

Optimización de portafolios con Capital en Riesgo acotado

HUGO EDUARDO RAMIREZ JAIME
MATEMÁTICO, INGENIERO DE SISTEMAS



UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA
FACULTAD DE CIENCIAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS
BOGOTÁ, D.C.

Optimización de portafolios con Capital en Riesgo acotado

HUGO EDUARDO RAMIREZ JAIME
MATEMÁTICO, INGENIERO DE SISTEMAS

TRABAJO DE TESIS PARA OPTAR AL TÍTULO DE
MATEMÁTICO, M.Sc.

DIRECTOR
LILIANA BLANCO CASTAÑEDA
DR. RER. NAT. IN MATHEMATICS



UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA
FACULTAD DE CIENCIAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS
BOGOTÁ, D.C.

Título en español

Optimización de portafolios con Capital en Riesgo acotado.

Title in English

Optimal portfolios under bounded Capital at Risk.

Resumen: En años recientes se ha introducido en el mercado el Capital en Riesgo o *CaR*, por sus siglas en inglés, como medida de riesgo en reemplazo de la varianza en los problemas de selección de portafolios óptimos.

En este trabajo se hizo un estudio, usando la metodología clásica de control estocástico, acerca de las consecuencias de introducir la medida de *CaR* en un modelo de mercado Black-Scholes simple, en un modelo de mercado de Black-Scholes con saltos y en un modelo de mercado de Difusión Inverso Generalizado.

Se confrontaron los resultados teóricos con datos reales tomados de la Bolsa de Valores de Colombia, para el caso de Ecopetrol e Isa.

Abstract: In recent years Capital at Risk has been brought into the market as a way to minimizing risks in the replacement of the variance in optimal portfolio selection problems. A study was conducted for this work, by utilizing the classical stochastic control methodology on the consequences of using the Capital at Risk measure in a Black-Scholes simple market model, into a Black-Scholes market with jumps, and into a Generalized Inverse Diffusion market.

Theoretical results were compared to real data taken from bolsa de Valores de Colombia, for the cases of Ecopetrol and Isa.

Palabras clave: Modelo de Mercado de Black-Scholes, Cálculo de Itô, optimización de portafolios, capital en riesgo, modelo de difusión inversa generalizada, modelo de Cox-Ingerson-Ross, problema de media CaR.

Keywords: Black-Scholes Market model, Itô calculus, portfolio optimization, capital at risk, generalized inverse gaussian model, Cox-Ingerson-Ross model, mean CaR problem.

Nota de aceptación

Jurado
Edgar Otalora

Director
Liliana Blanco Castañeda

Bogotá, D.C.

Dedicado a

Mi esposa: Diana.

Agradecimientos

En este espacio quiero expresar mis agradecimientos a la Fundación Politécnico Gran-colombiano Institución Universitaria, a los profesores Miller Alarcón, Diego Arévalo, Rafael García, Efraín Moreno y Jaime Posada por su apoyo y valiosos comentarios, a mis padres y esposa por su gran apoyo sin el cual no habría podido realizar este trabajo y en general a todos aquellos que de una u otra forma han colaborado, contribuido o aportado en mi desarrollo como profesional. En especial quiero agradecer a la doctora Liliana Blanco Castañeda, por su asesoramiento, apoyo y valiosos aportes en la elaboración de esta tesis.

Índice general

Índice general	I
Índice de figuras	III
Notación y Símbolos	IV
1. Preliminares Matemáticos	1
1.1. Movimiento Browniano	1
1.1.1. Introducción	1
1.1.2. Definición y propiedades	2
1.1.3. Procesos derivados del movimiento browniano	12
1.2. Integración Estocástica	14
1.2.1. Construcción de la integral	15
1.2.2. Extensión de la integral por aproximación	18
1.2.3. Fórmula de Itô	21
1.2.4. Teorema de Representación de Martingalas	24
1.2.5. Teorema de Girsanov	27
1.3. Ecuaciones Diferenciales Estocásticas	30
2. Preliminares Financieros	36
2.1. Introducción	36
2.2. Modelo de Cox-Ross-Rubinstein	37
2.3. Aproximación de Markowitz para el modelo de un periodo	40
2.3.1. Aproximación de media-varianza	42
2.3.2. Metodos de solución	43
2.4. El modelo de Black-Scholes	43

2.5. Valoración de opciones	52
3. Optimización de Portafolios	58
3.1. Introducción	58
3.2. Control estocástico	59
3.3. Problema de optimización de portafolios	65
3.4. Problema de optimización con una restricción de CaR	69
3.4.1. Problema de optimización de media-varianza de Markowitz	73
3.5. Modelo de Black-Scholes con Saltos	77
4. Difusión Gaussiana Inversa Generalizada	84
4.1. Introducción	84
4.2. El problema de <i>media</i> – CaR con un proceso GIG	86
4.3. Simulaciones y aplicaciones	90
4.3.1. Modelo generalizado de Cox-Ingersoll-Ross.	90
4.3.2. Comparativo del CaR y la varianza	95
4.3.3. Ejemplo comparativo con datos de Ecopetrol e Isa	97
A. El Proceso de Poisson Compensado	100
B. Código Fuente	101
Conclusiones	104
Trabajo futuro	105
Bibliografía	106

Índice de figuras

1.1. Una trayectoria del movimiento browniano.	3
1.2. Una trayectoria del movimiento browniano 2D.	3
1.3. Una trayectoria del puente browniano.	12
1.4. El movimiento browniano Geométrico. $X_0 = 1.10, \mu = 0.120, \sigma = 0.250$	13
4.1. Diez caminos de $Z^\pi(t)_{0 \leq t \leq 10}$	93
4.2. Diez caminos de $Z^\pi(10)_{\pi \in [0,1]}$	93
4.3. $E[X^\pi(10)]$	94
4.4. $CaR(1000, \pi, 10)$	94
4.5. Varianza vs Capital en Riesgo, con $\pi = 1$	95
4.6. Varianza vs Capital en Riesgo, con $\pi = 0.2$	95
4.7. Ecopetrol	97
4.8. Isa	98

Notación y Símbolos

$B(t)$	Movimiento browniano estándar, también se usa la notación B o B_t .
$(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$	σ -álgebra generada por $\{B_s; 0 \leq s \leq t\}$.
Ω	Espacio muestral.
\mathcal{F}	σ -álgebra. En espacios filtrados denota la σ -álgebra generada por $\{B_s; s \geq 0\}$.
P	Medida de probabilidad.
(Ω, \mathcal{F}, P)	Espacio de probabilidad.
dP	Se refiere a la integración con respecto a la medida P .
$L^r(P)$	Es el espacio L^r con respecto a la norma $\ X\ _r = \left(\int_{\Omega} X(\omega) ^r dP(\omega) \right)^{\frac{1}{r}}$.
$Cov(X, Y)$	Covarianza entre las variables aleatorias X e Y .
$Var(X)$	Varianza de la variable aleatoria X .
χ_A	La función característica del conjunto A .
$L^2(P \times dt)$	El espacio de funciones f que cumplen $E \left[\int_0^T f ^2 dt \right] < \infty$.
$L^2(\mathcal{F}_t, P)$	El espacio de funciones $f \in L^2(P)$ que son $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ medibles.
$C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$	El espacio de funciones infinito derivables con soporte compacto en \mathbb{R}^n .
$L^r[0, T]$	El espacio de funciones r -integrables con respecto a la medida de Lebesgue en $[0, T]$.
$[X, X]_t$	Proceso de covariación cuadrática de $(X_t)_{t \geq 0}$.
$\vec{\pi}(t)$	El vector portafolio dependiente del tiempo t $((\pi_1(t), \dots, \pi_k(t))^{tr})$, indica los porcentajes de inversión en cada una de las acciones o activos riesgosos.
$\vec{\pi}$	El vector portafolio independiente del tiempo t .
π	El portafolio, independiente del tiempo t , para un mercado de un bono y una acción. En este caso el portafolio indica el porcentaje invertido en la acción.
π_0	El porcentaje de inversión en bonos o activos libres de riesgo.
$X^\pi(t)$	Proceso de riqueza (o fortuna) correspondiente al portafolio $\vec{\pi}(t)$ (o $\vec{\pi}$ o π según sea el caso).
$\vec{b}(t)$	Vector $(b_1(t), \dots, b_k(t))^{tr}$ que representa de tasa de interés (media) de las acciones, cuando es independiente del tiempo se denota \vec{b} .
b	Tasa de interés de la acción en un mercado de un bono y una acción.
$r(t)$	Tasa de interés del bono, $\vec{r}(t) = (r(t), \dots, r(t)) \in \mathbb{R}^k$.
r	Tasa de interés del bono, independiente del tiempo.

$\sigma(t)$	Matriz de volatilidad (es una matriz de covarianzas). Para un mercado con un activo riesgoso $\sigma(t)$ es el coeficiente de volatilidad.
σ	Matriz de volatilidad, independiente del tiempo.
$V^\pi(t)$	El valor del portafolio $\vec{\pi}(t)$ en el tiempo t (portafolio $\vec{\pi}(t)$, $\vec{\pi}$ o π según sea el caso).
$\mathfrak{S}(T)$	reclamo o T -reclamo.
Φ	Distribución normal estándar.
$E^{t_0, x}[X(T)]$	Valor esperado del proceso estocástico $X(t)_{t \geq 0}$ en el tiempo T , asumiendo que $X(t_0) = x$ (para $t_0 \leq T$ fijo).
$\mathcal{A}(t, x)$	El espacio de todos los controles admisibles $u(t)$ que comienzan en (t_0, x) .
$\rho(x, \vec{\pi}, T)$	El α -cuantil de $X^\pi(T)$, con capital inicial x .
$CaR(x, \vec{\pi}, T)$	El Capital en Riesgo del portafolio $\vec{\pi}$, con capital inicial x y horizonte de tiempo T .

Preliminares Matemáticos

1.1. Movimiento Browniano

1.1.1. Introducción

El descubrimiento del movimiento browniano se atribuye tradicionalmente al botánico Robert Brown en 1827. Se cree que Brown estuvo estudiando en el microscopio partículas de polen flotando en el agua, donde observó que las diminutas partículas tenían movimientos irregulares. Al repetir el experimento con partículas de polvo concluyó que el movimiento no se debía a que las partículas de polen estaban 'vivas', aunque no explicó el origen del movimiento. El mismo fenómeno había sido descrito por el fisiólogo y químico holandés Jan Ingenhousz, en publicaciones alemanas y francesas en 1784 y 1785, sobre partículas de carbón en alcohol.

El movimiento aleatorio de estas partículas se debe a que su superficie es bombardeada incesantemente por las moléculas del fluido sometidas a una agitación térmica. Este bombardeo a escala atómica no es completamente uniforme y sufre variaciones importantes. Así la presión ejercida sobre los lados puede variar ligeramente con el tiempo provocando el movimiento observado.

El primero en describir matemáticamente el movimiento browniano fue Thorvald N. Thiele en 1880, en un documento sobre el método de los mínimos cuadrados. Fue seguido independientemente por Louis Bachelier en 1900 en su tesis doctoral "La teoría de la especulación" [4], en la que se presenta un análisis estocástico de activos y opciones de mercados. Sin embargo, la descripción matemática del fenómeno fue el resultado del estudio realizado por Albert Einstein y publicado en uno de sus artículos del "Annus Mirabilis" (año maravilloso) de 1905 (Über die von der molekularen Theorie der Wärme geforderte Bewegung von in ruhenden Flüssigkeiten suspendierten Teilchen/ Sobre la teoría molecular del movimiento determinado por el calor de partículas suspendidas en líquidos estacionarios) el que mostró a los físicos de forma indirecta la existencia de átomos y moléculas; y dió inicio al campo de la física estadística.

En esa época la naturaleza atómica de la materia aún era una idea controvertida.

Einstein y Marian Smoluchowski dedujeron que si la teoría cinética de los fluidos era correcta entonces las moléculas de agua tendrían movimientos aleatorios. Por lo tanto las partículas pequeñas podrían recibir un número aleatorio de impactos, de fuerza aleatoria y en direcciones aleatorias, en cortos períodos de tiempo. Este bombardeo aleatorio por las moléculas del fluido podría ser suficiente para que las partículas pequeñas se moviesen de la manera exacta que Brown había descrito.

El matemático Norbert Wiener fue el primero en demostrar rigurosamente en 1923 la existencia del proceso estocástico llamado Movimiento Browniano o proceso de Wiener.

1.1.2. Definición y propiedades

De las observaciones hechas sobre el movimiento descrito por Brown, se pueden inferir las siguientes observaciones: (a) El movimiento es continuo, (b) En intervalos disyuntos los desplazamientos son independientes y (c) Debido a la gran cantidad de colisiones que se llevan a cabo, los incrementos pueden modelarse como variables aleatorias gaussianas.

La estructura matemática del movimiento browniano es entonces un proceso estocástico $(B(t))_{t \geq 0}$ que puede interpretarse como la posición de una partícula en el tiempo, así la definición matemática en el caso unidimensional es:

Definición. El proceso de Wiener (o Movimiento browniano) unidimensional es un proceso estocástico $B(t)$ con valores en \mathbb{R} definido para valores en $[0, \infty)$ tal que

1. $B(0) = 0$ c.s.
2. Los caminos $t \mapsto B(t)$ son c.s. continuos.
3. Fijando n instantes $0 \leq t_1 < \dots < t_n$ los incrementos $B_{t_n} - B_{t_{n-1}}, \dots, B_{t_2} - B_{t_1}$ son variables aleatorias independientes.
4. Si $s < t$, el incremento $B_t - B_s$ tiene una distribución normal $N(0, t - s)$.

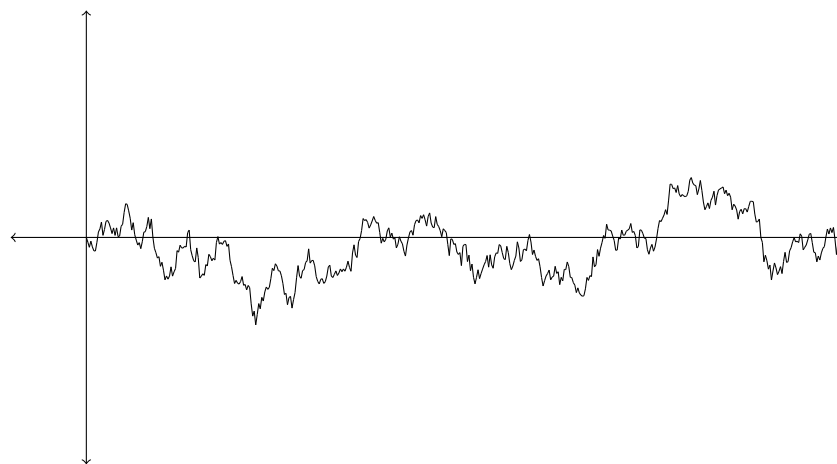


Figura 1.1: Una trayectoria del movimiento browniano.

En la figura 1.1 se ve la realización de un camino o trayectoria del movimiento browniano unidimensional.

Un **movimiento browniano o proceso de Wiener n -dimensional** es un proceso estocástico con valores en \mathbb{R}^n de la forma

$$B(t) = (B_1(t), B_2(t), \dots, B_n(t))$$

donde los componentes $B_i(t)$ son movimientos brownianos unidimensionales (definición anterior) independientes.

La siguiente figura muestra una trayectoria del movimiento browniano bidimensional

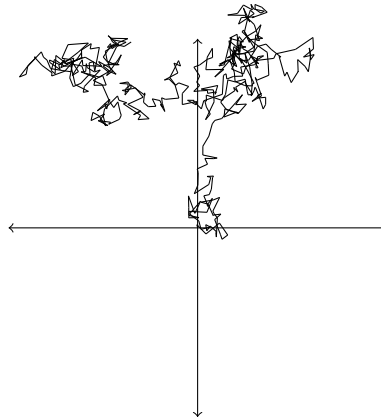


Figura 1.2: Una trayectoria del movimiento browniano 2D.

El hecho que exista un proceso estocástico con estas propiedades es demostrado gracias al teorema de extensión de Kolmogorov, lo cual se puede ver en el libro de Karatzas [14] capítulo 2.2.

Por la propiedad (4) del teorema anterior se deduce que la *densidad de $B(t)$* está dada por

$$f_{B(t)}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{x^2}{2t}} \quad (1.1)$$

Y la densidad de transición para cualquier $x, y \in \mathbb{R}$ y $t > 0$, que es la probabilidad que, dado que la partícula está en la posición x en el tiempo 0 termine en la posición y en el tiempo t , está definida por:

$$P(t, x, y) = P(B(t) = y | B(0) = x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{(x-y)^2}{2t}}$$

Como dato adicional la función de densidad del movimiento browniano (1.1), se conoce como el núcleo del calor, pues es la solución de la ecuación conocida en la física matemática como ecuación del calor

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$$

Teorema 1.1.1. *Propiedades del movimiento browniano*

1. Para cualquier secuencia de tiempos $0 < t_1 < \dots < t_n$ y conjuntos de Borel A_1, \dots, A_n de \mathbb{R}

$$P\{B(t_1) \in A_1, \dots, B(t_n) \in A_n\} \\ = \int_{A_1} \dots \int_{A_n} p(t_1, 0, x_1) p(t_2 - t_1, x_1, x_2) \dots p(t_n - t_{n-1}, x_{n-1}, x_n) dx_1 \dots dx_n$$

2. $E[B_t] = 0$

3. $E[B_s B_t] = \text{mín}(s, t)$

4. $E[|B_t - B_s|^2] = |t - s|$

Demostración. Demostraremos sólo los últimos dos ítems del teorema ya que el numeral 1. se tiene por que los incrementos son independientes y el numeral 2. por que la integral

del valor esperado $\int_{-\infty}^{\infty} x \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{x^2}{2t}} dx = 0$ pues el integrando es una función impar.

3. Supongamos que $s < t$ entonces

$$\begin{aligned} E[B_s B_t] &= E[B_s ((B_t - B_s) + B_s)] \\ &= E[B_s (B_t - B_s)] + E[B_s^2] \\ &= E[B_s] E[B_t - B_s] + E[B_s^2] \\ &= E[B_s^2] = \text{Var}(B_s) = s \end{aligned}$$

y como $s = \text{mín}(s, t)$ se tiene el resultado

4. Veamos

$$\begin{aligned} E[|B_t - B_s|^2] &= E[(B_t - B_s)^2] \\ &= E[B_t^2 - 2B_t B_s + B_s^2] \\ &= E[B_t^2] - E[2B_t B_s] + E[B_s^2] \\ &= t - 2 \text{mín}(s, t) + s \\ &= \begin{cases} s - t, & \text{Si } t < s \\ t - s, & \text{Si } s < t \end{cases} \\ &= |t - s| \end{aligned}$$

□

□

La **función característica** (o transformada de Fourier) es de gran importancia en la teoría pues nos ayuda en la búsqueda de distribuciones para ciertas variables aleatorias y es una herramienta útil para calcular sus momentos. Por esta razón calcularemos la función

característica del movimiento browniano $\varphi_{B(t)}(\lambda) = E[e^{i\lambda B(t)}]$, veamos

$$\begin{aligned}
 E[e^{i\lambda B(t)}] &= \int e^{i\lambda w} dP_{B(t)} \\
 &= \int e^{i\lambda w} \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{w^2}{2t}} dw \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda w} e^{-\frac{w^2}{2t}} dw \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2t}(w^2 - 2it\lambda w)} dw \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2t}(w^2 - 2it\lambda w + (it\lambda)^2)} e^{-\frac{1}{2t} - (it\lambda)^2} dw \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2t}(w - it\lambda)^2} e^{-\frac{t\lambda^2}{2}} dw \\
 &= \frac{e^{-\frac{t\lambda^2}{2}}}{\sqrt{2\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(w - it\lambda)^2}{2t}} dw
 \end{aligned}$$

Al tomar $z = \frac{w - it\lambda}{\sqrt{t}}$, se obtiene

$$\begin{aligned}
 E[e^{i\lambda B(t)}] &= \frac{e^{-\frac{t\lambda^2}{2}}}{\sqrt{2\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{z^2}{2}} \sqrt{t} dz \\
 &= e^{-\frac{t\lambda^2}{2}}
 \end{aligned}$$

Como ejemplo podemos calcular $E[B^4(t)]$. Usando que la función característica de $B(t)$ es $\varphi_{B(t)}(\lambda) = e^{-\frac{t\lambda^2}{2}}$, tenemos

$$\begin{aligned}
 \varphi_{B(t)}(\lambda) &= e^{-\frac{t\lambda^2}{2}} \\
 \varphi_{B(t)}(\lambda)' &= -t\lambda e^{-\frac{t\lambda^2}{2}} \\
 \varphi_{B(t)}(\lambda)'' &= -te^{-\frac{t\lambda^2}{2}} + t^2\lambda^2 e^{-\frac{t\lambda^2}{2}} \\
 \varphi_{B(t)}(\lambda)''' &= t^2\lambda e^{-\frac{t\lambda^2}{2}} + 2t^2\lambda e^{-\frac{t\lambda^2}{2}} - t^3\lambda^3 e^{-\frac{t\lambda^2}{2}} \\
 \varphi_{B(t)}(\lambda)^{(4)} &= t^2 e^{-\frac{t\lambda^2}{2}} - t^3\lambda^2 e^{-\frac{t\lambda^2}{2}} + 2t^2 e^{-\frac{t\lambda^2}{2}} - 2t^3\lambda^2 e^{-\frac{t\lambda^2}{2}} - 3t^3\lambda^2 e^{-\frac{t\lambda^2}{2}} + t^4\lambda^4 e^{-\frac{t\lambda^2}{2}} \\
 \varphi_{B(t)}(0)^{(4)} &= 3t^2
 \end{aligned}$$

Por lo que $E[B^4(t)] = 3t^2$.

Continuemos ahora con un ejemplo, que nos ayudará a entender mejor la teoría expuesta hasta el momento.

Ejemplo 1.1.1. Mostrar que para todo $T > 0$, $V(t) = B(t + T) - B(T)$ es un proceso de Wiener siempre que $B(t)$ lo sea. Para esto verifiquemos las cuatro condiciones de proceso de Wiener (movimiento browniano)

1. $V(0) = B(0 + T) - B(T) = 0$ c.s.
2. Los caminos $t \mapsto V(t)$ son continuos porque es la suma de la función continua $B(t+T)$ y la constante $-B(T)$.
3. $V(t)$ tiene incrementos estacionarios e independientes, ya que

$$\begin{aligned} V(t_2) - V(t_1) &= B(t_2 + T) - B(t_1 + T) \\ V(t_3) - V(t_2) &= B(t_3 + T) - B(t_2 + T) \\ &\vdots \\ V(t_n) - V(t_{n-1}) &= B(t_n + T) - B(t_{n-1} + T) \end{aligned}$$

y como B_t es un movimiento browniano, son independientes.

Además

$$\begin{aligned} V(t_2 + h) - V(t_1 + h) &= B(t_2 + T + h) - B(t_1 + T + h) \\ &\stackrel{d}{=} B(t_2 + T) - B(t_1 + T) \\ &= V(t_2) - V(t_1) \end{aligned}$$

por lo que tiene incrementos estacionarios y además

4. $V(s) - V(t) = B(s + T) - B(t + T)$, sabemos que tiene distribución normal con media 0 y varianza $s + T - t - T = s - t$

Con lo que concluimos que es un proceso de Wiener. □

Definición. Sea (Ω, \mathcal{F}, P) un espacio de probabilidad. Una **filtración** en (Ω, \mathcal{F}) es una familia no decreciente $\{\mathcal{F}_t : t \geq 0\}$ de sub σ -álgebras de \mathcal{F} .

Observación. En lo que sigue usaremos la filtración browniana, es decir

$$\mathcal{F}_t = \sigma(B_s : s \leq t).$$

Además asumiremos que cumple las hipótesis usuales que son:

- \mathcal{F}_t es continua por derecha (i.e $\mathcal{F}_t = \mathcal{F}_{t^+} = \bigcap_{s>t} \mathcal{F}_s$).
- \mathcal{F}_0 contiene todos los conjuntos de medida 0.

Teorema 1.1.2. El movimiento browniano $B(t)$ es una martingala con respecto a la filtración $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$.

Demostración. Para esto verifiquemos las tres condiciones de martingala

1. Como \mathcal{F}_t es generada por los $B_s, 0 \leq s \leq t$ tenemos que el B_t es \mathcal{F}_t medible.
2. $E[|B_t|] < \infty$ ya que

$$E[|B_t|] = \int_{-\infty}^{\infty} |w| \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{w^2}{2t}} dw = \frac{2t}{\sqrt{2\pi t}} = \sqrt{\frac{2t}{\pi}}$$

3. Si $s < t$ entonces

$$\begin{aligned} E[B_t|\mathcal{F}_s] &= E[B_t - B_s + B_s|\mathcal{F}_s] \\ &= E[B_t - B_s|\mathcal{F}_s] + E[B_s|\mathcal{F}_s] \\ &= E[B_t - B_s] + B_s \\ &= B_s \end{aligned}$$

y si $t \leq s$, entonces $E[B_t|\mathcal{F}_s] = B_t$ ya que es medible con respecto a $\mathcal{F}_t \subseteq \mathcal{F}_s$.

En conclusión

$$E[B_s|\mathcal{F}_t] = B_{t \wedge s}$$

donde $t \wedge s = \min(s, t)$.

Con lo que podemos decir que B_t es una martingala con respecto a $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$. \square \square

Siguiendo la misma idea veamos ahora que $M_t = B_t^2 - t$ es una martingala con respecto a $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$.

Para esto verifiquemos de nuevo las tres condiciones.

1. Para cada t fijo tenemos que $\{M_t \leq n\} = \{B_t^2 - t \leq n\} = \{|B_t| \leq \sqrt{n+t}\}$ es \mathcal{F}_t medible.
2. $E[|M_t|] < \infty$ ya que

$$E[|M_t|] \leq E[B_t^2] + |t| = t + |t| < \infty \quad \text{para } t \text{ fijo}$$

3. Sí $s < t$ entonces

$$\begin{aligned} E[B_t^2|\mathcal{F}_s] &= E[(B_t - B_s)^2 + 2B_tB_s - B_s^2|\mathcal{F}_s] \\ &= E[(B_t - B_s)^2|\mathcal{F}_s] + E[2B_tB_s|\mathcal{F}_s] - E[B_s^2|\mathcal{F}_s] \\ &= (t-s) + 2B_sE[B_t|\mathcal{F}_s] - B_s^2 \\ &= (t-s) + 2B_s^2 - B_s^2 \\ &= (t-s) + B_s^2 \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} E[M_t|\mathcal{F}_s] &= E[B_t^2 - t|\mathcal{F}_s] \\ &= E[B_t^2|\mathcal{F}_s] - E[t|\mathcal{F}_s] \\ &= (t-s) + B_s^2 - t \\ &= B_s^2 - s = M_s \end{aligned}$$

En conclusión M_t es una martingala.

Teorema 1.1.3. Caracterización de martingalas (Lévy)

Sea $B(t)$, $t \geq 0$ un proceso estocástico con respecto a la filtración $\mathcal{F}_t = \sigma(B_s, s \leq t)$. Entonces $B(t)$ es un movimiento browniano, sii, se tienen las siguientes condiciones

1. $B(0) = 0$ c.s.

2. Los caminos $t \mapsto B(t)$ son continuos c.s.
3. $B(t)$ es una martingala con respecto a \mathcal{F}_t .
4. $|B(t)|^2 - t$ es una martingala con respecto a \mathcal{F}_t .

Demostración. Note que con el trabajo hecho hasta el momento ya se demostró que las cuatro condiciones son suficientes. La demostración de la necesidad se puede encontrar en [14] Teorema 3.16 (p 157). □ □

Veamos un ejemplo del uso del teorema anterior para demostrar que un proceso estocástico dado, es un movimiento browniano.

Ejemplo 1.1.2. Escalamiento browniano.

Sea $c > 0$. Mostrar que $V(t) = \frac{1}{c}B(c^2t)$ es un proceso de Wiener si $B(t)$ lo es. Para esto verifiquemos las cuatro condiciones del teorema anterior

1. $V(0) = \frac{1}{c}B(0) = 0$ c.s.
2. Los caminos $t \mapsto V(t)$ son continuos porque los de $B(t)$, lo son.
3. $V(t)$ es una martingala con respecto a $(\mathcal{G}_t)_{t \geq 0}$ donde $\mathcal{G}_t = \mathcal{F}_{c^2t}$. Probemos las tres propiedades
 - (a) V_t es \mathcal{G}_t medible, puesto que

$$\begin{aligned}\mathcal{G}_t &= \sigma\{V_s : 0 \leq s \leq t\} \\ &= \sigma\{B_{c^2s} : 0 \leq s \leq t\}\end{aligned}$$

Note que cuando $0 \leq s \leq t$, c^2s varia entre 0 y c^2t , entonces

$$\begin{aligned}\mathcal{G}_t &= \sigma\{B_s : 0 \leq s \leq c^2t\} \\ &= \mathcal{F}_{c^2t}\end{aligned}$$

- (b) $E[|V_t|] < \infty$ ya que $\frac{1}{c}E[|B_{c^2t}|] < \infty$
- (c) $E[V_t|\mathcal{G}_s] = V_s$, si $s \leq t$

$$\begin{aligned}E[V_t|\mathcal{G}_s] &= E\left[\frac{1}{c}B_{c^2t}|\mathcal{G}_s\right] \\ &= \frac{1}{c}E[B_{c^2t}|\mathcal{F}_{c^2s}] \quad \text{y como } c^2s < c^2t \\ &= \frac{1}{c}B_{c^2s} = V_s\end{aligned}$$

4. $|V(t)|^2 - t = \left(\frac{1}{c}\right)^2 |B(c^2t)|^2 - t$ es una martingala con respecto a \mathcal{G}_t , ya que V_t es una martingala (ejemplo anterior).

Por lo que concluimos que es un proceso de Wiener o movimiento browniano. \square

Definición. La **variación** de una función $f : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ está definida por

$$\limsup_{\Delta t \rightarrow 0} \sum_{i=0}^{n-1} |f(t_{i+1}) - f(t_i)|$$

para toda partición t_0, t_1, \dots, t_n y $\Delta t = \max_{i \leq n} |t_{i+1} - t_i|$.

En lo que sigue mostraremos dos teoremas que son de gran utilidad en el entendimiento de la integración estocástica. Para esto haremos uso que el movimiento browniano hace parte de una clase de procesos estocásticos que definiremos a continuación.

Definición. Se dice que un proceso estocástico $(X_t)_{t \geq 0}$ es **H -autosimilar** para algún $H > 0$, si sus distribuciones finito dimensionales satisfacen

$$\left(T^H X_{t_1}, T^H X_{t_2}, \dots, T^H X_{t_n} \right) \stackrel{d}{=} (X_{T t_1}, \dots, X_{T t_n})$$

para toda $T > 0$ y para toda elección de puntos $t_i \geq 0$, $i = 1, \dots, n$

Teorema 1.1.4. Sea $(X_t)_{t \geq 0}$ un proceso con incrementos estacionarios y H -autosimilar para algún $H \in (0, 1)$, entonces para todo t_0 fijo se tiene

$$\lim_{t \downarrow t_0} \frac{|X_t - X_{t_0}|}{t - t_0} = \infty \quad \text{con probabilidad 1.} \quad (1.2)$$

Es decir que $P\{\lim_{t \downarrow t_0} \frac{|X_t - X_{t_0}|}{t - t_0} = \infty\} = 1$

Demostración. Como los incrementos son estacionarios podemos asumir, sin perder generalidad, que $t_0 = 0$. Sea t_n una sucesión tal que $t_n \downarrow 0$ y como X_t es H -autosimilar, entonces $T^H X_0 \stackrel{d}{=} X_0$ para todo $T > 0$ por lo que podemos deducir que $X_0 = 0$ c.s. Por lo dicho anteriormente t_n es una sucesión decreciente que converge a 0. Si se toma

$$A_n = \left\{ \omega \in \Omega : \sup_{0 \leq s \leq t_n} \left| \frac{X_s(\omega)}{s} \right| > x \right\}$$

se tiene que $A_{n+1} \subseteq A_n$ y

$$P(\lim_{n \rightarrow \infty} A_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} P(A_n)$$

por lo que se concluye

$$P\left(\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{0 \leq s \leq t_n} \left| \frac{X_s}{s} \right| > x \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\sup_{0 \leq s \leq t_n} \left| \frac{X_s}{s} \right| > x \right) \quad (1.3)$$

ahora como

$$\sup_{0 \leq s \leq t_n} \left| \frac{X_s}{s} \right| \geq \left| \frac{X_{t_n}}{t_n} \right|$$

tenemos que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P \left(\sup_{0 \leq s \leq t_n} \left| \frac{X_s}{s} \right| > x \right) \geq \lim_{n \rightarrow \infty} \sup P \left(\left| \frac{X_{t_n}}{t_n} \right| > x \right)$$

por otro lado como $A \subseteq B \Rightarrow P(A) \leq P(B)$ entonces

$$P \left(\left| \frac{X_{t_n}}{t_n} \right| > x \right) \leq P \left(\sup_{0 \leq s \leq t_n} \left| \frac{X_s}{s} \right| > x \right)$$

Pero como por H -autosimilaridad $(X_{t_n} \stackrel{d}{=} (t_n)^H X_1)$ tenemos

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup P \left(\left| \frac{X_{t_n}}{t_n} \right| > x \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sup P \left(|(t_n)^{H-1} X_1| > x \right)$$

y usando que $H \in (0, 1)$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup P \left(|(t_n)^{H-1} X_1| > x \right) = 1 \quad \text{si } x > 0$$

Como $t_n^{H-1} \rightarrow \infty$ pues $H - 1 < 0$ y $t_n \rightarrow 0$, se tiene que:

$$P \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{0 \leq s \leq t_n} \left| \frac{X_s}{s} \right| > x \right) = 1$$

y como esto se tiene para todo $x \in \mathbb{R}^+$ entonces

$$P \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \sup \left| \frac{X_{t_n}}{t_n} \right| = \infty \right) = 1$$

quedando demostrado el teorema. □ □

Observación. El teorema 1.1.4 dice que los procesos estocásticos H -autosimilares no son derivables en ningun punto.

Teorema 1.1.5. El movimiento browniano es un proceso $\frac{1}{2}$ -autosimilar, es decir

$$\left(T^{\frac{1}{2}} B_{t_1}, \dots, T^{\frac{1}{2}} B_{t_n} \right) \stackrel{d}{=} (B_{Tt_1}, \dots, B_{Tt_n})$$

para toda $T > 0$ y para toda elección de puntos $t_i \geq 0$, $i = 1, \dots, n$

Demostración. Basta con mirar que tienen la misma media y covarianza, pues son procesos gaussianos.

En efecto

$$E \left[T^{\frac{1}{2}} B_{t_i} \right] = T^{\frac{1}{2}} E \left[B_{t_i} \right] = 0 = E \left[B_{Tt_i} \right]$$

y

$$\begin{aligned} \text{cov}(T^{\frac{1}{2}} B_{t_i}, T^{\frac{1}{2}} B_{t_j}) &= T \text{Cov}(B_{t_i}, B_{t_j}) \\ &= T \min(t_i, t_j) \\ &= \min(Tt_i, Tt_j) \\ &= \text{Cov}(B_{Tt_i}, B_{Tt_j}) \end{aligned}$$

□

□

Corollary 1.1.6. *El movimiento browniano no es derivable en ningún punto.*

Demostración. El resultado es claro pues el movimiento browniano es $\frac{1}{2}$ -autosimilar. \square

Teorema 1.1.7. *Las trayectorias del movimiento browniano no tienen variación acotada en $[0, T]$. Es decir*

$$\sup_{\tau} \left\{ \sum_{i=0}^{n-1} |B_{t_{i+1}}(w) - B_{t_i}(w)| \right\} = \infty$$

donde τ es una partición del intervalo $[0, T]$ (i.e. $\tau = \{t_0, t_1, \dots, t_n\}$ con $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = T$)

Demostración. Sin perder generalidad supongamos que $T = 1$ y sea

$$V(B(w)) = \sup_{\tau} \left\{ \sum_{i=0}^{n-1} |B_{t_{i+1}}(w) - B_{t_i}(w)| \right\}$$

veamos que la medida del conjunto $\{w \in \Omega : V(B(w)) < \infty\}$ es nula.

Sea $w \in \Omega$ talque $V(B(w)) < \infty$ y sea $\tau_n = \{t_0^{(n)}, t_1^{(n)}, \dots, t_m^{(n)}\}$ una sucesión de particiones de $[0, T]$ tales que, definiendo $mesh(\tau_n) = m(\tau_n) := \max_{1 \leq i \leq n} (t_i^{(n)} - t_{i-1}^{(n)})$, satisfagan $m(\tau_n) \rightarrow 0$ cuando $n \rightarrow \infty$.

Ahora consideremos $\Delta B_i = |B_{t_i} - B_{t_{i-1}}|$, entonces

$$\begin{aligned} Q_n(w) &= \sum_{i=1}^n (\Delta B_i(w))^2 \\ &\leq \max_{1 \leq i \leq n} |\Delta B_i(w)| \sum_{i=1}^n |\Delta B_i(w)| \\ &\leq \max_{1 \leq i \leq n} |\Delta B_i(w)| V(B(w)) \end{aligned} \tag{1.4}$$

Como las trayectorias del movimiento browniano son continuas con probabilidad 1 y dado que $m(\tau_n) \rightarrow 0$ entonces $\max_{1 \leq i \leq n} |\Delta B_i(w)| \rightarrow 0$ cuando $n \rightarrow \infty$, y entonces la parte derecha de (1.4) tiende a 0, por lo que $Q_n(w) \rightarrow 0$.

Por otra parte usando las propiedades del movimiento browniano tenemos

$$\begin{aligned} E[Q_n(w)] &= E \left[\sum_{i=1}^n (\Delta B_i(w))^2 \right] \\ &= \sum_{i=1}^n E [(\Delta B_i(w))^2] \\ &= \sum_{i=1}^n \Delta t_i = T = 1 \end{aligned}$$

Por lo que $Q_n(w) \rightarrow 1$ en $L^1(P)$ y entonces $Q_n(w) \rightarrow 1$ en probabilidad, y como consecuencia se puede escojer una subsucesión t_{n_k} de t_n que cumple $Q_{n_k}(w) \rightarrow 1$ c.s., por lo que concluimos que la convergencia a 0 sólo puede darse en un conjunto de medida 0 y

$$P\{w \in \Omega : V(B(w)) = \infty\} = 1$$

□

□

1.1.3. Procesos derivados del movimiento browniano

- El **Puente browniano** se define como $X_t := B_t - tB_1$ con $t \in [0, 1]$. Se puede ver que X_t es un proceso gaussiano que se anula en los extremos (i.e. $X_0 = 0 = X_1$) además

$$\mu_X(t) = E[X_t] = E[B_t - tB_1] = E[B_t] - tE[B_1] = 0$$

$$C(s, t) = Cov[X_s, X_t] = \min(s, t) - ts$$

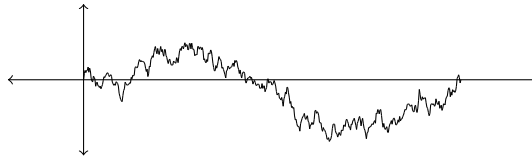


Figura 1.3: Una trayectoria del puente browniano.

- El **Movimiento browniano geométrico** se define como $X_t = e^{\mu t + \sigma B_t}$ donde $t \geq 0$, B_t es el movimiento browniano estándar, $\sigma > 0$ y $\mu \in \mathbb{R}$. Este proceso no es gaussiano, es decir $X_t \stackrel{d}{\neq} N(\mu, \sigma)$.

Además

$$\begin{aligned} \mu_X(t) = E[X_t] &= E[e^{\mu t + \sigma B_t}] \\ &= e^{\mu t} E[e^{\sigma B_t}] \quad \text{Usando que } B_t \text{ es } \frac{1}{2} \text{ autosimilar} \\ &= e^{\mu t} E[e^{\sigma \sqrt{t} B_1}] \quad \text{Como } B_1 \stackrel{d}{=} N(0, 1) \\ &= e^{\mu t} e^{\frac{\sigma^2 t}{2}} \\ &= e^{\mu t + \frac{\sigma^2 t}{2}} \end{aligned}$$

y si $s \leq t$ se tiene que $B_t - B_s$ y B_s son independientes y $B_t - B_s \stackrel{d}{=} B_{t-s}$ por lo que

$$\begin{aligned} c_X(s, t) = Cov[X_s, X_t] &= E[X_s X_t] - E[X_s]E[X_t] \\ &= E[e^{\mu(s+t) + \sigma(B_t + B_s)}] - e^{\mu s + \frac{\sigma^2 s}{2}} e^{\mu t + \frac{\sigma^2 t}{2}} \\ &= e^{\mu(s+t)} E[e^{\sigma(B_t + B_s)}] - e^{(s+t)(\mu + \frac{\sigma^2}{2})} \\ &= e^{\mu(s+t)} E[e^{\sigma(B_t - B_s + 2B_s)}] - e^{(s+t)(\mu + \frac{\sigma^2}{2})} \\ &= e^{\mu(s+t)} E[e^{\sigma(B_t - B_s)}] E[e^{\sigma 2B_s}] - e^{(s+t)(\mu + \frac{\sigma^2}{2})} \\ &= e^{\mu(s+t)} e^{\frac{\sigma^2}{2}(t-s)} e^{2\sigma^2 s} - e^{(s+t)(\mu + \frac{\sigma^2}{2})} \\ &= e^{\mu(s+t)} e^{\frac{\sigma^2}{2}(t+s)} e^{\sigma^2 s} - e^{(s+t)(\mu + \frac{\sigma^2}{2})} \\ &= e^{(s+t)(\mu + \frac{\sigma^2}{2})} (e^{\sigma^2 s} - 1) \end{aligned}$$

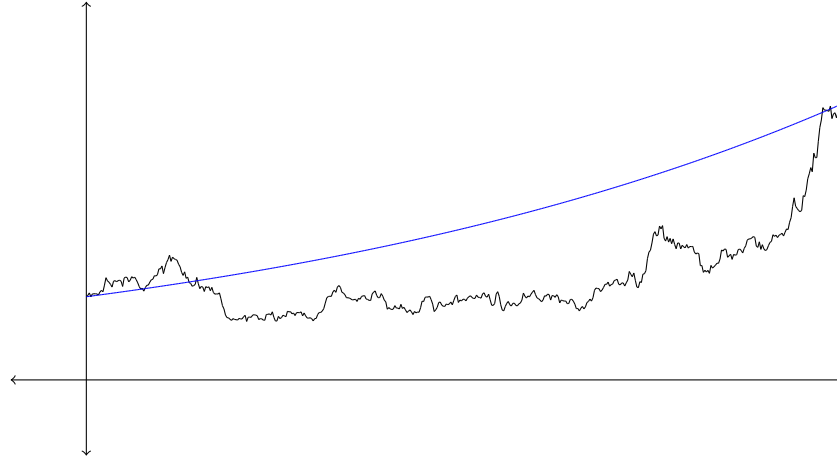


Figura 1.4: El movimiento browniano Geométrico. $X_0 = 1.10$, $\mu = 0.120$, $\sigma = 0.250$

Teorema 1.1.8. El proceso estocástico $\left(e^{\alpha B_t - \frac{\alpha^2}{2}t} \right)_{t \geq 0}$, con B_t movimiento browniano estándar y $\alpha \in \mathbb{R}$, es una martingala.

Demostración. 1. Como $g(x) = e^{\alpha x + \mu}$ es continua, entonces el proceso es claramente adaptado a la filtración browniana $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$.

2. Para cada t , $E \left[|e^{\alpha B_t - \frac{\alpha^2}{2}t}| \right] = e^{-\frac{\alpha^2}{2}t} E \left[|e^{\alpha B_t}| \right] \leq e^{-\frac{\alpha^2}{2}t} < \infty$

3. Si $s < t$, entonces

$$\begin{aligned} E \left[e^{\alpha B_t - \frac{\alpha^2}{2}t} \mid \mathcal{F}_s \right] &= e^{-\frac{\alpha^2}{2}t} E \left[e^{\alpha(B_t - B_s)} e^{\alpha B_s} \mid \mathcal{F}_s \right] \\ &= e^{-\frac{\alpha^2}{2}t} e^{\alpha B_s} E \left[e^{\alpha(B_t - B_s)} \mid \mathcal{F}_s \right] \\ &= e^{-\frac{\alpha^2}{2}t} e^{\alpha B_s} E \left[e^{\alpha B_{t-s}} \mid \mathcal{F}_s \right] \\ &= e^{-\frac{\alpha^2}{2}t} e^{\alpha B_s} E \left[e^{\alpha B_{t-s}} \right] \\ &= e^{-\frac{\alpha^2}{2}t} e^{\alpha B_s} e^{\frac{\alpha^2}{2}(t-s)} \\ &= e^{\alpha B_s} e^{\frac{\alpha^2}{2}(-s)} = e^{\alpha B_s - \frac{\alpha^2}{2}s} \end{aligned}$$

Por lo tanto es una martingala. □ □

Ejemplo 1.1.3. Sea B_t un movimiento browniano estándar, entonces $X_t = \mu t + \sigma B_t$ es un proceso gaussiano con incrementos estacionarios e independientes, llamado movimiento browniano con tendencia μ y volatilidad σ y además se tiene que $(X_t)_{t \geq 0}$ es una martingala si $\mu = 0$, una submartingala, si $\mu > 0$ y una supermartingala, si $\mu < 0$. □

1.2. Integración Estocástica

En el año 1944 el matemático japonés K. Itô en un documento llamado *Stochastic Integral* desarrolló un cálculo para integrales con respecto a un proceso de Wiener o movimiento browniano. Esta sección se concentrará en tratar de definir la integral de Itô, es decir

$$\int_S^T f(t, \omega) dB_t(\omega)$$

Esta integral no puede ser vista como una integral de Riemman-Stieljes debido a que el movimiento browniano no es derivable en ningún punto como lo dice el teorema 1.1.6, además la variación de los caminos del movimiento browniano no son acotados como lo dice el teorema 1.1.7 (Ver [14] p.130).

Aunque estas condiciones no son necesarias para la existencia de la integral de Riemman-Stieljes como se puede ver en [45], no se conocen muy bien condiciones más débiles. Por esto necesitamos una nueva forma de entender esta integral y así obtener la definición de la integral de Itô, que para un proceso estocástico $\{X_t\}_{0 \leq t \leq T}$ con respecto del movimiento browniano, se puede escribir de la siguiente manera,

$$\int_S^T X_t dB_t$$

Asumimos que todas las variables aleatorias consideradas están definidas sobre el espacio de probabilidad (Ω, \mathcal{F}, P) . El espacio $L^2(P)$ es el espacio de todas las funciones f definidas sobre Ω y de valor real, que son cuadrado integrables con respecto a la medida de P , es decir, cumplen la condición

$$\|f\|_{L^2(P)} = (E[|f|^2])^{\frac{1}{2}} < \infty$$

Finalmente denotaremos el espacio $L^2(P \times dt)$ al espacio de funciones que cumplen la condición

$$E \left[\int_S^T |f|^2 dt \right] < \infty$$

Si $\{B_t, t \geq 0\}$ es el movimiento browniano estándar junto con su filtración natural $\{\mathcal{F}_t, t \geq 0\}$, tenemos que $B_t \in L^2(P \times dt)$ ya que

$$E \left[\int_S^T |B_t|^2 dt \right] = \int_S^T E[|B_t|^2] dt = \int_S^T t dt = \frac{T^2 - S^2}{2} < \infty$$

1.2.1. Construcción de la integral

El objetivo es definir de alguna manera $\int_S^T f(t, \omega) dB_t(\omega)$ para ello comenzaremos definiendo la integral para los llamados procesos elementales.

Definición. Procesos Elementales son aquellos procesos que se pueden escribir de la forma

$$\phi(t, \omega) = \sum_{j \geq 0} e_j(\omega) \chi_{[t_j, t_{j+1})}(t)$$

donde e_j es \mathcal{F}_{t_j} -medible y χ_A denota la función característica de A .

Observación. Estas son funciones que pueden ser vistas como constantes a trozos.

Para funciones elementales es razonable definir la integral de la siguiente forma

Definición. Definimos la **Integral de Itô para funciones elementales** como

$$\int_S^T \phi(t, \omega) dB_t(\omega) = \sum_{j \geq 0} e_j(\omega) [B_{t_{j+1}} - B_{t_j}](\omega)$$

La ventaja que tienen las funciones elementales es que aproximan a funciones más generales, pero la extensión de la integral a funciones más generales puede llevarnos a dificultades como se ve en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 1.2.1. Supongamos que $(B_t)_{t \geq 0}$ representa el movimiento browniano, entonces $(B_t)_{t \geq 0}$ puede ser aproximado por las funciones elementales ϕ_1 y ϕ_2 , donde ϕ_1 toma el valor del movimiento browniano a izquierda y ϕ_2 a derecha, es decir

$$\begin{aligned} \phi_1(t, \omega) &= \sum_{j \geq 0} B_{j2^{-n}}(\omega) \chi_{[j2^{-n}, (j+1)2^{-n})}(t) \\ \phi_2(t, \omega) &= \sum_{j \geq 0} B_{(j+1)2^{-n}}(\omega) \chi_{[j2^{-n}, (j+1)2^{-n})}(t) \end{aligned}$$

por simplicidad asumiremos la siguiente notación

$$t_k = \begin{cases} k2^{-n} & \text{si } S \leq k2^{-n} \leq T \\ S & \text{Si } k2^{-n} < S \\ T & \text{si } k2^{-n} > T \end{cases} \quad (1.5)$$

entonces

$$\begin{aligned} E \left[\int_S^T \phi_1(t, \omega) dB_t(\omega) \right] &= E \left[\sum_{j \geq 0} B_{j2^{-n}}(\omega) (B_{(j+1)2^{-n}}(\omega) - B_{j2^{-n}}(\omega)) \right] \\ &= \sum_{j \geq 0} E [B_{t_j} (B_{t_{j+1}} - B_{t_j})] \\ &= \sum_{j \geq 0} E [B_{t_j} B_{t_{j+1}} - B_{t_j}^2] \\ &= \sum_{j \geq 0} (E [B_{t_j} B_{t_{j+1}}] - E [B_{t_j}^2]) \\ &= \sum_{j \geq 0} (\text{mín}(t_j, t_{j+1}) - t_j) = 0 \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}
E \left[\int_S^T \phi_2(t, w) dB_t(w) \right] &= E \left[\sum_{j \geq 0} B_{t_{j+1}}(w) (B_{t_{j+1}}(w) - B_{t_j}(w)) \right] \\
&\quad \text{Usando } B_{t_{j+1}} = B_{t_j} + (B_{t_{j+1}} - B_{t_j}) \\
&= \sum_{j \geq 0} E \left[(B_{t_j} + (B_{t_{j+1}} - B_{t_j})) (B_{t_{j+1}} - B_{t_j}) \right] \\
&= \sum_{j \geq 0} E \left[B_{t_j} (B_{t_{j+1}} - B_{t_j}) + (B_{t_{j+1}} - B_{t_j})^2 \right] \\
&= \sum_{j \geq 0} E \left[B_{t_j} (B_{t_{j+1}} - B_{t_j}) \right] + E \left[(B_{t_{j+1}} - B_{t_j})^2 \right] \\
&= \sum_{j \geq 0} E \left[(B_{t_{j+1}} - B_{t_j})^2 \right] \\
&= \sum_{j \geq 0} (t_{j+1} - t_j) = T - S
\end{aligned}$$

Con este ejemplo vemos que si tomamos el valor de aproximación a izquierda del movimiento browniano (ϕ_1) en la integral estocástica da un resultado diferente de tomar el valor a derecha (ϕ_2). Luego las aproximaciones una función $f(t, w) \cong \sum_{j \geq 0} f(t_j^*, w) \chi_{[t_j, t_{j+1})}(t)$, pueden hacer variar el valor de la integral dependiendo de donde se tome el $t_j^* \in [t_j, t_{j+1}]$, en este ejemplo sólo se toman a izquierda o a derecha.

Nota. Como resulta natural definir la integral por medio aproximaciones de funciones elementales, entonces para la integral de Itô, lo tomaremos $t_j^* = t_j$ (El límite se toma en $L^2(P)$, como se verá más adelante).

Teorema 1.2.1. Isometría de Itô

Sea $\phi(t, w)$ una función elemental, entonces

$$E \left[\left(\int_S^T \phi(t, w) dB_t(w) \right)^2 \right] = E \left[\int_S^T \phi^2(t, w) dt \right]$$

Demostración. Recordemos que $\Delta B_k = B_{t_{k+1}} - B_{t_k}$, entonces

$$\begin{aligned} E \left[\left(\int_S^T \phi(t, w) dB_t(w) \right)^2 \right] &= E \left[\left(\sum_{j \geq 0} e_j(w) (B_{t_{j+1}} - B_{t_j}) \right)^2 \right] \\ &= E \left[\sum_{i, j \geq 0} e_j(w) e_i(w) \Delta B_j \cdot \Delta B_i \right] \\ &= E \left[\sum_{j \geq 0} e_j^2(w) \Delta t_j \right] \\ &= E \left[\int_S^T \phi^2(t, w) dt \right] \end{aligned}$$

donde $E[B_t^2] = t = E[t]$ □ □

Vamos a definir la integral de Itô para procesos más generales, es decir procesos que están en una clase especial que llamaremos \mathcal{V} .

Definición. Sea $\mathcal{V} = \mathcal{V}(S, T)$ la clase de funciones

$$f(t, w) : [0, \infty) \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$$

tales que

1. $(t, w) \rightarrow f(t, w)$ es $\mathcal{B} \times \mathcal{F}_t$ medible.
2. $f(t, w)$ es \mathcal{F}_t adaptada.
3. $E \left[\int_S^T f(t, w)^2 dt \right] < \infty$

Nota. Es fácil ver de la definición anterior que el espacio \mathcal{V} coincide con $L^2(P \times dt)$.

Observación. En el espacio de probabilidad $([S, T] \times \Omega, \mathcal{B}[S, T] \times \mathcal{F}_t, \lambda \otimes P)$, que es el espacio en el que estamos trabajando, $E \left[\int_S^T f^2(t, w) dt \right]^{\frac{1}{2}}$ en vez de definir una norma, define una seminorma pues $\|f - g\|^2 = 0$, implica que $f = g$ $\lambda \otimes P$ -casi siempre y no implica que sean iguales.

1.2.2. Extensión de la integral por aproximación

El proceso de aproximación para definir la integral para procesos de \mathcal{V} es el siguiente:

- Si $g \in \mathcal{V}$ es acotada y $g(\cdot, w)$ es continua para cada w , entonces existe una sucesión ϕ_n de funciones elementales tales que

$$E \left[\int_S^T (g - \phi_n)^2 dt \right] \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

En efecto recordando la notación en (1.5) sean

$$\phi_n(w) = \sum_{k \geq 0} g(t_k, w) \chi_{(t_k, t_{k+1}]}(t)$$

Entonces cada ϕ_n es elemental y además se tiene el límite puntual para casi todo w , por construcción, entonces por el teorema de la convergencia dominada se obtiene el resultado.

- Si $h \in \mathcal{V}$ es acotada, entonces existe una sucesión $g_n \in \mathcal{V}$ con $g(\cdot, w)$ continua para cada w tales que

$$E \left[\int_S^T (h - g_n)^2 dt \right] \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \quad \text{para todo } w \quad (1.6)$$

En efecto si definimos $G_t(w) = \int_S^t h(s, w) ds$, y tomamos

$$g_n(t, w) = \frac{G_t(w) - G_{t - \frac{1}{n}}(w)}{\frac{1}{n}}$$

entonces se tiene que cada función g_n es continua en t para cada w , es acotada y \mathcal{F}_t -medible y además para casi todo $(t, w) \in [S, T] \times \Omega$ se tiene

$$\lim_{n \rightarrow \infty} g_n(t, w) = h(t, w)$$

por consiguiente, del teorema de la convergencia dominada se obtiene (1.6).

- Si $f \in \mathcal{V}$, entonces existe una sucesión $h_n \in \mathcal{V}$ acotadas para cada n , tales que

$$E \left[\int_S^T (f - h_n)^2 dt \right] \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

En efecto, si:

$$h_n(t, w) = f(t, w) \chi_{\{|w|, |f(t, w)| \leq n\}}(w)$$

entonces por el teorema de la convergencia dominada se tiene el resultado. \square

Con esta aproximación ya podemos dar la siguiente definición

Definición. Sea $f \in \mathcal{V}$ y ϕ_n sucesión de funciones elementales tales que

$$E \left[\int_S^T (f - \phi_n)^2 dt \right] \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \quad (1.7)$$

entonces la **Integral de Itô** se define por

$$\int_S^T f(t, w) dB_t(w) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_S^T \phi_n(t, w) dB_t(w)$$

donde el límite se toma en $L^2(P)$

Observación. Esta definición no depende de la sucesión de funciones ϕ_n que aproximan a f , siempre que se cumpla la condición (1.7).

Teorema 1.2.2. Isometría de Itô

Sea $f \in \mathcal{V}$, entonces

$$E \left[\left(\int_S^T f(t, \omega) dB_t \right)^2 \right] = E \left[\int_S^T f(t, \omega)^2 dt \right]$$

Demostración. Este teorema es la extensión del teorema 1.2.1. □ □

Teorema 1.2.3. Propiedades de la integral de Itô

Sean $f, g \in \mathcal{V}(S, T)$. Si $0 \leq S < U < T$ entonces

1. $\int_S^T f dB_t = \int_S^U f dB_t + \int_U^T f dB_t$ c.s.
2. $\int_S^T (cf + g) dB_t = c \int_S^T f dB_t + \int_S^T g dB_t$ c.s. donde c es constante.
3. $E \left[\int_S^T f dB_t \right] = 0$
4. $\int_S^T f dB_t$ es \mathcal{F}_T medible.

Demostración. Los resultados se pueden demostrar fácilmente usando funciones elementales, como ejemplo demostraremos la media cero de la integral estocástica o integral de Itô.

3. Probaremos el resultado para funciones elementales así si

$$\phi(t, \omega) = \sum_{k=1}^n e_k(\omega) \chi_{(t_{k-1}, t_k]}(t) \text{ tenemos}$$

$$\begin{aligned} E \left[\int_S^T \phi(t, \omega) dB_t \right] &= E \left[\sum_{k=1}^n e_k(\omega) (B_{t_{k-1}} - B_{t_k}) \right] \\ &= \sum_{k=1}^n E \left[e_k(\omega) (B_{t_{k-1}} - B_{t_k}) \right] \\ &= \sum_{k=1}^n E \left[E \left[e_k(\omega) (B_{t_{k-1}} - B_{t_k}) \mid \mathcal{F}_{t_{k-1}} \right] \right] \\ &\quad \text{Como } e_k \text{ es } \mathcal{F}_{t_{k-1}} \text{ medible} \\ &= \sum_{k=1}^n E \left[e_k(\omega) E \left[B_{t_{k-1}} - B_{t_k} \mid \mathcal{F}_{t_{k-1}} \right] \right] \\ &\quad \text{Como } B_{t_{k-1}} - B_{t_k} \text{ es independiente de } \mathcal{F}_{t_{k-1}} \\ &= \sum_{k=1}^n E \left[e_k(\omega) E \left[B_{t_{k-1}} - B_{t_k} \right] \right] \\ &= \sum_{k=1}^n E \left[e_k(\omega) 0 \right] = 0 \end{aligned}$$

□

□

A continuación, veamos ahora un resultado que es de gran utilidad

Teorema 1.2.4. *Sea $f \in \mathcal{V}$, entonces existe una versión t -continua (es decir, continua en t para todo ω fijo) de $\int_S^t f(s, \omega) dB_s(\omega)$ donde $S \leq t \leq T$, es decir que existe J_t proceso estocástico tal que*

$$P \left[J_t = \int_S^t f dB \right] = 1$$

Demostración. La demostración puede ser encontrada en [31] pg. 32. □

Gracias a este teorema de ahora en adelante podemos asumir que la integral de Itô es t -continua.

Integral de Itô multidimensional Sea $B(t) = (B_1(t), B_2(t), \dots, B_n(t))$ movimiento browniano n dimensional y $\mathcal{V}^{m \times n}(S, T)$ denota el conjunto de matrices V de tamaño $m \times n$ con $V = (v_{ij}(t, \omega))$, y donde cada entrada v_{ij} satisface

1. $(t, \omega) \rightarrow v_{ij}(t, \omega)$ es $\mathcal{B} \times \mathcal{F}_t$ medible.
2. $v_{ij}(t, \omega)$ es \mathcal{F}_t adaptada.

$$3. E \left[\int_S^T v_{ij}(t, w)^2 dt \right] < \infty$$

Entonces tenemos que

$$\int_S^T V dB = \int \begin{pmatrix} v_{11} & v_{12} & \dots & v_{1n} \\ v_{21} & v_{22} & \dots & v_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ v_{m1} & v_{m2} & \dots & v_{mn} \end{pmatrix}_{m \times n} \begin{pmatrix} dB_1 \\ dB_2 \\ \vdots \\ dB_n \end{pmatrix}_{n \times 1}$$

es el vector columna de tamaño $m \times 1$ cuya i -ésima componente es la integral unidimensional de Itô

$$\sum_{j=1}^n \int_S^T v_{ij}(s, w) dB_j(s, w).$$

Teorema 1.2.5. *La integral estocástica es una martingala.*

Sea $f(t, w) \in \mathcal{V}[0, T]$ entonces

$$M_t(w) = \int_0^t f(s, w) dB_s(w)$$

es una martingala con respecto a $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$.

Demostración. La demostración se puede encontrar por ejemplo en [25]. □

Muchas veces se usa una noción más débil que la de martingala y es el de martingala local (Como se verá más adelante).

Definición. Un proceso estocástico (\mathcal{F}_t) -adaptado X_t , $0 \leq t \leq T$ es una **martingala local** con respecto a (\mathcal{F}_t) , si existe una secuencia de tiempos de parada τ_n , $n = 1, 2, \dots$ tal que:

1. τ_n crece monotonamente a T casi siempre, cuando $n \rightarrow \infty$.
2. Para todo n , $X_{t \wedge \tau_n}$ es una martingala con respecto a (\mathcal{F}_t) .

Observación. Toda martingala es una martingala local, pero el reciproco no es cierto un ejemplo de martingala local que no es martingala se puede encontrar en [37] pg.37.

1.2.3. Fórmula de Itô

Definición. Una integral estocástica o **proceso de Itô** es un proceso estocástico X_t donde

$$X_t = X_0 + \int_0^t u(s, w) ds + \int_0^t v(s, w) dB_s \quad (1.8)$$

siendo $v \in \mathcal{V}(0, T)$ y u \mathcal{F}_t adaptada. En forma diferencial la ecuación (1.8) se puede expresar como :

$$dX_t = u dt + v dB_t$$

Para no tener que hacer la aproximación por medio de funciones elementales cada vez que se necesite hacer una integral con respecto a un movimiento browniano o un proceso estocástico de Itô tenemos

Teorema 1.2.6. Fórmula de Itô

Si X_t es un proceso de Itô, sea $g(t, x) \in C^2([0, \infty) \times \mathbb{R})$ entonces $Y_t = g(t, X_t)$ es nuevamente un proceso de Itô y

$$dY_t = \frac{\partial g}{\partial t}(t, X_t)dt + \frac{\partial g}{\partial x}(t, X_t)dX_t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} g(t, X_t)(dX_t)^2$$

Nota. $(dX_t)^2 = (dX_t) \cdot (dX_t)$ se calcula usando las siguientes convenciones

$$dt \cdot dt = dt \cdot dB_t = dB_t \cdot dt = 0 \quad dB_t \cdot dB_t = dt$$

por su convergencia en $L^2(P)$.

En el cálculo de la fórmula de Itô, se extiende la convención $dB_t \cdot dB_t = dt$ con las siguientes definiciones

Definición. La variación cuadrática de un proceso estocástico X_t se define por

$$[X, X]_t = \lim_{\Delta t_k \rightarrow 0} \sum_{t_k \leq t} |X_{t_{k+1}} - X_{t_k}|^2 \quad \text{límite en probabilidad}$$

donde $0 = t_1 < t_2 < \dots < t_n = t$ y $\Delta t_k = t_{k+1} - t_k$

Definición. La variación cuadrática de un proceso de Itô $dX_t = v(t, \omega)dB_t(\omega)$ donde $v(t, x) \in \mathcal{V}(0, T)$, $0 \leq t \leq T$ y B_t representa el movimiento browniano estándar, se define por

$$[X, X]_t = X_t^2 - \int_0^t v(s, \omega)ds$$

Observación. Se usará la siguiente notación

$$(\Delta X_t)^2 = \Delta[X, X]_t$$

donde $\Delta[X, X]_t$ significa la variación del proceso $([X, X]_t)_{t \geq 0}$. Además note que $(\Delta B_t)^2 = \Delta t$ por lo que se usa $(dB_t)^2 = dt$

Veamos ahora unos ejemplos de la aplicación de la fórmula de Itô

Ejemplo 1.2.2. Si tenemos $g(t, x) = x^2$, entonces

$$\int_0^t B_s dB_s = \frac{1}{2} B_t^2 - \frac{1}{2} t$$

Ejemplo 1.2.3. Si tenemos $g(t, x) = tx$, entonces

$$\int_0^t s dB_s = t B_t - \int_0^t B_s ds$$

El último ejemplo se parece mucho a la fórmula de integración por partes así que generalizándolo, se tiene el siguiente teorema.

Teorema 1.2.7. Sea $f(s, w)$ una función continua y de variación acotada con respecto a $s \in [0, t]$, para casi todo w entonces

$$\int_0^t f(s)dB_s = f(t)B_t - \int_0^t B_sdf(s)$$

Demostración. Para esto, basta tomar $g(t, x) = f(t)x$ y aplicar la fórmula de Itô a $Y_t = g(t, B_t)$. \square \square

Teorema 1.2.8. Fórmula de Itô multidimensional

Sea X_t un proceso de Itô n -dimensional, sea $g(t, x) = (g_1(t, x), g_2(t, x), \dots, g_p(t, x))$ una función C^2 de $[0, \infty] \times \mathbb{R}^n$ en \mathbb{R}^p , entonces el proceso

$$Y(t, w) = g(t, X(t))$$

es de nuevo un proceso de Itô cuya k -ésima componente está dada por

$$dY_k = \frac{\partial g_k}{\partial t}(t, X_t)dt + \sum_i \frac{\partial g_k}{\partial x_i}(t, X_t)dX_i + \frac{1}{2} \sum_{i,j} \frac{\partial^2 g_k}{\partial x_i \partial x_j}(t, X_t)dX_i \cdot dX_j$$

Nota. $dB_i \cdot dB_j = \delta_{ij}dt$

Teorema 1.2.9. Regla del Producto

Sean X_t, Y_t procesos de Itô 1-dimensionales, dados por

$$\begin{aligned} X_t &= X_0 + \int_0^t K_s ds + \int_0^t H_s dB_s \\ Y_t &= Y_0 + \int_0^t \mu_s ds + \int_0^t \sigma_s dB_s \end{aligned}$$

entonces

$$\begin{aligned} X_t Y_t &= X_0 Y_0 + \int_0^t X_s dY_s + \int_0^t Y_s dX_s + \int_0^t dX_s \cdot dY_s \\ &= X_0 Y_0 + \int_0^t (X_s \mu_s + Y_s K_s + H_s \sigma_s) ds + \int_0^t (X_s \sigma_s + Y_s H_s) dB_s \end{aligned}$$

Demostración. Usando la fórmula de Itô multidimensional con $g(x, y, t) = xy$, tenemos que

$$\begin{aligned} d(X_t Y_t) &= 0 + X_t dY_t + Y_t dX_t + \frac{1}{2}(0 + 1 + 1 + 0)dX_t \cdot dY_t \\ d(X_t Y_t) &= X_t dY_t + Y_t dX_t + dX_t \cdot dY_t \\ d(X_t Y_t) &= X_t dY_t + Y_t dX_t + ((K_t dt + H_t dB_t)(\mu_t dt + \sigma_t dB_t)) \\ d(X_t Y_t) &= X_t(\mu_t dt + \sigma_t dB_t) + Y_t(K_t dt + H_t dB_t) + ((K_t dt + H_t dB_t)(\mu_t dt + \sigma_t dB_t)) \\ d(X_t Y_t) &= (X_t \mu_t + Y_t K_t + H_t \sigma_t)dt + (X_t \sigma_t + Y_t H_t)dB_t \end{aligned}$$

Por lo que se tiene el resultado. \square \square

1.2.4. Teorema de Representación de Martingalas

Recordemos que si $v \in \mathcal{V}$ (o más general $v \in \mathcal{V}^n$), entonces $M_t = \int_S^t v(s, w) dB_s$ es una martingala con respecto a la filtración \mathcal{F}_t (respectivamente \mathcal{F}_t^n). En esta sección veremos que el recíproco también es cierto, es decir, que toda \mathcal{F}_t -Martingala con respecto a P puede ser representada como una integral estocástica.

Con objeto de simplificar la prueba del teorema de representación de martingalas vamos a ver dos resultados auxiliares primero.

Lema 1.2.10. *Dado $T > 0$ fijo. El conjunto de variables aleatorias*

$$\left\{ \phi(B_{t_1}, B_{t_2}, \dots, B_{t_n}), t_i \in [0, T], \phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n), i = 1, 2, \dots, n \right\}$$

es denso en $L^2(\mathcal{F}_t, P)$ (el espacio de los procesos en $L^2(P)$ y adaptados a $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$).

Observación. $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ es el conjunto de las funciones infinito diferenciables y de soporte compacto.

Lema 1.2.11. *La expansión lineal o generado de variables aleatorias de tipo*

$$\exp \left\{ \int_0^T h(t) dB_t(w) - \frac{1}{2} \int_0^T h^2(t) dt \right\} \quad (1.9)$$

(h una función determinística) es denso en $L^2(\mathcal{F}_t, P)$

Demostración. La idea de la demostración es usar el hecho que, si el complemento ortogonal de un conjunto es $\{0\}$, entonces el conjunto es denso en espacio.

Sea $g \in L^2(\mathcal{F}_t, P)$ ortogonal a todas las funciones de tipo (1.9), entonces se define una nueva función G como sigue

$$G(\lambda) = \int_{\Omega} \exp \{ \lambda_1 B_{t_1} + \dots + \lambda_n B_{t_n} \} g(w) dP(w)$$

note que por ortogonalidad la integral da 0. Entonces $\forall \lambda \in \mathbb{R}^n$ y $\forall t_i \in [0, T], i = 1, \dots, n$ la función $G(\lambda) = 0$ y tenemos que $G(\lambda)$ es analítica en \mathbb{R}^n y entonces tiene una extensión analítica en \mathbb{C}^n y en particular para todo $y \in \mathbb{R}^n$, $G(iy) = 0$.

Sea ahora $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ como en el lema 1.2.10 y usando series de Fourier queremos ver que ϕ es ortogonal a g .

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \phi(B_{t_1}, \dots, B_{t_n}) g(w) dP(w) \\ &= \int_{\Omega} (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \left(\int_{\mathbb{R}^n} \widehat{\phi}(y) e^{-iy \cdot B_t} dy \right) g(w) dP(w) \\ &= (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{\phi}(y) \left(\int_{\Omega} e^{-iy \cdot B_t} g(w) dP(w) \right) dy \\ &= (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{\phi}(y) \left(\int_{\Omega} e^{-i(y_1 B_{t_1} + \dots + y_n B_{t_n})} g(w) dP(w) \right) dy \\ &= (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{\phi}(y) G(iy) dy = 0 \end{aligned}$$

En conclusión g no es solamente ortogonal las combinaciones lineales sino que es ortogonal al subconjunto denso $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ de $L^2(\mathcal{F}_t, P)$ y por lo tanto $g = 0$ para casi todo w y la expansión lineal de (1.9) es densa en $L^2(\mathcal{F}_t, P)$ \square \square

Teorema 1.2.12. Teorema de Representación de Itô

Sea $F \in L^2(\mathcal{F}_t, P)$, entonces existe un único proceso estocástico $f(t, w) \in \mathcal{V}(0, T)$ tal que

$$F(w) = E[F] + \int_0^T f(t, w) dB_t$$

Demostración. Veamos el resultado para funciones de tipo (1.9) y luego en general aproximamos, usando el lema anterior.

Sea

$$F(w) = \exp \left\{ \int_0^T h(t) dB_t(w) - \frac{1}{2} \int_0^T h^2(t) dt \right\}, \quad h \in L^2[0, T]$$

Usando la fórmula de Itô para

$$Y_t(w) = \exp \left\{ \int_0^t h(s) dB_s(w) - \frac{1}{2} \int_0^t h^2(s) ds \right\}, \quad t \in [0, T]$$

tenemos que

$$dY_t = Y_t \left(h(t) dB_t - \frac{1}{2} h^2(t) dt \right) + \frac{1}{2} Y_t (h(t) dB_t)^2$$

y entonces

$$dY_t = Y_t h(t) dB_t$$

que en su forma integral es

$$Y_t = 1 + \int_0^t Y_s h(s) dB_s \quad \text{para } t \in [0, T]$$

y para $t = T$

$$F = Y_T = 1 + \int_0^T Y_s h(s) dB_s$$

entonces $E[F] = 1$ y el resultado se tiene para funciones del tipo (1.9).

Ahora si $F \in L^2(\mathcal{F}_t, P)$, aproximamos la función F por combinaciones lineales de funciones tipo (1.9), llamemoslas F_n , entonces para cada n .

$$F_n(w) = E[F_n] + \int_0^T f_n(s, w) dB_s(w) \quad \text{con } f_n \in \mathcal{V}(0, T)$$

y para dos índices n, m tenemos que

$$\begin{aligned}
& E[(F_n - F_m)^2] \\
&= E\left[\left(E[F_n - F_m] + \int_0^T (f_n - f_m)dB_s\right)^2\right] \\
&= E\left[E[F_n - F_m]^2 + 2E[F_n - F_m] \int_0^T (f_n - f_m)dB_s(w) + \left(\int_0^T (f_n - f_m)dB_s(w)\right)^2\right] \\
&= E[F_n - F_m]^2 + 2E[F_n - F_m]E\left[\int_0^T (f_n - f_m)dB_s(w)\right] + E\left[\left(\int_0^T (f_n - f_m)dB_s(w)\right)^2\right] \\
&= E[F_n - F_m]^2 + E\left[\int_0^T (f_n - f_m)^2 ds\right] \rightarrow 0 \text{ Cuando } m, n \rightarrow \infty
\end{aligned}$$

entonces $\{f_n\}$ es una sucesión de Cauchy en $L^2(P \times dt)$ y por lo tanto convergente a $f \in L^2(P \times dt)$, más aún como los $f_n \in \mathcal{V}$, también $f \in \mathcal{V}$ y obtenemos el resultado

$$F = \lim_{n \rightarrow \infty} F_n = \lim_{n \rightarrow \infty} E[F_n] + \int_0^T f_n dB_s = E[F] + \int_0^T f dB_s$$

Para demostrar la unicidad, veamos que si

$$F = E[F] + \int_0^T f_1 dB_s = E[F] + \int_0^T f_2 dB_s$$

con $f_1, f_2 \in \mathcal{V}$, entonces debemos tener que

$$\int_0^T f_1 dB_s = \int_0^T f_2 dB_s$$

usando nuevamente la isometría de Itô obtenemos

$$0 = E\left[\left(\int_0^T (f_1 - f_2)dB_s\right)^2\right] = \int_0^T E[(f_1 - f_2)^2] ds$$

y entonces $f_1(s, w) = f_2(s, w)$ para casi todo $(s, w) \in [0, T] \times \Omega$ □ □

Teorema 1.2.13. Teorema de Representación de Martingalas

Sea M_t una \mathcal{F}_t -martingala con respecto a P y tal que $M_t \in L^2(P)$ para todo $t \geq 0$. Entonces existe un único proceso estocástico $g(s, w) \in \mathcal{V}^{(n)}(0, t)$ para todo $t \geq 0$ que cumple

$$M_t = E[M_0] + \int_0^t g(s, w)dB_s \quad c.s., \forall t \geq 0$$

Demostración. Usando el teorema 1.2.12, sabemos que para cada $t \in [0, T]$ y $M_t \in L^2(P)$, \mathcal{F}_t adaptada, existe una única f_t que cumple

$$M_t(w) = E[M_t] + \int_0^t f_t(s, w)dB_s = E[M_0] + \int_0^t f_t(s, w)dB_s$$

y nosotros necesitamos construir una f única para todo t , lo cual se hace usando lo siguiente.

Si $t_1, t_2 \in [0, T]$, con $t_1 < t_2$. Como la integral de Itô es una martingala entonces

$$\begin{aligned} M_{t_1} = E[M_{t_2} | \mathcal{F}_{t_1}] &= E[M_0] + E \left[\int_0^{t_2} f_{t_2}(s, w) dB_s \mid \mathcal{F}_{t_1} \right] \\ &= E[M_0] + \int_0^{t_1} f_{t_2}(s, w) dB_s \end{aligned}$$

por lo que tenemos la igualdad

$$M_{t_1} = E[M_0] + \int_0^{t_1} f_{t_1}(s, w) dB_s = E[M_0] + \int_0^{t_1} f_{t_2}(s, w) dB_s$$

y entonces

$$\int_0^{t_1} E \left[(f_{t_1} - f_{t_2})^2(s, w) ds \right] = E \left[\left(\int_0^{t_1} (f_{t_1} - f_{t_2})(s, w) dB_s \right)^2 \right] = 0$$

finalmente concluimos que $f_{t_1} = f_{t_2}$ para casi todo $(s, w) \in [0, t_1] \times \Omega$ es decir que las funciones coinciden hasta t_1 . Usando el hecho que la funciones coinciden, definimos $f(s, w) = f_T(s, w)$ para cada $s \in [0, T]$ y así obtenemos el resultado

$$M_t = E[M_0] + \int_0^t f(s, w) dB_s = E[M_0] + \int_0^t f(s, w) dB_s$$

□

□

1.2.5. Teorema de Girsanov

En esta sección demostraremos el teorema de Girsanov que dá condiciones para que un proceso estocástico sea un movimiento browniano bajo un "adecuado" cambio de medida. Para llegar a dicho teorema primero demostraremos un lema, que es una versión de la regla de Bayes.

Lema 1.2.14. *Sea $\Theta \in L^1(P)$, no negativa y tal que $d\mu = \Theta dP$ define una medida de probabilidad $\left(\mu(A) = \int_A \Theta dP \right)$, entonces para cualquier σ -álgebra $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$ y $X \in L^1(\mu)$ se cumple*

$$E_\mu [X | \mathcal{G}] = \frac{E_P [X\Theta | \mathcal{G}]}{E_P [\Theta | \mathcal{G}]}, \quad \mu \text{ casi seguramente.}$$

Donde notamos $E_\mu[\cdot]$ el valor esperado con respecto a la medida μ y $E_P[\cdot]$ el valor esperado con respecto a la medida P .

Demostración. Dados \mathcal{G} y X como en el enunciado entonces tenemos que

$$E_P [|X\Theta|] = \int_\Omega |X\Theta| dP = \int_\Omega |X|\Theta dP = \int_\Omega |X| d\mu < \infty \quad (1.10)$$

de tal forma que $E_P[X\Theta|\mathcal{G}]$ está definido. Ahora que dado $G \in \mathcal{G}$, por definición del valor esperado condicional se tiene

$$\begin{aligned} \int_G E_P[X\Theta|\mathcal{G}] dP &= \int_G X\Theta dP \\ &= \int_G X d\mu \\ &= \int_G E_\mu[X|\mathcal{G}] d\mu \end{aligned}$$

por otra parte

$$\begin{aligned} \int_G E_\mu[X|\mathcal{G}] d\mu &= \int_G E_\mu[X|\mathcal{G}] \Theta dP \\ \text{Usando que } \int_G Z dP &= \int_G E_P[Z|\mathcal{G}] dP \\ &= \int_G E_P[E_\mu[X|\mathcal{G}] \Theta|\mathcal{G}] dP \\ \text{Como } E_\mu[X|\mathcal{G}] &\text{ es } \mathcal{G}\text{-medible} \\ &= \int_G E_\mu[X|\mathcal{G}] E_P[\Theta|\mathcal{G}] dP \end{aligned}$$

y entonces

$$E_P[X\Theta|\mathcal{G}] = E_\mu[X|\mathcal{G}] E_P[\Theta|\mathcal{G}]$$

Por lo que se tiene el resultado. \square \square

Ahora, si $h(t)$ es \mathcal{F}_t medible para todo $t \in [0, T]$ y $h \in L^2(P)$ entonces se puede definir el proceso $\mathcal{E}_h(t)$ con $t \in [0, T]$ como sigue

$$\mathcal{E}_h(t) = \exp \left[\int_0^t h(s) dB_s - \frac{1}{2} \int_0^t |h(s)|^2 ds \right]$$

el cual resulta ser una P -martingala (ver el teorema 1.1.8) y definimos la medida $dQ = \mathcal{E}_h(T) dP$, dada por

$$Q(A) = \int_A \mathcal{E}_h(T) dP, \quad A \in \mathcal{F} \quad (1.11)$$

Lema 1.2.15. Sea $h(t)$, \mathcal{F}_t medible para todo $t \in [0, T]$ y $h \in L^2(P)$ y tal que para todo t , $E[\mathcal{E}_h(t)] = 1$. Entonces un proceso X_t , \mathcal{F}_t adaptado es una Q -martingala si y sólo si, $X_t \mathcal{E}_h(t)$ es una P -martingala.

Demostración. Supongamos que $s \leq t$.

Como $dQ = \mathcal{E}_h(t) dP$ se puede ver que las siguientes afirmaciones son equivalentes

1. X_t es Q integrable
2. $X_t \mathcal{E}_h(t)$ es P integrable

3. $X_t \mathcal{E}_h(t)$ es P integrable

Si $X_t \mathcal{E}_h(t)$ es P integrable, entonces por el lema anterior se tiene

$$E_Q[X_t | \mathcal{F}_s] = \frac{E_P[X_t \mathcal{E}_h(T) | \mathcal{F}_s]}{E_P[\mathcal{E}_h(T) | \mathcal{F}_s]} \quad (1.12)$$

y como $\mathcal{E}_h(t)$ es una P -martingala entonces $E_P[\mathcal{E}_h(t) | \mathcal{F}_s] = \mathcal{E}_h(s)$.

Veamos que la condición es suficiente (\Leftarrow)

Sea $X_t \mathcal{E}_h(t)$ es una P -martingala, entonces

$$\begin{aligned} E_P[X_t \mathcal{E}_h(T) | \mathcal{F}_s] &= E_P[E_P[X_t \mathcal{E}_h(T) | \mathcal{F}_t] | \mathcal{F}_s] \quad \text{pues } \mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t \\ &= E_P[X_t E_P[\mathcal{E}_h(T) | \mathcal{F}_t] | \mathcal{F}_s] \\ &= E_P[X_t \mathcal{E}_h(t) | \mathcal{F}_s] \\ &= X_s \mathcal{E}_h(s) \end{aligned}$$

y usando (1.12) tenemos

$$E_Q[X_t | \mathcal{F}_s] = \frac{X_s \mathcal{E}_h(s)}{\mathcal{E}_h(s)} = X_s$$

Por lo que X_t es una Q -martingala.

Y veamos ahora que la condición es necesaria (\Rightarrow)

Conversamente, si X_t es una Q -martingala tenemos

$$E_P[X_t \mathcal{E}_h(t) | \mathcal{F}_s] = E_P[X_t \mathcal{E}_h(T) | \mathcal{F}_s]$$

y nuevamente usando el lema anterior

$$E_P[X_t \mathcal{E}_h(T) | \mathcal{F}_s] = E_Q[X_t | \mathcal{F}_s] E_P[\mathcal{E}_h(t) | \mathcal{F}_s] = X_s \mathcal{E}_h(s)$$

Por lo que $X_t \mathcal{E}_h(t)$ es una P -martingala. □ □

Teorema 1.2.16. Teorema de Girsanov

Sea $h(t) \in L^2(P)$ para todo $t \in [0, T]$, \mathcal{F}_t adaptada y asumamos $E_P[\mathcal{E}_h(t)] = 1$ para todo $t \in [0, T]$ y

$$W_t = B_t - \int_0^t h(s) ds, \quad t \in [0, T]$$

donde B_t es un movimiento browniano estándar, entonces W_t es un movimiento browniano con respecto a $dQ = \mathcal{E}_h(T) dP$

Demostración. Primero note que las medidas P y Q son equivalentes pues para un $A \subset \Omega$, se tiene $E_Q[\chi_A] = E_P[\chi_A \mathcal{E}_h(T)] = E_P[\chi_A]$. Entonces tenemos que $Q\{W_0 = 0\} = 1$ y que W_t es un proceso estocástico continuo.

Ahora, veamos que aplicando la fórmula de Itô a $\mathcal{E}_h(t)$ tenemos que

$$d\mathcal{E}_h(t) = h(t) \mathcal{E}_h(t) dB_t$$

y usando la regla del producto

$$\begin{aligned}
d(W_t \mathcal{E}_h(t)) &= \mathcal{E}_h(t) dW_t + W_t d\mathcal{E}_h(t) + dW_t \cdot d\mathcal{E}_h(t) \\
&= \mathcal{E}_h(t)(dB_t - h(t)dt) + W_t(h(t)\mathcal{E}_h(t)dB_t) + (dB_t - h(t)dt) \cdot (h(t)\mathcal{E}_h(t)dB_t) \\
&= \mathcal{E}_h(t)dB_t - \mathcal{E}_h(t)h(t)dt + W_t h(t)\mathcal{E}_h(t)dB_t + h(t)\mathcal{E}_h(t)dt \\
&= (1 + W_t h(t))\mathcal{E}_h(t)dB_t
\end{aligned}$$

o en forma integral

$$W_t \mathcal{E}_h(t) = \int_0^t (1 + W_s h(s)) \mathcal{E}_h(s) dB_s$$

por lo que se concluye que $W_t \mathcal{E}_h(t)$ al ser una integral de Itô es un P -martingala y concluimos que W_t es una Q -martingala, haciendo uso del teorema anterior.

Ahora verificamos lo mismo para $W_t^2 - t$. Haciendo uso de la fórmula de Itô con $g(x, t) = x^2 - t$

$$\begin{aligned}
d(W_t^2 - t) &= -dt + 2W_t dW_t + \frac{1}{2} 2(dW_t)^2 \\
&= -dt + 2W_t dW_t + (dB_t - h(t)dt)^2 \\
&= -dt + 2W_t dW_t + dt \\
&= 2W_t dW_t
\end{aligned}$$

y si hacemos

$$\begin{aligned}
&d((W_t^2 - t)\mathcal{E}_h(t)) \\
&= \mathcal{E}_h(t)d(W_t^2 - t) + (W_t^2 - t)d\mathcal{E}_h(t) + d(W_t^2 - t) \cdot d\mathcal{E}_h(t) \\
&= \mathcal{E}_h(t)(2W_t dW_t) + (W_t^2 - t)(h(t)\mathcal{E}_h(t)dB_t) + (2W_t dW_t) \cdot (h(t)\mathcal{E}_h(t)dB_t) \\
&= \mathcal{E}_h(t)2W_t(dB_t - h(t)dt) + (W_t^2 - t)(h(t)\mathcal{E}_h(t)dB_t) + (2W_t(dB_t - h(t)dt)) \cdot (h(t)\mathcal{E}_h(t)dB_t) \\
&= 2\mathcal{E}_h(t)W_t dB_t - 2\mathcal{E}_h(t)W_t h(t)dt + (W_t^2 - t)h(t)\mathcal{E}_h(t)dB_t + 2W_t h(t)\mathcal{E}_h(t)dt \\
&= 2\mathcal{E}_h(t)W_t dB_t + (W_t^2 - t)h(t)\mathcal{E}_h(t)dB_t \\
&= (2W_t + (W_t^2 - t)h(t))\mathcal{E}_h(t)dB_t
\end{aligned}$$

Lo que en forma integral es

$$(W_t^2 - t)\mathcal{E}_h(t) = \int_0^t (2W_s + (W_s^2 - s)h(s))\mathcal{E}_h(s)dB_s$$

Entonces $(W_t^2 - t)\mathcal{E}_h(t)$ es un P -martingala y por lo tanto $W_t^2 - t$ es una Q -martingala, de nuevo por el lema anterior. Finalmente haciendo uso de el teorema 1.1.3 de caracterización de martingalas (Levy) concluimos que W_t es un movimiento browniano con respecto a Q . □

1.3. Ecuaciones Diferenciales Estocásticas

En esta sección se mostrará un resultado que asegura la existencia y unicidad de soluciones para ecuaciones diferenciales estocásticas. Lo que, como su nombre lo indica, quiere decir que interviene una integral estocástica. Primero revisamos un resultado que nos ayudará con el teorema principal.

Teorema 1.3.1. Desigualdad de Bellman-Gronwall

Sea $\phi \in L^1[0, T]$, tal que

$$\phi(t) \leq f(t) + \beta \int_0^t \phi(s) ds \quad \forall t \in [0, T]$$

donde $f \in L^1[0, T]$ y β una constante positiva, entonces

$$\phi(t) \leq f(t) + \beta \int_0^t f(s) e^{\beta(t-s)} ds$$

En particular si f es constante ($f(t) = \alpha$) entonces

$$\phi(t) \leq \alpha e^{\beta t}$$

Demostración. Sea $g(t) = \int_0^t \phi(s) ds$, $\forall t \in [0, T]$ entonces haciendo uso del teorema fundamental del cálculo

$$g'(t) = \phi(t) \leq f(t) + \beta g(t)$$

por lo que

$$g'(t) - \beta g(t) \leq f(t)$$

multiplicando por el factor integrante $e^{-\beta t}$ tenemos

$$d(e^{-\beta t} g(t)) = g'(t)e^{-\beta t} - \beta e^{-\beta t} g(t) \leq f(t)e^{-\beta t}$$

Integrando de 0 a t

$$e^{-\beta t} g(t) \leq \int_0^t f(s) e^{-\beta s} ds$$

y despejando

$$g(t) \leq \int_0^t f(s) e^{\beta(t-s)} ds$$

reemplazando en la ecuación inicial para ϕ

$$\phi(t) \leq f(t) + \beta g(t) \leq f(t) + \beta \int_0^t f(s) e^{\beta(t-s)} ds$$

□

□

Ahora que si $f(t) = \alpha$, entonces tenemos

$$\begin{aligned} \phi(t) &\leq \alpha + \beta \alpha \int_0^t e^{\beta(t-s)} ds \\ &= \alpha - \alpha \left(e^{\beta(t-s)} \right) \Big|_0^t \\ &= \alpha - \alpha + \alpha e^{\beta t} \\ &= \alpha e^{\beta t} \end{aligned}$$

□

Teorema 1.3.2. Existencia y unicidad de solución para ecuaciones diferenciales estocásticas

Sea $T > 0$, sean $b(\cdot, \cdot) : [0, T] \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ y $\sigma(\cdot, \cdot) : [0, T] \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n \times m}$ funciones medibles que satisfacen.

$$|b(t, x)| + |\sigma(t, x)| \leq C(1 + |x|) \quad x \in \mathbb{R}^n, t \in [0, T] \quad (1.13)$$

para alguna constante C y tal que

$$|b(t, x) - b(t, y)| + |\sigma(t, x) - \sigma(t, y)| \leq D|x - y| \quad x, y \in \mathbb{R}^n, t \in [0, T] \quad (1.14)$$

siendo $|\cdot|$ es la norma euclidiana y D una constante. Sea Z una variable aleatoria independiente de $\mathcal{F}_\infty (= \sigma(B_s, s \geq 0))$ tal que $E[|Z|^2] < \infty$. Entonces, la ecuación diferencial estocástica

$$\begin{aligned} dX_t &= b(t, X_t)dt + \sigma(t, X_t)dB_t \quad 0 \leq t \leq T \\ X_0 &= Z \end{aligned} \quad (1.15)$$

Tiene una única solución t -continua $X_t(\omega)$ con la propiedad que $X_t(\omega)$ es adaptada a $\mathcal{F}_t^Z (= \sigma(Z; B_s, 0 \leq s \leq T))$ y $E\left[\int_0^T |X_t|^2 dt\right] < \infty$

Observación. La ecuación (1.13) se llama **condición de crecimiento polinomial** y nos asegura que $|X_t|$ no tiende a ∞ en tiempo finito.

Observación. La ecuación (1.14) se llama **condición de Lipschitz** y nos asegura que $X(t, \omega)$ es única para casi todo $t \leq T$, como se verá en la demostración de unicidad de solución.

Demostración. Unicidad

Sean X_t, Y_t dos soluciones de (1.15) con condición inicial $X_0 = Y_0 = Z$, entonces haciendo uso de la desigualdad $2(a^2 + b^2) \geq (a + b)^2$ tenemos

$$\begin{aligned} E[|X_s - Y_s|^2] &= E\left[\left|\int_0^s (b(s, X_s) - b(s, Y_s))ds + \int_0^s (\sigma(s, X_s) - \sigma(s, Y_s))dB_s\right|^2\right] \\ &\leq 2\left(E\left[\left|\int_0^s (b(s, X_s) - b(s, Y_s))ds\right|^2\right] + E\left[\left|\int_0^s (\sigma(s, X_s) - \sigma(s, Y_s))dB_s\right|^2\right]\right) \\ &= 2\left(E\left[\left|\int_0^s (b(s, X_s) - b(s, Y_s))ds\right|^2\right] + \int_0^s E[(\sigma(s, X_s) - \sigma(s, Y_s))^2] ds\right) \\ &\quad \text{Como } b(t, x) \text{ es medible, aplicamos la desigualdad de Hölder} \\ &\leq 2\left(t \int_0^s E[(b(s, X_s) - b(s, Y_s))^2] ds + \int_0^s E[(\sigma(s, X_s) - \sigma(s, Y_s))^2] ds\right) \\ &\quad \text{Usando (1.14)} \\ &= 2(1 + t)D^2 \int_0^s E[(X_s - Y_s)^2] ds \end{aligned}$$

Si llamamos $\phi = E[|X_t - Y_t|^2]$, $f = 0$ y $\beta = 3(1+t)D^2$, aplicamos la desigualdad de Bellman-Gronwall con f constante y obtenemos

$$E[|X_t - Y_t|^2] \leq 0e^{\beta t} = 0$$

Entonces se tiene que $E[|X_t - Y_t|^2] = 0$ para todo $t \geq 0$ así que

$$P[|X_t - Y_t| = 0 \quad \forall t \in \mathbb{Q} \cap [0, T]] = 1$$

Y como $t \rightarrow |X_t - Y_t|$ es continua entonces

$$P[|X_t - Y_t| = 0 \quad \forall t \in [0, T]] = 1$$

Con lo que se demuestra la unicidad.

Existencia

Para la existencia usaremos una técnica de ecuaciones diferenciales ordinarias.

Sea $Y_t^{(0)} = X_0$ e inductivamente definimos $Y_t^{(k)}$ usando la versión integral de (1.15)

$$Y_t^{(k+1)} = X_0 + \int_0^t b(s, Y_s^{(k)})ds + \int_0^t \sigma(s, Y_s^{(k)})dB_s$$

y vamos a ver que la sucesión de $Y_t^{(k)}$, $k = 0, 1, 2, \dots$ es una sucesión de Cauchy en $L^2(P \times dt)$ y por tanto convergente y que converge a la solución de (1.15).

Por un proceso similar al hecho para la existencia tenemos que

$$E[|Y_t^{(k+1)} - Y_t^{(k)}|^2] \leq 3(1+T)D^2 \int_0^t E[|Y_s^{(k)} - Y_s^{(k-1)}|^2] ds$$

para $k \geq 1$ y $t \leq T$, así que para solucionar la ecuación recursiva sólo debemos hallar el

primer término de la sucesión ($k = 1$).

$$\begin{aligned}
E[|Y_t^{(1)} - Y_t^{(0)}|] &= E\left[\left|X_0 - X_0 + \int_0^t b(s, X_0)ds + \int_0^t \sigma(s, X_0)dB_s\right|^2\right] \\
&= E\left[\left|\int_0^t b(s, X_0)ds + \int_0^t \sigma(s, X_0)dB_s\right|^2\right] \\
&\quad \text{Usando } (a + b)^2 \leq 2(a^2 + b^2) \\
&= 2E\left[\left|\int_0^t b(s, X_0)ds\right|^2\right] + 2E\left[\left|\int_0^t \sigma(s, X_0)dB_s\right|^2\right] \\
&\quad \text{Aplicando la desigualdad de Hölder a } b(t, x) \\
&= 2t \int_0^t E[b^2(s, X_0)]ds + 2E\left[\left|\int_0^t \sigma(s, X_0)dB_s\right|^2\right] \\
&\quad \text{Usando la isometría de Itô en } \sigma(t, x) \\
&\leq 2t \int_0^t E[b^2(s, X_0)]ds + 2 \int_0^t E[\sigma^2(s, X_0)]ds \\
&\quad \text{Usando (1.13)} \\
&\leq 2(1+t)C^2 \int_0^t 1 + E[X_0^2]ds \\
&\leq 2(1+T)C^2 \int_0^t 1 + E[X_0^2]ds \\
&\leq 2(1+T)C^2(1 + E[X_0^2])t = \alpha t
\end{aligned}$$

usando $\alpha = 2(1+T)C^2(1 + E[X_0^2])$. La ecuación recursiva queda

$$E[|Y_t^{(k+1)} - Y_t^{(k)}|] = \frac{\alpha \beta^k t^{k+1}}{(k+1)!} \quad k \geq 0, 0 \leq t \leq T$$

siendo $\beta = 3(1+T)D^2$.

Ahora si $m > n \geq 0$, entonces

$$\begin{aligned}
\|Y_t^{(m)} - Y_t^{(n)}\|_{L^2(P \times dt)} &= \left\| \sum_{k=n}^{m-1} Y_t^{(k+1)} - Y_t^{(k)} \right\|_{L^2(P \times dt)} \\
&\leq \sum_{k=n}^{m-1} \|Y_t^{(k+1)} - Y_t^{(k)}\|_{L^2(P \times dt)} \\
&= \sum_{k=n}^{m-1} \left(E \left[\int_0^T (Y_t^{(k+1)} - Y_t^{(k)})^2 dt \right] \right)^{1/2} \\
&\leq \sum_{k=n}^{m-1} \left(\int_0^T E \left[(Y_t^{(k+1)} - Y_t^{(k)})^2 \right] dt \right)^{1/2} \\
&\leq \sum_{k=n}^{m-1} \left(\int_0^T \frac{\alpha \beta^k T^{k+1}}{(k+1)!} dt \right)^{1/2} \\
&= \sum_{k=n}^{m-1} \left(\frac{\alpha \beta^k t^{k+2}}{(k+2)!} \right)^{1/2} \rightarrow 0 \quad \text{cuando } m, n \rightarrow \infty.
\end{aligned}$$

Entonces Y_t^n es una sucesión de Cauchy y por tanto convergente en $L^2(P \times dt)$. Sea $X_t = \lim_{n \rightarrow \infty} Y_t^{(n)}$ límite tomado en $L^2(P \times dt)$, así definido X_t es \mathcal{F}_t^Z -medible para todo t , pues para todo n y $t \in [0, T]$ ($Y_t^{(n)}$) lo es.

Demostremos ahora que X_t es solución de la ecuación diferencial (1.15).

Para toda n y toda $t \in [0, T]$

$$Y_t^{(n+1)} = X_0 + \int_0^t b(s, Y_s^{(n)}) ds + \int_0^t \sigma(s, Y_s^{(n)}) dB_s$$

ahora cuando $n \rightarrow \infty$ y haciendo uso de la desigualdad de Hölder se tiene que

$$\int_0^t b(s, Y_s^{(n)}) ds \rightarrow \int_0^t b(s, X_s) ds \quad \text{en } L^2(P \times dt)$$

Haciendo uso de la Isometría de Itô, tenemos

$$\int_0^t \sigma(s, Y_s^{(n)}) dB_s \rightarrow \int_0^t \sigma(s, X_s) dB_s$$

Entonces

$$X_t = X_0 + \int_0^t b(s, X_s) ds + \int_0^t \sigma(s, X_s) dB_s$$

y este X_t es continua. □

Observación. En la demostración anterior al decir que X_t es continua quiere decir que, según el teorema 1.2.4 existe una versión continua de la solución de a integral estocástica, usaremos directamente la versión continua.

Preliminares Financieros

2.1. Introducción

La **Teoría de finanzas** emerge como disciplina con el premio Nobel en economía de Harry Markowitz, William Sharpe y Merton Miller en 1990, en el intento de comprender las interacciones que intervienen en los mercados financieros. El avance de la teoría de finanzas la ha convertido paulatinamente en teoría de matemáticas, hasta el punto que los problemas en finanzas son ahora un área de investigación matemática.

La tesis de doctorado de Harry Markowitz, *Portfolio Selection* [29], sentó las bases para la teoría matemática de las finanzas, Markowitz desarrolló una noción de retorno medio y covarianzas para acciones ordinarias que le permitían cuantificar el concepto de “diversificación” en un mercado.

En 1969, Robert Merton introdujo el cálculo estocástico en el estudio de las finanzas, por lo que el lenguaje de finanzas ahora involucra cálculo estocástico (Cálculo de Itô). Merton fue motivado por el deseo de entender cómo se fijan los precios en mercados financieros, lo que es la pregunta económica clásica de “Equilibrio”, y posteriormente usó toda la maquinaria del cálculo estocástico en la investigación de este tema, fué este momento el que generó un nuevo periodo en las matemáticas financieras con el trabajo realizado al mismo tiempo por Fisher Black y Myron Scholes con la tan celebrada fórmula de Black-Scholes para evaluar (valorizar) Opciones Europeas, trabajo que les hizo merecedores del premio Nobel en economía en 1997.

Para poder hablar de finanzas es necesario conocer el lenguaje financiero, el cual será introducido paulatinamente, empecemos mirando:

- ¿Qué es una inversión? Una inversión es una estrategia de negociación mediante la cual a través de movimientos de bienes o capital se pretende obtener un beneficio económico. Son de nuestro interés tres formas de inversión, que son:

- Bonos. Son títulos valores, por los cuales se adquiere el compromiso de pagar una cantidad prefijada en un tiempo futuro. Estos bonos usualmente pactan una tasa de interés y se cobran en un tiempo futuro.

- Acciones. Son títulos valores de un bien subyacente tal como una porción de una compañía y le dan derecho de propiedad sobre este bien.
- Opciones o Derivados. Son instrumentos financieros, cuyo precio está sujeto a una acción y buscan neutralizar el riesgo. Los más comunes son las opciones que le dan al tenedor el derecho pero no la obligación de negociación (compra o venta de un bien).

Estos mecanismos de inversión se denominan **activos**.

Hay unos supuestos básicos que deben tenerse en consideración para el funcionamiento del mercado y esos son los siguientes.

1. Es posible rebalancear las tenencias sin incurrir en costos, es decir, vender unos activos y con el dinero de la venta comprar otros activos (hipótesis de autofinanciamiento)
2. Los inversionistas no tienen información privilegiada que les permita predecir valores futuros (hipótesis de no arbitraje).
3. Las acciones de un solo inversionista no deben generar repercusiones en el mercado (hipótesis de pequeño inversionista).
4. El capital inicial de cada inversionista es fijo.
5. El capital que no es invertido en acciones es invertido en bonos, es decir que no se puede tener sobrantes de dinero.
6. Los activos son perfectamente divisibles, es decir que se puede comprar o vender cualquier cantidad de activos o partes de estos.

Los conceptos de finanzas en lo que sigue serán descritos a medida que se vayan necesitando.

2.2. Modelo de Cox-Ross-Rubinstein

En este modelo vamos a considerar que se negocian dos activos los cuales son un bono y una acción, consideraremos T periodos de tiempo y en cada uno de los periodos se puede tomar decisiones sobre la distribución del capital.

Al principio contamos con un capital x , el precio de la acción en el tiempo 0 ($t = 0$) es $P_1(0) > 0$ y se compran Δ_0 acciones. Para el bono se invierte $P_0(0)$ en el tiempo 0 y como no hay sobrantes de dinero en el bono se invierte $P_0(0) = x - \Delta_0 P_1(0)$. Por lo que el capital en el tiempo 0 está distribuido de la siguiente forma

$$x = \Delta_0 P_1(0) + P_0(0)$$

El bono (dependiente del tiempo) evoluciona de forma determinística según la siguiente fórmula.

$$\begin{aligned} P_0(0) &= x - \Delta_0 P_1(0) \\ P_0(t) &= (1 + r)P_0(t - 1) \quad \text{con } t = 1, 2, \dots, T \end{aligned}$$

donde r es la tasa de interés.

Supongamos que se sabe, que en un periodo de tiempo la acción puede tomar dos valores uP_1 donde u denota un factor de subida de precios (i.e. $u > 1$) o cP_1 donde c denota un factor de bajada de precios (i.e. $0 < c < 1$). Entonces el precio de la acción en el siguiente periodo de tiempo es aleatorio y depende del tiempo anterior, por lo que está dado por la siguiente fórmula.

$$P_1(t) = \rho_t P_1(t-1) \quad P_1(0) = x$$

donde ρ_t es la variable aleatoria correspondiente al tiempo t y toma los valores u y c con probabilidad p y $1-p$ respectivamente, siendo $p \in (0, 1)$, como para cada tiempo t hay una ρ_t , asumiremos que estas variables son independientes.

Con esto, podemos deducir que la ecuación que modela el capital que tenemos en el tiempo 1 es

$$X_1 = \Delta_0 P_1(1) + (1+r)(x - \Delta_0 P_1(0))$$

Una observación importante es que el valor $(x - \Delta_0 P_1(0))$ puede ser negativo en cuyo caso supondremos que es un préstamo del banco y el interés (r) es el mismo que el de la inversión.

En el tiempo futuro t la ecuación queda

$$X_t = \Delta_{t-1} P_1(t) + (1+r)(X_{t-1} - \Delta_{t-1} P_1(t-1))$$

donde Δ_t denota la cantidad de acciones compradas en el tiempo t .

Para este modelo el problema es cuánto vale el derecho a adquirir un derivado y es resuelto mediante el principio de replicación, el cual iguala el valor de la opción al capital futuro.

En este caso la opción es un **call europeo**, el cuál le da la posibilidad (no obligación) al tenedor de comprar una acción por un **precio de ejercicio** K , lo que nos dice que en el tiempo futuro T si la acción cuesta en el mercado más de K , el tenedor hará ejercicio de su opción y comprará al valor K y el valor de la opción es $P_1(T) - K$, pero si el precio es inferior el tenedor no hará ejercicio de la opción (no comprará) y el valor de ésta será 0, así el valor de la opción se modela como sigue

$$\max\{P_1(T) - K, 0\} = (P_1(T) - K)^+$$

Y usando el principio de replicación se obtiene que:

$$\Delta_{T-1} P_1(T) + (1+r)(X_{T-1} - \Delta_{T-1} P_1(T-1)) = (P_1(T) - K)^+$$

Notación. $V(x, T)$ el valor de la opción, en el tiempo T , con capital inicial x .

Vamos a solucionar la siguiente pregunta. **En este modelo de mercado ¿Cuánto vale el derecho a adquirir un derivado ?**

Solución para $T = 1$. El crecimiento promedio de una acción debe ser mayor que el crecimiento de una inversión en bonos porque, en cierta forma, este crecimiento mayor compensa el riesgo de invertir en acciones, por eso se tiene

$$(1+r)P_1(0) \leq puP_1(0) + (1-p)cP_1(0) \quad (2.1)$$

Al valor de p que hace que se cumpla la igualdad (en la desigualdad anterior (2.1)) se le llama la probabilidad de riesgo neutro pues, en la igualdad, el promedio de crecimiento de la acción es el mismo que el del bono, entonces los inversionistas prefieren tener un riesgo neutral, lo que quiere decir que si no hay una compensación por asumir el riesgo en una acción los inversionistas no estarán dispuestos a pagar extra por la acción, esta probabilidad se denota \tilde{p} .

Un concepto fundamental de la teoría de finanzas es el de **arbitraje**, el cual se puede definir como una estrategia que empieza sin capital y sin probabilidad de perder dinero da la posibilidad de ganarlo; otra forma de verlo es la posibilidad de tener información privilegiada que le permita al inversionista obtener ganancias sin riesgo de perder.

Para este modelo una condición necesaria y suficiente para que no haya arbitraje es:

$$0 < c < 1 + r < u \quad (2.2)$$

note que en nuestro caso concuerda con el hecho descrito en la ecuación (2.1).

Retomando, sabemos que el valor de la opción depende de si la acción sube o baja de precio. Denotaremos $V_u(x, T)$ y $V_c(x, T)$ a los valores de la opción en el tiempo T dependiendo si el valor subió o bajó desde el tiempo $(T - 1)$. Por ejemplo, en nuestro caso, $V_u(x, 1) = uP_1(0) - K$ y $V_c(x, 1) = 0$, entonces la ecuación que modela el capital, en el tiempo 1, será:

$$X_1 = \begin{cases} \Delta_0 u P_1(0) + (1 + r)(x - \Delta_0 P_1(0)) = V_u(x, 1), & \text{si sube el precio} \\ \Delta_0 c P_1(0) + (1 + r)(x - \Delta_0 P_1(0)) = V_c(x, 1), & \text{si baja el precio} \end{cases} \quad (2.3)$$

Solucionando ahora para la ecuación de riesgo neutro (2.1) con \tilde{p} tenemos

$$P_1(0) = \frac{\tilde{p}uP_1(0) + (1 - \tilde{p})cP_1(0)}{1 + r} = \frac{P_1(0)}{1 + r}(c + (u - c)\tilde{p})$$

de donde se obtiene $\tilde{p} = \frac{1 + r - c}{u - c}$

Ahora, restando las dos ecuaciones de 2.3 se tiene

$$\Delta_0(uP_1(0) - cP_1(0)) = V_u(x, 1) - V_c(x, 1)$$

Al despejar se obtiene la llamada fórmula delta de cubrimiento (Delta-hedging fórmula):

$$\Delta_0 = \frac{V_u(x, 1) - V_c(x, 1)}{uP_1(0) - cP_1(0)}$$

la cual indica que si en el tiempo cero, con un capital inicial $x = \frac{1}{1+r}(\tilde{p}V_u(x, 1) + (1 - \tilde{p})V_c(x, 1))$, se compran Δ_0 acciones, entonces en el tiempo $T = 1$ se llegarán a los valores $V_u(x, 1)$ o $V_c(x, 1)$ dependiendo de si la acción subió o bajó. Así por ejemplo si el precio subió

reemplazamos x y Δ_0 en la ecuación 2.3 y obtenemos

$$\begin{aligned}
& \Delta_0 u P_1(0) + (1+r)(x - \Delta_0 P_1(0)) \\
&= \Delta_0 u P_1(0) + (1+r)x - (1+r)\Delta_0 P_1(0) \\
&= \Delta_0(u-1-r)P_1(0) + (1+r)x \\
&= \frac{V_u(x,1) - V_c(x,1)}{uP_1(0) - cP_1(0)}(u-1-r)P_1(0) + (1+r)\frac{1}{1+r}(\tilde{p}V_u(x,1) + (1-\tilde{p})V_c(x,1)) \\
&= \frac{V_u(x,1) - V_c(x,1)}{(u-c)P_1(0)}(u-1-r)P_1(0) + (\tilde{p}V_u(x,1) + (1-\tilde{p})V_c(x,1)) \\
&= \frac{u-1-r}{(u-c)}(V_u(x,1) - V_c(x,1)) + (\tilde{p}V_u(x,1) + (1-\tilde{p})V_c(x,1)) \\
&= (1-\tilde{p})(V_u(x,1) - V_c(x,1)) + (\tilde{p}V_u(x,1) + (1-\tilde{p})V_c(x,1)) \\
&= V_u(x,1)
\end{aligned}$$

que es lo que se quería.

Finalmente multiplicando por $\frac{\tilde{p}}{1+r}$ la primera ecuación de (2.3), por $\frac{(1-\tilde{p})}{1+r}$ la segunda y sumando se obtiene

$$X_1 = \frac{1}{1+r}(\tilde{p}V_u(x,1) + (1-\tilde{p})V_c(x,1)) = x + \Delta_0 \left(\frac{1}{1+r}(\tilde{p}uP_1(0) + (1-\tilde{p})cP_1(0)) - P_1(0) \right)$$

donde hemos replicado el valor de la opción, por lo que el valor de la opción en el tiempo cero será

$$V(x,0) = \frac{1}{1+r}(\tilde{p}V_u(x,1) + (1-\tilde{p})V_c(x,1))$$

conocida como *fórmula de valuación de riesgo neutro*.

Solución para $T > 1$. Este caso no es más que una generalización del caso anterior, supongamos que tenemos $T > 1$ periodos cumpliendo la ecuación de no arbitraje (2.2), el valor de la opción en el tiempo T es $V(x, T)$ y el método de replicación calcula el valor de V_0 usando las probabilidades de riesgo neutro, por recursión hacia atrás mediante la fórmula

$$V(x, t-1) = \frac{1}{1+r}(\tilde{p}V_u(x, t) + (1-\tilde{p})V_c(x, t))$$

Recuerde que aunque la fórmula es muy fácil de comprender, para calcular $V(x, 0)$ se deberán hacer todos los cálculos de valores de acciones por lo menos hasta el tiempo T (i.e. $P_1(T)$).

2.3. Aproximación de Markowitz para el modelo de un periodo

El modelo de mercado de un periodo, se refiere al modelo de invertir cierta cantidad de dinero en diferentes opciones y analizar cuál será el capital en un tiempo futuro, este modelo nos permite analizar en un periodo las consecuencias de las decisiones tomadas hoy, es decir las decisiones se toman al principio del periodo únicamente y las consecuencias se ven sólo hasta el final de éste.

Consideremos un mercado en el que hay k diferentes opciones con precios p_1, p_2, \dots, p_k mayores que cero para el tiempo 0, es decir $p_i = P_i(0)$, $i = 1, \dots, k$. Al final del periodo (en el tiempo T) los precios de las opciones, siguen siendo positivos pero como no sabemos el valor que tendrán, los modelaremos con variables aleatorias $P_1(T), P_2(T), \dots, P_k(T)$ mayores que cero en un espacio de probabilidad (Ω, \mathcal{F}, P) . Los retornos de las acciones entonces son modelados como

$$R_i = \frac{P_i(T)}{p_i}$$

y para los retornos supondremos que conocemos sus medias, varianzas y covarianzas

$$\begin{aligned} E[R_i(T)] &= \mu_i \\ \text{Cov}[R_i(T), R_j(T)] &= \sigma_{ij} \end{aligned}$$

Nota. La matriz $\sigma = (\sigma_{ij})$ es semidefinida positiva al ser una matriz de covarianzas. Asumimos que cada opción es perfectamente divisible, es decir, podemos mantener $\varphi_i \in \mathbb{R}$ acciones de la opción (en este caso la opción i), y la posibilidad de vender en corto (sell short) se ve representada como $\varphi_i < 0$. Como para nuestro modelo no se permitirá riqueza final negativa, no permitiremos vender en corto, además como ya se había mencionado asumiremos que las transacciones no incurren en costos.

Se asume que un inversionista con capital inicial $x > 0$ posee $\varphi_i \geq 0$ partes de la i -ésima acción.

Definición. La **ecuación de presupuesto** es:

$$\sum_{i=1}^k \varphi_i p_i = x$$

El **vector portafolio** $\vec{\pi} = (\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_k)$ se define como sigue:

$$\pi_i = \frac{\varphi_i p_i}{x}$$

y el **Retorno del Portafolio** está dado por

$$R^\pi = \sum_{i=1}^k \pi_i R_i(T)$$

Observación. El vector portafolio es un vector de probabilidades.

Observación. El retorno del portafolio es lo que gano con respecto a la inversión inicial.

Si X^π denota la riqueza final correspondiente a la riqueza inicial x y al portafolio $\vec{\pi}$, entonces

$$X^\pi = \sum_{i=1}^k \varphi_i P_i(T)$$

y el retorno del portafolio entonces se convierte en

$$R^\pi = \sum_{i=1}^k \pi_i R_i(T) = \sum_{i=1}^k \frac{\varphi_i p_i}{x} \frac{P_i(T)}{p_i} = \sum_{i=1}^k \frac{\varphi_i P_i(T)}{x} = \frac{X^\pi}{x}$$

Es importante medir la media y varianza del retorno de un portafolio pues éstos representan cuánto espera ganar un inversionista y cuál es el riesgo que asume con un portafolio dado y éstos se calculan de la siguiente manera

$$E[R^\pi] = \sum_{i=1}^k \pi_i \mu_i$$

$$Var(R^\pi) = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^k \pi_i \sigma_{ij} \pi_j$$

para elegir un portafolio, tendremos en cuenta dos factores los cuales son la cantidad de dinero que se espera tener en el tiempo T y el riesgo de pérdida de dinero al que se está dispuesto a incurrir, por eso se presentan dos modelos el primero es maximizar el valor esperado pues de esta forma el inversionista esperaría ganar más y el segundo es minimizar la varianza pues de esta forma el inversionista incurre en menos riesgo.

2.3.1. Aproximación de media-varianza

Consideremos cada uno de los casos

1. Consideramos el problema de maximizar el retorno esperado, suponiendo que no queremos incurrir en riesgos mayores a una constante dada, es decir

$$\begin{aligned} & \underset{\vec{\pi} \in \mathbb{R}^k}{\text{máx}} E(R^\pi) & (2.4) \\ \text{sujeto a } & \pi_i \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, k, \quad \sum_{i=1}^k \pi_i = 1, \quad Var(R^\pi) \leq c_1 \end{aligned}$$

Note que el problema dice que entre todos los portafolios se busca escoger el que le da mayor retorno esperado sujeto a que la varianza es menor o igual a c_1 .

2. Consideramos ahora el problema de minimizar el riesgo, suponiendo que esperamos un retorno mínimo, es decir

$$\begin{aligned} & \underset{\vec{\pi} \in \mathbb{R}^k}{\text{mín}} Var(R^\pi) & (2.5) \\ \text{sujeto a } & \pi_i \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, k, \quad \sum_{i=1}^k \pi_i = 1, \quad E[R^\pi] \geq c_2 \end{aligned}$$

Note que el problema dice que entre todos los portafolios se busca escoger el que tiene menor varianza sujeto a que el retorno esperado sea mayor o igual a c_2 .

2.3.2. Metodos de solución

1. El problema (2.4) es una optimización lineal con una restricción cuadrática.
2. El problema (2.5) es un problema de optimización cuadrática con matriz semidefinida positiva, el cual se soluciona con algoritmos de programación cuadrática y si la región factible

$$\max_{1 \leq i \leq d} \pi_i \geq 0$$

no es vacía, el problema tiene una única solución. Ver [23]

Observación. Para que un portafolio sea **autofinanciado** las únicas modificaciones, de distribución de capital, que se admiten en $t > 0$ son entre los activos, es decir no puede entrar ni salir ningún capital extra. Por lo que si se tiene el portafolio (x_t, y_t) , con precios de activos (A_t, B_t) , la condición que debe cumplir para ser autofinanciado es

$$(x_{t+1} - x_t)A_{t+1} + (y_{t+1} - y_t)B_{t+1} = 0$$

2.4. El modelo de Black-Scholes

Este es un modelo continuo lo que quiere decir que las decisiones se toman en cualquier tiempo $t \in [0, T]$. Analicemos primero el modelo de los dos tipos de activos que trabajaremos, el bono y la acción.

1. **El bono.** Comenzando con la ecuación de tiempo discreto podemos decir que para simular el hecho que las decisiones se pueden tomar en varios tiempos intermedios, partimos el intervalo $[0, T]$ en N subintervalos de igual longitud, la ecuación que modela el precio del bono con tasa de interés r y capital inicial p_0 será

$$p_0 \left(1 + \frac{Tr}{N}\right)^N$$

luego para el tiempo continuo lo que se hace es tomar el límite cuando N tiende a infinito. así

$$p_0 \left(1 + \frac{Tr}{N}\right)^N \xrightarrow{N \rightarrow \infty} p_0 e^{rT}$$

es decir que la evolución de los precios del bono ($P_0(t)$) pueden ser vistos mediante la ecuación diferencial

$$dP_0(t) = rP_0(t)dt$$

O más generalmente si la tasa de interés depende del tiempo

$$dP_0(t) = r(t)P_0(t)dt$$

donde $r(t)$ es la tasa de interés en el tiempo t .

2. **La acción.** Se sabe que el precio de una acción es parecido al de un bono pero admitiendo un comportamiento aleatorio, y como premio se obtiene una tasa de interés b_1 mayor que r .

A partir del precio del bono podemos ver que éste es *log* lineal es decir

$$\ln(P_0(t)) = \ln(p_0) + rt$$

Entonces para la acción (P_1) vamos a tomar el mismo modelo del bono (P_0) y vamos a añadirle un ruido. El proceso natural para modelar el factor aleatorio o ruido es el movimiento browniano y lo multiplicamos por un factor de volatilidad σ_{11} obteniendo

$$\ln(P_1(t)) = \ln(p_1) + b_1 t + \sigma_{11} B_t \quad \text{donde } (B_t)_{t \geq 0} \text{ es un movimiento browniano estándar.}$$

y así

$$P_1(t) = p_1 \exp^{b_1 t + \sigma_{11} B_t}$$

Es decir que la evolución de los precios de la acción ($P_1(t)$) pueden ser vistos mediante la ecuación diferencial estocástica

$$dP_1(t) = b_1(t)P_1(t)dt + \sigma_{11}(t)P_1(t)dB_t, \quad p_1 = P_1(0)$$

donde p_1 es el valor inicial de la acción, b_1 el retorno medio y σ_{11} la volatilidad.

Observación. Históricamente el primero en proponer un modelo para describir el precio de activos financieros negociados en bolsa fué Bachelier en su tesis de doctorado "Theorie de la Speculation" [4]. El modelo propuesto por Bachelier en notación actual es:

$$X_t = \nu t + \sigma B_t$$

donde ν , el retorno medio, es \mathcal{F}_t adaptado y σ (la volatilidad) está en $\mathcal{V}[0, T]$.

Este modelo basado en un movimiento browniano con tendencia (drift) no es totalmente correcto, pues B_t es una variable gaussiana y puede tomar valores negativos, lo que lleva a X_t a tomar valores negativos. Para solucionar este inconveniente, en 1965 Samuelson propone que el precio de las acciones se comporte de manera exponencial generando lo que llamamos el movimiento browniano geométrico

$$X_t = X_0 e^{\nu t + \sigma B_t} \tag{2.6}$$

usando la fórmula de Itô con $f(x, t) = e^{\nu t + \sigma x}$, y haciendo $X_t = f(B_t, t)$ se obtiene

$$\begin{aligned} dX_t &= \nu e^{\nu t + \sigma B_t} dt + \sigma e^{\nu t + \sigma B_t} dB_t + \frac{1}{2} \sigma^2 e^{\nu t + \sigma B_t} dt \\ &= \nu X_t dt + \sigma X_t dB_t + \frac{1}{2} \sigma^2 X_t dt \end{aligned}$$

si dividimos la ecuación por X_t se tiene

$$\frac{dX_t}{X_t} = \left(\nu + \frac{1}{2} \sigma^2 \right) dt + \sigma dB_t$$

y solucionando

$$X_t = X_0 \exp\left(\left(\nu + \frac{1}{2}\sigma^2\right)t + \sigma B_t\right)$$

Note que el término $\frac{1}{2}\sigma^2$ proviene de la segunda derivada de la fórmula de Itô así que para que la fórmula del movimiento browniano geométrico quede en términos de μ se usa $\mu = \nu + \frac{1}{2}\sigma^2$ en (2.6) y obtenemos la ecuación que describe el precio de una acción

$$X_t = X_0 \exp\left(\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t + \sigma B_t\right) \quad (2.7)$$

En el modelo general asumiremos que se tiene un bono con precio inicial denotado por P_0 y k activos riesgosos o acciones con precios denotados $P_i(t)$ con $i = 1, \dots, k$. Usando el modelo de las acciones dado por (2.7), tenemos el modelo del mercado dado en la siguiente definición.

Definición. Mercado.

Sean $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}, P)$ un espacio de probabilidad filtrado y B_t un movimiento browniano m -dimensional con respecto a la filtración $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$. La evolución de los precios del bono y las acciones está dada por

$$P_0(t) = p_0 \exp\left(\int_0^t r(s) ds\right) \quad \text{Bono} \quad (2.8)$$

$$P_i(t) = p_i \exp\left(\int_0^t \left(b_i(s) - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^m \sigma_{ij}^2(s)\right) ds + \sum_{j=1}^m \int_0^t \sigma_{ij}(s) dB_j(s)\right) \quad \text{Acciones} \quad (2.9)$$

para $t \in [0, T]$. Las funciones $r(t)$, $b(t) = (b_1(t), b_2(t), \dots, b_k(t))^t$ ¹, $\sigma(t) = (\sigma_{ij}(t))_{ij}$ son procesos adaptados a la filtración \mathcal{F}_t , que representan la tasa de interés del bono, las tasas de interés de las acciones y la matriz de covarianzas, y el término $\frac{1}{2} \sum_{j=1}^m \sigma_{ij}^2(s)$ resulta de aplicar la fórmula de Itô multidimensional.

El **mercado** es el proceso estocástico $(k+1)$ dimensional dado por $P_t = P(t) = (P_0(t), P_1(t), \dots, P_k(t))$

Veamos ahora unos conceptos que se necesitan redefinir para este modelo específico.

- Una **estrategia de negociación** es un proceso estocástico $\varphi(t) = (\varphi_0(t), \varphi_1(t), \dots, \varphi_k(t))^t$ que satisface

$$\int_0^T |\varphi_0(t)| dt < \infty \quad P. \text{ c.s.}$$

y

$$\sum_{i=0}^k \int_0^T (\varphi_i(t) P_i(t))^2 dt < \infty \quad P. \text{ c.s.}$$

y representa la cantidad de unidades que se mantienen de la acción i , en el tiempo t .

¹Si v es una matriz v^t representa la transpuesta (de igual forma si es un vector)

- El **proceso de capital** $X(t)$ está definido por

$$X(t) = X_0 + \sum_{i=0}^k \int_0^t \varphi_i(s) dP_i(s)$$

representa el capital inicial más las ganancias o pérdidas.

- Un **portafolio** en el mercado P_t es un proceso estocástico medible y \mathcal{F}_t adaptado $\vec{\pi}(t) = \vec{\pi}_t = (\pi_1(t), \dots, \pi_k(t))$ recordemos que $\pi_i(t)$ representa el porcentaje del capital que ha sido invertido en la acción $i = 1, \dots, k$, el porcentaje de capital invertido en el bono se denota $\pi_0(t)$.

$$\text{Además } \pi_i(t) = \frac{\varphi_i(t)P_i(t)}{X(t)} \text{ para } i = 1, \dots, k \text{ y } \pi_0(t) = 1 - \sum_{i=1}^k \pi_i(t).$$

- El **valor del portafolio** $\vec{\pi}(t)$ es

$$V^\pi(t) = \sum_{i=0}^k \pi_i(t)P_i(t) = \vec{\pi}_t \cdot P_t \quad (2.10)$$

Nota. Siempre que sea claro del contexto, es decir siempre que sea claro a que portafolio se refiere, se omitirá el superíndice π .

- Un portafolio $\vec{\pi}(t)$ se dice **autofinanciado** en P_t si satisface la siguiente ecuación

$$V(t) = V(0) + \int_0^t \vec{\pi}_s \cdot dP_s$$

o en forma diferencial

$$dV(t) = \vec{\pi}_t \cdot dP_t \quad (2.11)$$

Lo que significa que el dinero no puede ser introducido o sacado del sistema en ningún momento.

- Un portafolio autofinanciado $\vec{\pi}(t)$ se llama **admisible** si su valor está acotado por abajo para casi todo (t, ω) , es decir, existe $C \geq 0$ tal que

$$V(t, \omega) \geq -C, \quad \text{para casi todo } (t, \omega) \in [0, T] \times \Omega$$

Lo que indica que hay una cantidad de deuda máxima que los deudores pueden tolerar (Matemáticamente se usa para asegurar que una martingala local sea una supermartingala).

- Un portafolio admisible $\vec{\pi}_t$ se dice que admite **arbitraje** en el mercado P_t si su valor $V(t)$ satisface

$$V(0) = 0, \quad V(t) \geq 0 \quad \text{y} \quad P\{V(t) > 0\} > 0 \quad \text{para algún } t > 0$$

Las estrategias de negociación que se describen como

$$dX(t) = \sum_{i=0}^k \varphi_i(t) dP_i(t)$$

lo que nos permite deducir una ecuación conocida como la ecuación de capital, de la siguiente manera

$$\begin{aligned}
dX(t) &= \varphi_0(t)dP_0(t) + \sum_{i=1}^k \varphi_i(t)dP_i(t) \\
&= \varphi_0(t)r(t)P_0(t)dt + \sum_{i=1}^k \varphi_i(t)dP_i(t) \\
&= \varphi_0(t)r(t)P_0(t)dt + \sum_{i=1}^k \varphi_i(t) \left(b_i(t)P_i(t)dt + \sum_{j=0}^m \sigma_{ij}(t)P_i(t)dB_j(t) \right) \\
&= \varphi_0(t)r(t)P_0(t)dt + \sum_{i=1}^k \varphi_i(t)P_i(t) \left(b_i(t)dt + \sum_{j=0}^m \sigma_{ij}(t)dB_j(t) \right) \\
&= \pi_0(t)X(t)r(t)dt + \sum_{i=1}^k \pi_i(t)X(t) \left(b_i(t)dt + \sum_{j=0}^m \sigma_{ij}(t)dB_j(t) \right) \\
&= \pi_0(t)X(t)r(t)dt + X(t)(\vec{\pi}(t) \cdot b(t))dt + X(t)\vec{\pi}(t)^{tr} \sigma(t)dB(t)
\end{aligned}$$

donde $\vec{\pi}(t) = (\pi_1(t), \dots, \pi_d(t))$ y así la ecuación de capital es

$$\begin{aligned}
dX(t) &= \pi_0(t)X(t)r(t)dt + X(t)(\vec{\pi}(t) \cdot b(t))dt + X(t)\vec{\pi}(t)^{tr} \sigma(t)dB(t) \\
X(0) &= X_0
\end{aligned} \tag{2.12}$$

Observación. Para que tenga única solución se necesita $\vec{\pi}(t) \in L^2(P)$

Definición. El mercado P_t está **normalizado** si $P_0(t) \equiv 1$.

Observación. Si $r(t)$ es acotado, el mercado P_t se puede normalizar y la normalización de P_t es $\bar{P}_i(t) = \gamma(t)P_i(t)$ donde

$$\gamma(t) = P_0^{-1}(t) = e^{-\int_0^t r(s)ds} \tag{2.13}$$

Así la normalización corresponde a mirar el bono como la unidad de precio (Numeraire)

Observación. $d\bar{P}_i(t) = d(\gamma(t)P_i(t)) = \gamma(t)((b_i(t) - r(t)P_i(t))dt + \sigma_i dB_t)$, por lo que

$$d\bar{P}(t) = \gamma(t)(dP(t) - r(t)P(t)dt)$$

Lema 2.4.1. Si $\vec{\pi}_t$ es autofinanciado en P_t entonces también es autofinanciado en \bar{P}_t

Demostración. Sea $\vec{\pi}(t)$ autofinanciado en P_t entonces el valor del portafolio está dado por

$$\gamma(t)V^\pi(t) = \vec{\pi}(t) \cdot \gamma(t)P(t) = \vec{\pi}(t) \cdot \bar{P}(t) = \bar{V}^\pi(t)$$

entonces, usando la regla del producto

$$\begin{aligned}
 d\overline{V^\pi}(t) &= d(\gamma(t)V^\pi(t)) \\
 &= \gamma(t)dV^\pi(t) + V^\pi(t)d\gamma(t) + dV^\pi(t) \cdot d\gamma(t) \\
 &= \gamma(t)\vec{\pi}(t)dP(t) - r(t)\gamma(t)V^\pi(t)dt \\
 &= \gamma(t)\vec{\pi}(t)dP(t) - r(t)\gamma(t)\vec{\pi}(t)P(t)dt \\
 &= \gamma(t)\vec{\pi}(t)(dP(t) - r(t)P(t)dt) \\
 &= \vec{\pi}(t)d\overline{P}(t)
 \end{aligned}$$

Por lo que $\vec{\pi}(t)$ es autofinanciado con respecto al mercado normalizado. \square \square

Observación. Uniendo las ecuaciones (2.10) y (2.11) de valor de portafolio, tenemos

$$\pi_0(t)P_0(t) + \sum_{i=1}^k \pi_i(t)P_i(t) = V_0^\pi(0) + \int_0^t \pi_0(s)dP_0(s) + \sum_{i=1}^k \int_0^t \pi_i(s)dP_i(s)$$

Si escribimos $Y_0(t) = \pi_0(t)P_0(t)$ y despejamos $Y_0(t)$ de la ecuación anterior llegamos a

$$Y_0(t) = - \sum_{i=1}^k \pi_i(t)P_i(t) + V_0^\pi(0) + \int_0^t \pi_0(s)dP_0(s) + \sum_{i=1}^k \int_0^t \pi_i(s)dP_i(s)$$

la anterior ecuación en forma derivada es:

$$dY_0(t) = \pi_0(t)dP_0(t) + d\left(\sum_{i=1}^k \left(\int_0^t \pi_i(s)dP_i(s) - \pi_i(t)P_i(t)\right)\right)$$

Si llamamos $A(t) = \sum_{i=1}^k \left(\int_0^t \pi_i(s)dP_i(s) - \pi_i(t)P_i(t)\right)$, obtenemos

$$\begin{aligned}
 dY_0(t) &= \pi_0(t)r(t)P_0(t)dt + dA(t) \\
 &= r(t)Y_0(t)dt + dA(t)
 \end{aligned}$$

cuya solución se calcula fácilmente haciendo uso del factor integrante $\gamma(t)$, como en (2.13).

$$\begin{aligned}
 dY_0(t) &= r(t)Y_0(t)dt + dA(t) \\
 dY_0(t) - r(t)Y_0(t)dt &= dA(t) \\
 dY_0(t)\gamma(t) - r(t)Y_0(t)\gamma(t)dt &= \gamma(t)dA(t)
 \end{aligned}$$

ya que $\gamma(t) = e^{-\int_0^t r(s)ds}$, es el factor integrante, tenemos

$$d(\gamma(t)Y_0(t)) = \gamma(t)dA(t)$$

e integrando a ambos lados, tenemos

$$\begin{aligned}
 \gamma(t)Y_0(t) &= \gamma(0)Y_0(0) + \int_0^t \gamma(s)dA(s) \\
 \gamma(t)\pi_0(t)P_0(t) &= \gamma(0)\pi_0(0)P_0(0) + \int_0^t \gamma(s)dA(s)
 \end{aligned}$$

entonces, usando que $\gamma(t) = P_0^{-1}(t)$

$$\pi_0(t) = \pi_0(0) + \int_0^t \gamma(s) dA(s)$$

ahora usando integración por partes en el último término

$$\begin{aligned} \pi_0(t) &= \pi_0(0) + \gamma(t)A(t) - A(0) - \int_0^t A(s) d\gamma(s) \\ &= \pi_0(0) + \gamma(t)A(t) + \sum_{i=1}^k \pi_i(0)P_i(0) - \int_0^t A(s) d\gamma(s) \\ &= \pi_0(0) + \gamma(t)A(t) + \sum_{i=1}^k \pi_i(0)P_i(0) - \int_0^t A(s)(-r(t))\gamma(s) ds \\ \pi_0(t) &= \pi_0(0) + \gamma(t)A(t) + \sum_{i=1}^k \pi_i(0)P_i(0) + \int_0^t r(t)\gamma(s)A(s) ds \end{aligned} \quad (2.14)$$

Por lo que si tenemos $(\pi_1(t), \dots, \pi_k(t))$, siempre podemos hacer un portafolio $\vec{\pi}(t)$ autofinanciado escogiendo π_0 como en (2.14). Más aún somos libres de escoger el valor de $V^\pi(0)$. \square

Lema 2.4.2. *Si un portafolio autofinanciado π_t es admisible en P_t entonces también es admisible en \bar{P}_t*

Demostración. Como $\vec{\pi}_t$ es autofinanciado para el mercado $\{P_t\}$, entonces por el lema 2.4.1 tenemos que

$$dV^\pi(t) = \vec{\pi}(t) d\bar{P}(t)$$

y usando que $r(t)$ es acotado, vemos que $\bar{V}^\pi(t)$ es acotado por abajo, si y solamente si, $V^\pi(t)$ lo es. \square

Lema 2.4.3. *Supongamos que existe una medida Q en \mathcal{F}_t , tal que las medidas P y Q son equivalentes y tal que el proceso normalizado de precios es una martingala local $(\bar{P}(t))_{t \geq 0}$ con respecto a Q , entonces $(P(t))_{t \geq 0}$ no admite arbitraje.*

Demostración. Por contradicción supongamos que $\vec{\pi}(t)$ admite arbitraje para $\{\bar{P}(t)\}$, lo que quiere decir que

$$\bar{V}(0) = 0, \quad V(t) \geq 0 \quad \text{y} \quad P[\bar{V}(t) > 0] \quad \text{para algún } t.$$

Por otro lado $\bar{V}^\pi(t)$ es una martingala local con respecto a Q ya que es una integral estocástica. Además, $\bar{V}^\pi(t)$ es acotada por debajo por ser admisible. De lo anterior se concluye que $\{\bar{V}^\pi(t)\}$ es una supermartingala con respecto a Q ver [31] y entonces

$$E_Q[\bar{V}^\pi(t)] \leq E_Q[\bar{V}^\pi(0)] = \bar{V}^\pi(0) = 0$$

Pero como $\vec{\pi}$ admite arbitraje para P , tenemos que $\bar{V}^\pi(t) \geq 0$ P c.s. y por lo tanto $\bar{V}^\pi(t) \geq 0$ Q c.s. además que $P[\bar{V}^\pi(t) > 0] > 0$ si y solamente si $Q[\bar{V}^\pi(t) > 0] > 0$ (Pues P y Q

son equivalentes), entonces tenemos que $E_Q[\overline{V}^\pi(t)] > 0$, lo que contradice el hecho que $E_Q[\overline{V}^\pi(t)] \leq 0$ □ □

Teorema 2.4.4. *Supongamos que existe $u(t, w) \in \mathcal{V}^m(0, T)$ tal que con $P(t) = (P_1(t), \dots, P_n(t))$ satisface*

1. $\sigma(t, w)u(t, w) = b(t, w) - r(t, w)P(t)$ para casi todo (t, w)
2. $E \left[\exp \left\{ \frac{1}{2} \int_0^T u^2(t, w) dt \right\} \right] < \infty$

entonces $P(t)$ no admite arbitraje.

Demostración. Supongamos que $P(t)$ es normalizado (e.d. $r = 0$).
Sea Q una medida en \mathcal{F}_t dada por

$$dQ = \left(\exp \left\{ - \int_0^T u(t, w) dB_t - \frac{1}{2} \int_0^T u^2(t, w) dt \right\} \right) dP$$

entonces podemos decir, usando la ecuación (1.11), que Q es equivalente a P y por el teorema de Girsanov 1.2.16 tenemos

$$\widetilde{B}_t = \int_0^t u(s, w) ds + B_t$$

es un movimiento browniano con respecto a Q y como $P(t)$ es normalizado (e.d. $r = 0$) la condición 1. del teorema se convierte en $\sigma(t, w)u(t, w) = b(t, w)$ y reemplazandola en $dP_i(t)$

$$dP_i(t) = b_i(t)dt + \sigma_i(t)dB(t) = \sigma(t)u(t) + \sigma dB(t) = \sigma d\widetilde{B}_t$$

entonces, como $\widetilde{B}(t)$ es un movimiento browniano y $P(t)$ es una integral estocástica con respecto a $\widetilde{B}(t)$, entonces $P(t)$ es una Q martingala local.

Usando el lema anterior tenemos el resultado. □ □

Observación. El recíproco también es cierto, como se puede ver en [31].

Definición. Una variable aleatoria $\vartheta(T)$ se llama un **reclamo** o **T-reclamo**, si es acotada por debajo y \mathcal{F}_T medible.

Definición. Un T-reclamo $\vartheta(T)$ se dice **alcanzable** en un mercado $(X_t)_{[0, T]}$, si existe un número real z y un portafolio admisible $\vec{\pi}(t)$ tales que

$$\vartheta(T) = V_p(T) = z + \int_0^T \vec{\pi}(t) \cdot dP_t$$

dicho portafolio $\vec{\pi}(t)$ se llama **portafolio de cobertura**.

Observación. Por la propiedad de autofinanciamiento el valor de $\vec{\pi}(t)$ en el mercado normalizado es

$$\bar{V}^\pi(T) = z + \int_0^T \vec{\pi}(t) \cdot d\bar{P}_t = z + \int_0^T \vec{\pi}(t) \cdot \gamma(t) dP_t = z + \int_0^T \vec{\pi}(t) \cdot \gamma(t) \sigma(t) d\tilde{B}_t$$

Definición. Un mercado se llama **completo** si todo T-reclamo es alcanzable.

Teorema 2.4.5. Sea $(P_t)_{0 \leq t \leq T}$, un mercado que cumple las hipótesis del teorema 2.4.4 y además que $\tilde{\mathcal{F}}_t = \mathcal{F}_t$ para todo $t \in [0, T]$. Entonces el mercado $(P_t)_{0 \leq t \leq T}$ es completo, si y solamente si, la matriz $\sigma(t, w)$ tiene inversa a la izquierda para casi todo $(t, w) \in [0, T] \times \Omega$. Es decir existe una matriz estocástica $L(t, w)$ la cual es \mathcal{F}_t adaptada y tal que

$$L(t, w) \sigma(t, w) = I_m \quad \text{para casi todo } (t, w) \in [0, T] \times \Omega$$

siendo I_m la matriz identidad de orden m .

Demostración. Sea ϑ un T-reclamo, entonces queremos encontrar z y un portafolio admisible $\vec{\pi}(t)$ tales que

$$\vartheta(T) = z + \int_0^T \vec{\pi}(t) \cdot dP(t)$$

recordemos que

$$\gamma(T) \vartheta(T) = \gamma(T) V^\pi(T) = \bar{V}^\pi(T) = z + \int_0^T \gamma(t) (\vec{\pi}(t) \cdot \sigma(t)) d\tilde{B}(t) \quad (2.15)$$

Ahora encontraremos z y $\vec{\pi}(t)$ para luego encontrar $\pi_0(t)$ haciendo uso de la ecuación (2.14).

En efecto, sabemos que $\gamma(T) \vartheta(T)$ es acotada y \mathcal{F}_t medible, más aún sabemos que es una martingala, entonces aplicando el teorema de representación de martingalas 1.2.13 existe una única función $f(t, w) \in V^n(0, T)$ tal que

$$\gamma(T) \vartheta(T) = E[\gamma(T) \vartheta(T)] + \int_0^T f(s) d\tilde{B}_s \quad (2.16)$$

Entonces tenemos la solución tomando z como

$$z = E[\gamma(T) \vartheta(T)]$$

y se tiene de igualar (2.15) y (2.16) que $\vec{\pi}(t)$ debe cumplir (y por tanto ser la solución de)

$$\gamma(t) \vec{\pi}(t) \cdot \sigma(t) v = f(t) v \quad \forall v \in \mathbb{R}^n \quad (2.17)$$

Usando la definición matricial del producto punto ($u \cdot v = u^{tr} v$) tenemos que la anterior ecuación es igual a la siguiente ecuación matricial.

$$\begin{aligned} \gamma(t) \vec{\pi}^{tr}(t) \sigma(t) &= f^{tr}(t) \\ \vec{\pi}^{tr}(t) \sigma(t) &= P_0(t) f^{tr}(t) \\ (\vec{\pi}^{tr}(t) \sigma(t))^{tr} &= (P_0(t) f^{tr}(t))^{tr} \\ \sigma^{tr}(t) \vec{\pi}(t) &= P_0(t) f(t) \end{aligned}$$

la ecuación anterior tiene por solución $\vec{\pi}(t) = P_0(t)L^{tr}(t)f(t)$, ya que

$$\begin{aligned}\sigma^{tr}(t)\vec{\pi}(t) &= \sigma^{tr}(t)P_0(t)L^{tr}(t)f(t) = P_0(t)\sigma^{tr}(t)L^{tr}(t)f(t) \\ &= P_0(t)(L(t)\sigma(t))^{tr}f(t) = P_0(t)I_m f(t) = P_0 f(t)\end{aligned}$$

finalmente $\pi_0(t)$ se encuentra mediante la ecuación (2.14)

$$\pi_0(t) = \pi_0(0) + \gamma(t)A(t) + \sum_{i=1}^n \pi_i(0)P_i(0) + \int_0^t r(s)\gamma(s)A(s)ds$$

□

Observación. La demostración del recíproco se puede encontrar en [31].

□

2.5. Valoración de opciones

Dado un reclamo ϑ , el cual en una opción europea puede ser visto como la garantía de pagar el monto ϑ en el tiempo T , nos preguntamos ¿Cuánto estará dispuesto a pagar un comprador en el tiempo 0 por dicha garantía? La respuesta es precisamente lo que hemos venido trabajando, supongamos que el comprador paga x dinero por esta garantía entonces tendrá una fortuna inicial $-x$, pues está en deuda, entonces debe ser posible invertir en algún portafolio que, hasta el tiempo T , cubra este gasto, teniendo en cuenta el pago fijo ϑ , es decir

$$-x + \int_0^T \vec{\pi}(s)dP(s) + \vartheta \geq 0$$

Así el máximo valor que estará dispuesto a pagar es

$$p(\vartheta) = \sup \left\{ x \in \mathbb{R}^+ : \exists \vec{\pi} \text{ portafolio admisible, tal que } V^\pi(T) = -x + \int_0^T \vec{\pi}(s)dP(s) \geq -\vartheta \text{ c.s.} \right\}$$

Por otro lado desde el punto de vista del vendedor, si empieza recibiendo el valor x como fortuna inicial, puede usarlo en una estrategia de inversión que le cubra el valor ϑ que debe pagar en el tiempo T . Entonces por un razonamiento parecido al anterior, el valor mínimo para hacer la venta es

$$q(\vartheta) = \inf \left\{ x : \exists \vec{\pi} \text{ portafolio admisible, tal que } V^\pi(T) = x + \int_0^T \vec{\pi}(s)dP(s) \geq \vartheta \text{ c.s.} \right\}$$

El siguiente teorema nos servirá para definir el precio de un reclamo

Teorema 2.5.1. Sean $P(t)$ como en el teorema 2.4.4, Q la correspondiente medida de Girsanov y suponga que existe un $h(t, w)$ que satisface las hipótesis del teorema 2.4.4, entonces se tienen las siguientes desigualdades para cualquier reclamo ϑ

$$p(\vartheta) \leq E_Q[\gamma(t)\vartheta] \leq q(\vartheta) \tag{2.18}$$

Demostración. Sea $y \in \mathbb{R}$ dado y supongamos que existe un portafolio admisible $\vec{\pi}(t)$ tal que

$$V^\pi(T) = -y + \int_0^T \vec{\pi}(s) dP(s) \geq -\vartheta \text{ c.s.}$$

multiplicando por γ ambos lados de la ecuación y usando (2.15) tenemos

$$\gamma(T)V^\pi(T) = -y + \int_0^T \gamma(s)(\vec{\pi}(s) \cdot \sigma(s)) d\tilde{B}(s) \geq -\gamma(t)\vartheta \text{ c.s.} \quad (2.19)$$

donde $\tilde{B}(t)$ está definido como en el teorema 2.4.4 y como $\int_0^T \gamma(s)(\vec{\pi}(s) \cdot \sigma(s)) d\tilde{B}(s)$ es una supermartingala entonces $E_Q \left[\int_0^T \gamma(s)(\vec{\pi}(s) \cdot \sigma(s)) d\tilde{B}(s) \right] \leq 0$ para todo $t \in [0, T]$ y sacando valor esperado con respecto a Q a ambos lados de (2.19) tenemos

$$y \leq E_Q[\gamma(T)\vartheta]$$

y por tanto

$$p(\vartheta) \leq E_Q[\gamma(T)\vartheta]$$

lo que prueba la primera desigualdad.

De la misma forma si existe un portafolio admisible $\vec{\pi}^*$ talque

$$V^{\pi^*}(T) = y + \int_0^T \vec{\pi}^*(s) dP(s) \geq \vartheta \text{ c.s.}$$

entonces

$$\gamma(T)V^{\pi^*}(T) = y + \int_0^T \gamma(s)(\vec{\pi}^*(s) \cdot \sigma(s)) d\tilde{B}(s) \geq \gamma(t)\vartheta \text{ c.s.} \quad (2.20)$$

y tomando valores esperados con respecto a Q

$$y \geq E_Q[\gamma(T)\vartheta]$$

y tenemos la segunda desigualdad

$$q(\vartheta) \geq E_Q[\gamma(T)\vartheta]$$

□

□

Observación. En la demostración del teorema anterior se supuso que existía un portafolio admisible, pero si no existe note que la primera desigualdad ($p(\vartheta) \leq E_Q[\gamma(t)\vartheta]$) se alcanza siempre tomando el portafolio $\vec{\pi}(t) = 0$ y $\pi_0 = -y$ y para la segunda desigualdad sencillamente si no hay portafolio admisible, se toma $q(\vartheta) = \infty$.

Observación. La igualdad en 2.18 se obtiene si el mercado P_t es completo pues, de esta manera, dado y existe un único portafolio $\vec{\pi}(t)$ (como se calculó en el teorema 2.4.5) tal que

$$\gamma(T)V^\pi(T) = -y + \int_0^T \vec{\pi}(s) dX(s) = \vartheta \text{ c.s.} \quad (2.21)$$

Definición. El precio del reclamo ϑ es $p(\vartheta)$ y se dice que dicho precio existe si $p(\vartheta) = q(\vartheta)$.

Uniendo lo visto en la nota (2.21), la condición 1. del teorema 2.4.4 y la ecuación (2.17) tenemos el siguiente teorema

Teorema 2.5.2. Sea P_t un mercado completo y supongamos que se cumplen las hipótesis del teorema 2.4.4, sean Q y \widetilde{B}_t como en el teorema 2.4.4, además sea ϑ un reclamo tal que $E_Q[\gamma(T)\vartheta] < \infty$. Entonces el precio del reclamo ϑ es

$$p(\vartheta) = E_Q[\gamma(T)\vartheta]$$

Observación. Para encontrar un portafolio de cubrimiento $\vec{\pi}(t)$ para el reclamo ϑ , primero encontramos un proceso adaptado ϕ tal que $E_Q\left[\int_0^T \phi^2(s)ds\right] < \infty$ y

$$\gamma(T)\vartheta = E_Q[\gamma(T)\vartheta] + \int_0^T \phi(s)d\widetilde{B}(s)$$

luego escogemos $\vec{\pi}(t)$ talque

$$\vec{\pi}(t)\gamma(t)\sigma(t) = \phi(t) \quad (2.22)$$

y $\pi_0(t)$ como en la ecuación (2.14)

Observación. Usando el teorema 2.4.5 la solución de $\vec{\pi}(t)$ está dada por

$$\vec{\pi}(t) = P_0(t)\phi(t)L(t)$$

donde $L(t)$ es el inverso izquierdo de $\sigma(t)$.

A continuación explicaremos cómo usamos lo visto en el modelo de Black-Scholes simplificado.

Supongamos un mercado que consta de un bono y una acción, $P(t) = (P_0(t), P_1(t))$, donde $P_0(t)$ está definida como en (2.8) y $P_1(t)$ es la simplificación unidimensional de (2.9), esto es

$$\begin{aligned} P_0(t) &= p_0 \exp\left\{\int_0^t r(s)ds\right\} \\ P_1(t) &= p_1 \exp\left\{\int_0^t \left(b(s) - \frac{1}{2}\sigma^2(s)\right)ds + \int_0^t \sigma(s)dW(s)\right\} \end{aligned}$$

entonces la condición 1. del teorema 2.4.4 se convierte en

$$u(t) = \frac{b(t) - r(t)}{\sigma(t)} \quad (2.23)$$

y para poder aplicar el teorema 2.5.2, se debe cumplir que

$$E\left[e^{\frac{1}{2}u^2(t)}\right] = E\left[\exp\left\{\frac{1}{2}\frac{(b(t) - r(t))^2}{\sigma^2(t)}\right\}\right] < \infty \quad (2.24)$$

Lo que lleva a que se cumplan las condiciones de completitud y no arbitraje del mercado por lo que

$$p(\vartheta) = E_Q[\gamma(T)\vartheta] = q(\vartheta) = p$$

donde p es el precio inicial de la acción.

Si $r(t)$ y $\sigma(t)$ son determinísticas y el pago es $p = f(P_1(T))$ para alguna función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ acotada tal que

$$E_Q[f(P_1(T))] < \infty$$

entonces la solución para p es

$$p = \gamma(t)E_Q \left[f \left(p_1 \exp \left\{ \int_0^T (r(t) - \frac{1}{2}\sigma^2(t))dt + \int_0^T \sigma(t)d\tilde{B}(t) \right\} \right) \right]$$

donde $X_1(0) = x_1$. Como bajo la medida Q , la variable aleatoria $Y = \int_0^T \sigma(t)d\tilde{B}(t)$ es dis-

tribuida normal con media 0 y varianza $\int_0^T \sigma^2(t)dt$ entonces el resultado se puede hacer más explícito como se mostrará en el siguiente teorema que damos para finalizar esta sección (resultado que mostramos por su importancia en las finanzas).

Durante muchos años los economistas buscaron una fórmula práctica para valorar opciones hasta que Fisher Black y Myron Scholes (1973) encontraron la solución, en el siguiente teorema mostraremos la fórmula para la valuación de un call europeo y la cual se convirtió en la base de las matemáticas financieras modernas.

Teorema 2.5.3. La fórmula de Black-Scholes

Sea $P(t) = (P_0(t), P_1(t))$ un mercado que consiste en un bono y un activo modelados como (2.8) y (2.9) respectivamente, supongamos que las funciones $r(t) = r$, $b(t) = b$ y $\sigma(t) = \sigma > 0$ son constantes entonces

1. El precio p en el tiempo T de una opción call europeo ϑ , con precio de ejercicio K , y pago

$$\vartheta = (P_1(T) - K)^+$$

es

$$p(\vartheta) = p_1\Phi(d_1(T)) - Ke^{-rT}\Phi(d_2(T))$$

donde

$$\begin{aligned} d_1(T) &= \frac{\ln(\frac{p_1}{K}) + (r + \frac{1}{2}\sigma^2)T}{\sigma\sqrt{T}} \\ d_2(T) &= \frac{\ln(\frac{p_1}{K}) + (r - \frac{1}{2}\sigma^2)T}{\sigma\sqrt{T}} = d_1(T) - \sigma\sqrt{T} \end{aligned}$$

(2.25)

y Φ es la distribución normal estándar.

2. el portafolio $\vec{\pi}(t)$ que replica la opción dada por el reclamo ϑ , está dado por

$$\pi_1(t) = \Phi(d_1(t))$$

y $\pi_0(t)$ como en la ecuación (2.14) o la ecuación (2.15).

Demostración. Note que al ser b , r y $\sigma \neq 0$ constantes se cumplen las condiciones (2.23) y (2.24), por lo que sabemos que el precio está definido y usando el teorema 2.5.2 podemos obtener una forma explícita de $p(\vartheta)$ así

$$\begin{aligned} p(\vartheta) &= E_Q[\gamma(T)(P_1(T) - K)] \\ &= E_Q\left[e^{-\int_0^T r ds}(P_1(T) - K)\right] \\ &= e^{-rT}E_Q[P_1(T) - K] \end{aligned}$$

y usando la forma explícita de $P_1(T)$ tenemos

$$E_Q[P_1(T) - K] = E_Q\left[p_1 \exp\left\{\int_0^T \left(b - \frac{1}{2}\sigma^2\right)ds + \int_0^T \sigma dB(s)\right\} - K\right]$$

y como en el teorema 2.4.5 tenemos que $\sigma u = b - r$ es decir que $b = \sigma u + r$ y

$$\begin{aligned} &E_Q\left[p_1 \exp\left\{\int_0^T \left(b - \frac{1}{2}\sigma^2\right)ds + \int_0^T \sigma dB(s)\right\} - K\right] \\ &= E_Q\left[p_1 \exp\left\{\int_0^T \left(\sigma u + r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)ds + \int_0^T \sigma dB(s)\right\} - K\right] \\ &= E_Q\left[p_1 \exp\left\{\int_0^T \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)ds + \int_0^T \sigma u ds + \int_0^T \sigma dB(s)\right\} - K\right] \\ &= E_Q\left[p_1 \exp\left\{\int_0^T \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)ds + \int_0^T \sigma d\tilde{B}(s)\right\} - K\right] \\ &= E_Q\left[p_1 \exp\left\{\left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)T + \int_0^T \sigma d\tilde{B}(s)\right\} - K\right] \end{aligned}$$

como $\tilde{B}(s)$ es un movimiento browniano con respecto a Q , entonces $\int_0^T \sigma d\tilde{B}(s)$ es una integral estocástica y tiene distribución normal con media 0 y varianza σ^2 (todo esto con respecto a Q) y entonces tenemos

$$p(\vartheta) = \frac{e^{-rT}}{\sigma \sqrt{2\pi T}} \int_{\alpha}^{\infty} \left(p_1 e^{y+(r-\frac{1}{2}\sigma^2)T} - K\right) e^{-\frac{y^2}{2\sigma^2 T}} dy$$

Donde α representa el valor donde el máximo de $(P_1(T) - K)^+$ es cero, pues de hay en adelante la integral es positiva. Es decir α es el valor donde

$$p_1 e^{y+(r-\frac{1}{2}\sigma^2)T} - K = 0$$

y despejando

$$\alpha = \ln\left(\frac{K}{p_1}\right) - rT + \frac{1}{2}\sigma^2 T$$

y la integral del valor se divide en dos integrales gaussianas así

$$\begin{aligned}
 p(\vartheta) &= \frac{e^{-rT}}{\sigma \sqrt{2\pi T}} \int_{\alpha}^{\infty} \left(p_1 e^{y+(r-\frac{1}{2}\sigma^2)T} - K \right) e^{-\frac{y^2}{2\sigma^2 T}} dy \\
 &= \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi T}} p_1 \int_{\alpha}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{y}{\sigma\sqrt{T}} - 2y + \sigma^2 T\right)} dy - \frac{e^{-rT}}{\sigma \sqrt{2\pi T}} K \int_{\alpha}^{\infty} e^{-\frac{y^2}{2\sigma^2 T}} dy \\
 &= p_1 \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi T}} \int_{\alpha}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{y}{\sigma\sqrt{T}} - \sigma\sqrt{T}\right)^2} dy - Ke^{-rT} \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi T}} \int_{\alpha}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{y}{\sigma\sqrt{T}}\right)^2} dy \\
 &= p_1 \Phi\left(\sigma\sqrt{T} - \frac{\alpha}{\sigma\sqrt{T}}\right) - Ke^{-rT} \Phi\left(-\frac{\alpha}{\sigma\sqrt{T}}\right)
 \end{aligned}$$

note que $d_2(T) = -\frac{\alpha}{\sigma\sqrt{T}}$ y que

$$\begin{aligned}
 \sigma\sqrt{T} - \frac{\alpha}{\sigma\sqrt{T}} &= \sigma\sqrt{T} - \frac{\ln\left(\frac{K}{p_1}\right) - rT + \frac{1}{2}\sigma^2 T}{\sigma\sqrt{T}} \\
 &= \frac{\sigma^2 T - \ln\left(\frac{K}{p_1}\right) + rT - \frac{1}{2}\sigma^2 T}{\sigma\sqrt{T}} \\
 &= \frac{\ln\left(\frac{p_1}{K}\right) + rT + \frac{1}{2}\sigma^2 T}{\sigma\sqrt{T}} = d_1(T)
 \end{aligned}$$

Con lo que se demuestra el teorema.

La parte 2. del teorema se resuelve replicando el valor del portafolio según el teorema 2.5.2 □ □

Optimización de Portafolios

3.1. Introducción

En el capítulo anterior abordamos el modelo de mercado de Black-Scholes para conocer el valor de un reclamo en el caso de una opción europea; en este capítulo, con el mismo modelo de mercado de Black-Scholes, pretendemos resolver el siguiente problema: Dado un capital inicial buscamos un portafolio admisible y autofinanciado cuyo pago final sea lo más rentable posible. En el capítulo 2 sección 3 con el modelo de Markowitz ya se le había hecho una aproximación a este problema.

El problema de portafolio. Para un capital inicial dado $x > 0$, el problema consiste en determinar la mejor estrategia de inversión para el modelo de mercado de tiempo continuo.

Hay dos aproximaciones para solucionar este problema.

- El primer acercamiento históricamente fue hecho por el economista estadounidense Robert Merton, y usa las herramientas de **control estocástico**, la idea es tratar el problema de portafolio como un problema de control estocástico y luego aplicar métodos de la teoría de control estocástico para hallar la solución. Esto se verá en la siguiente sección.
- La segunda aproximación es **el método de martingalas** el cual fue introducido por varios autores (entre los que encontramos Cox, Karatzas Shreve y Pliska) y en diversas formas, la idea de este método es separar el problema de dinámica (¿Cuál tiempo?) en un problema de optimización estática (Pago final óptimo) el cual se puede solucionar, por ejemplo, con el método del lagrangiano, y un problema de representación (Computar el portafolio para el pago óptimo) el cual se puede solucionar por el método de replicación en valoración de opciones.

Nosotros usaremos la aproximación de Merton.

3.2. Control estocástico

Supongamos que se tiene una ecuación diferencial estocástica controlada, esto es, una ecuación de la forma

$$dX(t) = \mu(t, X(t), u(t))dt + v(t, X(t), u(t))dB(t) \quad (3.1)$$

donde $X(t)$ es un proceso de Itô n -dimensional y $B(t)$ es un movimiento browniano m -dimensional. La ecuación (3.1) se llama **ecuación diferencial estocástica controlada** EDEC. El proceso $u(t)$ se puede escoger libremente y se usa para controlar el comportamiento de $X(t)$, dicho proceso es llamado **control**.

El problema consiste en determinar un control óptimo con respecto a un cierto funcional llamado funcional de costo (lo que entendemos por funcional de costo es una función no decreciente y cóncava definida en los números reales) cuya interpretación económica se dará posteriormente.

Para esta sección usaremos las siguientes notaciones. Sean $n, k \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} Q_0 &= [t_0, t_1) \times \mathbb{R}^n \text{ con } 0 \leq t_0 < t_1 < \infty \\ \overline{Q_0} &= [t_0, t_1] \times \mathbb{R}^n \\ U &\subseteq \mathbb{R}^k \text{ cerrado} \\ \mu &: \overline{Q_0} \times U \rightarrow \mathbb{R}^n \\ v &: \overline{Q_0} \times U \rightarrow \mathbb{R}^{n \times m} \end{aligned}$$

donde μ, v son continuas, además $\mu(\cdot, \cdot, u) \in C^1(\overline{Q_0})$ y $v(\cdot, \cdot, u) \in C^1(\overline{Q_0})$, para toda $u \in U$. Además, para $c > 0$ supongamos que

$$\begin{aligned} |\mu_t| + |\mu_x| &\leq c \quad \|v_t\| + \|v_x\| \leq c \\ |\mu(t, x, u)| + \|v(t, x, u)\| &\leq c(1 + |x| + |u|) \end{aligned}$$

donde se toman las normas euclídea en $|\mu| = \left(\sum_{i=1}^n \mu_i^2 \right)^{\frac{1}{2}}$ y espectral en $\|v\| = \left(\text{Tr}(vv^{tr}) \right)^{\frac{1}{2}}$.

Notación. Si $X(t)$ es una solución a una ecuación diferencial estocástica controlada con valor inicial x , empezado en el tiempo t_0 , indicamos notando su valor esperado en el tiempo t por

$$E^{t_0, x} [X(t)] \quad t \geq t_0$$

Definición. Sea $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t \in [t_0, t_1]}, P)$ un espacio de probabilidad filtrado. Un proceso estocástico $u(t)$, $t \in [t_0, t_1]$, con valores en U , se llamará un control **admisible** si para todo $x \in \mathbb{R}^n$ la EDEC (3.1) con condición inicial $X(t_0) = x$ posee una única solución $X(t)$ y para todo $k \in \mathbb{N}$ se cumple

1. $E \left[\int_{t_0}^{t_1} |u(t)|^k ds \right] < \infty.$
2. $E^{t, x} \left[\|X(\cdot)\|^k \right] = E^{t, x} \left[\sup_{s \in [t, t_1]} |X(\cdot)|^k \right] < \infty.$

Observación. Para un t fijo, los controles admisibles son procesos adaptados a la filtración $(\mathcal{F}_s)_{s \geq t}$, acotados y con caminos continuos en U . Para estos controles (y con las suposiciones generales de esta sección) podremos usar el teorema de existencia y unicidad de solución de ecuaciones diferenciales estocásticas, Teorema 1.3.2.

Observación. El numeral 2. de la definición anterior es una conclusión de una versión más general del teorema de existencia y unicidad de solución de ecuaciones diferenciales estocásticas, lo que se puede ver en [30].

Formulación del problema de control. Ahora consideramos un problema más general en el cual el proceso $X(t)$ estará controlado siempre que esté dentro de un cierto conjunto abierto $O \subseteq \mathbb{R}^n$. ($O = \mathbb{R}^n$ o O abierto tal que ∂O forma una C^3 variedad compacta $(n - 1)$ -dimensional), sean

$$\begin{aligned} Q &= [t_0, t_1] \times O \\ \bar{Q} &= [t_0, t_1] \times \bar{O} \\ \tau &= \inf\{t \geq t_0 : (t, X(t)) \notin Q\} \end{aligned}$$

y tomamos el siguiente funcional de costo, que depende del tiempo inicial t , el capital inicial x y el control $u(t)$

$$J(t, x, u) = E^{t,x} \left[\int_t^\tau L(s, X(s), u(s)) ds + \Psi(\tau, X(\tau)) \right] \quad (3.2)$$

donde $L(s, X(s), u(s))$ es el costo de ejecución (running cost), que determina los gastos intermedios durante el intervalo de tiempo $[t, \tau]$, y $\Psi(\tau, X(\tau))$ es el costo terminal (terminal cost), que determina el costo fijo de mantener el dinero (ya sea en la bolsa o en una acción) y deben cumplir condiciones de **crecimiento polinomial**, es decir

$$\begin{aligned} |L(t, x, u)| &\leq C(1 + |x|^k + |u|^k) \\ |\Psi(t, x)| &\leq C(1 + |x|^k) \end{aligned}$$

para algún $k \in \mathbb{N}$.

Dados los valores iniciales (t_0, x) nuestro objetivo es determinar un costo admisible $u(t)$ tal que minimice el funcional de costo, es decir que minimice a:

$$\min_{u \in \mathcal{A}(t_0, x)} J(t_0, x, u) \quad (3.3)$$

con

$$J(t_0, x, u) = E^{t_0, x} \left[\int_{t_0}^\tau L(s, X(s), u(s)) ds + \Psi(\tau, X(\tau)) \right]$$

donde $\mathcal{A}(t_0, x)$ denota el conjunto de todos los controles admisibles $u(t)$ que comienzan en (t_0, x) y donde $X(t)$ es el proceso estocástico de fortuna que empieza en $X(t_0) = x$.

Definición. La función

$$V(t, x) = \inf_{u \in \mathcal{A}(t_0, x)} J(t_0, x, u) \quad (t, x) \in Q$$

se llama la **función de valor de minimización** del problema y describe la evolución del costo mínimo.

La herramienta principal para resolver problemas de control estocástico es la llamada ecuación de Hamilton-Jacobi-Bellman (de ahora en adelante HJB), y a continuación veremos cómo se deduce.

Asumamos por simplicidad que $O = \mathbb{R}^n$ y trabajemos con la siguiente relación llamada el principio de Bellman¹ (ver [24])

$$V(t, x) = \inf_{u \in \mathcal{A}(t, x)} \left\{ E^{t, x} \left[\int_t^\theta L(s, X(s), u(s)) ds + V(\theta, X(\theta)) \right] \right\} \\ V(t_1, x) = \Psi(t_1, x) \quad \forall x \in \mathbb{R}^n \quad (3.4)$$

con $t \in [t_0, t_1]$ y $\theta \in [t, t_1]$.

Si asumimos que $V(t, x) \in C^{1,2}(Q)$, podemos aplicar la fórmula de Itô a $V(\theta, X(\theta))$ y obtenemos

$$\begin{aligned} V(\theta, X(\theta)) &= V(t, x) + \int_t^\theta V_t(s, X(s)) ds + \int_t^\theta V_x(s, X(s)) dX(s) + \frac{1}{2} \int_t^\theta V_{xx}(s, X(s)) (dX(s))^2 \\ &= V(t, x) + \int_t^\theta V_t(s, X(s)) ds + \int_t^\theta V_x(s, X(s)) \mu(s, X(s), u(s)) ds \\ &\quad + \int_t^\theta V_x(s, X(s)) \nu(s, X(s), u(s)) dB(s) \\ &\quad + \frac{1}{2} \int_t^\theta \nu(s, X(s), u(s)) \cdot \nu^{tr}(s, X(s), u(s)) V_{xx}(s, X(s)) ds \end{aligned}$$

Usando esta ecuación y el hecho que el valor esperado de una integral estocástica es 0, en la fórmula del principio de Bellman, nos resulta

$$V(t, x) = \inf_{u \in \mathcal{A}(t, x)} \left\{ E^{t, x} \left[\int_t^\theta L(s, X(s), u(s)) ds + V(t, x) + \int_t^\theta (V_t(s, X(s)) + V_x(s, X(s)) \mu(s, X(s), u(s)) \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{1}{2} \nu(s, X(s), u(s)) \cdot \nu^{tr}(s, X(s), u(s)) V_{xx}(s, X(s)) \right) ds \right] \right\}$$

y usando la notación $a = \nu \nu^{tr}$, tenemos

$$V(t, x) = \inf_{u \in \mathcal{A}(t, x)} \left\{ E^{t, x} \left[\int_t^\theta L(s, X(s), u(s)) ds + V(t, x) + \int_t^\theta (V_t(s, X(s)) + V_x(s, X(s)) \mu(s, X(s), u(s)) \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{1}{2} a(s, X(s), u(s)) V_{xx}(s, X(s)) \right) ds \right] \right\}$$

¹En palabras dice: "una política óptima tiene la propiedad que cualquiera que sean el estado inicial y las decisiones iniciales, las decisiones restantes deben constituir una política óptima con respecto al estado resultante de la primera decisión".

Ahora restando $V(t, x)$ a ambos lados de la ecuación, dividiendola por $\theta - t$ y tomando el límite cuando θ tiende a t llegamos a

$$\begin{aligned} 0 &= \inf_{u \in \mathcal{A}(t, x)} \left\{ E^{t, x} \left[\lim_{\theta \downarrow t} \frac{1}{\theta - t} \left(\int_t^\theta L(s, X(s), u(s)) ds + \int_t^\theta (V_t(s, X(s)) + V_x(s, X(s)) \mu(s, X(s), u(s)) \right. \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \left. + \frac{1}{2} a(s, X(s), u(s)) V_{xx}(s, X(s)) \right) ds \right] \right\} \\ &= \inf_{u \in \mathcal{A}(t, x)} \left\{ E^{t, x} \left[L(t, X(t), u(t)) + V_t(t, X(t)) + V_x(t, X(t)) \mu(t, X(t), u(t)) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{1}{2} a(t, X(t), u(t)) V_{xx}(t, X(t)) \right] \right\} \end{aligned}$$

Como en el tiempo inicial t se conoce el valor de $X(t)$ y el del control $u(t)$, podemos eliminar el valor esperado, además sólo debemos hacer la minimización sobre los valores iniciales de $u(\cdot)$ (ya que θ tiende a t y por eso tomamos los valores en t) que se toman con los valores de $u \in U$, por lo que la ecuación queda

$$0 = \inf_{u \in U} \left\{ L(t, x, u) + V_t(t, x) + \frac{1}{2} a(t, x, u) V_{xx}(t, x) + V_x(t, x) \mu(t, x, u) \right\} \quad (3.5)$$

La ecuación (3.5) es la ecuación de HJB de (3.3) y note que la ecuación HJB no tiene términos aleatorios.

En este momento podemos obtener la función $V(t, x)$, primero haciendo la minimización de la ecuación (3.5) sobre u (con funciones desconocidas V_t, V_x, V_{xx}), una vez obtenido el minimizador u^* se usa la ecuación HJB (3.5) con el valor de u^* y eliminando el operador \inf y nos resulta una ecuación diferencial parcial con valor de frontera $V(t, x) = \Psi(x)$. Obtenemos así la estrategia óptima $u^*(t)$ escogiéndola como un elemento del argumento mínimo para cada $(t, x) = (t, X(t))$, lo cual hace que también sea adaptado.

El siguiente teorema nos da una idea de cómo se relacionan la función de valor $V(t, x)$ y la ecuación HJB. Para enunciar el teorema asumiremos la siguiente notación

$$G \in C^{1,2}(Q), \quad (t, x) \in Q, \quad a = v v^{tr}, \quad u \in U$$

además

$$A^u G(s, X(s)) = G_t(s, X(s)) + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(t, x, u) G_{x_i x_j}(t, x) + \sum_{i=1}^n \mu_i(t, x, u) G_{x_i}(t, x)$$

y

$$\partial^* Q = ([t_0, t_1] \times \partial O) \cup (\{t_1\} \times \bar{O})$$

Teorema 3.2.1. Verificación de soluciones para la ecuación HJB

Dada $G \in C^{1,2}(Q) \cap C(\bar{Q})$, con $|G(t, x)| \leq K(1 + |x|^k)$, para algunas constantes apropiadas $K > 0$ y $k \in \mathbb{N}$, supongamos que G es una solución de la siguiente ecuación HJB

$$\inf_{u \in U} \{A^u G(t, x) + L(t, x, u)\} = 0 \quad (t, x) \in Q \quad (3.6)$$

$$G(t, x) = \Psi(t, x) \quad (t, x) \in \partial^* Q \quad (3.7)$$

Entonces tenemos

1. $G(t, x) \leq J(t, x, u)$ para todo $(t, x) \in Q$ y $u(\cdot) \in \mathcal{A}(t, x)$
2. Si para todo $(t, x) \in Q$ existe un $u^*(\cdot) \in \mathcal{A}(t, x)$ con

$$u^*(s) \in \arg \min_{u \in U} \{A^u G(s, X(s)) + L(s, x, u^*)\}^2$$

con $s \in [t, \tau]$, donde $X^*(s)$ es el proceso controlado correspondiente a u^* , entonces usando la ecuación del principio de Bellman (3.4) tenemos

$$G(t, x) = V(t, x) = J(t, x, u^*)$$

En particular $u^*(t)$ es un control óptimo y $G(t, x)$ coincide con la función de valor.

Demostración. (1) Sea $(t, x) \in Q$, para cada tiempo de parada θ con $t \leq \theta \leq \tau$ y cada control admisible queremos ver que

$$G(t, x) \leq J(t, x, u)$$

es decir

$$G(t, x) \leq E^{t,x} \left[\int_t^\theta L(s, X(s), u(s)) ds + G(\theta, X(\theta)) \right] \quad (3.8)$$

Al mismo tiempo que

$$G(s, y) = \Psi(s, y) \quad \forall (s, y) \in \partial^* Q$$

ya que si se escoge $\theta = \tau$

$$G(t, x) \leq E^{t,x} \left[\int_t^\tau L(s, X(s), u(s)) ds + G(\tau, X(\tau)) \right]$$

con lo que se concluiría el numeral (1.).

Demostremos entonces la ecuación (3.8) en dos pasos, primero en un conjunto abierto acotado y luego en un conjunto abierto general.

1. Supongamos O conjunto abierto acotado y usando que G es solución de la ecuación HJB (3.6) tenemos que

$$0 \leq A^u G(s, X(s)) + L(s, X(s), u(s)) \quad (3.9)$$

para cada control admisible $u(\cdot)$ y s cumpliendo $t \leq s \leq \tau$.

Ahora, aplicando la fórmula de Itô en $G(\theta, X(\theta))$ obtenemos

$$G(\theta, X(\theta)) - G(t, x) - \int_t^\theta A^{u(s)} G(s, X(s)) ds = \int_t^\theta G_x(s, X(s)) v(s, X(s), u(s)) dB(s) \quad (3.10)$$

Como O es acotado entonces $G(s, X(s))$ es acotado en O y usando que v tiene crecimiento polinomial tenemos

$$\begin{aligned} E^{t,x} \left[\int_t^\tau \|v(s, X(s), u(s))\|^2 ds \right] &\leq CE^{t,x} \left[\int_t^\tau (1 + |x| + |u(s)|)^2 ds \right] \\ &\leq DE^{t,x} \left[\int_t^\tau (1 + |u(s)|)^2 ds \right] < \infty \end{aligned}$$

²*arg mín* $f(x)$. es el argumento mínimo, es decir el argumento que minimiza la función $f(x)$

donde D es una constante que depende del acotamiento de O y de C , entonces sacando valor esperado a la ecuación (3.10) y como ν es acotada tenemos que la integral estocástica es nula, con lo que obtenemos

$$\begin{aligned} E^{t,x} \left[G(\theta, X(\theta)) - G(t, x) - \int_t^\theta A^{u(s)} G(s, X(s)) ds \right] &= 0 \\ -G(t, x) + E^{t,x} \left[G(\theta, X(\theta)) - \int_t^\theta A^{u(s)} G(s, X(s)) ds \right] &= 0 \end{aligned}$$

y despejando $A^{u(s)} G(s, X(s))$ de (3.9) tenemos

$$0 \leq -G(t, x) + E^{t,x} \left[\int_t^\theta L(s, X(s), u(s)) ds + G(\theta, X(\theta)) \right]$$

con lo que se obtiene el resultado.

2. Ahora, si O es un conjunto abierto general.

Aproximamos O por conjuntos abiertos acotados O_p , más precisamente aproximamos por

$$\begin{aligned} O_p &= O \cap \left\{ x \in \mathbb{R}^n : |x| < p, \text{dist}(x, \partial O) > \frac{1}{p} \right\} \\ Q_p &= \left[t_0, t_1 - \frac{1}{p} \right) \times O_p \quad 0 < \frac{1}{p} < t_1 - t_0 \end{aligned}$$

Si τ_p es el tiempo de salida de $(s, X(s))$ de Q_p , entonces como O_p es acotado tenemos

$$G(t, x) \leq E^{t,x} \left[\int_t^{\theta_p} L(s, X(s), u(s)) ds + G(\theta_p, X(\theta_p)) \right] \quad (3.11)$$

con $\theta_p = \min\{\theta, \tau_p\}$.

Usando que $\theta_p \rightarrow \theta$ c.s. en P cuando $p \rightarrow \infty$ y como :

(1.) $E^{t,x} [|X(s)|^k] < \infty$, (2.) $E^{t,x} \left[\int_{t_0}^{t_1} |u(s)|^k \right] < \infty$ y (3.) L tiene crecimiento polinomial, tenemos

$$E^{t,x} \left[\int_t^\theta |L(s, X(s), u(s))| ds \right] \leq C E^{t,x} \left[1 + |x(t)|^k \int_t^\theta |u(s)|^k ds \right] < \infty$$

entonces aplicando el teorema de la convergencia dominada tenemos

$$\lim_{p \rightarrow \infty} E^{t,x} \left[\int_t^{\theta_p} L(s, X(s), u(s)) ds \right] = E^{t,x} \left[\int_t^\theta L(s, X(s), u(s)) ds \right]$$

Ahora como $G(t, x)$ es continua tenemos $\lim_{p \rightarrow \infty} G(\theta_p, X(\theta_p)) = G(\theta, X(\theta))$ c.s en P y más aun

$$E \left[|G(\theta_p, X(\theta_p))| \right] \leq \left[K \left(1 + X(\theta_p)^k \right) \right] < \left[K \left(1 + \|X(\cdot)\|^k \right) \right] < \infty$$

Con lo que se concluye que G es uniformemente acotado.

Entonces, para cada control admisible $u(\cdot)$, $\{G(\theta_p, X(\theta_p))\}_p$ es uniformemente integrable y

$$\lim_{p \rightarrow \infty} E^{t,x} \left[G(\theta_p, X(\theta_p)) \right] = E^{t,x} [G(\theta, X(\theta))]$$

y sacando el límite cuando $p \rightarrow \infty$ en 3.11 obtenemos el resultado del numeral 1.

El numeral 2. es un resultado directo de aplicar la definición del funcional de costo. □

3.3. Problema de optimización de portafolios

En esta sección usaremos la metodología de control estocástico vista en la sección anterior para solucionar el problema de optimización de portafolios que, recordemos, consiste en encontrar un portafolio que obtenga la mayor riqueza esperada posible en el tiempo T . Para la solución del problema asumiremos que $\vec{b} = (b_1, \dots, b_k)$ es un vector constante y r una constante. Recordemos la ecuación de capital (2.12)

$$dX(t) = \pi_0(t)X(t)rdt + X(t)(\vec{\pi}(t) \cdot \vec{b})dt + X(t)\vec{\pi}(t)^{tr}\sigma(t)dB(t)$$

y usando que $\pi_0(t) = 1 - \sum_{i=0}^k \pi_i(t)$ tenemos

$$\begin{aligned} dX(t) &= \left(1 - \sum_{i=0}^k \pi_i(t)\right)X(t)rdt + X(t)(\vec{\pi}(t) \cdot \vec{b})dt + X(t)\vec{\pi}(t)^{tr}\sigma(t)dB(t) \\ dX(t) &= X(t)rdt - \vec{\pi}(t)X(t)rdt + X(t)(\vec{\pi}(t) \cdot \vec{b})dt + X(t)\vec{\pi}(t)^{tr}\sigma(t)dB(t) \\ dX(t) &= X(t)\left(r + \vec{\pi}(t)^{tr}(\vec{b} - \vec{r})\right)dt + X(t)\vec{\pi}(t)^{tr}\sigma(t)dB(t) \end{aligned} \quad (3.12)$$

donde \vec{r} es el vector que en todas las posiciones tiene el valor r (i.e. $\vec{r} = (r, r, \dots, r)$). Con el fin de utilizar la metodología de control estocástico, vamos convertir la ecuación de capital en una ecuación de control como en (3.1) por lo que nombrando

$$\begin{aligned} u(t) &= \vec{\pi}(t) \\ \mu(t, x, u) &= x\left(\vec{\pi}(t)^{tr}(\vec{b} - \vec{r})\right) = x\left(u(t)^{tr}(\vec{b} - \vec{r})\right) \\ v(t, x, u) &= x\vec{\pi}(t)^{tr}\sigma = xu(t)^{tr}\sigma \end{aligned}$$

convertimos la ecuación de riqueza (con capital inicial x) en una ecuación de control y consideramos el problema

$$\max_{\vec{\pi}(t) \in \mathcal{A}'} J(x, \vec{\pi})$$

con

$$\mathcal{A}' = \{\vec{\pi}(t) \in \mathcal{A} : E[U(X(t))] < \infty\}$$

Primero veamos qué pasa, cuando el tiempo final es finito (horizonte finito). Queremos maximizar la utilidad $J(t, x, u) = E^{t,x}[U(X^u(T))]$, por lo que la función de valor del problema es

$$V(t, x) = \sup_{u \in \mathcal{A}} J(t, x, u)$$

y la correspondiente ecuación HJB es

$$\max_{u(t) \in [\alpha_1, \alpha_2]^k} \left\{ \frac{1}{2} u(t)^{tr} \sigma \sigma^{tr} u(t) x^2 V_{xx}(t, x) + \left((r - u(t)^{tr} (\vec{b} - \vec{r})) x \right) V_x(t, x) + V_t(t, x) \right\} = 0 \quad (3.13)$$

ya que en nuestro caso $L = 0$ pues no hay costos de consumo ni ejecución.

Observación. En un control general no se necesita que la solución X^u sea no-negativa, pero en este caso se necesita que la estrategia de portafolios $\vec{\pi}(t)$ lo sea (o, sea que un control óptimo nos puede llevar a una estrategia negativa). Por lo que hay que añadir una condición de no-negatividad.

Observación. La ecuación (3.13) es una aplicación directa del teorema de verificación 3.9. La razón para el requerimiento $\vec{\pi}(t) = u(t) \in [\alpha_1, \alpha_2]^k$ es que se desea aplicar el teorema de verificación 3.9 donde las condiciones

$$|\mu_t| + |\mu_x| \leq C, \quad |v_t| + |v_x| \leq C, \quad \text{y} \quad |\mu(t, x, u)| + |v(t, x, u)| \leq C(1 + |x| + |u|)$$

pueden ser satisfechas con un rango de x no acotado, solamente si el conjunto de valores para controles admisibles u es acotado.

La metodología para solucionar el problema se basa en los siguientes pasos

1. Hallar la solución de la maximización.
2. Hallar la solución de la ecuación diferencial reemplazando el valor del máximo.
3. Verificar que las hipótesis impuestas en los numerales 1. y 2. se cumplen.

Solución de la maximización (3.13).

Si asumimos que $V(t, x)$ es concava, derivable y que $V(t, x) > 0$ (Lo que tendrá que demostrarse cuando verifiquemos que se cumplen las hipótesis), entonces la maximización se hace derivando con respecto a u la ecuación dentro del máx de (3.13), así

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{1}{2} u(t)^{tr} \sigma \sigma^{tr} u(t) x^2 V_{xx}(t, x) + \left(r x V_x(t, x) + u(t)^{tr} (\vec{b} - \vec{r}) x V_x(t, x) + V_t(t, x) \right) \right) &= 0 \\ \sigma \sigma^{tr} u(t) x^2 V_{xx}(t, x) + (\vec{b} - \vec{r}) x V_x(t, x) &= 0 \end{aligned}$$

y despejando $u(t)$

$$\begin{aligned} \sigma \sigma^{tr} u(t) x^2 V_{xx}(t, x) &= -(\vec{b} - \vec{r}) x V_x(t, x) \\ u(t) &= -(\sigma \sigma^{tr})^{-1} \frac{(\vec{b} - \vec{r}) V_x(t, x)}{x V_{xx}(t, x)} \end{aligned}$$

donde hemos hallado el máximo y lo llamamos $u^*(t)$

$$u^*(t) = -(\sigma \sigma^{tr})^{-1} \frac{(\vec{b} - \vec{r}) V_x(t, x)}{x V_{xx}(t, x)} \quad u(t) \in [\alpha_1, \alpha_2]^k$$

□

Solución de la ecuación diferencial parcial.

Si incluimos la solución de maximización $u^*(t)$ en (3.13), entonces resulta la siguiente ecuación diferencial para $V(t, x)$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \left((-\sigma\sigma^{tr})^{-1}(\vec{b} - \vec{r}) \right)^{tr} (\sigma\sigma^{tr}) \left((-\sigma\sigma^{tr})^{-1}(\vec{b} - \vec{r}) \right) x^2 \left(\frac{V_x^2(t, x)}{x^2 V_{xx}^2(t, x)} \right) V_{xx} + rx V_x(t, x) \\ & + \left((-\sigma\sigma^{tr})^{-1}(\vec{b} - \vec{r}) \right)^{tr} (\vec{b} - \vec{r}) x \frac{V_x^2(t, x)}{x V_{xx}(t, x)} + V_t(t, x) = 0 \end{aligned}$$

que simplificando llegamos a

$$\frac{-1}{2} \left((\vec{b} - \vec{r})^{tr} (\sigma\sigma^{tr})^{-1} \right) (\vec{b} - \vec{r}) \frac{V_x^2(t, x)}{V_{xx}^2(t, x)} + rx V_x(t, x) + V_t(t, x) = 0 \quad (3.14)$$

Como la ecuación diferencial (3.14) es no lineal, no podemos esperar una solución explícita para un $U(x)$ arbitrario. Por esta razón vamos a tomar el caso particular de la función de HARA (Hyperbolic absolute risk aversion)³

$$U(x) = \frac{1}{\gamma} x^\gamma \quad \text{donde } \gamma \in (0, 1)$$

Con lo que la condición de frontera se convierte

$$V(T, x) = \frac{1}{\gamma} x^\gamma \quad \text{donde } \gamma \in (0, 1)$$

Tratamos la ecuación diferencial (3.14) considerando una aproximación de separación de variables de la siguiente manera

$$V(t, x) = f(t) \frac{1}{\gamma} x^\gamma \quad \text{y} \quad f(T) = 1 \quad (3.15)$$

quedando la siguiente ecuación diferencial

$$\begin{aligned} & \frac{-1}{2} \left((\vec{b} - \vec{r})^{tr} (\sigma\sigma^{tr})^{-1} \right) (\vec{b} - \vec{r}) \frac{(f(t)x^{\gamma-1})^2}{f(t)x^{\gamma-2}(\gamma-1)} + rxf(t)x^{\gamma-1} + \frac{1}{\gamma} x^\gamma f'(t) = 0 \\ & \frac{-1}{2} x^\gamma \left((\vec{b} - \vec{r})^{tr} (\sigma\sigma^{tr})^{-1} \right) (\vec{b} - \vec{r}) \frac{f(t)}{\gamma-1} + rf(t)x^\gamma + \frac{1}{\gamma} x^\gamma f'(t) = 0 \\ & \left(\frac{-1}{2} \left((\vec{b} - \vec{r})^{tr} (\sigma\sigma^{tr})^{-1} \right) (\vec{b} - \vec{r}) \frac{1}{\gamma-1} + r \right) f(t) + \frac{1}{\gamma} f'(t) = 0 \end{aligned}$$

Utilizando la abreviación $a = \frac{1}{2} (\vec{b} - \vec{r})^{tr} (\sigma\sigma^{tr})^{-1} (\vec{b} - \vec{r}) \frac{1}{\gamma-1} + r$, queda la siguiente ecuación diferencial

$$\begin{cases} \frac{1}{\gamma} f'(t) = -af(t) \\ f(T) = 1 \end{cases}$$

³las funciones de HARA, deben su nombre a que el índice de riesgo absoluto $-\frac{U''(x)}{U'(x)}$ es hiperbólico y son de gran importancia en las finanzas.

Por lo que la solución es

$$f(t) = e^{-a\gamma(T-t)} \quad (3.16)$$

Con lo que se encuentra la solución

$$V(t, x) = \frac{e^{-a\gamma(T-t)} x^\gamma}{\gamma} \quad (3.17)$$

y se asegura la que la solución de la ecuación HJB es

$$\vec{\pi}(t) = \vec{\pi}^*(t) = u^*(t) = \frac{1}{\gamma - 1} (\sigma\sigma^{tr})^{-1} (\vec{b} - \vec{r})$$

□

Observación. $\vec{\pi}^*(t)$ es el portafolio que maximiza el valor esperado de la riqueza en el tiempo t .

Verificar las hipótesis.

Como $f(t)$ en (3.16) es estrictamente positiva entonces $V(t, x)$ en (3.17) es cóncava, más aún $V(t, x)$ es una solución $C^{1,2}$ que satisface la condición de crecimiento polinomial.

El proceso de riqueza $X^u(t)$ correspondiente al $u(t)$ óptimo satisface la ecuación diferencial estocástica.

$$\begin{aligned} dX^u(t) &= X^u(t) \left((r + (\vec{\pi}^*(t))^{tr} (\vec{b} - \vec{r})) + (\pi^*)^{tr} \sigma dB(t) \right) \\ X^u(0) &= x \end{aligned}$$

En particular esta ecuación admite una única solución, la cual es estrictamente positiva.

Teorema 3.3.1. *El problema de portafolio*

$$\max_{\pi \in \mathcal{A}} E \left[\frac{1}{\gamma} X(T)^\gamma \right] \quad (3.18)$$

es resuelto por la estrategia $\vec{\pi}^*(t)$ dada por

$$\vec{\pi}^*(t) = \frac{1}{\gamma - 1} (\sigma\sigma^{tr})^{-1} (\vec{b} - \vec{r})$$

Demostración. La solución es el caso particular que se hizo al tomar $U(x) = \frac{1}{\gamma} x^\gamma$ con $\gamma \in (0, 1)$. □ □

Observación. Note que $\vec{\pi}^*(t)$ es constante y no depende del tiempo, por lo que se usará en adelante la notación $\vec{\pi}^*$, y como para valores grandes de α_1 y α_2 el requerimiento de $\vec{\pi}^* \in [\alpha_1, \alpha_2]^k$ puede ser ignorado sin cambiar la estrategia óptima, entonces el problema de optimización de portafolios está solucionado.

3.4. Problema de optimización con una restricción de CaR

En esta sección cambiaremos la restricción de varianza en el modelo de media varianza de Markowitz por una restricción de Capital en Riesgo (CaR , por sus siglas en inglés Capital at Risk). Recordemos que la solución de la ecuación de riqueza es

$$X^\pi(t) = x \exp \left\{ \left(\vec{\pi}^{tr} (\vec{b} - \vec{r}) + r - \frac{\|\vec{\pi}^{tr} \sigma\|^2}{2} \right) t + \vec{\pi}^{tr} \sigma B_t \right\} \quad (3.19)$$

donde $\vec{b} = (b_1, b_2, \dots, b_k)^{tr}$ son las tasas de interés de las acciones, r tasa de interés del bono y $\vec{r} = (r, r, \dots, r)$ vector de \mathbb{R}^k . A partir de esto definimos

Definición. Sea x el capital inicial, T un tiempo final dado y sea z_α el α -cuantil⁴ de la distribución normal estándar. Para un portafolio $\vec{\pi} \in \mathbb{R}^k$ con capital final $X^\pi(T)$, el α -cuantil de $X^\pi(T)$ se define como sigue:

$$\rho(x, \vec{\pi}, T) := \inf \{ z \in \mathbb{R} : P(X^\pi(T) \leq z) \geq \alpha \}$$

Observación. Usando que B_T es normal con media $\mu = 0$ y varianza $\sigma^2 = T$, calculamos

$$E[\vec{\pi}^{tr} \sigma B_T] = \vec{\pi}^{tr} \sigma E[B_T] = 0$$

y

$$Var[\vec{\pi}^{tr} \sigma B_T] = E[(\vec{\pi}^{tr} \sigma B_T)^2] = \|\vec{\pi}^{tr} \sigma\|^2 T$$

y calculamos

$$\begin{aligned} & P \left(x \exp \left\{ \left(\vec{\pi}^{tr} (\vec{b} - \vec{r}) + r - \frac{\|\vec{\pi}^{tr} \sigma\|^2}{2} \right) T + \vec{\pi}^{tr} \sigma B_T \right\} \leq x \exp \left\{ \left(\vec{\pi}^{tr} (\vec{b} - \vec{r}) + r - \frac{\|\vec{\pi}^{tr} \sigma\|^2}{2} \right) T + z_\alpha \|\vec{\pi}^{tr} \sigma\| \sqrt{T} \right\} \right) \\ &= P \left(\exp \{ \vec{\pi}^{tr} \sigma B_T \} \leq \exp \{ z_\alpha \|\vec{\pi}^{tr} \sigma\| \sqrt{T} \} \right) \\ &= P \left(\vec{\pi}^{tr} \sigma B_T \leq z_\alpha \|\vec{\pi}^{tr} \sigma\| \sqrt{T} \right) \\ &= P \left(\frac{\vec{\pi}^{tr} \sigma B_T}{\|\vec{\pi}^{tr} \sigma\| \sqrt{T}} \leq \frac{z_\alpha \|\vec{\pi}^{tr} \sigma\| \sqrt{T}}{\|\vec{\pi}^{tr} \sigma\| \sqrt{T}} \right) \\ &= P(Z \leq z_\alpha) \end{aligned}$$

Donde Z es una variable aleatoria con distribución normal estándar, por lo que el α -cuantil de $X^\pi(T)$ está dado por:

$$\rho(x, \vec{\pi}, T) = x \exp \left\{ \left(\vec{\pi}^{tr} (\vec{b} - \vec{r}) + r - \frac{\|\vec{\pi}^{tr} \sigma\|^2}{2} \right) T + z_\alpha \|\vec{\pi}^{tr} \sigma\| \sqrt{T} \right\} \quad (3.20)$$

Definición. El capital en riesgo del portafolio $\vec{\pi}$ con capital inicial x y tiempo final o tiempo de horizonte T está definido por:

$$\begin{aligned} CaR(x, \vec{\pi}, T) &= xe^{rT} - \rho(x, \vec{\pi}, T) \\ &= xe^{rT} \left(1 - \exp \left\{ \left(\vec{\pi}^{tr} (\vec{b} - \vec{r}) - \frac{\|\vec{\pi}^{tr} \sigma\|^2}{2} \right) T + z_\alpha \|\vec{\pi}^{tr} \sigma\| \sqrt{T} \right\} \right) \end{aligned}$$

⁴El cuantil es el valor z_α bajo el cual se concentra el α por ciento de la población, así por ejemplo si X es una variable aleatoria normal estándar y $\alpha = 0,5$ tenemos que $z_\alpha = 0$

Observación. En la definición del CaR vamos a asumir en general que $\alpha < 0,5$ de esta forma aseguraremos que $z_\alpha < 0$.

Observación. En el marco de las posibles pérdidas (de la inversión) en un periodo de tiempo T , el CaR representa una cota superior para las posibles pérdidas comparadas con la inversión en bonos, es decir que el α por ciento de las pérdidas superarán el CaR .

Observación. Note que en la definición de CaR se asume que el portafolio es constante, lo cual permite obtener la solución del portafolio óptimo. Si omitimos esta hipótesis el problema se hace intratable, puesto que $\rho(x, \vec{\pi}, T)$ es casi imposible de obtener para un $\vec{\pi}(t)$ en general.

En lo que sigue usaremos la notación $f(\vec{\pi})$ para:

$$f(\vec{\pi}) = z_\alpha \|\vec{\pi}^{tr} \sigma\| \sqrt{T} - \|\vec{\pi}^{tr} \sigma\|^2 \frac{T}{2} + \vec{\pi}^{tr} (\vec{b} - \vec{r}) T \quad \vec{\pi} \in \mathbb{R}^k \quad (3.21)$$

Nótese que como $z_\alpha < 0$, entonces cuando $\|\vec{\pi}^{tr} \sigma\| \rightarrow \infty$ se tiene que $f(\vec{\pi}) \rightarrow -\infty$ y como

$$\sup_{y \in \mathbb{R}} \{1 - e^y\} = 1$$

entonces

$$\sup_{\vec{\pi} \in \mathbb{R}^k} CaR(x, \vec{\pi}, T) = \sup_{\pi \in \mathbb{R}^k} \{x e^{rT} (1 - e^{f(\vec{\pi})})\} = x e^{rT}$$

es decir que el uso de estrategias extremadamente riesgosas (si el valor $\|\vec{\pi}^{tr} \sigma\|$ es muy grande) nos pueden llevar a un CaR que está cercano al capital total, por otro lado el cálculo del CaR mínimo está hecho en la siguiente proposición

Proposición 3.4.1. Sea $\theta = \|\sigma^{-1}(\vec{b} - \vec{r})\|$

1. Si $b_i = r, \forall i = 1, \dots, k$ entonces $f(\pi)$ alcanza su máximo en $\vec{\pi}^* = 0$ y nos lleva a un mínimo capital en riesgo $CaR(x, \vec{\pi}^*, T) = 0$
2. Si $b_i \neq r$ para algún $i \in \{1, \dots, k\}$ y $\theta \sqrt{T} < |z_\alpha|$, entonces el CaR mínimo es igual a 0 y es alcanzado en estrategias puras de bonos ($\vec{\pi}^* = 0$).
3. Si $b_i \neq r$ para algún $i \in \{1, \dots, k\}$ y $\theta \sqrt{T} \geq |z_\alpha|$, entonces el CaR mínimo se alcanza para

$$\vec{\pi}^* = \left(\theta - \frac{|z_\alpha|}{\sqrt{T}} \right) \left(\frac{(\sigma \sigma^{tr})^{-1} (\vec{b} - \vec{r})}{\|\sigma^{-1}(\vec{b} - \vec{r})\|} \right) \quad (3.22)$$

con

$$CaR(x, \vec{\pi}^*, T) = x e^{rT} (1 - e^{\frac{1}{2}(\theta \sqrt{T} - |z_\alpha|)^2}) \quad (3.23)$$

Demostración. 1. Como $b_i = r, \forall i = 1, \dots, k$ entonces

$$f(\vec{\pi}) = z_\alpha \|\vec{\pi}^{tr} \sigma\| \sqrt{T} - \|\vec{\pi}^{tr} \sigma\|^2 \frac{T}{2}$$

y como $z_\alpha < 0$ y $T > 0$, entonces $f(\vec{\pi}) \leq 0$ y el máximo de $f(\pi)$ se alcanza cuando $\|\vec{\pi}\sigma\| = 0$ y como σ es una matriz constante y diferente de cero, tenemos que $\vec{\pi}^* = 0$ lo que conlleva a que $f(\vec{\pi}^*) = 0$ y

$$CaR(x, \vec{\pi}^*, T) = e^{rT} (1 - e^{f(\vec{\pi}^*)}) = 0.$$

2. Maximicemos $f(\vec{\pi})$ sobre todos los valores que cumplan

$$\|\vec{\pi}^{tr}\sigma\| = \epsilon \quad (3.24)$$

para un ϵ fijo y positivo. En la elipsoide (3.24) la función (3.21) se convierte en

$$f(\vec{\pi}) = z_\alpha \epsilon \sqrt{T} - \epsilon^2 \frac{T}{2} + \vec{\pi}^{tr}(\vec{b} - \vec{r})T \quad (3.25)$$

Entonces el problema ahora es maximizar una función lineal (en $\vec{\pi}$) sobre la frontera de una elipsoide, así usando el método de multiplicadores de Lagrange tenemos

$$g(\vec{\pi}) = \|\vec{\pi}^{tr}\sigma\| = \sqrt{\vec{\pi}^{tr}\sigma\sigma^{tr}\vec{\pi}}$$

que por practicidad tomaremos como

$$g(\vec{\pi}) = \vec{\pi}^{tr}\sigma\sigma^{tr}\vec{\pi}$$

con condición de frontera

$$\|\vec{\pi}^{tr}\sigma\| = \epsilon$$

por lo que tenemos

$$\nabla f = (\vec{b} - \vec{r})T \quad y \quad \nabla g = \sigma\sigma^{tr}\vec{\pi}$$

igualando y usando el multiplicador de Lagrange λ , resulta

$$(\vec{b} - \vec{r})T = \lambda\sigma\sigma^{tr}\vec{\pi}$$

y obtenemos

$$\vec{\pi} = \frac{(\sigma\sigma^{tr})^{-1}(\vec{b} - \vec{r})T}{\lambda}$$

reemplazando este valor en la condición de frontera 3.24 se obtiene:

$$\begin{aligned} \left\| \frac{((\sigma\sigma^{tr})^{-1}(\vec{b} - \vec{r})T)^{tr}}{\lambda} \sigma \right\| &= \epsilon \\ \left\| (\vec{b} - \vec{r})^{tr} ((\sigma\sigma^{tr})^{-1})^{tr} \sigma \right\| &= \frac{\lambda\epsilon}{T} \\ \left\| (\vec{b} - \vec{r})^{tr} (\sigma^{tr})^{-1} \sigma^{-1} \sigma \right\| &= \frac{\lambda\epsilon}{T} \\ \left\| (\vec{b} - \vec{r})^{tr} (\sigma^{tr})^{-1} \right\| &= \frac{\lambda\epsilon}{T} \\ \left\| \sigma^{-1}(\vec{b} - \vec{r}) \right\| &= \frac{\lambda\epsilon}{T} \end{aligned}$$

entonces

$$\lambda = \frac{\left\| \sigma^{-1}(\vec{b} - \vec{r}) \right\| T}{\epsilon}$$

y el valor de $\vec{\pi}$ crítico, para ϵ dado (notado $\vec{\pi}_\epsilon^*$), es

$$\vec{\pi}_\epsilon^* = \epsilon \frac{(\sigma \sigma^{tr})^{-1}(\vec{b} - \vec{r})}{\left\| \sigma^{-1}(\vec{b} - \vec{r}) \right\|}$$

si reemplazamos $\vec{\pi}_\epsilon^*$ en $f(\vec{\pi})$ obtenemos

$$\begin{aligned} f(\vec{\pi}_\epsilon^*) &= z_\alpha \epsilon \sqrt{T} - \epsilon^2 \frac{T}{2} + \left(\epsilon \frac{(\sigma \sigma^{tr})^{-1}(\vec{b} - \vec{r})}{\left\| \sigma^{-1}(\vec{b} - \vec{r}) \right\|} \right)^{tr} (\vec{b} - \vec{r}) T \\ f(\vec{\pi}_\epsilon^*) &= z_\alpha \epsilon \sqrt{T} - \epsilon^2 \frac{T}{2} + \epsilon \frac{(\vec{b} - \vec{r})^{tr} (\sigma \sigma^{tr})^{-1} (\vec{b} - \vec{r})}{\left\| \sigma^{-1}(\vec{b} - \vec{r}) \right\|} T \\ f(\vec{\pi}_\epsilon^*) &= z_\alpha \epsilon \sqrt{T} - \epsilon^2 \frac{T}{2} + \epsilon \frac{(\vec{b} - \vec{r})^{tr} (\sigma^{tr})^{-1} \sigma^{-1} (\vec{b} - \vec{r})}{\left\| \sigma^{-1}(\vec{b} - \vec{r}) \right\|} T \\ f(\vec{\pi}_\epsilon^*) &= z_\alpha \epsilon \sqrt{T} - \epsilon^2 \frac{T}{2} + \epsilon \left\| \sigma^{-1}(\vec{b} - \vec{r}) \right\| T \\ f(\vec{\pi}_\epsilon^*) &= z_\alpha \epsilon \sqrt{T} - \epsilon^2 \frac{T}{2} + \epsilon \theta T \\ f(\vec{\pi}_\epsilon^*) &= -\epsilon^2 \frac{T}{2} + \epsilon (\theta T - |z_\alpha| \sqrt{T}) \end{aligned} \quad (3.26)$$

Como para todo $\vec{\pi} \in \mathbb{R}^k$ se satisface $\|\vec{\pi}^{tr} \sigma\| = \epsilon$, escogiendo un valor adecuado de ϵ (puesto que σ es invertible), obtenemos la estrategia de CaR mínima, maximizando $f(\vec{\pi}_\epsilon^*)$ sobre todos los valores de $\epsilon \geq 0$.

Si tomamos $a = -\frac{T}{2}$ y $b = \theta T - |z_\alpha| \sqrt{T}$ en (3.26), obtenemos que $f(\vec{\pi}_\epsilon^*) = a\epsilon^2 + b\epsilon$ es una parábola en ϵ que abre hacia abajo ($a < 0$) la cual tiene máximo en $\frac{-b}{2a}$.

Por lo tanto tenemos los siguientes dos casos

- Si $b < 0$ (lo que coincide con $\theta \sqrt{T} < |z_\alpha|$ en el enunciado), el máximo de $f(\vec{\pi}_\epsilon^*)$ se alcanza en un valor negativo (i.e. $-b/2a < 0$) pero como tenemos la restricción $\epsilon \geq 0$, entonces el máximo está en $\epsilon = 0$ por lo que $\vec{\pi}_\epsilon^* = 0$ y la estrategia óptima es la pura en bonos.
- Si $b \geq 0$ (lo que coincide con $\theta \sqrt{T} \geq |z_\alpha|$ en el enunciado), el máximo se alcanza en $\frac{-b}{2a} = \frac{\theta T - |z_\alpha| \sqrt{T}}{T} = \theta T - \frac{|z_\alpha|}{\sqrt{T}} = \epsilon^*$. Por lo que se tiene

$$\vec{\pi}_\epsilon^* = \left(\theta T - \frac{|z_\alpha|}{\sqrt{T}} \right) \frac{(\sigma \sigma^{tr})^{-1} (\vec{b} - \vec{r})}{\left\| \sigma^{-1}(\vec{b} - \vec{r}) \right\|}$$

la función $f(\vec{\pi}_\epsilon^*)$ queda

$$\begin{aligned}
 f(\vec{\pi}_\epsilon^*) &= -\left(\theta - \frac{|z_\alpha|}{\sqrt{T}}\right)^2 \frac{T}{2} + \left(\theta - \frac{|z_\alpha|}{\sqrt{T}}\right)(\theta T - |z_\alpha| \sqrt{T}) \\
 &= -\left(\theta - \frac{|z_\alpha|}{\sqrt{T}}\right)^2 \frac{T}{2} + \left(\theta - \frac{|z_\alpha|}{\sqrt{T}}\right)\left(\theta - \frac{|z_\alpha|}{\sqrt{T}}\right)T \\
 &= -\left(\theta - \frac{|z_\alpha|}{\sqrt{T}}\right)^2 \frac{T}{2} + \left(\theta - \frac{|z_\alpha|}{\sqrt{T}}\right)^2 T \\
 &= \left(\theta - \frac{|z_\alpha|}{\sqrt{T}}\right)^2 \frac{T}{2} \\
 &= \frac{1}{2}(\theta \sqrt{T} - |z_\alpha|)^2
 \end{aligned}$$

y

$$CaR(x, \vec{\pi}^*, T) = xe^{rT} \left(1 - e^{\frac{1}{2}(\theta \sqrt{T} - |z_\alpha|)^2}\right)$$

□

□

Observación. El numeral 1. nos dice que si la tasa de interés de los activos riesgosos y el bono son iguales es mejor invertir todo en bonos y evitar el capital en riesgo.

Observación. La parte (3) del teorema confirma el hecho que, la existencia de al menos un activo riesgoso con una tasa media de retorno diferente de la tasa sin riesgo ($\vec{b} \neq \vec{r}$) implica la existencia de una estrategia de acción y bono con un CaR negativo, mientras el tiempo T sea suficientemente grande. Entonces si el CaR fuera el único criterio para juzgar una estrategia de inversión, la estrategia pura de bonos no sería óptima si el horizonte de tiempo es grande. Por otro lado, esto muestra una gran diferencia entre el comportamiento del CaR y la varianza como medidas del riesgo, ya que las inversiones puras en bonos serán óptimas con respecto a la varianza.

3.4.1. Problema de optimización de media-varianza de Markowitz

Recordemos el problema de optimización de media-varianza, en el cual se maximiza la media con una restricción sobre la varianza, si reemplazamos la medida del riesgo de la varianza por el CaR obtenemos el problema de *media - CaR*

$$\max_{\pi \in \mathbb{R}^d} E(X^\pi(T)) \quad \text{sujeto a} \quad CaR(x, \vec{\pi}, T) \leq C \quad (3.27)$$

donde C es una constante y asumimos $C \leq xe^{rT}$.

Debido a las representaciones explícitas de $Var(X^\pi(T))$, $CaR(x, \vec{\pi}, T)$ y el método de descomposición de la proposición 3.4.1 podemos resolver el problema en forma explícita, cosa que haremos a continuación.

Proposición 3.4.2. Sea $\theta = \|\sigma^{-1}(\vec{b} - \vec{r})\|$ y supongamos que $b_i \neq r$ para al menos un $i \in \{1, 2, \dots, k\}$. Más aún se asume que C satisface

$$0 \leq C \leq xe^{rT} \quad \text{si} \quad \theta \sqrt{T} < |z_\alpha| \quad (3.28)$$

$$xe^{rT} \left(1 - e^{\frac{1}{2}(\theta \sqrt{T} - |z_\alpha|)^2}\right) \leq C \leq xe^{rT} \quad \text{si} \quad \theta \sqrt{T} \geq |z_\alpha| \quad (3.29)$$

Entonces el problema de media – CaR (3.27) se resuelve por

$$\vec{\pi}^* = \epsilon^* \frac{(\sigma \sigma^{tr})^{-1}(\vec{b} - \vec{r})}{\|\sigma^{-1}(\vec{b} - \vec{r})\|}$$

con

$$\epsilon^* = \left(\theta + \frac{z_\alpha}{\sqrt{T}}\right) + \sqrt{\left(\theta + \frac{z_\alpha}{\sqrt{T}}\right)^2 - 2\frac{c}{T}}$$

donde $c = \ln\left(1 - \frac{C}{x}e^{-rT}\right)$.

La riqueza esperada maximal correspondiente a la condición de CaR es

$$E[X^\pi(T)] = xe^{(r+\epsilon^*\theta)T}$$

Observación. Los requerimientos (3.28) y (3.29) en C nos dicen que la condición del CaR en 3.27 no puede ser ignorada pues C se encuentra entre los valores máximo y mínimo del CaR.

Demostración. Recordemos que en el conjunto $\|\vec{\pi}^{tr}\sigma\| = \epsilon$ la función lineal $(\vec{b} - \vec{r})^{tr}\pi T$ se maximiza con

$$\vec{\pi}_\epsilon = \epsilon \frac{(\sigma \sigma^{tr})^{-1}(\vec{b} - \vec{r})}{\|\sigma^{-1}(\vec{b} - \vec{r})\|} \quad (3.30)$$

entonces, si hay un portafolio $\vec{\pi}$ admisible (Como se definió en la sección 2.4) para el problema (3.27) con $\|\vec{\pi}^{tr}\sigma\| = \epsilon$ entonces, en particular, $\vec{\pi}_\epsilon$ debe ser admisible, es más dada la forma explícita de X^π para la riqueza esperada terminal, $\vec{\pi}_\epsilon$ también maximiza la riqueza esperada terminal en la elipsoide $\|\vec{\pi}^{tr}\sigma\| = \epsilon$.

Además para todo $\vec{\pi}$ admisible con $\|\vec{\pi}^{tr}\sigma\| = \epsilon$, reemplazando en el problema (3.27), se tiene que

$$xe^{rT} \left(1 - e^{f(\vec{\pi})}\right) \leq C$$

y despejando

$$\begin{aligned} 1 - e^{f(\vec{\pi})} &\leq \frac{C}{x}e^{-rT} \\ e^{f(\vec{\pi})} &\geq 1 - \frac{C}{x}e^{-rT} \\ f(\vec{\pi}) &\geq \ln\left(1 - \frac{C}{x}e^{-rT}\right) \end{aligned}$$

usando la ecuación (3.25) y reemplazando por el valor c

$$\begin{aligned} \epsilon z_\alpha \sqrt{T} - \epsilon^2 \frac{T}{2} + (\vec{b} - \vec{r})^{tr} \vec{\pi} T &\geq c \\ (\vec{b} - \vec{r})^{tr} \vec{\pi} T &\geq c + \frac{1}{2}\epsilon^2 T - z_\alpha \epsilon \sqrt{T} \end{aligned} \quad (3.31)$$

En consecuencia, para obtener $\vec{\pi}$ que resuelva el problema de *media - CaR* (3.27) basta considerar todos los vectores $\vec{\pi}_\epsilon$ para todos los ϵ positivos y tales que satisfagan (3.31). Así que reemplazando $\vec{\pi}_\epsilon$ en la parte izquierda de (3.31) tenemos

$$\begin{aligned} (\vec{b} - \vec{r})^{tr} \vec{\pi}_\epsilon T &= (\vec{b} - \vec{r})^{tr} \left(\epsilon \frac{(\sigma \sigma^{tr})^{-1} (\vec{b} - \vec{r})}{\|\sigma^{-1} (\vec{b} - \vec{r})\|} \right) T \\ &= \epsilon \left(\frac{(\vec{b} - \vec{r})^{tr} (\sigma^{-1})^{tr} \sigma^{-1} (\vec{b} - \vec{r})}{\|\sigma^{-1} (\vec{b} - \vec{r})\|} \right) T \end{aligned}$$

por lo que

$$(\vec{b} - \vec{r})^{tr} \vec{\pi}_\epsilon T = \epsilon \|\sigma^{-1} (\vec{b} - \vec{r})\| T \quad (3.32)$$

La cual es una función lineal creciente en ϵ y es igual a 0 cuando $\epsilon = 0$. Entonces, solucionamos el problema (3.27) determinando el ϵ positivo más grande tal que la condición (3.31) siga siendo válida, haciendo uso de la maximalidad de $\vec{\pi}_\epsilon$ vemos que la parte derecha de la ecuación (3.32) es mayor que la parte derecha de (3.31), la cual crece hasta llegar a su mayor valor posible que está en la intersección de estas ecuaciones y está dada por

$$\epsilon \theta T = c + \frac{1}{2} \epsilon^2 T - z_\alpha \epsilon \sqrt{T}$$

es decir

$$\frac{1}{2} \epsilon^2 T + (-z_\alpha \sqrt{T} - \theta T) \epsilon + c = 0$$

lo que solucionamos usando la fórmula cuadrática en ϵ

$$\epsilon = \frac{(z_\alpha \sqrt{T} + \theta T) \pm \sqrt{(z_\alpha \sqrt{T} + \theta T)^2 - 2cT}}{T}$$

tomando el valor positivo del ϵ tenemos

$$\epsilon^* = \left(\theta + \frac{z_\alpha}{\sqrt{T}} \right) + \sqrt{\left(\theta + \frac{z_\alpha}{\sqrt{T}} \right)^2 - \frac{2c}{T}}$$

e insertando $\vec{\pi}^*$ en la ecuación de riqueza nos queda

$$\begin{aligned} E[X^{\pi^*}(T)] &= x e^{(r + (\vec{\pi}^*)^{tr} (\vec{b} - \vec{r}))T} \\ &= x e^{(r + \epsilon^* \theta)T} \end{aligned}$$

□

□

Observación. Note que el valor esperado óptimo depende en las acciones únicamente de la norma $\theta = \|\sigma^{-1} (\vec{b} - \vec{r})\|$ y no hay dependencia explícita en el número de acciones, entonces interpretamos la proposición anterior como un teorema de fundamentación mutua (mutual fund theorem) ya que no hay diferencia entre invertir en un mercado de múltiples acciones y un mercado de un bono y una acción (con coeficientes b y σ adecuados).

Observación. Considerando una función de utilidad $U(x)$ el problema (3.27) se convierte en

$$\max_{\pi \in \mathbb{R}^d} E[U(X^\pi(T))] \quad \text{sujeto a} \quad CaR(x, \vec{\pi}, T) \leq C$$

El método de la proposición anterior para resolver el problema de *media* – *CaR* se puede generalizar siempre y cuando $E[U(X^\pi(T))]$ sea de la forma $h(x)e^{f(\vec{\pi})}$ con $f(\vec{\pi})$ lineal, pues esta es la forma que tiene el problema de la demostración anterior.

Por ejemplo, en la escogencia de la función de Hara $U(x) = \frac{x^\gamma}{\gamma}$ y en el caso de utilidad logarítmica $U(x) = \ln(x)$ funciona la metodología de la proposición. \square

Ahora comparemos el comportamiento de los portafolios óptimos para el problema de *media* – *CaR* con las soluciones del correspondiente problema de *media*-*varianza*. Consideremos el siguiente problema

$$\max_{\vec{\pi} \in \mathbb{R}^k} E[X^\pi(T)] \quad \text{sujeto a} \quad Var(X^\pi(T)) \leq C \quad (3.33)$$

Recordemos que

$$\begin{aligned} X^\pi(T) &= x \exp \left\{ \left(\vec{\pi}^{tr}(\vec{b} - \vec{r}) + r - \frac{\|\vec{\pi}^{tr}\sigma\|^2}{2} \right) T + \vec{\pi}^{tr}\sigma B(T) \right\} \\ Var(X^\pi(T)) &= x^2 \exp \left\{ 2 \left(\vec{\pi}^{tr}(\vec{b} - \vec{r}) + r \right) T \right\} \left(e^{\|\vec{\pi}^{tr}\sigma\|^2 T} - 1 \right) \end{aligned}$$

entonces la condición de la varianza se convierte en

$$x^2 \exp \left\{ 2 \left(\vec{\pi}^{tr}(\vec{b} - \vec{r}) + r \right) T \right\} \left(e^{\|\vec{\pi}^{tr}\sigma\|^2 T} - 1 \right) \leq C$$

Ahora que usando la condición $\|\vec{\pi}^{tr}\sigma\| = \epsilon$ tenemos

$$\begin{aligned} \exp \left\{ 2 \left(\vec{\pi}^{tr}(\vec{b} - \vec{r}) + r \right) T \right\} &\leq \frac{C}{x^2(e^{\epsilon^2 T} - 1)} \\ \vec{\pi}^{tr}(\vec{b} - \vec{r}) &\leq \frac{1}{2} \ln \left(\frac{C}{x^2(e^{\epsilon^2 T} - 1)} \right) - rT \end{aligned} \quad (3.34)$$

para $\epsilon > 0$.

Llamemos

$$h(\epsilon) = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{C}{x^2(e^{\epsilon^2 T} - 1)} \right) - rT$$

y note que $h(\epsilon)$ es estrictamente decreciente con respecto a ϵ , con la propiedad que

$$\lim_{\epsilon \downarrow 0} h(\epsilon) = \infty \quad \text{y} \quad \lim_{\epsilon \rightarrow \infty} h(\epsilon) = -\infty$$

entonces en si usamos el $\vec{\pi}_\epsilon$ dado por (3.30) en la desigualdad (3.34) podemos ver que para valores pequeños de ϵ , la desigualdad no se ve afectada (pues $\|\vec{\pi}_\epsilon^{tr}\sigma\| = \epsilon$). Además recordemos que este es el portafolio con mayor valor esperado terminal de riqueza, sobre todos los portafolios en $\|\vec{\pi}^{tr}\sigma\| = \epsilon$ y más aún maximiza $\vec{\pi}^{tr}(\vec{b} - \vec{r})T$ sobre el conjunto $\|\vec{\pi}^{tr}\sigma\| \leq \epsilon$.

Entonces para encontrar el portafolio óptimo, debemos encontrar un ϵ que corresponda al mayor valor esperado de riqueza, el cual llamaremos $\widehat{\epsilon}$ (para calcular su valor) y consideremos la igualdad

$$(\vec{b} - \vec{r})^{tr} \vec{\pi}_{\widehat{\epsilon}} T = h(\widehat{\epsilon})$$

con un ϵ creciente. Para determinar un $\widehat{\epsilon} > 0$ óptimo, note que

$$E[X^\pi(T)] \leq E[X^{\pi_{\widehat{\epsilon}}}(T)] \quad \forall \pi \text{ con } \|\vec{\pi}^{tr} \sigma\| \leq \widehat{\epsilon}$$

y para todo $\vec{\pi}$ admisible con $\epsilon = \|\vec{\pi}^{tr} \sigma\| > \widehat{\epsilon}$ tenemos

$$(\vec{b} - \vec{r})^{tr} \vec{\pi} T \leq h(\epsilon) < h(\widehat{\epsilon}) = (\vec{b} - \vec{r})^{tr} \vec{\pi}_{\widehat{\epsilon}} T$$

así que la solución de $\widehat{\epsilon}$ está completamente determinada por la solución positiva de

$$\|\sigma^{-1}(\vec{b} - \vec{r})\| \epsilon T = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{C}{x^2 (e^{\epsilon^2 T} - 1)} \right) - rT,$$

el portafolio óptimo está dado por

$$\vec{\pi}_{\widehat{\epsilon}} = \frac{\widehat{\epsilon} (\sigma \sigma^{tr})^{-1} (\vec{b} - \vec{r})}{\|\sigma^{-1}(\vec{b} - \vec{r})\|}$$

y la riqueza terminal esperada es

$$E[X^{\vec{\pi}_{\widehat{\epsilon}}}(T)] = x \exp \left\{ (r + \widehat{\epsilon} \|\sigma^{-1}(\vec{b} - \vec{r})\|) T \right\}.$$

Como el *CaR* es decreciente y la varianza creciente, mientras más grande sea el horizonte de tiempo mayor será el ϵ^* (correspondiente a la medida de *CaR*) y menor el $\widehat{\epsilon}$ (correspondiente a la medida de la varianza) por lo que el portafolio óptimo aumentará la fracción de activos riesgosos en el problema de media-*CaR* y los disminuirá en el problema de media-varianza.

3.5. Modelo de Black-Scholes con Saltos

En este modelo se le permitirán saltos al proceso de precios de la acción⁵, por lo que vamos a cambiar el movimiento browniano por una semimartingala cuyas trayectorias no son necesariamente continuas, lo que hace necesario extender algunas definiciones.

Definición. Un proceso estocástico $(H_t)_{0 \leq t \leq T}$ definido en el espacio filtrado $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{0 \leq t \leq T}, P)$ es una semimartingala, si admite una representación de la forma

$$H = H_0 + M + A$$

donde H_0 es una variable aleatoria finita \mathcal{F}_0 -medible, M es una martingala local con $M_0 = 0$ y A es un proceso de variación acotada con $A_0 = 0$

⁵Recordemos que por la proposición 3.4.2 se considerará un bono y una acción con tasa de interés b y por esto el portafolio ya no será un vector sino un número π

Teorema 3.5.1. Sea $(X_t)_{t \geq 0}$ una semimartingala, $X_0 = 0$. Entonces existe una única semimartingala $(Z_t)_{t \geq 0}$ que satisface la ecuación

$$Z_t = 1 + \int_0^t Z_{s-} dX_s$$

y $(Z_t)_{t \geq 0}$ está dada por

$$Z_t = \exp\left\{X_t - \frac{1}{2}[X, X]_t\right\} \prod_{0 \leq s \leq t} (1 + \Delta X_s) \exp\left\{-\Delta X_s + \frac{1}{2}(\Delta X_s)^2\right\} \quad (3.35)$$

Demostración. La demostración de este teorema se encuentra en [37] teorema 37 página 84 □ □

La notación $Z_{s-} = Z(s-)$ se usa para expresar $\lim_{y \rightarrow s} Z_y$, donde $y < s$.

Definición. Para una semimartingala $(X_t)_{t \geq 0}$ con $X_0 = 0$, definimos la **exponencial estocástica**, denotada $\mathcal{E}(X)$, a la única semimartingala solución de

$$d\mathcal{E}(X(t)) = \mathcal{E}(X(t-))dX(t).$$

Observación. Note que la existencia y unicidad de la exponencial estocástica se debe al teorema 3.5.1.

Definición. El proceso $[X, X]_t^c$ denota la parte continua, o trozos continuos, del proceso $[X, X]_t$, y tenemos

$$[X, X]_t = [X, X]_t^c + X_0^2 + \sum_{0 \leq s \leq t} (\Delta X_s)^2.$$

Ahora vamos a tratar el problema de media-CaR pero el modelo de los precios de las acciones se verá un poco modificado pues en este caso vamos a permitir ciertas fluctuaciones, generadas por un proceso de saltos compuesto, como lo es el proceso de Poisson compensado (ver Anexo A). Primero vamos a describir el proceso de precios con saltos $P(t)$ de un activo riesgoso, el cual está determinado por

$$\frac{dP(t)}{P(t-)} = bdt + dY(t), \quad P(0) = p \quad (3.36)$$

donde $b \in \mathbb{R}$ representa la tasa de interés de la acción, $P(t-) = \lim_{s \rightarrow t} P(s)$, $s < t$ y $Y(t)$ es una semimartingala representada por

$$dY(t) = \sigma dB(t) + \sum_{i=1}^n (\beta_i dN_i(t) - \beta_i \lambda_i dt), \quad t > 0, \quad Y(0) = 0 \quad (3.37)$$

donde $n \in \mathbb{N}$, y para cada $i = 1, \dots, n$ los procesos N_i son procesos de Poisson homogéneos con intensidad λ_i , independientes entre si e independientes de $B(t)$. Cada proceso de Poisson cuenta el número de saltos y la altura de los saltos es β_i y se usan n procesos de

Poisson para simular las diferentes altitudes de los saltos del proceso de precios. Usando la ecuación (3.36) vemos que el proceso $P(t)$ se representa por una exponencial estocástica, así

$$P(t) = pe^{bt} \mathcal{E}(Y(t)) \quad (3.38)$$

donde $\mathcal{E}(Y(t))$ (3.35) está dada por

$$\mathcal{E}(Y(t)) = \exp \left\{ Y(t) - \frac{1}{2} [Y, Y]_t \right\} \prod_{0 < s \leq t} (1 + \Delta Y_s) \exp \left\{ -\Delta Y_s + \frac{1}{2} (\Delta Y_s)^2 \right\}$$

y usando que $[Y, Y]_t = [Y, Y]_t^c + \sum_{0 < s \leq t} (\Delta Y_s)^2$

$$\mathcal{E}(Y(t)) = \exp \left\{ Y(t) - \frac{1}{2} [Y, Y]_t^c \right\} \prod_{0 < s \leq t} (1 + \Delta Y_s) \exp \{-\Delta Y_s\}$$

y como $[Y, Y]_t^c = \sigma^2 t$, resulta

$$\mathcal{E}(Y(t)) = \exp \left\{ \sigma B_t + \sum_{i=1}^n (\beta_i N_i(t) - \beta_i \lambda_i t) - \frac{1}{2} \sigma^2 t \right\} \prod_{0 < s \leq t} (1 + \Delta Y_s) \exp \left\{ \sum_{0 < s \leq t} -\Delta Y_s \right\}$$

Ahora como $\Delta Y_s = Y_s - Y_{s-}$ tenemos que

- El producto $\prod_{0 < s \leq t} (1 + \Delta Y_s)$ multiplica el cambio de altura β_i el número de veces que aparece, es decir $N_i(t)$ veces.
- La suma $\sum \Delta Y_s$ cuenta el número de saltos de altura β_i

por lo que la exponencial estocástica queda

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(Y(t)) &= \exp \left\{ \sigma B_t + \sum_{i=1}^n (\beta_i N_i(t) - \beta_i \lambda_i t) - \frac{1}{2} \sigma^2 t \right\} \prod_{i=1}^n (1 + \beta_i)^{N_i(t)} \exp \left\{ -\sum_{i=1}^n \beta_i N_i(t) \right\} \\ &= \exp \left\{ \sigma B_t - \sum_{i=1}^n (\beta_i \lambda_i t) - \frac{1}{2} \sigma^2 t \right\} \prod_{i=1}^n (1 + \beta_i)^{N_i(t)} \\ &= \exp \left\{ \sigma B_t - \sum_{i=1}^n (\beta_i \lambda_i t) - \frac{1}{2} \sigma^2 t \right\} \exp \left\{ \ln \left(\prod_{i=1}^n (1 + \beta_i)^{N_i(t)} \right) \right\} \\ &= \exp \left\{ \sigma B_t - \sum_{i=1}^n (\beta_i \lambda_i t) - \frac{1}{2} \sigma^2 t \right\} \exp \left\{ \sum_{i=1}^n \ln \left((1 + \beta_i)^{N_i(t)} \right) \right\} \\ &= \exp \left\{ \sigma B_t - \sum_{i=1}^n (\beta_i \lambda_i t) - \frac{1}{2} \sigma^2 t \right\} \exp \left\{ \sum_{i=1}^n \ln \left((1 + \beta_i) N_i(t) \right) \right\} \end{aligned}$$

y

$$\mathcal{E}(Y(t)) = \exp \left\{ \sigma B_t - \sum_{i=1}^n (\beta_i \lambda_i t) - \frac{1}{2} \sigma^2 t + \sum_{i=1}^n \ln (1 + \beta_i) N_i(t) \right\} \quad (3.39)$$

reemplazando en la ecuación de proceso de precios del activo (3.38) resulta

$$P(t) = p \exp \left\{ \left(b - \frac{1}{2} \sigma^2 - \sum_{i=1}^n (\beta_i \lambda_i) \right) t + \sigma B_t + \sum_{i=1}^n \ln(1 + \beta_i) N_i(t) \right\}, \quad t \geq 0 \quad (3.40)$$

La ecuación de riqueza como fue expuesta en (2.12), en términos del portafolio π (con un solo activo riesgoso), es

$$dX^\pi(t) = X^\pi(t) \left(\frac{dP_0(t)}{P_0(t)} + \pi \frac{dP_1(t)}{P_1(t)} \right), \quad t > 0, \quad X^\pi(0) = x$$

que para nuestro modelo, debido a los saltos, se representa por

$$\frac{dX^\pi(t)}{X^\pi(t-)} = \frac{dP_0(t)}{P_0(t-)} + \pi \frac{dP_1(t)}{P_1(t-)}, \quad t > 0, \quad X^\pi(0) = x \quad (3.41)$$

y la solución de esta ecuación diferencial está dada en el siguiente teorema

Teorema 3.5.2. *Con el proceso de precios de acción dados por 3.40, sea X^π el proceso de riqueza correspondiente al portafolio π . Entonces teniendo un capital inicial x y un horizonte de tiempo T tenemos*

$$\begin{aligned} X^\pi(T) &= x \exp \left\{ \left(r + \pi(b - r) - \sum_{i=1}^n \pi \beta_i \lambda_i - \frac{1}{2} \pi^2 \sigma^2 \right) T + \pi \sigma B(T) + \sum_{i=1}^n N_i(T) \ln(1 + \pi \beta_i) \right\} \\ E[X^\pi(T)] &= x \exp \{ (r + \pi(b - r)) T \} \end{aligned}$$

Demostración. Reemplazando de la ecuación diferencial de riqueza (3.41) con los valores de precios del bono P_0 y la acción P_1 tenemos

$$\begin{aligned} \frac{dX^\pi(t)}{X^\pi(t-)} &= rdt + \pi(bdt + dY(t)) \\ &= (r + \pi b)dt + \pi dY(t) \end{aligned} \quad (3.42)$$

Resolviendo la ecuación diferencial (3.41) tenemos

$$X^\pi(T) = e^{(r+\pi b)t} \mathcal{E}(\pi Y(t)) \quad (3.43)$$

usando la definición de la exponencial estocástica tenemos

$$\mathcal{E}(\pi Y(t)) = \exp \left\{ \pi Y(t) - \frac{1}{2} \pi^2 [Y, Y]_t^c \right\} \prod_{0 < s \leq t} (1 + \pi \Delta Y_s) \exp \{-\pi \Delta Y_s\}$$

y usando (3.39) en la ecuación de riqueza resulta

$$\begin{aligned} X^\pi(T) &= x \exp \{ (r + \pi b) T \} \exp \left\{ \pi \sigma B(T) - \sum_{i=1}^n (\pi \beta_i \lambda_i T) - \frac{1}{2} \pi^2 \sigma^2 T + \sum_{i=1}^n \ln(1 + \pi \beta_i) N_i(T) \right\} \\ &= x \exp \left\{ \left(r + \pi(b - r) - \sum_{i=1}^n \pi \beta_i \lambda_i - \frac{1}{2} \pi^2 \sigma^2 \right) T + \pi \sigma B(T) + \sum_{i=1}^n N_i(T) \ln(1 + \pi \beta_i) \right\} \end{aligned}$$

por lo que se tiene la ecuación de riqueza.

Su valor esperado es

$$\begin{aligned} E[X^\pi(T)] &= xE\left[\exp\left\{\left(r + \pi(b-r) - \sum_{i=1}^n \pi\beta_i\lambda_i - \frac{1}{2}\pi^2\sigma^2\right)T + \pi\sigma B(t) + \sum_{i=1}^n N_i(T)\ln(1 + \pi\beta_i)\right\}\right] \\ &= xe^{(r+\pi(b-r))T}E\left[\exp\left\{\pi\sigma B(t) - \frac{1}{2}\pi^2\sigma^2T + \sum_{i=1}^n (N_i(T)\ln(1 + \pi\beta_i) - \pi\beta_i\lambda_iT)\right\}\right] \end{aligned}$$

como $B(t)$ y $N_i(T)$ son independientes entonces

$$\begin{aligned} E[X^\pi(T)] &= xe^{(r+\pi(b-r))T}E\left[\exp\left\{\pi\sigma B(t) - \frac{1}{2}\pi^2\sigma^2T\right\}\right] \\ &\quad E\left[\exp\left\{\sum_{i=1}^n (N_i(T)\ln(1 + \pi\beta_i) - \pi\beta_i\lambda_iT)\right\}\right] \end{aligned}$$

como $e^{\sigma B(t) - \frac{1}{2}\sigma^2t}$ es una martingala con respecto a \mathcal{F}_t (ver el teorema 1.1.8).

$$E[X^\pi(T)] = xe^{(r+\pi(b-r))T}E\left[\exp\left\{\sum_{i=1}^n (N_i(T)\ln(1 + \pi\beta_i) - \pi\beta_i\lambda_iT)\right\}\right]$$

Si notamos $\widehat{N}(t) = N(t) - \lambda t$, entonces $\widehat{N}(t)$ es un proceso de Poisson compensado y por tanto una martingala acotada (Ver anexo A), ahora haciendo uso de la definición de exponencial estocástica tenemos que

$$\exp\{N(t)\ln(1 + \beta) - \beta\lambda t\} = \mathcal{E}(\beta\widehat{N}(t)) = 1 + \beta \int_0^t \mathcal{E}(\beta\widehat{N}(t-))d\widehat{N}(t)$$

por lo que $\mathcal{E}(\beta\widehat{N}(t))$ es una martingala con valor esperado unitario y concluimos que

$$E[X^\pi(T)] = xe^{(r+\pi(b-r))T}.$$

□

□

Para que el logaritmo de la ecuación de precios de una acción (3.40) esté bien definida en este modelo con saltos, necesitamos que la altura de cada salto del proceso de Poisson sea mayor que -1 , es decir $\beta_i > -1$ y más que esto asumiremos que

$$-1 < \beta_1 < \beta_2 < \dots < \beta_n < \infty$$

además teniendo en cuenta que no permitimos valores de riqueza negativos, los valores de los portafolios permitidos deben cumplir las siguientes condiciones

$$\pi \in \begin{cases} \left[-\frac{1}{\beta_n}, -\frac{1}{\beta_1}\right) & \text{si } \beta_n > 0 > \beta_1, \\ \left(-\infty, -\frac{1}{\beta_1}\right] & \text{si } \beta_n < 0, \\ \left[-\frac{1}{\beta_n}, \infty\right) & \text{si } \beta_1 > 0. \end{cases} \quad (3.44)$$

Esto se debe a que el único factor que puede determinar si el resultado es positivo o negativo, en la ecuación de riqueza del teorema 3.5.2, es cada uno de los factores $(1 + \pi\beta_i)$. Explicaremos el primer caso pues los otros dos no necesitan mayor explicación, entonces si $\beta_1 < 0$ y $\beta_n > 0$ y $\pi \in \left[-\frac{1}{\beta_n}, -\frac{1}{\beta_1}\right)$ tenemos que la función $(1 + \pi\beta_i)$ es lineal en π con extremos en $1 - \frac{\beta_i}{\beta_n}$ y $1 - \frac{\beta_i}{\beta_1}$, donde $1 - \frac{\beta_i}{\beta_n} > 0$ puesto que $\beta_n > \beta_i$ y $1 - \frac{\beta_i}{\beta_1} > 0$ puesto que $\beta_i > \beta_1$ y que $\beta_1 < 0$, entonces las funciones $(1 + \pi\beta_i)$ son positivas y los logaritmos están bien definidos.

Ahora para seguir con nuestro análisis necesitamos una definición de capital en riesgo CaR para este modelo, por eso tenemos la siguientes definiciones.

Consideremos el mercado dado por un bono sin riesgo con precio $P_0(t) = p_0 e^{rt}$, $t \geq 0$ para $r \in \mathbb{R}$ y un activo con proceso de precios que satisface $\frac{dP(t)}{P(t-)} = bdt + dY(t)$, para $b \in \mathbb{R}$ y $Y(t)$ semimartingala con $Y(0) = 0$

Definición. Si el capital inicial es x y el horizonte de tiempo es T tenemos que para algún portafolio π la riqueza terminal está dada por $X^\pi(T)$, entonces el α -cuantil de $X^\pi(T)$ está dado por

$$\tilde{\rho}(x, \pi, T) = x \exp \{(\pi(b - r) + r)T\} \tilde{z}_\alpha$$

donde \tilde{z}_α es el α -cuantil de $\mathcal{E}(\pi Y(T))$ es decir

$$\tilde{z}_\alpha = \inf \{z \in \mathbb{R} : P(\mathcal{E}(\pi Y(T)) \leq z) \geq \alpha\}$$

Definición. El CaR está definido por

$$CaR(x, \pi, T) = x e^{rT} (1 - \exp \{\pi(b - r)T\} \tilde{z}_\alpha) \quad (3.45)$$

Teorema 3.5.3. Con el proceso de precios de acción dados por 3.40, sea X^π el proceso de riqueza correspondiente al portafolio π que satisface la condición (3.44). Entonces teniendo un capital inicial x y un horizonte de tiempo T tenemos

$$CaR(x, \pi, T) = x e^{rT} \left(1 - \exp \left\{ \left(\pi(b - r) - \sum_{i=1}^n \pi \beta_i \lambda_i - \frac{1}{2} \pi^2 \sigma^2 \right) T + \tilde{z}_\alpha \right\} \right)$$

donde \tilde{z}_α es el α -cuantil de

$$\pi \sigma B(T) + \sum_{i=1}^n (N_i(T) \ln(1 + \beta_i))$$

es decir el número real \tilde{z}_α que satisface

$$\begin{aligned} \alpha &= P \left(\pi \sigma B(T) + \sum_{i=1}^n (N_i(T) \ln(1 + \beta_i)) \leq \tilde{z}_\alpha \right) \\ &= \sum_{m_1, \dots, m_n=0}^{\infty} \left(\Phi \left(\frac{1}{|\pi \sigma| \sqrt{T}} \left(\tilde{z}_\alpha - \sum_{i=1}^n (m_i \ln(1 + \beta_i)) \right) \right) \times \exp \left\{ -T \sum_{i=1}^n \lambda_i \right\} \prod_{i=1}^n \frac{(T \lambda_i)^{m_i}}{m_i!} \right) \quad (3.46) \end{aligned}$$

Demostración. Supongamos que, para cada $i = 1, \dots, n$, el número de eventos (saltos) del i -ésimo proceso $N_i(T)$ es m_i , condicionando cada proceso de Poisson a $N_i(T) = m_i$, obtenemos

$$\begin{aligned}
& P\left(\pi\sigma B(T) + \sum_{i=1}^n (N_i(T) \ln(1 + \beta_i)) \leq \tilde{z}_\alpha\right) \\
&= P\left(\pi\sigma B(T) + \sum_{i=1}^n (m_i \ln(1 + \beta_i)) \leq \tilde{z}_\alpha\right) \prod_{i=1}^n P(N_i(T) = m_i) \\
&= P\left(\pi\sigma B(T) \leq \tilde{z}_\alpha - \sum_{i=1}^n (m_i \ln(1 + \beta_i))\right) \prod_{i=1}^n P(N_i(T) = m_i) \\
&= \Phi\left(\frac{1}{\pi\sigma\sqrt{T}}\left(\tilde{z}_\alpha - \sum_{i=1}^n (m_i \ln(1 + \beta_i))\right)\right) \prod_{i=1}^n \frac{e^{-\lambda_i T} (\lambda_i T)^{m_i}}{m_i!} \\
&= \Phi\left(\frac{1}{\pi\sigma\sqrt{T}}\left(\tilde{z}_\alpha - \sum_{i=1}^n (m_i \ln(1 + \beta_i))\right)\right) \exp\left\{-T \sum_{i=1}^n \lambda_i\right\} \prod_{i=1}^n \frac{(\lambda_i T)^{m_i}}{m_i!}
\end{aligned}$$

La suma $\sum_{m_1, \dots, m_n=0}^{\infty}$ resulta de condicionar sobre el número de saltos posibles m_i de cada una de las diferentes variables aleatorias $N_i(T)$. □ □

Observación. Desafortunadamente, \tilde{z}_α no puede ser representado en forma explícita como en el modelo anterior (debido a la suma infinita). Aunque, dada la fórmula de $E[X^\pi(T)]$, se vé que el problema correspondiente de *media* – *CaR* (3.27), será resuelto con el mayor π que satisfaga la condición de *CaR* y el requerimiento (3.44), así que para obtener el portafolio óptimo del problema *media* – *CaR* se debe hacer un proceso de iteración numérica, aproximando la suma infinita de la representación de \tilde{z}_α .

Difusión Gaussiana Inversa Generalizada

4.1. Introducción

En la teoría de probabilidad, la distribución gaussiana inversa (notada *IG*) o distribución de Wald es un familia de distribuciones de probabilidad de dos parámetros con soporte en $(0, \infty)$. La función de densidad de estas distribuciones está dada por

$$f(x, \mu, \lambda) = \left(\frac{\lambda}{2\pi x^3} \right)^{\frac{1}{2}} \exp \left\{ \frac{-\lambda(x - \mu)^2}{2\mu^2 x} \right\}$$

para $x > 0$ y donde $\mu > 0$ es la media y $\lambda > 0$ es el parámetro de forma. Esta distribución tiene (como ya se dijo) media μ y varianza $\frac{\mu^3}{\lambda}$.

El adjetivo "inversa" en esta distribución puede ser engañoso, pues una variable aleatoria gaussiana describe el movimiento browniano en un tiempo fijo ($B(t)$, para t fijo), la *IG* describe la distribución del tiempo que toma un movimiento browniano con tendencia positiva en alcanzar un nivel fijo positivo. Es decir que en el proceso estocástico $(X_t)_{t \geq 0}$ dado por

$$\begin{aligned} X_0 &= 0 \\ X_t &= \beta t + \sigma B_t \end{aligned}$$

donde $\beta > 0$ y B_t es un movimiento browniano. El tiempo del primer suceso (first hitting time) en que X_t alcanza un valor $\alpha > 0$ fijo, está distribuido de acuerdo a una *IG*, así ¹

$$T_\alpha = \inf \{0 < t : X_t = \alpha\} \sim IG \left(\frac{\alpha}{\beta}, \frac{\alpha^2}{\sigma^2} \right).$$

La generalización de la distribución *IG*, es llamada la distribución gaussiana inversa generalizada (Notada *GIG*) y es una familia de distribuciones continuas de tres parámetros con función de densidad

$$h(x) = \frac{(\chi/\psi)^{\lambda/2}}{2K_\lambda(\sqrt{\chi\psi})} x^{\lambda-1} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left(\chi x + \frac{\psi}{x} \right) \right\} \quad (4.1)$$

¹Para mayor información consultar [9].

donde K_λ es la función de Bessel de segundo tipo y tenemos los siguientes conjuntos de posibilidades para los parámetros

$$\begin{aligned} \chi > 0, \psi > 0, \lambda \in \mathbb{R} \\ \chi = 0, \psi > 0, \lambda < 0 \\ \chi > 0, \psi = 0, \lambda > 0 \end{aligned} \quad (4.2)$$

la media de una variable aleatoria distribuida GIG es $\frac{\sqrt{\psi}K_{\lambda+1}(\sqrt{\chi\psi})}{\sqrt{\chi}K_\lambda(\sqrt{\chi\psi})}$

Observación. (Tomado de [36]) La función modificada de Bessel de segundo tipo $K_n(x)$ es una de las soluciones de la ecuación diferencial de Bessel modificada

$$x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + x \frac{dy}{dx} - (x^2 + n^2)y = 0$$

En forma integral se representa

$$K_n(x) = \frac{\Gamma(n + \frac{1}{2})(2x)^n}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \frac{\cos t}{(t^2 + x^2)^{n+\frac{1}{2}}} dt$$

Existen muchas otras identidades con respecto a esta función como por ejemplo la siguiente relación de recurrencia

$$K_{n+1}(x) = K_{n-1}(x) + \frac{2n}{x}K_n(x).$$

□

Modelos de difusión en finanzas .

Los procesos de difusión son los procesos estocásticos $(X_t)_{t \geq 0}$, que son solución de la ecuación diferencial estocástica

$$dX_t = \mu(X_t)dt + \sigma(X_t)dB_t, \quad t > 0, \quad X_0 = x \quad (4.3)$$

donde $(B_t)_{t \geq 0}$ es un movimiento browniano estándar, μ es la tendencia y σ el coeficiente de difusión o volatilidad. Hay muchos ejemplo de modelos en finanzas que usan de procesos de difusión, entre ellos

1. **El modelo de Black-Scholes.** El proceso (X_t) modela el precio de un activo, en este caso $\mu(x) = \mu x$ y la volatilidad $\sigma(x) = \sigma x$ y el modelo resulta en un movimiento browniano geométrico.
2. **El modelo de Vasicek.** El proceso (X_t) modela una tasa de interés, donde $\mu(x) = a + bx$ y la volatilidad $\sigma(x) = \sigma x$ con $\sigma > 0$.
3. **El modelo Cox-Ingersoll-Ross.** En este modelo la tendencia es $\mu(x) = a + bx$ y el coeficiente de difusión está dado por $\sigma(x) = \sigma x^\gamma$ para $\gamma = \frac{1}{2}$

Observación. Los modelos de Black-Scholes y Vasicek son considerados dentro de la estructura de modelos gaussianos, pero a partir de datos financieros se puede inferir que los precios de los activos muestran fluctuaciones que no pueden ser modeladas con procesos gaussianos (pues tienen colas más pesadas), por esta razón (para poder modelar datos financieros con colas pesadas), los modelos como el de Cox-Ingersoll-Ross son generalizados en una clase de difusiones llamadas difusiones gaussianas inversas generalizadas.

4.2. El problema de *media* – *CaR* con un proceso *GIG*

En esta sección vamos a considerar el modelo gaussiano inverso generalizado para los retornos de los precios de activos, en un mercado compuesto por un bono y una acción. Vamos a considerar las siguientes ecuaciones, la cuales determinan un mercado general de difusiones

$$\begin{aligned} dP_0(t) &= P_0(t)r dt, & P_0(0) &= 1, \\ dP(t) &= P(t)(b dt + dY(t)), & P(0) &= p, \\ Y(t) &= U(t) - u, & Y(0) &= 0. \end{aligned}$$

donde $U(t)$ representa un proceso *GIG*, para deducir la ecuación diferencial estocástica que rige a $U(t)$ vamos a tomar el caso especial de $\sigma(x) = \sigma x^\gamma$ para $\sigma > 0$ y $\gamma \geq \frac{1}{2}$ en la ecuación (4.3).

Usando un resultado de [6], podemos decir que $U(t)$ está univocamente determinado por su función de densidad $h(x)$ y su coeficiente de difusión σ , pues ellos determinan la tendencia μ la cual está dada por

$$\mu(u) = \frac{\sigma^2(u)}{2} \frac{d}{du} \ln(\sigma^2(u)h(u)) \quad (4.4)$$

así la densidad de $U(t)$ el proceso *GIG*, está dada por $h(x)$ como en (4.1) y para calcular $\mu(x)$, miremos primero $\frac{d}{du} \ln(\sigma^2(u)h(u))$ y por simplicidad hagamos $A = \frac{(\chi/\psi)^{\lambda/2}}{2K_\lambda(\sqrt{\chi\psi})}$

$$\begin{aligned} \frac{d}{du} \ln(\sigma^2(u)h(u)) &= \frac{d}{du} \ln\left(\sigma^2 u^{2\gamma} A u^{\lambda-1} \exp\left\{\frac{-1}{2}(\chi u + \psi u^{-1})\right\}\right) \\ &= \frac{d}{du} \ln\left(\sigma^2 A u^{2\gamma+\lambda-1} \exp\left\{\frac{-1}{2}(\chi u + \psi u^{-1})\right\}\right) \\ &= \frac{\sigma^2 A \exp\left\{\frac{-1}{2}(\chi u + \psi u^{-1})\right\} \left((2\gamma + \lambda - 1)u^{(2\gamma+\lambda-1)-1} + u^{(2\gamma+\lambda-1)}\left(\frac{-1}{2}(\chi - \psi u^{-2})\right)\right)}{\sigma^2 A u^{2\gamma+\lambda-1} \exp\left\{\frac{-1}{2}(\chi u + \psi u^{-1})\right\}} \\ &= \frac{(2\gamma + \lambda - 1)u^{(2\gamma+\lambda-1)-1} + u^{(2\gamma+\lambda-1)}\left(\frac{-1}{2}(\chi - \psi u^{-2})\right)}{u^{2\gamma+\lambda-1}} \\ &= (2\gamma + \lambda - 1)u^{-1} + \left(\frac{\psi}{2u^2} - \frac{\chi}{2}\right) \end{aligned} \quad (4.5)$$

Ahora reemplazando (4.5) en (4.4) nos resulta

$$\begin{aligned}\mu(u) &= \frac{\sigma^2 u^{2\gamma}}{2} \left(\frac{(2\gamma + \lambda - 1)}{u} + \frac{\psi}{2u^2} - \frac{\chi}{2} \right) \\ &= \frac{\sigma^2 u^{2\gamma}}{2} \left(\frac{2(2\gamma + \lambda - 1)u + \psi - \chi u^2}{2u^2} \right) \\ &= \frac{1}{4} \sigma^2 u^{2\gamma-2} (2(2\gamma + \lambda - 1)u + \psi - \chi u^2)\end{aligned}$$

El proceso de difusión *GIG* dado por la ecuación diferencial estocástica (4.3), es decir

$$dU(t) = \frac{1}{4} \sigma^2 U^{2\gamma-2}(t) (\psi + 2(2\gamma + \lambda - 1)U(t) - \chi U^2(t)) dt + \sigma U^\gamma(t) dB(t) \quad (4.6)$$

donde $U(0) = u > 0$.

El espacio de parámetros admisibles, está dado por $\chi, \psi \geq 0$, $\max(\chi, \psi) > 0$ y usando (4.2) tenemos

$$\begin{aligned}\lambda &\in \mathbb{R} \quad \text{Si } \chi, \psi > 0, \\ \lambda &\leq \min(0, 2(1 - \gamma)) \quad \text{Si } \chi = 0, \psi > 0, \\ \lambda &\geq \min(0, 2(1 - \gamma)) \quad \text{Si } \chi > 0, \psi = 0.\end{aligned}$$

como se puede ver en [6].

La ventaja de este modelo de *GIG* es que además de ser una extensión de los modelos de Black-Scholes y de Cox-Ingersoll-Ross, el proceso de precios resultante tiene un parecido de estructura con el movimiento browniano geométrico. El proceso de precios queda

$$\begin{aligned}P(t) &= p \exp \left\{ bt + \frac{1}{4} \sigma^2 \int_0^t U^{2\gamma-2}(s) (\psi + 2(2\gamma + \lambda - 1)U(s) - \chi U^2(s)) ds \right\} \\ &\quad \times \exp \left\{ \sigma \int_0^t U^\gamma(s) dB(s) - \frac{1}{2} \sigma^2 \int_0^t U^{2\gamma}(s) ds \right\}\end{aligned} \quad (4.7)$$

Para describir el proceso de riqueza necesitaremos unas propiedades que se muestran en el siguiente lema

Lema 4.2.1. *Sea $U(t)$ un proceso de difusión *GIG* dado por (4.6) y π un portafolio con $\pi > 0$, entonces el proceso $\tilde{U} = \pi U$ es nuevamente un proceso de difusión *GIG* con $\tilde{U}(0) = \pi U(0)$ y parámetros*

$$\tilde{\sigma} = \sigma \pi^{1-\gamma}, \quad \tilde{\psi} = \psi \pi, \quad \tilde{\chi} = \frac{\chi}{\pi}.$$

Los parámetros γ y λ se mantienen iguales.

Demostración. Note primero, que todos los parámetros de \tilde{U} satisfacen las condiciones de no negatividad puesto que $\pi > 0$.

También satisfacen (4.6), lo que se sigue de calcular $d\tilde{U}(t) = d(\pi U(t)) = \pi dU(t)$ así

$$\begin{aligned}
\pi dU(t) &= \pi \left[\frac{1}{4} \sigma^2 U^{2\gamma-2}(t) (\psi + 2(2\gamma + \lambda - 1)U(t) - \chi U^2(t)) dt + \sigma U^\gamma(t) dB(t) \right] \\
&= \frac{1}{4} \sigma^2 U^{2\gamma-2}(t) (\pi\psi + 2(2\gamma + \lambda - 1)\pi U(t) - \pi\chi U^2(t)) dt + \pi\sigma U^\gamma(t) dB(t) \\
&\quad \text{Usando } \tilde{\psi} = \pi\psi, \pi\tilde{\chi} = \chi, \text{ y } \pi^\gamma\tilde{\sigma} = \pi\sigma \\
&= \frac{1}{4} \tilde{\sigma}^2 (\pi U)^{2\gamma-2}(t) (\tilde{\psi} + 2(2\gamma + \lambda - 1)\pi U(t) - \tilde{\chi}(\pi U)^2(t)) dt + \tilde{\sigma}(\pi U)^\gamma(t) dB(t) \\
&= \frac{1}{4} \tilde{\sigma}^2 \tilde{U}^{2\gamma-2}(t) (\tilde{\psi} + 2(2\gamma + \lambda - 1)\pi U(t) - \tilde{\chi}\tilde{U}^2(t)) dt + \tilde{\sigma}\tilde{U}^\gamma(t) dB(t) \\
&= d\tilde{U}(t)
\end{aligned}$$

todo esto con $t \geq 0$

□

□

Observación. Como consecuencia del anterior lema, el proceso de riqueza tiene una forma explícita. De hecho es muy similar a la forma del proceso de precios del activo P

$$X^\pi(t) = x \exp \left\{ (1 - \pi)rt + \tilde{b}t + \tilde{Y}(t) - \frac{1}{2}[\tilde{Y}, \tilde{Y}]_t \right\}, \quad t \geq 0, \quad (4.8)$$

donde

$$\tilde{b} = \pi b \text{ y } \tilde{Y}(t) = \tilde{U}(t) - \pi u, \quad t \geq 0$$

para cualquier portafolio positivo π

□

De acuerdo con la definición del $CaR(x, \pi, T)$ tenemos que determinar el \tilde{z}_α , es decir el α -cuantil de $\exp \left\{ \tilde{Y}(T) - \frac{1}{2}[\tilde{Y}, \tilde{Y}]_T \right\}$. Aquí vemos una de las grandes ventajas del CaR como medida de riesgo, pues no depende de la existencia de los momentos y está bien definida, aún cuando la media sea infinita.

Pero para resolver el problema de *media* - CaR , tenemos que asegurar que $X^\pi(T)$ tiene media finita. En general esto no es fácil de decidir y se dice que es natural asumir que $U(T)$ o $\tilde{U}(T)$ tengan la distribución estacionaria del proceso $U = (U(t))_{t \geq 0}$ o $\tilde{U} = (\tilde{U}(t))_{t \geq 0}$ respectivamente (es decir que sus momentos no cambian con el tiempo), cosa que asumiremos para dar un resultado sobre la existencia de $E[X^\pi(T)]$.

Teorema 4.2.2. *Asumamos que $U(T)$ y $\tilde{U}(T)$ son distribuciones GIG con parámetros ψ, χ, λ y $\tilde{\psi}, \tilde{\chi}, \lambda$ respectivamente (es decir que tienen las distribuciones estacionarias de los procesos U y \tilde{U} respectivamente). Asumamos que π es un portafolio positivo. Entonces $X^\pi(T)$ tiene media finita si $\tilde{\chi} = \chi/\pi > 2$*

Demostración. Como \tilde{U} siempre es positivo, estimamos

$$X^\pi(T) \leq x \exp \left\{ (1 - \pi)rT + \tilde{b}T + \tilde{U}(T) - \pi u \right\}$$

y como, $E \left[\exp \left\{ \tilde{U}(T) \right\} \right] < \infty$ implica que $E[X^\pi(T)] < \infty$, demostraremos solamente la primera desigualdad.

Usando la función de densidad $h(x)$ de una GIG dada por (4.1) tenemos que

$$\begin{aligned}
E[\exp\{\tilde{U}(T)\}] &= \int_{-\infty}^{\infty} \exp\{u\} dh(u) \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \exp\{u\} \frac{(\tilde{\chi}/\tilde{\psi})^{\lambda/2}}{2K_{\lambda}(\sqrt{\tilde{\chi}\tilde{\psi}})} u^{\lambda-1} \exp\left\{-\frac{\tilde{\chi}u + \frac{\tilde{\psi}}{u}}{2}\right\} du \\
&= \frac{(\tilde{\chi}/\tilde{\psi})^{\lambda/2}}{2K_{\lambda}(\sqrt{\tilde{\chi}\tilde{\psi}})} \int_{-\infty}^{\infty} u^{\lambda-1} \exp\left\{-\frac{\tilde{\chi}u + \frac{\tilde{\psi}}{u} - 2u}{2}\right\} du \left(\frac{(\tilde{\chi}-2)/\tilde{\psi})^{\lambda/2}}{2K_{\lambda}(\sqrt{\tilde{\psi}(\tilde{\chi}-2)})} \frac{2K_{\lambda}(\sqrt{\tilde{\psi}(\tilde{\chi}-2)})}{(\tilde{\chi}-2)/\tilde{\psi})^{\lambda/2}} \right) \\
&= \frac{(\tilde{\chi}/\tilde{\psi})^{\lambda/2} 2K_{\lambda}(\sqrt{\tilde{\psi}(\tilde{\chi}-2)})}{2K_{\lambda}(\sqrt{\tilde{\chi}\tilde{\psi}}) (\tilde{\chi}-2)/\tilde{\psi})^{\lambda/2}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(\tilde{\chi}-2)/\tilde{\psi})^{\lambda/2}}{2K_{\lambda}(\sqrt{\tilde{\psi}(\tilde{\chi}-2)})} u^{\lambda-1} \exp\left\{-\frac{(\tilde{\chi}-2)u + \frac{\tilde{\psi}}{u}}{2}\right\} du
\end{aligned}$$

como la integral está aplicada a la función de densidad de una GIG (4.1), con parámetros $\lambda, \tilde{\chi}-2, \tilde{\psi}$, tenemos que su valor es 1 y por lo tanto

$$\begin{aligned}
E[\exp\{\tilde{U}(T)\}] &= \frac{(\tilde{\chi}/\tilde{\psi})^{\lambda/2} 2K_{\lambda}(\sqrt{\tilde{\psi}(\tilde{\chi}-2)})}{2K_{\lambda}(\sqrt{\tilde{\chi}\tilde{\psi}}) (\tilde{\chi}-2)/\tilde{\psi})^{\lambda/2}} \\
&= \frac{(\tilde{\chi}/\tilde{\psi})^{\lambda/2}}{(\tilde{\chi}-2)/\tilde{\psi})^{\lambda/2}} \frac{K_{\lambda}(\sqrt{\tilde{\psi}(\tilde{\chi}-2)})}{K_{\lambda}(\sqrt{\tilde{\chi}\tilde{\psi}})} \\
&= \left(\frac{\tilde{\chi}-2}{\tilde{\chi}}\right)^{-\lambda/2} \frac{K_{\lambda}(\sqrt{\tilde{\psi}\tilde{\chi}(1-2/\tilde{\chi})})}{K_{\lambda}(\sqrt{\tilde{\chi}\tilde{\psi}})}
\end{aligned}$$

usando que $\tilde{\psi} = \psi\pi$ y que $\tilde{\chi} = \chi/\pi$ obtenemos

$$E[\exp\{\tilde{U}(T)\}] = \frac{K_{\lambda}(\sqrt{\chi\psi(1-2/\tilde{\chi})})}{K_{\lambda}(\sqrt{\chi\psi})(1-2/\tilde{\chi})^{\lambda/2}}$$

donde K_{λ} es una función generalizada de Bessel de tercer tipo, entonces se tiene que la parte derecha de la ecuación anterior es finita siempre que $\tilde{\chi} > 2$. \square \square

Si el parámetro original satisface $\chi > 2$ y $\pi \in [0, 1]$, entonces $\tilde{\chi} > 2$ y en este caso X^{π} tiene media finita. En este caso también el problema de *media - CaR* está bien definido y puede ser resuelto, aunque no debemos esperar una solución analítica.

En siguiente sección solucionaremos el problema de *media - CaR*, considerando el modelo generalizado de Cox-Ingersoll-Ross, numéricamente pero haciendo uso de las propiedades analíticas encontradas en esta sección.

4.3. Simulaciones y aplicaciones

En esta sección haremos tres simulaciones que corroboran la teoría mostrada en el documento, además de ayudarnos al entendimiento de dicha teoría.

Las simulaciones son:

1. Simulación de la solución del problema de media- CaR para el modelo de Cox-Ingersoll-Ross, el objetivo es encontrar una solución al problema pues no se tiene una solución explícita.
2. Ejemplo comparativo de las medidas de CaR y varianza.
3. Ejemplo de simulaciones para replicar datos reales de acciones de Ecopetrol e Isa.

4.3.1. Modelo generalizado de Cox-Ingersoll-Ross.

A continuación haremos una simulación para solucionar el problema de *media - CaR* considerando el modelo generalizado de Cox-Ingersoll-Ross, es decir el modelo de mercado GIG con parámetros $\gamma = 1, \chi = 0$. Por lo que, para el modelo de Cox-Ingersoll-Ross, de (4.6) obtenemos la siguiente ecuación para $dU(t)$

$$dU(t) = \frac{1}{4}\sigma^2(\psi + 2(1 + \lambda)U(t))dt + \sigma U(t)dB(t) \quad (4.9)$$

para hallar la forma explícita de $U(t)$ debemos solucionar (4.9), la cual es una ecuación diferencial estocástica lineal y usando la siguiente notación:

$$\begin{aligned} \xi &= \frac{1}{4}\sigma^2\psi \\ \beta &= \frac{1}{2}\sigma^2(1 + \lambda) \end{aligned}$$

la ecuación (4.9) se convierte en

$$dU(t) = (\xi + \beta U(t))dt + \sigma U(t)dB(t)$$

para solucionarla, llamemos $Z(t)$ al movimiento browniano geométrico representado de las siguientes dos formas

$$\begin{aligned} dZ(t) &= \beta Z(t)dt + \sigma Z(t)dB(t), \quad Z(0) = 1 \\ Z(t) &= \exp\left\{\left(\beta - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t + \sigma B(t)\right\} \end{aligned}$$

y consideremos el proceso estocástico $M(t) = Z^{-1}(t)$, para el cual usando la fórmula de Itô (con $f(t, x) = x^{-1}$) obtenemos

$$\begin{aligned} d(Z^{-1}(t)) &= \frac{-1}{Z^2(t)}dZ(t) + \frac{1}{2}\frac{2}{Z^3(t)}\langle dZ(t) \rangle^2 \\ &= \frac{-1}{Z^2(t)}(\beta Z(t)dt + \sigma Z(t)dB(t)) + \frac{1}{2}\frac{2}{Z^3(t)}\sigma^2 Z^2(t)dt \\ &= Z^{-1}(t)(-\beta + \sigma^2)dt - \sigma Z^{-1}(t)dB(t) \end{aligned}$$

es decir

$$d(M(t)) = (-\beta + \sigma^2)M(t)dt - \sigma M(t)dB(t)$$

cuya solución es

$$M(t) = \exp \left\{ \left(-\beta + \frac{\sigma^2}{2}\right)t - \sigma B(t) \right\}$$

para hallar la solución de $U(t)$ ahora usaremos la regla del producto para procesos de Itô, así

$$\begin{aligned} d(M(t)U(t)) &= M(t)dU(t) + U(t)dM(t) + dM(t) \cdot dU(t) \\ &= M(t) \left((\xi + \beta U(t))dt + \sigma U(t)dB(t) \right) + U(t) \left((-\beta + \sigma^2)M(t)dt - \sigma M(t)dB(t) \right) \\ &\quad - \sigma^2 M(t)U(t)dt \\ &= \xi M(t)dt + \beta M(t)U(t)dt + \sigma M(t)U(t)dB(t) - \beta U(t)M(t)dt + \sigma^2 U(t)M(t)dt \\ &\quad - \sigma U(t)M(t)dB(t) - \sigma^2 M(t)U(t)dt \\ d(M(t)U(t)) &= \xi M(t)dt \end{aligned}$$

Integrando a ambos lados de la última ecuación (recuerde que $M(0) = Z(0) = 1$), obtenemos

$$M(t)U(t) = u + \xi \int_0^t M(s)ds$$

y el resultado es

$$U(t) = Z(t) \left(u + \xi \int_0^t M(s)ds \right)$$

finalmente reemplazando, resulta la siguiente forma explícita para U :

$$U(t) = \exp \left\{ \frac{1}{2} \sigma^2 \lambda t + \sigma B(t) \right\} \left(u + \frac{1}{4} \sigma^2 \psi \int_0^t \exp \left\{ -\frac{1}{2} \sigma^2 \lambda s - \sigma B(s) \right\} ds \right) \quad (4.10)$$

$t \geq 0$

cuya media es:

$$E[U(t)] = \begin{cases} \exp \left\{ (\lambda + 1) \frac{\sigma^2}{2} t \right\} \left(u + \frac{\psi}{2(\lambda + 1)} \left(1 - \exp \left\{ -(\lambda + 1) \frac{\sigma^2}{2} t \right\} \right) \right) & \text{si } \lambda \neq -1 \\ u + \frac{1}{2} \sigma^2 \psi t & \text{si } \lambda = -1 \end{cases}$$

Más aún, note que de la ecuación 4.9 tenemos

$$Y(t) = U(t) - u = \frac{1}{4} \sigma^2 \psi t + \frac{1}{2} (1 + \lambda) \sigma^2 \int_0^t U(s)ds + \sigma \int_0^t U(s)dB(s) \quad (4.11)$$

y obtenemos las mismas representaciones para $\tilde{U}(t)$ y $\tilde{Y}(t)$, haciendo la substitución $\tilde{\psi} = \pi\psi$.

El proceso de precios de la acción $P(t)$ está dado por (4.7), que en este caso particular queda

$$P(t) = p \exp \left\{ bt + \sigma \int_0^t U(s)dB(s) - \frac{1}{2} \sigma^2 \int_0^t U^2(s)ds \right\}$$

Una solución explícita del problema *media* – *CaR* no parece posible, por eso vamos a simular la solución y usar aproximaciones numéricas.

Usaremos el siguiente algoritmo para solucionar el problema de *media* – *CaR* :

Para un N grande tomamos $i = 1, \dots, N$:

1. Simulamos muestras de caminos $(B_i(t))_{t \in [0, T]}$ para el movimiento browniano $(B(t))_{t \in [0, T]}$
2. Computamos las realizaciones $U_i(T)$ y $\int_0^T U_i^2(t) dt$ de los procesos $U(T)$ y $\int_0^T U^2(t) dt$ respectivamente, con cada uno de los caminos $(B_i(t))_{t \in [0, T]}$.
3. Para “todos” los $\pi \in \mathbb{R}$ computamos

$$\widetilde{Z}_i^\pi(T) = \pi U_i(T) - \frac{1}{2} \pi^2 \sigma^2 \int_0^T U_i^2(t) dt - \pi u$$

lo que corresponde a la parte aleatoria del proceso de riqueza.

4. Usamos los estimadores $\widehat{\mu}(\pi)$ y $\widehat{v}(x, \pi, T)$ para $E[X^\pi(T)]$ y $CaR(x, \pi, T)$ de la siguiente manera:

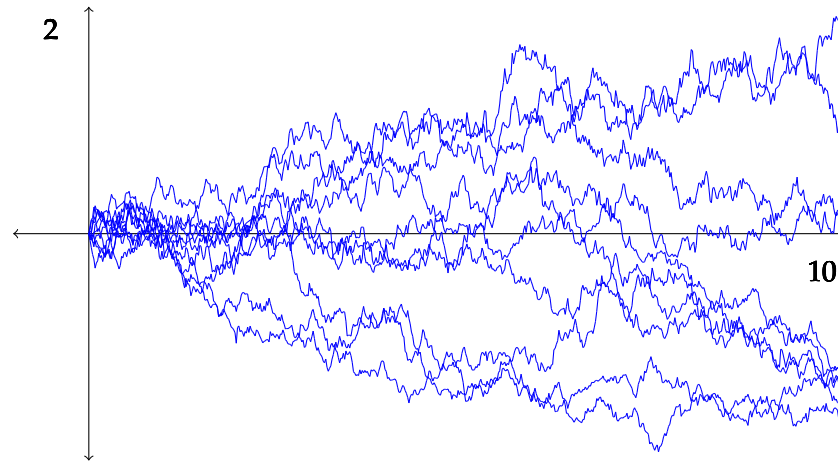
$$\begin{aligned} \widehat{\mu}(\pi) &:= \frac{x}{N} \sum_{i=1}^N \exp \left\{ (r + (b + r)\pi)T + \widetilde{Z}_i^\pi(T) \right\} \\ \widehat{v}(x, \pi, T) &:= x e^{rT} (1 - \exp \{ \pi(b - r)T + \widetilde{z}_\alpha(\pi) \}) \end{aligned}$$

donde \widetilde{z}_α es el α -cuantil de la distribución empírica de $\widetilde{Z}_i^\pi(T)$.

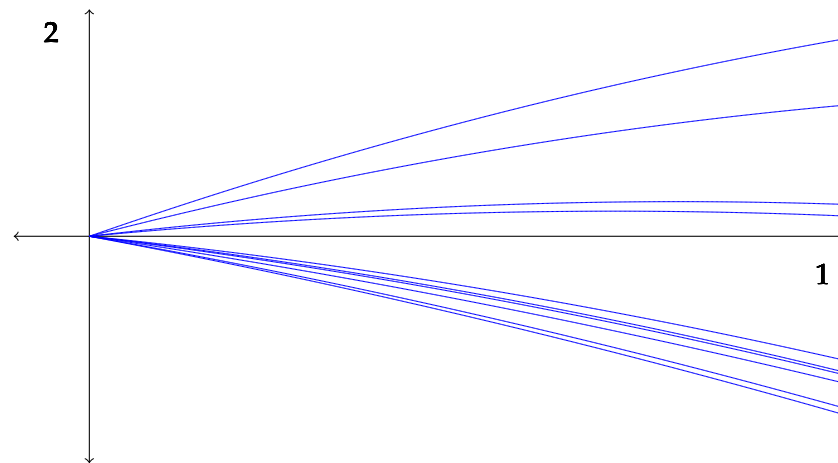
5. Finalmente escojemos el portafolio π con el mayor valor para $\widehat{\mu}(\pi)$ y tal que $\widehat{v}(x, \pi, T)$ está por debajo de una cota C para el *CaR*.

A continuación veremos unas gráficas resultado de la simulación para los parámetros $T = 10.0$, $M = 1000.0$, $N = 100.0$, $x = 1000.0$, $r = 0.05$, $b = 0.10$, $\psi = 4$, $\lambda = 0$, $\sigma = 0.05$, $u = 5$, $\alpha = 0.01$ y $C = 500$.

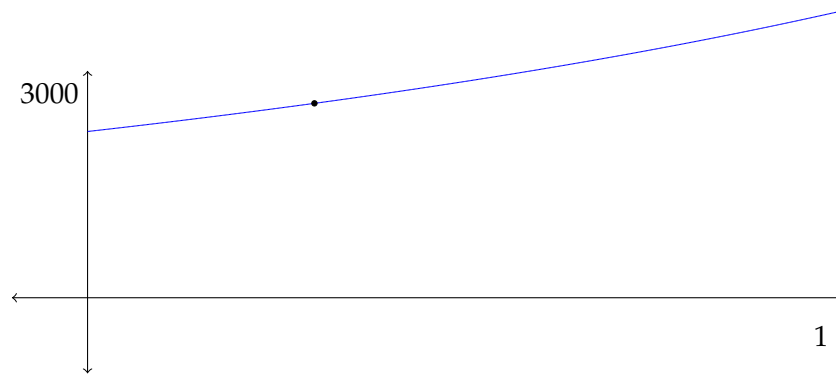
Esta primera gráfica nos muestra el comportamiento de $Z^\pi(t)_{0 \leq t \leq 10}$ como función del tiempo

Figura 4.1: Diez caminos de $Z^\pi(t)_{0 \leq t \leq 10}$.

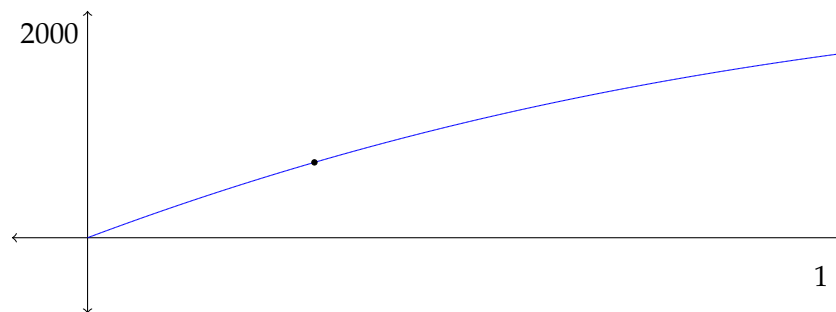
vemos ahora el comportamiento de $(Z^\pi(10))_{\pi \in [0,1]}$, como función del portafolio π

Figura 4.2: Diez caminos de $Z^\pi(10)_{\pi \in [0,1]}$.

en la siguiente gráfica vemos el comportamiento del valor esperado de la riqueza $E[X^\pi(10)]$ como función de π

Figura 4.3: $E[X^\pi(10)]$.

y la última gráfica representa el comportamiento del capital de riesgo $CaR(1000, \pi, 10)$ como función de π

Figura 4.4: $CaR(1000, \pi, 10)$.

Podemos observar que el punto remarcado representa el π óptimo para la restricción de $CaR(x, \pi, 10) \leq 500$.

El valor esperado y el CaR son crecientes, como era de esperarse, entonces el portafolio óptimo se obtiene escogiendo el valor que hace que $CaR(x, \pi, 10) = 500$.

4.3.2. Comparativo del CaR y la varianza

Vamos ahora a hacer un comparativo entre las medidas del CaR y la varianza para el modelo de Black-Scholes. En las siguientes gráficas se ve el comportamiento de la varianza y del CaR como funciones del tiempo para: un horizonte de tiempo $T = 10$, un capital inicial $x = 1000$, una tasa de interés de los bonos $r = 0.05$, una tasa de interés de la acción $b = 0.10$, un valor de coeficiente de difusión $\sigma = 0.20$ y un cuantil $\alpha = 0.05$. En la figura 4.5 la gráfica de la parte izquierda muestra el comportamiento de la varianza para un portafolio $\pi = 1$, y la gráfica de la derecha muestra $CaR(1000, 1, t)$ para $0 \leq t \leq 10$.

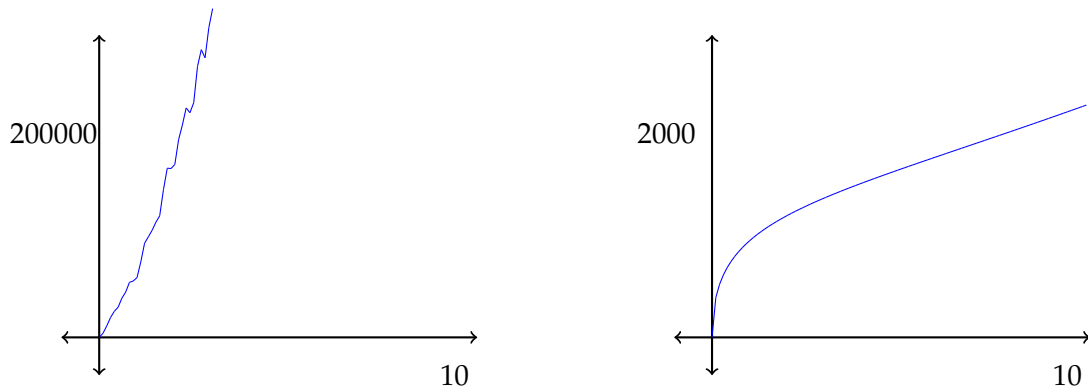


Figura 4.5: Varianza vs Capital en Riesgo, con $\pi = 1$

En la figura 4.6 la gráfica de la parte izquierda muestra el comportamiento de la varianza para un portafolio $\pi = 0.2$, y la gráfica de la derecha muestra $CaR(1000, 0.2, t)$ para $0 \leq t \leq 10$.

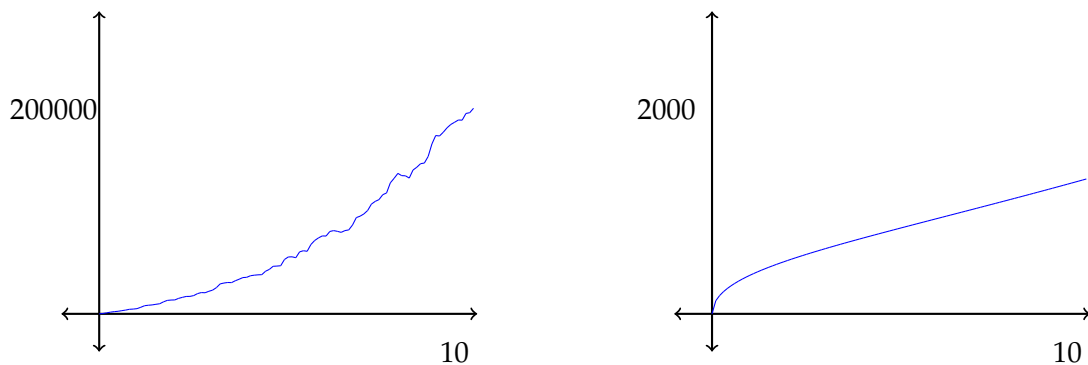


Figura 4.6: Varianza vs Capital en Riesgo, con $\pi = 0.2$

De las gráficas anteriormente mostradas podemos observar que:

1. La escala de la varianza es 200000 y la escala del CaR es 2000, es decir que las medidas no son comparables en la misma escala.
2. La varianza crece mucho más rápido que el CaR para un horizonte de tiempo

mediano a largo, y se nota mucho más la diferencia mientras el valor del portafolio π sea mayor.

3. En comparación del problema de media-varianza y el problema de media-*CaR*, que maximizan el valor esperado y restringen con una cota ya sea la varianza o el *CaR*, tenemos que, en un horizonte de tiempo largo, el problema de media-varianza restringirá la inversión en acciones riesgosas, mientras que en el problema de media-*CaR*, como el *CaR* no crece tan rápido, se pueden mantener las inversiones en acciones riesgosas.

4.3.3. Ejemplo comparativo con datos de Ecopetrol e Isa

Por último vamos a tomar datos reales² de un par de empresas que tienen acciones en la bolsa de Colombia, estas son Ecopetrol e Isa, y simularemos por medio de los modelos de Black-Scholes y de difusión *GIG* los valores del retorno esperado, varianza y *CaR*, para ver si los resultados son coherentes con los obtenidos en el documento y haremos una proyección a futuro.

Caso 1. Acciones de Ecopetrol. Vamos a hacer un comparativo, entre los valores reales y los valores de simulación para el modelo de Black-Scholes y para el modelo de difusión gaussiana inversa generalizada (*GIG*), aprovechando que tenemos el histórico de precios de las acciones de Ecopetrol.

Los datos que se poseen de las acciones de Ecopetrol inician el 26 de Septiembre de 2007 ($T = 0$) con un precio de \$2.045 cada acción y a la fecha de 24 de Septiembre de 2010 ($T = 3$) el precio de la acción se encontraba en \$3.585.

Para los datos dados de Ecopetrol se hallaron los coeficientes necesarios para hacer una simulación en los modelos de Black-Scholes y de difusión *GIG*, así que se calcularon los parámetros b y σ , los valores calculados son $b = 0.185$ y $\sigma = 0.057$, además tomamos los valores $\psi = 3$, $\gamma = 1$, $\lambda = 0$ y $\chi = 0$.

En la siguiente gráfica vemos un comparativo entre los datos reales y la realización de un camino para cada uno de los modelos.

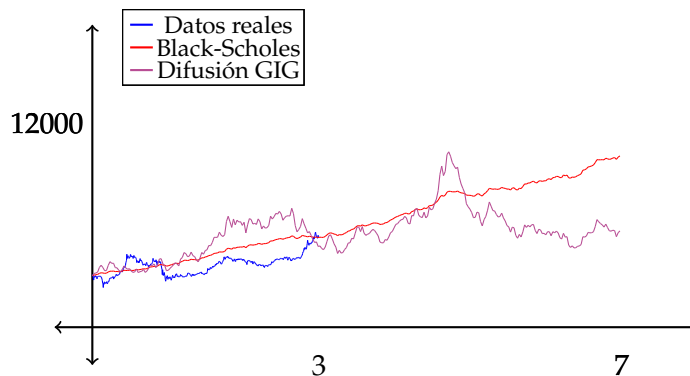


Figura 4.7: Ecopetrol

Haciendo la simulación completa podemos calcular la varianza y el capital en riesgo para el modelo de Black-Scholes y de Difusión *GIG*, de modo que tenemos los siguientes resultados.

Modelo	$CaR(2045, 1, 3)$	Varianza($X^1(3)$)	$E[X^1(3)]$
Black-Scholes	-322.383	121556.097	3578.317
GIG	4379.169	4046647.881	3727.070

²La fuente de los datos, de Ecopetrol e Isa, es la bolsa de valores de Colombia

De los datos vemos que el CaR en el modelo de Black-Scholes es negativo, esto se debe a que el retorno medio de la acción es muy alto, con una volatilidad muy baja, comparado con la tasa de interés del bono (para este caso $r = 0.05$). Estos resultados nos dicen que la acción tiene un comportamiento muy bueno de tal forma que el riesgo de perder es prácticamente nulo y el retorno esperado es muy alto. Por otro lado los resultados en el caso del modelo de difusión GIG , son los esperados y para este caso quieren decir que el 95% de las pérdidas posibles comparadas con el bono son menores a \$4379.169. Como una proyección a futuro podemos tomar $T = 7$ (Septiembre de 2014) con lo que las mediciones están dadas por

Modelo	$CaR(2045, 1, 7)$	Varianza($X^1(7)$)	$E[X^1(7)]$
Black-Scholes	-1960.959	526162.496	7444.755
GIG	5419.759	17746521.694	7805.065

En las proyecciones se evidencia el hecho que el CaR es creciente en el modelo de difusión GIG .

El valor de la varianza significa que en el modelo de Black scholes la desviación estándar es 725.37 lo que es totalmente razonable y además el 93.33 por ciento de los resultados se encuentran en el intervalo $[5268.64, 9620.87]$, lo que es muy optimista. Y en el modelo de GIG la desviación estándar es 4212.66, que aunque es un poco alta es un valor razonable y además el 93.33 por ciento de los resultados se encuentran en el intervalo $[-4832.92, 20443.05]$, lo que se parece más a las acciones en bolsas internacionales.

Caso 2. Acciones de Isa. En el caso de ISA se tienen históricos más amplios (tomaremos 5 años), los datos de ISA inician el 25 de Septiembre de 2005 ($T = 0$) a un precio de \$3.600 cada acción y a la fecha de 24 de Septiembre de 2010 ($T = 5$) el precio de la acción se encontraba en \$13.700.

Los coeficientes necesarios para hacer una simulación en los modelos de Black-Scholes y de difusión GIG son b y σ , así que los coeficientes calculados son $b = 0.267$ y $\sigma = 0.020$, además tomamos los valores $\psi = 24$, $\gamma = 1$, $\lambda = 0$ y $\chi = 0$.

La siguiente gráfica muestra un comparativo entre los datos reales y la realización de un camino para cada uno de los modelos.

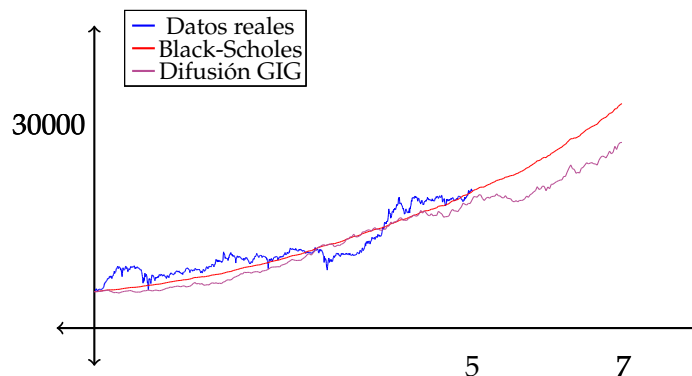


Figura 4.8: Isa

Haciendo la simulación completa, calculamos la varianza y el capital en riesgo para las simulaciones del modelo de Black-Scholes y de Difusión *GIG*, de modo tenemos los siguientes resultados.

Modelo	$CaR(3610, 1, 5)$	Varianza($X^1(5)$)	$E[X^1(5)]$
Black-Scholes	-7086.677	379168.958	13712.550
GIG	6070.584	10322503.240	13828.068

De los datos vemos que el CaR , en el modelo de Black-Scholes, es de nuevo un valor negativo, esto se debe nuevamente a que la acción tiene un comportamiento muy bueno, de tal forma que el riesgo de perder es prácticamente nulo. Por otro lado recordemos que el CaR como función del tiempo es creciente primero y luego decreciente, así que con estos coeficientes el valor de T donde es creciente, debe ser inferior a 5.

Los resultados en el caso del modelo de difusión *GIG*, son nuevamente los esperados y para este caso quieren decir que el 95 % de las pérdidas posibles comparadas con el bono son menores a \$6070.584.

Como una proyección a futuro podemos tomar $T = 7$ (Septiembre de 2012) con lo que las mediciones están dadas por

Modelo	$CaR(2045, 1, 7)$	Varianza($X^1(7)$)	$E[X^1(7)]$
Black-Scholes	-14294.176	1101138.769	23368.071
GIG	6617.850	30002380.877	23574.737

Vemos que el CaR aunque aumentó, no aumentó significativamente, lo que quiere decir que la inversión a 5 o 7 años tiene casi el mismo riesgo, pero a 7 años el valor esperado es mucho mayor, por lo cual es mejor invertir a 7 años aunque el activo sea riesgoso.

Por otro lado el aumento de la varianza es significativo lo que quiere decir que, si solo se tiene la medida de varianza para el riesgo y no se quiere incurrir en demasiado riesgo, es mejor invertir a 5 años.

El valor de la varianza significa que en el modelo de Black scholes la desviación estándar es 1049.35 lo que es totalmente razonable y además el 93.33 por ciento de los resultados se encuentran en el intervalo [20220.02, 26516.13]. Y en el modelo de *GIG* la desviación estándar es 5477.44, que aunque es un poco alta es un valor razonable y además el 93.33 por ciento de los resultados se encuentran en el intervalo [7142.41, 40007.07].

El Proceso de Poisson Compensado

Definición. El proceso estocástico (\mathcal{F}_t) -adaptado, llamado proceso de Poisson compensado $\tilde{N}(t)$ se define por

$$\tilde{N}(t) = N(t) - \lambda t$$

donde $N(t)$ es un proceso de Poisson (\mathcal{F}_t) -adaptado con intensidad λ

Teorema A.0.1. *El proceso de Poisson compensado $\tilde{N}(t)$ es una martingala con respecto a (\mathcal{F}_t)*

Demostración. Sean $0 \leq s \leq t$, entonces

$$\begin{aligned} E[\tilde{N}(t)|\mathcal{F}_s] &= E[N(t) - \lambda t|\mathcal{F}_s] \\ &= E[N(t)|\mathcal{F}_s] - \lambda t \\ &= \lambda(t - s) + N(s) - \lambda t \\ &= N(s) - \lambda s = \tilde{N}(s) \end{aligned}$$

□

□

Código Fuente

Para la codificación del algoritmo descrito anteriormente se usó el lenguaje de programación **python**, pues este es fácilmente embebible en \LaTeX .

Veamos una descripción detallada de como se hizo el algoritmo, para el cual se programó una función para el cálculo de cada paso.

Primero que todo se usó el siguiente algoritmo para calcular un camino del movimiento browniano, discretizado en M partes iguales (Dicho algoritmo fue sacado de [23] pg. 175). Este algoritmo debe ser usado N veces, para simular los N caminos del movimiento browniano $B_i(t)$,

```

1 def calcularMovimientoBrowniano():
2     yi = [0]*int(M)
3     Bt = [0]*int(M)
4     for i in range(int(M)):
5         yi[i] = gauss(0,1)
6         # En la casilla [i] esta el valor B(i*T/M) (es decir  $t_i = \frac{i*T}{M}$ )
7         for i in range(int(M)):
8             if i != 0:
9                 Bt[i] = Bt[i-1] + sqrt(T/M)*yi[i]
10    return Bt

```

La siguiente función computa una realización de $U(t)$, discretizada de nuevo en M partes, a partir de un camino del movimiento browniano, tal como en la fórmula (4.10).

Como en la fórmula de $U(t)$, ésta depende de la integral $\int_0^t \exp\left\{-\frac{1}{2}\sigma^2\lambda s - \sigma B(s)\right\} ds$, entonces debemos también calcular la función integral discretizada (Cuyo cálculo se hizo usando el método de Simpson). A continuación la función:

```

1 def calcularGIG(Bt):
2     Ut = [0]*int(M)
3     Fintegra = [0]*int(M)

```

```

4     IUt = [0]*int(M)
5     # Ciclo para calcular la f a integrar
6     for i in range(int(M)):
7         K = exp( -0.5 * (sigma**2) * Lambda * i *(T/M) )
8         Fintegra[i] = (K * exp((-1)*sigma * Bt[i]))
9
10    # Ciclo para calcular la integral de F
11    for i in range(1,int(M)):
12        IUt[i] = integralsimpson(Fintegra,i)
13
14    # Calcular la Ut
15    for i in range(int(M)):
16        K = exp( 0.5 * (sigma**2) * Lambda * i *(T/M) )
17        Ut[i] = K*exp(sigma*Bt[i])*(u+(1/4)*(sigma**2)*psi*IUt[i])
18    return Ut

```

De nuevo para calcular la integral $\int_0^T U^2(t)dt$ se uso el método de Simpson, así:

```

1     def calcularIntegralGIG2(Ut):
2         IUt2 = [0]*int(M)
3         Fintegra = [0]*int(M)
4
5         # Ciclo para calcular la f a integrar
6         for i in range(int(M)):
7             Fintegra[i] = Ut[i]**2
8
9         # Ciclo para calcular la integral de F
10        for i in range(1,int(M)):
11            IUt2[i] = integralsimpson(Fintegra,i)
12
13        return IUt2

```

De las funciones calculadas $U(t)$ y $\int_0^t U^2(s)ds$, solo necesitamos los valores para el tiempo T es decir $U(T)$ y $\int_0^T U^2(s)ds$, lo que se obtiene facilmente de las funciones discretizadas, sencillamente usando el último valor de la discretización $Ut[M-1]$ y $IUt2[M-1]$. Para cubrir "Todos" los valores de π , se discretiza y para cada valor de $\pi = 0, 1/M, 2/M, \dots, 1$ y para los N valores simulados de $U_i(T)$ y $\int_0^T U_i^2(t)dt$, se calcula la función $Z_i^\pi(T)$ (dependiente de i) para un π dado. Como se ve a continuación:

```

1     def calcularZTpi(pi, UT, IUT2):
2         Zt = [0]*int(N)

```

```

3     for i in range(int(N)):
4         Zt[i] = (pi*UT[i])-(0.5*(pi**2)*(sigma**2)*IUT2[i])-(pi*u)
5     return Zt

```

El estimador $\widehat{\mu}(\pi)$ del valor esperado de la riqueza $E[X^\pi]$ se calcula para cada valor de π y su correspondiente $Z^\pi(T)$, así

```

1 def calcularmupi(pi, ZTpi):
2     mu = 0
3     for i in range(int(N)):
4         mu = mu + exp((r+ ((b-r)*pi))*T + ZTpi[i] )
5
6     mu = (X_inicial/N) * mu
7     return mu

```

Para calcular el CaR debemos conocer el α -cuantil de la distribución de la función X_t , y este se calcula ordenando los valores y sacando el valor en la posición $(N + 1) * \alpha$ del arreglo

```

1 def calcularalphacuantil(Xt):
2     Xt.sort()
3     zalpha = Xt[int((N+1)*alpha)]
4     return zalpha

```

Una vez obtenido el z_α correspondiente, podemos calcular el estimador del CaR , \widetilde{v} también para cada π .

```

1 def calcularnupi(pi, zalpha):
2     return X_inicial * exp(r*T) * ( 1- exp((pi*(b-r)*T) + zalpha) )

```

Finalmente calculamos el valor del π óptimo maximizando el valor de $\widehat{\mu}$ dado que el \widehat{v} no supere un valor C , es decir que para cada función anterior debe usarse M veces para cada valor de π (discreto)

```

1 def calcularpioptimo(mupi, nupi):
2     piopt = 0
3     maxmu = mupi[0]
4     for i in range(int(N)):
5         if (nupi[i] < C) & (maxmu < mupi[i]):
6             piopt = i/N
7             maxmu = mupi[i]
8     return piopt

```

Conclusiones

1. La representación de activos en la bolsa de una forma realista como un modelo matemático, es muy importante para conocer el comportamiento y propiedades que puedan establecerse en un mercado financiero, pero la predicción de datos a futuro como parte del modelo no es certera puesto que depende del valor esperado, el cual nos dice que en un portafolio óptimo se esperaría tener una cantidad X de dinero en un horizonte de tiempo T , y no nos asegura la ganancia. Por esta razón las predicciones futuras no hacen parte del modelo.
2. Las simulaciones para cualquiera de estos modelos son muy importantes puesto que la componente aleatoria no nos permite ver, en realidad, el comportamiento de las soluciones del portafolio óptimo para cada uno de los modelos, así que una realización de un proceso estocástico se convierte en una herramienta crucial para ver, comparar y observar los resultados. En casos donde una solución no pueda ser hallada en forma explícita, las simulaciones toman mayor importancia pues son la única herramienta para obtener resultados.
3. El camino hacia el conocimiento matemático y financiero que requirió la realización de este trabajo de grado fue muy extenso, pues cada tema que se encuentra es un universo sin explorar lo que hace que tener un conocimiento completo de cada tema tratado en este trabajo sea imposible, por eso algunos temas sólo fueron investigados y tratados desde la perspectiva presentada.
4. En el afán de entender el universo financiero se han creado muchos modelos, pero la forma realista de este modelo es de gran importancia pues se refleja un hecho del mercado de activos que es "Si el horizonte de tiempo es grande, invertir en acciones es más rentable que invertir en bonos" lo que se ve reflejado en la proposición 3.4.1, que muestra el hecho que bajo la medida de CaR hay un portafolio que refleja dichos resultados empíricos y realistas. Lo que quiere decir que desde este punto de vista, la medida CaR como medida de riesgo es más realista que la medida de varianza.
5. El ejemplo de los datos comparativos de Ecopetrol e Isa con las simulaciones del modelo de Black-Scholes y modelo de difusión GIG indican que esta tesis es más que una invitación a invertir en acciones y mercados financieros.

Trabajo futuro

1. La investigación que se llevó a cabo en este trabajo puede ser continuada de manera natural generalizando más los procesos con los que se trabajó, es decir que se puede trabajar con mayor profundidad en semimartingalas o se puede trabajar con procesos de Levy.
2. Investigar el significado de los parámetros del proceso de difusión gaussiano inverso generalizado, para darle una interpretación en términos de finanzas y saber como afectan al modelo de difusión gaussiano inverso generalizado.
3. Investigar en nuevos temas como el cálculo de Malliavin o cálculo estocástico de variaciones en un espacio de Wiener, el cual es usado para generalizar de la fórmula de Itô y también se usa en métodos numéricos probabilísticos para matemáticas financieras.
4. Para un mayor y mejor entendimiento hay que trabajar en profundizar los conocimientos en temas de finanzas, control estocástico y modelos de difusión.
5. Una investigación más genérica sobre las medidas de Valor en Riesgo VaR y Capital de Riesgo CaR y sus implicaciones financieras, serán un gran valor agregado a este trabajo.
6. Vale la pena aclarar que en cada rama de la probabilidad se abre un mundo nuevo cuya profundización llevará prácticamente a un trabajo de investigación independiente.

Bibliografía

- [1] Stegun I.G. Abramowitz M. *Handbook of Mathematical Functions*. Dover, New York, 1965.
- [2] Downey Allen. *Think Python, How to Think Like a Computer Scientist*. Green Tea Press, 2008.
- [3] Jørgensen B. Exponential dispersion models. *Journal of the Royal Statistical Society. Series B (Methodological)*, 49(2):127–162, 1987.
- [4] L. Bachelier. Theorie de la speculation. *Annales Scientifiques de l'École Normale Supérieure*, 17:21–86, 1900.
- [5] Patrick Billingsley. *Probability and Measure*. Wiley, 3ra edition, 1995.
- [6] M. Borkovec and C. Klüppelberg. Extremal behaviour of diffusion models in finance. *Extremes*, 1:47–80, 1998.
- [7] Zastawniak T. Brezezniak Z. *Basic Stochastic Proces. A Course Trought Exercices*. Springer, 2002.
- [8] George C. Canavos. *Probabilidad y Estadística*. McGraw Hill, 1999.
- [9] Raj S. Chhikara and J. Leroy Folks. Optimum test procedures for the mean of first passage time distribution in brownianmotion with positive drift (inverse gaussian distribution). *Technometrics*, 18(2):189–193, 1976.
- [10] Nualart D. Models estocásticos en finances.
- [11] Nualart D. Models probabilistes dels mercats financers.
- [12] Sondermann D. *Introduction to Stochastic Calculus for Finance*. Springer, 2006.
- [13] Rodrigo De Castro. *El universo L^AT_EX*. Unibiblos, Universidad Nacional de Colombia, Bogotá, Colombia, 2nd edition, 2003.
- [14] Karatzas I. & Shreve S. E. *Brownian motion and stochastic calculus*. Springer, 1991.
- [15] Karatzas I. & Shreve S. E. *Methods of Mathematical Finance*. Springer, 1998.
- [16] Mordecki E. Modelos matemáticos en finanzas: Valuación de opciones. Centro de Matemática, Facultad de Ciencias, Montevideo Uruguay.

-
- [17] Klüppelberg C. Emmer S. and Korn R. Optimal portfolios with bounded capital-at-risk. *Math. Finance*, 11:365–384, 2001.
- [18] Stewart Myers Franklin Allen, Richard Brealey. *Principios de Finanzas Corporativas*. McGraw Hill, 8va edition, 2006.
- [19] Kushner H. *Stochastic Stability and Control*, volume 33. Academic Press, 1967.
- [20] Shiryaev A. Jacod J. *Limit Theorems for Stochastic Processes*. Springer, 2nd edition, 2000.
- [21] B. Jørgensen. *Statistical Properties of the Generalized Inverse Gaussian Distribution*. Springer, 1982.
- [22] Tweedie M. C. K. Statistical properties of inverse gaussian distribution ii. *The Annals of Mathematical Statistics*, 8(3):696–705, 1977.
- [23] Korn and Korn. *Option Pricing and Portfolio Optimization*. American Mathematical Society, 2001.
- [24] Krylov. *Controlled diffusion processes*. Springer, 1980.
- [25] Hui-Hsiung Kuo. *Introduction to Stochastic Integration*. Springer, 2006.
- [26] Xiao-Tie Deng Li Zhong-Fei, Kai W. Continuous-time optimal portfolio selection using mean-var models. *Nonlinear Dynamics and Systems Theory*, 7(1):35–49, 2007.
- [27] Myriam Muñoz Liliana Blanco. *Introducción a la teoría avanzada de probabilidad*. Universidad Nacional de Colombia, 2002.
- [28] Myriam Muñoz Liliana Blanco. *Análisis Estocástico*. Universidad Nacional de Colombia, 2003.
- [29] H. Markowitz. *Portfolio Selection - Efficient Diversification of Investments*. Wiley, New York, 1959.
- [30] Kyrlov N.V. *Controlled Diffusion Processes*. Springer, 2009.
- [31] B. Øksendal. *Stochastic Differential Equations, An introduction with applications*. Springer, 6th edition, 2007.
- [32] Sulem A. Øksendal B. *Applied Stochastic Control of Jump Diffusions*. Springer, 2000.
- [33] Embrechts P. A property of the generalized inverse gaussian distribution with some applications. *Journal of Applied Probability*, 20(3):537–544, 1983.
- [34] Jorion P. *Value at Risk*. McGraw Hill, 2nd edition, 2001.
- [35] Lantangen Hans Petter. *A Primer on Scientific Programming with Python*. Simula Research Laboratory and University of Oslo, 2009.
- [36] Mark A. Pinsky. *Introducción al análisis de Fourier y las ondas*. Thompson, 2003.
- [37] Philip E. Protter. *Stochastic Integration and Differential Equations*. Springer, 2004.

-
- [38] Korn R. *Optimal Portfolios, Stochastic Models for Optimal Investment and Risk Management in Continuous Time*. World Scientific, 1999.
- [39] Sidney I. Resnik. *A probability Path*. Birkhäuser, 1999.
- [40] Sheldon Ross. *A First Course in Probability*. Prentice Hall, 5a edition, 1998.
- [41] Walter Rudin. *Real and Complex Analysis*. McGraw Hill, 1987.
- [42] Steven Shreve. *Stochastic Calculus for Finance I: The Binomial Asset Pricing Model*. Springer, 2004.
- [43] Steven Shreve. *Stochastic Calculus for Finance II: Continuous-Time Models*. Springer, 2004.
- [44] Sundt B. Teugels J.L. *Encyclopedia of Actuarial Science*, volume 1. Wiley, 2004.
- [45] Mikosch Thommas. *Elementary stochastic calculus with finance in view*. World Scientific Publishing Co., 1998.