



UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA

Interpretación del cambio de funciones de variable real a partir de las formas de representación con el uso de Moodle.

Yury Carolina Hernández Escamilla

Universidad Nacional de Colombia

Facultad de ciencias

Bogotá, Colombia

2014

Interpretación del cambio de funciones de variable real a partir de las formas de representación con el uso de Moodle.

Yury Carolina Hernández Escamilla
Código: 2806909

Trabajo de profundización presentado como requisito parcial para optar al título de:
Magister en Enseñanza de las Ciencias Exactas y Naturales

Directora:

M. Sc. Matemática Myriam Margarita Acevedo Caicedo

Codirector:

M.Sc., Físico Plinio del Carmen Teherán S.

Línea de Investigación:

Enseñanza – Aprendizaje, Evaluación y Didáctica de las Ciencias

Grupo de Investigación:

Lev Semionovich Vigodsky

Universidad Nacional de Colombia

Facultad de Ciencias

Bogotá, Colombia

2014

Dedicatoria

A mi amada hija Gabriela y Esposo Alejandro quienes son la motivación y el apoyo para continuar creciendo día a día en todos los ámbitos de mi vida.

Agradecimientos

Agradezco en primer lugar a Dios por permitirme crecer profesionalmente.

A la Universidad Nacional de Colombia por su organización y excelente calidad educativa y a los gestores y administrativos de la Maestría en Enseñanza de las Ciencias y Exactas y Naturales por contribuir en el proceso de capacitación de los docentes.

A mi Directora la Docente M.Sc. Myriam Acevedo Caicedo por su constancia, apoyo y dedicación en todo momento y sus valiosos aportes.

Al Docente M.Sc. Plinio del Carmen Teherán quien con sus clases me motivo a profundizar y a utilizar las Tics en pro del mejoramiento de la educación.

A todos los profesores que me brindaron la oportunidad de aprender desde su saber y su experiencia.

A mi esposo por su paciencia y la tranquilidad que me brindo en momento difíciles.

A mi madre por sus oraciones y ánimo.

Resumen

El trabajo presenta una unidad didáctica integrada en una plataforma virtual a través del LMS Moodle, para estudiantes de grado noveno. En esta unidad se describen las diferentes formas de representación de las funciones de variable real con el objeto de analizar e interpretar la variación, haciendo énfasis especial en la representación gráfica, que permite reconocer las características globales de la función. Para construir el marco teórico se revisaron y sintetizaron aspectos relativos al desarrollo del concepto de función, se analizaron obstáculos epistemológicos relacionados con su construcción, se retomaron y adecuaron elementos de propuestas pedagógicas y didácticas pertinentes tanto al tema como al desarrollo de aulas virtuales.

Palabras clave: unidad didáctica, funciones, gráficas, Moodle, LMS

Abstract

The paper presents a learning unit integrated in a virtual platform through LMS Moodle for ninth grade students. In this unit the different forms of representation of real variable functions are described in order to analyze and interpret its variation, with particular emphasis on the graphical representation, it allows to recognize the overall characteristics of the function. To build the theoretical framework aspects related to the development of the concept of function were reviewed and synthesized, epistemological obstacles related to their construction were analyzed, elements of pedagogical and didactic proposals relevant both to the topic and to the development of virtual classrooms were adjusted and resumed.

Keywords: learning unit, functions, graphics, Moodle, LMS

Contenido

	Pág.
Resumen	IX
Lista de figuras	XII
Lista de tablas	XIII
Lista de Símbolos y abreviaturas.....	XIV
Introducción.....	1
1. Capítulo 1: Introducción y desarrollo de las diferentes formas de representación de las funciones de variable y valor real.....	3
1.1 Edad Antigua.....	3
1.2 Edad Media.....	4
1.3 Siglo XV, XVI y XVII	5
1.4 Siglo XVIII	6
1.5 Siglos XIX y XX.....	7
2. Capítulo 2: Obstáculos epistemológicos y cognitivos relativos a la interpretación de diferentes formas de representación de la función.....	9
3. Capítulo 3: Aspectos Conceptuales: la función de variable y valor real y sus diferentes formas de representación.....	13
3.1 Las funciones en dos textos educativos de diferente nivel	13
3.2 Acerca del concepto de función.....	17
3.3 Características de las formas de representación de una función y traducción de una a otra	19
Descripción verbal:.....	19
Tabla de valores:.....	19
Gráfica:	19
Fórmula o expresión algebraica:	19
3.4 Acerca del dominio y rango.....	20

3.5	Representación gráfica	22
3.6	Puntos de corte de la gráfica de una función con los ejes.....	22
3.7	Valores extremos de una función de valor real	23
3.8	Funciones básicas y operaciones entre funciones	25
3.9	Acerca del análisis de la variación	30
4.	Capítulo 4: Aspectos Didácticos: Análisis de investigaciones relacionadas con el proceso de enseñanza- aprendizaje de la función y sus formas de representación	33
5.	Capítulo 5: El uso de las TIC en la enseñanza – aprendizaje del álgebra en la educación básica y media.....	37
5.1	La sociedad de la información, las tecnologías y la educación	37
5.2	Los medios y las tecnologías en la educación	38
5.3	De la enseñanza asistida por computador al e- learning.....	39
5.4	El e-learning en la enseñanza aprendizaje de las matemáticas	41
6.	Capítulo 6: Propuesta didáctica para estudiantes de grado noveno sobre formas de representación de funciones de variable real y análisis de la variación usando Moodle.....	43
6.1	La unidad didáctica en el entorno e- learning.....	43
6.2	Evaluación de Aulas Virtuales.....	47
6.3	Prueba diagnóstica	48
6.4	Unidad Didáctica” Funciones,, su representación e Interpretación”	52
7.	Conclusiones y recomendaciones	59
Anexos	62
Bibliografía	105

Lista de ilustraciones

	Pág.
Ilustración 1-1: Representación de Euler	6
Ilustración 3-1 Dominio y Rango.....	21
Ilustración 3-2 Función constante	25
Ilustración 3-3 Función lineal	25
Ilustración 3-4 Función cuadrática	26
Ilustración 3-5 Función cúbica	28
Ilustración 3-6 Adición y sustracción de dos funciones	29
Ilustración 3-7 Producto y cociente de dos funciones	29
Ilustración 3-8 Composición de Funciones	30
Ilustración 6-1 Errores relativos a la ubicación de puntos en la recta numérica	49
Ilustración 6-2 Segmentos que suben y bajan	51
Ilustración 6-3 Dibujo gráfica continua	51
Ilustración 6-4 Dibujo gráfica discreta	52

Lista de tablas

	Pág.
Tabla 3-1 E concepto de función en dos textos escolares.....	13
Tabla 3-2 El dominio y el rango en dos textos escolares.....	14
Tabla 3-3 Las formas de representación en los dos textos	15
Tabla 3-4 Las funciones de valor y variable real en dos textos	16
Tabla 3-5 Función afín, polinómica, exponencial y logarítmica en dos textos.....	16
Tabla 3-6 Dos categorías en el concepto de función.....	17
Tabla 3-7 Traducción entre diferentes formas de representación.....	19
Tabla 3-8 El dominio y el rango de funciones lineales y cuadráticas	21
Tabla 3-9 Las gráficas de las funciones y sus intersecciones con los ejes coordenados	23
Tabla 3-10 Puntos críticos de las funciones	24
Tabla 3-11 Continuación tabla 3-11	24
Tabla 5-1 Componentes de la telecomunicación [12, p. 64].....	40
Tabla 6-1 Elementos de una unidad didáctica.....	44
Tabla 6-2 Herramientas potenciales de una plataforma e-learning.....	45
Tabla 6-3 Decálogo para la planificación de un modelo constructivista de enseñanza en un aula virtual	47
Tabla 6-4 Respuestas al ejercicio 7a en la prueba diagnóstica	49
Tabla 6-5 Respuestas al ejercicio 7b en la prueba diagnóstica	50
Tabla 6-6 Diseño de la Unidad Didáctica	52

Introducción

El estudio de las funciones se inicia en la básica y culmina en la educación superior dada la importancia de éste concepto para la formación matemática de los estudiantes pues permite describir y analizar la variación. Con las funciones es posible modelar diversidad de fenómenos y situaciones y por ello tienen aplicaciones en múltiples áreas del conocimiento como la economía, la biología, la física, la medicina, la sociología. Se utilizan además las funciones y sus distintas formas de representación en medios de comunicación como periódicos, revistas, internet, para describir información más detalladamente, esto hace que el proceso de enseñanza aprendizaje deba ser tomado con especial rigurosidad y cuidado.

Un trabajo a profundidad con el concepto y sus formas de representación desarrolla en los estudiantes habilidades para representar y analizar información de forma crítica y analítica tanto en el ámbito escolar como en el extraescolar. Sin embargo, las investigaciones respecto a las prácticas curriculares más corrientes, han concluido que en el aula el trabajo es precario, se limita usualmente al análisis esquemático de gráficas de diferentes tipos de funciones, sin contexto ni aplicaciones significativas, no se enfatiza, por ejemplo en la interpretación y descripción analítica de información o la modelación de fenómenos y situaciones de variación, que es realmente la esencia de su aplicación.

Teniendo en cuenta la experiencia en el aula, las consideraciones sobre la importancia del tema y la problemática observada, se estructuró a partir del análisis y la consulta este trabajo que intenta aportar a la solución del problema descrito y responder a la pregunta que lo motivó. ¿De qué forma se puede enriquecer la interpretación de situaciones y fenómenos de variación a través del análisis de la gráfica de funciones de variable real, usando el LMS Moodle?.

Los capítulos 1 a 4 del trabajo presentan fundamentos teóricos de la unidad. En el capítulo 1, se revisan aspectos de la evolución histórica del concepto de función desde la edad antigua: civilizaciones egipcia y babilonia hasta el siglo XX, analizando desarrollos relevantes que ayudaron a los matemáticos a construir definiciones cada vez más formales de este concepto y a comprender y describir las relaciones entre variables de forma verbal, tabular, gráfica o algebraica.

En el capítulo 2 se sintetizan resultados de las investigaciones de [1], [2] [3] [4] respecto a algunos de los errores conceptuales y obstáculos epistemológicos que evidencian los estudiantes al enfrentarse a situaciones y problemas relacionados con las funciones, especialmente en lo relativo al análisis e interpretación de sus diferentes formas de representación.

En el capítulo 3 se incluyen los aspectos conceptuales matemáticos relacionados con la unidad didáctica: las formas de representación de una función y las traducciones entre

ellas, características globales de las gráficas; dominio, rango, valores extremos, intervalos de crecimiento y decrecimiento de funciones y se analizan algunas funciones básicas. Con el objeto de elaborar un material que enriquezca otras propuestas, en este capítulo se presenta además, un análisis comparativo entre un texto universitario y uno de educación básica en cuanto a la introducción, ilustración y desarrollo del tema.

En el capítulo 4 se describen algunas investigaciones didácticas relacionadas con el proceso de enseñanza aprendizaje del concepto de función y sus formas de representación, elementos pertinentes de estas propuestas, se adaptaron e incorporaron para trabajar en el aula virtual donde se integran herramientas como foros, chat, video, imágenes, aplets etc.

En el capítulo 5, teniendo en cuenta las directrices del MEN respecto al uso de las tecnologías en el aula de matemáticas, se describen los desarrollos y aplicaciones de éstas y los retos que se plantean a los docentes en el siglo XXI, se menciona además, el papel que desempeñan las tic en el proceso de enseñanza aprendizaje del álgebra en la educación básica y media.

En el último capítulo de este trabajo el seis, se presenta la unidad didáctica integrada por 4 secuencias a ser desarrolladas en un Aula Virtual y alojadas en la Plataforma Moodle. Cada secuencia está constituida por unos recursos y unas actividades; los recursos son el material con el cual se enseña el tema: guías interactivas a través de objetos virtuales de aprendizaje (OVA) pdf, videos, imágenes etc., y a partir de esos recursos se plantean unas actividades que se pueden evaluar directamente en la plataforma y otras de manera presencial en el aula.

1. Capítulo 1: Introducción y desarrollo de las diferentes formas de representación de las funciones de variable y valor real

Históricamente el paso de la matemática de las constantes a la matemática del cambio se produjo a principios del siglo XVII cuando R. Descartes introdujo el concepto de magnitud variable, concepto que permitió establecer los fundamentos de la geometría analítica y desarrollar posteriormente los principios del análisis, en particular el concepto de función. Los conceptos relacionados con las magnitudes variables determinaron una nueva perspectiva (la analítica) para la teoría de las cónicas, como lo afirma Wusing¹.

A continuación se presenta una breve síntesis de algunos de los momentos claves de este desarrollo iniciado en la edad antigua hasta llegar al siglo XX, síntesis que permite apreciar la evolución del concepto y las dificultades que se presentan en su consolidación.

1.1 Edad Antigua

La idea de función, en sus inicios, está ligada a la noción de correlación o interdependencia entre variables relativas a fenómenos de la naturaleza. Pero si bien, en esta primera etapa, se elaboraron tablas que representan este tipo de correlaciones, no se llegó a precisar la noción de cantidad variable y de función; sin embargo, se puede concluir que hay una primera aproximación a la identificación de regularidades y relaciones básicos.

En la cultura babilónica (2.000 a.c. a 600 a.c.) se establecían ya correspondencias entre números naturales y esto se deduce al analizar las tablas de cuadrados, cubos y recíprocos que aparecen en las tablillas expresados en el sistema de numeración sexagesimal.

En la cultura griega, se pueden resaltar dos aportes a la construcción del concepto de función, el primero, el trabajo de Apolonio de Perga en el año 225 a.c. quien introdujo una teoría para describir las cónicas, con el objeto de resolver el problema de determinar circunferencias tangentes a tres círculos dados, problema conocido como de Apolonio; equivalente en el lenguaje actual al problema de determinar soluciones de la ecuación $ax + x^2 = bc$. La teoría construida por Apolonio fue el fundamento para trabajar

¹ Referenciado por Dolores Flores, Alarcón Bello, & Albarrán en el año 2002

posteriormente la geometría analítica, la representación algebraica y grafica de las cónicas.

Y el segundo, el de Ptolomeo de Alejandría (105 d.c), quien para registrar sus observaciones del cielo construyó tablas astronómicas en las que usó consistentemente y por primera vez, las hoy llamadas, razones trigonométricas, noción que fundamentó posteriormente el concepto de función trigonométrica.

Los obstáculos que impidieron a los matemáticos griegos establecer una noción más precisa del concepto de función se relacionan con la disociación entre número y magnitud y la visión estática de la matemática. Los números eran considerados discretos mientras que la magnitud es continua, el concepto de proporcionalidad se limitaba a establecer comparaciones entre magnitudes de la misma naturaleza y esto les impedía encontrar relaciones de dependencia entre variables relacionadas. Existía además, una fuerte dependencia de la geometría pues todos sus razonamientos y argumentos se fundamentaban en ella, obstáculo que fue superado siglos más adelante con el trabajo de Descartes en geometría analítica.

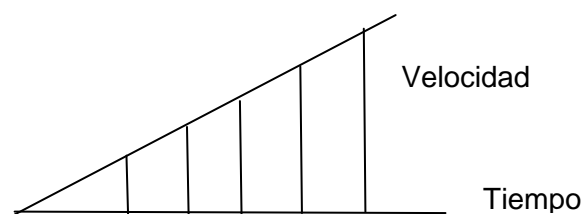
Del análisis de los trabajos mencionados y de otros documentos de la época los historiadores han concluido que en todos ellos, se utilizaron las tablas para establecer relaciones entre variables y esto podría considerarse como un primer paso en la construcción del concepto de función a través de una de sus formas de representación, la tabular.

1.2 Edad Media

En este periodo se empezaron a estudiar con sistematicidad fenómenos naturales como la luz, el calor, la distancia, la velocidad y esto condujo a desarrollar ideas relacionadas con cantidades variables y a introducir nociones de dependencia e independencia, a partir de un análisis inicialmente cualitativo.

Pero fue el trabajo de Nicolás de Oresme (1323-1328) el que rompió con la idea de que el movimiento solo puede ser descrito de forma cualitativa, para ello introdujo tempranamente un primer sistema de coordenadas. Interesado en representar la velocidad de un móvil a lo largo del tiempo, traza un segmento horizontal cuyos puntos representan, los sucesivos instantes de tiempo (longitudes) y para cada instante un segmento particular (latitud) cuya longitud representa la velocidad en aquel instante.

Como se observa en la gráfica



“Con ésta representación Oresme pretende que se entienda más fácil y más rápidamente la naturaleza de los cambios, ya sean cuantitativos o cualitativos, de forma que sea posible dar una representación de todos ellos”. [3].

Este matemático propuso por primera vez la idea de trazar gráficas para representar variaciones observadas como: la velocidad, la temperatura, la intensidad luminosa, además utilizaba las expresiones de “Longitud” y “latitud”, para la representación de las trayectorias de los astros, llevando esta idea a la representación gráfica de otras variaciones.

Oresme no graficó curvas en un sistema de coordenadas como hoy lo hacemos, pero su obra se constituyó en un paso importante para los comienzos de la geometría analítica. Aunque para esta época sus métodos eran muy limitados debido a que no había un desarrollo del álgebra.

1.3 Siglo XV, XVI y XVII

Es Galileo (1564-1642) quien en su trabajo, introduce por primera vez el concepto de relación funcional a partir del análisis del movimiento. Sus estudios sobre el movimiento muestran una clara comprensión de una relación entre variables, estableció para ello una correspondencia uno—uno entre los enteros positivos y sus cuadrados, es decir una biyección entre los números naturales y un subconjunto propio de él. Empleó la experimentación ayudándose de instrumentos de medida e incorporó el lenguaje de la teoría de las proporciones en su forma homogénea, introdujo lo cuantitativo en las representaciones gráficas y expuso las leyes, dando un sentido a la variación proporcional directa o indirecta.

“Los gráficos de Galileo proceden de la experiencia y de la medida. Las relaciones de causa y efecto están expresadas de forma cuantitativa verificable²”.

Con el trabajo de Vieta (1540-1603) sobre el Álgebra Simbólica y el de Galileo respecto al las leyes del movimiento se empezó a fundamentar de manera más precisa la noción de relación funcional, pero es R. Descartes (1596- 1650) quien plantea por primera vez el hecho de que una ecuación en variables x e y es una forma para expresar una dependencia entre dos cantidades variables de manera que a partir de ella es posible calcular los valores de una variable que corresponden a determinados valores de la otra.

Descartes introduce el álgebra a la geometría en la “Géometrie” (Geometría), prácticamente la totalidad de esta obra está dedicada a la interrelación entre el álgebra y la geometría. Sin duda la principal contribución de Descartes a la matemática fue su idea de que una curva puede dibujarse al permitir que una línea tome sucesivamente un número infinito de valores distintos que se pueden representar por medio de un par ordenado (x, y) las llamadas luego, en honor a él, **coordenadas cartesianas**. Esto permitió conectar el lenguaje geométrico, casi experimental y el lenguaje algebraico, al

² Ruiz 1998, La noción de función: análisis epistemológico y didáctico

relacionar una ecuación (representación algebraica) con una curva (representación gráfica).

Descartes y Fermat estudiaron respectivamente, ecuaciones a través del significado de las curvas su comportamiento y las propiedades definidas por las ecuaciones. Este trabajo fue el origen de la geometría analítica, pues una nueva curva se generaba ahora por una nueva ecuación

El término función fue usado por primera vez con su significado matemático, por Leibniz en agosto de 1673: Para él una curva estaba formada por un número infinito de tramos rectos infinitamente pequeños.

“Tanto Leibniz como Newton contribuyeron fuertemente al desarrollo del concepto de función. De Newton son conocidos sus tratados sobre fluxiones y sobre series infinitas. En el primero concibe las cantidades matemáticas como el movimiento continuo de un punto que traza una curva, cada una de estas cantidades que aparece (variable) es un fluente y su velocidad es una “fluxión”. La idea de función era muy restringida, se reducía a funciones analíticas inicialmente con base en lo que se podía expresar mediante una ecuación algebraica y posteriormente las desarrollables en serie de potencias”. [5].

1.4 Siglo XVIII

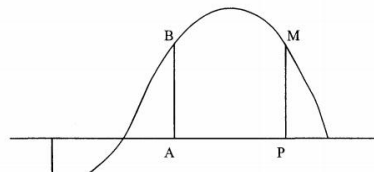
Jean Bernoulli (1667-1748) define por primera vez una función así: “Se llama función de una variable a una cantidad compuesta de la manera que sea, por esa variable y constantes”. Leonhard Euler, complementa la definición en 1748, en su libro “Introductio in analysin infinitorum”, cambiando la palabra “cantidad” por “expresión analítica”.

La restricción que supone la consideración “expresión analítica” desaparecerá en sus “*Institutiones Calculi Differentialis*” de 1755 en el que presenta una nueva definición:

“Si x es una cantidad, entonces toda cantidad que dependa de x de cualquier manera o que esté determinada por aquélla se llama una función de dicha variable”

Para representar gráficamente las funciones, “Euler se valía de un eje horizontal, de tal forma que si en dicho eje elegimos un punto fijo A (Ilustración 1), si x es una cantidad variable, los sucesivos valores de x se representan por distintos intervalos que se llaman abscisas. A la derecha de A las abscisas son positivas y a la izquierda negativas”. [6]. La imagen se presenta a continuación.

Ilustración 1-1: Representación de Euler



1.5 Siglos XIX y XX

Después de los últimos trabajos de Euler referentes a *funciones arbitrarias*, Charles Fourier hace importantes aportes relacionados con el desarrollo en serie de las funciones trigonométricas, y se introduce la teoría de números reales, paso fundamental en la construcción del concepto de función. La teoría formal de las funciones que se consolidada por Cauchy, Dedekind, Lobachevsky, Riemann y Dirichlet, entre otros.

Cauchy (1789 -1875) en su definición utiliza los términos variable independiente y variable dependiente. Más no aparecen representaciones gráficas al estilo de Euler.

“Cuando unas cantidades variables están ligadas entre ellas de tal manera que, dando el valor de una de ella se puede deducir el valor de las otras, concebimos de ordinario estas diversas cantidades expresadas por medio de una que toma el nombre de variable independiente y las otras cantidades expresada por medio de la variable independiente son las que llamamos, funciones de esta variable”. (Cauchy, Cours` Analysis).

Es Dirichlet (1805- 1859) quien define en 1837, el concepto de función en los siguientes términos: *“Si una variable y está relacionada con otra variable x de tal manera que siempre que se atribuya un valor numérico a x hay una regla según la cual queda determinado un único valor de y , entonces se dice que y es una función de la variable independiente.”*

El proceso de ajuste a la definición de función llevó varias décadas. A finales del siglo XIX y principios de XX se planteó un nuevo concepto el de “Conjunto”, que fundamentó las posteriores definiciones de función. La más importante fue propuesta por un grupo de matemáticos, el conocido grupo Bourbaki (por Nicolás Bourbaki), quienes en 1939 le imprimieron un carácter de mayor formalidad a la definición de función, de la siguiente manera: *“Una función es una regla de correspondencia entre dos conjuntos de tal manera que a cada elemento del primero conjunto le corresponde uno y sólo un elemento del segundo conjunto”.* Al primer conjunto se le da el nombre de dominio y al segundo conjunto se le da el nombre de contradominio o imagen.

Al analizar el proceso de evolución del concepto de función brevemente descrito en este capítulo, se puede apreciar la complejidad. Surgió de una observación informal de regularidades y de la necesidad de describir el cambio de fenómenos de la naturaleza; la descripción que inicialmente fue netamente cualitativa se transformó lentamente en cuantitativa con la ampliación de conceptos como número, variable, relación, curva... etc, y con el apoyo de las diferentes formas de representación (tabular, gráfica, simbólica). Estos conceptos y representaciones no solo se utilizan hoy en día para describir fenómenos sino para modelar diversas situaciones que se presentan en todos los ámbitos, sean sociales, económicos, científicos, etc.

El hecho de reconocer los diferentes momentos históricos, permite comprender que el concepto de función es tan complejo, que no se puede aprender en una clase y mucho menos, si se introduce en los niveles básicos, de manera esquemática y formal, usando la definición estática (conjuntista) punto culminante del proceso y no la dinámica variacional inicial, apoyada en la observación de regularidades, en el cambio y en el trabajo con diferentes formas representación.

2. Capítulo 2: Obstáculos epistemológicos y cognitivos relativos a la interpretación de diferentes formas de representación de la función

Un tema básico a trabajar con los estudiantes de básica y media en el eje de pensamiento variacional es el relacionado con las diferentes formas de representación de las funciones de variable real: verbal, tabular, algebraica y la gráfica; todas ellas, fundamentales para comprender e interpretar el comportamiento de las funciones, dado que permiten modelar variedad de fenómenos y hechos naturales y sociales.

Como en los textos y artículos, la información y descripción de situaciones y fenómenos, privilegia la representación gráfica, es muy importante trabajar sistemáticamente con los estudiantes este tipo de representación y por ello se describen a continuación obstáculos epistemológicos, dificultades y errores que según investigaciones didácticas reportadas, presentan los estudiantes de básica y media con este tipo de representación de la función.

R. Duval [2], en el marco de su investigación respecto a los sistemas de representación semiótica afirma que se presentan problemas para trabajar con diferentes formas de representación de la función y la traducción entre ellas por el tipo de prácticas en el aula. Cuando se indaga por la traducción entre formas de representación se enfatiza únicamente en la tareas de pasar de una ecuación a un gráfico o dado el gráfico se exige solamente leer valores; en los dos casos se requiere simplemente asociar un punto y un par ordenado de números y esto no requiere ninguna articulación entre los dos sistemas de representación, ni crea un puente entre ellos. Además, las representaciones gráficas se presentan en el contexto de un problema o de un ejercicio puntual, los alumnos no se enfrentan a situaciones en las que tengan que comparar gráficos semejantes (visualmente), pero que sin embargo corresponden a funciones diferentes.

Respecto a la traducción de un enunciado a una ecuación a un sistema de ecuaciones en estas tareas afirma Duval se requieren dos razonamientos complejos que no se sitúan en el mismo nivel: primero deben identificar las cantidades desconocidas, elección de la incógnita y segundo debe plantear una ecuación para lo cual es necesario establecer una relación de equivalencia entre dos cantidades desconocidas; la mayoría de estudiantes no logran explicar la relación entre las diferentes expresiones. Esto sumado a que en ocasiones al realizar la representación gráfica, los estudiantes tienen problemas con la representación o identificación de puntos en el plano cartesiano sobre todo cuando se tienen número fraccionarios, decimales o irracionales.

Duval plantea además que la mayor dificultad que tiene los estudiantes para: “la comprensión es la posibilidad de TRANSFERIR lo que se ha aprendido a nuevos y diferentes contextos, dentro y fuera de las matemáticas, y esto siempre implica la conversión de representación”, y a esto se agrega que los objetos matemáticos no son accesibles físicamente, la única forma de acceder a ellos es a través de signos y representaciones semióticas con el fin de trabajar en ellos y con ellos, sustituyendo unos signos por otros, cambiando de un sistema a otro sin cambiar las propiedades matemáticas representadas.

Respecto a las concepciones y dificultades relativas a la representación y análisis de gráficas, en el artículo de investigación “Lectura e interpretación de gráficas socialmente compartidas” [1] los autores analizan cómo un grupo de estudiantes de primaria y secundaria leen e interpretan gráficas de variación que se presentan en medios de comunicación y en la escuela en diferentes ámbitos.

En el marco de esta investigación se usaron instrumentos que presentaban gráficas relativas a ambientes extraescolares y escolares, y se solicitó a los estudiantes describir oralmente toda la información que podían deducir de las gráficas.

Específicamente, comentan los investigadores que en la gráfica que modela un fenómeno de variación en un contexto de cambio de coordenadas tiempo-distancia, evidenciaron las siguientes concepciones erróneas.

Los estudiantes

- Asocian mayor velocidad media con la representación gráfica de la ordenada de mayor altura, o con el intervalo al que le corresponden las ordenadas de mayor altura.
- Asocian la gráfica cartesiana con el dibujo que se asemeja a la trayectoria por ejemplo, el caso de caída libre.
- No aceptan que una gráfica de coordenadas tiempo-distancia y otras de coordenadas velocidad-tiempo puedan representar al mismo movimiento.

Identificaron además los investigadores, concepciones e ideas previas acerca de las funciones y su representación que se listan a continuación:

Los estudiantes

- Consideran que sólo las funciones cuyas gráficas poseen abscisas positivas tienen imágenes positivas; análogamente, sólo las gráficas con abscisas negativas pueden tener ordenadas negativas.
- Identifican ser creciente con ser positiva o ser negativa con ser decreciente:
- consideran que los puntos de corte de la gráfica con el eje de las x son estacionarios (no puede darse un cambio de la función en ellos), o bien que si una gráfica pasa por el origen, entonces en tal punto la función no puede crecer ni decrecer.
- Asocian intervalos con puntos en la gráfica.

Respecto a la interpretación de las gráficas de funciones en [1] mencionan los siguientes aspectos,

- Solo la mitad de los estudiantes que participaron en la investigación lograron describir el cambio a partir del análisis de una gráfica y tan solo una cuarta parte dieron muestras de interpretar consistentemente la ecuación de la recta, dada su pendiente y la ordenada al origen y representarla gráficamente, aunque, no emplearon la relación de proporcionalidad implícita en el coeficiente, la pendiente. En general se detectó escasa capacidad para visualizar gráficas
- Cuando lo que cambia esta expresado en términos de variables concretas la mayoría de los estudiantes no tienen problemas en identificarlas, incluso en usarlas para sus descripciones; sin embargo algunos estudiantes realizan interpretaciones erróneas acerca de qué variables son las que están representadas en las gráficas.
- Cuando se les muestra una gráfica cuyos ejes están etiquetados con las letras x y $f(x)$ no le dan sentido de variable abstracta, sino la asocian con alguna variable concreta que conocen.
- Cuando los estudiantes realizan la lectura de las gráficas no usan cuantificación aritmética, ni correlacionan los cambios de una variable con los cambios de la otra.
- Realizan estimaciones visuales de comparación con expresiones: como aumento, aumento poco, subió muchísimo más, pero no al “cuánto cambio eso que cambia”.
- Se nota en las lecturas e interpretaciones de los estudiantes la tendencia a leer dato por dato o punto por punto, de izquierda a derecha. Pocos determinan o describen comportamientos cuantitativos de ¿Cuánto aumento? ¿Cuánto bajo? o cuál es la razón de cambio promedio.
- La mayoría de los estudiantes, en particular en primaria centran su atención en la lectura de puntos máximos y mínimos. Ningún estudiante usó el cálculo de diferencias para medir los cambios o de las razones de cambio para analizar la rapidez del comportamiento de las modificaciones.
- En las gráficas socialmente compartidas a través de los medios de comunicación e información, los estudiantes leen los títulos o los letreros pero manifestaron un escaso dominio sobre el significado de las variables.
- En gráficas que no tienen título ni letreros sobre variables concretas, los estudiantes dicen no entender y recurren a dar alguna interpretación concreta de las gráficas que habían leído antes. Así, generan relaciones entre el nuevo material y la información existente y su memoria.

Los errores mencionados impiden a los estudiantes extraer e interpretar la información que se presenta en las gráficas y originan dificultades para usar este conocimiento en la solución de problemas de otras ciencias. Estas dificultades se han evidenciado en los análisis de los resultados de las pruebas saber de quinto y noveno grado y en las prácticas de aula, en los que tan solo, el 52% de los estudiantes de noveno reconocen distintas formas de representar una función; el 19% utiliza expresiones algebraicas y representaciones gráficas para modelar situaciones sencillas de variación y el 3% está en capacidad deducir a partir de la representación algebraica las propiedades de una función.

La mayoría de los estudiantes identifican las diferentes formas de representar una función: tabular, algebraica gráfica, no las relacionan entre sí, por tanto no pueden traducir o pasar de una a la otra.

Las investigaciones referidas, y otras citadas por éstas, aparte de la experiencia en las aulas y los análisis de evaluaciones censales en nuestro país permiten concluir que en las prácticas curriculares usuales el trabajo con las funciones y sus diferentes formas de representación es precario; se limita usualmente al análisis esquemático de gráficas de diferentes tipos de funciones: lineal, polinomial, exponencial, racional, etc., sin contexto o aplicación; generalmente se enseña cómo realizar la representación tabular, algebraica o gráfica de las funciones, pero no a describir e interpretar analíticamente información o situaciones que se pueden modelar a través de ellas, que es realmente la esencia de su aplicación. Lo anterior conduce a que el estudiante cometa errores como los ya mencionados.

3. Capítulo 3: Aspectos Conceptuales: la función de variable y valor real y sus diferentes formas de representación

En el capítulo uno se realizó una revisión histórica de la manera como las diferentes formas de representación llevaron a la construcción del concepto de función; en el capítulo dos se han descrito algunos obstáculos epistemológicos relativos a la interpretación de funciones de variable real, en este capítulo se quieren presentar aspectos conceptuales referentes a la función, los conceptos relacionados con ella y las traducciones entre las diferentes formas de representación. Para introducir esta discusión se presenta un cuadro comparativo del tratamiento que se da al tema en un texto de enseñanza superior y en uno de educación básica, grado noveno, con la intención de identificar posibles dificultades didácticas de su presentación y carencias respecto al análisis de formas de representación.

3.1 Las funciones en dos textos educativos de diferente nivel

Tabla 3-1 El concepto de función en dos textos escolares

DEFINICIÓN DE FUNCIÓN	
Texto universitario	Texto escolar
<p>Primero hacen una introducción al tema. Pág. 29: “la noción de correspondencia aparece frecuentemente en la vida diaria. Por ejemplo, A cada libro de una biblioteca le corresponde un número de páginas; a cada ser humano le corresponde una fecha de nacimiento; si se registra la temperatura del aire a los largo de un día, entonces a cada instante de tiempo le corresponde una temperatura....”.</p> <p>Y más adelante definen la función como: “Una función f de un conjunto D a un</p>	<p>En la p. 82 aparece el título “FUNCIONES”, e inmediatamente, sin introducción alguna se presenta la siguiente definición: “ Una función es una regla o correspondencia que asigna a cada elemento de un conjunto A, uno y solo un elemento de conjunto B</p> <p>Las funciones se simbolizan con letras minúsculas, generalmente f, g, h, entre otras. En una función que se define del conjunto A en el conjunto B, se utiliza la notación $f: A \rightarrow B$ donde A es el conjunto de partida</p>

<p>conjunto E es una correspondencia que asigna a cada elemento x de D un elemento único y de E”.</p>	<p>y B es el conjunto de llegada. Así, si $x \in A$ y $y \in B$, la expresión $f(x) = y$ se lee efe de x es igual a y, se interpreta así: El elemento $x \in A$ está relacionado con el elemento $y \in B$ por medio de la función f. La imagen el elemento x en la función f es el elemento y” Y luego realizan una representación sagital de la definición presentada anteriormente.</p>
<p>Es decir que para introducir el concepto de función en el texto escolar en el que se esperaría un tratamiento más didáctico, se recurre a un método tradicional, introducir los conceptos sin presentar aproximaciones previas o ilustraciones. Se sobreentiende además que el estudiante conoce la teoría básica de conjuntos y entiende la noción de correspondencia. Se utiliza en él notación y lenguaje formal para nombrar las funciones y establecer la correspondencia, posiblemente el estudiante va a memorizar esta información sin comprender su significado. La definición que presentan los dos textos es conjuntista.</p>	

Tabla 3-2 El dominio y el rango en dos textos escolares

DOMINIO Y RANGO DE UNA FUNCIÓN	
Texto universitario	Texto escolar
<p>Página 30:</p> <p>“El conjunto D se llama dominio de la función. El contradominio f es el conjunto de E que consta de todos los valores posibles $f(x)$ para x en D”.</p> <p>A continuación pasan a definir funciones pares e impares, dan algunos ejemplos, explicación sobre la simetría de las funciones, ejemplos de cómo representar gráficamente funciones definidas a trozos y finalmente se propone un taller con ejercicios y problemas sobre el tema.</p>	<p>En la página 82:</p> <p>“En una función $f: A \rightarrow B$ se definen los siguientes elementos:</p> <p>Dominio: es el conjunto de salida de la función. Se simboliza $Dom f$.</p> <p>Codomio: es el conjunto de llegada de la función. Se simboliza $Cod f$.</p> <p>Rango: es el conjunto formado por los elementos del codominio, que son la imagen de los elementos del dominio. Se simboliza $ran f$.</p> <p>Grafo: es el conjunto formado por todas las parejas ordenadas (x,y) tales que $x \in Dom f$ y $y \in Ran f$”</p> <p>Se ilustran las anteriores definiciones con algunos ejemplos: relaciones que son funciones y otras que no lo son presentadas a través de diagramas sagitales; a continuación se proponen unos ejercicios parecidos al ejemplo y se termina esta sección.</p>
<p>Se observa que se realizan explicaciones sin contexto ni ilustración, se definen términos que el estudiante debe memorizar para lo cual no hay una clara interpretación. Es de anotar que en el texto universitario se puede asumir por el nivel, que estos conceptos han sido trabajados previamente y no se requeriría explicación adicional, pero en el texto básico no es posible hacer esta asunción.</p>	

Tabla 3-3 Las formas de representación en los dos textos

FORMAS DE REPRESENTACIÓN DE UNA FUNCIÓN	
Texto universitario	Texto escolar
<p>No se encuentra un apartado especial sobre las diferentes formas de representación de la función y el paso de una a otra. A partir de la página 40 hasta la 46 se realiza una explicación de las operaciones con funciones en la cual se describe como trazar gráficas de funciones cuando se aplica una transformación a la función: traslación o reflexión, en especial haciendo referencia a funciones polinómicas y racionales. En la página 47 se proponen ejercicios para trazar gráficas de funciones y sus transformaciones, y para encontrar adición, sustracción, producto, cociente y composición de funciones.</p> <p>El siguiente capítulo del libro de cálculo trabaja límites de funciones, tema que no se revisara en este apartado.</p>	<p>Textualmente se toma lo planteado en la página 84, titulada</p> <p>“REPRESENTACIÓN DE FUNCIONES</p> <p>Para representar funciones se puede utilizar la forma verbal, la fórmula, la tabla de valores y la gráfica.</p> <p>Forma verbal: es la relación entre las variables que se realiza por medio de un enunciado, es decir, una descripción con palabras.</p> <p>Fórmula: es la relación entre las variables que se realiza mediante una expresión algebraica. Esta expresión se simboliza como $y=f(x)$ y se llama ecuación de la función.</p> <p>En la expresión $f(x)$, x es la variable independiente y representa los elementos de Dom f; y es la variable dependiente y representa los elementos de Ran f.</p> <p>Tabla de valores: es un arreglo con dos filas, en la fila superior se ubican los valores que se obtienen para la variable dependiente.</p> <p>Gráfica: es un diagrama sagital o un diagrama cartesiano en el que se ubican los elementos del dominio en el eje horizontal y los elementos del codominio en el eje vertical.</p> <p>Una función puede ser representada en las cuatro formas anteriores, adquiriendo gran importancia, pasar de una representación a otra; sin embargo, algunas funciones son descritas en forma más precisa mediante una forma en lugar de otra.</p> <p>Por ejemplo, representar la función $f: X \rightarrow Y$ en forma de diagrama sagital, tabla de valores, diagrama cartesiano y por fórmula; determinada por el enunciado “a cada elemento de A se le asigna su doble menos un en y”. Si $x = \{1,2,3,4\}$ y $y = \{0,1,2,3,4,5,6,7\}$ “</p> <p>Presentan las formas de representación mencionadas y se pasa a proponer una actividad para practicar lo expuesto.</p>
<p>En el texto universitario no consideran la traducción entre las formas de representación (asumen de nuevo que ya han sido trabajadas en la básica), y en el texto escolar aunque comentan que es de “gran importancia pasar de una representación a otra”, no explican cómo traducir entre ellas; a partir de un solo ejemplo se supone entendido cómo realizar esta traducción.</p>	

Tabla 3-4 Las funciones de valor y variable real en dos textos

FUNCIÓN DE VARIABLE REAL	
Texto universitario	Texto escolar
No hay un apartado específico donde definan la función de variable real, pero se sobrentiende que se está trabajando este tipo de función dado que el primer capítulo está dedicado a la teoría fundamental de reales y la representación en sistemas de coordenadas cartesianas.	PAGINA 86: “Una función f es de variable real cuando su dominio y su rango son el conjunto de los números reales o un subconjunto de mismo. En las funciones de variable real no es posible indicar todas las parejas ordenadas que constituyen una función real, por tanto se utiliza una fórmula $y=f(x)$ para referirse a estas funciones”.
En el texto escolar se realiza un apartado con la definición de función de variable real y se pasa a otro tema.	

Tabla 3-5 Función afín, polinómica, exponencial y logarítmica en dos textos

FUNCIÓN LINEAL, AFÍN, POLINOMICA, EXPONENCIAL Y LOGARITMICA	
Texto universitario	Texto escolar
Antes de definir que es una función, en el apartado de sistemas de coordenadas del capítulo 1, describen la ecuación de la circunferencia y de la recta, pero no hay un capítulo dedicado a funciones polinómicas o racionales aunque aparecen en la discusión y ejemplos del texto. En el capítulo 7 se trabajan las funciones exponenciales y logarítmicas, desde el uso de herramienta del cálculo diferencial e integral.	PAGINA 86: Después de explicar el concepto de función de variable real, explican de forma general que es una función lineal y una función afín, luego definen línea recta, la ecuación de la recta, la posición relativa entre dos rectas en el plano y finalizan la unidad 4 con sistemas de ecuaciones lineales. En el capítulo 5 pág. 126 presentan la gráfica de la función cuadrática y ecuaciones cuadráticas. En el capítulo 6 las gráficas de la función exponencial y la función logarítmica. De 10 unidades que contiene el libro, 4 están destinadas para el tema de funciones, pero en ninguna aparecen explicaciones sobre una determinada forma de representación o el paso de una a otra. Tampoco aparece un apartado destinado a interpretar analíticamente una función.

Teniendo en cuenta mi experiencia como docente de educación básica secundaria, de estudiante de pregrado y el análisis de los textos, se puede concluir que el trabajo con las formas de representación de una función es mínimo, se ignora posiblemente que justamente estas formas permiten aproximarse al concepto de función, es entonces importante insistir a los docentes que las incluyan a profundidad en el diseño de sus unidades didácticas

Para abordar este tema tanto conceptual como didácticamente, se presenta a continuación una discusión sintética formal que sustenta los tópicos que se incluirán en la

unidad didáctica. Se incluyen algunos aspectos teóricos del concepto de función, las características y la interpretación de la variación.

3.2 Acerca del concepto de función

En diversos campos de la actividad humana, se describen a través de diferentes formas de representación relaciones, entre conjuntos de objetos; gráficas, cartogramas, curvas, tablas, fórmulas, encuestas en la opinión pública, etc. Son familiares a todo aquel que lee los periódicos, todas estas formas de representación que permiten en realidad describir cuantitativamente relaciones especiales. En matemáticas algunas de estas relaciones son funciones.

Notación:

Para nombrar o designar funciones se utilizan corrientemente letras del alfabeto español y griego; se usan con mayor frecuencia las letras f, g, h, G, H y ϕ . Si f es una función dada y x es un objeto de su dominio, la notación $f(x)$ se utiliza para designar el objeto que en el recorrido corresponde a x, en la función f, y se denomina el valor de la función f en x o la imagen de x por f. El símbolo $f(x)$, se lee, “f de x”.

Las funciones se pueden expresar implícita o explícitamente mediante una ecuación que permite definir las. Ejemplo:

Ejemplo función implícita	Ejemplo de función explícita
$x^2 + 2y = 1$	$y = \frac{1}{2}(1-x^2)$

¿Cómo se definió y cómo se define el concepto de función?

En los textos de historia del álgebra y del cálculo se describe el origen y la evolución del concepto, como ya se mencionó en el primer capítulo; y en épocas más recientes tanto los epistemólogos, como los investigadores en la didáctica del cálculo han propuesto categorías para esta definición, los segundos analizan además la relevancia y pertinencia de estas definiciones en el contexto de la matemática escolar. En este sentido Vargas y Nuñez en el 2011 organizaron dos categorías o perspectivas de la definición: la analítica y la conjuntista, que se presentan en el siguiente cuadro.

Tabla 3-6 Dos categorías en el concepto de función

ANALÍTICA	CONJUNTISTA
<p>Gregory (1638-1675). <i>“una cantidad que se obtiene de otras cantidades mediante una sucesión de operaciones algebraicas o mediante cualquier operación imaginable”</i></p> <p>Leibniz (1646-1716). <i>“cualquier cantidad que varía de un punto a otro, de una curva, tal como la longitud de la tangente, de la normal, de la subtangente y de la ordenada”</i></p>	<p>Dedekind (1887). <i>“Por una representación ϕ de un sistema dado entendemos a una ley, de acuerdo a la cual a cada elemento determinado de un sistema se le asocia un determinado objeto que se denomina imagen de s y se denota por el símbolo $\phi(s)$; es posible decir que $\phi(s)$ se obtiene</i></p>

<p>Euler (1707-1783). “Si algunas cantidades dependen de otras cantidad de modo que si las últimas cambian, las primeras también lo hacen, entonces las primeras cantidades se llaman método por el cual una cantidad pudiera ser determinada por otras. Si por consiguiente, x denota una cantidad variable, entonces toda cantidad la cual depende de x en cualquier manera o este determinada por ella es llamada una función de ella”</p> <p>Lagrange (1736-1813). “llamamos función a toda expresión matemática de una o varias cantidades en la cual estas aparecen de cualquier manera, relacionadas o no con algunas cantidades que son consideradas como constantes, mientras las cantidades de la función pueden tomar todos los valores posibles”</p> <p>Fourier (1772-1837) “ Una función $f(x)$ representa una sucesión de valores u ordenadas, cada una de las cuales es arbitraria”</p> <p>Dirichlet (1805-1859). “y es una función de la variable x, definida en el intervalo $a < x < b$, si para todo valor de la variable x en ese intervalo, le corresponde un valor determinado de la variable y”</p> <p>Hankel (1839-1873) “se dice que y es función de x si a cada valor de x de un cierto intervalo corresponde un valor bien definido de y, pero sin que esto exija que y se definida sobre todo el intervalo por la misma ley en función de x, ni tampoco que y sea definida por una expresión matemática explícita de x”</p>	<p>de s por medio de la representación, o que s es transformado en $\phi(s)$ por la representación ϕ”.</p> <p>George Cantor. “toda correspondencia arbitraria que satisfaga la condición de unicidad entre conjuntos numéricos y no numéricos.</p> <p>Bourbaki (1939). “Sean E y F dos conjuntos, diferentes o no. Una relación entre una variable x de E y una variable y de F se dice relación funcional de E hacia F, si, cualquiera que sea x de E, existe un elemento y de F, y uno solo, que esté en la relación considerada con x. Se da el nombre de función a la operación que asocia así a todo elemento x de E el elemento y de F que se encuentra en la relación dada con x; se dice que y es el valor de la función para el elemento x, y que la función está determinada por la relación funcional determinada”</p>
--	--

Es importante resaltar aquí que justamente las definiciones caracterizadas como conjuntistas son las que aparecen generalmente en los libros de texto usados tanto en los niveles básicos como superiores como se ilustra en el tabla 3-1 o como se reafirma en las siguientes citas:

“Una función es un conjunto de pares ordenados de números (x, y) en los que no existen dos pares ordenados diferentes con el mismo primer número. El conjunto de todos los valores admisibles de x se denomina dominio de la función, y el conjunto de los valores resultantes de y recibe el nombre de contradominio de la función.” [7]

Una función es una regla o correspondencia que asigna a cada elemento de un conjunto A , uno y solo un elemento del conjunto B . (Hipertexto Santillana 9, 2010)

“una función f es un conjunto de pares ordenados (x,y) ninguno de los cuales tiene el mismo primer elemento”. [7].

3.3 Características de las formas de representación de una función y traducción de una a otra

Considerando la función como una relación de dependencia entre variables es posible diferenciar los siguientes tipos de representación:

Descripción verbal: Utiliza el lenguaje común para darnos una visión general cualitativa de la relación funcional y a ella se hace referencia cuando se quieren interpretar las otras formas de representación.

Tabla de valores: Presenta una visión cuantitativa de la función y por ello es fácilmente interpretable desde la óptica de una correspondencia.

Gráfica: permite obtener una visión general y completa de la función estudiada, tanto cualitativa como cuantitativa, proporcionando mayor información que las anteriores. Permite ver las características globales de la función (variaciones, periodos constantes, crecimiento, continuidad, concavidad, máximos y mínimos, periodicidad, etc.), también determinables a partir de la ecuación, pero mucho más difíciles de interpretar, mientras que a través de la gráfica el proceso es mucho más directo aunque nos da, tan solo valores aproximados.

Fórmula o expresión algebraica: Permite como la anterior obtener una visión general y completa de la función estudiada, tanto cualitativa como cuantitativa.

El aprendizaje de las funciones pasa, en primer lugar, por un conocimiento de cada uno de estas formas de representación, es decir, por la adquisición de la capacidad para leer e interpretar cada una de ellas y posteriormente traducir de una a otra.

Es posible pasar de una a otra forma de representación y cada una de estas posibles traducciones proporciona elementos interesantes para el análisis de la función como lo sintetiza [4, p. 63] en el siguiente cuadro:

Tabla 3-7 Traducción entre diferentes formas de representación

	<i>Hacia</i>	<i>Descripción</i>	<i>Tabla</i>	<i>Gráfica</i>	<i>Fórmula</i>
<i>Desde</i>		<i>verbal</i>			
<i>Descripción verbal</i>		_____	Medida	Boceto	Modelo
<i>Tabla</i>		Lectura	_____	Trazado	Ajuste
<i>Gráfica</i>		Interpretación	Lectura	_____	Ajuste
<i>Fórmula</i>		Interpretación	Cómputo	Gráfica	_____

La importancia de reconocer, interpretar y usar las diversas formas de representación de una función y de realizar traducciones de una a otra ha sido sustentada por diversos investigadores en educación matemática, con argumentos como los siguientes:

“La idea de función nace a partir del estudio de fenómenos de cambio, y se expresa a través de diferentes lenguajes (verbal, tabulado, Gráfico, algebraico, etc.) cada uno de ellos apropiado para poner de relieve ciertas características de las funciones. A los problemas generados por la física y especialmente por el estudio del movimiento, verdadero motor del desarrollo de las funciones, debemos añadir las numerosas situaciones que podemos encontrar en nuestra vida cotidiana. La finalidad de llegar a determinar con precisión como varían magnitudes que dependen de otras, es lo que da sentido al estudio de las funciones, así como el conocimiento de determinados modelos, empezando por los más elementales, a los cuales se ajustan muchas aquellas situaciones” [4]

“La traducción entre diferentes formas de representación es un aspecto esencial en la enseñanza y en el aprendizaje de las funciones, ya que permite que el alumno capture el comportamiento de una función desde diversos ángulos enriqueciendo su comprensión”. [3].

Según Duval (1998) citado por González [3] , “la articulación de varios registros de representación es necesaria para una buena apropiación de los objetos matemáticos”.

“La traducción entre las distintas formas de representación enriquece las imágenes de los alumnos acerca de cómo una misma situación puede ser representada de modos diferentes, a la vez que se le induce a la reflexión de cuál es la forma de representación más adecuada a cada situación concreta.” [6]

Según Azcarate, las gráficas cartesianas permiten estudiar las funciones y sus características globales, sin necesidad de recurrir prematuramente a rigurosas definiciones de conceptos muy abstractos que en su opinión el trabajo formal debe quedar para niveles superiores, fuera ya del alcance de la enseñanza básica. Teniendo en cuenta además, como se describió en la síntesis histórica, el llegar a su comprensión y formalización requirió un camino bastante largo y complejo.

Teniendo en cuenta el análisis histórico, la importancia de trabajar los diferentes sistemas de representación, y la complejidad del concepto de función una posible secuencia didáctica para introducir los conceptos de variación y en particular el de función podría iniciar con el análisis cualitativo de la variación en tablas y gráficas de relaciones funcionales, para posteriormente trabajar con fórmulas y modelos funcionales a través de situaciones de aplicación.

3.4 Acerca del dominio y rango

El dominio y el rango de una relación cuando modela una situación de aplicación están normalmente limitados por la naturaleza de la situación. Por ejemplo, en el lanzamiento de una pelota al aire, el tiempo y altura son las variables, la altura depende del tiempo. El dominio de esta relación funcional es cada valor de tiempo durante el lanzamiento, e

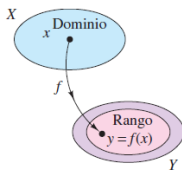
inicia desde el instante en que la pelota abandona la mano hasta el instante que la pelota regresa a ella. Digamos que la pelota estuvo en el aire durante 10 segundos, en ese caso, el dominio es intervalo $[0, 10]$ segundos. Ya que el tiempo transcurre continuamente durante éste intervalo.

El rango es cada altura que alcanza la pelota mientras está en el aire, e incluye todas las alturas, desde la altura de la mano al lanzar la pelota, hasta el punto más alto alcanzado antes que ésta empezara a caer. Si la mano estaba a 3 pies del suelo cuando se lanzó y atrapó la pelota, y la distancia más alta que alcanzó fue de 12 pies también con respecto al suelo, entonces el rango es de $[3, 12]$ pies. Ya que la altura cambia constantemente durante éste intervalo.

De manera formal el dominio y el rango se definen así:

Ilustración 3-1

Dominio y Rango



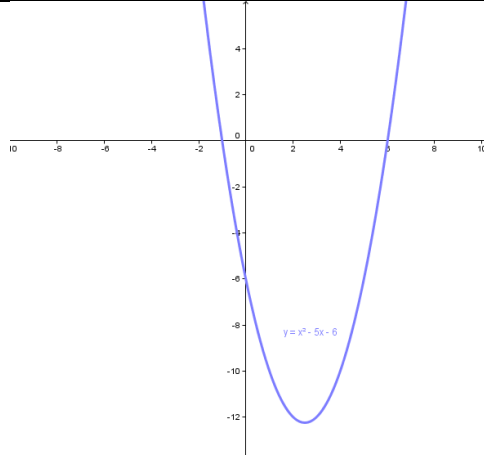
Una función real f de una variable real

“El **dominio** de f es el conjunto X . EL número y es la imagen de x por f y se denota mediante $f(x)$, a lo cual se le llama el valor de f en x . El recorrido o rango de f se define como el subconjunto de Y formado por todas las imágenes de los números de X , como se muestra en la figura 2”. [7, p. 19].

Ejemplos

Tabla 3-8 El dominio y el rango de funciones lineales y cuadráticas

Función	Grafica	Dominio y rango
a. $y = 3x + 5$		<p>La gráfica de la función es una línea recta continua, que se extiende indefinidamente en ambas direcciones. Para ésta función, no hay restricciones para el dominio ni para el rango. Cualquier número real tiene una imagen y dado un real arbitrario existe otro real del cuál es imagen. El dominio y el rango es el conjunto de los números reales</p>

<p>b.</p> $y = x^2 - 5x - 6$		<p>La gráfica de esta función es una parábola. Cada número real tiene una imagen, el dominio de esta función cuadrática son los números reales, y el rango como se puede observar en la gráfica, se puede identificar ubicando las coordenadas del vértice de la parábola: $(3, -12)$. El rango es entonces el intervalo $[-12, \infty)$</p>
------------------------------	---	--

3.5 Representación gráfica

La gráfica de una función está formada por todos los puntos de la forma $(x, f(x))$ donde x , pertenece al dominio de f y $f(x)$ es la imagen de x por f . Una recta vertical que se trace en un sistema de coordenadas cartesianas corta la gráfica de una función f de variable x a lo más una vez. Esta observación proporciona un criterio visual adecuado (llamado criterio de la recta vertical).

Cuando una función se define implícitamente, el determinar su dominio y rango puede tener especial dificultad desde el punto de vista de la manipulación algebraica, en esos casos el partir de la representación gráfica permite visualizarlos y describir además características generales de la función.

3.6 Puntos de corte de la gráfica de una función con los ejes

Para hallar el punto donde la gráfica de la función corta al eje de ordenadas (eje Y) se resuelve el sistema

$$\begin{aligned} y &= f(x) \\ x &= 0 \end{aligned}$$

Para hallar el punto donde la gráfica de la función corta al eje de las abscisas (eje X) se resuelve el sistema

$$\begin{aligned} y &= f(x) \\ y &= 0 \end{aligned}$$

Ejemplos:

Tabla 3-9 Las gráficas de las funciones y sus intersecciones con los ejes coordenados

$Y = 3x + 2$	$y = x^2 - 5x - 6$
<p>Corte con el eje y tomamos $x=0$ en la expresión</p> $y = 0 * 3 + 2$ $y = 2$ <p>Corte con el eje x igualamos $y=0$.</p> $0 = 3x + 2$ $X = -2/3$ <p>Los puntos de corte son: $(0,2)$ y $(-\frac{2}{3}, 0)$</p>	<p>Corte con el eje y tomamos $x=0$</p> $y = 0^2 - 5 * 0 - 6$ $y = -6$ <p>Corte con el eje x igualamos $y=0$.</p> $0 = x^2 - 5x - 6$ <p>Para hallar estos cortes se puede factorizar el polinomio o utilizar la fórmula cuadrática.</p> $0 = (x - 6)(x + 1)$ <p>Los puntos de corte son: $(0, -6)$, $(6,0)$ y $(-1,0)$</p>

3.7 Valores extremos de una función de valor real

Sea f una función a valor real definida sobre un subconjunto S de números reales. Se dice que la función f tiene un *máximo absoluto* en el conjunto S si existe por lo menos un punto c en S tal que

$$f(x) \leq f(c) \text{ para todo } x \text{ en } S$$

El número $f(c)$ se llama máximo absoluto de f en S . Decimos que f tiene un *mínimo absoluto* en c si existe un punto d en S tal que

$$f(x) \geq f(d) \text{ para todo } x \text{ en } S$$

Tabla 3-10 Puntos críticos de las funciones

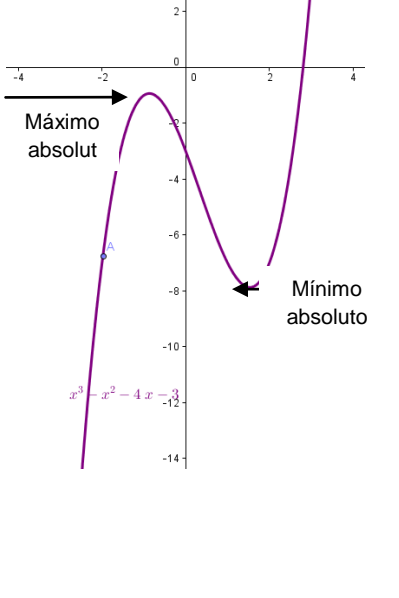
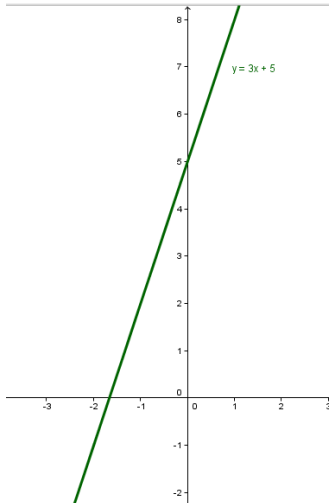
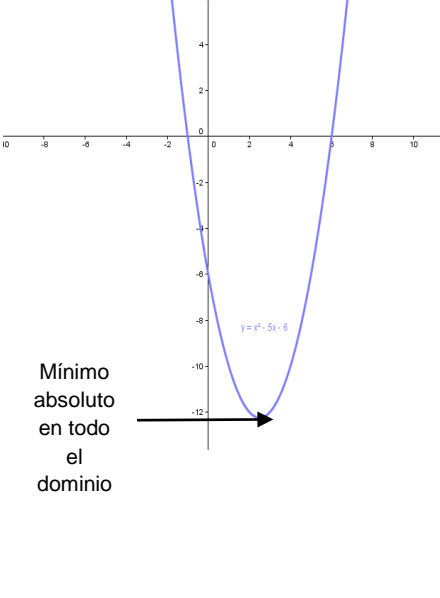
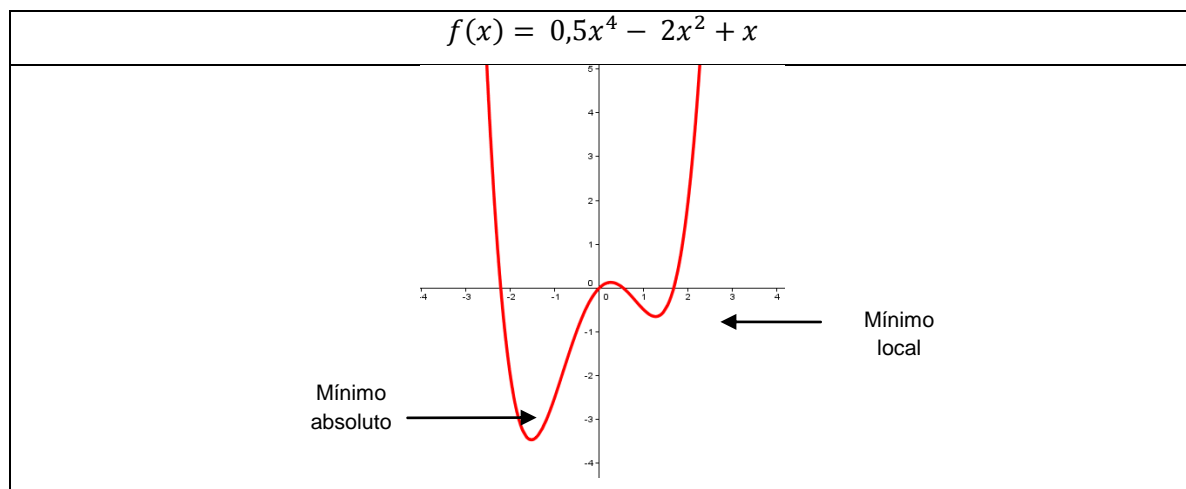
$f(x) = x^3 - x^2 - 4x - 3$ en el intervalo $[-2,2]$	$y = 3x + 5$	$y = x^2 - 5x - 6$
	<p>No tiene ni máximos ni mínimos</p> 	

Tabla 3-11 Continuación tabla 3-11

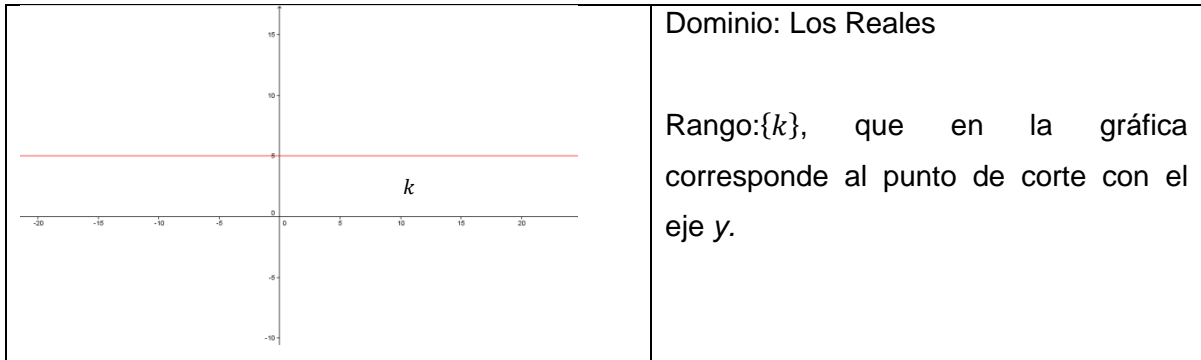


3.8 Funciones básicas y operaciones entre funciones

A. Sea $f(x)=k$, para cualquier real x , con k real arbitrario, f se denomina función constante.

La gráfica de f es una recta paralela al eje X.

Ilustración 3-2 Función constante

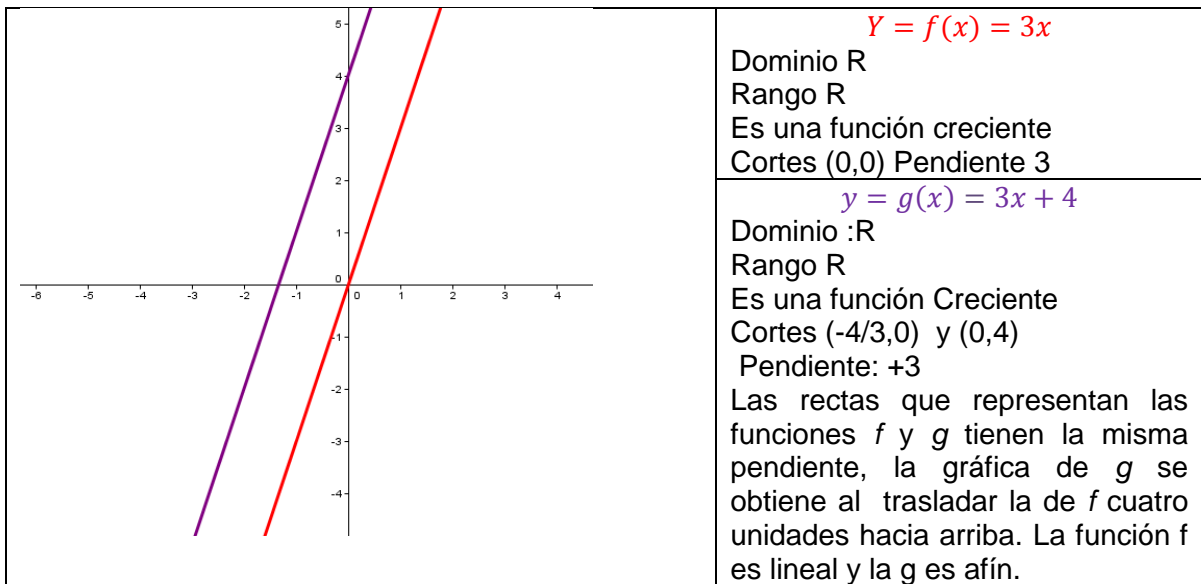


B. Una función g definida para todo real x mediante la fórmula

$$g(x) = ax + b$$

Es en el sentido del álgebra elemental, una función lineal por ser su gráfica una línea recta. El real b es la ordenada al origen; segunda coordenada del punto de corte de la recta con el eje y , $(0, b)$. El real a , es la pendiente de la recta. Pero, en el sentido del álgebra lineal g es lineal sí y sólo si $b = 0$, y en el caso en que $b \neq 0$ nos referimos a g como función afín. El dominio y el rango de todas las funciones lineales es el conjunto de los números reales.

Ilustración 3-3 Función lineal



Algunas generalidades:

La ecuación general de una línea recta está dada por la expresión $y = mx + b$ donde m es la pendiente y b es el intercepto con el eje y .

La pendiente es la inclinación de la recta con respecto al eje de las abscisas

La pendiente de la recta, dados dos puntos: (x_1, y_1) y (x_2, y_2) se puede determinar con la expresión:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Cuando la pendiente de la recta es negativa ($m < 0$), la función es decreciente.

Cuando la pendiente de la recta es positiva ($m > 0$), la función es creciente

El punto de corte de la recta con en eje y es en la ecuación explícita de la función b .

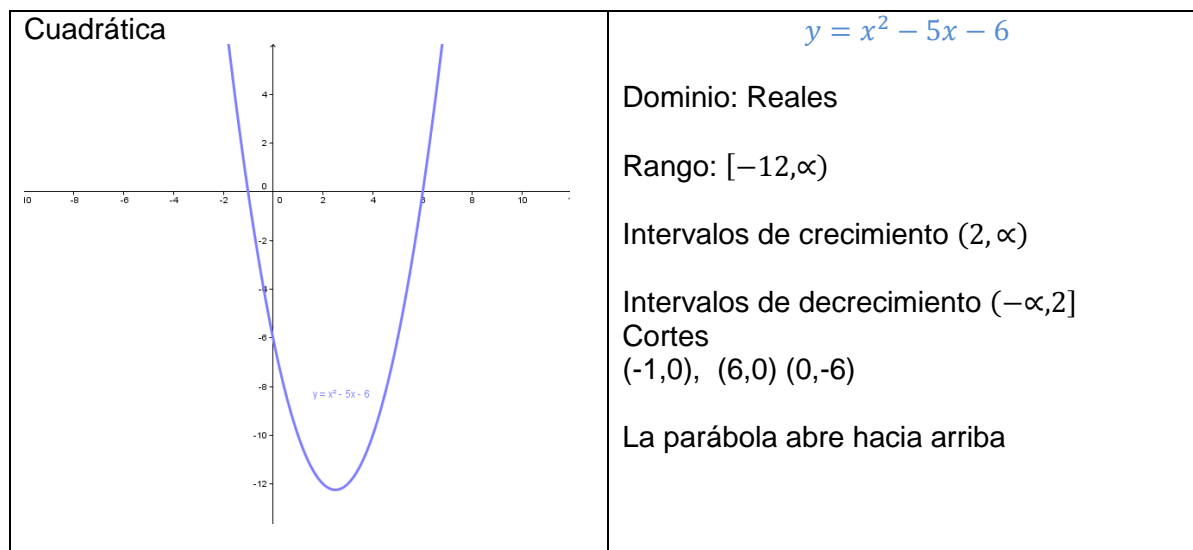
C. Funciones polinómicas.

La función P definida para un real cualquiera x , por la ecuación

$$P(x) = c_0 + c_1x + \dots + c_nx^n = \sum_{k=0}^n c_kx^k$$

con c_0, c_1, \dots, c_n , números reales cualesquiera, n un entero no negativo es llamada una función polinómica, los c_i son los coeficientes de polinomio, y n es su grado (si $c_n \neq 0$). Las funciones constantes son polinómicas de grado cero y las lineales de grado uno. Los polinomios de grados 2, 3 y 4 se denominan polinomios cuadráticos, cúbicos y quárticos respectivamente".

Ilustración 3-4 Función cuadrática



Generalidades:

Las ecuación explícita de una función cuadrática en variables x y y esta descrita por la ecuación : $y = ax^2 + bx + c$,

Con $a \neq 0$, y a , b , c , números reales, a partir de ella se puede calcular:

Ceros de la función (raíces de la ecuación)

Corresponden a las abscisas de los puntos donde la parábola corta al eje x ; es decir los valores de x tales que $y = 0$. Una forma para calcular estos puntos de corte es a partir de la fórmula cuadrática.

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Analizando el discriminante $b^2 - 4ac$ se puede determinar si la parábola corta o no al eje x y cuantos puntos de corte tiene, de acuerdo a los siguientes criterios

Si $b^2 - 4ac > 0$ se tienen dos puntos de corte

Si $b^2 - 4ac = 0$ se tiene un punto de corte

Si $b^2 - 4ac < 0$ no tiene puntos de corte.

Simetría:

La parábola es simétrica respecto a una recta paralela al eje y (llamada eje de simetría). Si (x_1, p) y (x_2, p) son dos puntos de la parábola, el eje de simetría pasará por el punto medio entre estos, o sea

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}$$

Coordenadas del Vértice:

El vértice de la parábola está ubicado sobre el eje de simetría, su primera coordenada que notaremos x_v es entonces:

$$x_v = \frac{x_1 + x_2}{2}$$

Para determinar la segunda coordenada de este punto se sustituye x_v en la expresión de la función.

Con las coordenadas del vértice se determina el valor máximo (o el mínimo) de la función de acuerdo a que la parábola abra hacia abajo o hacia arriba (lo veremos a continuación). Si la ecuación cuadrática asociada a la función cuadrática representada por la parábola no tiene raíces reales el vértice se puede calcular utilizando los coeficientes de la función de la siguiente manera:

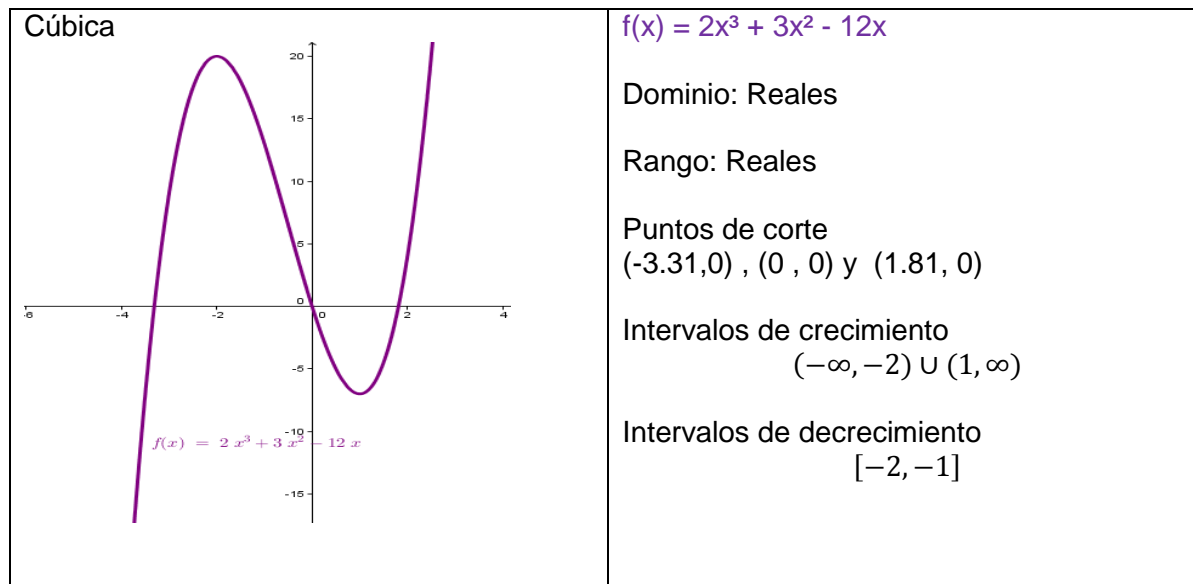
$$x = \frac{-b}{2a}$$

Concavidad:

Si $a > 0$ la parábola es cóncava hacia arriba o con ramas hacia arriba.

Si $a < 0$ la parábola es cóncava hacia abajo o con ramas hacia abajo

Ilustración 3-5 Función cúbica



El análisis que se propone a nivel de noveno grado para funciones cúbicas es esencialmente gráfico. Se seleccionan polinomios cúbicos que tengan raíces enteras o racionales y que sean fáciles de factorizar, para que se puedan identificar los cortes con eje x y estimar máximos y mínimos, sin el uso de cálculo diferencial. Aunque en el ejemplo fue necesario su uso.

D. Operaciones entre funciones

Sobre el conjunto de todas las funciones de variable y valor real es posible definir la suma, el producto y el cociente de la siguiente manera:

Si f y g dos funciones reales que tienen el mismo dominio D .

La función s definida por

$$s(x) = f(x) + g(x) \quad \text{si } x \in D$$

Se denomina suma de f y g y se representa por $f+g$.

El producto y el cociente están definidos de la siguiente manera

$$p(x) = f(x)g(x) \quad \text{si } x \in D$$

$$c(x) = \frac{f(x)}{g(x)} \quad \text{si } x \in D \text{ y } g(x) \neq 0$$

Con el apoyo de las gráficas es posible efectuar las operaciones entre funciones y estas constituyen un apoyo visual para su análisis.

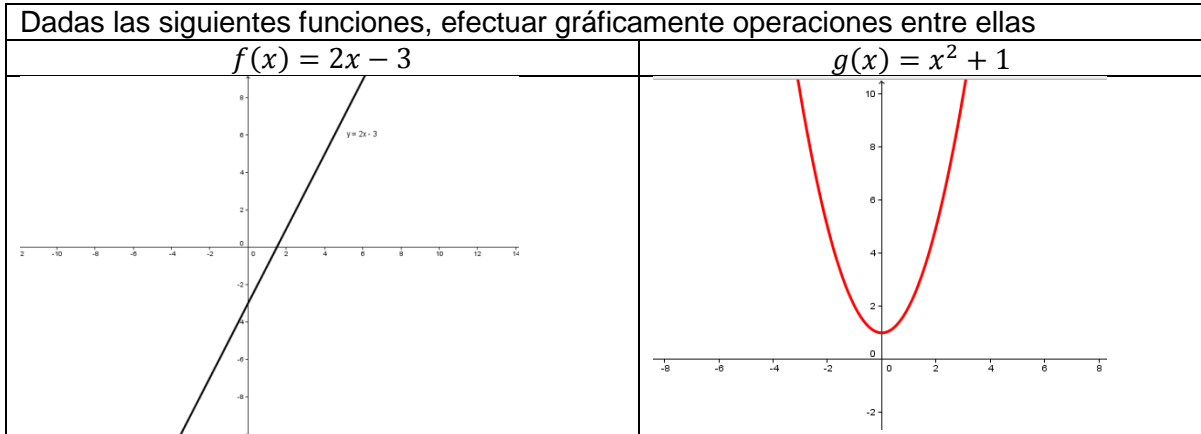


Ilustración 3-6 Adición y sustracción de dos funciones

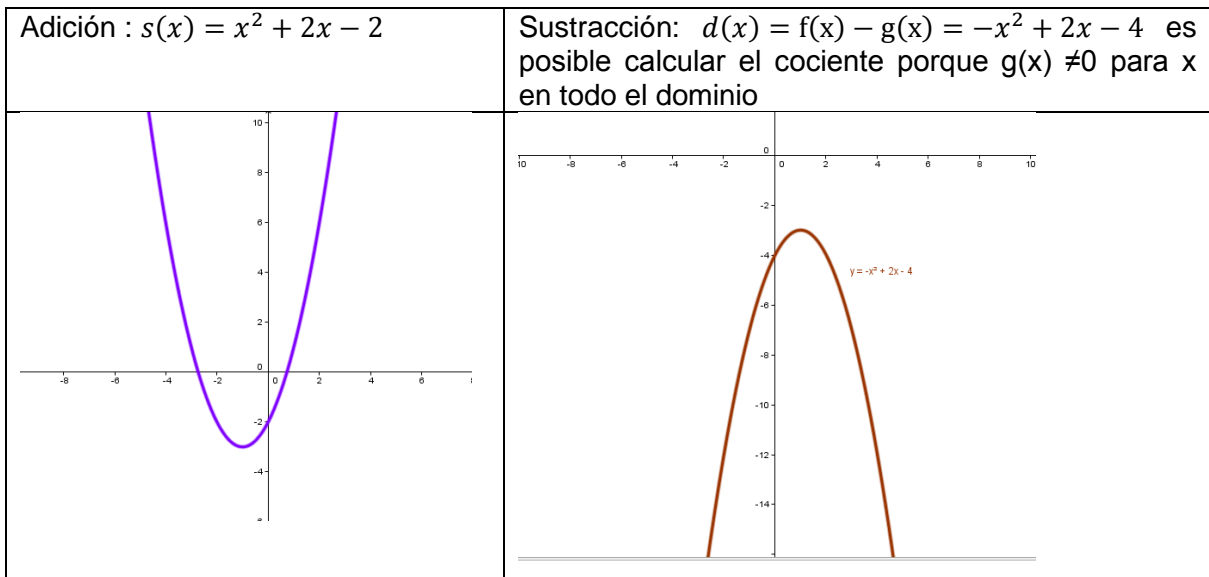
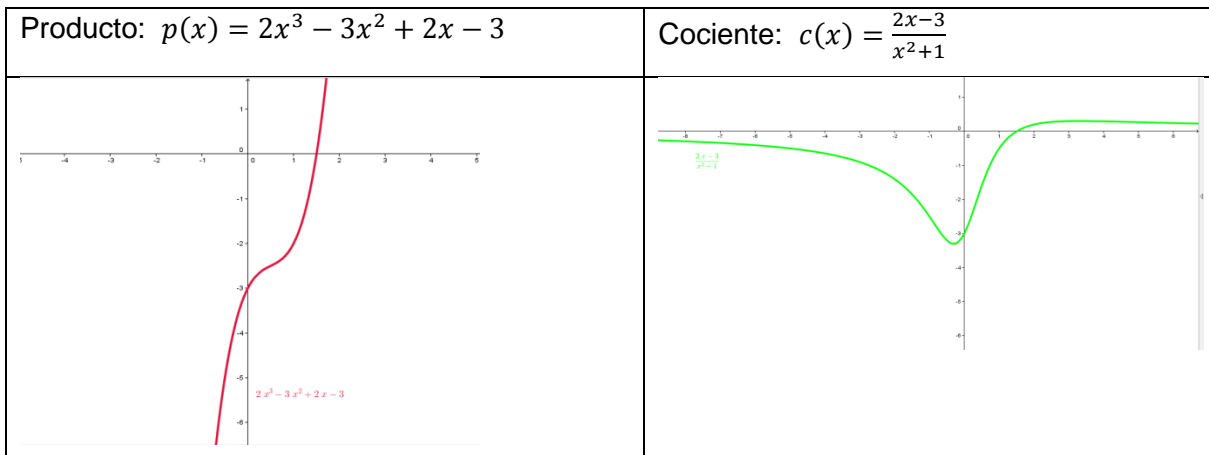


Ilustración 3-7 Producto y cociente de dos funciones



E. Composición de funciones:

Sean f y g dos funciones. La función definida por $(f \circ g)(x) = f(g(x))$ se llama función compuesta de f con g . Esta función está definida para todos los elementos del dominio de g cuyas imágenes pertenecen al dominio de f .

De manera similar se define $(g \circ f)(x) = g(f(x))$.

Ilustración 3-8 Composición de Funciones

Sean $f(x) = 2x - 3y$, y $g(x) = x^2 + 1$ determinar compuestas y construir gráficas	
$f(g(x)) = 2x^2 - 1$	$g(f(x)) = 4x^2 - 12x - 8$
En este caso es posible calcular las dos compuestas porque se cumple la condición sobre el dominio de la compuesta	

3.9 Acerca del análisis de la variación

Según [4], en muchos problemas de contexto real, al estudiar una función lo que interesa son los cambios que pueden observarse en ella. De manera formal la variación de una función $f(x)$ entre x_1 y x_2 siendo $x_1 < x_2$ se determina considerando la diferencia $f(x_2) - f(x_1)$. El signo de este número indicará si es un crecimiento (variación positiva) o un decrecimiento (variación negativa).

Tasa de variación media: Para medir el crecimiento de una función en un intervalo $[x_1, x_2]$, se utiliza la tasa de variación media (t_m) que se define como el cociente entre las variaciones de y e x .

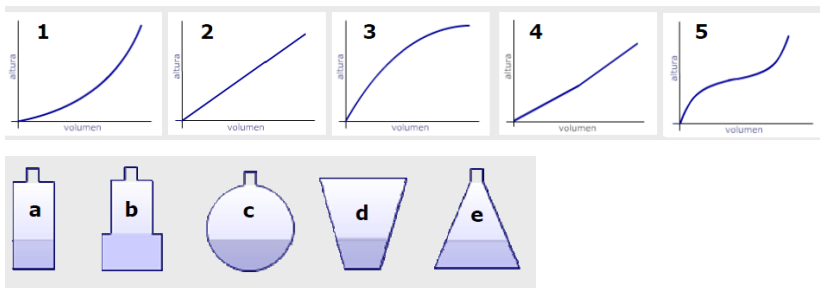
$$t_m = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

Teniendo en cuenta los aspectos descritos en este capítulo, un estudiante del noveno grado usando elementos teóricos básicos puede realizar un análisis tanto cualitativo como cuantitativo, de funciones que modelan problemas de aplicación desde diferentes formas de representación, en situaciones como las que se enuncian en los siguientes ejemplos.

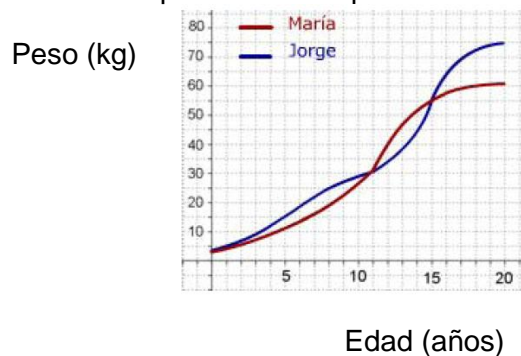
a. La siguiente tabla presenta la altura de un árbol y la longitud de su sombra a una hora y en un lugar determinado. Completa la tabla con los valores que hacen falta. Describe la relación existente entre la altura del árbol y la longitud de la sombra, luego represéntala en un plano de coordenadas

X (altura árbol en m)	1	2	4	5	0,5	9	12
y (longitud sombra en m)	1,5	3		7,5		13,5	

b. A continuación se presentan 5 gráficas que describen el llenado con un líquido de distintos recipientes. ¿Qué gráfica corresponde a cada uno de los recipientes? Explique su solución.



c. María y Jorge son dos personas de crecimiento promedio. En la gráfica puedes comparar como ha variado el peso de estas personas en sus primeros 20 años



- ¿Cuánto pesaba Jorge a los 8 años?, ¿y María a los 12? ¿Cuándo superó Jorge los 45 kg?
- ¿A qué edad tenían los dos el mismo peso? ¿Cuándo pesaba Jorge más que María?, ¿y María más que Jorge?
- ¿Cuál fue el promedio de aumento de peso de ambos entre los 11 y los 15 años? ¿En qué periodo creció cada uno más rápidamente?

4. Capítulo 4: Aspectos Didácticos: Análisis de investigaciones relacionadas con el proceso de enseñanza- aprendizaje de la función y sus formas de representación

En el capítulo 2 se referenciaban investigaciones que describen preconcepciones y dificultades que presentan los estudiantes de básica y media cuando se enfrentan al análisis de representaciones gráficas de funciones, especialmente, cuando las situaciones problemáticas se ubican en contextos extraescolares. Se concluía allí que es muy importante trabajar sistemática y cuidadosamente en las aulas, este tipo de representación en contextos diversos. Es de reiterar que este trabajo es fundamental si se pretende desarrollar una concepción clara acerca de la función, sus formas de representación y su papel para modelar fenómenos de variación, como lo menciona la siguiente cita

El “uso de las gráficas” desde la epistemología debe ser la resignificación de la gráfica de la función en el marco socio epistemológico del cálculo, donde la graficación es la modelación de los comportamientos tendenciales de las funciones. Esta modelación esta influida por justificaciones funcionales”. Es decir que al utilizar las gráficas de funciones en diferentes contextos es más fácil identificar las relaciones funcionales que existen entre sus variables si están aplicadas en un medio social. [8, p. 8]

Es un reto para la educación matemática desarrollar las habilidades y capacidades que preparen al estudiante para leer e interpretar gráficas extraescolarmente compartidas. Partiendo de aquí, se ha venido profundizando en el estudio de la didáctica para mejorar el proceso de enseñanza aprendizaje respecto a la interpretación de gráficas funcionales que se encuentran en diferentes medios. Para desarrollar competencias y habilidades en los estudiantes que les permitan leer e interpretar gráficas en contextos escolares y extraescolares.

Y como justamente el objetivo de esta propuesta es construir una unidad didáctica que potencie al estudiante de noveno grado para interpretar gráficas de funciones en diferentes contextos describimos elementos de algunas propuestas, como la de [9], [6], [2], [4] que si bien no hacen referencia al uso de aulas virtuales si proponen actividades o preguntas importantes que podrían aportar en el aula para proponer análisis e interpretación de gráficas de funciones.

Específicamente Dolores F propone la siguiente secuencia que pueden orientar a los estudiantes para analizar a través de la gráfica cambios de una función.

- **¿Qué cambia?:** Esta pregunta es de carácter cualitativo e implica identificar qué variables están representadas, la ubicación de puntos de la curva en el plano y la determinación de intervalos de variación
- **¿Cuánto cambia? :** Esta es de carácter cuantitativo, para determinar cuánto cambia eso que cambia se requiere hacer comparaciones y calcular diferencias entre estados finales e iniciales, tanto para la variable dependiente como para la independiente considerando la correlación entre los cambios. Esta acción está asociada al cálculo de los incrementos o decrementos.
- **¿Cómo cambia?:** Saber cómo cambian las variables representadas exige determinar si la gráfica crece, decrece o se mantiene constante, en otras palabras es determinar la dirección del cambio.
- **¿A qué razón cambia eso que cambia?:** Es una pregunta de tipo cuantitativo e implica el cálculo de la razón de cambio promedio entre las magnitudes de los cambios (la rapidez y la velocidad son casos particulares de razones de cambio). Una herramienta más poderosa para analizar esta pregunta es desde luego la derivada que permite calcular la razón de crecimiento, los máximos, mínimos y puntos de inflexión en todo el dominio de la función.
- **¿Cómo se comporta globalmente la gráfica?:** Esta requiere responder las preguntas anteriores y tener una visión completa de las variaciones de la gráfica.

Aunque las anteriores preguntas sirven para extraer información de diferentes gráficas según lo plantea Dolores F, es un reto para los docentes de educación básica y media proveer a los estudiantes de un bagaje cultural necesario para descifrar la información que contienen las gráficas, teniendo en cuenta el nivel en el que se enseña. En el caso de grado noveno se podrían hacer aproximaciones al cálculo realizando el análisis del comportamiento a través de elementos algebraicos usando tablas de valores, ya que el tema de cálculo diferencial se trabaja en grado 11.

Propuestas de análisis de gráficas como la descrita, pueden ser aplicadas en el aula de clase y no requieren uso de tecnología especial, por esa razón se retoman en la unidad didáctica interactiva algunos lineamientos de ésta propuesta. Esta unidad conecta elementos conceptuales, procedimentales pedagógicos y tecnológicos.

La unidad didáctica tiene en cuenta además, orientaciones y proyectos, que sobre el uso de las TIC (tecnologías de información y comunicación) plantea el Ministerio de Educación. En el año 2000, el MEN decidió integrar al currículo de Matemáticas el uso de las calculadoras graficadoras. Una síntesis de los objetivos de esta integración, tomada del sitio web de Eduteka [10], se incluye a continuación:

- Implementar el uso de calculadoras gráficas basado en un modelo pedagógico con el propósito de construir ambientes de aprendizaje con tecnología.
- Diseñar una estrategia para incorporar gradualmente el uso de la tecnología en el sistema educativo colombiano.
- Consolidar una comunidad de docentes comprometidos con la disseminación de la cultura informática.

- Se destacaban además en el marco del proyecto que implementó el MEN, características especiales de las tecnologías basadas en medios electrónicos interactivos y dinámicos que las diferencian de los medios tradicionales estáticos: el lápiz y el papel. Entre estas características se citan:
- “Favorecen una mayor comprensión conceptual al desarrollar una capacidad de manejo de diversas representaciones de un mismo concepto matemático y la posibilidad de relacionar activamente unas representaciones con otras.
- Ofrecen formas innovadoras de manipulación de los objetos matemáticos, lo cual hace más comprensible la naturaleza de dichos objetos en la interacción del estudiante.
- Permiten configurar contextos que estimulan el aprendizaje significativo de las matemáticas. Generan una especie de realidad virtual matemática.
- Funcionan como recursos estructurales de la exploración matemática de los estudiantes y a la vez favorecen la sistematización.
- Conforman un ambiente para trabajar representaciones formales de objetos y relaciones matemáticas.
- Conectan experiencias reales con formalismos matemáticos al usar una combinación de toma de datos reales y simulaciones.
- Favorecen procesos interactivos en los que el alumno de manera rápida puede realizar variaciones en el modelo sobre el cual trabaja, y constata inmediatamente los resultados obtenidos de dicha variación. Ello mejora su comprensión de la experiencia matemática.
- Contribuyen a la generación de nuevas estrategias de resolución de problemas y a la creación de soluciones novedosas a los mismos”.

Las actividades, análisis y aportes de los docentes que participaron en el proyecto del MEN, apoyadas no solo en el uso de la calculadora graficadora sino en software matemático como Derive, Cabri, Matlab, Geogebra, entre otros, se pueden encontrar en la página del MEN con el link: <http://www.mineducacion.gov.co/1621/article-81040.html>. Respecto a este proyecto en los eventos Nacionales, Coloquios Distritales, Eventos de Asocolme, los profesores participantes en la experiencia presentaron unos análisis de estos, pero no se ubican documentos oficiales del MEN en los cuales se haga una evaluación y análisis del desarrollo del proyecto.

Sin embargo, es importante destacar que esta experiencia permitió, que tanto docentes como estudiantes, entraran en el mundo de la tecnología, como un medio para apoyar el proceso educativo y lograr un aprendizaje más dinámico y significativo. Aunque algunos docentes se mostraron apáticos frente a estas herramientas, situación que se presenta también hoy con el uso de la internet y los aparatos tecnológicos (computadores, tablets, smartphome, entre otros); hoy en día, las TIC son herramientas potentes para apoyar el proceso de enseñanza aprendizaje y permiten desarrollar habilidades muy importantes para el desempeño de un ciudadano en siglo XXI, como: el trabajo colaborativo, el autoaprendizaje, las destrezas de alfabetización en medios e información, la responsabilidad social entre otros.

Actualmente el Ministerio TIC a través de Computadores para Educar³, se propone fomentar la calidad de la educación bajo un modelo sostenible, fortaleciendo el proceso de enseñanza- aprendizaje a través de nuevas tecnologías con el uso de internet. Es decir que el docente de hoy debe construir actividades que apoyen el proceso de aprendizaje con el uso de las TIC.

En particular, una de las herramientas tecnológicas que se pueden utilizar tanto en el aula como fuera de ella es el e-learning, el cual permite potencializar las habilidades de los estudiantes en cuanto autoaprendizaje, tener un acercamiento mas amistoso con los docentes, el conocimiento se interrelaciona, además de que el estudiante es quien controla y organiza su tiempo, está más motivado para aprender a través del uso de la internet y puede profundizar en temas que sean de su interés.

Respecto al uso de las herramientas computacionales en el aprendizaje de las matemáticas Luis Moreno Armella asesor académico del proyecto del MEN plantea:

“Las herramientas computacionales han modificado profundamente la naturaleza de las exploraciones y la relación de dichas exploraciones con la sistematicidad del pensamiento matemático... podremos afirmar que estos objetos sobre la pantalla son modelos manipulables de objetos matemáticos. Estos modelos contribuyen a una mayor interrelación entre la exploración y la sistematicidad ya que ofrecen mayor capacidad de cálculo, mayor poder expresivo y flexibilidad en la transferencia entre sistemas de representación”. [11]

Es importante en consecuencia que tanto docentes como estudiantes aprovechemos estos recursos tecnológicos para el aprendizaje, exploración y la construcción de nuevos conocimientos, y para el desarrollo de habilidades como la alfabetización tecnológica que se requiere en el presente siglo.

Con relación a la consulta de propuestas didácticas con aulas virtuales, se encontraron en la red una cantidad de objetos virtuales de aprendizaje (OVA), blogs y páginas web (ver Listado Anexo A) que dan luces en el tema de interpretación y representación de funciones matemáticas, más no se ubicaron estudios de investigación donde se presenten los resultados respecto a que tan efectivo es utilizar las aulas virtuales, o unidades didácticas virtuales donde se refleje un proceso cognitivo para lograr la interpretación de gráfica de funciones en matemáticas.

Generalmente estas unidades virtuales son realizadas en instituciones educativas de nivel superior o educación a distancia, pero son poco utilizadas en la enseñanza presencial de las matemáticas de la educación básica.

³ Programa del Gobierno Nacional de mayor impacto social que genera equidad a través de las Tecnologías de la Información y las Comunicaciones

5. Capítulo 5: El uso de las TIC en la enseñanza – aprendizaje del álgebra en la educación básica y media

Como esta propuesta tiene un interés primordial y es el uso de las Tecnologías de la información y la comunicación, se dedica este capítulo a describir aspectos importantes en la evolución y desarrollo de la sociedad de la información, sus consecuencias y su relevancia en los procesos educativos.

5.1 La sociedad de la información, las tecnologías y la educación

En el mundo de hoy las tecnologías de la información y comunicación han surgido en todos los ámbitos de la vida cotidiana; en las transacciones económicas y comerciales, el ocio, en la gestión interna de las empresas y las instituciones, en las actividades profesionales y laborales; y sobre todo en la educación.

Según [12], las nuevas tecnologías de la comunicación rompen barreras espaciotemporales facilitando la interacción entre personas mediante formas orales (la telefonía), escrita (el correo electrónico) o audiovisual (la videoconferencia). Asimismo esta comunicación puede ser sincrónica es decir, simultánea en el tiempo o asincrónica, el mensaje se emite y recibe en un período de tiempo posterior al emitido.

En segundo lugar, las tecnologías permiten el acceso de forma permanente y rápida a gran cantidad de información. Los medios de comunicación escritos, la radio, la televisión, el teletexto, Internet, entre otros, se han convertido en objetos cotidianos y casi imprescindibles de nuestra vida que nos mantienen permanente informados. Los ciudadanos, a través del conjunto de estos medios y tecnologías, saben lo que sucede más allá de su ámbito local.

Por otra parte, desde el hogar y a través de las redes telemáticas se puede acceder a bibliotecas, centros, instituciones y asociaciones de cualquier tipo, proceso que ha abierto paso a uno de los fenómenos más grandes de la historia: la Globalización, es decir a la superación de los límites geográficos para actuar de forma universal.

Al hacer posible que la información y transmisión de datos circule casi instantáneamente a lo largo de todo el planeta, las tecnologías permiten que cualquier organismo o

institución funcione como una unidad en tiempo real a nivel mundial, esta revolución esta generando cambios culturales y sociales.

El hecho de que esta revolución tecnológica nos haya tomado por sorpresa y que además de la falta de capacitación, no contemos con los recursos suficientes para entrar en esta sociedad de la información, ha provocado un desajuste en los procesos educativos. Los cambios que hemos venido realizando son muy lentos y se sigue trabajando en muchas aulas un con modelos tradicionales.

Es por ello que en la actualidad la escuela tiene retos muy grandes en esta dirección, respecto a la formación de los estudiantes, como se plantea en [12, pp. 11-12], a saber:

Que los estudiantes

- Dominen el manejo técnico de cada tecnología
- Posean un conjunto de conocimientos y habilidades específicos que les permitan buscar, seleccionar, analizar, comprender y recrear la enorme cantidad de información a la que están expuestos.
- Desarrollen un cúmulo de valores y actitudes hacia la tecnología de modo que no se caiga ni en un posicionamiento tecnofóbico, ni en una actitud de aceptación acrítica y sumisa de las mismas.
- Utilicen los medios y tecnologías en su vida cotidiana no sólo como recursos de ocio y consumo, sino también como entornos para expresión y comunicación con otros seres humanos.

5.2 Los medios y las tecnologías en la educación

Desde hace aproximadamente 40 años han venido evolucionando las computadoras por un lado y los métodos de enseñanza y aprendizaje por el otro, y desde entonces la utilización de los ordenadores en la enseñanza ha estado dominada por esta idea: ¿Es posible lograr que el ser humano aprenda a través de la interacción, casi exclusiva, con una máquina? Los logros y avances a lo largo de varias décadas de investigación fueron menos exitosos de lo esperado. Se ensayaron distintas propuestas y proyectos encaminados a construir objetos físicos que sin la intervención directa de un tutor o profesor, provocasen o facilitase el aprendizaje. Sin embargo, en la actualidad, con los avances en el campo del multimedia, y sobre todo de las telecomunicaciones y de Internet, están cobrando auge los proyectos y métodos educativos basados en las tesis socio constructivistas del aprendizaje.

En el siglo actual según [12] “La Tecnología Educativa debe reconceptualizarse como ese espacio intelectual pedagógico cuyo objeto de estudio son los medios y las tecnologías de la información y comunicación en cuanto formas de representación, difusión y acceso al conocimiento y a la cultura en los distintos contextos educativos: escolaridad, educación no formal, educación informal, educación a distancia y educación superior”.

Es así como en la actualidad los procesos educativos no solo dependen de la actividad presencial en el aula, sino de cómo el docente utiliza una cantidad de herramientas

tecnológicas para facilitar el proceso de enseñanza – aprendizaje, no solo en el aula de clase sino también con el uso de la internet. Por tanto debe ir de la mano la pedagogía con las Tecnologías de información que permita una articulación que potencialice los procesos de enseñanza – aprendizaje en las aulas.

5.3 De la enseñanza asistida por computador al e-learning

Algunas de las teorías del aprendizaje que orientan los métodos de enseñanza con ordenadores son el conductismo, el procesamiento de información, el constructivismo y el conectivismo. Estas teorías se han evidenciado en: El software Educativo y Enseñanza Asistida por computador, el multimedia en disco óptico de CD-ROM y ahora la enseñanza en línea a través de curso de teleformación, intentando aplicar la I. E. Inteligencia Artificial.

Los usos propiamente educativos de los ordenadores comienzan con la aparición del CAI (Computer Assisted Instruction) o en español EAO (Enseñanza Asistida por Ordenador) en los años sesenta apoyados en los principios de la psicología conductista del aprendizaje. La EAO es una propuesta de individualización de la enseñanza que pretende a través del ordenador, que el alumno adquiera el conocimiento estableciendo de forma autónoma su propio ritmo de enseñanza.

Por ello, el ordenador más que una máquina que enseña, se convierte en un instrumento o recurso a través del cual se pueden tener experiencias potencialmente educativas. En el lenguaje LOGO no se pretende, a diferencia de la EAO, ofrecerle al alumno una secuencia estructurada de conocimientos y ejercicios, tampoco se persigue diseñar (y, en consecuencia, que el ordenador lo gestione) un programa educativo estructurado para que el alumno actúe dentro del mismo.

El proyecto LOGO representó una ruptura importante con las tesis conductistas de enseñanza con ordenadores, abriendo la entrada a planteamientos próximos a las tesis constructivistas del conocimiento apoyándose en principios tales como:

- Proceso natural de aprendizaje.
- Aprendizaje interactivo
- La importancia de los errores y su corrección.
- Motivación.
- Ideas poderosas

¿Es posible integrar los principios del aprendizaje constructivista, la metodología de enseñanza por proyectos y la navegación web para desarrollar el currículo con un grupo de alumnos de una aula ordinaria? La respuesta es afirmativa y en los últimos años se están desarrollando varias experiencias en esta dirección: la webquest y los círculos de aprendizaje son un ejemplo.

Actualmente, la Educación a Distancia ha tenido una evolución paralela a los avances tecnológicos, que diversos autores señalan en tres fases que se caracterizan por el medio utilizado como canal, son: la etapa de imprenta; la aplicación de recursos

multimedia audiovisuales; y la fase de aplicación de TIC (Tecnologías de la Información y Comunicación) en la Enseñanza Educativa (ED) conocido como e-Learning.

¿Qué es o cómo se puede definir el e-learning? Una traducción literal sería “aprendizaje electrónico” y se refiere, en un sentido amplio, a algún tipo de proceso de enseñanza aprendizaje realizado con ordenadores conectados a Internet. Para lo cual se debe contar con los siguientes componentes básicos de telecomunicación:

Tabla 5-1 Componentes de la telecomunicación [12, p. 64]

Componentes básicos de la telecomunicación en línea		
Un software o plataforma informática específicamente creada para la enseñanza en línea	Un diseño curricular del curso y de materiales didácticos digitales	Un profesor o equipo de tutores que desempeñen las funciones docentes mediadas a través de ordenadores

Según José Silvio (2000) citado por Alvarado [13, pp. 15-17] las TIC y la educación a distancia ofrecen visiones y alternativas para concebir el proceso de enseñanza y aprendizaje en nuevos contextos, roles y exigencias propias de esta sociedad de la información y del conocimiento, la cual, posee las siguientes características:

- El problema a resolver consiste en dotar de conocimientos a las personas que los necesitan para vivir exitosamente en sociedad
- Unas personas (educadores) proveen un conjunto de condiciones, instrumentos y metodologías para facilitar a los educandos la tarea de adquirir los conocimientos que necesiten.
- No sólo los educadores poseen el conocimiento necesario, éste se puede adquirir a través de otras fuentes, otros educadores y otros educandos.
- Los educandos se comunican con los educadores y con otros educandos para intercambiar y compartir conocimientos propios, en diferentes lugares y tiempos.
- Los educadores complementan esos conocimientos con otros conocimientos almacenados en una red de centros de información o de bibliotecas distribuidas en todo el mundo y comunicándose con otros educandos y educadores situados en diferentes partes del mundo.
- Educadores y educandos evalúan sus procesos y productos.

Por su parte, Reigeluth (1999, p 27) citado por [13] plantea una comparación entre lo que él denomina paradigmas de la era industrial y los de la era de la información:

“...El paradigma actual de enseñanza y formación se basa en la estandarización, mucho más parecida a la producción en serie de la era industrial y que la producción personalizada de la era de la información (...) implica enseñar al mismo tiempo unos contenidos idénticos a un grupo numeroso de alumnos (...) el paradigma actual (...) no se diseñó en ningún caso para aprender sino para seleccionar...diferenciar directivos y trabajadores (...) no educar demasiado a los trabajadores comunes, para evitar que llegaran a no conformarse con hacer tareas monótonas y repetitivas.....Subordinación y

conformismo (...) se espera de las personas y de los alumnos que estén sentados, callados y que hagan lo que se les dice. Su aprendizaje lo dirige el profesor (...) pero los empresarios actuales quieren personas que tomen la iniciativa a la hora de resolver problemas y que aporten diversidad (...) el mensaje deber quedar muy claro: es necesario cambiar de paradigma. Este es el núcleo central de un nuevo campo que se está desarrollando y que se denomina "Diseño de Sistemas Educativos" (Reigeluth, 1999, p 27-28) citado por [13].

Teniendo en cuenta lo anterior se debe romper con estos paradigmas y comprender que no es lo mismo enseñar y aprender en la sociedad industrial, en la sociedad de la información y aun más en la sociedad del conocimiento en la cual nos encontramos.

Las nuevas tecnologías de la información y de las comunicaciones están transformando la sociedad, y en particular los procesos educativos. Las aulas virtuales permiten una interrelación que traspasa barreras, que abre caminos y posibilidades al conocimiento, que transforma y elimina los límites entre educadores, educandos y saber, se construye en comunidad y se descubren nuevas alternativas para obtener un aprendizaje significativo, motivante y emocionante.

5.4 El e-learning en la enseñanza aprendizaje de las matemáticas

¿Por qué son importantes los LMS? "Es inevitable utilizar las TIC para la enseñanza de las áreas básicas en el sistema escolar, cuando día a día en el mundo se evoluciona en este tema. Es así que la mayoría de países se convocan reuniones, simposios y discusiones sobre el mejoramiento de los procesos de enseñanza-aprendizaje a través de las TIC". [14].

La Unión Europea subraya la importancia estratégica de e-learning: "E-learning tiene el potencial para ayudar a la Unión a dar respuesta a los retos de la sociedad del conocimiento, para mejorar la calidad de aprendizaje, facilitar el acceso a los recursos de aprendizaje, satisfacer necesidades especiales, y para llevar a cabo aprendizaje más eficaz y eficiente y la formación en el lugar de trabajo, en particular en las pequeñas, medianas y grandes empresas. "(Programa eLearning).

En Colombia el Ministerio de Educación Nacional viene adelantando desde al año 2000 el proyecto de Nuevas Tecnologías al Currículo de Matemáticas de la Educación Media de Colombia, con el cual se pretende aprovechar el potencial educativo que brindan las tecnologías computacionales, tal como lo plantea la Ministra de Educación Cecilia María Vélez White en la pagina del MEN "Maestros más creativos y comprometidos con su ejercicio profesional; estudiantes activos e interactivos haciendo matemática y colocando en juego todo su talento en horarios de clase y extra clase; comunidades educativas que en ejercicio de su autonomía se han cohesionado en torno a la incorporación de tecnologías; articulación entre los niveles educativos básico, medio y superior; en síntesis, una gama de opciones alternativas que nos permite creer firmemente que la educación matemática será cada día de mayor calidad"

Con relación a estas herramientas, Balacheff & Kaput (1996), citado por [11] han señalado que su mayor impacto es de carácter epistemológico, refiriéndose con ello al

hecho que las herramientas computacionales han generado un nuevo realismo matemático. En efecto, los objetos virtuales que aparecen sobre la pantalla se pueden manipular de tal forma que se genera una sensación de existencia casi material.

De acuerdo con lo anterior para el caso específico de la función, hacer uso de herramientas computacionales permite manipular estos objetos matemáticos de forma más interactiva, visualizarlos al instante y realizar un proceso cognitivo más ágil y preciso que cuando se hace con lápiz y papel, se realizan generalizaciones más profundas y eficientes en el momento de interpretar gráficas de funciones y sus diferentes representaciones.

Una de estas herramientas son los LMS (learning Manager System) o Sistemas de Gestión de aprendizaje: software instalado en un servidor web que se emplea para administrar, distribuir y controlar las actividades de formación no presencial (o aprendizaje electrónico) de una institución u organización, entre ellos uno que es de acceso libre es el llamado Moodle.

Moodle es un paquete de software para la creación de cursos y sitios Web basados en Internet. Es un proyecto en desarrollo diseñado para dar soporte a un marco de constructivismo social de la educación. Esta herramienta se utilizará para el desarrollo de la unidad didáctica teniendo en cuenta en primer lugar que es de libre acceso y en segundo lugar que es versátil y fácil de utilizar ya que integra contenidos interactivos en un solo lugar

Estar a la vanguardia de las Tecnologías de la información es un deber de docentes y estudiantes del siglo XXI. En pro del mejoramiento de la educación básica y media actualizarse y conocer las nuevas tecnologías es un deber y una responsabilidad que nos corresponde a todos, para mejorar los procesos educativos.

La unidad didáctica cuyas características se describen a continuación es un ejemplo de cómo utilizar esta herramienta en el aula de matemáticas.

6. Capítulo 6: Propuesta didáctica para estudiantes de grado noveno sobre formas de representación de funciones de variable real y análisis de la variación usando Moodle

Antes de presentar la unidad didáctica virtual con el uso de Moodle sobre el tema específico es importante conocer y aclarar aspectos que se tuvieron en cuenta para diseñarla. Se describen a continuación:

6.1 La unidad didáctica en el entorno e- learning

En el momento que un educador decide involucrarse en el uso de las tecnologías, se plantea un gran reto, ya que organizar y planificar las actividades con tecnologías no puede realizarse de modo espontáneo, sino que debe partir de un modelo educativo y debe tener una planeación. Es decir, la actividad cobra sentido pedagógico no solo por la realización de la misma, sino porque ésta es parte de un proceso más amplio dirigido a lograr las metas de aprendizaje.

Para esa planificación es importante conocer qué es y cómo se diseña una unidad didáctica en entornos virtuales de aprendizaje e- learning. Para ello se toma como referencia a [15]

“Una unidad temática, digital o no digital, se caracteriza por ser un material indivisible, independiente de otras unidades temáticas, susceptible de ser combinada con otras de orden superior, accesible desde una base de datos, abierta a su uso en diferentes plataformas y soportes, y duradera y reutilizable, en el sentido de que debe ser posible incorporar posteriormente otros componentes formativos desde diversas aplicaciones.

En relación a su posible uso en un aula virtual, uno de los aspectos de las unidades temáticas que tiene mayor interés para un docente es la posibilidad de elaborarlas únicamente en un formato digital y, por tanto, transmisibles desde una conexión a la red. Esta característica las hace particularmente interesantes para ser utilizadas en una gama amplia de entornos de enseñanza y aprendizaje con soporte de la tecnología

La propuesta de [15] basada en Wiley (2000) describe los posibles tipos de unidades temáticas, teniendo presentes cuatro criterios tanto de orden tecnológico y de diseño de sus componentes como en criterios educativos, que son:

1. Número de componentes combinados. Registra el número de componentes individuales (texto, video-clips, imágenes) que se pueden combinar en una unidad temática.
2. Tipo de componentes combinados. Describe el tipo de componentes que se han combinado para formar la unidad temática.
3. Funciones educativas usuales. Describe cuál puede ser la función educativa más usual teniendo en cuenta el número y tipo de componentes utilizados.
4. Dependencia de la unidad temática. Describe si algún componente de la unidad necesita un enlace adicional dentro de la misma unidad o fuera de ella, como podría suceder, por ejemplo, si incorporamos enlaces a páginas de Internet o a bases de datos que se sitúen fuera de la propia unidad temática.

Teniendo en cuenta los anteriores criterios, las unidades temáticas digitales se pueden clasificar en:

- **Una unidad temática simple** es un recurso digital sencillo no combinado con otro.
- **Una unidad temática combinada inmodificable** está formada por un pequeño número de recursos digitales combinados, integradas por contenidos presentados en medios que no se pueden transformar.
- **Una unidad temática combinada modificable** posee un gran número de recursos digitales combinados en tiempo real por medio del ordenador cuando se produce la petición de acceso a la unidad o a un componente en particular
- **Una unidad temática de presentación generada.** permite estructurar y combinar unidades temáticas más simples con unidades combinadas inmodificables, de manera que generalmente se usan para desarrollar presentaciones extensas y completas de contenido útiles para la instrucción, la práctica y la evaluación en contextos educativos virtuales.
- Por último, **una unidad temática de instrucción generada** permite combinar los mismos tipos de objetos que la presentación generada, pero también permite evaluar la interacción del estudiante con ese objeto, por lo que ayuda a crear un soporte para el desarrollo de estrategias instruccionales y de instrucción basada en materiales digitales multimedia y también en contenidos de páginas de Internet.

Los elementos básicos de una unidad didáctica según [16] son:

Tabla 6-1 Elementos de una unidad didáctica

Actores:	Roles:	Actividades:
Los actores en una Unidad de Aprendizaje son las distintas personas o entidades involucradas en un proceso de aprendizaje.	Los roles definen las responsabilidades que los distintos actores tendrán en distintas etapas del proceso de aprendizaje. Un mismo actor puede actuar bajo distintos roles en distintos momentos del proceso de aprendizaje. Por ejemplo, la misma persona puede ejercer en un momento dado de alumno principiante y más adelante de mentor de otros alumnos principiantes.	Una actividad es un proceso educativo atómico que sucede en un determinado entorno (dentro o fuera del contexto del LMS) y que puede tener asociados uno o varios elementos de contenido que se

			distribuyen como parte de la Unidad de Aprendizaje.
Estructuras de Actividades: Las actividades se pueden agrupar en estructuras de actividades, lo que permite referenciar un conjunto de actividades atómicas como una sola entidad.	Papeles (role-part): Un papel es la asociación entre un rol y una estructura de actividades más o menos compleja. Así, un papel tendría la forma “El actor X realiza la estructura de actividades Y”.	Actos: Un acto es un conjunto de papeles que se lanzan simultáneamente (aunque las actividades de los distintos papeles pueden estar secuenciadas internamente de múltiples maneras).	Obras: Una obra es una sucesión de actos y representa la mayor unidad de agrupación en IMS Learning Design. Las obras completas se identifican con diseños instruccionales completos.

Para desarrollar una unidad temática virtual se requiere de una plataforma de e-learning, se entiende por “plataforma” como arquitectura hardware o una estructura soporte (framework) de software que permite que el software sea ejecutado, en e-learning se entiende por plataforma un VLE (Virtual Learning Environment), un “entorno Virtual de Aprendizaje”

Desde el punto de vista didáctico, una plataforma ofrece soporte tecnológico a profesores y estudiantes para optimizar distintas fases del proceso de enseñanza/aprendizaje: planificación, desarrollo y evaluación del currículum. Véase el siguiente cuadro en el que se detallan las potenciales herramientas que pueden ser ofertadas a través de una plataforma de e-Learning. Tabla 10 Boneu, 2007 referenciado por [17]

Tabla 6-2 Herramientas potenciales de una plataforma e-learning

Herramientas potenciales que pueden estar incluidas en una plataforma para el e-learning	
Herramientas orientadas al aprendizaje	Foros Buscador de foros E –portafolio Intercambio de archivos Soporte de múltiples formatos de archivo, como por ejemplo HTML, PDF, Word, Excel, Acrobat, entre otros Herramientas de comunicación sincrónica (Chat) Herramientas de comunicación asincrónica (correo electrónico o mensajería) Servicio de presentación multimedia (video conferencia, ido, pizarra electrónica, entre otros) Diario (blogs) Wikis
Herramientas	Anotaciones personales o favoritos (Bookmarks)

orientadas a la productividad	<p>Calendario y revisión de progreso</p> <p>Ayuda en el uso de la plataforma</p> <p>Buscador de cursos</p> <p>Mecanismos de sincronización y trabajo fuera de línea</p> <p>Control de publicación, paginas, caducadas y enlaces rotos</p> <p>Noticias del lugar</p> <p>Avisos de actualización de paginas, mensajes a foros y envío automático</p> <p>Soporte a la sindicación de contenidos (RSS, News, PodCast, etc.)</p>
Herramientas para la implicación de los estudiantes	<p>Grupos de trabajo</p> <p>Autovaloraciones</p> <p>Rincón del estudiante (grupos de estudio)</p> <p>Perfil del estudiante</p>
Herramientas de soporte	<p>Autenticación de usuarios</p> <p>Asignación de privilegios en función del rol del usuario</p> <p>Registro de estudiantes</p> <p>Auditoria</p>
Herramientas destinadas a la publicación de cursos y contenidos	<p>Test y resultados automatizados</p> <p>Administración del curso</p> <p>Apoyo al creador de cursos</p> <p>Herramientas de calificación en línea</p> <p>Seguimiento del estudiante</p>
Herramientas para el diseño e planes de estudio	<p>Conformidad con la accesibilidad</p> <p>Reutilización y compartición de contenidos</p> <p>Planillas de curso</p> <p>Administración del currículo</p> <p>Personalización del entorno (look and feel)</p> <p>Herramientas para el diseño de la educación</p> <p>Conformidad con el diseño de la educación</p> <p>Estándares IMS,AICC y ADL)</p>
Sistemas/herramientas para la gestión del conocimiento en el ámbito educativo	<p>Sistemas integrales de conocimiento</p> <p>Los sistemas mediadores de información</p> <p>Librerías digitales o repositorios</p> <p>Sistemas basados en ontología</p> <p>Sistemas basados en folcsonomia</p>

Algunos criterios pedagógicos para elaboración de materiales didácticos en la web, sugerida por [18] son:

a) Deben ser interactivos. Es decir, solicitan al alumno que realice algún tipo de actividad o tarea y reaccionan, en la medida de lo posible, ante la respuesta del mismo.

b) Deben responder a un modelo o proceso constructivista del conocimiento. Es decir, el alumno aprende a través de su experiencia y debe, en función de la misma, elaborar dicho conocimiento. Este enfoque se contrapone al aprendizaje por recepción

c) Deben poseer una interface atractiva y fácil de usar. Es decir, los materiales deben cuidar su diseño gráfico, deben resultar atractivos para el alumno, y su utilización debe ser intuitiva.

d) Deben ser multimedia e hipertextuales. Es decir, deben diseñarse incorporando distintas formas de representación simbólica (textual, gráfica, audiovisual, icónica,...) y de organización de la información en formato hipertexto.

e) Deben adecuarse a las características de sus potenciales usuarios. Es decir, la selección del contenido y de las formas de presentarlo debe partir y tener en cuenta los conocimientos, capacidades y habilidades previas que poseen los alumnos a los que se destina.

f) Deben integrarse y responder a las necesidades de desarrollo del currículo escolar. Todo material educativo es un recurso o instrumento que responde a las exigencias curriculares de una materia y nivel educativo. Éstas deben ser tenidas en cuenta en su elaboración.

En el siguiente cuadro, [17, p. 13] plantean un decálogo de características de un modelo de enseñanza en aulas virtuales:

Tabla 6-3 Decálogo para la planificación de un modelo constructivista de enseñanza en un aula virtual

1. Crear espacios para que los estudiantes hablen y se comuniquen permanentemente: foros, chat, email, blogs
2. Plantear tareas que exijan la actividad intelectual del alumno: leer, escribir, analizar
3. Combinar tareas individuales (ensayos, diarios/blogs), con otras colectivas (wikis, glosarios, evaluación compartida,...)
4. Ofrecer un calendario detallado con las tareas del curso
5. Incorporar guías y recursos para la realización autónoma de las actividades (orientaciones precisas del proceso paso a paso, y enlaces/documentos necesarios)
6. Estimular la motivación, y participación del alumnado (poniendo noticias curiosas, juegos, video clips, formulando preguntas en el foro...)
7. Incorporar documentos de consulta sobre el contenido en distintos formatos (documentos de texto, pdf, diapositivas, mapas conceptuales, animaciones, videoclips,..)
8. Mantener de forma periódica tablón de noticias del profesor
9. Establecer públicamente los criterios de evaluación
10. Ofrecer autorización y feedback continuo entre el profesor y cada alumno, sobre todo en los resultados de la evaluación

6.2 Evaluación de Aulas Virtuales

Según el artículo “La evaluación de las experiencias educativas en Aula Virtual, una necesidad para garantizar la calidad de los procesos de enseñanza – aprendizaje” del Ps. [19] disponible en la web, para evaluar estas experiencias educativas se debe tener en cuenta tanto la evaluación del aula misma como la evaluación de los diferentes actores del proceso de enseñanza aprendizaje.

En primer lugar, la evaluación de un aula virtual debe contemplar:

- Evaluación de los contenidos por parte de un experto en el tema.

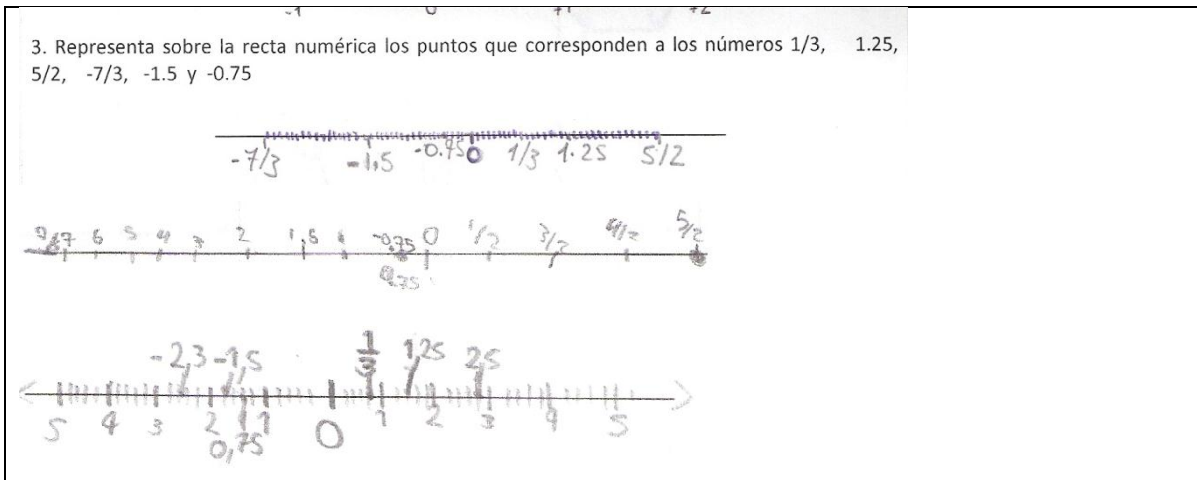
- Evaluación de los aspectos metodológicos por parte de un experto en pedagogía en el diseño de métodos instruccionales en línea.
- Evaluación del Diseño de Navegación y de los aspectos.
- Respecto a la evaluación por parte de los estudiantes de la experiencia en el aula virtual es pertinente considerar dos componentes:
- Evaluación de la actitud y motivación hacia el aula Virtual: En cada una de las experiencias que se desarrollan en el aula virtual se evaluará la actitud y nivel de motivación del estudiante al finalizar sus actividades académicas en esta nueva modalidad de educación.
- Evaluación del uso de los medios de interacción en el aula virtual: Las actividades que se desarrollen en el Aula Virtual, empleando los diferentes medios de interacción (Foro, Chat y Correo Electrónico) se evalúan tomando en consideración la opinión del estudiante y el análisis que haga el docente de la experiencia.
- Y en lo que concierne a la evaluación por parte del docente de la experiencia en aula virtual, el debe tener en cuenta los siguientes criterios:
- Evaluación del rendimiento Académico de los Estudiantes: Al momento de iniciar la experiencia en aula virtual, cada docente efectúa una evaluación diagnóstica del nivel de conocimientos que el estudiante posee sobre el tema a tratar. De esta forma se tiene una visión más clara del nivel con que ingresan los estudiantes a su trabajo en el aula virtual.
- Al terminar la experiencia se realiza una evaluación final que permite establecer si se presentaron o no cambios significativos en el nivel de conocimientos alcanzados por cada uno de los estudiantes.
- Evaluación del nivel de interacción en los medios de Comunicación: El docente realiza un análisis detallado de la experiencia a partir de las respuestas publicadas por los estudiantes en el foro y en el chat y de los correos recibidos durante todo el curso en aula virtual.

6.3 Prueba diagnóstica

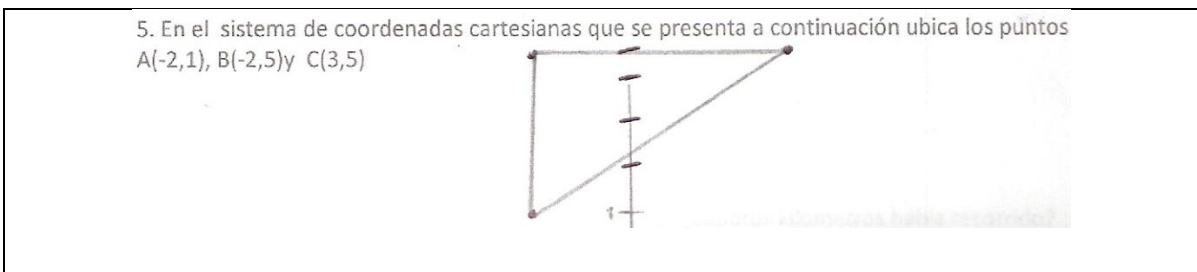
Como el interés de la unidad didáctica es el trabajo con estudiantes de noveno grado sobre la representación e interpretación de funciones, la prueba diagnóstica (Ver Anexo B) se direccionó a identificar errores. Como el aula virtual en la que se implementará la propuesta estaba en proceso de construcción, se aplicó una primera versión la prueba en forma presencial a 6 estudiantes de grado 9 de la Institución Educativa Municipal la Arboleda. Los resultados se presentan a continuación:

En las primeras 4 preguntas se pueden identificar errores sobre la ubicación de puntos en la recta numérica (ilustración 6-1) y en el plano cartesiano sobre todo cuando los números son racionales no enteros y cuando es necesario tener en cuenta una escala para la ubicación de estos, esto se puede evidenciar especialmente en el punto 3. Solo en un caso de reconocimiento de puntos en el plano cartesiano se intercambiaron abscisa y ordenada.

Ilustración 6-1 Errores relativos a la ubicación de puntos en la recta numérica



En el punto 5 en donde se pedía ubicar tres puntos en el sistema coordenado, algunos estudiantes procedieron a unirlos formando figuras. Este error puede incidir posteriormente en el momento que los estudiantes tienen que diferenciar entre variables discretas y continuas y representar los puntos de una tabla sin tener en cuenta el tipo de función al que se están refiriendo y el contexto.



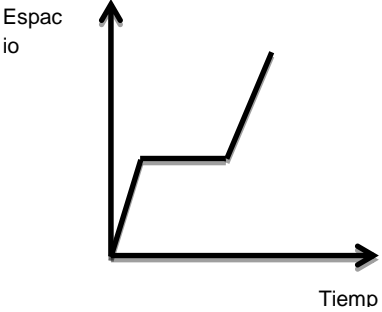
En el punto 7 se indagaba por describir verbalmente una gráfica, algunas respuestas tomadas literalmente respecto a las gráficas fueron (Tabla 6-4, 6-5):

Tabla 6-4 Respuestas al ejercicio 7a en la prueba diagnóstica

	<ol style="list-style-type: none"> 1. "el precio y el peso no varia" 2. "A medida que la magnitud del peso aumenta la magnitud del precio también aumenta de manera que ambas magnitudes lleguen a un punto estable. 3. "A medida que aumenta el precio aumenta el peso es directamente proporcional" 4. "El precio aumenta a medida que el peso aumenta es decir directamente proporcional" 5. "entre mayor peso el valor aumenta" 6. "Si el peso aumenta el precio también proporcionalmente"
--	---

Se puede concluir que hay confusión entre magnitudes relacionadas y magnitudes directamente proporcionales. Además uno de los estudiantes considera que el hecho de que la gráfica sea una recta significa que las magnitudes relacionadas no varían, posiblemente pensando en la constante de proporcionalidad.

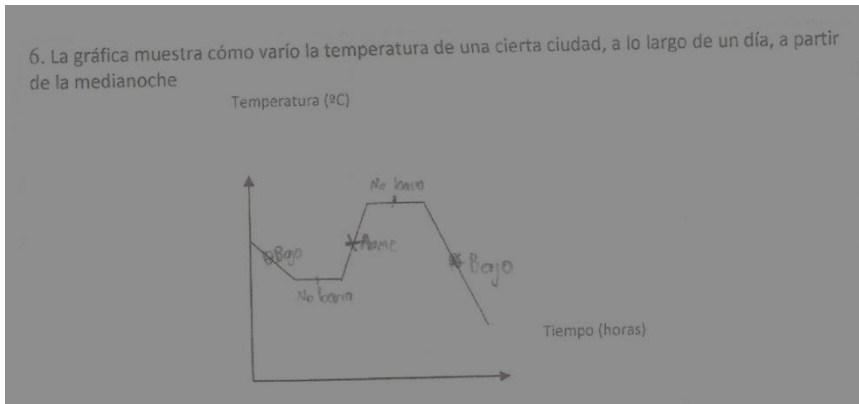
Tabla 6-5 Respuestas al ejercicio 7b en la prueba diagnóstica

	<ol style="list-style-type: none"> 1. "Va en ascenso" 2. " a medida que el tiempo avanza, el espacio recorrido a, b aumenta b,c permanece, estable y c,d vuelve a aumentar" 3. "recorrió una distancia y estuvo en reposo un tiempo y volvió a recorrer" 4. "podemos ver que así se avance o no el tiempo sigue transcurriendo" 5. "durante el recorrido reposa un momento" 6. "recorre, se detiene y vuelve a recorrer"
---	--

Solo un estudiante señala intervalos de tiempo y hace un análisis correcto de la variación en cada uno de los intervalos. Otros reconocen que hay momentos o intervalos de no variación sin identificarlos exactamente.

En los ejercicios 6 y 8 los estudiantes deben interpretar gráficas de forma cualitativa, hay una tendencia a leer punto por punto y no intervalos, es decir les cuesta un poco analizar la continuidad de la gráfica. Por otro lado se interpreta usualmente la gráfica simplemente como un dibujo; este error llamado "lectura icónica de la gráfica" según Janvier (1979) citado por Azcarate, consiste en interpretar la gráfica como un dibujo alterando el significado de las variables; es decir realizan la lectura como si fuese un esquema topográfico de una montaña en la que hay segmentos que suben y bajan (Ilustración 6-2).

Ilustración 6-2 Segmentos que suben y bajan



En el punto 9 en que se analiza un gráfica (evolución del peso de María y Jorge durante sus primeros 20 años) los estudiantes tienden a confundir el mayor incremento con el mayor valor e interpretan punto a punto descartando intervalos esto se evidencia en la pregunta 9b. Muestran dificultad para dar interpretaciones cuantitativas de la gráfica esto puede ser porque no tienen experiencia previa con el análisis de la variación,9c y 9d.

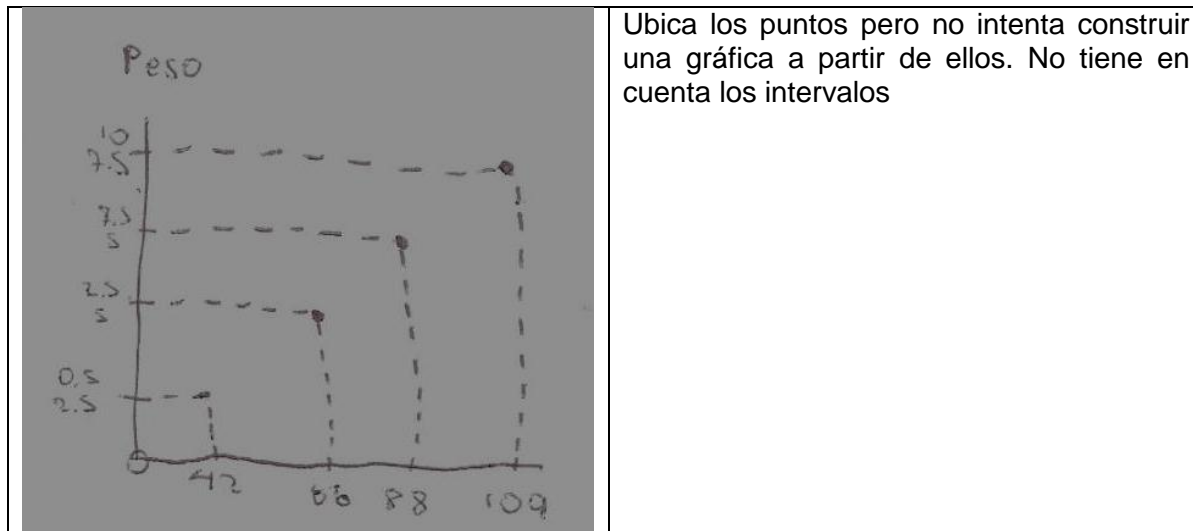
En el punto 10 se quiere que el estudiante a partir de una tabla de valores construya una gráfica y realice inferencias de ella. Se observó que cuando se trata de encontrar imágenes y preimágenes a partir de la tabla no hay problema, pero en el momento de construir la gráfica se observaron dos tipos de dificultades: o bien ubican simplemente los puntos y no construyen una gráfica o ubican los puntos y trazan un gráfica continua sin tener el cuenta el contexto. No diferencian variables discretas o continuas. En la Ilustración 6-3, 6-4, se muestran algunas imágenes que corresponden a la representación gráfica de los datos que se presentan en la tabla siguiente

Peso (Kg)	0,5 a 2,5	2,5 a 5	De 5 a 7,5	De 7,5 a 10
Precio (Dólares)	42	66	88	109

Ilustración 6-3 Dibujo gráfica continua

	<p>El estudiante asume, que el peso y el precio son variables directamente proporcionales. Además considera que las dos variables son continuas. No tiene en cuenta los intervalos.</p>
--	---

Ilustración 6-4 Dibujo gráfica discreta



6.4 Unidad Didáctica” Funciones,, su representación e Interpretación”

Tabla 6-6 Diseño de la Unidad Didáctica

UNIDAD DIDÁCTICA: “FUNCIONES, SU REPRESENTACIÓN E INTERPRETACIÓN”
<p>Dirigido a estudiantes de grado 9 Tiempo de duración 5 semanas Realizado por LICENCIADA YURY CAROLINA HERNANDZ ESCAMILLA</p>
<p>1. OBJETIVOS DE LA UNIDAD</p>
<p>GENERAL:</p>
<p>Diseñar una unidad didáctica para el análisis e interpretación del cambio de funciones de variable real.</p>
<p>ESPECIFICOS</p>
<p>Elaborar una secuencia de actividades que ayuden a estudiantes de grado 9 a reconocer e interpretar diferentes formas de representación de funciones de variable Real. Integrar las actividades usando herramientas virtuales, en la plataforma Moodle</p>
<p>Al finalizar el desarrollo de la unidad el estudiante logrará:</p>

Representar pares de números reales en el plano cartesiano seleccionando adecuadamente la escala.

Identificar y describir las variables relacionadas a partir de las diferentes formas de representación.

Traducir entre distintas formas de representación de una función de valor y variable real
Utilizar lenguaje y conceptos relacionados con la función.

Interpretar críticamente información gráfica o numérica.

ESTANDAR	COMPETENCIA
Analizar en representaciones gráficas cartesianas los comportamientos de cambio de funciones polinómicas, racionales y exponenciales.	COMUNICACIÓN MATEMATICA: Implica reconocer el lenguaje propio de las matemáticas, usar las nociones y procesos matemáticos en la comunicación, reconocer sus significados, expresar, interpretar y evaluar ideas matemáticas, construir, interpretar y ligar representaciones, producir y presentar argumentos.
HILO CONDUCTOR Y META DE COMPRENSIÓN	DESEMPEÑOS DE COMPRENSIÓN
Hilo conductor: ¿Cómo representarías matemáticamente el lanzamiento de una pelota? Meta de comprensión: Identificar los diferentes tipos de función Identificar e interpretar funciones en situaciones de aplicación.	Identifica los diferentes tipos de funciones y sus representaciones gráficas Relaciona entre si los diferentes formas de representación de una función Interpreta funciones de variable real que modelan fenómenos y situaciones en el contexto escolar y extraescolar.

2. ELEMENTOS DE LA UNIDAD

Teniendo en cuenta lo descrito al iniciar el capítulo 6 se describen los elementos que están involucrados en de la unidad

ELEMENTOS DE LA UNIDAD	
Actores	Estudiantes de grado noveno, profesora del área de matemáticas, plataforma Moodle
Roles	De estudiante y profesor
Actividades	Se realizaran actividades al interior de la plataforma y en el aula de clase
Estructura de actividades	Las actividades se trabajan en 5 secuencias cada una se desarrollará en una semana y contendrán los siguientes ítems: Leo: descripción de la secuencia, contenido explicativo

	<p>Práctico: actividades de desarrollo de la secuencia</p> <p>Comparto mis inquietudes: se realiza un foro que permite al estudiante compartir sus dudas, inquietudes y saberes con otros estudiantes del mismo grupo.</p> <p>Me Evalúo: actividades evaluativas y formativas donde el estudiante demuestra su aprendizaje</p>
Papeles	<p>El docente desarrolla las secuencias de aprendizaje de acuerdo a los estándares y competencias del pensamiento variacional para el grado noveno y dirige cada una de las actividades para aclarar las dudas y potenciar el proceso de enseñanza- aprendizaje</p> <p>El estudiante de forma autónoma desarrolla las actividades del aula virtual y se compromete a utilizar la plataforma de forma responsable.</p> <p>El aula virtual es la herramienta intermediaria entre docente y estudiantes.</p>

El modelo pedagógico en el que se basa la plataforma Moodle es constructivista, para leer sobre este tema remitirse a la pagina web: <http://docs.moodle.org/all/es/Pedagogía>

3. RECURSOS

Recursos técnicos

Un hosting con dominio **www.gugolmath.com** y una plataforma Moodle

Recursos virtuales

Intercambio de archivos

Soporte de múltiples formatos de archivo, como por ejemplo HTML, PDF, Word, Excel, Acrobat, entre otros

Herramientas de comunicación sincrónica (Chat)

Herramientas de comunicación asincrónica (correo electrónico o mensajería)

Calendario y revisión de progreso

Noticias del lugar

Perfil del estudiante

Autenticación de usuarios

Asignación de privilegios en función del rol del usuario

Registro de estudiantes

Test y resultados automatizados

Administración del curso

Apoyo al creador de cursos

Herramientas de calificación en línea

Seguimiento del estudiante

Reutilizar y compartir contenidos

Planillas de curso

Personalización del entorno

Herramientas para el diseño de la educación

Conformidad con el diseño de la educación

Librerías digitales o repositorios

Antes de iniciar las secuencias se presenta una introducción al tema e historia del desarrollo de las funciones de variable real, además se aplica una prueba diagnóstica para identificar errores conceptuales y una encuesta de caracterización de los estudiantes. (Anexo B+I)

4. INTENCIONALIDAD DE LAS SECUENCIAS

SECUENCIA 1: LAS GRAFICAS CARTESIANAS. LOS NÚMEROS Y LA RECTA. (Anexo G)

Con esta secuencia el estudiante aprenderá a:

Representar pares de reales en el plano cartesiano seleccionando adecuadamente la escala.

Leer e interpretar gráficas de funciones lineales y afines.

Esta secuencia tiene como fin afianzar los conceptos previos que se tienen acerca de cómo localizar e identificar parejas ordenadas en el plano cartesiano. Aprender a representar una recta en el plano de coordenadas y determinar sus características a partir de la gráfica para determinar su ecuación.

SECUENCIA N.2: EL LENGUAJE DE LAS GRÁFICAS (Anexo H)

Con esta secuencia el estudiante aprenderá a:

Interpretar cualitativamente gráficas de funciones que modelan situaciones de aplicación.

Traducir de un enunciado a una representación gráfica

Asociar diferentes tipos de gráficas relacionadas con un mismo fenómeno.

Los estudiantes a partir de preguntas analizan el comportamiento de un modelo funcional de manera cualitativa.

SECUENCIA 3. LECTURA INTERPRETACIÓN DE GRÁFICAS CARTESIANAS (Anexo I)

Con esta secuencia el estudiante aprenderá a:

Leer gráficas de funciones: identificar variables, imágenes y pre imágenes

Interpretar gráficas de funciones: hacer una descripción global, reconocer crecimiento y decrecimiento e identificar valores extremos.

El análisis que se propone en esta secuencia es cuantitativo, partiendo de algunas de las formas de representación de la función.

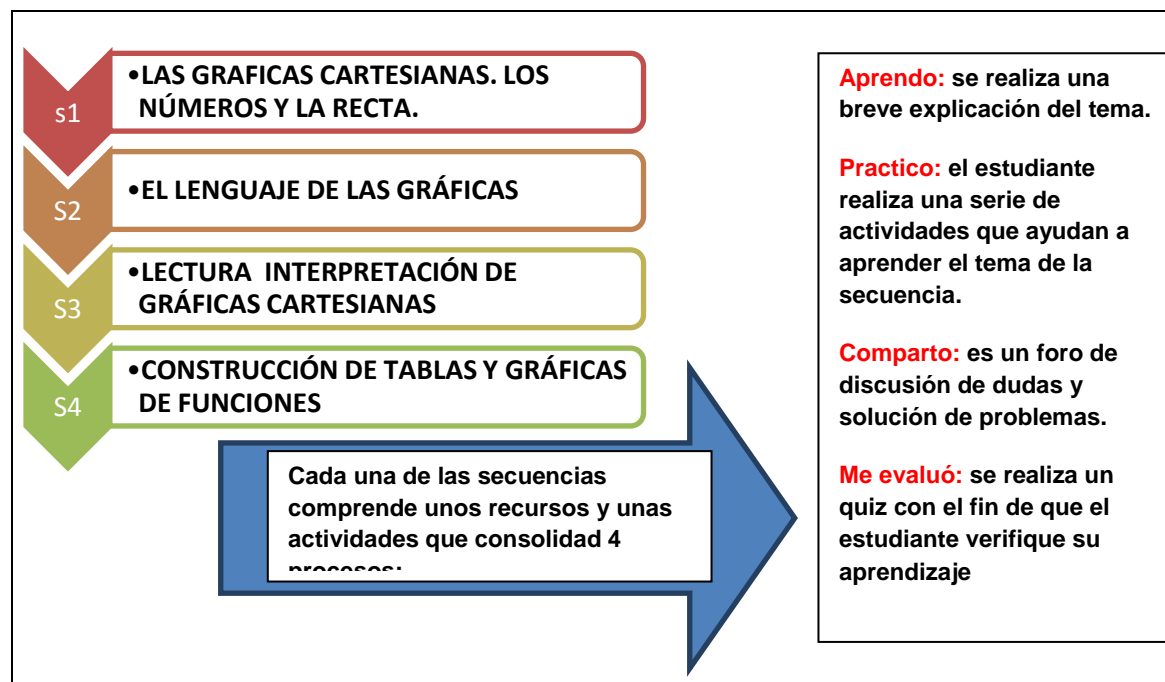
SECUENCIA 4: CONSTRUCCIÓN DE TABLAS Y GRÁFICAS DE FUNCIONES (anexo J)

Con esta secuencia el estudiante aprenderá a:

Construir una gráfica a partir de una tabla
 Construir una tabla a partir de un enunciado
 Construir una tabla a partir de una gráfica
 Construir una gráfica a partir de un enunciado
 Interpretar críticamente información gráfica y numérica.

Se realiza traducción entre diferentes formas de representación de la función y se analizan situaciones de aplicación en diferentes campos.

La estructura general de la unidad es la siguiente:



Las actividades están programadas para desarrollarse durante 6 semanas y se describen día a día para que el estudiante tome este hábito de estudio, aproximadamente 2 horas diarias de las cuales una es presencial y la otra virtual

5. EVALUACIÓN (Anexo K)

La evaluación de la unidad didáctica se realizara teniendo en cuenta los criterios establecidos en el capítulo 6 y respecto a los estudiantes y tendrá en cuenta las

directrices del MEN y de la Institución Educativa,

“Evaluar es la acción por medio de la cual se busca emitir un juicio valorativo sobre el proceso de desarrollo del estudiante, previo un seguimiento permanente que permita determinar qué avances ha alcanzado con relación a los desempeños y metas propuestos, qué conocimientos ha adquirido o construido y hasta qué punto se ha apropiado de ellos, qué habilidades y destrezas ha desarrollado, qué actitudes y valores ha asumido y hasta dónde éstos se han consolidado”.(MEN, “La evaluación en el aula y más allá de ella”, 1997).

Al ser la evaluación un proceso, el estudiante en el desarrollo de cada secuencia se le evaluará según los siguiente escala valorativa:

- 47-50 Desempeño Superior
- 40-46 Desempeño Alto
- 31-39 Desempeño Básico
- 10-30 Desempeño Bajo

Para ello con cada actividad que realice obtendrá unos puntos que se traducirán al final del curso a la anterior escala valorativa.

Se desarrollará un foro de participación en donde discutirán las soluciones de algunos problemas con el grupo de clase.

Una vez terminadas las 4 secuencias el estudiante presentará una prueba final y participará en un foro para aclarar las dudas. Responderá una encuesta de autoevaluación sobre desempeños comportamentales y actitudinales que alcanzó durante el proceso, finalmente responderá una encuesta donde evaluará el curso y tendrá un espacio para sugerencias y recomendaciones sobre la unidad didáctica.

Los pasos que deben seguir los estudiantes durante el desarrollo del curso son:

PASO 1	Paso 2	Paso 3	Paso 4	Paso 5
Leer generalidades del curso, realizar la prueba diagnóstica y responder la encuesta de caracterización	Desarrollar las actividades semanales para cada una de las secuencias	Resolver la prueba cognitiva final	Resolver la autoevaluación comportamental y actitudinal	Sugerencias y retroalimentación

7. Conclusiones y recomendaciones

Las diferentes etapas de construcción de este trabajo permitieron mejorar y comprender el proceso de enseñanza de las formas de representación de las funciones desde tres perspectivas, histórica, epistemológica, conceptual y didáctica. Específicamente:

1. El análisis de la evolución del concepto de función a la vez que ilustra sobre la complejidad de éste, al dimensionar los obstáculos que incidieron en su construcción, como por ejemplo, la aceptación de los números irracionales que impidió cuantificar el cambio y relacionar variables o la falta de un lenguaje simbólico formal, no permitió profundizar y avanzar en la comprensión del concepto. Pero además, este análisis generó cambios en las prácticas pedagógicas al observar que no se puede dar significado a este concepto, así como a la gran mayoría de conceptos matemáticos, a partir simplemente de una única definición esquemática y formal, como se asume generalmente en la básica, sino que es necesario que los estudiantes se aproximen a la noción de variación en diferentes contextos y a través de las distintas formas de representación.
2. A partir del análisis de artículos de investigación se reconoció la importancia de involucrar en el proceso de enseñanza de la matemática los distintos sistemas de representación, en el caso particular de la función, este trabajo potencia las competencias de los estudiantes para describir y analizar información en diversidad de contextos y desarrolla su pensamiento variacional.
3. La revisión de propuestas de investigación relacionadas con la didáctica del álgebra permitió reconocer recursos y estrategias que pueden enriquecer nuestras prácticas pedagógicas pues consideran posible pensar el aula de matemáticas como un laboratorio en donde inicialmente se identifican obstáculos cognitivos de los estudiantes para posteriormente experimentar y evaluar rutas diversas e innovadoras para aproximar al estudiante a los conceptos y estructuras básicas.
4. La selección de los recursos a incluir en el diseño de la unidad didáctica no fue fácil, ya que se encuentra bastante información y se debe tener muy claro el enfoque que se le quiere dar a la unidad y los objetivos propuestos, y en caso de que no existan los recursos es necesario crearlos, este es un proceso dispendioso pero interesante. A pesar de ello este trabajo dio la oportunidad de identificar elementos importantes sobre el cómo aprovechar mejor las formas de representación. Fortaleció el conocimiento pedagógico y profesional en la medida


de que se encontraron artículos especializados y libros que dan luces de nuevas metodologías y recursos para trabajar en el aula. He aquí la importancia de participar en seminarios y estar actualizándose tanto en el ámbito conceptual como didáctico.

5. Es importante estar a la vanguardia de las tecnologías de la comunicación y de la información ya que nuestros estudiantes avanzan conforme a las exigencias que la tecnología les impone y es un deber y una responsabilidad para los docentes del siglo XXI, ser competentes en este tema y apropiarse de estos recursos de aprendizaje, para mejorar la calidad y los procesos educativos. Ante todo romper paradigmas y abrir nuestra mente al cambio.
6. Respecto al E-learning y aulas virtuales se concluye que estas herramientas permiten una educación global que brinda diferentes posibilidades al conocimiento ya no solo en la dirección docente alumno, sino a través de un trabajo colaborativo que se desarrolla en comunidad en el que se descubren alternativas para lograr un aprendizaje significativo, motivante y emocionante. Particularmente la plataforma Moodle permitió la utilización de diferentes herramientas para optimizar el proceso, con la ventaja adicional de que dicho recurso puede ser actualizado o modificado constantemente.

A. Anexo: Paginas Web sobre funciones

- http://aulavirtual.inaeba.edu.mx/ejercicios_practicos/paginas/ejercicios_sec_mate.html
- <http://www.vitutor.com/>
- <http://www.juntadeandalucia.es/averroes/iesarroyo/matematicas/materiales/3eso/funciones/teoriainterpretaciondegráficas/teoriainterpretaciondegráficas.htm>
- http://www.amolasmates.es/cidead/3esomatematicas/3quincena9/index3_9.htm
- <http://masmates-igv-3eso.blogspot.com/2011/05/puedes-imprimir-los-siguientes.html>
- <http://www.estudiantes.info/matematicas/problemas/3-eso/interpretacion-de-gráficas.htm>
- <http://masmaticaparavos.blogspot.com/2011/08/interpretacion-de-graficos-nocion-de.html>
- <http://books.google.es/books?hl=es&lr=&id=NynAsmW8Vg0C&oi=fnd&pg=PA171&dq=gráficas+funcionales&ots=4QEib9tfj7&sig=DD43sp09AhZWQDMggEFLy-aJu-k#v=onepage&q=gráficas%20funcionales&f=false>
- http://www.virtual.unal.edu.co/cursos/ciencias/mtria_ensenanza/funciones_reales/index.html
- http://recursostic.educacion.es/descartes/web/presentacion/nippe_descartes_web.html

B. Anexo: Prueba diagnóstica

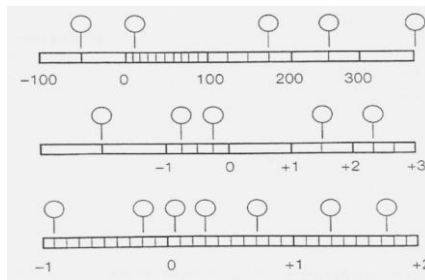
 INSTITUCIÓN EDUCATIVA MUNICIPAL LA ARBOLEDA	“Líderes Competentes en el Saber ser con Calidad Humana” EVALUACIÓN Asignatura: PRUEBA DIGNÓSTICA	Fecha Nov 2013
		CURSO 9 Tiempo: 1 hora y media
ESTUDIANTE:		

Resuelve cada uno de los ejercicios en la hoja anexa, incluye en cada caso procedimiento y justificación.

1 Observa la siguiente gráfica y escribe el número que corresponde a los puntos marcados con las letras A, B, C y D.

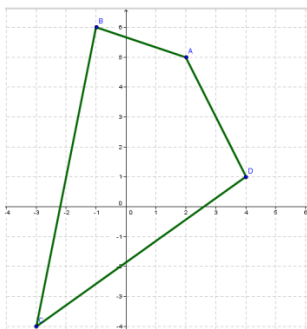


2. Rellena los siguientes círculos con los números correspondientes al punto marcado.



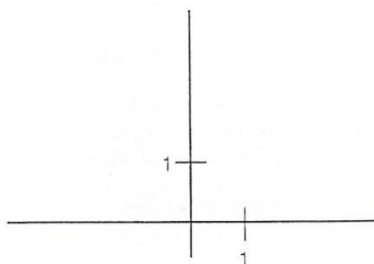
3. Representa sobre la recta numérica los puntos que corresponden a los números $1/3$, 1.25 , $5/2$, $-7/3$, -1.5 y -0.75

4. Escribe las coordenadas de los vértices de la siguiente figura

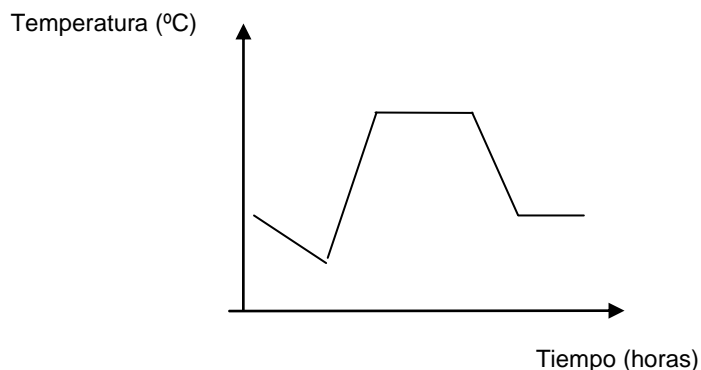


5. En el sistema de coordenadas cartesianas que se presenta a continuación ubica los puntos

A(-2,1), B(-2,5) y C(3,5)



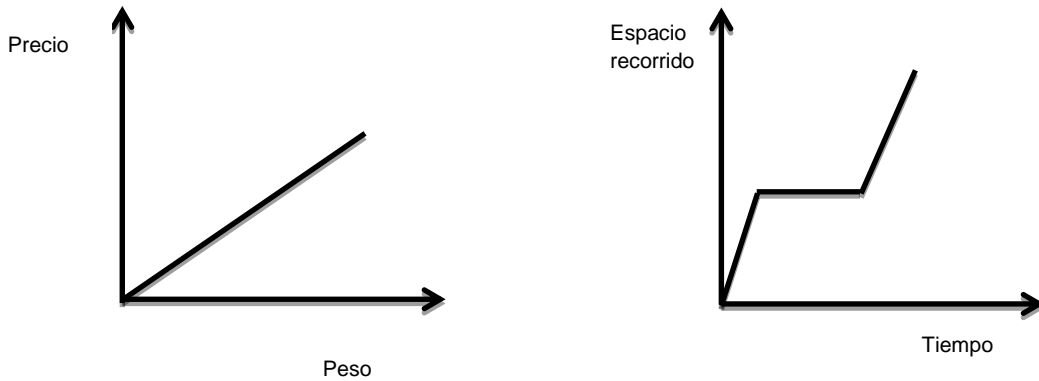
6. La gráfica muestra cómo varió la temperatura de una cierta ciudad, a lo largo de un día, a partir de la medianoche



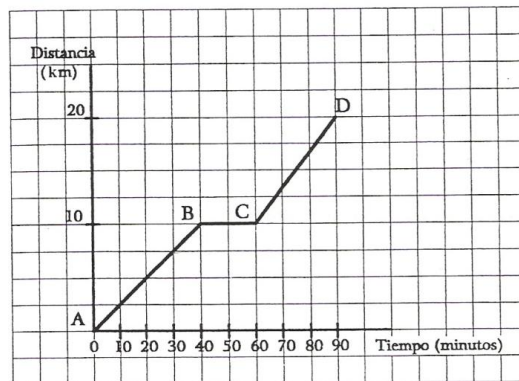
- Indica sobre la gráfica los tramos en los que la temperatura subió y los que bajó.
- Marca en la gráfica en qué momentos del día bajó la temperatura.
- ¿Hay uno o más momentos del día en que la temperatura no varió?
- Escribe una frase que describa la variación de la temperatura a lo largo del día ¿te parece un comportamiento habitual de la temperatura en la ciudad de Bogotá?
- ¿Qué puedes decir de las temperaturas inicial y final del día que describe la gráfica?
- Observa los momentos en que la temperatura bajó y describe las diferencias entre ellos.

7. Las gráficas siguientes describen la variación de diferentes pares de magnitudes.

Para cada una de las gráficas escribe un texto que describa esta variación



8. Un ciclista sale de su casa y recorre 30 km. La siguiente gráfica representa la relación entre el tiempo transcurrido desde que salió y la distancia recorrida en ese tiempo.

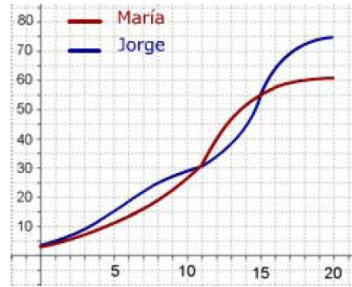


a) Transcurrida media hora desde que salió de su casa ¿Cuántos kilómetros ros había recorrido?

b) En la gráfica se señalan 3 tramos ¿Cómo interpretas el tramo BC?

c) ¿Crees que el ciclista fue más aprisa en algunos de los tres tramos?

9. En las siguientes gráficas se representan los pesos de María y Jorge, dos personas con un desarrollo normal, en sus primeros 20 años



- a) ¿Cuánto pesaba Jorge a los 8 años?, ¿y cuánto María a los 12? ¿Cuándo superó Jorge los 45 kg?
- b) ¿A qué edad tenían los dos el mismo peso? A qué edades ¿pesaba Jorge más que María?, y ¿María más que Jorge?
- c) ¿Cuál fue el aumento promedio (kg/año) de peso de la María entre los 11 y los 15 años? ¿Cuál el de Jorge? Compara estos promedios.
- d) ¿En qué periodo creció cada uno de ellos más rápidamente?

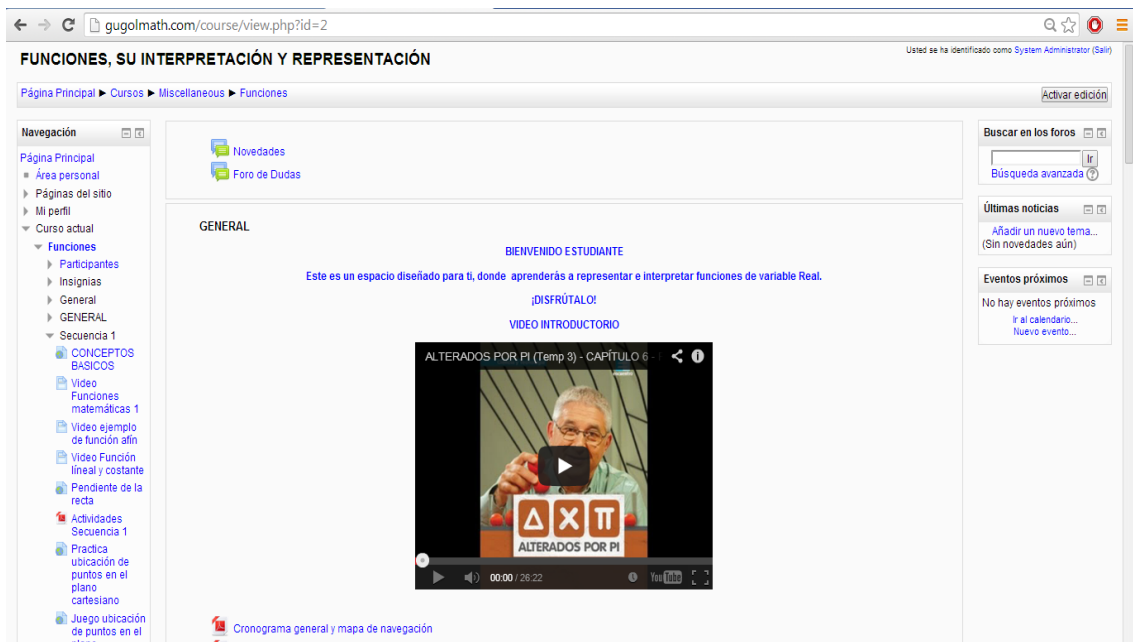
10. La empresa FedEx que transporta encomiendas internacionales puerta a puerta cobra el envío de acuerdo al peso de la encomienda. Las tarifas para paquetes individuales de 10 kg o menos para una zona determinada, se muestran a continuación:

Peso (Kg)	0,5 a 2,5	2,5 a 5	De 5 a 7,5	De 7,5 a 10
Precio (Dólares)	42	66	88	109

- a) ¿Cuánto se debe pagar por un paquete de 2 kg? ¿Cuánto por uno de 6.5 kg? ¿Y por uno de 8 kg?
- b) ¿Si el envío de una encomienda costó 66 dólares cuánto pesaba el paquete?
- c) ¿Cuánto crees que cuesta un paquete que pesa 13 kg?
- d) Construye una gráfica que represente la relación entre el peso en Kg de un paquete y el precio

C. Anexo: Aula virtual en Moodle

En la página www.gugolmath.com se encuentra alojada el aula virtual, y en el CD se encuentra un video con la presentación de la misma



The screenshot shows a Moodle course page titled "FUNCIONES, SU INTERPRETACIÓN Y REPRESENTACIÓN". The page is viewed from the URL gugolmath.com/course/view.php?id=2. The user is identified as "System Administrator (Salir)".

The page layout includes a navigation menu on the left with the following items:

- Página Principal
- Área personal
- Páginas del sitio
- Mi perfil
- Curso actual
 - Funciones
 - Participantes
 - Insignias
 - General
 - GENERAL
 - Secuencia 1
 - CONCEPTOS BASICOS
 - Video Funciones matemáticas 1
 - Video ejemplo de función afín
 - Video Función lineal y constante
 - Pendiente de la recta
 - Actividades Secuencia 1
 - Práctica ubicación de puntos en el plano cartesiano
 - Juego ubicación de puntos en el plano

The main content area is titled "GENERAL" and contains the following text:

BENVENIDO ESTUDIANTE

Este es un espacio diseñado para ti, donde aprenderás a representar e interpretar funciones de variable Real.

¡DISFRÚTALO!

VIDEO INTRODUCTORIO

ALTERADOS POR PI (Temp 3) - CAPÍTULO

ALTERADOS POR PI

The video player shows a man holding a sign with mathematical symbols: Δ , \times , and π .

On the right side of the page, there are several widgets:

- Buscar en los foros: Búsqueda avanzada
- Últimas noticias: Añadir un nuevo tema... (Sin novedades aún)
- Eventos próximos: No hay eventos próximos. Ir al calendario... Nuevo evento...



The screenshot shows a Moodle course page titled "Secuencia 2 EL LENGUAJE DE LAS GRÁFICAS". The page is viewed from the URL gugolmath.com/course/view.php?id=2.

The page layout includes a navigation menu on the left with the following items:

- Página Principal
- Área personal
- Páginas del sitio
- Mi perfil
- Curso actual
 - Funciones
 - Participantes
 - Insignias
 - General
 - GENERAL
 - Secuencia 1
 - CONCEPTOS BASICOS
 - Video Funciones matemáticas 1
 - Video ejemplo de función afín
 - Video Función lineal y constante
 - Pendiente de la recta
 - Actividades Secuencia 1
 - Práctica ubicación de puntos en el plano cartesiano
 - Juego ubicación de puntos en el plano
 - Secuencia 2
 - Secuencia 3

The main content area is titled "Secuencia 2 EL LENGUAJE DE LAS GRÁFICAS" and contains the following text:

Con esta secuencia aprenderás a:

- Interpretar cualitativamente gráficas de funciones que modelan situaciones de aplicación.
- Traducir de un enunciado a una representación gráfica.
- Asociar diferentes tipos de gráficos relacionadas con un mismo fenómeno.

RECURSOS

- El lenguaje de las funciones
- Video Funciones matemáticas 2
- Ejemplos lectura de gráficos
- Representación de funciones

ACTIVIDADES

- Actividades Secuencia 2
- Foro 2
- Me evalúo 2

Secuencia 3

LECTURA INTERPRETACIÓN DE GRÁFICAS CARTESIANAS

Con esta secuencia aprenderás:

- leer gráficas de funciones: identificar variables, imágenes y preimágenes.
- interpretar gráficas de funciones: hacer una descripción global, reconocer crecimiento y decrecimiento e identificar valores extremos.

D. Anexo Encuesta de caracterización

Objetivo: Caracterizar a los estudiantes de grado 9 respecto al uso y manejo de la internet y las Tics

ENCUESTA

Las preguntas que se plantean a continuación tienen como finalidades, conocer las condiciones de acceso a computadoras e Internet y determinar el tipo de equipamiento utilizado por los estudiantes y los usos habituales o frecuentes de las Tecnologías de la Información y la Comunicación (TIC).

Edad ____ Genero: F M

1. ¿Tienes computador en tu casa?

Si No

2. Califica tu dominio de las funciones básicas del computador de 1 a 5 teniendo en cuenta que 5 es un dominio excelente

1 2 3 4 5

3. ¿Tienes dirección de correo electrónico?

Si No

4. La mayoría (80% a 100%) de las veces usas la internet para:

Jugar

Consultar

Revisar el correo y las redes sociales

Desarrollar cursos

Chatear

5. ¿Consideras importante el uso del internet para tu formación académica?

Si

No

6. ¿Eres usuario de alguna red social (Facebook, twiter...)?

Si

No

7. ¿Cuánto tiempo dedicas al internet en un día?

No la uso

De 1 a 2 horas

De 3 a 4 horas

4 o mas horas

8. Cuantas veces a la semana utiliza la internet para realizar consultas académicas

No la uso

1 o 2 veces

3 o 4 veces

todo los días de la semana

9. Para conectarte a internet lo haces desde tu:

Casa

Café internet

Colegio

Celular

Otro Cuál _____

10. Cuánto inviertes tu o tus padres en internet en el mes:

Entre 5.000 y 15.000

Entre 15.000 y 25.000

Entre 25.000 y 35.000

Entre 35.000 y 45.000

Mas de 45.000

11. Qué tipo de tecnologías utilizas comúnmente, enumera de 1 a 3, siendo uno la que más utilizas:

Computador

Celular

IPod

Tablet

Consola de video juegos

12. ¿Cuánto tiempo estarías dispuesto a invertir en un día para mejorar tu desempeño académico, haciendo uso de internet?

Ninguno Por qué _____

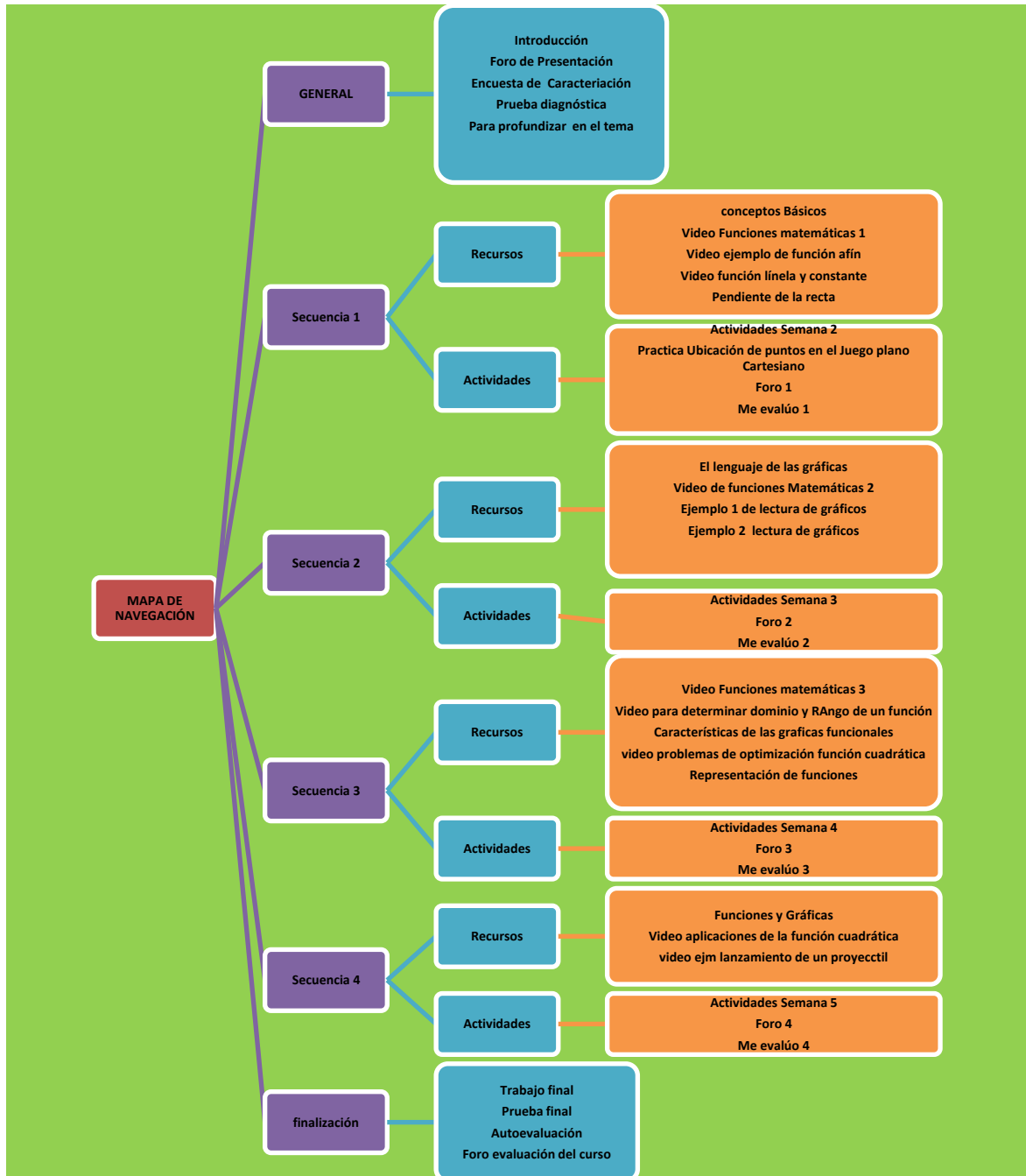
1 hora

2 horas

3 horas

Agradezco tu información y tiempo.

E. Anexo Mapa de Navegación



F. Anexo Introducción e Historia

CRONOGRAMA DE ACTIVIDADES PRIMERA SEMANA	
Día	Actividad
Día 1	Presentación y capacitación en el uso de la plataforma
Día 2	Continuación de la capacitación en el uso de la plataforma
Día 3	Encuesta de caracterización y foro de presentación
Día 4	prueba diagnóstica
Día 5	Introducción e historia de las funciones
Día 6	Video de introducción a las funciones

INTRODUCCIÓN

VIDEO INTRODUCTORIO

<http://www.youtube.com/watch?v=iwYeu3MbkTU>

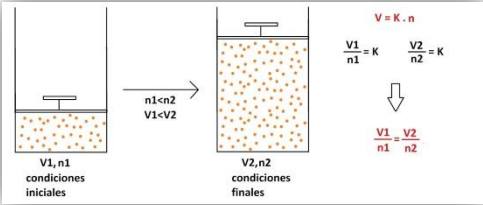



Actividad: escribe 5 ideas principales de lo que entendiste en el video

FUNCIONES MATEMATICAS, SU REPRESENTACIÓN E INTERPRETACIÓN

La importancia del concepto de función se debe a su enorme campo de aplicaciones prácticas, en problemas de finanzas, de economía, de estadística, de ingeniería, de medicina, de química y física, de astronomía, de geología, y de cualquier área social donde haya que relacionar variables.

De una forma intuitiva podemos decir que una función matemática es una ley que regula la dependencia entre cantidades o magnitudes variables.

Algunos ejemplos que nos muestran la dependencia entre variables son los siguientes:

	<p>La temperatura de un volumen conocido de un gas vendrá determinada por su presión</p>
<p>La trayectoria recorrida al lanzar una pelota en un cierto tiempo</p>	
	<p>la intensidad de la corriente que atraviesa una resistencia vendrá determinada por la diferencia de potencial</p>
<p>la energía potencial de un salto de agua dependerá de su altura</p>	

Estos y muchos otros ejemplos se pueden estudiar a través de funciones. Durante el recorrido del curso conocerás un poco más sobre las diferentes formas de representar una función y realizar una interpretación de las mismas.

Actividad: Escribe 3 ejemplos diferentes a los presentados donde encuentres dependencia entre las variables

Ahora revisemos algunos aspectos de la historia que nos ayudaran a comprender el desarrollo del concepto de función. Cuando termines de leer consulta y escribe el significado de las 6 palabras que se encuentran resaltadas en los cuadros de la historia.

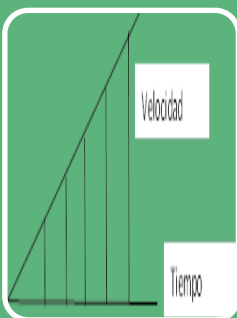
DESARROLLO DEL CONCEPTO DE FUNCIÓN

EDAD ANTIGUA



- los babilónicos (2.000 a.c. a 600 ac.) establecían correspondencias entre números naturales. Analizando documentos de la época los historiadores han concluido que ellos utilizaron las **tablas** para establecer relaciones entre variables y esto podría considerarse como un primer paso en la construcción del concepto de función a través de una de sus formas de representación
- Algunos aportes de matemáticos de esta época al concepto son:
- Apolonio: año 225 a.c. introdujo una teoría para describir las cónicas
- Ptolomeo de Alejandría (105 d.c), para registrar sus observaciones del cielo construyó tablas astronómicas en las que usó consistentemente y por primera vez, las hoy llamadas, razones trigonométricas

EDAD MEDIA



- En este periodo se empezaron a describir fenómenos naturales como la luz, el calor, la distancia, la velocidad y esto condujo a desarrollar ideas relacionadas con **cantidades variables** y a introducir nociones de dependencia e independencia, a partir de un análisis inicialmente cualitativo
- Aportes de algunos matemáticos de ésta época:

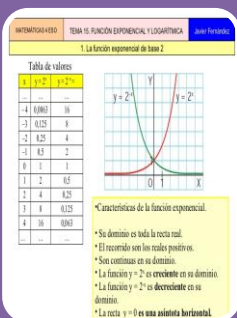
Nicolás de Oresme (1323-1328) rompió con la idea de que el movimiento solo puede ser descrito de forma cualitativa, para ello introdujo tempranamente un primer **sistema de ordenadas**. **Interesado** en representar la velocidad de un móvil a lo largo del tiempo, traza un segmento horizontal cuyos puntos representan, los sucesivos instantes de tiempo (longitudes) y para cada instante un segmento particular (latitud) cuya longitud representa la velocidad en aquel instante (Ver la imagen superior). Como se observa en la gráfica Oresme no graficó curvas en un sistema de coordenadas como hoy lo hacemos, pero su obra se constituyó en un paso importante para los comienzos de la geometría analítica. Aunque para esta época sus métodos eran muy limitados debido a que no había un desarrollo del álgebra

SIGLO XV al XVII



- Es Galileo (1564-1642) quien en su trabajo, introduce por primera vez el concepto de **relación funcional** a partir del análisis del movimiento (la caída de los cuerpos y el lanzamiento de proyectiles).
- Con el trabajo de Vieta (1540-1603) sobre el Álgebra Simbólica y el de Galileo respecto al las leyes del movimiento se empezó a fundamentar de manera más precisa la noción de relación funcional, pero es R. Descartes (1596- 1650) quien plantea por primera vez el hecho de que una ecuación en variables x e y es una forma para expresar una dependencia entre dos cantidades variables de manera que a partir de ella es posible calcular los valores de una variable que corresponden a determinados valores de la otra.
- Descartes y Fermat estudiaron respectivamente, **ecuaciones** a través del significado de las curvas su comportamiento y las propiedades definidas por las ecuaciones. Este trabajo fue el origen de la geometría analítica, pues una nueva curva se generaba ahora por una nueva ecuación

SIGLO XVIII al XX



Se plantea el concepto de **función** que se va perfeccionando poco a poco. Diferentes matemáticos aportaron en este proceso:

Dirichlet (1805- 1859) el que define, en 1837, el concepto de función así:

Si una variable y está relacionada con otra variable x de tal manera que siempre que se atribuya un valor numérico a x hay una regla según la cual queda determinado un único valor de y , entonces se dice que y es una función de la variable independiente

A finales del siglo XIX y principios de XX se introdujo el concepto de "conjunto", que fundamentó las posteriores definiciones de función

"Una función es una regla de correspondencia entre dos conjuntos de tal manera que a cada elemento del primero conjunto le corresponde uno y sólo un elemento del segundo conjunto".

Al primer conjunto se le da el nombre de dominio y al segundo conjunto se le da el nombre de contradominio o imagen.

G. Secuencia 1

Con esta secuencia aprenderás a:

- Representar pares de reales en el plano cartesiano seleccionando adecuadamente la escala.
- Leer e interpretar gráficas de funciones lineales y afines.

Recursos

- **Conceptos básicos:**
<http://didactalia.net/comunidad/materialeducativo/recurso/funciones-y-graficas-cuadernia/ef0d981a-8a8a-4bd0-91ff-991ff936f381>
- **Video funciones matemáticas:** <http://www.youtube.com/watch?v=WiWAzX7Ksj8>
- **Juego 1 ubicación de puntos en el plano cartesiano**
<http://www.skool.es/content/sims/maths/Co-ordinates/launch.html>
- **Practica ubicación de puntos en el plano**
<http://www.thatquiz.org/es-7/?-j104-l5-p0>
- **Simulador función lineal**
http://docentes.educacion.navarra.es/msadaall/geogebra/figuras/f01_propor.html
- **Simulador de función afín**
http://docentes.educacion.navarra.es/msadaall/geogebra/figuras/f1_lineal.html

Actividades

- Cronograma de Actividades Semana 2
- Foro 1
- Me evalúo 1

A continuación te direccionare como debes aprender el tema de esta semana.

CRONOGRAMA DE ACTIVIDADES SEGUNDA SEMANA	
Día	Actividad
Día 7	Ver el video Funciones Matemáticas 1 y responder las preguntas propuestas
Día 8	Practicar ubicación e interpretación de puntos en el plano cartesiano
Día 9	Leer y comprender el OVA sobre conceptos básicos y desarrollar las actividades
Día 10	Taller función lineal
Día 11	Simulador función lineal
Día 12	Resolver la actividad del Foro 1 y la actividad evaluativa "Me evalúo 1"

A continuación encontraras de formas mas detallada la descripción de las Actividades

Día 7

Da clic en el enlace del video "Funciones Matemáticas 1" y responde las preguntas:

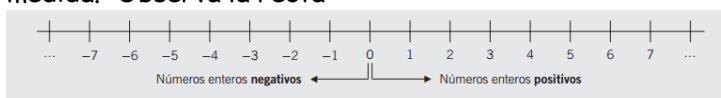
1. Nombra dos matemáticos que aportaron al desarrollo del concepto de función
2. Qué aportes hizo Nicolás Oresme a las formas de representación de las funciones
3. Escribe 4 ejemplos de funciones que aparecen en el video
4. ¿Qué entiendes por función en matemáticas?

Día 8

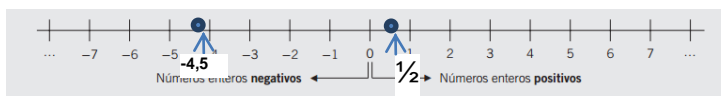
Recuerda

Representación de puntos en la recta numérica

1. Dibujamos una recta.
2. Seleccionamos sobre esa recta un punto, lo llamamos origen O , a este punto le hacemos corresponder el valor cero.
3. Seleccionamos una unidad y dividimos la recta en segmentos de la misma medida (unidad). A la derecha de cero se ubican los números enteros positivos, y a la izquierda los números enteros negativos. Al entero positivo 2 le corresponderá un segmento que tiene dos unidades de medida. Observa la recta



A continuación ubicamos los número racionales teniendo en cuenta la unidad seleccionada



Y posteriormente los números irracionales



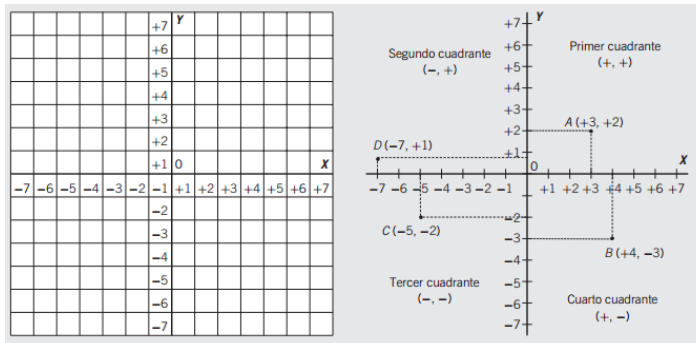
Cuando en la recta numérica queremos ubicar un número muy grande como por ejemplo 100 utilizamos una escala como la siguiente



Coordenadas en el plano cartesiano

1. Trazamos dos líneas rectas que se corten perpendicularmente, una de ellas usualmente en posición horizontal será el eje x (abscisas) y la otra la vertical representa el eje y (ordenadas). El punto de corte de estas dos rectas es el origen del sistema y corresponde al punto de coordenadas $(0,0)$.

Se forman 4 regiones o cuadrantes como se muestra a continuación



2. En el plano construido se ubican parejas ordenadas de números reales (x, y) que corresponden a puntos en el plano. Recuerda por ejemplo para ubicar en el plano de coordenadas el punto $(-7,1)$ te sitúas en el origen avanzas 7 unidades hacia la izquierda sobre el eje x y a partir de este punto subes perpendicularmente una unidad.

Actividades:

1. Da clic en el link de juego y da las coordenadas del barco. Da clic en "ubicación de puntos en el plano cartesiano" y ubica los puntos que te sugieren en la página.
2. Resuelve los siguientes ejercicios en tu cuaderno sobre ubicación de puntos en la recta y en el plano cartesiano. (Adaptado del libro "El lenguaje de funciones y gráficas, Editorial Ellacuría, España, recuperado de http://books.google.com.co/books?id=RodT_pqsn8kC&printsec=frontcover&hl=es&source=gbs_ge_summary_r&cad=0#v=onepage&q&f=false)

1. LA FILA DE LA PARADA DEL BUS

Observa en la imagen personas de diferentes estaturas y edades. ¿Quién está representada por cada punto del diagrama inferior?

2. Dos aviones

Las siguientes gráficas describen a dos aviones ligeros, A y B (Nota: las gráficas no se han realizado con exactitud).

La primera gráfica muestra que el avión B es más caro que el A. ¿Qué más indica?

- ¿Son ciertas o falsas las siguientes afirmaciones?
 - «El avión más viejo es más barato»
 - «El avión más rápido es más pequeño»
 - «El avión más grande es más viejo»
 - «El avión más barato transporta menos pasajeros»
- Copia las gráficas siguientes. En cada gráfica marca dos puntos que representen a A y a B.

Nota
Ligero: corresponde a un avión liviano, o de poco peso

3. Llamadas telefónicas

Un fin de semana. Cinco personas hicieron llamadas telefónicas a varias partes del país. Con el precio y el tiempo que duró la llamada de cada uno de ellos elaboraron la siguiente gráfica:

- ¿Quién realizó una llamada a larga distancia? Justifica tu respuesta
- ¿Quién realizó una llamada local? Explícalo
- ¿Quiénes hicieron llamadas a la misma distancia aproximadamente? ¿Por qué?
- Copia la gráfica y marca otros puntos que representen a personas que hicieron llamadas locales de diversa duración.

Día 9

Da clic en el recurso titulado conceptos básicos y ubícate a partir de la página 10, en donde te aparecerá la siguiente imagen

Botón pantalla completa

Botones

Página anterior -

página siguiente +

para elegir una página, escribir el número de pág. y dar clic en la flecha

- Lee cada una de las páginas y sigue las instrucciones de las actividades de la página 16: Ubica los puntos en el plano cartesiano, realiza mínimo 8 ejercicios de la página.

Día 10

Trabajo colaborativo:

- a) Con tu grupo de trabajo lee y resuelve los ejercicios pares del ejercicio 3.3 de la página 8 "Taller Función Lineal" propuesto en los recursos. Los resultados se discutirán en la clase.
- b) Y del recurso "Conceptos Básicos" ubícate en la página 26, 27, 28 29 y resuelve los problemas. Las respuestas se discutirán a través del foro.

Día 11

Da clic en el simulador de función lineal y afín y responde las preguntas en tu cuaderno

Día 12

Da clic en el Quiz 1 y responde cada una de las preguntas propuestas. Tienes una oportunidad para responderlo.

FORO:

La pregunta que se discutirá en el foro es la siguiente

Para la realización de un viaje hemos decidido alquilar un auto. El precio de este alquiler es de \$150.000 diarios más \$3.000 por cada kilómetro recorrido con el auto. ¿Cuánto debemos pagar si alquilamos el auto durante dos días y recorremos 450 km? Halla una función que permita calcular de manera sencilla el precio a pagar para cualquier número de días de alquiler y de kilómetros recorridos.

Me evalúo 1

Selecciono en cada caso la respuesta correcta

Teniendo en cuenta la imagen responde

1. Relaciona los nombres de Alex, Susana, Nuria y David, teniendo en cuenta el informe y la grafica

1. OTRO
2. NURIA
3. DAVID
4. ALEX
5. SUSANA

Escribe un enunciado que describa el punto que hace falta

El punto corresponde a una persona que trabajo muy duro pero no realizo un buen examen

2. Dos cajas de sardinas cuestan en un supermercado \$10.000. La función que define el costo de las sardinas y en función del número de cajas x es:

INTERPRETANDO PUNTOS

1. Informes escolares

Alex ha sido muy perezoso todo el trimestre y esto le ha hecho obtener una nota muy pobre en el examen.



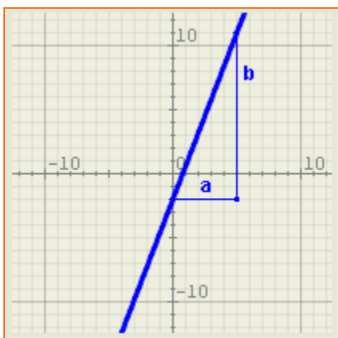
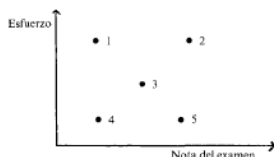
Susana es una alumna muy capaz, como lo muestra claramente la nota de su examen, pero su concentración y conducta en clase son muy pobres. Con más esfuerzo, podría hacerlo muy bien en esta asignatura.

Nuria ha trabajado bien y merece este maravilloso resultado en el examen.



David ha trabajado razonablemente bien este trimestre y ha conseguido un resultado satisfactorio en el examen.

Cada informe escolar está representado por uno de los puntos del gráfico. Marcar cuatro puntos con los nombres Alex, Susana, Nuria y David. Elaborar un informe para el punto sobrante.



- $y = 10.000x$
- $y = 5.000x$
- $y = 2.000x$
- $y = 8.000x$

3. El crecimiento de un cedro (Árbol) a partir del tercer año tiene un comportamiento lineal. El siguiente gráfico ilustra el crecimiento del cedro en metros a través de los años.

Si el cedro alcanza su altura máxima al cabo de 30 años, ¿Cuántos metros llegara a medir?

- 19 Metros
- 17 Metros
- 44 Metros
- 46 Metros

4. La ecuación de la recta que se muestra en la imagen es

- $y = \frac{5}{13}x + 2$
- $y = -\frac{5}{13}x + 2$
- $y = \frac{13}{5}x - 2$
- $y = -\frac{13}{5}x - 2$

5. Un técnico de reparaciones de electrodomésticos cobra \$50.000 por la visita, más \$10.000 por cada hora de trabajo. ¿Cuánto tendría que pagar una persona si el técnico estuvo 3 horas haciendo la reparación?

- \$60.000
- \$70.000
- \$80.000**
- \$50.000

6. Escribe verdadero o falso según corresponda:

- Si la gráfica de una función es una línea recta, la función es lineal. _____
- Si la pendiente de una recta es menor que cero la función correspondiente es decreciente. _____
- Una función lineal siempre tiene punto de corte en el origen. _____
- La pendiente de una recta es la constante de proporcionalidad. _____

H. Anexo Secuencia2

Con esta secuencia aprenderás a:

- Interpretar cualitativamente gráficas de funciones que modelan situaciones de aplicación.
- Traducir de un enunciado a una representación gráfica.

Recursos

- Video "Funciones Matemáticas 2" <http://www.youtube.com/watch?v=dS0fh9dwW0k>
- Ejemplo 1 de lectura de gráficos <http://www.youtube.com/watch?v=s7dMPOK49JU>
- Ejemplo 2 <http://www.youtube.com/watch?v=DWula3FrQ1M&list=PLC-j4ScU0ZaqSrw-m70gShj3EwajNpvdz>.

Actividades

- Cronograma de Actividades Semana 3
- Foro 2
- Me evaluó 2

A continuación te direccionare como debes aprender el tema de esta semana.

CRONOGRAMA DE ACTIVIDADES TERCERA SEMANA	
Día	Actividad
Día 13	Ver el video Funciones Matemáticas 2 y responder las preguntas propuestas
Día 14	Actividad del recurso "el Lenguaje de las funciones" pág. 12 a 18
Día 15	Actividad del recurso "el Lenguaje de las funciones" pág. 19 a 24
Día 16	Observar el video "Ejemplo de lectura de gráficos"
Día 17	Dibuja la grafica a partir del texto, en una hoja examen y confronta el resultado con los de tu grupo de trabajo.
Día 18	Resolver la actividad del Foro 2 y la actividad evaluativa "Me evaluó 2"

Día 13
Observa el video dando clic en el video "Funciones matemáticas 2" y responde las siguientes preguntas:
1. Cuál es la relación que existe entre la inclinación de la rampa y la velocidad del monopatín?
2. ¿Para qué se utilizan las tablas y los gráficos de funciones?
3. Escribe 2 ejemplos de correspondencia entre magnitudes
4. ¿Qué otros nombres reciben los ejes x e y ?, ¿A qué punto corresponde el origen en un sistema de coordenadas?, En qué eje ubicamos el conjunto de salida (dominio) y ¿el conjunto de llegada (codominio)?
5. ¿Qué es una función? ¿En cuál eje usualmente se ubica la variable dependiente y en cuál la variable independiente?
6. Explica, porqué son importantes las gráficas de funciones en ingeniería y en ciencias. Ilustra con ejemplos.

Día 14

Da clic en el recurso "el Lenguaje de las funciones" Estudia los ejemplos y responde las preguntas de las actividades de la pagina 12 a la pagina 18

Día 15

Da clic en el recurso "el Lenguaje de las funciones" Estudia los ejemplos y responde las preguntas de las actividades de la pagina 19 a la pagina 24.

Día 16

Da clic en el video de ejemplo de lectura de gráficos, analiza el ejemplo y realiza un análisis parecido del siguiente ejercicio:

Observa y analiza la tabla siguiente en la que aparece información sobre el tiempo y la distancia recorrida por un motociclista, desde el inicio de su viaje hacia una ciudad. Responde ahora las preguntas

Tiempo (s)	Distancia (m)
0	0
5	100
10	300
15	300
20	400
25	500
35	0

- Traza una gráfica de posición en función del tiempo
- Calcula la distancia total recorrida por el motociclista
- Calcula el desplazamiento total
- Determina la velocidad en los primeros 5 segundos
- Calcula la velocidad del motociclista entre los 15 y 25 segundos.

Día 17

Lee el siguiente texto y dibuja una gráfica a partir de él en una hoja examen y compárala con las gráficas de tu grupo de trabajo

Recolección de fresas



- Utilizando los siguientes ejes, haz una gráfica que ilustre esta situación.



- Compara tu gráfica con las de tus compañeros. Intenta llegar a un acuerdo sobre la versión correcta.
 — Escribe cómo has llegado a tu respuesta. En particular responde a las siguientes cuestiones:
 ¿Debería ir la gráfica «hacia arriba» o «hacia abajo»? ¿Por qué?
 ¿Debería ser la gráfica una línea recta? ¿Por qué?
 ¿La gráfica debería cortar los ejes? Si es así, ¿dónde? Si no, ¿por qué no?

Haz un mapa conceptual donde expliques cuáles son las formas de representación de una función

Día 6

Resuelve la actividad evaluativa "Me evaluó 2"

FORO:

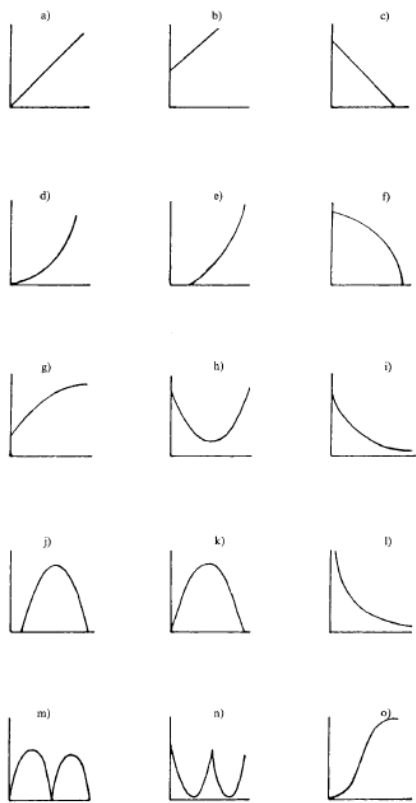
Soluciona la siguiente actividad escribiendo los resultados en el foro y justifica tu respuesta

Elige la gráfica que mejor se ajuste a cada una de las diez situaciones descritas. (algunas gráficas pueden ajustarse más de una situación) copia la gráfica, escribe nombre a los ejes y explica tu elección, indicando todas las suposiciones que hagas. Si no encuentras la gráfica que quieres, dibuja tu propia versión)

1. "los precios están subiendo ahora más despacio que en nungun otro momento"
2. "Me gusta bastante la leche fría y la leche caliente, pero detesto la leche tibia"
3. "Cuanto mas pequeñas son las cajas, màs podemos cargar en la camioneta"
4. "después del concierto hubo un siliencio abrumador. Entonces una persona de la audiéncia empezó a aplaudir. Gradualmente, los que estaban alrededor se le unieron y pronto todo el mundo estaa aplaudiendo y vitoreando"
5. Si las entradas del cine son muy baratas, los dueños perderán dinero. Pero si son demasiano caras, ira poca gente y también perderan. Por tanto, un cine debe cobrar un precio moderado para obtener beneficio"

En las siguientes situaciones, tienes que decidir tú lo que pasa. Expicalo claramente por escrito y eleige la mejor gráfica

6. ¿Cómo depende el precio de una bolsa de papas de su peso?
7. ¿Cómo varía el diámetro de un globo cuando sale aire lentamente de él?
8. Describe la relación entre la duración de una carrera de atletismo y la longitud del recorrido
9. ¿Cómo varía la velocidad de una niña en un columpio?
10. ¿Cómo varía la velocidad de una pelota cuando rebota?



(Adaptado del libro "El lenguaje de funciones y gráficas, Editorial Ellacuría, España, recuperado de:

http://books.google.com.co/books?id=RodT_pqsn8kC&printsec=frontcover&hl=es&source=gbs_ge_summary_r&cad=0#v=onepage&q&f=false)

Me evalúo 2

Dibuja gráficas para ilustrar las siguientes situaciones. Marca los ejes con las variables que aparecen entre paréntesis. En la situación 3 dibuja dos gráficas en los mismos ejes.

1. "Durante la primavera el césped de mi jardín crecía rápidamente y había que cortarlo todas las semanas, pero desde que hace este tiempo seco y caluroso, hay que cortarlo con menos frecuencia".

(longitud de césped/tiempo)

2. Cuando armo un rompecabezas, empleo aproximadamente la primera media hora separando las piezas del borde. Cuando he juntado todas las que he podido encontrar, hago un borde siguiendo el de la mesa. Después comienzo a rellenarlo con las piezas interiores. Al principio, esto va muy lento, pero cuantas más piezas pones, menos piezas hay para seleccionar y se corre más. "

(número de piezas colocadas en el rompecabezas/tiempo)

3. "El insecto cóccido algodonoso australiano fue introducido accidentalmente en América en 1868 y aumentó en número hasta que pareció que iba a destruir los huertos de cítricos californianos. Su predador natural, una mariquita, fue introducida artificialmente en 1889 y

esto redujo rápidamente la población del insecto cóccido. Posteriormente se utilizó DDT para intentar reducirla aún más. Sin embargo, como resultado de la aplicación del insecticida aumentó su número ya que la mariquita era mucho más sensible al DDT que el insecto cóccido, y este se convirtió de nuevo en un serio problema".

Utiliza los mismo ejes

(Población de insecto cóccido/tiempo)

(Población de mariquitas/tiempo)

4. La gráfica siguiente nos da el peso de un recién nacido durante sus primeros 12 días de vida:

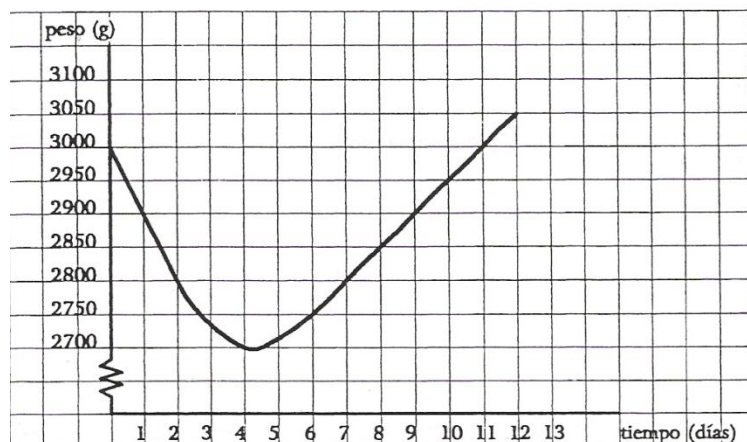


Imagen tomada de: AZCARATE Carmen y otros (2002), Funciones Tablas y Gráficas, Editorial Praxis

- ¿Qué peso tenía el bebé al nacer?
- ¿El bebé perdió peso durante algunos días? ¿En qué día el peso del bebé fue mínimo?
- ¿En cuál de los días el bebé recuperó el peso que tenía al nacer?
- Describe verbalmente cómo fue cambiando el peso de este bebé durante sus primeros 12 días.
- Podrías decir ¿cuál es el peso aproximado de este bebé en el día 13? Explica tu respuesta

I. Secuencia 3

Con esta secuencia aprenderás a:

- Leer gráficas de funciones: identificar variables, imágenes y pre imágenes
- Interpretar gráficas de funciones: hacer una descripción global, reconocer crecimiento y decrecimiento e identificar valores extremos.

Recursos

- Video funciones matemáticas 3 <http://www.youtube.com/watch?v=hIE9OC3iAgQ>
- Funciones y graficas
- Representación de funciones
<http://www.youtube.com/watch?v=zr7qAAytH2k&list=PLZNmE9BEzVik3VQdqC9kJ8pcR0iJJMh87>

Actividades

- Cronograma de Actividades Semana 4
- Foro 3
- Me evalúo 3

A continuación te direccionare como debes aprender el tema de esta semana.

CRONOGRAMA DE ACTIVIDADES CUARTA SEMANA	
Día	Actividad
Día 19	Ver el video Funciones Matemáticas 3 y responder las preguntas propuestas
Día 20	Estudia las características globales en el recurso "funciones y Graficas"
Día 21	Estudia los siguientes temas en el recurso "Funciones y Gráficas"
Día 22	Actividad con el programa Geogebra
Día 23	Resuelve los puntos 10, 11 12 y 13 de la página 142, del recurso "Funciones y Gráficas"
Día 24	Resolver la actividad del Foro 3 y la actividad evaluativa "Me evalúo 3"

Día 19

Ver el video Funciones Matemáticas 3 y responder las preguntas :

1. ¿Con que propósito se estudia la relación entre variables?
2. ¿Qué características tienen las funciones periódicas?
3. ¿Cuándo una función es creciente y cuando es decreciente?
4. Escribe un ejemplo de una función y dibuja su grafica subrayando con azul los tramos en que la función es creciente y con rojo los tramos en que la función es decreciente

Día 20

Estudia los siguientes temas en el recurso "Funciones y Gráficas"

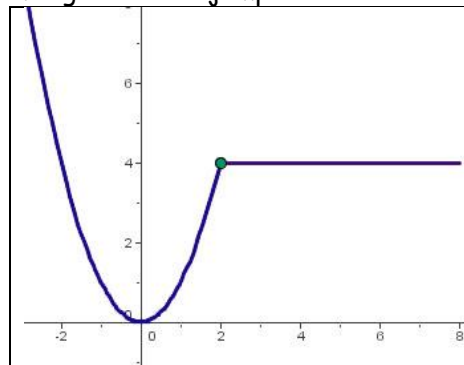
1. Dominio y Rango pagina 133
2. Continuidad página 136
3. Tasa de variación de una función pagina 138
4. Crecimiento y decrecimiento pagina 138
5. Máximos y mínimos pág. 139
6. Concavidad, convexidad y punto de inflexión página 139

Día 21

Observa el video "representación de funciones" y resuelve las siguientes preguntas:

¿En cuál eje se ubican usualmente las variables dependiente e independiente?

a. Siguiendo el ejemplo del video en el minuto 17:30 de la gráfica



1. Cuál es la imagen de -2?
2. Cuál es la imagen de 2, de 4 y de 6?
3. Cuál es la preimagen de 2?
4. Determina
La imagen de 2, $f(2)=$
La imagen de 1, $f(1)=$
La imagen de 0, $f(0)=$
La preimagen de cero, $f^{-1}(0)=$
La preimagen de 6, $f^{-1}(6)=$
La preimagen de 8, $f^{-1}(8)=$
5. Observando la gráfica que puedes decir del dominio y el codominio?

Día 22

1. Observa las gráficas de algunas funciones y sus respectivas fórmulas, escribe principales características de cada una y describe las semejanzas y diferencias que observas entre ellas.

Ilustración 1: función constaste

$$f(x) = 3$$

Ilustración 1: función lineal

$$f(x) = 2x - 1$$

Ilustración 3: función identidad

$$f(x) = x$$

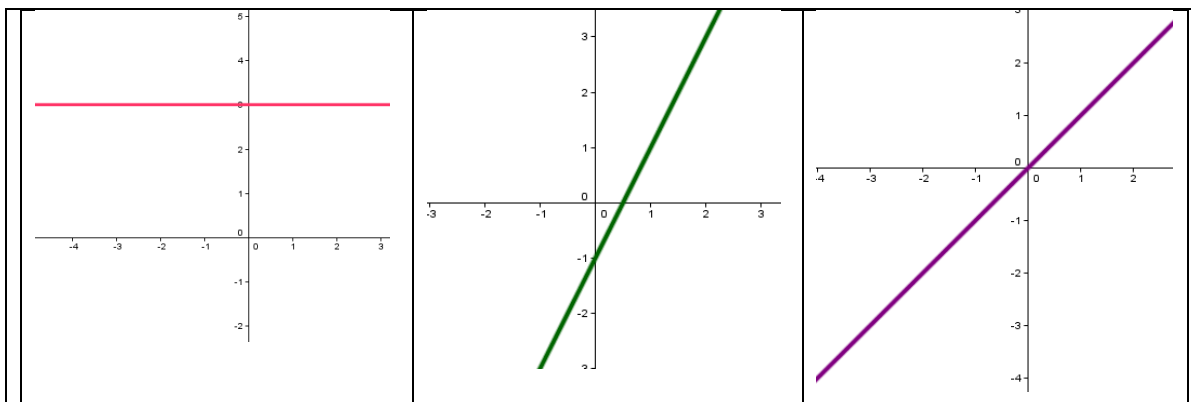


Ilustración 4: polinomio cuadrático

$$f(x) = x^2$$

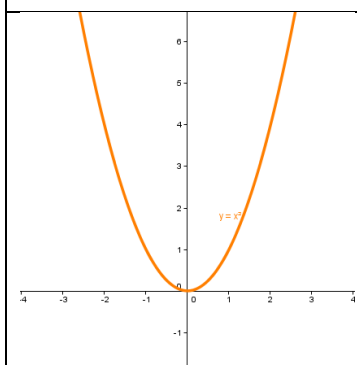


Ilustración 5: polinomio cúbico

$$f(x) = x^3$$

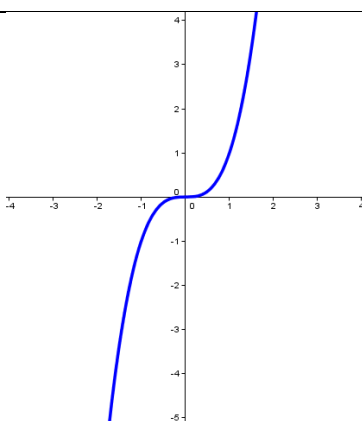
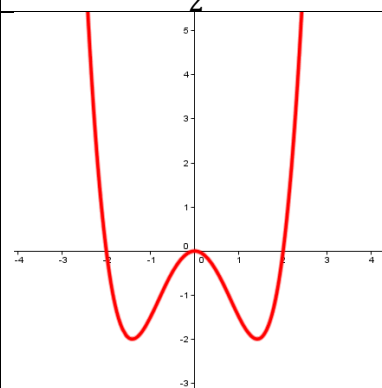


Ilustración 6: polinomio cuártico

$$f(x) = \frac{1}{2}x^4 - 2x^2$$



2. Para cada una de las siguientes funciones determina el dominio y codominio y los puntos de corte con los ejes coordenados.

- $y = 3x + 5$
- $y = x^2 - 5x - 6$
- $f(x) = 7$
- $f(x) = x^3 + 2$
- $y = 2x$

3. Usa el programa Geogebra para trazar las gráficas de las funciones anteriores y contrasta con tus soluciones del punto 2.

Determina si es posible puntos máximos o mínimos si los hay, intervalos de crecimiento y decrecimiento, luego observa si las gráficas que construiste tienen alguna relación con las presentadas en el punto 1.

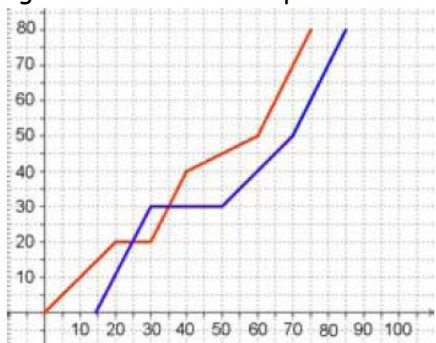
Día 24

Resuelve la actividad evaluativa "me evalúo 4"

FORO:

Se discutirá la solución del problema

El gráfico muestra el espacio recorrido por dos autos que realizaron un mismo trayecto.



- ¿Cuál es la distancia recorrida?
- ¿Si el primer auto salió a las 10:00, a qué hora salió el 2º?
- ¿Cuánto tiempo y dónde estuvo parado cada auto?
- ¿En qué km adelanta el 2º auto al 1º? y el 1º al 2º?
- ¿Cuál fue la velocidad media de cada auto en el trayecto completo?
- ¿En qué tramo la velocidad de cada auto fue mayor?

Me evalúo 3

Teniendo en cuenta el siguiente texto responde las preguntas.

ANIMALES EXTRAÑOS EN UNA ISLA

Cuando en una isla se introducen animales no nativos, si encuentran condiciones favorables su número aumenta rápidamente. Después de un tiempo puede suceder que la escasez de alimento, o la caza, empiecen a disminuir nuevamente el número de animales. Lo primero sucedió con la introducción de castores en Tierra del Fuego. Lo primero y lo segundo, con la introducción de ciervos en la Isla Victoria, en Bariloche.

En una isla se introdujeron ciervos. Con recuentos durante varios años, se pudo establecer que el número de animales, en función del tiempo transcurrido desde su introducción, se puede determinar con la fórmula:

$$n = -t^2 + 21t + 100$$

Donde n es el número de ciervos y t es el tiempo en años

1. La función que describe el número de ciervos en función del tiempo es:

- lineal
- cuadrática
- constante
- cubica

2. La cantidad de ciervos que se introdujeron en la isla fue:

- 50
- 80

c. 100

d. 20

3. 5 años después de la introducción había en la isla

a. 180 siervos

b. 130 siervos

c. 120 siervos

d. 175 siervos

4. La cantidad de siervos en la isla comenzó a disminuir a los

a. 13 años

b. 8 años y medio

c. 10 años y medio

d. 17 años

5. ¿cuál fue la máxima cantidad de ciervos en la isla?

a. 190

b. 250

c. 300

d. 210

6. Analiza el dominio de la función n teniendo en cuenta la situación planteada.

J. Anexo Secuencia 4

Con esta secuencia aprenderás a:

Con esta secuencia el estudiante aprenderá a:

- Construir una gráfica a partir de una tabla
- Construir una tabla a partir de un enunciado
- Construir una tabla a partir de una gráfica
- Construir una gráfica a partir de un enunciado
- Interpretar críticamente información gráfica y numérica.

Recursos

- Características Globales de las funciones
http://www.amolasmates.es/cidead/3esomatematicas/3quincena9/index3_9.htm
- Tablas y graficas
<http://recursostic.educacion.es/secundaria/edad/1esomatematicas/1quincena11/1quincena11.pdf>
- Video concepto de función y ejemplo
<http://www.youtube.com/watch?v=2fcVf2BGFX0>
- Aplicaciones de la función cuadrática
http://www.youtube.com/watch?v=fA6ZMym_N5Y
- Lanzamiento de un proyectil
<http://www.youtube.com/watch?v=VmXMhPtvEek#t=126>
- Video Función exponencial: <http://www.youtube.com/watch?v=Qtt6l-RMwxk>
- Funciones exponenciales y logarítmicas
<http://recursostic.educacion.es/secundaria/edad/4esomatematicasB/funciones3/impresos/quincena10.pdf>

Actividades

- Cronograma de Actividades Semana 5
- Foro 4
- Me evaluó 4

A continuación te direccionare como debes aprender el tema de esta semana.

CRONOGRAMA DE ACTIVIDADES QUINTA SEMANA	
Día	Actividad
Día 25	Realiza un repaso general dando clic en el recurso "Características Globales de las funciones"
Día 26	Leer y comprender el documento "tablas y gráficas" de la página 180 a la 188
Día 27	Resolver el ejercicio de la pagina 189, 190 y 193 en tu cuaderno
Día 28	Observar el video "concepto de función" y explica el ejemplo de la cuenta de mensajería.

	Observar el video aplicaciones de la función cuadrática y responde las preguntas
Día 29	Observar los videos "lanzamiento de un proyectil" y el de la función exponencial
Día 30	Resolver la actividad del Foro 4 y la actividad evaluativa "Me evalúo 4"

Día 25

Realiza un repaso general dando clic en el recurso "Características Globales de las funciones" Y resuelve algunos de los ejercicios allí propuestos

Día 26

Leer y comprender el documento "tablas y gráficas" de la página 180 a la 188

Día 27

Resolver el ejercicio de la pagina 189, 190 y 193 en tu cuaderno

Día 28

Observa el video "concepto de función" y explica el ejemplo de la cuenta de mensajería. Observa el video aplicaciones de la función cuadrática y resuelve los siguientes puntos:

- ¿Qué forma tiene la gráfica de la función cuadrática? Dibújala
- Escribe 5 ejemplos de la vida real, identifica las variables que aparecen en la situación y explica cómo es la relación entre las variables.

Día 29

- Observa el video "lanzamiento de un proyectil" y resuelve ahora el problema usando función $h(t) = -2t^2 + 3$
- Observa el video de la función exponencial y el recurso "funciones exponenciales y responde los siguientes puntos"
 - Que forma tiene la gráfica de una función exponencial.
 - Escribe 5 aplicaciones de las funciones exponenciales

Día 30

Resuelve la Actividad evaluativa "Me evalúo 4"

FORO:

Lee cada uno de los siguientes enunciados e identifica qué tipo de función puede describir la situación (lineal, cuadrática, exponencial). Justifica tu respuesta:

- Crecimiento de poblaciones.

- b. Lanzamiento de un proyectil
- c. Costo del recibo de la luz
- d. Velocidad recorrida por un automóvil
- e. Interés que paga una entidad bancaria por dinero ahorrado.
- f. Reproducción celular
- g. Desintegración radioactiva.

Me evaluó 4

Resuelve el siguiente ejercicio con tu grupo de trabajo y entrégalo en una hoja examen

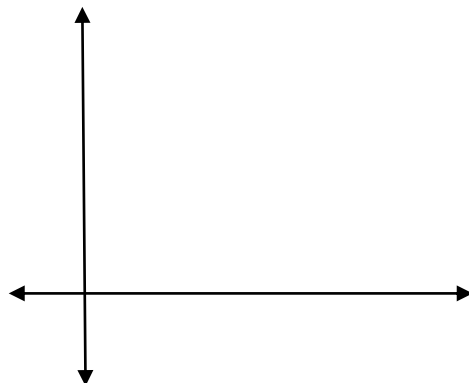
1. Dibuja rectángulos que tengan un perímetro de 24 cm. ¿Cuántos puedes dibujar?

b) Completa la siguiente tabla con las medidas de la base y la altura de los rectángulos que construiste, agrega otros valores.

Base(x) cm											
Altura (y)cm											

c) Escribe una fórmula que permita determinar la altura y del rectángulo en función de su base, x .

d) Construye una gráfica cartesiana usando los datos de la tabla.



c) ¿Cuáles son las magnitudes que se relacionan en esta situación? ¿Cómo varían?

d) ¿La gráfica representa una función? ¿Por qué?

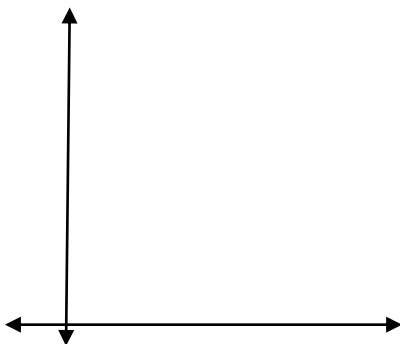
e) ¿Qué tipo de función es?

2. Teniendo en cuenta los mismos rectángulos de perímetro 24cm

a) Construye una tabla en la que aparezca la longitud de la base x y el área del rectángulo correspondiente $A(x)$.

Base (x)cm												
Área A(x) cm²												

- b) Observa la tabla y encuentra una expresión general que permita determinar el área $A(x)$ del rectángulo en función de su base x .
- c) Identifica cuál es la variable dependiente y cuál es la independiente. Describe su correspondencia.
- d) Elabora una gráfica cartesiana con los datos de la tabla. ¿Qué tipo de gráfica obtienes?



- e) Halla el área del rectángulo cuando su base mide: 11cm, 11,1cm, 11,2cm, hasta 11,9cm
- f) ¿Qué concluyes?, ¿Cómo varía la medida de su área?
- g) ¿Para qué medidas de la base y la altura el área del rectángulo será máxima?

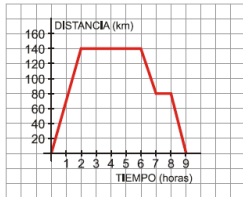
K. Anexo Actividades finales

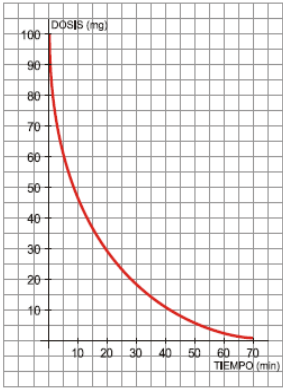
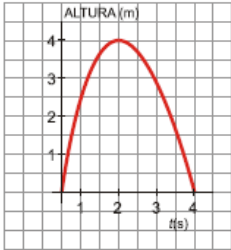
Actividades

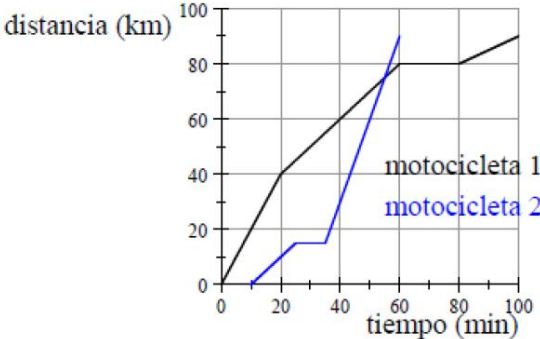
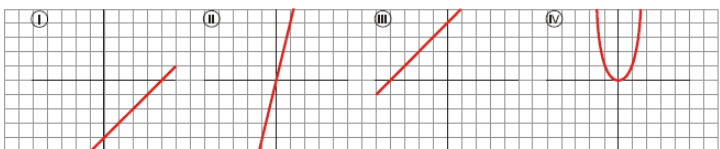
- Trabajo final <http://www.scribd.com/doc/29812719/Problemas-de-aplicacion-de-funciones>
- Evaluación final
- Autoevaluación comportamental
- Foro de retroalimentación

CRONOGRAMA DE ACTIVIDADES SEXTA SEMANA	
Día	Actividad
Día 31	Con tu grupo de trabajo resuelve el trabajo final
Día 32	Continuación del trabajo final y socialización en clase
Día 33	Evaluación final
Día 34	Autoevaluación comportamental
Día 35	Foro de evaluación de la plataforma y sugerencias
Día 36	Socialización de resultados finales en clase

Evaluación Final

1.	<p>Un grupo de estudiantes de una institución realizan una excursión en bus. En la gráfica se relaciona la distancia (en km), a la que se encontraba el grupo, en cada momento, con respecto a la institución y el tiempo transcurrido (en horas)</p>  <p>a) ¿A cuántos kilómetros estaba el lugar que visitaron?</p> <p>b) ¿Cuánto tiempo duró la visita al lugar?</p> <p>c) ¿Hubo alguna parada a la ida? ¿Y a la vuelta?</p> <p>d) ¿Cuánto duró la excursión completa (incluyendo el viaje de ida y el de vuelta)?</p>
2.	<p>Se sabe que la concentración de un cierto tipo de anestesia en la sangre de un paciente está dada por la siguiente gráfica</p>

	<p>a) ¿Cual es la dosis inicial de anestesia? b) ¿Cuántos miligramos de concentración hay, aproximadamente, al cabo de los 10 minutos? ¿Y cuántos al cabo de 1 hora? c) ¿Cuál es la variable independiente? y ¿cuál la variable dependiente? d) La concentración de anestesia en la sangre, ¿aumenta o disminuye?</p> 
<p>3</p>	<p>Lanzamos una pelota hacia arriba. La altura que alcanza la pelota en metros, viene dada por la siguiente grafica</p>  <p>a) ¿Qué altura alcanza la pelota al cabo de 1 segundo? b) ¿Cuál es la altura máxima alcanzada y en qué momento la alcanza? c) Entre los 2 y los 4 segundos la altura de la pelota decrece. ¿Cuánto decrece? d) A partir de la gráfica ¿Cuál es el dominio y codominio de la función?</p>
<p>4</p>	<p>A nivel del mar, el agua hierve a 100°C. La temperatura a la que el agua hierve se llama "punto de ebullición". Si tú subes a una montaña, el punto de ebullición cambia. La fórmula que relaciona el punto de ebullición con la altura respecto al nivel del mar es: $p = 100 - \frac{h}{1000}$ donde p es el punto de ebullición (en °C) y h es la altura (en pies).</p> <p>a. Elabora una tabla y dibuja la gráfica de p b. ¿Cuál es el punto de ebullición cuando la altura es de 2000 pies? ¿Cuál si la altura es de 10.000 pies? c. Si el punto de ebullición en un sitio es de 60°C, ¿A que altura con respecto al nivel del mar se encuentra este sitio? d. El monte Everest tiene cerca de 30.000 pies de altura. ¿A qué temperatura hervirá allí el agua?</p>
<p>5</p>	<p>La siguiente gráfica muestra la distancia recorrida por dos motocicletas diferentes al realizar el mismo recorrido.</p>

	 <p>De acuerdo a esta información responde las siguientes preguntas</p> <ol style="list-style-type: none"> Después de 40 minutos ¿qué distancia había recorrido cada motocicleta? ¿Qué diferencia de tiempo hay entre la salida de los dos motociclistas? ¿Qué motociclista tardó menos en hacer el recorrido? ¿Qué motociclista llegó primero al final del recorrido? ¿Durante cuanto tiempo permanecieron detenidas cada una de las motocicletas y en qué kilómetros se detuvieron? En algún momento las motocicletas se encontraron? Si fue así, ¿en que momento? Y ¿a qué distancia del punto de partida se encontraban? ¿En que intervalo de tiempo la velocidad de la motocicleta 1 es mayor a la de la motocicleta 2?
6.	<p>Asocia cada gráfica con la fórmula o ecuación que le corresponde.</p> <ol style="list-style-type: none"> $y = 4x$ $y = x + 4$ $y = x - 4$ $y = x^2$ 
7.	<p>Construye una gráfica que se ajuste al siguiente enunciado: Esta mañana, Eva fue a visitar a su amiga Leticia y tardó 20 minutos en llegar a su casa, que se encuentra a 800 metros de distancia. Estuvo allí durante media hora y regresó a su casa, tardando en el camino de vuelta lo mismo que tardó en el de ida.</p>
8.	<p>Un medicamento se elimina del organismo a través de la orina. La dosis inicial es 10 mg y la cantidad en el cuerpo t horas después de haber tomado el medicamento esta dada por</p> $A(t) = 10 * 0.8^t$ <ol style="list-style-type: none"> Calcula la cantidad de medicamento que queda en el organismo 8 horas después de haberlo tomado. Usa una tabla para explicar el proceso Haz un bosquejo de la gráfica de la función

Algunas de las actividades fueron tomadas del archivo titulado "interpretación de Gráficas" recuperado de la página www.amolasmates.es.

La evaluación Comportamental la trae por defecto Moodle.

Bibliografía

- [1] C. Dolores y I. Cuevas, «Lectura e Interpretación de gráficas socialmente compartidas,» *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*. Vol 10, pp. 69-96, 2007.
- [2] R. Duval, «Un tema crucial en la educación matemática: La habilidad para cambiar el registro de representación.,» *La Gaceta de la RMSE vol 9.1.*, pp. 143-168, 2006.
- [3] M. T. González Astudillo, M. Sierra Vázquez y C. López Esteban, «Funciones: traducción entre representaciones,» *Revista de Pedagogía de la Universidad de Salamanca N. 10*, pp. 89-104, 1998.
- [4] C. Azcarate y J. Deulofeu, *Funciones y Gráficas*, España: Síntesis, 1996.
- [5] N. Mercedes Jaimes Gómez, *Maestría En Enseñanza de las Ciencias Exactas y Naturales*, Bogota, Colombia, 2012.
- [6] M. Sierra Vázquez, T. González Astudillo y C. López Esteban, «Funciones: traducción entre representaciones,» 18 11 2009. [En línea]. Available: <http://gredos.usal.es/jspui/handle/10366/69318>.
- [7] L. Leithold, *El Cálculo*, Mexico D.F.: Oxford, 2003.
- [8] R. Larson y B. H. Edwards, *Calculo 1 de una variable*, Mexico D.F.: Mc Graw Hill, 2010.
- [9] F. Cordero y R. Flores, «El uso de las graficas en el discurso Matemático escolar,» *RELIME*, pp. 7-38, 2007.
- [10] C. Dolores Flores, «Publicaciones.ujat,» [En línea]. Available: <http://www.publicaciones.ujat.mx/publicaciones/perspectivas/Perspectivas-36B.pdf#page=47>.
- [11] A. C. Castilblanco Paiba, «Eduteka,» 26 Agosto 2013. [En línea]. Available: <http://www.eduteka.org/Entrevista4.php>.

- [12] L. Moreno Armella, «Instrumentos Matemáticos Computacionales.,» 26 Agosto 2013. [En línea]. Available: http://www.mineducacion.gov.co/1621/articles-81040_archivo1.pdf.
- [13] M. Area, Introducción a la Tecnología Educativa, España: Universidad de la Laguna, 2009.
- [14] Á. Alvarado, «Diseño Instruccional para la producción de cursos en línea y e-learning,» *Docencia Universitaria*, 2013.
- [15] S. Downess, «El futuro de Aprendizaje en línea: 10 años después. Traducido al Español por Diego E. Leal Fonseca,» 20 julio 2009. [En línea]. Available: http://www.scribd.com/fullscreen/16527898?access_key=key-qsi8ysgt6tpxzu7vbz1&allow_share=true&view_mode=scroll.
- [16] E. Barberá y A. Badía, Educar con Aulas Virtuales, Madrid: Antoni Machado Libros S.A., 2004.
- [17] M. Segura Escobar, «Uso de Estándares aplicados a TIC en Educación,» 12 08 2013. [En línea]. Available: <http://ares.cnice.mec.es/informes/16/contenido/44.htm>.
- [18] M. Area Moreira y J. Adell Segura, «elearning: Enseñar y Aprender en espacios virtuales,» 12 08 2013. [En línea]. Available: <http://tecedu.webs.ull.es/textos/eLearning.pdf>.
- [19] M. Area Moreira, «De los web educativos al material didáctico web,» *Comunicación y Pedagogía*, pp. 32-38, 2003.
- [20] E. Domínguez Merlano, «La Evaluación de las experiencias educativas en Aula Virtual, una necesidad para garantizar la calidad de los procesos de enseñanza - aprendizaje,» Noviembre 2013. [En línea]. Available: <http://ylang-ylang.uninorte.edu.co:8080/drupal/files/EvaluacionExperienciasEducativasAulaVirtual.pdf>.