anterior, es el punto de partida para caracterizar las topologías cuyo operador de clausura define un matroide, este tipo de topologías se han nombrado como *Topologías Matroidales*.

El siguiente ejemplo muestra que no toda topología es matroidal, es decir que el operador de clausura de una topología no siempre define un matroide.

Ejemplo 4.1.1. *1. Sea E un conjunto finito y τ_p la topología punto incluido, es decir,*

$$\tau_p = \{I \subseteq E : p \in I, \quad o, \quad I = \phi\},$$

Sea $E = \{1, 2, 3\}$ y $p = 2$. Así,

$$\tau_2 = \{\phi, \{2\}, \{1, 2\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}.$$

Entonces, el operador de clausura c de esta topología no satisface la propiedad $(CL4)$. Note que $1 \in c(2) = \{1, 2, 3\}$ pero $2 \notin c(1) = \{1\}$.

2. Sean $E = \{1, 2\}$, τ la topología Sierpinski, es decir $\tau = \{\phi, \{1\}, \{1, 2\}\}$, y c el operador de clausura de la topología. Note que $2 \in c(1) = \{1, 2\}$ pero $1 \notin c(2) = \{2\}$.

Proposición 4.1.1. *El operador de clausura de un espacio topológico T_1 satisface $(CL4)$.*

Demostración. Sean (E, τ) un espacio topológico T_1 y c su operador de clausura, entonces para cada $a \in E$ se tiene que $c(a) = \{a\}$, luego para $a \in E$, e $I \subseteq N$;

1. Si $\{a\} \subseteq c(I)$, entonces $c(\{a\}) - c(I) = \{a\} - c(I) = \phi$.

2. Si $\{a\} \nsubseteq c(I)$, entonces $c(\{a\}) - c(I) = \{a\} - c(I) = \{a\}$.

En ambos casos se satisface la propiedad $(CL4)$. □

Para mostrar que los espacios topológicos regulares satisfacen la propiedad $(CL4)$, se hará uso de las siguientes caracterizaciones.

Teorema 4.1.1. *Sea (E, τ) un espacio topológico, las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. (E, τ) es un espacio topológico regular.

2. Sean $U \in \tau$ y $a \in U$, entonces existe $V \in \tau$ tal que $a \in V$ y $c(V) \subset U$.

Lema 4.1.1. *Para todo espacio topológico regular finito, si A es un conjunto abierto, entonces A es un conjunto cerrado.*

Demostración. Sean (E, τ) un espacio topológico regular. Para cada $x \in E$ sea

$$U_x = \bigcap_{\substack{U \in \tau, \\ x \in U}} U,$$

la colección $\{U_x\}_{x \in E}$ es una base de la topología y U_x se denomina un abierto básico de la topología. Entonces, para $x \in E$ y U_x un abierto básico por el teorema 4.1.1, existe V un

conjunto abierto tal que $x \in V$ y $c(V) \subseteq U_x$, pero como U_x es un abierto básico, tenemos que $U_x = V$, es decir U_x es un conjunto cerrado.
Como $A = \bigcup_{x \in A} U_x$, entonces A es unión finita de conjuntos cerrados y por lo tanto A es cerrado. □

Proposición 4.1.2. *Todo espacio topológico regular finito, tiene una base formada por conjuntos disyuntos dos a dos.*

Demostración. Sean (E, τ) un espacio topológico regular, $x \in E$ y $U_x = \bigcap_{\substack{U \in \tau, \\ x \in U}} U$, un abierto tal que $x \in U_x$. Considere además, $y \in E$, luego $y \notin U_x$ o, $y \in U_x$. Si sucede lo primero, entonces por el lema 4.1.1, U_x es cerrado, y existen conjuntos abiertos y disyuntos V y W, tales que $U_x \subseteq V$ y $y \in W$. Sin pérdida de generalidad podemos suponer $U_x = V$ y $W = U_y$ donde $U_y = \bigcap_{\substack{U \in \tau, \\ y \in U}} U$, es un conjunto abierto.

Ahora, si $y \in U_x$ sea $U_y = \bigcap_{\substack{U \in \tau, \\ y \in U}} U$, un conjunto abierto tal que $y \in U_y$, note que $U_y \subseteq U_x$ pues U_x es una vecindad abierta de y. Además, por el lema 4.1.1, U_y es un conjunto cerrado. Si $x \in U_y$, entonces $U_x = U_y$. Si $x \notin U_y$ existen conjuntos abiertos y disyuntos V y W tales que $x \in V$ y $U_y \subseteq W$, pero $U_y \subseteq U_x \subseteq V$, luego V y W no son conjuntos disyuntos, así $U_x = U_y$. □

Proposición 4.1.3. *El operador de clausura de un espacio topológico regular finito satisface la propiedad*

(CL4) *$x \in c(y)$, si y sólo si, $y \in c(x)$.*

Demostración. Sean (E, τ) un espacio topológico regular y c su operador de clausura. Considere además, $x, y \in E$, tales que $y \in c(x)$ y $x \notin c(y)$. Entonces, como (E, τ) es un espacio topológico regular, existen U, V conjuntos abiertos y disyuntos en la topología, tales que $x \in U$ y $c(y) \subseteq V$, puesto que para espacios topológicos regulares finitos, todo conjunto abierto es un conjunto cerrado, entonces $y \notin c(x)$ pero esto contradice el hecho de que $y \in c(x)$, entonces $x \in c(y)$. □

Una de las caracterizaciones para espacios topológicos regulares finitos, es que poseen una base disyunta la cual se puede determinar por las particiones no vacías realizadas sobre un conjunto de n elementos, este hecho nos permitirá dar una descripción acerca del tipo de matroide que define el operador de clausura de una topología regular.

Ejemplo 4.1.2. *Sea $E = \{a, b, c\}$, las siguientes son las posibles particiones no isomorfas que se pueden hacer del conjunto;*

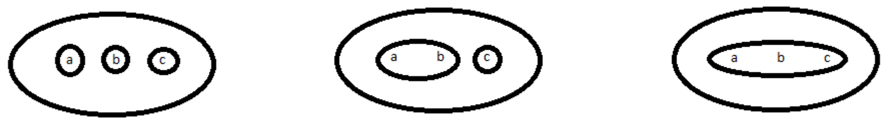

Figura 4-1: Representación de las posibles particiones no isomorfas de un conjunto de 3 elementos

De este modo, es posible construir 3 bases para espacios topológicos a saber:

$$\mathcal{B}_1 = \{\{a\}, \{b\}, \{c\}\}$$
$$\mathcal{B}_2 = \{\{a, b\}, \{c\}\}$$
$$\mathcal{B}_3 = \{\{a, b, c\}\}.$$

Las cuales son bases de los espacios topológicos regulares, que tienen como conjunto de abiertos respectivamente a:

$$\tau_1 = \{\phi, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}$$
$$\tau_2 = \{\phi, \{a, b\}, \{c\}, \{a, b, c\}\}$$
$$\tau_3 = \{\phi, \{a, b, c\}\}.$$

*Y el operador de clausura de los espacios topológicos anteriores define los matroides gráficos de la figura **4-2**.*

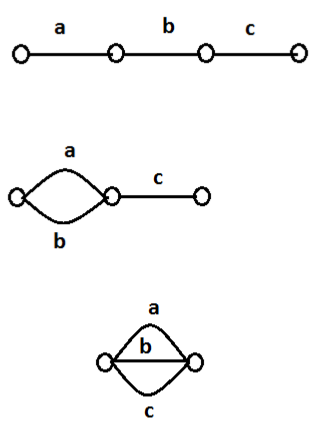

Figura 4-2: Matroides construidos a partir del operador de adherencia de los espacios topológicos regulares que tienen como conjunto de abiertos a τ_1, τ_2 y τ_3 respectivamente.

Proposición 4.1.4. *El operador de clausura de un espacio topológico finito que satisface $(CL4)$, es el operador de clausura de una topología regular.*

Demostración. Sean (E, τ) un espacio topológico finito y c el operador de clausura. Suponga que c satisface la propiedad

(CL4) $y \in c(x)$, si y sólo si, $x \in c(y)$.

Sean F un conjunto cerrado y $x \notin F$. Note que para cada $z \notin F$, $c(z) \cap F = \phi$, (si $y \in c(z) \cap F$, entonces por $(CL4)$, $z \in c(y) \subseteq F$), Sea

$$U = \bigcup_{z \notin F} c(z),$$

el cual es un conjunto cerrado por ser (E, τ) un espacio topológico finito, además $U = F^c$ entonces U^c es un conjunto abierto que contiene a F y no contiene a x y F^c es un conjunto abierto que contiene a x y no contiene a F, además $U \cap F^c = \phi$. Así el espacio topológico (E, τ) es regular. □

Ahora, si c es el operador de clausura de un matroide, nos preguntamos cuándo este operador define un espacio topológico, es decir satisface las propiedades

(CT4) $c(\phi) = \phi$,

(CT5) $c(\bigcup_{k=1}^{n} I_k) = \bigcup_{k=1}^{n} c(I_k)$.

A continuación se muestran casos particulares en los cuales el operador de clausura de un matroide es el operador de clausura de una topología.

Proposición 4.1.5. *Dado un matroide $M = (E, \mathfrak{I})$ con función rango r, si $r(\{a\}) = 0$ para algún $a \in E$, entonces el operador clausura c de la matroide no define una topología sobre E.*

Demostración. Sea $a \in E$, tal que $r\{a\} = 0$, entonces $\{a\}$ es un circuito, es decir,

$$\{a\} \subseteq c\{\phi\}.$$

De aquí, $c\{\phi\} \neq \phi$. Luego c no define un espacio topológico. □

Proposición 4.1.6. *1. Dado un matroide $M = (E, \mathfrak{I})$ con función rango r, si $r\{E\} = |E|$, entonces el operador clausura c del matroide define la topología discreta sobre el conjunto E.*

2. Dado un matroide $M = (E, \mathfrak{I})$ con función rango r, si $r(E) = 1$, entonces el operador clausura c del matroide define la topología grosera sobre E.

Demostración. 1. Como $r(E) = |E|$, entonces E es una base para el matroide $M = (E, \mathfrak{I})$. Así, para todo $A \subseteq E$, se tiene que $A \in \mathfrak{I}$. Luego $c(A) = A$, es decir c define la topología discreta.

2. Como $r(E) = 1$, entonces para todo $A \subseteq E$, $A \neq \phi$, se tiene que $r(A) = 1$ y como $c(A) = E$, entonces c define la topología grosera.

$\square$

Conclusiones y Recomendaciones

La realización de este trabajo ha surgido como continuación al trabajo desarrollado por Raul E, Varela [18], acerca de las FD-relaciones. En dicho trabajo, el autor plantea la pregunta acerca de la conexión entre los espacios topológicos y las FD-relaciones, con el fin de estudiar la relación de estas estructuras con la Teoría de Codificación de Redes.

Con el objetivo de dar respuesta al problema planteado por Varela, en este trabajo se establecen las bases para las conexiones entre las FD-relaciones, las funciones submodulares y los espacios topológicos finitos. Lo anterior permite caracterizar conceptos tales como: conjunto cerrado, conjunto denso, puntos de acumulación, punto exterior y los axiomas de separación en términos de las FD-relaciones y las funciones submodulares. Además, se determinaron algoritmos que permiten obtener los valores de funciones polimatroides específicas, que se encuentran relacionadas con los conjuntos cerrados, conjuntos abiertos y el operador de clausura de una topología.

Durante la realización del trabajo surgieron algunas preguntas las cuales podrían ser abordadas en futuras investigaciones.

1. Determinar un método mediante el cual se obtengan las FD-relaciones diferentes sobre un conjunto de n elementos.
2. Describir el cono convexo que determina el conjunto de funciones submodulares que definen un espacio topológico dado.
3. Verificar qué otras propiedades y conceptos básicos de topología pueden ser caracterizados mediante FD-relaciones y funciones submodulares.
4. Caracterizar el poliedro independiente y el poliedro base de las funciones submodulares que definen el operador de clausura de una topología.
5. Determinar funciones submodulares no decrecientes que estén relacionadas con propiedades de los espacios topológicos.

6. Dar una buena interpretación a la función de entropía r_A, para los espacios topológicos.

7. Hacer uso de las desigualdades Shannon, para caracterizar propiedades de la topología.

8. Generalizar los resultados obtenidos en este trabajo a espacios topológicos infinitos.

9. Entre los teoremas que relacionan los matroides y las funciones submodulares se encuentra el Teorema de Edmonds y Rota (1966), el cual permite asociar a cualquier función submodular, no decreciente a valor entero un matroide. Además, si f es un polimatroide, el rango del matroide r queda completamente determinado, mediante la siguiente relación
$$r(X) = \text{mín}\{f(Y) + |Y - X| : Y \subseteq X\}.$$

   Si (E, τ) es un espacio topológico y $f_{\mathbb{Z}}$, o, f_τ o $\overline{f}$ es el polimatroide asociado entonces, el Teorema de Edmonds y Rota permite asociar un matroide al espacio topológico. La pregunta que se plantea es determinar si existe alguna relación entre el matroide y el espacio topológico.

A continuación se presenta el Teorema de Edmonds y Rota y se da un ejemplo para un espacio topológico.

Proposición 1.7. *Sea f una función submodular no decreciente de 2^E en $\mathbb{Z}$. Sea $\mathcal{C}(f) = \{C \subseteq E : C$ es minimal, no vacío y $f(C) < |C|\}$. Entonces, $\mathcal{C}(f)$ es la colección de circuitos de un matroide sobre E.*

Demostración. Ver [10]. □

Corolario 1.1. *Sea $\mathcal{I}_f = \{I \subseteq E : |I'| \leq f(I')\}$, para todo subconjunto $|I'|$ no vacío de I. Entonces, $\mathcal{I}_f$ es la colección de independientes de un matroide sobre E.*

Denotaremos el matroide con conjunto de independientes $\mathcal{I}_f$ por $M_f = (E, \mathcal{I}_f)$.

Definición 1.1. *1. Sea $M = (E, \mathcal{I})$ un matroide con función rango r, se define $\delta(M)$ como el subconjunto de funciones submodulares no decrecientes definido por*

$$\delta(M) = \{f \in \mathcal{C}_E : \mathcal{I} = \mathcal{I}_f\}.$$

2. Sea $M = (E, \mathcal{I})$ un matroide con función rango r, se define $\delta^+(M)$ como el subconjunto de funciones submodulares en $\delta(M)$ tal que $f(\phi) = 0$.

Proposición 1.8. Teorema de Edmonds y Rota. *Sea f un polimatroide entero sobre 2^E. Si $X \subseteq E$, entonces su rango $r_f(X)$ en M_f está dado por*

$$r_f(X) = \text{mín}\{f(Y) + |Y - X| : Y \subseteq X\}.$$

Ejemplo 1.3. *Sea $E = \{a, b, c, d\}$ y la topología τ definida sobre E por:*

$$\tau = \{\phi, \{a, b\}, \{a, b, c\}, \{a, b, c\}\}.$$

El polimatroide f_τ asociado está determinado por,

$$\begin{aligned} f_\tau : 2^E &\to \mathbb{Z} \\ \phi &\mapsto 0 \\ \{a\} &\mapsto 1 \\ \{b\} &\mapsto 1 \\ \{c\} &\mapsto 2 \\ \{d\} &\mapsto 3 \\ \{a, b\} &\mapsto 1 \\ \{a, c\} &\mapsto 2 \\ \{a, d\} &\mapsto 3 \\ \{b, c\} &\mapsto 2 \\ \{b, d\} &\mapsto 3 \\ \{c, d\} &\mapsto 3 \\ \{a, b, c\} &\mapsto 2 \\ \{a, b, d\} &\mapsto 3 \\ \{a, c, d\} &\mapsto 3 \\ \{b, c, d\} &\mapsto 3 \\ \{a, b, c, d\} &\mapsto 3. \end{aligned}$$

Así por el Corolario 1.1, El matroide $\mathcal{M}_f$ que define el polimatroide f_τ tiene como conjunto de independientes a,

$$\mathcal{I}_{f_\tau} = \{\phi, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{d\}, \{a, c\}, \{a, d\}, \{b, c\}, \{b, d\}, \{c, d\}, \{a, c, d\}, \{b, c, d\}\}.$$

Bibliografía

[1] Armstrong, W.W. *Dependency structures of database relationships.* Information Processing. North Holland, Amsterdam,1974. 580-583.

[2] Bojacá T, Daniel A. *Capacidad lineal y capacidad de ruteo de redes utilizando desigualdades tipo Shannon y no Shannon* Universidad Nacional de Colombia, Facultad de Ciencias, Bogotá D.C., 2011.

[3] Bruhn, Henning. and Diestel, Reinhard. and Kriesell, Matthias. and Pendavingh, Rudi. and Wollan, Paul. *Axioms for Infinite Matroids.*

[4] Cunningham, William H. *Descomposition of Submodular Functions*, Combinatorica, Vol 3, 1983, pp. 53-68.

[5] Edmonds, Jack. *Submodular Functions, Matroids, and Certain Polyhedra* Synopsis for the Instructional Series of Lectures "Plyhedral Combinatorics".

[6] Gómez, Arley. *Funciones Submodulares y Algunas Aplicaciones* Universidad Nacional de Colombia, Facultad de Ciencias, Bogotá D.C., 2011.

[7] Matús, Frantisek. *Abstract functional dependency structures*, Theoretical Computer Science, Vol 81, 1991, pp. 117-126.

[8] Navarro, Jose L. *Topología General II* Departamento de Matematicas. Universidad de Zaragoza.

[9] Neira, Clara M. *Topología General* Notas de Clase.

[10] Oxley, James. *Matroid Theory*, Oxford Mathematics, 1992.

[11] Oxley, James. *What is a Matroid ?* E-mail: oxley@math.lsu.edu

[12] Quang N, Hien. *Semimodular functions and combinatorial geometries*, American Mathematical Society, Vol 238, Abril 1978, pp. 355-383.

[13] Rubiano, Gustavo N. *Toplogía General* Universidad Nacional de Colombia, 2002.

[14] Rubiano, Gustavo N. *Sobre el Número de Topologías en un Conjunto Finito.* Boletín de Matemáticas, Nueva Serie, Volumen $XIII$ N° 2 (2006), pp 136-158.

[15] Rubiano, Gustavo N. *Historia y Topología.*Universidad Nacional de Colombia, Facultad de Ciencias, Departamento de Matemáticas, 28 de Agosto 2008.

[16] Sarria Z, Humberto. *An introduction to Network Coding*, E-mail: hsarriaz@unal.edu.co

[17] Shannon, Claude E. *A Mathematical Theory of Communication*, The Bell System Technical Journal, Vol 27, July 1948, pp. 379-423.

[18] Varela P, Raul E. *FD Relaciones*, Universidad Nacional de Colombia, Facultad de Ciencias, Bogotá D.C., 2011.