



UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA

Desarrollo de la prueba de no linealidad y estimación de los coeficientes autoregresivos en modelos TAR bajo la presencia de datos atípicos aditivos

Daniel Ordoñez Callamand

Universidad Nacional de Colombia
Facultad de Ciencias, Departamento de Estadística
Bogotá D.C, Colombia
2019

Desarrollo de la prueba de no linealidad y estimación de los coeficientes autoregresivos en modelos TAR bajo la presencia de datos atípicos aditivos

Daniel Ordoñez Callamand

Tesis o trabajo de grado presentada(o) como requisito parcial para optar al título de:
Magister en Estadística

Director(a):

Ph.D. Sergio Alejandro Calderón Villanueva

Línea de Investigación:

Series de Tiempo.

Universidad Nacional de Colombia

Facultad de Ciencias, Departamento de Estadística

Bogotá D.C, Colombia

2019

Dedicatoria

¡Oh dicha de entender, mayor que la de imaginar
o la de sentir!

Jorge Luis Borges, La Escritura de Dios
(1949).

Resumen

Se investiga el efecto de observaciones atípicas aditivas en la adaptación de una prueba de no linealidad y un método de estimación robusto para los coeficientes autoregresivos en modelos *TAR* (threshold autoregressive). A través de un experimento de Monte Carlo se estudia la potencia y el tamaño de la prueba de no linealidad. Respecto a la estimación, se compara el sesgo y la razón de error cuadrático medio entre el estimador robusto y el de mínimos cuadrados. Adicionalmente, se llevan a cabo ejercicios de simulación para diferentes porcentajes de contaminación, proporción de observaciones en cada régimen del modelo y se evalúa la aproximación de la distribución empírica de los coeficientes estimados por medio de la distribución normal univariada junto a los niveles de cobertura de los intervalos de confianza asintóticos para los parámetros. Los resultados indican que la prueba de no linealidad adaptada presenta una potencia superior a la basada en mínimos cuadrados y no presenta distorsiones en el tamaño bajo la presencia de datos atípicos aditivos. Por otro lado, el método de estimación robusto para los coeficientes autoregresivos supera al de mínimos cuadrados en términos de error cuadrático medio bajo la presencia de este tipo de observaciones. Finalmente, se ilustra a través de un ejemplo real el uso de la prueba de no linealidad y el método de estimación en la práctica.

Palabras Clave: Datos atípicos aditivos, Modelos *TAR*, Estimadores *GM*, Series de tiempo no lineales.

Abstract

The effect of additive outliers is studied on an adapted nonlinearity test and a robust estimation method for autoregressive coefficients in *TAR* (threshold autoregressive) models. Through a Monte Carlo experiment, the power and size of the nonlinearity test is studied. Regarding the estimation method, the bias and ratio of mean squared error is compared between the robust estimator and least squares. Simulation exercises are carried out for different percentages of contamination and proportion of observations on each regime of the model. Furthermore, the approximation of the univariate normal distribution to the empirical distribution of estimated coefficients is analyzed along with the coverage level of asymptotic confidence intervals for the parameters. Results show that the adapted nonlinearity test does not have size distortions and it has a superior power than its least squares counterpart when additive outliers are present. On the other hand, the robust estimation method for the autoregressive coefficients has a better mean squared error than least squares when this type of observations are present. Lastly, the use of the nonlinearity test and the estimation method are illustrated through an actual example.

Keywords: Additive outliers, TAR models, GM estimator, Nonlinear time series.

Lista de Figuras

4-1. Distribuciones empíricas de los coeficientes estimados usando la función ψ : <i>Huber</i>	41
4-2. Distribuciones empíricas de los coeficientes estimados usando la función ψ : <i>Tukey</i>	42
4-3. Distribuciones empíricas de los coeficientes estimados usando la función ψ : <i>LS</i>	43
5-1. Comportamiento de los retornos semanales de tasa de cambio COP/USD y la medida de volatilidad usada como determinante del cambio de régimen. . . .	51
5-2. Comportamiento de los retornos semanales de tasa de cambio COP/USD y el cambio en el precio real del barril de petróleo Brent medido en USD	54
F-1. PACF: Retornos	87
F-2. ACF residuales para cada régimen en el modelo $TAR(k = 2, p_1 = 1, p_2 =, d =$ $0)$, $r = -1.482$ con selección de función ψ : <i>Huber</i> $k = 1.345$	89
F-3. Gráfica QQ para los residuales de cada régimen en el modelo $TAR(k = 2, p_1 =$ $1, p_2 =, d = 0)$, $r = -1.482$ con selección de función ψ : <i>Huber</i> $k = 1.345$. .	90

Lista de Tablas

2-1.	Algunas funciones ψ y sus respectivas funciones ρ	8
4-1.	Frecuencias relativas empíricas del rechazo de la hipótesis de linealidad basadas en 1000 replicaciones con un modelo $TAR(Z, 2, 1, 1, 0)$, tamaño de muestra igual a 100, $\nu = 0.5$	21
4-2.	Frecuencias relativas empíricas del rechazo de la hipótesis de linealidad basadas en 1000 replicaciones con un modelo $TAR(z, 2, 1, 1, 0)$, tamaño de muestra igual a 200, $\nu = 0.5$	22
4-3.	Razón del error cuadrático medio entre el estimador GM y el clásico basadas en 1000 replicaciones con un modelo $TAR(Z, 2, 1, 1, 0)$, tamaño de muestra igual a 100, $\nu = 0.5$	25
4-4.	Sesgo promedio absoluto del estimador GM y el clásico basados en 1000 replicaciones con un modelo $TAR(Z, 2, 1, 1, 0)$, tamaño de muestra igual a 100, $\nu = 0.5$	26
4-5.	Razón del error cuadrático medio entre el estimador GM y el clásico basadas en 1000 replicaciones con un modelo $TAR(Z, 2, 1, 1, 0)$, tamaño de muestra igual a 200, $\nu = 0.5$	27
4-6.	Sesgo promedio absoluto del estimador GM y el clásico basados en 1000 replicaciones con un modelo $TAR(Z, 2, 1, 1, 0)$, tamaño de muestra igual a 200, $\nu = 0.5$	28
4-7.	Frecuencias relativas empíricas del rechazo de la hipótesis de linealidad basadas en 1000 replicaciones con un modelo $TAR(Z, 2, 1, 1, 0)$, tamaño de muestra igual a 100 y porcentaje de contaminación 1 %, $\nu = 0.5$	32
4-8.	Frecuencias relativas empíricas del rechazo de la hipótesis de linealidad basadas en 1000 replicaciones con un modelo $TAR(Z, 2, 1, 1, 0)$, tamaño de muestra igual a 100 y porcentaje de contaminación 10 %, $\nu = 0.5$	33
4-9.	Razón del error cuadrático medio entre el estimador GM y el clásico basadas en 1000 replicaciones con un modelo $TAR(Z, 2, 1, 1, 0)$, tamaño de muestra igual a 100 y porcentaje de contaminación 1 %, $\nu = 0.5$	34

4-10. Razón del error cuadrático medio entre el estimador GM y el clásico basadas en 1000 repeticiones con un modelo $TAR(Z, 2, 1, 1, 0)$, tamaño de muestra igual a 100 y porcentaje de contaminación 10%, $\nu = 0.5$	35
4-11. Razón del error cuadrático medio entre el estimador GM y el clásico basadas en 1000 repeticiones con un modelo $TAR(Z, 2, 1, 1, 0)$, tamaño de muestra igual a 100 y umbral $r = 0.6$, $\nu = 0.5$	38
4-12. Frecuencias relativas empíricas del rechazo de la hipótesis de linealidad basadas en 1000 repeticiones con un modelo $TAR(Z, 2, 1, 1, 0)$, tamaño de muestra igual a 100 y umbral $r = 0.6$, $\nu = 0.5$	39
4-13. P -valores de la prueba de [Shapiro and Wilk, 1965] de normalidad para las distribuciones empíricas de los estimadores GM basados en 1000 repeticiones del proceso de estimación con un modelo $TAR(Z, 2, 1, 1, 0)$, tamaño de muestra igual a 100	45
4-14. P -valores de la prueba de [Shapiro and Wilk, 1965] de normalidad para las distribuciones empíricas de los estimadores GM basados en 1000 repeticiones del proceso de estimación con un modelo $TAR(Z, 2, 1, 1, 0)$, tamaño de muestra igual a 1000.	46
4-15. Cobertura empírica de los intervalos de confianza al 5% construidos a partir del estimador GM basados en 1000 repeticiones con un modelo $TAR(Z, 2, 1, 1, 0)$, tamaño de muestra igual a 100	48
4-16. Cobertura empírica de los intervalos de confianza al 5% construidos a partir del estimador GM basados en 1000 repeticiones con un modelo $TAR(Z, 2, 1, 1, 0)$, tamaño de muestra igual a 200	49
5-1. P -valores prueba de no linealidad para diferentes ordenes p del proceso autoregresivo utilizando la medida de volatilidad como variable de transición.	52
5-2. P -valores prueba de no-linealidad para diferentes ordenes p del proceso autoregresivo utilizando como variable que determina los umbrales los cambios en el precio real del barril de petróleo Brent.	55
5-3. Valores del criterio de información de Akaike para las distintas combinaciones de p_1 y p_2 utilizadas para obtener el estimador GM con selección de función ψ : Huber $k = 1.345$	55
5-4. Resultados estimación del método GM para el modelo $TAR(k = 2, p_1 = 1, p_2 = 2, d = 0)$, $r = -1.482$ con selección de función ψ : Huber $k = 1.345$	56
A-1. Frecuencias relativas empíricas del rechazo de la hipótesis de linealidad basadas en 1000 repeticiones con un modelo $TAR(Z, 2, 1, 1, 0)$, tamaño de muestra igual a 100, $\nu = -0.5$	60
A-2. Frecuencias relativas empíricas del rechazo de la hipótesis de linealidad basadas en 1000 repeticiones con un modelo $TAR(Z, 2, 1, 1, 0)$, tamaño de muestra igual a 200, $\nu = -0.5$	61

A-3. Frecuencias relativas empíricas del rechazo de la hipótesis de linealidad basadas en 1000 repeticiones con un modelo $TAR(Z, 2, 1, 1, 0)$, tamaño de muestra igual a 100, $\nu = 0.8$	62
A-4. Frecuencias relativas empíricas del rechazo de la hipótesis de linealidad basadas en 1000 repeticiones con un modelo $TAR(Z, 2, 1, 1, 0)$, tamaño de muestra igual a 200, $\nu = 0.8$	63
A-5. Frecuencias relativas empíricas del rechazo de la hipótesis de linealidad basadas en 1000 repeticiones con un modelo $TAR(Z, 2, 1, 1, 0)$, tamaño de muestra igual a 100, $\nu = -0.8$	64
A-6. Frecuencias relativas empíricas del rechazo de la hipótesis de linealidad basadas en 1000 repeticiones con un modelo $TAR(Z, 2, 1, 1, 0)$, tamaño de muestra igual a 200, $\nu = -0.8$	65
B-1. Razón del error cuadrático medio entre el estimador GM y el clásico basadas en 1000 repeticiones con un modelo $TAR(Z, 2, 1, 1, 0)$, tamaño de muestra igual a 100, $\nu = -0.5$	67
B-2. Razón del error cuadrático medio entre el estimador GM y el clásico basadas en 1000 repeticiones con un modelo $TAR(Z, 2, 1, 1, 0)$, tamaño de muestra igual a 200, $\nu = -0.5$	68
B-3. Razón del error cuadrático medio entre el estimador GM y el clásico basadas en 1000 repeticiones con un modelo $TAR(Z, 2, 1, 1, 0)$, tamaño de muestra igual a 100, $\nu = 0.8$	69
B-4. Razón del error cuadrático medio entre el estimador GM y el clásico basadas en 1000 repeticiones con un modelo $TAR(Z, 2, 1, 1, 0)$, tamaño de muestra igual a 200, $\nu = 0.8$	70
B-5. Razón del error cuadrático medio entre el estimador GM y el clásico basadas en 1000 repeticiones con un modelo $TAR(Z, 2, 1, 1, 0)$, tamaño de muestra igual a 100, $\nu = -0.8$	71
B-6. Razón del error cuadrático medio entre el estimador GM y el clásico basadas en 1000 repeticiones con un modelo $TAR(Z, 2, 1, 1, 0)$, tamaño de muestra igual a 200, $\nu = -0.8$	72
C-1. Razón del error cuadrático medio entre el estimador GM y el clásico basadas en 1000 repeticiones con un modelo $TAR(Z, 2, 1, 1, 0)$, tamaño de muestra igual a 200 y porcentaje de contaminación 1%, $\nu = 0.5$	74
C-2. Razón del error cuadrático medio entre el estimador GM y el clásico basadas en 1000 repeticiones con un modelo $TAR(Z, 2, 1, 1, 0)$, tamaño de muestra igual a 200 y porcentaje de contaminación 10%, $\nu = 0.5$	75
C-3. Frecuencias relativas empíricas del rechazo de la hipótesis de linealidad basadas en 1000 repeticiones con un modelo $TAR(Z, 2, 1, 1, 0)$, tamaño de muestra igual a 200 y porcentaje de contaminación 1%, $\nu = 0.5$	76

C-4. Frecuencias relativas empíricas del rechazo de la hipótesis de linealidad basadas en 1000 repeticiones con un modelo $TAR(Z, 2, 1, 1, 0)$, tamaño de muestra igual a 200 y porcentaje de contaminación 10%, $\nu = 0.5$	77
C-5. Razón del error cuadrático medio entre el estimador GM y el clásico basadas en 1000 repeticiones con un modelo $TAR(Z, 2, 1, 1, 0)$, tamaño de muestra igual a 200 y umbral $r = 0.6$, $\nu = 0.5$	78
C-6. Frecuencias relativas empíricas del rechazo de la hipótesis de linealidad basadas en 1000 repeticiones con un modelo $TAR(Z, 2, 1, 1, 0)$, tamaño de muestra igual a 200 y umbral $r = 0.6$, $\nu = 0.5$	79
D-1. P-valores de la prueba de [Shapiro and Wilk, 1965] de normalidad para las distribuciones empíricas de los estimadores GM basados en 1000 repeticiones del proceso de estimación con un modelo $TAR(Z, 2, 1, 1, 0)$, tamaño de muestra igual a 200, $\nu = 0.5$	81
E-1. Cobertura empírica de los intervalos de confianza al 10% contruidos a partir del estimador GM basados en 1000 repeticiones con un modelo $TAR(Z, 2, 1, 1, 0)$, tamaño de muestra igual a 100, $\nu = 0.5$	83
E-2. Cobertura empírica de los intervalos de confianza al 10% contruidos a partir del estimador GM basados en 1000 repeticiones con un modelo $TAR(Z, 2, 1, 1, 0)$, tamaño de muestra igual a 200, $\nu = 0.5$	84
E-3. Cobertura empírica de los intervalos de confianza al 1% contruidos a partir del estimador GM basados en 1000 repeticiones con un modelo $TAR(Z, 2, 1, 1, 0)$, tamaño de muestra igual a 100, $\nu = 0.5$	85
E-4. Cobertura empírica de los intervalos de confianza al 1% contruidos a partir del estimador GM basados en 1000 repeticiones con un modelo $TAR(Z, 2, 1, 1, 0)$, tamaño de muestra igual a 200, $\nu = 0.5$	86
F-1. P-valores prueba de Ljung-Box para el modelo $TAR(k = 2, p_1 = 1, p_2 =, d = 0)$, $r = -1.482$ con selección de función $\psi : Huber$ $k = 1.345$	88

1. Introducción

Desde su aparición en la literatura [Tong, 1978, Tong, 1993] los modelos *TAR* (**threshold autoregressive**) han sido utilizados ampliamente para explicar fenómenos observados en series de tiempo empíricas y son aún de gran popularidad. Una excelente revisión se lleva a cabo en [Hansen, 2011] quien referencia más de setenta artículos en el campo de la economía que abarcan desde aplicaciones del modelo hasta contribuciones a la teoría de estimación e inferencia en este. [Chan and Ng, 2004] referencian otros artículos fuera de este campo en los que se han utilizado este tipo de modelos.

La gran popularidad de los modelos *TAR* radica en su facilidad de estimación¹ y su capacidad para capturar comportamientos no lineales como asimetrías, ciclos límite y fenómenos de salto (muchos de estos referenciados en la literatura, ver por ejemplo [Franses et al., 2000, Granger and Teräsvirta, 1993]).

A pesar de su amplio uso, uno de los temas poco estudiados en la literatura es el relacionado con datos atípicos (**outliers**) en modelos *TAR*². De hecho, los pocos artículos en el tema se han enfocado principalmente en el caso de modelos *SETAR* (**self exciting threshold autoregressive**) un caso particular del modelo *TAR*³. La literatura en este campo se ha enfocado principalmente en tres líneas de investigación, la primera hace referencia a la detección de no linealidad, la segunda a métodos de estimación robustos ante la presencia de datos atípicos y la tercera a métodos de detección y modelamiento de las observaciones atípicas.

En primer lugar, respecto a la detección de no linealidad, [Chan and Ng, 2004] llevan a cabo un estudio de simulación para evaluar las propiedades de algunas pruebas clásicas para detección de no linealidad tipo *SETAR* existentes en la literatura⁴ bajo la presencia de

¹En general el método de estimación es mínimos cuadrados condicionales.

²Este hecho contrasta con la situación en modelos lineales para los cuales el tema se ha estudiado a mayor profundidad (ver por ejemplo, [Chen and Liu, 1993, Tsay, 1988]).

³El modelo *SETAR* es el obtenido al hacer que la serie que determina el cambio entre regímenes $\{z_{t-d}\}$ sea igual a la misma serie observada $\{y_{t-d}\}$.

⁴Las pruebas consideradas son las mencionadas en [Chan and Tong, 1990, Luukkonen et al., 1988, Petruccielli and Davies, 1986, Petruccielli, 1990, Tsay, 1989].

observaciones atípicas; los resultados sugieren que ninguna de las pruebas consideradas es robusta ya que para estas, los tamaños empíricos en general exceden el tamaño nominal. Basado en esto, [Hung et al., 2009] llevan a cabo una extensión robusta a observaciones atípicas de la prueba de no linealidad propuesta por [Tsay, 1989] para el caso de modelos *SETAR* y muestran a través de simulaciones que el tamaño empírico y la potencia de esta nueva prueba son adecuados. En segundo lugar, en lo que a los métodos de estimación robustos se refiere, [Chan and Cheung, 1994] proponen el uso de estimadores *GM* (**generalized-M**) para este tipo de modelos; los autores concluyen que bajo la presencia de observaciones atípicas el método *GM* tiene un mejor desempeño en términos de error cuadrático medio que el de mínimos cuadrados condicionales. Este resultado fue cuestionado por [Giordani, 2006] quién ejemplifica algunas situaciones en las que los estimadores obtenidos a través de este método pueden llegar a ser inconsistentes e ineficientes si se utiliza para estimar los umbrales que determinan los regímenes del modelo. Unos años después, [Zhang et al., 2009] dieron condiciones bajo las cuales los estimadores obtenidos a través del método *GM* para los parámetros del modelo son consistentes. Finalmente, respecto a la tercera línea de investigación [Battaglia and Orfei, 2005] proponen un marco general bajo el cual se puede detectar y modelar observaciones atípicas en series de tiempo no lineales a través del método de máxima verosimilitud condicional; usando ejercicios de Montecarlo los autores ilustran el desempeño de esta metodología para el caso de diferentes modelos no lineales incluyendo el modelo *SETAR*.

Uno de los problemas que surgen al llevar a cabo los procedimientos tradicionales de estimación para modelos de series de tiempo no lineales bajo la presencia de observaciones atípicas radica en que, como lo mencionan [Tiao and Tsay, 1994], siempre existe la posibilidad de confundir efectos de este tipo de observaciones con dinámicas no lineales propias de la serie de tiempo. Por tanto, un proceso que sigue un modelo lineal con este tipo de observaciones puede parecer no lineal, y de igual forma, una serie de tiempo aparentemente lineal con algunos datos atípicos podría ser de hecho no lineal. Lograr distinguir estos casos es esencial puesto que identificar inadecuadamente el modelo puede llevar a conducir inferencia errónea⁵. Por ello, este documento busca evaluar a través de simulaciones el tamaño y potencia de la prueba de no linealidad en [Hung et al., 2009] y comparar a través del error cuadrático medio el método de estimación propuesto de [Chan and Cheung, 1994] contra el método clásico de estimación (mínimos cuadrados condicionales) para el caso de modelos *TAR* (adaptando la metodología mas allá de modelos *SETAR*).

El documento procede la siguiente manera. En la sección dos se lleva a cabo una revisión de la metodología utilizada para el desarrollo de la prueba de no linealidad y la estima-

⁵Por ejemplo, no lograr distinguir entre estos dos casos podría generar problemas si el objetivo del estudio es un análisis de impulso-respuesta de la serie de tiempo. Esto debido a que la mala especificación del modelo podría conducir a estimaciones erróneas.

ción del modelo bajo la presencia de observaciones atípicas (siguiendo la caracterización de [Chen and Liu, 1993]). En la tercera sección se propone la extensión de estos dos procedimientos para el caso de modelos *TAR*. En la cuarta sección se evalúa a través de ejercicios de simulación la potencia y el tamaño de la prueba de no linealidad, además se lleva a cabo una comparación del método de estimación *GM* y el de mínimos cuadrados condicionales en el caso de modelos *TAR* bajo la presencia de este tipo de observaciones. En la quinta sección se lleva a cabo un ejemplo de aplicación. Finalmente, se presentan las conclusiones. Estas últimas sugieren que tanto la prueba como el método de estimación adaptados tienen un mejor desempeño que los tradicionales bajo la presencia de observaciones atípicas aditivas.

2. Metodología

2.1. ¿Qué es una observación atípica?

La forma en la que se hace referencia a observaciones atípicas empíricamente es un poco diferente a la que se utiliza a la hora de realizar ejercicios de simulación, por ello, se hace una breve comparación de ambas en esta sección. En general existen dos definiciones de observación atípica que son ampliamente utilizadas en la literatura.

La primera definición es generalmente utilizada cuando se realizan ejercicios de Montecarlo, la cual consiste en postular un mecanismo a través del cual se generan este tipo de observaciones. Por ejemplo, se puede asumir que cierta variable observada X_i es muestreada de las distribuciones $F(\cdot)$ ó $G(\cdot)$ con probabilidad p y $1 - p$ respectivamente. $G(\cdot)$ se conoce como contaminante y puede ser una mixtura de diferentes distribuciones. Las observaciones son llamadas atípicas si estas provienen de la distribución $G(\cdot)$, sin importar el valor que tomen.

La segunda definición es la propuesta por [Davies and Gather, 1993], y en general es la forma en que se entienden las observaciones atípicas cuando se analizan datos observacionales. Sea $F(\cdot)$ un distribución cualquiera, una observación atípica se define como cualquier punto que tome un valor en cierta región de baja probabilidad en esa distribución. Un ejemplo ilustrativo se puede dar asumiendo que $F(\cdot)$ es la distribución normal univariada (con valor esperado μ y varianza σ^2), en este caso, se puede definir una región de observaciones atípicas (dado un valor α) como $out(\alpha, \mu, \sigma^2) = \{x : |x - \mu| > \sigma z_{1-\alpha/2}\}$ donde z_q representa el q -ésimo cuantil de la distribución normal estándar.

En el contexto de series de tiempo, la caracterización de datos atípicos mas conocida es la utilizada por [Chen and Liu, 1993]. Estos autores introducen cuatro tipos de observaciones atípicas en el caso de los modelos *ARIMA* (**autoregressive integrated moving average**). Asumiendo que la serie de tiempo $\{Y_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ sigue un modelo que se puede escribir de la forma:

$$Y_t = \frac{\theta(B)A_t}{\alpha(B)\phi(B)}, \quad (2-1)$$

donde $\phi(B)$, $\theta(B)$ y $\alpha(B)$ son todos polinomios en B y este último representa el operador de

rezago, las raíces de los dos primeros están fuera del círculo unitario y las del último en este; $\{A_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ es un proceso ruido blanco.

Se asume que la serie de tiempo observable $\{Y_t^*\}_{t \in \mathbb{Z}}$ sigue el modelo:

$$Y_t^* = Y_t + \omega \frac{A(B)}{G(B)H(B)} I_t(t_1), \quad (2-2)$$

donde $I_t(t_1)$ denota la función indicadora para el momento t_1 (cuando sucede la observación atípica) y este valor (el tiempo) puede ser desconocido. El valor ω representa la magnitud de esta observación atípica mientras que $\frac{A(B)}{G(B)H(B)}$ es una razón de polinomios en el operador de rezago que captura la dinámica de los efectos de estas observaciones.

En este caso los cuatro tipos de observaciones atípicas mencionados por [Chen and Liu, 1993] son:

- Aditivas: $\frac{A(B)}{G(B)H(B)} = 1$
- Inovacionales: $\frac{A(B)}{G(B)H(B)} = \frac{\theta(B)}{\alpha(B)\phi(B)}$
- Cambio temporal: $\frac{\theta(B)}{\alpha(B)\phi(B)} = \frac{1}{1-\delta B}$
- Cambio de nivel: $\frac{\theta(B)}{\alpha(B)\phi(B)} = \frac{1}{1-B}$.

A pesar de esto, el estudio de observaciones atípicas en modelos *TAR* se ha enfocado primordialmente en los dos primeros tipos y va en la línea de la primera definición mencionada al inicio de la sección.

Respecto a las observaciones atípicas de carácter aditivo (las cuales son las más estudiadas) [Chan and Ng, 2004] extienden lo sugerido por [Denby and Martin, 1979] y proponen definir las de la siguiente forma:

La serie de tiempo observada es $\{Y_t^*\}_{t \in \mathbb{Z}}$ y la serie de interés es $\{Y_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$,

$$Y_t^* = Y_t + \kappa_t, \quad (2-3)$$

donde κ_t es una variable aleatoria independiente e idénticamente distribuida que sigue una distribución mixta con densidad $(1 - \beta)\delta_0(\cdot) + \beta\phi_\omega(\cdot)$ con $\phi_\omega(\cdot)$ que representa la distribución normal de media 0 y varianza ω^2 , $\delta_0(\cdot)$ representa una distribución degenerada en 0, β ($0 \leq \beta \leq 1$) es el porcentaje de contaminación en la serie y ω su magnitud.

Por otro lado, respecto a los datos atípicos de carácter inovacional, [Chan and Ng, 2004] sugieren tomar la variable aleatoria ϵ_t , usada para representar el término de perturbación, como proveniente de una distribución mixta que se puede escribir como $(1 - \beta)\phi_1(\cdot) + \beta\phi_\omega(\cdot)$, donde el significado de la notación utilizada coincide con la del párrafo anterior.

2.2. Modelos TAR

Los modelos *TAR* (**threshold autoregressive**) fueron propuestos en [Tong, 1978] y estudiados ampliamente en [Tong, 1993], consisten en modelos autoregresivos por trozos.

Se dice que una serie de tiempo $\{Y_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ sigue un modelo $TAR(Z, k, p_1, \dots, p_k, d)$ si

$$Y_t = \phi_0^{(j)} + \sum_{i=1}^{p_j} \phi_i^{(j)} Y_{t-i} + \sigma_j \epsilon_t \quad \text{si} \quad r_{j-1} \leq Z_{t-d} < r_j, \quad (2-4)$$

donde $j = 1, \dots, k$, se asume que $\epsilon_t \stackrel{i.i.d}{\sim} (0, 1)$, $\{Z_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ es una serie de tiempo estacionaria conocida, se tiene que $r_0 = -\infty < r_1 < \dots < r_k = \infty$. El parámetro p_j es el orden del modelo autoregresivo en el j -ésimo régimen y los $\phi_i^{(j)}$ $i = 0, \dots, p_j$ los coeficientes autoregresivos en este ($\phi_0^{(j)}$ es el intercepto). d se conoce como el parámetro de delay, k es el número de regímenes y los r_j son conocidos como los umbrales. σ_j representa la escala de ϵ_t en el j -ésimo régimen. Un caso particular del modelo *TAR*, ampliamente utilizado en la práctica, es el modelo *SETAR* (**self-exciting threshold autoregressive**) en este modelo la serie de tiempo que caracteriza el cambio de régimen $\{Z_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ es la misma serie bajo análisis $\{Y_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$.

De forma ilustrativa y con el fin de aclarar la notación, consideramos el proceso $TAR(Z, k = 2, p_1 = 2, p_2 = 1, d = 1)$, $r_1 = 0$, $\sigma_1 = 1$, $\sigma_2 = 2$, $\phi_0^{(1)} = 5$, $\phi_0^{(2)} = 10$, $\phi_1^{(1)} = 0.3$, $\phi_2^{(1)} = 0.4$, $\phi_1^{(2)} = -0.3$ este se podría escribir como:

$$Y_t = \begin{cases} 5 + 0.3Y_{t-1} + 0.4Y_{t-2} + \epsilon_t, & \text{si } Z_{t-1} < 0 \\ 10 - 0.3Y_{t-1} + 2\epsilon_t & 0 \leq Z_{t-1} \end{cases}$$

2.3. Estimadores GM

Sea el modelo de regresión $Y_t = \mathbf{x}_t' \boldsymbol{\beta} + \epsilon_t$ $t = 1, \dots, T$ donde \mathbf{x}_t es un vector p -dimensional, se asume que ϵ_t tiene valor esperado igual a 0 y varianza igual a σ^2 . Un modelo autoregresivo de orden p se puede escribir como $\mathbf{x}_t = (Y_{t-1}, \dots, Y_{t-p})'$.

La clase de estimadores *GM* es una extensión de la clase de estimadores *M*-robustos propuestos en problemas de regresión clásicos (ver por ejemplo, [Maronna et al., 2006]). Los estimadores robustos basados en la metodología *GM* del vector de parámetros $\boldsymbol{\beta}$ (asumiendo que σ es conocido) se pueden definir como la solución del siguiente problema de optimización:

$$\underset{\boldsymbol{\beta}}{\text{Argmin}} \sum_{t=1}^T \rho \left(d^2(\mathbf{x}_t), \frac{Y_t - \mathbf{x}_t' \boldsymbol{\beta}}{\sigma} \right) \quad (2-5)$$

donde ρ es tal que $\frac{\partial \rho(d^2(\mathbf{x}_t), R_t)}{\partial R_t} = \eta(d^2(\mathbf{x}_t), R_t)$ y se define R_t como un residual estandarizado $R_t = \frac{Y_t - \mathbf{x}_t' \boldsymbol{\beta}}{\sigma}$.

Vale la pena mencionar que el estimador de mínimos cuadrados es un caso particular de un estimador *GM* el cual se puede obtener al tomar $\eta(d^2(\mathbf{x}_t), R_t) = R_t$. La clase de estimadores *M*-robustos se pueden obtener tomando $\eta(d^2(\mathbf{x}_t), R_t) = \psi(R_t)$ para alguna función $\psi(\cdot)$ que cumpla ciertas condiciones de regularidad (ver [Maronna et al., 2006, p. 24]).

Al llevar a cabo el proceso de optimización se encuentra que el estimador de $\boldsymbol{\beta}$ está definido implícitamente por la condición:

$$\sum_{t=1}^T \eta \left(d^2(\mathbf{x}_t), \frac{Y_t - \mathbf{x}_t' \hat{\boldsymbol{\beta}}}{\hat{\sigma}} \right) \mathbf{x}_t = \mathbf{0}, \quad (2-6)$$

donde $d^2(\mathbf{x}_t)$ se usa para denotar la distancia de Mahalanobis al cuadrado, es decir, $d^2(\mathbf{x}_t) = (\mathbf{x}_t - \mathbf{m})' \mathbf{V}^{-1} (\mathbf{x}_t - \mathbf{m})$ con \mathbf{m} y \mathbf{V} estimadores robustos de ubicación y dispersión¹ (generalmente se sugiere calcular \mathbf{m} a través de la mediana y \mathbf{V} usando el estimador propuesto por [Rousseeuw and Van Zomeren, 1990]). $\hat{\sigma}$ se obtiene con un estimador de escala robusto (por ejemplo un *M*-estimador). Las condiciones que debe cumplir la función $\eta(\cdot, \cdot)$ para tener propiedades asintóticas óptimas pueden encontrarse en [Hampel et al., 1986, p. 315].

En la práctica existen dos formas de parametrización de la función $\eta \left(d^2(\mathbf{x}_t), \frac{Y_t - \mathbf{x}_t' \boldsymbol{\beta}}{\sigma} \right)$ que son ampliamente utilizadas:

- **Parametrización de tipo Mallows:** $\eta \left(d^2(\mathbf{x}_t), \frac{Y_t - \mathbf{x}_t' \boldsymbol{\beta}}{\sigma} \right) = w(d^2(\mathbf{x}_t)) \psi \left(\frac{Y_t - \mathbf{x}_t' \boldsymbol{\beta}}{\sigma} \right)$
- **Parametrización de tipo Schweppe:** $\eta \left(d^2(\mathbf{x}_t), \frac{Y_t - \mathbf{x}_t' \boldsymbol{\beta}}{\sigma} \right) = w(d^2(\mathbf{x}_t)) \psi \left(\frac{Y_t - \mathbf{x}_t' \boldsymbol{\beta}}{\sigma w(d^2(\mathbf{x}_t))} \right)$

¹Evidentemente si el vector de regresores \mathbf{x}_t tiene un valor constante este debe ser excluido en el momento del cálculo de la distancia de Mahalanobis.

donde la función $\psi(\cdot)$ pertenece al grupo de funciones utilizadas en la construcción de la clase de estimadores M-robustos (en la tabla **2-1** presentamos algunas de las funciones $\psi(\cdot)$ más utilizadas en la práctica). La función $w(\cdot)$ es una función que asigna pesos, con rango en $[0, 1]$, y se define como $w(u) = \frac{\psi(u)}{u}$ si $u \neq 0$ y $w(0) = 1$.

Tabla 2-1.: Algunas funciones ψ y sus respectivas funciones ρ

Tipo	Función- ρ $\rho(u)$	Función- ψ $\psi(u)$	Rango de u
Least Squares	$\frac{u^2}{2}$	u	$(-\infty, \infty)$
Huber(k)	$\frac{u^2}{2}$ $k u - \frac{k^2}{2}$	u $k \operatorname{sgn}(u)$	$ u \leq k$ $ u > k$
Tukey(c)	$\frac{c^2}{6} \left(1 - \left(1 - \left(\frac{u}{c}\right)^2\right)^3\right)$ $\frac{c^2}{6}$	$u \left(1 - \left(\frac{u}{c}\right)^2\right)^2$ 0	$ u \leq c$ $ u > c$

Se asume que los parametros k y c son mayores a 0. Una tabla similar y con otras funciones adicionales puede encontrarse en [Hoaglin et al., 1983, p. 366]

Utilizando estas parametrizaciones, la condición (2-6) puede reescribirse respectivamente como:

- **Parametrización de tipo Mallows:**

$$\sum_{t=1}^T w(d^2(\mathbf{x}_t)) w\left(\frac{Y_t - \mathbf{x}_t' \hat{\boldsymbol{\beta}}}{\sigma}\right) \mathbf{x}_t (Y_t - \mathbf{x}_t' \hat{\boldsymbol{\beta}}) = 0. \quad (2-7)$$

- **Parametrización de tipo Scheppe:**

$$\sum_{t=1}^T w\left(\frac{Y_t - \mathbf{x}_t' \hat{\boldsymbol{\beta}}}{\sigma w(d^2(\mathbf{x}_t))}\right) \mathbf{x}_t (Y_t - \mathbf{x}_t' \hat{\boldsymbol{\beta}}) = 0. \quad (2-8)$$

Las ecuaciones (2-7) y (2-8) son no lineales en $\hat{\boldsymbol{\beta}}$, por tanto para encontrar la solución se deben usar métodos numéricos. En general, se sugiere tomar un estimador inicial robusto para $\boldsymbol{\beta}$ como el estimador *LAD* (**least absolute deviations**) propuesto en [Rousseeuw, 1984]. A partir de este estimador ($\hat{\boldsymbol{\beta}}^{(0)}$) se pueden obtener los residuales para todo t como $\hat{\epsilon}_t^{(0)} = Y_t - \mathbf{x}_t' \hat{\boldsymbol{\beta}}^{(0)}$, donde el valor de $\hat{\sigma}^{(0)}$ puede obtenerse haciendo uso del estimador *MAD* (**median absolute deviation**) sobre los residuales. Una vez se tiene esta información, se pueden calcular los pesos:

$w\left(\frac{Y_t - \mathbf{x}_t' \hat{\boldsymbol{\beta}}^{(0)}}{\sigma^{(0)} w(d^2(\mathbf{x}_t))}\right)$, en el caso de la parametrización de Schweppe ($w(d^2(\mathbf{x}_t))w\left(\frac{Y_t - \mathbf{x}_t' \hat{\boldsymbol{\beta}}^{(0)}}{\sigma^{(0)}}\right)$ en el caso de Mallows). Tomando estos pesos como si fueran fijos, se pueden resolver las ecuaciones 2-8 (2-7 respectivamente). Se utiliza mínimos cuadrados ponderados para obtener el valor de $\hat{\boldsymbol{\beta}}^{(1)}$. Con este último valor, puede volver a encontrarse el valor de $\hat{\boldsymbol{\sigma}}^{(1)}$ y calcular nuevamente los pesos para hallar el valor de $\hat{\boldsymbol{\beta}}^{(2)}$; este procedimiento se lleva a cabo sucesivamente hasta que se cumple alguna condición de convergencia previamente impuesta (por ejemplo, que la diferencia entre dos estimaciones sucesivas sea lo suficientemente pequeña). En última instancia, este método de solución es conocido como **IWLS (iterative weighted least squares)**².

Dependiendo del tipo de parametrización el problema de optimización (2-5) es respectivamente:

▪ **Parametrización de tipo Mallows:**

$$\underset{\boldsymbol{\beta}}{\text{Argmin}} \gamma(\boldsymbol{\beta}, \sigma) \quad \text{con} \quad \gamma(\boldsymbol{\beta}, \sigma) = \sum_{t=1}^T w(d^2(\mathbf{x}_t)) \rho\left(\frac{Y_t - \mathbf{x}_t' \boldsymbol{\beta}}{\sigma}\right) \quad (2-9)$$

▪ **Parametrización de tipo Schweppe:**

$$\underset{\boldsymbol{\beta}}{\text{Argmin}} \gamma(\boldsymbol{\beta}, \sigma) \quad \text{con} \quad \gamma(\boldsymbol{\beta}, \sigma) = \sum_{t=1}^T w(d^2(\mathbf{x}_t))^2 \rho\left(\frac{Y_t - \mathbf{x}_t' \boldsymbol{\beta}}{\sigma w(d^2(\mathbf{x}_t))}\right) \quad (2-10)$$

donde $\rho(u)$ es una función tal que $\frac{\partial \rho(u)}{\partial u} = \psi(u)$.

Se puede probar que asumiendo el modelo de regresión propuesto al inicio de esta sección, el estimador $\hat{\boldsymbol{\beta}}$ obtenido a través del método *GM* es asintóticamente normal [Maronna et al., 2006, p. 149] (sin importar la existencia de datos atípicos):

$$\sqrt{T}(\hat{\boldsymbol{\beta}} - \boldsymbol{\beta}) \sim N(0, \Sigma_{\boldsymbol{\beta}}). \quad (2-11)$$

Para este caso, la matriz de varianza covarianza asintótica de $\hat{\boldsymbol{\beta}}$ puede obtenerse como:

$$\hat{\Sigma}_{\boldsymbol{\beta}} = \sigma^2 \mathbf{B}^{-1} \mathbf{C} \mathbf{B}^{-1} \quad (2-12)$$

$$\mathbf{B} = -E \left[\eta^* \left(d^2(\mathbf{x}_t), \frac{Y_t - \mathbf{x}_t' \boldsymbol{\beta}}{\sigma} \right) \mathbf{x}_t \mathbf{x}_t' \right] \quad \eta^*(d^2(\mathbf{x}_t), R_t) = \frac{\partial \eta(d^2(\mathbf{x}_t), R_t)}{\partial R_t}$$

$$\mathbf{C} = E \left[\eta \left(d^2(\mathbf{x}_t), \frac{Y_t - \mathbf{x}_t' \boldsymbol{\beta}}{\sigma} \right)^2 \mathbf{x}_t \mathbf{x}_t' \right].$$

²Mas detalles respecto a la estimación se puede encontrar en [Lucas, 1996, Cap. 2].

Discusión

La idea principal de los estimadores *GM* es definir la función de peso $w(\cdot)$ de forma que las observaciones con residuales de gran magnitud $\left(\frac{Y_t - \mathbf{x}_t' \beta}{\sigma}\right)$ ó las que representan puntos con “bad leverage” (en el sentido clásico de regresión) sean penalizadas. Una diferencia en las parametrizaciones es que la de tipo Mallows penaliza a todos los puntos de alto “leverage” sin importar la magnitud de su residual mientras que la de Schweppe tiende a no penalizar las observaciones con residuales pequeños (sin importar si son o no puntos de “leverage”) esto hace que en general los estimadores obtenidos con la segunda parametrización sean más eficientes que los de la primera³.

La necesidad del uso de estos estimadores en problemas de series de tiempo se debe a que un dato atípico en la serie se puede convertir en un punto de alto “leverage” para los periodos siguientes.

2.4. Propuesta de estimación robusta para los coeficientes autoregresivos en modelos SETAR de [Chan and Cheung, 1994]

El método de estimación para coeficientes autoregresivos en modelos *SETAR* bajo la presencia de datos atípicos aditivos sugerido por [Chan and Cheung, 1994] consiste en el uso de estimadores *GM* pero difiere en algunos aspectos de lo mencionado en la sección anterior. Para ilustrar las diferencias en el método se considera el modelo $SETAR(2, p_1, p_2, d_0)$ con T observaciones y por facilidad de exposición asumimos $p_1 = p_2 = p^4$.

Caso en que el umbral r_1 es conocido.

Las observaciones $\{Y_{p+1}, \dots, Y_T\}$ se pueden dividir en dos grupos de acuerdo a la siguiente regla:

$$\begin{cases} Y_t \in 1^{er} \text{ grupo} & \text{si } Y_{t-d_0} \leq r_1 \\ Y_t \in 2^{do} \text{ grupo} & \text{si } Y_{t-d_0} > r_1. \end{cases} \quad (2-13)$$

³Una excelente discusión se puede encontrar en [Lucas, 1996].

⁴Se asume que el valor del parámetro de delay d es conocido y en este caso es igual a d_0 .

Sean $\mathbf{y}_1 = (Y_{1i_1}, \dots, Y_{1i_{T_1}})'$, $\mathbf{y}_2 = (Y_{2i_1}, \dots, Y_{2i_{T_2}})'$ las observaciones en el primer y segundo régimen respectivamente ($T_1 + T_2 = T - p$, cada una representa el número de observaciones en cada uno de los regímenes). Dentro de cada uno de los j regímenes ($j = 1, 2$) se tiene un modelo lineal de la forma:

$$\mathbf{y}_j = \mathbf{X}_j \boldsymbol{\phi}_j + \boldsymbol{\epsilon}_j \quad (2-14)$$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\epsilon}_j &= (\epsilon_{ji_1}, \dots, \epsilon_{ji_{T_j}})' \\ \boldsymbol{\phi}_j &= (\phi_0^{(j)}, \dots, \phi_p^{(j)})' \\ \mathbf{x}_{j\mathbf{i}_1-1} &= (1, Y_{ji_{i_1-1}}, \dots, Y_{ji_{i_1-p}})' \\ \mathbf{X}_j &= [\mathbf{x}_{j\mathbf{i}_1-1}, \dots, \mathbf{x}_{j\mathbf{i}_{T_j}-1}]'. \end{aligned}$$

Una vez se conoce el valor del umbral r_1 , se propone que la estimación de la ecuación (2-14) para cada j se lleve a cabo utilizando un estimador *GM* con la parametrización de Mallows, con la siguiente modificación en términos de la ecuación (2-7) de la sección 2.3⁵:

- **Parametrización propuesta por [Chan and Cheung, 1994]:**

$$\eta \left(\sqrt{d^2(Y_{ji_k})}, \frac{Y_{ji_k} - \mathbf{x}_{j\mathbf{i}_k-1}'\boldsymbol{\beta}}{\sigma} \right) = w(\sqrt{d^2(Y_{ji_k})}) \psi \left(\frac{Y_{ji_k} - \mathbf{x}_{j\mathbf{i}_k-1}'\boldsymbol{\beta}}{\sigma} \right)$$

[Chan and Cheung, 1994] proponen utilizar la función $\psi(\cdot)$: Tukey (ver tabla 2-1) y la función $w(\cdot)$ basada en esta (recuerde que se define la función $w(u) = \frac{\psi(u)}{u}$ si $u \neq 0$ y $w(u) = 0$ en otro caso).

Caso en que el umbral r_1 no es conocido.

Se puede considerar que el estimador *GM* con la parametrización de tipo Mallows en cada uno de los estados, es de hecho la solución al problema de optimización (2-9). Se puede definir una función objetivo global como:

$$\Gamma(\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \sigma_1, \sigma_2, r_1) = \sum_{j=1}^2 \gamma_j(\boldsymbol{\beta}_j, \sigma_j) = \sum_{j=1}^2 \sum_{k=1}^{T_j} w \left(\sqrt{d^2(Y_{ji_k})} \right) \rho \left(\frac{Y_{ji_k} - \mathbf{x}_{j\mathbf{i}_k-1}'\boldsymbol{\beta}_j}{\sigma_j} \right). \quad (2-15)$$

Un estimador robusto de r_1 (\hat{r}_1) puede encontrarse buscando a través del conjunto $\{X_{p_\alpha\%}, \dots, X_{p_{(1-\alpha)\%}}\}$ donde $X_{p_\alpha\%}$ denota el α -ésimo percentil de la variable X_t . Es decir, el valor de \hat{r}_1 es la solución a:

$$\underset{r_1 \in \{Y_{p_\alpha\%}, \dots, Y_{p_{(1-\alpha)\%}}\}}{\text{Argmin}} \quad \Gamma(\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \sigma_1, \sigma_2, r_1). \quad (2-16)$$

⁵En lugar de utilizar la distancia de Mahalanobis al cuadrado del vector de regresores se utiliza esta distancia (sin elevar al cuadrado) basada en la variable dependiente.

Note que una vez fijado el valor de r_1 , los estimadores $\hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2, \hat{\sigma}_1, \hat{\sigma}_2$ pueden encontrarse fácilmente de acuerdo a lo discutido anteriormente. En la práctica se sugiere tomar un valor $\alpha = 25$ de forma que hayan suficientes observaciones en cada uno de los regímenes.

[Giordani, 2006] ejemplificó algunos problemas en los que el valor del umbral estimado por medio del procedimiento anterior puede ser incorrecto. Para asegurar la consistencia del estimador del umbral, la función ψ utilizada debe cumplir ciertas condiciones que pueden encontrarse en [Zhang et al., 2009]. De hecho, una de las condiciones es que la función utilizada sea convexa, la función Tukey (usada originalmente en el artículo de [Chan and Cheung, 1994]) de la tabla **2-1** no cumple esta propiedad mientras que la de Huber si.

2.5. Prueba de no linealidad del tipo TAR

La importancia de llevar a cabo la prueba de no linealidad es que permite identificar correctamente el modelo que mejor se ajusta a los datos, esto se traduce tanto en mejores pronósticos como una inferencia más acertada. [Tsay and Chen, 2019] menciona varios ejemplos de series de tiempo observadas que parecen ser mejor representadas a través de modelos no lineales y hacen énfasis en la mejora que se obtiene en términos de pronóstico.

La idea que subyace a la prueba de no linealidad para modelos *SETAR* propuesta por [Hung et al., 2009] (de hecho es una generalización de la prueba de [Tsay, 1989]) es llevar a cabo una autoregresión ordenada para obtener residuales predictivos que posteriormente serán utilizados en el test de no linealidad.

A modo de ilustración, se presenta su desarrollo en el caso que el modelo subyacente es un *SETAR*(2, $p_1, p_2, d = 1$). Se asume que se tienen T observaciones, $t = p_m + 1, \dots, T$ ⁶ y por facilidad de exposición $p_1 = p_2 = p$. La idea principal es reordenar la autoregresión de acuerdo a los valores de la variable que determina el cambio entre regímenes (Y_{t-1}).

Sea π_i el índice de tiempo de la i -ésima observación más pequeña $\{Y_{p+1}, \dots, Y_T\}$. Se puede reescribir el modelo *SETAR*(2, $p_1, p_2, 1$) (ver ecuación (2-4)) como:

$$Y_{\pi_i} = \begin{cases} \phi_0^{(1)} + \sum_{v=1}^p \phi_v^{(1)} Y_{\pi_i-v} + \sigma_1 \epsilon_{\pi_i} & \text{si } i \leq s \\ \phi_0^{(2)} + \sum_{v=1}^p \phi_v^{(2)} Y_{\pi_i-v} + \sigma_2 \epsilon_{\pi_i} & \text{si } i > s, \end{cases} \quad (2-17)$$

⁶Suponemos que la serie de tiempo empieza a partir de $p_m + 1$ y las observaciones anteriores a este punto representan las condiciones iniciales

donde s es un número entero que representa el valor a partir del cual $Y_{\pi_{s+1}}$ excede el valor del umbral r_1 .

Sea el vector $\mathbf{x}_{\pi_i-1} = (1, Y_{\pi_i-1}, \dots, Y_{\pi_i-p})'$ y $\boldsymbol{\phi}^{(j)} = (\phi_0^{(j)}, \dots, \phi_p^{(j)})'$ para $j = 1, 2$. El $m+1$ -ésimo residual predictivo se construye como:

$$\hat{\epsilon}_{\pi_{m+1}} = Y_{\pi_{m+1}} - \mathbf{x}_{\pi_m}' \hat{\boldsymbol{\phi}}_m \quad (2-18)$$

donde $\hat{\boldsymbol{\phi}}_m = (\phi_0, \dots, \phi_p)'$ es el estimador obtenido a través de mínimos cuadrados con el uso de las primeras m observaciones de la autoregresión ordenada, es decir, la regresión de $\mathbf{y} = (Y_{\pi_1}, \dots, Y_{\pi_m})'$ contra $\mathbf{X} = [\mathbf{x}_{\pi_1-1}, \dots, \mathbf{x}_{\pi_m-1}]'$.

La propiedad en la que se basa la prueba se da a continuación; bajo la hipótesis nula de un modelo autoregresivo lineal ($H_o : \boldsymbol{\phi}^{(1)} = \boldsymbol{\phi}^{(2)}$) se tiene que $\hat{\boldsymbol{\phi}}_m$ es un estimador consistente de $\boldsymbol{\phi}^7$. Los residuales predictivos son asintóticamente ruido blanco y ortogonales a los regresores. Por otro lado, si el modelo realmente es un *SETAR*(2, $p_1, p_2, 1$) se tiene que $\boldsymbol{\phi}^{(1)} \neq \boldsymbol{\phi}^{(2)}$. Cuando i es mayor a s el estimador $\hat{\boldsymbol{\phi}}_i$ incluye observaciones tanto del primer régimen como del segundo y los residuales predictivos ya no son ortogonales a los regresores. Por tanto, si se lleva a cabo una regresión de los residuales predictivos respecto a los regresores y se encuentra que los coeficientes son significativos esto representa evidencia estadística a favor de la no linealidad.

Basado en lo propuesto por [Hung et al., 2009] la prueba consiste en seleccionar una función ψ^8 (ver tabla **2-1**) y utilizar un estimador *GM* con parametrización de tipo Schweppe para estimar los vectores de coeficientes recursivos $\hat{\boldsymbol{\phi}}_k$ $k = m, \dots, T - p - 1$. Con estos vectores de coeficientes recursivos se pueden construir los residuales predictivos de la ecuación (2-18).

El estadístico de prueba es

$$F_{GM}^{yt-1} = \frac{MSS(T - p - m - (p + 1))}{RSS(p + 1)}, \quad (2-19)$$

⁷Definimos $\hat{\boldsymbol{\phi}}$ como $\boldsymbol{\phi}^{(1)}$ (que es bajo la hipótesis nula igual a $\boldsymbol{\phi}^{(2)}$).

⁸El artículo de [Hung et al., 2009] considera también la función ψ conocida como *Polynomial* la cual se omite en la tabla **2-1**. Vale la pena mencionar que si la función ψ seleccionada es la de least squares la prueba que se lleva a cabo es de hecho la propuesta por [Tsay, 1989].

donde

$$\begin{aligned}
 MSS &= \hat{\Psi}' \mathbf{W} \mathbf{X} (\mathbf{X}' \mathbf{W} \mathbf{W} \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}' \mathbf{W} \hat{\Psi} \\
 RSS &= \hat{\Psi}' \hat{\Psi} - MSS \\
 \hat{R}_{\pi_j} &= \frac{\hat{\epsilon}_{\pi_j}}{\hat{\sigma}_\epsilon} \\
 \hat{\Psi} &= (\psi(\hat{R}_{\pi_{m+1}}), \dots, \psi(\hat{R}_{\pi_{T-p}}))' \\
 \mathbf{X} &= [\mathbf{x}_{\pi_m}, \dots, \mathbf{x}_{\pi_{T-p-1}}]' \\
 \mathbf{W} &= \text{diag}(w(d^2(\mathbf{x}_{\pi_m})), \dots, w(d^2(\mathbf{x}_{\pi_{T-p-1}}))).
 \end{aligned}$$

Bajo la hipótesis nula de un modelo lineal, el estadístico de prueba en (2-19) tiene asintóticamente una distribución F (ver [Hung et al., 2009]) con $p + 1$ y $(T - p - m - (p + 1))$ grados de libertad. [Tsay, 1989, Hung et al., 2009] proponen usar en la práctica un valor de m igual a $\frac{T}{10} + p$.

Algunas consideraciones prácticas

En el caso en que se quiera considerar otro valor de delay d sobre la serie Y_{t-d} , el estimador de este parámetro puede seleccionarse de forma tal que:

$$\underset{v \in S}{\text{Argmax}} \quad F_{GM}^{yt-v}, \tag{2-20}$$

donde S es un conjunto de valores previamente seleccionado. El valor de p utilizado en la construcción de la prueba puede obtenerse a través de un análisis preliminar de la **PACF (partial autocorrelation function)** y llevando a cabo la identificación del proceso autoregresivo como si el modelo fuera lineal.

3. Propuesta Metodológica

3.1. Estimación de coeficientes autoregresivos en modelos TAR

Para llevar a cabo la estimación de los coeficientes autoregresivos en modelos $TAR(Z, 2, p_1, p_2, d_0)$ basta llevar a cabo la clasificación en grupos de la ecuación 2-13 utilizando como variable Z_{t-d_0} con d_0 un valor conocido. Sin embargo, a diferencia de la propuesta de [Chan and Cheung, 1994] se propone utilizar la parametrización de tipo Schweppe en lugar de la de Mallows debido a que como lo menciona [Lucas, 1996] esta última es menos eficiente. Además, se propone utilizar en la parametrización la distancia de Mahalanobis al cuadrado del vector de regresores (ilustrada en la sección 2.3) en lugar de la distancia utilizada por [Chan and Cheung, 1994], esto permite evaluar si es apropiado llevar a cabo inferencia sobre los coeficientes estimados en el contexto de series de tiempo tomando como base las expresiones en el contexto de regresión tradicional presentadas en 2-12. Esto es crucial debido a que el artículo de [Chan and Cheung, 1994] no propone ningún método para llevar a cabo inferencia una vez realizado el proceso de estimación.

3.1.1. Algunas consideraciones prácticas

En aplicaciones empíricas donde no se conoce el valor de los órdenes autoregresivos, estos pueden encontrarse a través del criterio de información de Akaike¹.

$$AIC(p_1, p_2) = n_1 \ln(\hat{\sigma}_1^2) + n_2 \ln(\hat{\sigma}_2^2) + 2(p_1 + 1) + 2(p_2 + 1) \quad (3-1)$$

Por otro lado, el valor de los umbrales se puede encontrar llevando a cabo un procedimiento similar al explicado en la sección 2.4. Finalmente, se sugiere comenzar con el modelo más

¹[Sin and White, 1996] demuestran que el procedimiento de elección basado en este criterio es consistente en el sentido que asintóticamente los ordenes correctos p_1 y p_2 son seleccionados con probabilidad uno.

sencillo (dos regímenes) e ir aumentando el número de estos si el ajuste del modelo no es adecuado.

3.2. Desarrollo de la prueba de no linealidad en modelos TAR

Para el desarrollo de la prueba de no linealidad se lleva a cabo el procedimiento explicado en la sección 2.5. La diferencia es que el ordenamiento que se lleva a cabo sobre las observaciones en la ecuación 2-17, se debe llevar a cabo utilizando como variable Z_{t-d_0} con d_0 un valor conocido.

3.3. Resumen

En resumen la metodología para la detección de no linealidad y la posterior estimación de los coeficientes autoregresivos en modelos *TAR* bajo la presencia de datos atípicos aditivos es la siguiente:

1. Llevar a cabo la prueba de no linealidad realizando una extensión de la prueba propuesta por [Hung et al., 2009] para procesos *TAR* siguiendo lo establecido en la sección 2.5. Realizando el ordenamiento de las observaciones de acuerdo a los valores de la variable Z_{t-d_0} en lugar de Y_{t-d} (caso *SETAR*).
2. Para la estimación de los coeficientes autoregresivos debe seguirse lo propuesto en la sección 3.1, esta propuesta es similar a lo realizado por [Chan and Cheung, 1994] pero se modifica la parametrización propuesta para poder llevar a cabo inferencia sobre los coeficientes estimados.

4. Ejercicios de simulación

Con el objeto de comprobar la idoneidad de la metodología propuesta se presentan los resultados de los ejercicios de simulación relacionados con la adaptación de la prueba de no linealidad de [Hung et al., 2009] y el método de estimación de [Chan and Cheung, 1994] aplicados al caso de modelos TAR en presencia de observaciones atípicas de carácter aditivo. También, se evalúan los efectos que tienen las observaciones atípicas aditivas sobre esta prueba y el método de estimación en los siguientes sentidos: (1) diferentes porcentajes de contaminación de este tipo de observaciones, (2) diferente proporción de observaciones en cada uno de los regímenes del modelo y (3) niveles de cobertura de los intervalos de confianza asintóticos construidos bajo la metodología GM tradicional.

Siguiendo el diseño de los ejercicios de simulación de [Chan and Cheung, 1994, Hung et al., 2009] se considera un modelo con dos regímenes $TAR(Z, 2, 1, 1, 0)$. Este modelo es elegido también en base a la facilidad con la que se puede llevar a cabo su proceso de estimación y a que en aplicaciones prácticas generalmente se usan dos o tres regímenes (ver [Hansen, 2011]). La variable de transición $\{Z_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ sigue un modelo $AR(1)$. El proceso generador de datos es entonces:

$$Y_t = \begin{cases} \phi_0^{(1)} + \phi_1^{(1)}Y_{t-1} + \epsilon_t & \text{si } Z_t \leq r \\ \phi_0^{(2)} + \phi_1^{(2)}Y_{t-1} + \epsilon_t & \text{si } Z_t > r \end{cases} \quad (4-1)$$

$$Z_t = \nu Z_{t-1} + \eta_t \quad |\nu| < 1 \quad (4-2)$$

$$Y_t^* = Y_t + \kappa_t \quad (4-3)$$

donde $\{\epsilon_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ y $\{\eta_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$, son sucesiones de variables aleatorias $\overset{i.i.d}{\sim} N(0, 1)$. $\{Y_t^*\}_{t \in \mathbb{Z}}$ representa la serie de tiempo observada (contaminada con datos atípicos aditivos), κ_t es una variable aleatoria independiente e idénticamente distribuida que sigue una distribución mixta con densidad $(1 - \beta)\delta_0(\cdot) + \beta\phi_\omega(\cdot)$ con $\phi_\omega(\cdot)$ que representa la distribución normal de media 0 y varianza ω^2 , $\delta_0(\cdot)$ representa una distribución degenerada en 0, β ($0 \leq \beta \leq 1$) es el porcentaje

de contaminación en la serie y ω su magnitud. Finalmente, $\{Y_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ representa la serie de tiempo subyacente (sin contaminar).

Para cada replicación, se genera una muestra $\{Y_1, \dots, Y_T\}$ de acuerdo a la ecuación (2-3). Se consideran tamaños de muestra $T = 100$, $T = 200$. El valor inicial X_0 se toma igual a cero. Para eliminar posibles efectos de este valor inicial en la serie, se descartan las primeras 1000 observaciones en cada una de las replicaciones.

Respecto a la prueba de no linealidad se presentan los resultados de la potencia y el tamaño de la prueba basados en el valor $F_{GM}^{z_t}$ con diferentes elecciones para la función $\psi(\cdot)$. Se considera la función de *Huber* con valores de $k = 1.345$ y $k = 3.291$ y la de *Tukey* con valores de $c = 4.685$ y $c = 15$. Todas estas elecciones están basadas en las seleccionadas por [Hung et al., 2009]¹. Tanto en el caso de la prueba de no linealidad como en el procedimiento de estimación, la función *Least Squares* (**LS**) se considera para facilitar la comparación.

Finalmente, en lo que a los valores de los parámetros del modelo *TAR* se refiere, se considera $\nu = \pm 0.5, \pm 0.8$, $\omega = 0, 3, 6, 10$, y $r = 0$. El porcentaje de contaminación $\beta = 5\%$ (en ejercicios presentados posteriormente consideramos $\beta = 10\%$ y $\beta = 1\%$). El valor inicial para la autoregresión ordenada es $m = \frac{T}{10} + 1$ y para $\phi_0^{(1)}, \phi_1^{(1)}, \phi_0^{(2)}, \phi_1^{(2)}$ siguiendo los resultados de [Hung et al., 2009], se consideran siete combinaciones de parámetros donde $\phi_0^{(1)} = 0.5$, $\phi_0^{(2)} = 0.5$, $\phi_1^{(1)} = 0.5$ y $\phi_1^{(2)}$ varía de -0.8 a 0.8 . El coeficiente $\phi_1^{(1)}$ se mantiene fijo tal como en el artículo mencionado anteriormente². Es importante mencionar que en el caso en que el coeficiente $\phi_1^{(2)}$ toma el valor de 0.5 el modelo se reduce a un modelo lineal autoregresivo de primer orden.

4.1. Resultados base

4.1.1. Prueba de no-linealidad de tipo TAR

La tabla 4-1 ($T = 100$) y la tabla 4-2 ($T = 200$) muestran las frecuencias empíricas relativas de rechazo de la hipótesis nula de linealidad a niveles de significancia de 10% , 5% y 1% basadas en 1000 replicaciones con un porcentaje de contaminación $\beta = 5\%$.

¹En general estos valores están seleccionados para que el estimador obtenido con ellas tenga una eficiencia asintótica relativa en el caso Gaussiano de 95% y 99.5% respectivamente.

²[Hung et al., 2009] sugieren que los resultados de las simulaciones para la prueba de no-linealidad (en el caso *SETAR*) son poco sensibles a la elección del coeficiente autoregresivo en el primer régimen.

La fila en **negrilla** muestra el tamaño empírico de la prueba cuando no existen observaciones atípicas ($\omega = 0$), esto se debe a que cuando todos los coeficientes son iguales, el modelo es de hecho lineal. Podemos observar lo siguiente: para la función $\psi : LS$ (mínimos cuadrados) el tamaño empírico es 0.011 a un nivel de significancia de 1%, 0.054 a un nivel de 5% y 0.110 al 10% (de acuerdo a lo esperado). Las siguientes tres columnas muestran el tamaño empírico para la función $\psi : Huber$ a los mismos tres niveles de significancia con parámetro $k = 1.345$. Las columnas siguientes muestran los resultados respectivos para diferentes elecciones de función ψ , en todos los casos los tamaños empíricos coinciden con los nominales. Cuando todos los coeficientes son iguales pero el parámetro ω es diferente a 0 los resultados de la tabla **4-1** son el tamaño empírico de la prueba bajo la presencia de datos atípicos. En este caso, cuando la magnitud de las observaciones atípicas es mayor ($\omega = 10$) el tamaño empírico de la prueba obtenido utilizando la función de mínimos cuadrados (la propuesta original de [Tsay, 1989]) es 0.127, 0.236 y 0.298, es decir, se vuelve mayor que los correspondientes niveles nominales (10%, 5% y 1%). Por otro lado, cuando la función $\psi(\cdot)$ utilizada corresponde a la de *Huber* (ó *Tukey*) los tamaños empíricos siempre se mantienen cerca al nominal, independiente de la presencia de observaciones atípicas ($\omega = 3, 6, 10$). Como puede verse en las tablas **4-1** y **4-2** este resultado se mantiene al aumentar el tamaño de muestra de $T = 100$ a $T = 200$.

Por otro lado, a medida que el parámetro $\phi_1^{(2)}$ toma valores diferentes a 0.5 la tabla **4-1** presenta la potencia de la prueba de no linealidad. A medida que este coeficiente varía y se fija el valor de ω en 0 se obtiene la potencia de la prueba cuando no existen observaciones atípicas, por ejemplo, para la función de mínimos cuadrados la potencia empírica a un nivel de significancia de 1% es 0.978, 0.808, 0.450, 0.213 en los valores de los parámetros $\phi_1^{(2)} = -0.8, -0.5, -0.2$ y 0 respectivamente. Ahora bien, si se fija ω en un valor diferente a 0 y se varía el parámetro $\phi_1^{(2)}$ se obtiene la potencia de la prueba de no linealidad bajo la presencia de observaciones atípicas (recuerde que ω está relacionado con la magnitud de estas, un valor de ω mayor genera observaciones atípicas de mayor magnitud); a modo de ilustración puede verse en la tabla que la potencia de la prueba con elección de función $\psi : Huber$ y parámetro $k = 1.345$ a un nivel de significancia 1% y $\omega = 10$ es 0.840, 0.506, 0.215 y 0.101 en los valores de los parámetros $\phi_1^{(2)} = -0.8, -0.5, -0.2$ y 0 respectivamente. Las columnas siguientes muestran la potencia para diferentes elecciones de función ψ .

Vale la pena resaltar algunos resultados obtenidos, por ejemplo, en la tabla **4-2** para un tamaño de muestra $T = 200$ y en el caso $\omega = 3$. Se observa que los niveles empíricos para la prueba (que corresponden a los nominales de 1%, 5% y 10%) utilizando la función *LS* son (0.076, 0.0187, 0.264), mientras que los de la función *Huber* con parámetro $k = 1.345$ son (0.011, 0.053, 0.113). Este resultado evidencia los problemas de tamaño que puede ocasionar la presencia de observaciones atípicas cuando se utiliza la función de mínimos cuadrados, y evidencia que este problema no desaparece con el aumento en el tamaño de la muestra (ver **4-2**). Lo encontrado va de la mano con lo evidenciado por [Hung et al., 2009] para el caso

de modelos *SETAR* y comprueba las ventajas del test bajo la presencia de observaciones atípicas.

Se observa que la introducción de datos atípicos ($\omega \neq 0$) disminuye levemente la potencia de la prueba, sin embargo, este efecto puede ser controlado al tomar un tamaño de muestra mayor. Por ejemplo, para la función *Tukey* con parámetro $c = 4.685$, $\phi_1^{(2)} = -0.5$, un tamaño nominal de 5% y una muestra $T = 100$ la potencia es (0.743, 0.678, 0.674, 0.675) (ver tabla 4-1) para los valores de $\omega = 0, 3, 6, 10$ respectivamente. Por otro lado, al tomar una muestra de tamaño $T = 200$, la potencia aumenta a (0.969, 0.946, 0.951, 0.956).

Respecto a la elección de la función $\psi(\cdot)$ y sus respectivos parámetros, los resultados de las simulaciones en las tablas 4-1 y 4-2 muestran que la función de *Huber* con parámetro $k = 1.345$ generalmente alcanza mayores niveles de potencia que la función *Tukey* con $c = 4.685$ ³. Análogamente, cuando se compara esta función con $k = 3.291$ y la de *Tukey* con $c = 15$ la primera parece dar resultados ligeramente superiores. Adicionalmente, a diferencia de lo encontrado por [Hung et al., 2009], no parece existir evidencia fuerte para preferir el uso de las funciones de *Huber* ($k = 3.291$) y *Tukey* ($c = 15$) a las que utilizan valores menores de los parámetros k y c . En el apéndice A se presentan tablas similares para valores de $\nu = -0.5$ y ± 0.8 .

³Esta comparación es válida en la medida que estos parámetros garantizan una eficiencia asintótica relativa del estimador en el caso Gaussiano de 95%.

Tabla 4-1.: Frecuencias relativas empíricas del rechazo de la hipótesis de linealidad basadas en 1000 repeticiones con un modelo $TAR(Z, 2, 1, 1, 0)$, tamaño de muestra igual a 100, $\nu = 0.5$.

$\phi_0^{(1)}$	$\phi_1^{(1)}$	$\phi_0^{(2)}$	$\phi_1^{(2)}$	ω	$\alpha =$	LS			Huber k=1.345			Huber k=3.291			Tukey c=4.685			Tukey c=15		
						1 %	5 %	10 %	1 %	5 %	10 %	1 %	5 %	10 %	1 %	5 %	10 %	1 %	5 %	10 %
0.5	0.5	0.5	-0.8	0	0.978	0.996	0.999	0.903	0.970	0.988	0.970	0.998	0.999	0.817	0.918	0.955	0.964	0.996	0.999	
				3	0.864	0.938	0.965	0.862	0.939	0.973	0.900	0.962	0.982	0.757	0.888	0.930	0.891	0.962	0.982	
				6	0.595	0.753	0.811	0.833	0.931	0.970	0.817	0.923	0.958	0.750	0.895	0.943	0.770	0.901	0.942	
				10	0.395	0.551	0.644	0.840	0.940	0.965	0.757	0.895	0.938	0.758	0.899	0.937	0.727	0.884	0.926	
0.5	0.5	0.5	-0.5	0	0.808	0.932	0.954	0.655	0.837	0.899	0.799	0.911	0.949	0.528	0.743	0.826	0.791	0.912	0.949	
				3	0.602	0.768	0.848	0.574	0.766	0.854	0.598	0.794	0.862	0.462	0.678	0.778	0.597	0.786	0.859	
				6	0.370	0.574	0.668	0.509	0.756	0.834	0.478	0.710	0.787	0.438	0.674	0.777	0.439	0.689	0.773	
				10	0.280	0.447	0.525	0.506	0.750	0.829	0.403	0.675	0.784	0.464	0.675	0.778	0.384	0.642	0.776	
0.5	0.5	0.5	-0.2	0	0.450	0.695	0.798	0.325	0.566	0.681	0.416	0.666	0.785	0.262	0.484	0.603	0.418	0.665	0.780	
				3	0.296	0.522	0.647	0.256	0.485	0.623	0.255	0.498	0.629	0.218	0.424	0.547	0.264	0.511	0.631	
				6	0.246	0.416	0.513	0.241	0.475	0.602	0.193	0.420	0.553	0.225	0.449	0.560	0.167	0.385	0.521	
				10	0.208	0.366	0.450	0.215	0.446	0.578	0.163	0.360	0.481	0.214	0.436	0.549	0.152	0.343	0.463	
0.5	0.5	0.5	0	0	0.213	0.408	0.544	0.150	0.343	0.492	0.183	0.406	0.533	0.131	0.309	0.431	0.188	0.405	0.529	
				3	0.170	0.344	0.467	0.116	0.298	0.451	0.119	0.299	0.429	0.109	0.262	0.387	0.126	0.306	0.432	
				6	0.155	0.304	0.419	0.105	0.280	0.400	0.088	0.245	0.345	0.106	0.257	0.382	0.078	0.233	0.334	
				10	0.172	0.295	0.385	0.101	0.276	0.406	0.067	0.215	0.307	0.115	0.273	0.375	0.065	0.185	0.297	
0.5	0.5	0.5	0.2	0	0.070	0.201	0.313	0.053	0.169	0.251	0.062	0.186	0.292	0.060	0.173	0.255	0.066	0.190	0.295	
				3	0.080	0.208	0.301	0.048	0.147	0.232	0.046	0.143	0.225	0.048	0.156	0.240	0.049	0.139	0.246	
				6	0.120	0.246	0.341	0.044	0.138	0.218	0.033	0.120	0.201	0.049	0.146	0.211	0.041	0.113	0.189	
				10	0.148	0.266	0.357	0.046	0.130	0.218	0.028	0.106	0.176	0.047	0.161	0.224	0.030	0.097	0.165	
0.5	0.5	0.5	0.5	0	0.011	0.054	0.110	0.011	0.054	0.100	0.013	0.048	0.098	0.010	0.067	0.125	0.014	0.049	0.103	
				3	0.039	0.100	0.158	0.012	0.054	0.100	0.014	0.053	0.098	0.015	0.054	0.119	0.011	0.052	0.097	
				6	0.057	0.155	0.231	0.009	0.048	0.089	0.010	0.059	0.108	0.013	0.060	0.111	0.014	0.049	0.088	
				10	0.127	0.236	0.298	0.010	0.046	0.083	0.014	0.056	0.091	0.013	0.060	0.100	0.018	0.047	0.074	
0.5	0.5	0.5	0.8	0	0.236	0.457	0.591	0.170	0.366	0.501	0.206	0.424	0.563	0.146	0.325	0.436	0.204	0.431	0.560	
				3	0.148	0.340	0.465	0.138	0.336	0.461	0.164	0.368	0.480	0.113	0.288	0.411	0.148	0.345	0.467	
				6	0.144	0.268	0.372	0.127	0.292	0.403	0.129	0.268	0.379	0.119	0.287	0.389	0.100	0.233	0.337	
				10	0.157	0.263	0.346	0.108	0.272	0.389	0.086	0.231	0.336	0.125	0.277	0.388	0.065	0.194	0.297	

Esta tabla presenta los porcentajes de rechazo de la hipótesis de no linealidad al utilizar la prueba de [Hung et al., 2009] adaptada al caso de un modelo TAR . En la ecuación (4-1) se presenta el modelo, el valor de ω está relacionado con la magnitud de los datos atípicos y su definición se presenta en la parte inferior de la ecuación (2-3). El valor del parámetro ν es igual a 0.5 y el tamaño de muestra es $T = 100$.

Tabla 4-2: Frecuencias relativas empíricas del rechazo de la hipótesis de linealidad basadas en 1000 replicaciones con un modelo $TAR(z, 2, 1, 1, 0)$, tamaño de muestra igual a 200, $\nu = 0.5$.

$\phi_0^{(1)}$	$\phi_1^{(1)}$	$\phi_0^{(2)}$	$\phi_1^{(2)}$	ω	$\alpha =$	LS			Huber k=1.345			Huber k=3.291			Tukey c=4.685			Tukey c=15								
						1%	5%	10%	1%	5%	10%	1%	5%	10%	1%	5%	10%	1%	5%	10%						
0.5	0.5	0.5	-0.8	0	$\alpha =$	1.000	1.000	1.000	0.999	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000			
						0.994	0.998	0.999	0.995	0.999	1.000	0.999	1.000	1.000	0.999	1.000	1.000	0.978	0.995	0.997	0.997	0.999	1.000	1.000		
						0.847	0.924	0.952	0.996	0.998	0.998	0.999	0.993	0.999	1.000	1.000	0.981	0.995	0.998	0.986	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	
0.5	0.5	0.5	-0.5	0	$\alpha =$	0.488	0.660	0.748	0.994	1.000	1.000	1.000	0.985	0.997	1.000	0.985	0.996	0.998	0.974	0.996	0.998	0.974	0.998			
						0.994	0.999	1.000	0.965	0.996	0.998	0.995	0.999	0.999	0.999	0.999	0.896	0.969	0.983	0.995	0.998	0.999	0.995	0.998	0.999	
						0.906	0.964	0.977	0.928	0.980	0.994	0.943	0.979	0.991	0.844	0.946	0.978	0.932	0.984	0.991	0.862	0.955	0.976	0.862	0.955	0.976
0.5	0.5	0.5	-0.2	0	$\alpha =$	0.593	0.772	0.837	0.919	0.984	0.992	0.878	0.956	0.982	0.849	0.951	0.973	0.862	0.955	0.976	0.862	0.955	0.976			
						0.334	0.493	0.592	0.906	0.971	0.991	0.828	0.926	0.961	0.864	0.956	0.978	0.805	0.922	0.956	0.805	0.922	0.956	0.805	0.922	0.956
						0.861	0.949	0.971	0.702	0.879	0.939	0.832	0.940	0.973	0.584	0.778	0.857	0.838	0.944	0.975	0.838	0.944	0.975	0.838	0.944	0.975
0.5	0.5	0	0	0	$\alpha =$	0.634	0.807	0.867	0.606	0.830	0.906	0.628	0.819	0.895	0.499	0.736	0.837	0.633	0.832	0.896	0.633	0.832	0.896			
						0.376	0.590	0.691	0.578	0.813	0.881	0.510	0.744	0.831	0.501	0.712	0.825	0.491	0.728	0.832	0.491	0.728	0.832	0.491	0.728	0.832
						0.217	0.382	0.463	0.559	0.762	0.854	0.434	0.670	0.767	0.518	0.740	0.825	0.409	0.665	0.778	0.409	0.665	0.778	0.409	0.665	0.778
0.5	0.5	0	0	0	$\alpha =$	0.532	0.754	0.850	0.392	0.620	0.745	0.518	0.736	0.836	0.316	0.532	0.644	0.503	0.733	0.839	0.503	0.733	0.839			
						0.380	0.599	0.703	0.334	0.556	0.675	0.339	0.551	0.677	0.274	0.474	0.594	0.356	0.577	0.691	0.356	0.577	0.691	0.356	0.577	0.691
						0.254	0.421	0.521	0.312	0.519	0.643	0.234	0.445	0.570	0.266	0.471	0.598	0.215	0.430	0.549	0.215	0.430	0.549	0.215	0.430	0.549
0.5	0.5	0.2	0	0	$\alpha =$	0.174	0.311	0.408	0.285	0.522	0.661	0.201	0.403	0.547	0.289	0.482	0.608	0.177	0.380	0.501	0.177	0.380	0.501			
						0.199	0.378	0.522	0.147	0.319	0.428	0.184	0.370	0.494	0.132	0.294	0.396	0.179	0.374	0.505	0.179	0.374	0.505	0.179	0.374	0.505
						0.160	0.328	0.455	0.110	0.273	0.373	0.090	0.251	0.373	0.107	0.250	0.355	0.095	0.259	0.383	0.095	0.259	0.383	0.095	0.259	0.383
0.5	0.5	0.5	0.5	0	$\alpha =$	0.161	0.298	0.406	0.161	0.298	0.406	0.082	0.200	0.299	0.114	0.254	0.356	0.066	0.211	0.301	0.066	0.211	0.301			
						0.152	0.267	0.334	0.107	0.269	0.364	0.051	0.184	0.271	0.129	0.269	0.374	0.050	0.167	0.268	0.050	0.167	0.268	0.050	0.167	0.268
						0.010	0.059	0.109	0.012	0.061	0.115	0.014	0.051	0.103	0.017	0.078	0.135	0.012	0.056	0.101	0.011	0.059	0.116	0.011	0.059	0.116
0.5	0.5	0.5	0.8	0	$\alpha =$	0.027	0.096	0.154	0.006	0.051	0.112	0.013	0.058	0.122	0.013	0.064	0.121	0.011	0.059	0.116	0.011	0.059	0.116			
						0.076	0.187	0.264	0.011	0.053	0.113	0.015	0.052	0.102	0.014	0.079	0.124	0.012	0.041	0.087	0.012	0.041	0.087	0.012	0.041	0.087
						0.091	0.179	0.249	0.009	0.053	0.094	0.012	0.050	0.097	0.015	0.067	0.123	0.011	0.033	0.072	0.011	0.033	0.072	0.011	0.033	0.072
0.5	0.5	0.5	0.8	0	$\alpha =$	0.573	0.774	0.847	0.434	0.656	0.775	0.540	0.752	0.832	0.348	0.557	0.680	0.542	0.749	0.834	0.542	0.749	0.834			
						0.380	0.595	0.700	0.357	0.606	0.716	0.418	0.666	0.773	0.293	0.516	0.636	0.397	0.629	0.759	0.397	0.629	0.759	0.397	0.629	0.759
						0.215	0.382	0.501	0.325	0.553	0.667	0.310	0.548	0.660	0.296	0.507	0.646	0.261	0.475	0.594	0.261	0.475	0.594	0.261	0.475	0.594
10	0.5	0.5	0.8	10	$\alpha =$	0.167	0.305	0.403	0.319	0.559	0.689	0.246	0.478	0.611	0.294	0.542	0.648	0.195	0.421	0.562	0.195	0.421	0.562			

Esta tabla presenta los porcentajes de rechazo de la hipótesis de no linealidad al utilizar la prueba de [Hung et al., 2009] adaptada al caso de un modelo TAR . En la ecuación (4-1) se presenta el modelo, el valor de ω está relacionado con la magnitud de los datos atípicos y su definición se presenta en la parte inferior de la ecuación (2-3). El valor del parámetro ν es igual a 0.5 y el tamaño de muestra es $T = 200$.

4.1.2. Estimación de los coeficientes autoregresivos

Para el procedimiento de estimación de los coeficientes autoregresivos el desarrollo se realiza de acuerdo a lo mencionado en la sección 3.1, es decir, se lleva a cabo una adaptación de la prueba original de [Chan and Cheung, 1994] en la que se modifica la parametrización del estimador GM , la forma en que se calculan los pesos y la manera en la que se organizan las observaciones en subgrupos. El porcentaje de contaminación es $\beta = 5\%$.

Se evalúa el desempeño relativo del estimador propuesto respecto al de mínimos cuadrados, y se reporta la razón de error cuadrático medio entre el estimador GM con elecciones de función $\psi : Huber, Tukey$ (parámetros $k = 1.345, c = 4.685$) contra el estimador de mínimos cuadrados (es decir $\psi : LS$)⁴.

La tabla 4-3 presenta las razones de error cuadrático medio entre el estimador GM y el de mínimos cuadrados. La tabla 4-4 presenta los sesgos promedios en valor absoluto. Todos los resultados están basados en 1000 simulaciones y para muestras de tamaño $T = 100$. Las tablas 4-5 y 4-6 muestran resultados análogos para muestras de tamaño $T = 200$.

En el caso que $\omega = 0$ (es decir, cuando no hay observaciones atípicas) los estimadores obtenidos a través de mínimos cuadrados son mejores (en términos de error cuadrático medio) que los del método GM tanto para un tamaño de muestra $T = 100$ como en el caso $T = 200$. Por ejemplo, para el parámetro $\phi_1^{(1)}$ la razón de errores cuadráticos medios excede casi siempre el valor de 1.2.

Por otro lado, bajo la presencia de observaciones atípicas el estimador basado en el método GM tiene un mejor desempeño que el de mínimos cuadrados. De hecho, en la mayoría de los casos que existen observaciones atípicas las razones de error cuadrático medio eligiendo la función $\psi : Huber$ son inferiores a 1. Por ejemplo, las razones para el modelo $\phi_1^{(2)} = -0.8$ con las observaciones atípicas de mayor magnitud ($\omega = 10$) y un tamaño de muestra $T = 200$ (ver tabla 4-5), llegan a ser tan bajas como 0.095 y 0.037 para los coeficientes autoregresivos de cada régimen. A medida que el parámetro de contaminación ω aumenta los resultados favorecen aún más al estimador basado en el método GM .

Una comparación de las razones obtenidas con el uso de la función $\psi : Huber$ y la de $Tukey$ muestra que la primera elección ($Huber$) parece tener un mejor desempeño para la estimación de los coeficientes autoregresivos del modelo. Esta observación es particularmente relevante para el caso en que no hay observaciones atípicas. Por ejemplo, las razones para un tamaño

⁴Es decir, el error cuadrático medio basado en el estimador GM se ubica en el numerador mientras que el de mínimos cuadrados en el denominador

de muestra $T = 100$ (ver tabla **4-3**), el modelo $\phi_1^{(2)} = -0.5$ son de 1.274, 1.504, 1.179, 1.420 para la función *Huber* mientras que con *Tukey* son 1.823, 2.782, 1.463, 2.501. En el apéndice B se presentan tablas similares para un coeficiente ν de -0.5 , y ± 0.8 las cuales muestran resultados análogos.

Respecto al sesgo promedio absoluto presentado en las tablas **4-4** y **4-6** se observa que ambos estimadores (*GM* y mínimos cuadrados) tienen un sesgo muy pequeño en el caso que no existen observaciones atípicas. A medida que la magnitud de estas observaciones aumenta, el sesgo del estimador de mínimos cuadrados también lo hace. Un caso que llama la atención se presenta en la tabla **4-4** para el modelo $\phi_1^{(2)} = 0.8$ y $\omega = 10$ donde el sesgo promedio absoluto del estimador de mínimos cuadrados llega a 0.7 para el intercepto del segundo régimen y de 0.43 para su respectivo coeficiente autoregresivo⁵.

Los estimadores *GM* obtenidos para las dos funciones $\psi(\cdot)$ consideradas tienen magnitudes de sesgo promedio absoluto bastante pequeñas y en general estas parecen mejorar con el aumento del tamaño de la muestra (ver tabla **4-6**).

A diferencia de los resultados obtenidos para las razones de error cuadrático medio, las tablas **4-4** y **4-6** muestran que en general la magnitud del sesgo del estimador *GM* que utiliza la función *Huber* es mayor que el basado en la de *Tukey*. Esto sugiere que el estimador basado en la primera tiene una menor varianza en las simulaciones (de forma que sea posible que su error cuadrático medio sea menor como se ve en las tablas **4-3** y **4-5**).

⁵Recuerde que el rango del coeficiente autoregresivo es $[-1, 1]$ por lo que un sesgo de esta magnitud es relevante.

Tabla 4-3.: Razón del error cuadrático medio entre el estimador GM y el clásico basadas en 1000 replicaciones con un modelo $TAR(Z, 2, 1, 1, 0)$, tamaño de muestra igual a 100, $\nu = 0.5$.

$\phi_0^{(1)}$	$\phi_1^{(1)}$	$\phi_0^{(2)}$	$\phi_1^{(2)}$	ω	Huber $k=1.345$				Tukey $c=4.685$			
					$\hat{\phi}_0^{(1)}$	$\hat{\phi}_1^{(1)}$	$\hat{\phi}_0^{(2)}$	$\hat{\phi}_1^{(2)}$	$\hat{\phi}_0^{(1)}$	$\hat{\phi}_1^{(1)}$	$\hat{\phi}_0^{(2)}$	$\hat{\phi}_1^{(2)}$
0.5	0.5	0.5	-0.8	0	1.297	1.554	1.176	1.410	1.877	3.071	1.464	2.558
				3	0.917	0.793	0.719	0.485	1.227	1.430	0.870	0.796
				6	0.434	0.283	0.326	0.140	0.563	0.485	0.367	0.207
				10	0.269	0.208	0.195	0.080	0.327	0.311	0.223	0.118
0.5	0.5	0.5	-0.5	0	1.274	1.504	1.179	1.420	1.823	2.782	1.463	2.501
				3	0.877	0.703	0.801	0.772	1.182	1.210	0.963	1.313
				6	0.449	0.335	0.409	0.310	0.608	0.537	0.476	0.479
				10	0.286	0.232	0.222	0.221	0.337	0.351	0.248	0.350
0.5	0.5	0.5	-0.2	0	1.231	1.386	1.154	1.384	1.698	2.580	1.486	2.574
				3	0.806	0.658	0.948	1.119	1.044	1.072	1.236	2.109
				6	0.365	0.298	0.502	0.851	0.463	0.478	0.632	1.523
				10	0.254	0.215	0.309	0.653	0.309	0.340	0.380	1.213
0.5	0.5	0.5	0	0	1.215	1.369	1.245	1.484	1.716	2.546	1.689	2.794
				3	0.799	0.676	1.055	1.377	1.076	1.102	1.469	2.785
				6	0.381	0.313	0.620	1.432	0.462	0.505	0.811	2.761
				10	0.241	0.212	0.340	1.124	0.294	0.327	0.434	2.087
0.5	0.5	0.5	0.2	0	1.231	1.391	1.201	1.416	1.821	2.505	1.747	2.727
				3	0.809	0.723	0.922	1.050	1.090	1.151	1.281	2.011
				6	0.410	0.321	0.540	0.761	0.530	0.500	0.716	1.362
				10	0.255	0.229	0.347	0.684	0.317	0.345	0.468	1.236
0.5	0.5	0.5	0.5	0	1.259	1.427	1.276	1.435	1.886	2.649	2.050	2.830
				3	0.767	0.697	0.804	0.664	1.141	1.179	1.208	1.189
				6	0.423	0.344	0.374	0.342	0.529	0.511	0.508	0.545
				10	0.252	0.241	0.238	0.208	0.328	0.358	0.318	0.327
0.5	0.5	0.5	0.8	0	1.248	1.456	1.288	1.392	1.829	2.633	2.110	2.691
				3	0.745	0.716	0.511	0.433	0.989	1.145	0.701	0.674
				6	0.376	0.311	0.180	0.143	0.493	0.499	0.238	0.217
				10	0.225	0.204	0.104	0.086	0.271	0.299	0.145	0.132

Esta tabla presenta la razón del error cuadrático medio obtenido a través de simulaciones entre el estimador GM y el de mínimos cuadrados. En la ecuación (4-1) se presenta el modelo, el valor de ω está relacionado con la magnitud de los datos atípicos y su definición se presenta en la parte inferior de la ecuación (2-3). El valor del parámetro ν es igual a 0.5 y el tamaño de muestra es $T = 100$.

Tabla 4-4.: Sesgo promedio absoluto del estimador GM y el clásico basados en 1000 replicaciones con un modelo $TAR(Z, 2, 1, 1, 0)$, tamaño de muestra igual a 100, $\nu = 0.5$.

$\phi_0^{(1)}$	$\phi_1^{(1)}$	$\phi_0^{(2)}$	$\phi_1^{(2)}$	ω	Huber $k=1.345$				Tukey $c=4.685$				LS			
					$\hat{\phi}_0^{(1)}$	$\hat{\phi}_1^{(1)}$	$\hat{\phi}_0^{(2)}$	$\hat{\phi}_1^{(2)}$	$\hat{\phi}_0^{(1)}$	$\hat{\phi}_1^{(1)}$	$\hat{\phi}_0^{(2)}$	$\hat{\phi}_1^{(2)}$	$\hat{\phi}_0^{(1)}$	$\hat{\phi}_1^{(1)}$	$\hat{\phi}_0^{(2)}$	$\hat{\phi}_1^{(2)}$
0.5	0.5	0.5	-0.8	0	0.01	0.02	0.00	0.00	0.01	0.03	0.00	0.00	0.00	0.02	0.01	0.01
				3	0.02	0.05	0.01	0.03	0.02	0.04	0.00	0.01	0.05	0.10	0.05	0.13
				6	0.02	0.05	0.02	0.04	0.02	0.04	0.00	0.01	0.12	0.21	0.12	0.29
				10	0.02	0.05	0.02	0.03	0.02	0.04	0.00	0.00	0.14	0.28	0.16	0.41
0.5	0.5	0.5	-0.5	0	0.02	0.03	0.00	0.01	0.03	0.03	0.01	0.01	0.01	0.02	0.00	0.00
				3	0.04	0.05	0.01	0.02	0.03	0.04	0.00	0.01	0.08	0.13	0.05	0.09
				6	0.04	0.05	0.01	0.02	0.03	0.04	0.00	0.00	0.14	0.23	0.10	0.20
				10	0.04	0.05	0.01	0.02	0.03	0.03	0.00	0.00	0.19	0.30	0.13	0.28
0.5	0.5	0.5	-0.2	0	0.01	0.02	0.01	0.01	0.01	0.02	0.01	0.01	0.01	0.02	0.00	0.01
				3	0.02	0.05	0.00	0.01	0.02	0.03	0.00	0.00	0.08	0.13	0.03	0.04
				6	0.03	0.05	0.00	0.00	0.01	0.02	0.01	0.01	0.17	0.24	0.04	0.07
				10	0.03	0.05	0.00	0.00	0.01	0.03	0.01	0.01	0.21	0.31	0.07	0.11
0.5	0.5	0.5	0	0	0.02	0.03	0.01	0.02	0.02	0.03	0.00	0.01	0.02	0.03	0.01	0.02
				3	0.04	0.05	0.00	0.02	0.02	0.03	0.01	0.02	0.10	0.14	0.01	0.01
				6	0.04	0.05	0.00	0.02	0.03	0.03	0.00	0.01	0.18	0.24	0.00	0.02
				10	0.03	0.05	0.01	0.02	0.02	0.03	0.01	0.02	0.23	0.31	0.00	0.02
0.5	0.5	0.5	0.2	0	0.03	0.03	0.02	0.02	0.03	0.03	0.01	0.02	0.03	0.03	0.02	0.02
				3	0.05	0.06	0.03	0.04	0.04	0.05	0.02	0.02	0.11	0.13	0.05	0.07
				6	0.05	0.06	0.03	0.04	0.04	0.04	0.02	0.02	0.21	0.25	0.09	0.11
				10	0.05	0.05	0.03	0.04	0.04	0.04	0.02	0.03	0.26	0.31	0.11	0.14
0.5	0.5	0.5	0.5	0	0.03	0.03	0.02	0.03	0.04	0.04	0.02	0.02	0.03	0.03	0.03	0.03
				3	0.06	0.06	0.05	0.06	0.05	0.05	0.04	0.04	0.13	0.13	0.13	0.13
				6	0.06	0.06	0.06	0.06	0.05	0.04	0.03	0.03	0.23	0.24	0.24	0.23
				10	0.07	0.07	0.05	0.05	0.05	0.05	0.03	0.04	0.31	0.32	0.30	0.31
0.5	0.5	0.5	0.8	0	0.05	0.03	0.06	0.03	0.05	0.03	0.06	0.04	0.05	0.03	0.06	0.03
				3	0.09	0.06	0.10	0.06	0.07	0.05	0.08	0.05	0.17	0.12	0.25	0.16
				6	0.08	0.06	0.10	0.06	0.06	0.04	0.08	0.05	0.29	0.21	0.51	0.32
				10	0.08	0.06	0.10	0.06	0.06	0.04	0.07	0.04	0.41	0.29	0.70	0.43

Esta tabla presenta los sesgos promedio absolutos para cada uno de los parámetros obtenidos utilizando el estimador GM y el de mínimos cuadrados. En la ecuación (4-1) se presenta el modelo, el valor de ω está relacionado con la magnitud de los datos atípicos y su definición se presenta en la parte inferior de la ecuación (2-3). El valor del parámetro ν es igual a 0.5 y el tamaño de muestra es $T = 100$.

Tabla 4-5.: Razón del error cuadrático medio entre el estimador GM y el clásico basadas en 1000 replicaciones con un modelo $TAR(Z, 2, 1, 1, 0)$, tamaño de muestra igual a 200, $\nu = 0.5$.

$\phi_0^{(1)}$	$\phi_1^{(1)}$	$\phi_0^{(2)}$	$\phi_1^{(2)}$	ω	$\alpha =$	Huber $k=1.345$				Tukey $c=4.685$			
						$\hat{\phi}_0^{(1)}$	$\hat{\phi}_1^{(1)}$	$\hat{\phi}_0^{(2)}$	$\hat{\phi}_1^{(2)}$	$\hat{\phi}_0^{(1)}$	$\hat{\phi}_1^{(1)}$	$\hat{\phi}_0^{(2)}$	$\hat{\phi}_1^{(2)}$
0.5	0.5	0.5	-0.8	0	0	1.201	1.432	1.142	1.328	1.553	2.562	1.357	2.298
					3	0.795	0.539	0.643	0.285	0.956	0.798	0.735	0.401
					6	0.344	0.157	0.271	0.070	0.383	0.218	0.300	0.089
					10	0.211	0.095	0.141	0.037	0.231	0.137	0.152	0.048
0.5	0.5	0.5	-0.5	0	0	1.163	1.352	1.187	1.357	1.583	2.393	1.453	2.362
					3	0.695	0.479	0.745	0.449	0.879	0.732	0.884	0.699
					6	0.319	0.171	0.350	0.158	0.371	0.243	0.395	0.234
					10	0.191	0.111	0.216	0.099	0.234	0.157	0.234	0.146
0.5	0.5	0.5	-0.2	0	0	1.228	1.335	1.202	1.405	1.650	2.372	1.536	2.503
					3	0.721	0.492	0.853	1.023	0.887	0.738	1.068	1.900
					6	0.296	0.170	0.520	0.655	0.350	0.248	0.635	1.127
					10	0.194	0.112	0.300	0.459	0.221	0.154	0.363	0.789
0.5	0.5	0.5	0	0	0	1.198	1.332	1.154	1.379	1.614	2.257	1.479	2.510
					3	0.658	0.476	0.940	1.284	0.811	0.753	1.210	2.429
					6	0.285	0.178	0.588	1.384	0.333	0.247	0.706	2.450
					10	0.175	0.111	0.304	1.065	0.206	0.160	0.371	1.951
0.5	0.5	0.5	0.2	0	0	1.268	1.464	1.211	1.403	1.796	2.629	1.654	2.569
					3	0.615	0.484	0.879	0.935	0.780	0.750	1.182	1.682
					6	0.274	0.185	0.516	0.582	0.314	0.260	0.677	1.021
					10	0.170	0.116	0.286	0.413	0.196	0.165	0.356	0.677
0.5	0.5	0.5	0.5	0	0	1.252	1.405	1.290	1.384	1.782	2.328	1.918	2.430
					3	0.611	0.488	0.600	0.466	0.800	0.713	0.784	0.720
					6	0.245	0.173	0.247	0.163	0.304	0.240	0.324	0.236
					10	0.142	0.115	0.151	0.107	0.169	0.150	0.195	0.157
0.5	0.5	0.5	0.8	0	0	1.253	1.447	1.302	1.463	1.844	2.660	1.950	2.583
					3	0.615	0.525	0.396	0.318	0.848	0.848	0.495	0.435
					6	0.219	0.173	0.116	0.083	0.280	0.255	0.135	0.109
					10	0.126	0.096	0.064	0.045	0.156	0.143	0.077	0.061

Esta tabla presenta la razón del error cuadrático medio obtenido a través de simulaciones entre el estimador GM y el de mínimos cuadrados. En la ecuación (4-1) se presenta el modelo, el valor de ω está relacionado con la magnitud de los datos atípicos y su definición se presenta en la parte inferior de la ecuación (2-3). El valor del parámetro ν es igual a 0.5 y el tamaño de muestra es $T = 200$.

Tabla 4-6.: Sesgo promedio absoluto del estimador GM y el clásico basados en 1000 replicaciones con un modelo $TAR(Z, 2, 1, 1, 0)$, tamaño de muestra igual a 200, $\nu = 0.5$.

$\phi_0^{(1)}$	$\phi_1^{(1)}$	$\phi_0^{(2)}$	$\phi_1^{(2)}$	ω	$\alpha =$	Huber $k=1.345$				Tukey $c=4.685$				LS			
						$\hat{\phi}_0^{(1)}$	$\hat{\phi}_1^{(1)}$	$\hat{\phi}_0^{(2)}$	$\hat{\phi}_1^{(2)}$	$\hat{\phi}_0^{(1)}$	$\hat{\phi}_1^{(1)}$	$\hat{\phi}_0^{(2)}$	$\hat{\phi}_1^{(2)}$	$\hat{\phi}_0^{(1)}$	$\hat{\phi}_1^{(1)}$	$\hat{\phi}_0^{(2)}$	$\hat{\phi}_1^{(2)}$
0.5	0.5	0.5	-0.8	0		0.01	0.01	0.00	0.01	0.01	0.00	0.00	0.01	0.01	0.01	0.01	0.01
				3		0.03	0.03	0.02	0.03	0.02	0.02	0.01	0.02	0.06	0.10	0.06	0.13
				6		0.03	0.03	0.02	0.04	0.02	0.01	0.01	0.02	0.14	0.22	0.13	0.32
				10		0.03	0.03	0.01	0.03	0.02	0.01	0.01	0.01	0.19	0.30	0.18	0.46
0.5	0.5	0.5	-0.5	0		0.01	0.02	0.00	0.00	0.01	0.02	0.00	0.01	0.01	0.02	0.00	0.00
				3		0.03	0.05	0.01	0.03	0.02	0.03	0.00	0.00	0.08	0.13	0.05	0.11
				6		0.03	0.04	0.01	0.02	0.02	0.02	0.00	0.00	0.16	0.25	0.10	0.24
				10		0.03	0.04	0.02	0.02	0.02	0.02	0.00	0.00	0.21	0.33	0.14	0.32
0.5	0.5	0.5	-0.2	0		0.01	0.02	0.00	0.01	0.02	0.02	0.01	0.01	0.01	0.02	0.00	0.00
				3		0.03	0.05	0.00	0.01	0.02	0.03	0.00	0.00	0.09	0.13	0.02	0.05
				6		0.04	0.05	0.01	0.01	0.02	0.03	0.00	0.01	0.19	0.27	0.06	0.10
				10		0.03	0.05	0.01	0.01	0.02	0.03	0.00	0.01	0.23	0.35	0.06	0.13
0.5	0.5	0.5	0	0		0.01	0.02	0.00	0.00	0.01	0.02	0.00	0.00	0.01	0.02	0.00	0.00
				3		0.03	0.05	0.00	0.00	0.02	0.03	0.00	0.00	0.10	0.14	0.00	0.00
				6		0.04	0.04	0.00	0.00	0.02	0.02	0.00	0.00	0.20	0.27	0.00	0.00
				10		0.03	0.04	0.00	0.01	0.02	0.02	0.00	0.00	0.26	0.34	0.02	0.01
0.5	0.5	0.5	0.2	0		0.02	0.02	0.00	0.01	0.02	0.02	0.00	0.01	0.02	0.02	0.01	0.01
				3		0.04	0.05	0.01	0.02	0.03	0.03	0.01	0.02	0.12	0.14	0.04	0.06
				6		0.04	0.05	0.02	0.03	0.02	0.03	0.01	0.01	0.22	0.26	0.08	0.11
				10		0.04	0.04	0.01	0.03	0.03	0.02	0.00	0.01	0.29	0.35	0.10	0.15
0.5	0.5	0.5	0.5	0		0.01	0.02	0.02	0.02	0.00	0.02	0.02	0.02	0.01	0.02	0.02	0.01
				3		0.04	0.05	0.05	0.05	0.02	0.03	0.04	0.03	0.12	0.13	0.14	0.13
				6		0.03	0.05	0.05	0.05	0.01	0.02	0.03	0.03	0.25	0.26	0.27	0.27
				10		0.03	0.04	0.05	0.04	0.01	0.02	0.03	0.02	0.34	0.34	0.35	0.34
0.5	0.5	0.5	0.8	0		0.00	0.01	0.04	0.02	0.00	0.01	0.05	0.02	0.01	0.01	0.04	0.02
				3		0.04	0.03	0.09	0.05	0.02	0.02	0.07	0.04	0.13	0.10	0.25	0.16
				6		0.04	0.04	0.09	0.05	0.02	0.02	0.06	0.03	0.30	0.23	0.54	0.34
				10		0.04	0.04	0.08	0.05	0.01	0.02	0.05	0.03	0.41	0.31	0.74	0.47

Esta tabla presenta los sesgos promedio absolutos para cada uno de los parámetros obtenidos utilizando el estimador GM y el de mínimos cuadrados. En la ecuación (4-1) se presenta el modelo, el valor de ω está relacionado con la magnitud de los datos atípicos y su definición se presenta en la parte inferior de la ecuación (2-3). El valor del parámetro ν es igual a 0.5 y el tamaño de muestra es $T = 200$.

4.2. Ejercicios de simulación adicionales

En esta sección se llevan a cabo algunos ejercicios de simulación adicionales en los que se evalúa el desempeño de la prueba de no linealidad y el método de estimación en diferentes escenarios. En primer lugar se consideran diferentes porcentajes de contaminación de datos atípicos y una diferente proporción de observaciones en cada uno de los regímenes. Posteriormente, se evalúa de forma empírica la convergencia en distribución de los estimadores *GM* a la distribución normal, al igual que la cobertura de los intervalos de confianza asintóticos.

4.2.1. Diferentes porcentajes de contaminación

Se considera un escenario para las simulaciones igual al propuesto en la sección anterior, pero se cambian los porcentajes de contaminación (parámetro β) a 1% y 10% en lugar de 5%. Se presentan los resultados para la prueba de no linealidad y la estimación de los coeficientes autoregresivos, el valor del parámetro ν es igual a 0.5.

Los resultados para la prueba de no linealidad con porcentaje de contaminación 1% y 10% se presentan en las tablas **4-7**, **4-8** para muestras de tamaño $T = 100$. En el apéndice C se presentan los mismos resultados para muestras de tamaño $T = 200$ en las tablas **C-3** y **C-4**. Estas tablas se interpretan de la misma forma que fue discutida en la subsección 4.1.1.

Las tablas para el caso en que el porcentaje de contaminación es 1% evidencian que la prueba de no-linealidad basada en la función de mínimos cuadrados sigue teniendo problemas de tamaño bajo la presencia de observaciones atípicas aditivas. Además, estos problemas empeoran con el aumento del tamaño de muestra **C-3**. Por otro lado, al llevar a cabo la prueba de no linealidad con las funciones de *Huber* ó *Tukey* el tamaño empírico se mantiene cerca de los niveles nominales. A pesar de que los resultados sugieren que la elección de la función de mínimos cuadrados puede tener una mayor potencia que las demás, esta es espuria debido a que el tamaño empírico de la prueba excede al nominal, por lo que hay una clara tendencia a rechazar con mayor frecuencia la hipótesis nula (este problema también se evidencia en los resultados base de las tablas **4-1** y **4-2**).

La potencia de la prueba con elección de función *Huber* $k = 3.291$ y *Tukey* con $c = 15$ es alta. Incluso excede en algunos casos a la de mínimos cuadrados para los modelos con parámetros $\phi_1^{(2)} = -0.8$ y -0.5 . Los resultados de la función *Huber* son en general mejores que la de *Tukey* aunque esta diferencia disminuye con el aumento del tamaño de muestra. En general, los resultados de las tablas **4-7**, **C-3** sugieren que con porcentajes de observaciones atípicas bajos, las funciones *Huber* y *Tukey* dan buenos resultados si se eligen los parámetros k y c de

mayor magnitud.

Respecto a los resultados para el porcentaje de contaminación 10% se observa que la función de mínimos cuadrados preserva los problemas de tamaño (mencionados anteriormente) bajo la presencia de observaciones atípicas mientras que las funciones de *Huber* y *Tukey* no. Con altos porcentajes de contaminación la mejor elección es la función *Huber* con $k = 1.345$ ó la de *Tukey* con $c = 4.685$ pues son las que presentan una mayor potencia. En general, la primera parece ser mejor, sobretodo para modelos diferentes a $\phi_1^{(2)} = 0.2$ y 0. El aumento en el tamaño de muestra permite que la prueba usando estas dos funciones alcance mayores niveles de potencia.

En resumen, los resultados de las simulaciones de la prueba de no linealidad para diferentes porcentajes de contaminación muestran que la función de mínimos cuadrados tiene un mejor desempeño cuando no hay observaciones atípicas. Sin embargo, si este tipo de observaciones están presentes, las funciones *Huber* y *Tukey* son mejores puesto que no sufren problemas de tamaño. Si el porcentaje de contaminación es alto, se sugiere utilizar estas mismas funciones con valores de k y c bajos mientras que si el porcentaje es bajo los valores de estos parámetros deben ser altos. La función de *Huber* parece tener en promedio un mejor desempeño que la de *Tukey*.

Las tablas **4-9** y **4-10** presentan las razones de error cuadrático medio entre el estimador *GM* y el de mínimos cuadrados para los porcentajes de contaminación 1% y 10% respectivamente con muestras de tamaño $T = 100$ mientras que las tablas **C-2** y **C-1** ubicados en el apéndice C muestran los resultados para muestras de tamaño $T = 200$.

En general los resultados en la tabla **4-9** muestran que con un porcentaje de contaminación de 1% el estimador de mínimos cuadrados tiene un mejor desempeño en el caso que no existen observaciones atípicas (igual que en la sección anterior) adicionalmente cuando la magnitud de estas observaciones es pequeña ($\omega = 3$). Si bien es cierto que para las magnitudes mayores ($\omega = 6, \omega = 10$) el estimador *GM* tiene un mejor desempeño, los resultados también muestran que el estimador basado en la función de *Huber* tiene un mejor desempeño que el de *Tukey*. La tabla **C-1** evidencia que cuando la magnitud de los valores atípicos es mayor, el aumento en el tamaño de muestra mejora aún más el desempeño en términos de error cuadrático medio de los estimadores *GM* frente al de mínimos cuadrados.

Los resultados en las tablas **4-10** y **C-2** son similares a los obtenidos para el porcentaje de contaminación 5%. La principal diferencia respecto a los resultados de la subsección 4.1.2 es que (como es de esperar) el aumento en el porcentaje de contaminación mejora el desempeño relativo del estimador *GM* frente al de mínimos cuadrados. Por ejemplo, en el modelo $\phi_1^{(2)} = 0.8$ con un valor de $\omega = 10$ la razón de error cuadrático medio entre el

estimador GM que utiliza la función de *Huber* y el de mínimos cuadrados llega a niveles por debajo de 0.1, en particular, para los coeficientes autoregresivos del primer y segundo régimen los valores son 0.093 y 0.044 (respectivamente). Los resultados para la función *Tukey* son bastante similares.

Tabla 4-7: Frecuencias relativas empíricas del rechazo de la hipótesis de linealidad basadas en 1000 replicaciones con un modelo $TAR(Z, 2, 1, 0)$, tamaño de muestra igual a 100 y porcentaje de contaminación 1%, $\nu = 0.5$.

$\phi_0^{(1)}$	$\phi_1^{(1)}$	$\phi_0^{(2)}$	$\phi_1^{(2)}$	ω	$\alpha =$	LS			Huber k=1.345			Huber k=3.291			Tukey c=4.685			Tukey c=15		
						1%	5%	10%	1%	5%	10%	1%	5%	10%	1%	5%	10%	1%	5%	10%
0.5	0.5	0.5	-0.8	0	0.978	0.996	0.999	0.903	0.970	0.988	0.970	0.998	0.999	0.817	0.918	0.955	0.964	0.996	0.999	
				3	0.953	0.982	0.989	0.895	0.965	0.986	0.955	0.995	0.997	0.810	0.911	0.953	0.952	0.990	0.998	
				6	0.901	0.957	0.973	0.892	0.964	0.985	0.954	0.985	0.995	0.813	0.913	0.953	0.947	0.982	0.993	
				10	0.827	0.902	0.932	0.894	0.963	0.987	0.938	0.988	0.996	0.808	0.913	0.954	0.920	0.982	0.994	
0.5	0.5	0.5	-0.5	0	0.808	0.932	0.954	0.655	0.837	0.809	0.799	0.911	0.949	0.528	0.743	0.826	0.791	0.912	0.949	
				3	0.758	0.890	0.936	0.629	0.826	0.892	0.755	0.893	0.937	0.511	0.732	0.823	0.750	0.889	0.932	
				6	0.717	0.843	0.893	0.641	0.825	0.896	0.735	0.878	0.928	0.515	0.723	0.815	0.722	0.881	0.932	
				10	0.622	0.785	0.835	0.627	0.822	0.886	0.715	0.868	0.926	0.526	0.730	0.817	0.709	0.868	0.921	
0.5	0.5	0.5	-0.2	0	0.450	0.695	0.798	0.325	0.566	0.681	0.416	0.666	0.785	0.262	0.484	0.603	0.418	0.665	0.780	
				3	0.413	0.655	0.764	0.297	0.546	0.668	0.379	0.627	0.744	0.247	0.473	0.592	0.382	0.628	0.749	
				6	0.404	0.637	0.744	0.296	0.555	0.671	0.332	0.614	0.741	0.251	0.478	0.587	0.334	0.604	0.725	
				10	0.393	0.613	0.707	0.299	0.529	0.673	0.344	0.592	0.715	0.247	0.481	0.591	0.340	0.589	0.696	
0.5	0.5	0.5	0	0	0.213	0.408	0.544	0.150	0.343	0.492	0.183	0.406	0.533	0.131	0.309	0.431	0.188	0.405	0.529	
				3	0.195	0.403	0.528	0.138	0.340	0.479	0.173	0.377	0.503	0.118	0.304	0.425	0.179	0.378	0.510	
				6	0.232	0.413	0.540	0.139	0.340	0.474	0.161	0.371	0.488	0.122	0.297	0.424	0.156	0.358	0.486	
				10	0.243	0.427	0.558	0.136	0.341	0.463	0.138	0.341	0.469	0.135	0.303	0.425	0.142	0.327	0.459	
0.5	0.5	0.5	0.2	0	0.070	0.201	0.313	0.053	0.169	0.251	0.062	0.186	0.292	0.060	0.173	0.255	0.066	0.190	0.295	
				3	0.073	0.196	0.310	0.052	0.170	0.256	0.055	0.167	0.262	0.058	0.176	0.258	0.058	0.172	0.274	
				6	0.097	0.240	0.355	0.045	0.171	0.248	0.051	0.171	0.274	0.056	0.171	0.255	0.052	0.173	0.267	
				10	0.160	0.313	0.402	0.053	0.157	0.248	0.059	0.168	0.256	0.056	0.165	0.262	0.055	0.160	0.249	
0.5	0.5	0.5	0.5	0	0.011	0.054	0.110	0.011	0.054	0.100	0.013	0.048	0.098	0.010	0.067	0.125	0.014	0.049	0.103	
				3	0.020	0.068	0.128	0.008	0.053	0.097	0.012	0.049	0.103	0.010	0.057	0.123	0.014	0.049	0.101	
				6	0.042	0.106	0.167	0.013	0.053	0.098	0.012	0.049	0.095	0.012	0.068	0.129	0.013	0.049	0.100	
				10	0.094	0.188	0.273	0.011	0.050	0.088	0.013	0.032	0.087	0.010	0.060	0.121	0.014	0.038	0.088	
0.5	0.5	0.5	0.8	0	0.236	0.457	0.591	0.170	0.366	0.501	0.206	0.424	0.563	0.146	0.325	0.436	0.204	0.431	0.560	
				3	0.220	0.428	0.547	0.164	0.354	0.491	0.203	0.403	0.542	0.146	0.312	0.424	0.193	0.403	0.539	
				6	0.215	0.406	0.505	0.162	0.345	0.493	0.182	0.377	0.498	0.143	0.313	0.437	0.170	0.366	0.491	
				10	0.202	0.389	0.520	0.145	0.347	0.471	0.159	0.364	0.493	0.150	0.317	0.422	0.159	0.359	0.475	

Esta tabla presenta los porcentajes de rechazo de la hipótesis de no linealidad al utilizar la prueba de [Hung et al., 2009] adaptada al caso de un modelo TAR , el porcentaje de contaminación es de 1%. En la ecuación (4-1) se presenta el modelo, el valor de ω está relacionado con la magnitud de los datos atípicos y su definición se presenta en la parte inferior de la ecuación (2-3). El valor del parámetro ν es igual a 0.5 y el tamaño de muestra es $T = 100$.

Tabla 4-8.: Frecuencias relativas empíricas del rechazo de la hipótesis de linealidad basadas en 1000 repeticiones con un modelo $TAR(Z, 2, 1, 1, 0)$, tamaño de muestra igual a 100 y porcentaje de contaminación 10%, $\nu = 0.5$.

$\phi_0^{(1)}$	$\phi_1^{(1)}$	$\phi_0^{(2)}$	$\phi_1^{(2)}$	ω	$\alpha =$	LS			Huber k=1.345			Huber k=3.291			Tukey c=4.685			Tukey c=15				
						1%	5%	10%	1%	5%	10%	1%	5%	10%	1%	5%	10%	1%	5%	10%	1%	5%
0.5	0.5	0.5	-0.8	0	0.978	0.996	0.999	0.903	0.970	0.998	0.970	0.998	0.999	0.817	0.918	0.955	0.817	0.918	0.955	0.964	0.996	0.999
				3	0.715	0.863	0.914	0.780	0.774	0.951	0.774	0.917	0.955	0.687	0.843	0.904	0.687	0.843	0.904	0.766	0.901	0.944
				6	0.326	0.508	0.613	0.702	0.562	0.925	0.562	0.757	0.826	0.656	0.828	0.898	0.656	0.828	0.898	0.509	0.722	0.805
				10	0.171	0.302	0.390	0.689	0.456	0.916	0.456	0.692	0.790	0.667	0.843	0.901	0.667	0.843	0.901	0.399	0.631	0.738
0.5	0.5	0.5	-0.5	0	0.808	0.932	0.954	0.655	0.799	0.899	0.799	0.911	0.949	0.528	0.743	0.826	0.528	0.743	0.826	0.791	0.912	0.949
				3	0.413	0.631	0.724	0.467	0.425	0.792	0.425	0.659	0.764	0.404	0.621	0.721	0.404	0.621	0.721	0.422	0.653	0.756
				6	0.193	0.347	0.460	0.380	0.275	0.753	0.275	0.493	0.609	0.324	0.573	0.712	0.324	0.573	0.712	0.239	0.464	0.598
				10	0.129	0.230	0.315	0.352	0.200	0.743	0.200	0.391	0.534	0.382	0.597	0.715	0.382	0.597	0.715	0.173	0.364	0.502
0.5	0.5	0.5	-0.2	0	0.450	0.695	0.798	0.325	0.416	0.681	0.416	0.666	0.785	0.262	0.484	0.603	0.262	0.484	0.603	0.418	0.665	0.780
				3	0.219	0.415	0.539	0.200	0.164	0.560	0.164	0.378	0.504	0.170	0.364	0.480	0.170	0.364	0.480	0.176	0.400	0.516
				6	0.138	0.280	0.365	0.184	0.104	0.522	0.104	0.267	0.380	0.174	0.360	0.504	0.174	0.360	0.504	0.090	0.220	0.346
				10	0.111	0.207	0.285	0.131	0.061	0.462	0.061	0.193	0.285	0.162	0.354	0.495	0.162	0.354	0.495	0.054	0.181	0.278
0.5	0.5	0.5	0	0	0.213	0.408	0.544	0.150	0.183	0.492	0.183	0.406	0.533	0.131	0.309	0.431	0.131	0.309	0.431	0.188	0.405	0.529
				3	0.119	0.283	0.393	0.085	0.074	0.396	0.074	0.211	0.337	0.088	0.236	0.339	0.088	0.236	0.339	0.081	0.224	0.346
				6	0.090	0.198	0.285	0.072	0.032	0.353	0.032	0.134	0.226	0.075	0.233	0.339	0.075	0.233	0.339	0.040	0.133	0.221
				10	0.095	0.179	0.240	0.072	0.033	0.309	0.033	0.125	0.203	0.080	0.219	0.334	0.080	0.219	0.334	0.035	0.095	0.187
0.5	0.5	0.5	0.2	0	0.070	0.201	0.313	0.053	0.062	0.251	0.062	0.186	0.292	0.060	0.173	0.255	0.060	0.173	0.066	0.190	0.295	
				3	0.076	0.182	0.268	0.044	0.034	0.210	0.034	0.111	0.192	0.042	0.126	0.200	0.042	0.126	0.200	0.048	0.118	0.192
				6	0.081	0.191	0.255	0.036	0.017	0.200	0.017	0.090	0.167	0.029	0.134	0.207	0.029	0.134	0.207	0.016	0.075	0.143
				10	0.089	0.174	0.238	0.031	0.022	0.179	0.022	0.091	0.149	0.039	0.128	0.199	0.039	0.128	0.199	0.021	0.076	0.124
0.5	0.5	0.5	0.5	0	0.011	0.054	0.110	0.011	0.013	0.048	0.013	0.048	0.098	0.010	0.067	0.125	0.010	0.067	0.014	0.049	0.103	
				3	0.045	0.096	0.154	0.010	0.013	0.094	0.013	0.057	0.120	0.017	0.055	0.109	0.017	0.055	0.109	0.012	0.049	0.120
				6	0.052	0.115	0.169	0.007	0.008	0.081	0.008	0.054	0.093	0.010	0.051	0.101	0.010	0.051	0.101	0.007	0.036	0.067
				10	0.080	0.151	0.218	0.008	0.013	0.079	0.013	0.051	0.091	0.008	0.042	0.090	0.008	0.042	0.090	0.010	0.044	0.085
0.5	0.5	0.5	0.8	0	0.236	0.457	0.591	0.170	0.206	0.501	0.206	0.424	0.563	0.146	0.325	0.436	0.146	0.325	0.436	0.204	0.431	0.560
				3	0.123	0.260	0.385	0.130	0.126	0.394	0.126	0.305	0.422	0.101	0.255	0.365	0.101	0.255	0.365	0.121	0.274	0.380
				6	0.097	0.198	0.270	0.096	0.095	0.335	0.095	0.204	0.304	0.091	0.242	0.341	0.091	0.242	0.341	0.068	0.150	0.257
				10	0.084	0.164	0.235	0.069	0.056	0.324	0.056	0.154	0.247	0.091	0.258	0.354	0.091	0.258	0.354	0.032	0.111	0.173

Esta tabla presenta los porcentajes de rechazo de la hipótesis de no linealidad al utilizar la prueba de [Hung et al., 2009] adaptada al caso de un modelo TAR , el porcentaje de contaminación es de 10%. En la ecuación (4-1) se presenta el modelo, el valor de ω está relacionado con la magnitud de los datos atípicos y su definición se presenta en la parte inferior de la ecuación (2-3). El valor del parámetro ν es igual a 0.5 y el tamaño de muestra es $T = 100$.

Tabla 4-9.: Razón del error cuadrático medio entre el estimador GM y el clásico basadas en 1000 replicaciones con un modelo $TAR(Z, 2, 1, 1, 0)$, tamaño de muestra igual a 100 y porcentaje de contaminación 1%, $\nu = 0.5$.

$\phi_0^{(1)}$	$\phi_1^{(1)}$	$\phi_0^{(2)}$	$\phi_1^{(2)}$	ω	$\alpha =$	Huber $k=1.345$				Tukey $c=4.685$			
						$\hat{\phi}_0^{(1)}$	$\hat{\phi}_1^{(1)}$	$\hat{\phi}_0^{(2)}$	$\hat{\phi}_1^{(2)}$	$\hat{\phi}_0^{(1)}$	$\hat{\phi}_1^{(1)}$	$\hat{\phi}_0^{(2)}$	$\hat{\phi}_1^{(2)}$
0.5	0.5	0.5	-0.8	0	3	1.297	1.554	1.176	1.410	1.877	3.071	1.464	2.558
					6	1.188	1.318	1.029	0.976	1.694	2.537	1.249	1.735
					10	0.942	0.759	0.692	0.427	1.345	1.475	0.837	0.742
					10	0.594	0.493	0.488	0.219	0.835	0.942	0.593	0.387
0.5	0.5	0.5	-0.5	0	3	1.274	1.504	1.179	1.420	1.823	2.782	1.463	2.501
					6	1.176	1.183	1.092	1.208	1.681	2.157	1.381	2.132
					10	0.882	0.745	0.811	0.696	1.261	1.346	1.006	1.195
					10	0.643	0.559	0.580	0.533	0.897	0.993	0.698	0.919
0.5	0.5	0.5	-0.2	0	3	1.231	1.386	1.154	1.384	1.698	2.580	1.486	2.574
					6	1.118	1.154	1.101	1.354	1.529	2.106	1.410	2.531
					10	0.771	0.635	0.907	1.156	1.034	1.162	1.188	2.166
					10	0.627	0.551	0.727	1.045	0.833	0.957	0.941	1.972
0.5	0.5	0.5	0	0	3	1.215	1.369	1.245	1.484	1.716	2.546	1.689	2.794
					6	1.097	1.104	1.217	1.468	1.521	1.983	1.658	2.780
					10	0.786	0.706	1.003	1.445	1.043	1.256	1.364	2.744
					10	0.583	0.510	0.769	1.297	0.797	0.928	1.016	2.402
0.5	0.5	0.5	0.2	0	3	1.231	1.391	1.201	1.416	1.821	2.505	1.747	2.727
					6	1.065	1.139	1.133	1.334	1.561	2.019	1.618	2.530
					10	0.801	0.731	0.956	1.115	1.159	1.310	1.358	2.147
					10	0.551	0.542	0.735	0.995	0.773	0.936	1.064	1.891
0.5	0.5	0.5	0.5	0	3	1.259	1.427	1.276	1.435	1.886	2.649	2.050	2.830
					6	1.115	1.174	1.131	1.125	1.654	2.121	1.793	2.201
					10	0.828	0.770	0.729	0.737	1.223	1.392	1.134	1.409
					10	0.515	0.501	0.566	0.477	0.742	0.855	0.882	0.896
0.5	0.5	0.5	0.8	0	3	1.248	1.456	1.288	1.392	1.829	2.633	2.110	2.691
					6	1.080	1.187	0.963	0.934	1.553	2.109	1.532	1.725
					10	0.780	0.707	0.442	0.367	1.116	1.259	0.668	0.670
					10	0.485	0.473	0.305	0.246	0.679	0.826	0.487	0.465

Esta tabla presenta la razón del error cuadrático medio obtenido a través de simulaciones entre el estimador GM y el de mínimos cuadrados, el porcentaje de contaminación es de 1%. En la ecuación (4-1) se presenta el modelo, el valor de ω está relacionado con la magnitud de los datos atípicos y su definición se presenta en la parte inferior de la ecuación (2-3). El valor del parámetro ν es igual a 0.5 y el tamaño de muestra es $T = 100$.

Tabla 4-10.: Razón del error cuadrático medio entre el estimador GM y el clásico basadas en 1000 replicaciones con un modelo $TAR(Z, 2, 1, 1, 0)$, tamaño de muestra igual a 100 y porcentaje de contaminación 10 %, $\nu = 0.5$.

$\phi_0^{(1)}$	$\phi_1^{(1)}$	$\phi_0^{(2)}$	$\phi_1^{(2)}$	ω	$\alpha =$	Huber $k=1.345$				Tukey $c=4.685$			
						$\hat{\phi}_0^{(1)}$	$\hat{\phi}_1^{(1)}$	$\hat{\phi}_0^{(2)}$	$\hat{\phi}_1^{(2)}$	$\hat{\phi}_0^{(1)}$	$\hat{\phi}_1^{(1)}$	$\hat{\phi}_0^{(2)}$	$\hat{\phi}_1^{(2)}$
0.5	0.5	0.5	-0.8	0		1.297	1.554	1.176	1.410	1.877	3.071	1.464	2.558
					3	0.774	0.598	0.610	0.345	0.963	0.878	0.726	0.490
					6	0.336	0.229	0.258	0.125	0.377	0.314	0.263	0.139
					10	0.200	0.182	0.152	0.075	0.210	0.229	0.147	0.083
0.5	0.5	0.5	-0.5	0		1.274	1.504	1.179	1.420	1.823	2.782	1.463	2.501
					3	0.714	0.537	0.662	0.581	0.894	0.821	0.773	0.904
					6	0.342	0.255	0.296	0.252	0.394	0.340	0.315	0.347
					10	0.227	0.212	0.170	0.205	0.236	0.264	0.166	0.254
0.5	0.5	0.5	-0.2	0		1.231	1.386	1.154	1.384	1.698	2.580	1.486	2.574
					3	0.638	0.493	0.819	0.961	0.789	0.735	1.056	1.829
					6	0.290	0.259	0.376	0.757	0.315	0.347	0.435	1.349
					10	0.187	0.196	0.203	0.544	0.193	0.270	0.219	0.925
0.5	0.5	0.5	0	0		1.215	1.369	1.245	1.484	1.716	2.546	1.689	2.794
					3	0.645	0.518	0.937	1.338	0.822	0.761	1.283	2.759
					6	0.325	0.276	0.444	1.414	0.356	0.375	0.590	2.920
					10	0.196	0.202	0.240	1.154	0.191	0.251	0.298	2.248
0.5	0.5	0.5	0.2	0		1.231	1.391	1.201	1.416	1.821	2.505	1.747	2.727
					3	0.662	0.541	0.777	0.902	0.850	0.814	1.053	1.780
					6	0.312	0.267	0.420	0.709	0.343	0.358	0.542	1.149
					10	0.202	0.209	0.245	0.662	0.227	0.271	0.306	1.146
0.5	0.5	0.5	0.5	0		1.259	1.427	1.276	1.435	1.886	2.649	2.050	2.830
					3	0.633	0.527	0.611	0.509	0.860	0.825	0.835	0.782
					6	0.337	0.278	0.289	0.268	0.381	0.370	0.340	0.370
					10	0.198	0.210	0.205	0.211	0.230	0.271	0.225	0.255
0.5	0.5	0.5	0.8	0		1.248	1.456	1.288	1.392	1.829	2.633	2.110	2.691
					3	0.593	0.561	0.382	0.322	0.690	0.778	0.511	0.453
					6	0.306	0.255	0.154	0.132	0.338	0.332	0.157	0.141
					10	0.201	0.197	0.097	0.088	0.202	0.234	0.095	0.090

Esta tabla presenta la razón del error cuadrático medio obtenido a través de simulaciones entre el estimador GM y el de mínimos cuadrados, el porcentaje de contaminación es de 10 %. En la ecuación (4-1) se presenta el modelo, el valor de ω está relacionado con la magnitud de los datos atípicos y su definición se presenta en la parte inferior de la ecuación (2-3). El valor del parámetro ν es igual a 0.5 y el tamaño de muestra es $T = 100$.

4.2.2. Diferente porcentaje de observaciones en cada régimen

Los ejercicios de simulación base consideran un valor de umbral $r = 0$. El uso de este valor garantiza que en promedio el porcentaje de observaciones en cada régimen es cercano a 50%. En esta subsección, se exploran los resultados para el caso $r = 0.6$ bajo el cual en promedio el número de observaciones en el segundo régimen es de 30%. Una vez más, se presentan los resultados para el escenario base $\nu = 0.5$.

La tabla 4-11 y la tabla C-5 ubicada en el apéndice C, presentan las razones de error cuadrático medio entre el estimador GM y el de mínimos cuadrados para tamaños de muestra 100 y 200 respectivamente.

Los resultados de la tabla 4-11 muestran que el aumento en el número de observaciones en el primer régimen mejora el desempeño relativo del estimador GM para los coeficientes $\phi_0^{(1)}$ y $\phi_1^{(1)}$. Por otro lado, la disminución en el número de observaciones en el segundo régimen empeora el desempeño relativo de este estimador para los coeficientes $\phi_0^{(2)}$ y $\phi_1^{(2)}$. Los ejercicios de simulación siguen evidenciando mejores razones de error cuadrático medio para la elección de la función $\psi : \text{Huber}$.

En general, las tablas siguen mostrando resultados similares a los obtenidos anteriormente (sección 4.1.2). Esto corrobora la evidencia respecto a la mejora que se obtiene (en términos de error cuadrático medio) al utilizar el estimador GM en lugar del de mínimos cuadrados bajo la presencia de observaciones atípicas, sobretodo, cuando la magnitud de estas es mayor ($\omega = 10$).

Los resultados para la prueba de no linealidad se presentan en las tablas 4-12 y C-6 (este último ubicado en el apéndice C). En general vemos que el cambio en el porcentaje de observaciones en el segundo régimen genera una caída fuerte en la potencia al usar las funciones $\psi : \text{Huber}$ y Tukey . El tamaño empírico al usar la función de mínimos cuadrados (recuerde que con esta elección la prueba no es robusta) sigue siendo significativamente mayor que el nominal mientras que para las demás funciones es bastante similar. Para el caso de una muestra de tamaño 100, vemos que la potencia para el modelo $\phi_1^{(2)} = -0.8$ con la función Huber parámetro $k = 1.345$ y $\omega = 6$ pasa de 0.833, 0.931, 0.970 en la tabla 4-1 (para niveles de 1%, 5% y 10%) a 0.394, 0.621, 0.714.

El aumento en el tamaño de muestra mejora la potencia para las elecciones de función $\psi : \text{Huber}$ y Tukey . Sin embargo, la función LS sigue teniendo problemas de tamaño. En general, los resultados sugieren que la función de Huber tiene un mejor desempeño que la de Tukey ; adicionalmente se observa que para la primera función, la elección del parámetro $k = 1.345$ permite alcanzar mejores resultados en el caso que existen observaciones atípicas y estas

tienen una mayor magnitud $\omega = 6, 10$.

La conclusión principal que se deriva de los resultados obtenidos es que la diferencia en los porcentajes de observaciones en cada régimen genera una disminución significativa en la potencia de la prueba de no linealidad. Sin embargo, este problema mejora con un aumento en el tamaño de muestra.

Tabla 4-11.: Razón del error cuadrático medio entre el estimador GM y el clásico basadas en 1000 replicaciones con un modelo $TAR(Z, 2, 1, 1, 0)$, tamaño de muestra igual a 100 y umbral $r = 0.6$, $\nu = 0.5$.

$\phi_0^{(1)}$	$\phi_1^{(1)}$	$\phi_0^{(2)}$	$\phi_1^{(2)}$	ω	$\alpha =$	Huber $k=1.345$				Tukey $c=4.685$			
						$\hat{\phi}_0^{(1)}$	$\hat{\phi}_1^{(1)}$	$\hat{\phi}_0^{(2)}$	$\hat{\phi}_1^{(2)}$	$\hat{\phi}_0^{(1)}$	$\hat{\phi}_1^{(1)}$	$\hat{\phi}_0^{(2)}$	$\hat{\phi}_1^{(2)}$
0.5	0.5	0.5	-0.8	0	3	1.239	1.349	1.173	1.401	1.801	2.347	1.611	3.000
					6	0.832	0.648	0.724	0.633	1.117	1.011	0.983	1.292
					10	0.369	0.212	0.350	0.245	0.462	0.326	0.439	0.425
					10	0.232	0.143	0.235	0.154	0.283	0.209	0.296	0.308
0.5	0.5	0.5	-0.5	0	3	1.300	1.456	1.223	1.485	1.883	2.633	1.756	2.905
					6	0.808	0.565	0.923	0.974	1.059	0.918	1.290	1.924
					10	0.388	0.250	0.493	0.452	0.496	0.364	0.674	0.831
					10	0.239	0.157	0.268	0.355	0.293	0.234	0.341	0.616
0.5	0.5	0.5	-0.2	0	3	1.232	1.395	1.267	1.552	1.649	2.491	1.853	3.129
					6	0.739	0.554	0.979	1.331	0.918	0.857	1.435	2.787
					10	0.317	0.219	0.608	1.209	0.372	0.313	0.881	2.479
					10	0.218	0.163	0.383	0.754	0.256	0.233	0.529	1.479
0.5	0.5	0.5	0	0	3	1.226	1.416	1.350	1.555	1.804	2.474	2.119	4.088
					6	0.691	0.596	1.092	1.357	0.887	0.856	1.647	3.774
					10	0.332	0.253	0.715	1.326	0.411	0.370	1.058	3.365
					10	0.199	0.165	0.361	0.987	0.244	0.246	0.509	2.324
0.5	0.5	0.5	0.2	0	3	1.229	1.459	1.287	1.580	1.772	2.586	2.071	3.268
					6	0.708	0.589	0.971	1.240	0.939	0.948	1.504	2.497
					10	0.340	0.247	0.597	0.890	0.431	0.364	0.868	1.847
					10	0.228	0.175	0.350	0.792	0.276	0.252	0.496	1.463
0.5	0.5	0.5	0.5	0	3	1.225	1.388	1.376	1.453	1.767	2.522	2.447	3.113
					6	0.680	0.571	0.961	0.860	0.924	0.913	1.717	1.823
					10	0.338	0.243	0.476	0.493	0.399	0.344	0.718	0.895
					10	0.194	0.155	0.331	0.328	0.230	0.224	0.512	0.589
0.5	0.5	0.5	0.8	0	3	1.261	1.455	1.278	1.479	1.800	2.646	2.224	3.146
					6	0.680	0.603	0.653	0.593	0.862	0.941	1.029	1.124
					10	0.324	0.238	0.310	0.262	0.392	0.349	0.453	0.464
					10	0.184	0.151	0.183	0.170	0.216	0.205	0.250	0.287

Esta tabla presenta la razón del error cuadrático medio obtenido a través de simulaciones entre el estimador GM y el de mínimos cuadrados. En la ecuación (4-1) se presenta el modelo, el valor de ω está relacionado con la magnitud de los datos atípicos y su definición se presenta en la parte inferior de la ecuación (2-3). El valor del parámetro ν es igual a 0.5, el tamaño de muestra es $T = 100$ y el valor del umbral r es 0.6 de forma que aproximadamente 30 % de las observaciones quedan en el segundo régimen.

Tabla 4-12.: Frecuencias relativas empíricas del rechazo de la hipótesis de linealidad basadas en 1000 repeticiones con un modelo $TAR(Z, 2, 1, 1, 0)$, tamaño de muestra igual a 100 y umbral $r = 0.6$, $\nu = 0.5$.

$\phi_0^{(1)}$	$\phi_1^{(1)}$	$\phi_0^{(2)}$	$\phi_1^{(2)}$	ω	$\alpha =$	LS			Huber k=1.345			Huber k=3.291			Tukey c=4.685			Tukey c=15		
						1 %	5 %	10 %	1 %	5 %	10 %	1 %	5 %	10 %	1 %	5 %	10 %	1 %	5 %	10 %
0.5	0.5	0.5	-0.8	0	0.741	0.866	0.913	0.502	0.695	0.788	0.695	0.849	0.888	0.375	0.601	0.710	0.691	0.839	0.882	
				3	0.571	0.751	0.819	0.422	0.622	0.738	0.538	0.728	0.810	0.324	0.532	0.660	0.533	0.717	0.811	
				6	0.404	0.588	0.692	0.394	0.621	0.714	0.430	0.626	0.733	0.336	0.538	0.657	0.395	0.613	0.720	
				10	0.321	0.472	0.565	0.408	0.618	0.722	0.379	0.610	0.720	0.328	0.565	0.681	0.335	0.579	0.694	
0.5	0.5	0.5	-0.5	0	0.462	0.677	0.753	0.289	0.510	0.636	0.410	0.645	0.751	0.238	0.440	0.564	0.412	0.646	0.746	
				3	0.319	0.536	0.637	0.229	0.456	0.575	0.274	0.492	0.599	0.204	0.407	0.515	0.266	0.490	0.611	
				6	0.251	0.421	0.553	0.222	0.423	0.547	0.203	0.405	0.528	0.205	0.388	0.499	0.189	0.382	0.512	
				10	0.226	0.382	0.474	0.201	0.417	0.535	0.163	0.363	0.493	0.205	0.393	0.516	0.147	0.344	0.484	
0.5	0.5	0.5	-0.2	0	0.199	0.413	0.546	0.146	0.317	0.441	0.181	0.390	0.520	0.137	0.302	0.417	0.179	0.391	0.516	
				3	0.156	0.351	0.459	0.115	0.280	0.402	0.107	0.289	0.398	0.115	0.270	0.378	0.118	0.298	0.411	
				6	0.184	0.335	0.438	0.109	0.271	0.381	0.086	0.223	0.342	0.115	0.273	0.388	0.070	0.192	0.310	
				10	0.188	0.314	0.408	0.098	0.253	0.367	0.062	0.187	0.303	0.119	0.267	0.380	0.050	0.181	0.286	
0.5	0.5	0.5	0	0	0.096	0.240	0.331	0.072	0.193	0.294	0.089	0.232	0.335	0.067	0.193	0.307	0.084	0.237	0.331	
				3	0.087	0.229	0.315	0.050	0.170	0.281	0.053	0.176	0.268	0.054	0.178	0.270	0.051	0.178	0.285	
				6	0.122	0.251	0.352	0.044	0.146	0.255	0.035	0.128	0.219	0.051	0.160	0.277	0.035	0.124	0.215	
				10	0.156	0.277	0.350	0.040	0.161	0.261	0.032	0.108	0.189	0.052	0.175	0.268	0.026	0.104	0.181	
0.5	0.5	0.5	0.2	0	0.033	0.124	0.220	0.032	0.111	0.189	0.031	0.105	0.200	0.047	0.128	0.209	0.032	0.112	0.203	
				3	0.054	0.149	0.232	0.027	0.105	0.177	0.033	0.096	0.162	0.039	0.113	0.193	0.035	0.097	0.169	
				6	0.103	0.221	0.310	0.026	0.098	0.169	0.017	0.088	0.155	0.033	0.112	0.171	0.022	0.080	0.148	
				10	0.138	0.251	0.349	0.029	0.100	0.159	0.021	0.077	0.134	0.035	0.120	0.191	0.021	0.067	0.123	
0.5	0.5	0.5	0.5	0	0.011	0.054	0.110	0.011	0.054	0.100	0.013	0.048	0.098	0.010	0.067	0.125	0.014	0.049	0.103	
				3	0.039	0.100	0.158	0.012	0.054	0.100	0.014	0.053	0.098	0.015	0.054	0.119	0.011	0.052	0.097	
				6	0.057	0.155	0.231	0.009	0.048	0.089	0.010	0.059	0.108	0.013	0.060	0.111	0.014	0.049	0.088	
				10	0.127	0.236	0.298	0.010	0.046	0.083	0.014	0.056	0.091	0.013	0.060	0.100	0.018	0.047	0.074	
0.5	0.5	0.5	0.8	0	0.108	0.254	0.358	0.070	0.194	0.293	0.092	0.216	0.323	0.059	0.184	0.270	0.096	0.211	0.325	
				3	0.091	0.207	0.294	0.068	0.183	0.275	0.082	0.197	0.298	0.050	0.165	0.251	0.079	0.194	0.285	
				6	0.112	0.208	0.283	0.064	0.161	0.252	0.069	0.166	0.250	0.054	0.159	0.246	0.050	0.134	0.211	
				10	0.127	0.234	0.314	0.048	0.157	0.228	0.041	0.134	0.222	0.056	0.157	0.238	0.036	0.099	0.175	

Esta tabla presenta los porcentajes de rechazo de la hipótesis de no linealidad al utilizar la prueba de [Hung et al., 2009] adaptada al caso de un modelo TAR . En la ecuación (4-1) se presenta el modelo, el valor de ω está relacionado con la magnitud de los datos atípicos y su definición se presenta en la parte inferior de la ecuación (2-3). El valor del parámetro ν es igual a 0.5, el tamaño de muestra es $T = 100$ y el valor del umbral r es 0.6 de forma que aproximadamente 30% de las observaciones quedan en el segundo régimen.

4.2.3. Análisis de las distribuciones empíricas de los coeficientes autoregresivos estimados

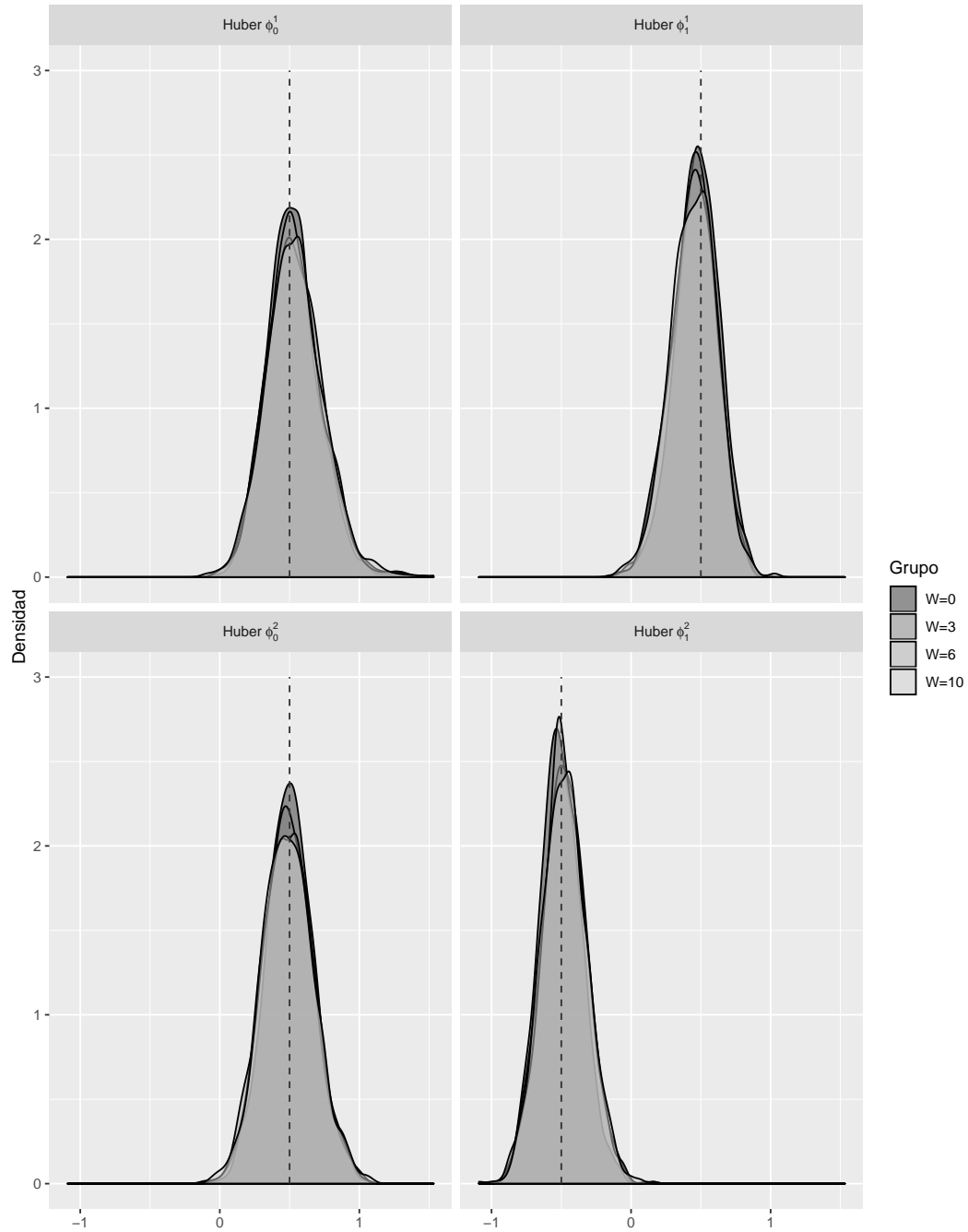
En esta subsección se presentan las funciones de densidad empíricas para los estimadores GM de los coeficientes autoregresivos con elecciones de función ψ : *Huber*, *Tukey* y la de mínimos cuadrados estimadas a través de métodos kernel. Las figuras **4-1**, **4-2** y **4-3** presentan estas funciones para el modelo $\phi_0^{(1)} = \phi_0^{(2)} = \phi_1^{(1)} = 0.5$ y $\phi_1^{(2)} = -0.5$ con un tamaño de muestra $T = 100$ y $\nu = 0.5$.

Los resultados para las funciones ψ : *Huber*, *Tukey* evidencian que las distribuciones empíricas de los estimadores parecen ser aproximadamente normales y centradas alrededor de los verdaderos parámetros del modelo. El resultado es bastante similar para todos los valores de ω considerados (0, 3, 6, 10). En línea a lo discutido en la sección 4.1.2 la distribución empírica para la función ψ : *Huber* parece estar más concentrada alrededor de su valor medio reflejando una menor varianza.

Por otro lado, los resultados para la estimación por medio de mínimos cuadrados son diferentes. La figura **4-3** evidencia que si bien cuando no hay observaciones atípicas, la distribución empírica es aproximadamente normal y se encuentra centrada en los verdaderos valores de los parámetros; a medida que la magnitud de las observaciones atípicas aumenta, la distribución empírica cambia. Por ejemplo, para el caso $\omega = 10$ las distribuciones empíricas pierden la simetría y al menos para los coeficientes autoregresivos $\phi_1^{(1)}$ y $\phi_1^{(2)}$ su valor medio se modifica (es decir, los estimadores parecen ser sesgados).

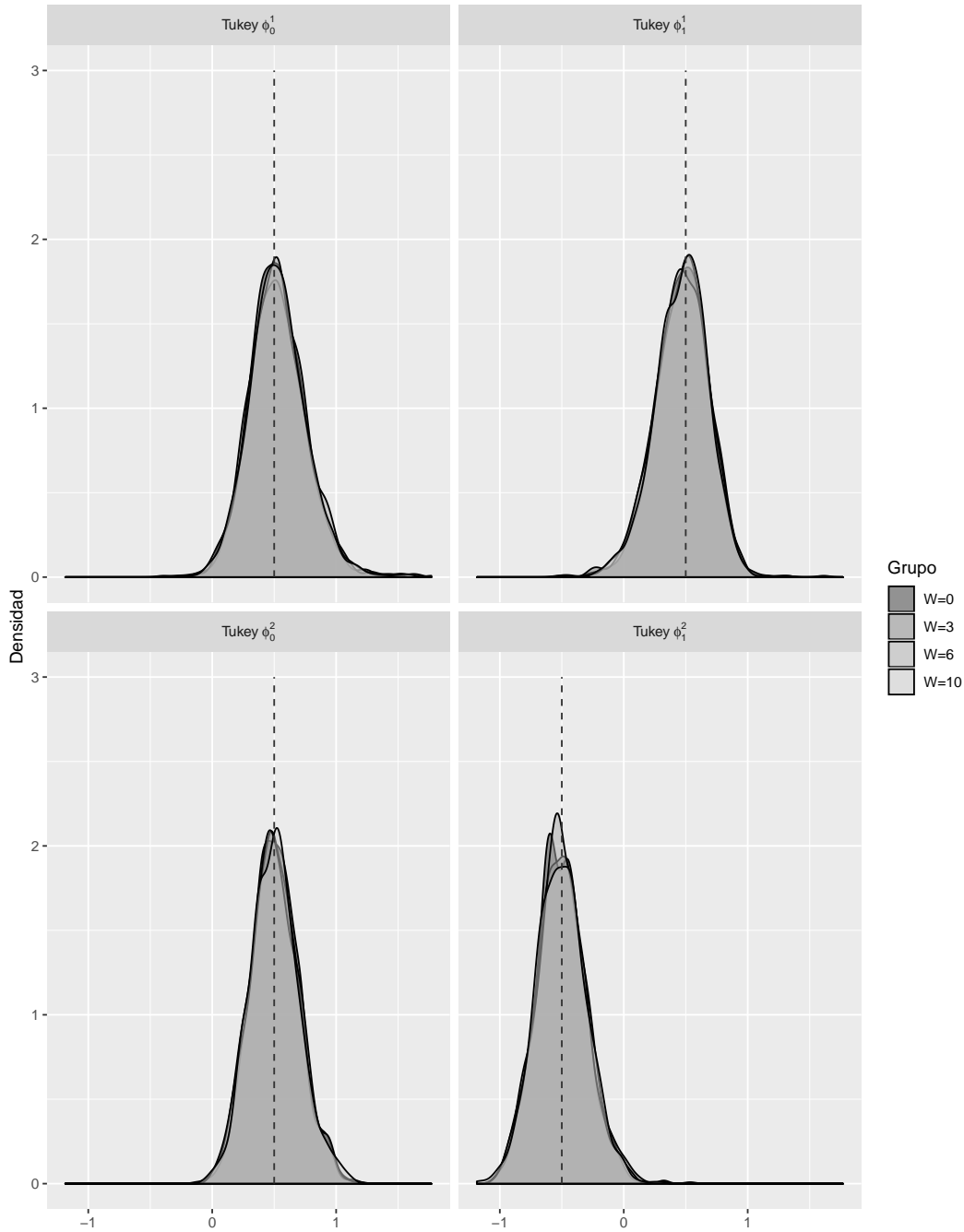
Los resultados para los demás modelos considerados (distintos valores para $\phi_1^{(2)}$) y para el tamaño de muestra $T = 200$ son bastante similares y están disponibles previo pedido al autor.

Figura 4-1.: Distribuciones empíricas de los coeficientes estimados usando la función ψ : *Huber*

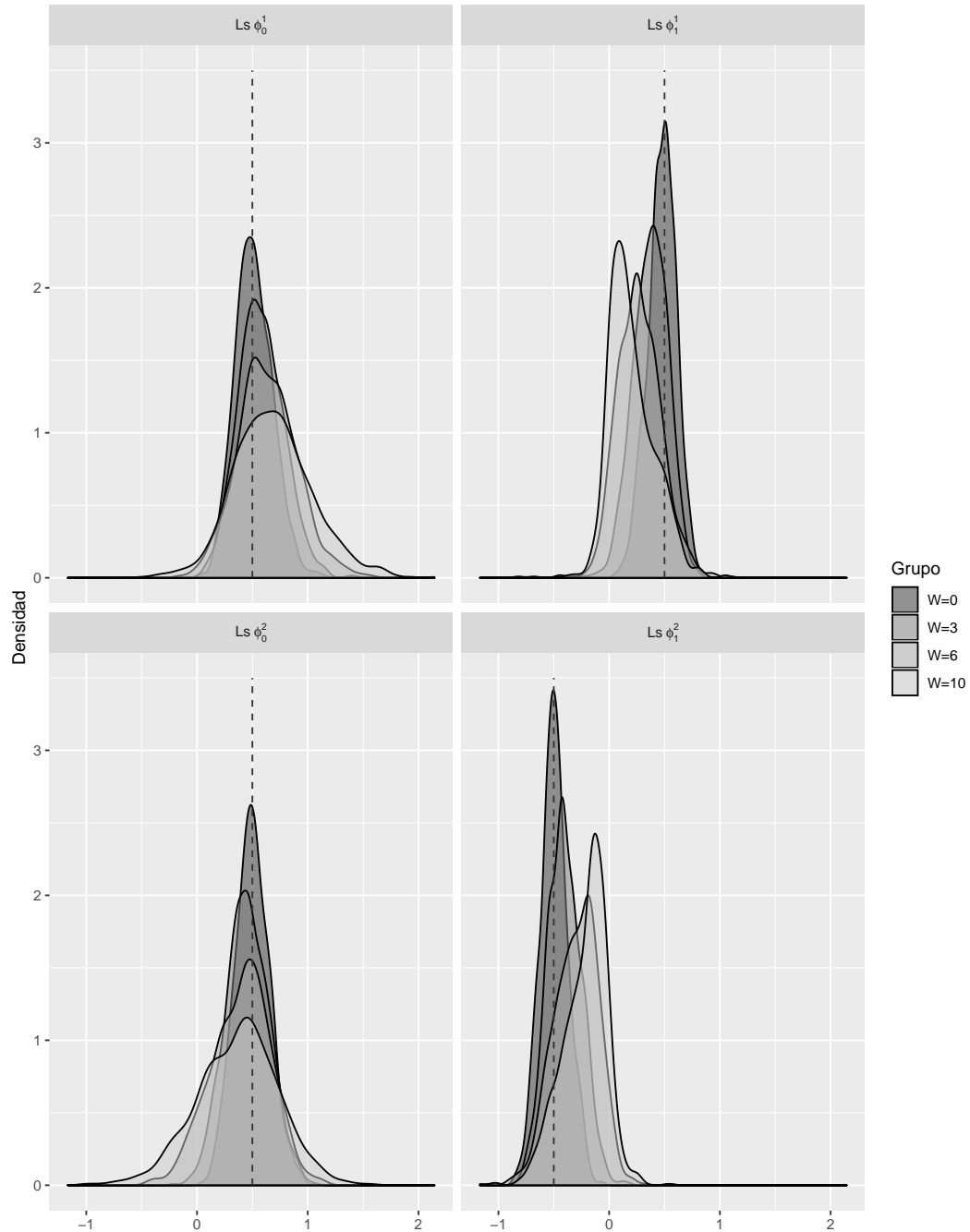


La figura presenta la función de densidad empírica de los estimadores basados en el método *GM* con ψ : *Huber* estimada a través de métodos kernel. En la ecuación (4-1) se presenta el modelo, el valor de ω se representa como W y está relacionado con la magnitud de los datos atípicos, su definición se presenta en la parte inferior de la ecuación (2-3). El valor del parámetro ν es igual a 0.5 y el tamaño de muestra es $T = 100$ se considera el modelo con parámetros $\phi_0^{(1)} = \phi_0^{(2)} = \phi_1^{(1)} = 0.5$ y $\phi_1^{(2)} = -0.5$, la línea negra punteada señala estos valores.

Figura 4-2.: Distribuciones empíricas de los coeficientes estimados usando la función ψ : *Tukey*



La figura presenta la función de densidad empírica de los estimadores basados en el método *GM* con ψ : *Tukey* estimada a través de métodos kernel. En la ecuación (4-1) se presenta el modelo, el valor de ω se representa como W y está relacionado con la magnitud de los datos atípicos, su definición se presenta en la parte inferior de la ecuación (2-3). El valor del parámetro ν es igual a 0.5 y el tamaño de muestra es $T = 100$ se considera el modelo con parámetros $\phi_0^{(1)} = \phi_0^{(2)} = \phi_1^{(1)} = 0.5$ y $\phi_1^{(2)} = -0.5$, la línea negra punteada señala estos valores.

Figura 4-3.: Distribuciones empíricas de los coeficientes estimados usando la función $\psi : LS$ 

La figura presenta la función de densidad empírica de los estimadores basados en el método GM con $\psi : LS$ estimada a través de métodos kernel. En la ecuación (4-1) se presenta el modelo, el valor de ω se representa como W y está relacionado con la magnitud de los datos atípicos, su definición se presenta en la parte inferior de la ecuación (2-3). El valor del parámetro ν es igual a 0.5 y el tamaño de muestra es $T = 100$ se considera el modelo con parámetros $\phi_0^{(1)} = \phi_0^{(2)} = \phi_1^{(1)} = 0.5$ y $\phi_1^{(2)} = -0.5$, la línea negra punteada señala estos valores.

Teniendo en cuenta el aspecto visual de las distribuciones empíricas presentadas anteriormente y debido a que la construcción de los intervalos de confianza para los coeficientes estimados por el método *GM* se basa en el supuesto de la normalidad asintótica, se llevan a cabo pruebas de normalidad univariadas sobre la distribución empírica de estos coeficientes.

En la tabla **4-13** se presentan los p -valores obtenidos al llevar a cabo la prueba de normalidad univariada presentada en [Shapiro and Wilk, 1965] para un tamaño de muestra $T = 100$ sobre las distribuciones empíricas de los coeficientes estimados utilizando la metodología *GM*. Por ejemplo, la primera fila se obtiene al llevar a cabo 1000 simulaciones de un modelo $TAR(Z,2,1,1,0)$ con tamaño de muestra 100 y con todos los coeficientes iguales a 0.5 excepto el coeficiente autoregresivo del segundo régimen (el cual es igual a -0.8). El valor de ω es 0 y el proceso Z_t está definido como en el capítulo 4. Se lleva a cabo el proceso de estimación de los coeficientes autoregresivos propuesto en la sección 3.1 para cada simulación utilizando la función $\psi : \textit{Huber}$ con $k = 1.345$ y la de *Tukey* con $c = 4.685$. La primera columna muestra los p -valores de la prueba de normalidad al ser aplicada sobre la distribución empírica de los 1000 coeficientes $\hat{\phi}_0^{(1)}$ estimados (uno por cada simulación) utilizando la función de *Huber*, las tres columnas siguientes muestran resultados análogos para el resto de coeficientes autoregresivos y las últimas cuatro columnas contienen estos resultados al utilizar la función *Tukey*.

La hipótesis nula de normalidad univariada para la distribución de los parámetros es rechazada para la mayoría de los casos. Los resultados muestran que con la elección de la función $\psi : \textit{Tukey}$ se rechaza esta hipótesis al 5% de significancia en la gran mayoría de los casos al igual que para la función *Huber*. Vale la pena resaltar que en ningún caso se encuentra evidencia en favor de la normalidad para la distribución empírica del coeficiente estimado $\hat{\phi}_0^{(1)}$.

Los resultados para un tamaño de muestra $T = 200$ se presentan en la tabla **D-1** del apéndice D. Se observa que el aumento en el tamaño de muestra disminuye el número de veces que se rechaza la hipótesis nula de normalidad univariada para ambas elecciones de función ψ . Sin embargo, en más de la mitad de los casos se encuentra evidencia estadística para seguir rechazando esta hipótesis.

Con base en los resultados anteriores, se lleva a cabo un ejercicio de simulación adicional para una muestra de tamaño $T = 1000$ y los resultados obtenidos se presentan en la tabla **4-14**. Con el aumento en el tamaño de muestra se puede observar que para varios casos se tiene una distribución aproximadamente normal. En general, los resultados obtenidos sugieren que con un tamaño de muestra lo suficientemente grande la aproximación por medio de la distribución normal univariada a la de los coeficientes estimados puede resultar adecuada.

Tabla 4-13.: P -valores de la prueba de [Shapiro and Wilk, 1965] de normalidad para las distribuciones empíricas de los estimadores GM basados en 1000 replicaciones del proceso de estimación con un modelo $TAR(Z, 2, 1, 1, 0)$, tamaño de muestra igual a 100 .

$\phi_0^{(1)}$	$\phi_1^{(1)}$	$\phi_0^{(2)}$	$\phi_1^{(2)}$	ω	Huber $k=1.345$				Tukey $c=4.685$				
					$\hat{\phi}_0^{(1)}$	$\hat{\phi}_1^{(1)}$	$\hat{\phi}_0^{(2)}$	$\hat{\phi}_1^{(2)}$	$\hat{\phi}_0^{(1)}$	$\hat{\phi}_1^{(1)}$	$\hat{\phi}_0^{(2)}$	$\hat{\phi}_1^{(2)}$	
0.5	0.5	0.5	-0.8	0	0.00	0.00	0.95	0.00	0.00	0.00	0.00	0.19	0.00
				3	0.00	0.00	0.58	0.00	0.00	0.00	0.00	0.01	0.00
				6	0.00	0.00	0.88	0.00	0.00	0.00	0.18	0.00	
				10	0.00	0.00	0.32	0.00	0.00	0.02	0.00		
0.5	0.5	0.5	-0.5	0	0.00	0.25	0.04	0.01	0.00	0.02	0.00	0.00	
				3	0.00	0.02	0.37	0.03	0.00	0.00	0.01	0.00	
				6	0.00	0.01	0.01	0.00	0.00	0.02	0.00	0.00	
				10	0.00	0.12	0.08	0.01	0.00	0.00	0.04	0.00	
0.5	0.5	0.5	-0.2	0	0.00	0.02	0.13	0.04	0.00	0.24	0.00	0.01	
				3	0.00	0.00	0.31	0.40	0.00	0.02	0.00	0.00	
				6	0.01	0.55	0.09	0.33	0.00	0.03	0.02	0.04	
				10	0.02	0.03	0.12	0.54	0.00	0.03	0.00	0.16	
0.5	0.5	0.5	0	0	0.00	0.14	0.04	0.03	0.00	0.00	0.00	0.00	
				3	0.00	0.01	0.00	0.03	0.00	0.00	0.00	0.00	
				6	0.00	0.00	0.03	0.07	0.00	0.00	0.00	0.27	
				10	0.00	0.01	0.09	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	
0.5	0.5	0.5	0.2	0	0.00	0.00	0.02	0.22	0.00	0.00	0.04	0.03	
				3	0.00	0.00	0.20	0.25	0.00	0.00	0.09	0.20	
				6	0.00	0.01	0.02	0.24	0.00	0.00	0.00	0.01	
				10	0.00	0.00	0.07	0.37	0.00	0.00	0.00	0.01	
0.5	0.5	0.5	0.5	0	0.00	0.01	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	
				3	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	
				6	0.00	0.00	0.00	0.06	0.00	0.00	0.00	0.00	
				10	0.00	0.07	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	
0.5	0.5	0.5	0.8	0	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	
				3	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	
				6	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	
				10	0.00	0.14	0.00	0.00	0.00	0.08	0.00	0.00	

Esta tabla presenta los P -valores obtenidos al llevar a cabo la prueba de normalidad de [Shapiro and Wilk, 1965] sobre la distribución empírica de los coeficientes estimados a través del método GM obtenidos a través de simulaciones. En la ecuación (4-1) se presenta el modelo, el valor de ω está relacionado con la magnitud de los datos atípicos y su definición se presenta en la parte inferior de la ecuación (2-3). El valor del parámetro ν es igual a 0.5, el tamaño de muestra es $T = 100$ y el valor del umbral r es 0.

Tabla 4-14.: P -valores de la prueba de [Shapiro and Wilk, 1965] de normalidad para las distribuciones empíricas de los estimadores GM basados en 1000 replicaciones del proceso de estimación con un modelo $TAR(Z, 2, 1, 1, 0)$, tamaño de muestra igual a 1000.

$\phi_0^{(1)}$	$\phi_1^{(1)}$	$\phi_0^{(2)}$	$\phi_1^{(2)}$	ω	Huber $k=1.345$				Tukey $c=4.685$			
					$\hat{\phi}_0^{(1)}$	$\hat{\phi}_1^{(1)}$	$\hat{\phi}_0^{(2)}$	$\hat{\phi}_1^{(2)}$	$\hat{\phi}_0^{(1)}$	$\hat{\phi}_1^{(1)}$	$\hat{\phi}_0^{(2)}$	$\hat{\phi}_1^{(2)}$
0.5	0.5	0.5	-0.8	0	0.74	0.08	0.87	0.05	0.10	0.28	0.72	0.04
				3	0.03	0.29	0.83	0.46	0.01	0.21	0.36	0.04
				6	0.84	0.14	0.36	0.02	0.28	0.08	0.36	0.03
				10	0.52	0.00	0.48	0.03	0.36	0.05	0.13	0.12
0.5	0.5	0.5	-0.5	0	0.99	0.50	0.37	0.00	0.66	0.73	0.04	0.00
				3	0.76	0.08	0.59	0.08	0.69	0.12	0.11	0.04
				6	0.96	0.43	0.58	0.01	0.82	0.59	0.56	0.04
				10	0.86	0.48	0.80	0.05	0.73	0.04	0.12	0.01
0.5	0.5	0.5	-0.2	0	0.23	0.83	0.28	0.01	0.17	0.92	0.78	0.06
				3	0.11	0.95	0.27	0.04	0.40	0.82	0.42	0.35
				6	0.41	0.73	0.33	0.30	0.11	0.65	0.99	0.36
				10	0.21	0.85	0.36	0.61	0.09	0.37	0.70	0.11
0.5	0.5	0.5	0	0	0.95	0.70	0.14	0.48	0.73	0.57	0.08	0.37
				3	0.20	0.86	0.57	0.66	0.58	0.94	0.07	0.20
				6	0.28	0.17	0.14	0.02	0.12	0.46	0.29	0.04
				10	0.52	0.06	0.55	0.51	0.29	0.02	0.18	0.83
0.5	0.5	0.5	0.2	0	0.56	0.53	0.00	0.75	0.41	0.74	0.00	0.20
				3	0.67	0.64	0.01	0.51	0.92	0.55	0.00	0.02
				6	0.44	0.29	0.04	0.79	0.19	0.54	0.02	0.08
				10	0.02	0.52	0.08	0.57	0.05	0.85	0.00	0.46
0.5	0.5	0.5	0.5	0	0.04	0.03	0.14	0.40	0.01	0.00	0.56	0.24
				3	0.15	0.08	0.28	0.38	0.01	0.00	0.24	0.10
				6	0.12	0.01	0.14	0.22	0.01	0.01	0.04	0.52
				10	0.54	0.18	0.64	0.07	0.23	0.05	0.80	0.17
0.5	0.5	0.5	0.8	0	0.85	0.35	0.07	0.74	0.24	0.86	0.01	0.70
				3	0.75	0.78	0.02	0.19	0.06	0.67	0.00	0.63
				6	0.53	0.22	0.06	0.58	0.36	0.54	0.05	0.76
				10	0.04	0.04	0.11	0.26	0.16	0.05	0.02	0.51

Esta tabla presenta los P -valores obtenidos al llevar a cabo la prueba de normalidad de [Shapiro and Wilk, 1965] sobre la distribución empírica de los coeficientes estimados a través del método GM obtenidos a través de simulaciones. En la ecuación (4-1) se presenta el modelo, el valor de ω está relacionado con la magnitud de los datos atípicos y su definición se presenta en la parte inferior de la ecuación (2-3). El valor del parámetro ν es igual a 0.5, el tamaño de muestra es $T = 1000$ y el valor del umbral r es 0.

4.2.4. Cobertura de intervalos de confianza

A diferencia del artículo de [Chan and Cheung, 1994] quiénes no proponen ningún método para llevar a cabo inferencia sobre los coeficientes autoregresivos estimados; en esta sección se evalúa el porcentaje de cobertura empírico de los intervalos de confianza basados en el supuesto de normalidad asintótica (ver ecuación (2-11)). Para la construcción de la matriz de varianzas covarianzas de los estimadores GM para cada uno de los regímenes, se propone utilizar las expresiones en (2-12)⁶. Note que para cada régimen un estimador natural robusto de σ puede obtenerse utilizando el estimador MAD sobre los residuales una vez se ha obtenido $\hat{\beta}$ por medio de la metodología GM . Las tablas **4-15** y **4-16** presentan los resultados de cobertura para los intervalos de confianza al 95% para tamaños de muestra $T = 100$ y $T = 200$, en el apéndice E se encuentran tablas similares para estos mismos tamaños de muestra y niveles de confianza 99%, 90%.

Los resultados de la tabla **4-15** muestran que los porcentajes de cobertura empíricos son bastante cercanos al nominal de 95%, sin embargo, en la gran mayoría de casos los niveles empíricos son menores que el nominal para ambas funciones ψ : *Huber* y *Tukey*. Este problema parece mejorar con el aumento en el tamaño de muestra como puede evidenciarse en la tabla **4-16**.

De hecho, la tabla **4-16** evidencia que los niveles de cobertura empírica y nominal son casi iguales en el caso en que no existen observaciones atípicas, sin embargo, la aparición de este tipo de observaciones aumenta ligeramente la discrepancia entre estos niveles de cobertura. Los resultados son bastante similares para los dos tipos de función ψ considerados. A pesar de los resultados obtenidos en la subsección 4.2.3 que evidencian el mal ajuste que tiene la distribución normal a las distribuciones empíricas de los coeficientes estimados para tamaños de muestra pequeños, los resultados referentes a la cobertura de los intervalos de confianza son muy buenos para muestras de este tipo de tamaños.

En el apéndice E las tablas **E-1**, **E-2**, **E-3** y **E-4** presentan los resultados para los intervalos de confianza al 90% y 99% con tamaños de muestra $T = 100$, $T = 200$. Las conclusiones derivadas de estas son similares a las presentadas en los párrafos anteriores.

⁶Esta es una ventaja de adoptar el método de estimación propuesto en 3.1 en lugar del utilizado en [Chan and Cheung, 1994].

Tabla 4-15.: Cobertura empírica de los intervalos de confianza al 5% construidos a partir del estimador GM basados en 1000 replicaciones con un modelo $TAR(Z, 2, 1, 1, 0)$, tamaño de muestra igual a 100 .

$\phi_0^{(1)}$	$\phi_1^{(1)}$	$\phi_0^{(2)}$	$\phi_1^{(2)}$	ω	$\alpha =$	Huber $k=1.345$				Tukey $c=4.685$			
						$\hat{\phi}_0^{(1)}$	$\hat{\phi}_1^{(1)}$	$\hat{\phi}_0^{(2)}$	$\hat{\phi}_1^{(2)}$	$\hat{\phi}_0^{(1)}$	$\hat{\phi}_1^{(1)}$	$\hat{\phi}_0^{(2)}$	$\hat{\phi}_1^{(2)}$
0.5	0.5	0.5	-0.8	0	3	0.94	0.93	0.94	0.94	0.93	0.91	0.94	0.92
					6	0.93	0.91	0.94	0.92	0.93	0.91	0.94	0.91
					10	0.93	0.92	0.95	0.93	0.93	0.92	0.94	0.92
					10	0.93	0.92	0.94	0.93	0.92	0.92	0.94	0.92
0.5	0.5	0.5	-0.5	0	3	0.92	0.92	0.93	0.92	0.92	0.92	0.92	0.92
					6	0.94	0.91	0.93	0.92	0.92	0.91	0.92	0.92
					10	0.92	0.90	0.94	0.91	0.92	0.92	0.93	0.91
					10	0.92	0.92	0.93	0.92	0.91	0.91	0.92	0.92
0.5	0.5	0.5	-0.2	0	3	0.93	0.92	0.92	0.92	0.91	0.91	0.93	0.91
					6	0.92	0.91	0.94	0.93	0.92	0.92	0.93	0.92
					10	0.93	0.91	0.93	0.92	0.92	0.91	0.92	0.92
					10	0.92	0.92	0.92	0.91	0.92	0.92	0.92	0.92
0.5	0.5	0.5	0	0	3	0.93	0.93	0.93	0.93	0.92	0.92	0.93	0.91
					6	0.93	0.92	0.94	0.92	0.91	0.90	0.92	0.92
					10	0.92	0.93	0.94	0.93	0.92	0.91	0.94	0.93
					10	0.93	0.93	0.94	0.93	0.92	0.92	0.92	0.92
0.5	0.5	0.5	0.2	0	3	0.93	0.93	0.93	0.93	0.92	0.92	0.90	0.91
					6	0.92	0.91	0.94	0.91	0.92	0.92	0.91	0.90
					10	0.92	0.92	0.93	0.92	0.92	0.92	0.91	0.92
					10	0.92	0.92	0.92	0.91	0.91	0.91	0.90	0.91
0.5	0.5	0.5	0.5	0	3	0.91	0.94	0.92	0.91	0.90	0.92	0.92	0.91
					6	0.91	0.92	0.92	0.89	0.92	0.92	0.91	0.91
					10	0.91	0.93	0.92	0.90	0.92	0.92	0.92	0.91
					10	0.92	0.92	0.93	0.92	0.91	0.92	0.93	0.92
0.5	0.5	0.5	0.8	0	3	0.93	0.92	0.91	0.91	0.94	0.93	0.91	0.89
					6	0.93	0.91	0.90	0.89	0.93	0.92	0.90	0.91
					10	0.92	0.92	0.90	0.89	0.93	0.91	0.91	0.90
					10	0.94	0.92	0.91	0.91	0.94	0.93	0.90	0.90

Esta tabla presenta la cobertura empírica de los intervalos de confianza obtenidos a través de simulaciones basados en el estimador GM y siguiendo lo propuesto en la subsección 2.3. En la ecuación (4-1) se presenta el modelo, el valor de ω está relacionado con la magnitud de los datos atípicos y su definición se presenta en la parte inferior de la ecuación (2-3). El valor del parámetro ν es igual a 0.5, el tamaño de muestra es $T = 100$ y el valor del umbral r es 0.

Tabla 4-16.: Cobertura empírica de los intervalos de confianza al 5 % construidos a partir del estimador GM basados en 1000 replicaciones con un modelo $TAR(Z, 2, 1, 1, 0)$, tamaño de muestra igual a 200 .

$\phi_0^{(1)}$	$\phi_1^{(1)}$	$\phi_0^{(2)}$	$\phi_1^{(2)}$	ω	$\alpha =$	Huber $k=1.345$				Tukey $c=4.685$			
						$\hat{\phi}_0^{(1)}$	$\hat{\phi}_1^{(1)}$	$\hat{\phi}_0^{(2)}$	$\hat{\phi}_1^{(2)}$	$\hat{\phi}_0^{(1)}$	$\hat{\phi}_1^{(1)}$	$\hat{\phi}_0^{(2)}$	$\hat{\phi}_1^{(2)}$
0.5	0.5	0.5	-0.8	0	0	0.94	0.95	0.95	0.94	0.94	0.93	0.95	0.94
					3	0.92	0.91	0.94	0.92	0.93	0.93	0.94	0.93
					6	0.93	0.91	0.95	0.92	0.93	0.92	0.95	0.94
					10	0.93	0.91	0.94	0.93	0.93	0.94	0.94	0.94
0.5	0.5	0.5	-0.5	0	0	0.95	0.94	0.95	0.93	0.94	0.93	0.96	0.93
					3	0.93	0.91	0.95	0.94	0.94	0.93	0.95	0.94
					6	0.93	0.92	0.95	0.94	0.94	0.92	0.97	0.94
					10	0.93	0.92	0.95	0.95	0.94	0.93	0.95	0.94
0.5	0.5	0.5	-0.2	0	0	0.94	0.93	0.94	0.93	0.95	0.93	0.94	0.93
					3	0.95	0.91	0.94	0.94	0.95	0.93	0.94	0.95
					6	0.93	0.92	0.95	0.93	0.94	0.93	0.94	0.93
					10	0.95	0.92	0.94	0.93	0.95	0.93	0.94	0.95
0.5	0.5	0.5	0	0	0	0.95	0.96	0.94	0.94	0.95	0.95	0.93	0.95
					3	0.95	0.93	0.95	0.94	0.94	0.94	0.93	0.94
					6	0.95	0.93	0.94	0.94	0.95	0.94	0.94	0.94
					10	0.94	0.93	0.94	0.95	0.94	0.93	0.93	0.94
0.5	0.5	0.5	0.2	0	0	0.95	0.94	0.93	0.94	0.95	0.94	0.94	0.94
					3	0.94	0.93	0.93	0.94	0.95	0.94	0.93	0.95
					6	0.94	0.93	0.95	0.93	0.94	0.94	0.94	0.93
					10	0.94	0.93	0.93	0.92	0.95	0.95	0.93	0.93
0.5	0.5	0.5	0.5	0	0	0.94	0.93	0.94	0.93	0.95	0.94	0.93	0.93
					3	0.92	0.91	0.93	0.92	0.94	0.94	0.93	0.93
					6	0.92	0.92	0.93	0.91	0.93	0.93	0.94	0.93
					10	0.94	0.93	0.94	0.91	0.94	0.94	0.94	0.93
0.5	0.5	0.5	0.8	0	0	0.95	0.93	0.93	0.93	0.95	0.93	0.93	0.94
					3	0.94	0.92	0.92	0.92	0.94	0.93	0.92	0.93
					6	0.93	0.91	0.92	0.91	0.95	0.93	0.92	0.92
					10	0.94	0.91	0.93	0.92	0.95	0.93	0.94	0.93

Esta tabla presenta la cobertura empírica de los intervalos de confianza obtenidos a través de simulaciones basados en el estimador GM y siguiendo lo propuesto en la subsección 2.3. En la ecuación (4-1) se presenta el modelo, el valor de ω está relacionado con la magnitud de los datos atípicos y su definición se presenta en la parte inferior de la ecuación (2-3). El valor del parámetro ν es igual a 0.5, el tamaño de muestra es $T = 200$ y el valor del umbral r es 0.

5. Aplicación empírica

En esta sección se presentan dos ejemplos aplicados de la prueba de no linealidad y el procedimiento de estimación propuestos para estudiar el comportamiento de los retornos de la tasa de cambio nominal COP/USD. La muestra bajo estudio es relevante en la medida que la crisis económica mundial de 2009 generó depreciaciones muy fuertes del peso respecto al dólar [Vargas, 2011]; estos movimientos se vieron reflejados ampliamente en los retornos, por tanto, podría pensarse que existen datos atípicos en la serie de tiempo observada.

Se calculan los retornos semanales de la tasa de cambio nominal, basados en información diaria tomada directamente de la página del Banco de la República. La muestra empieza en la primera semana de 2009 y termina en la última de 2018, en total son 520 observaciones, con una frecuencia semanal.

5.1. Primer ejemplo

De forma análoga a lo propuesto en [Franses et al., 2000, p. 88] para el uso del modelo *TAR* se considera que la variable determinante del cambio de régimen es una medida de volatilidad similar a la propuesta por [LeBaron, 1992] calculada como la mediana del valor absoluto de los retornos en las últimas cuatro semanas (mes anterior)¹. Esta medida ha sido ampliamente utilizada en finanzas como una aproximación a la volatilidad de los retornos de la tasa de cambio.

La variable de interés Ret_t es entonces:

$$Ret_t = \frac{FX_{7t}}{FX_{1t}} - 1 \quad (5-1)$$

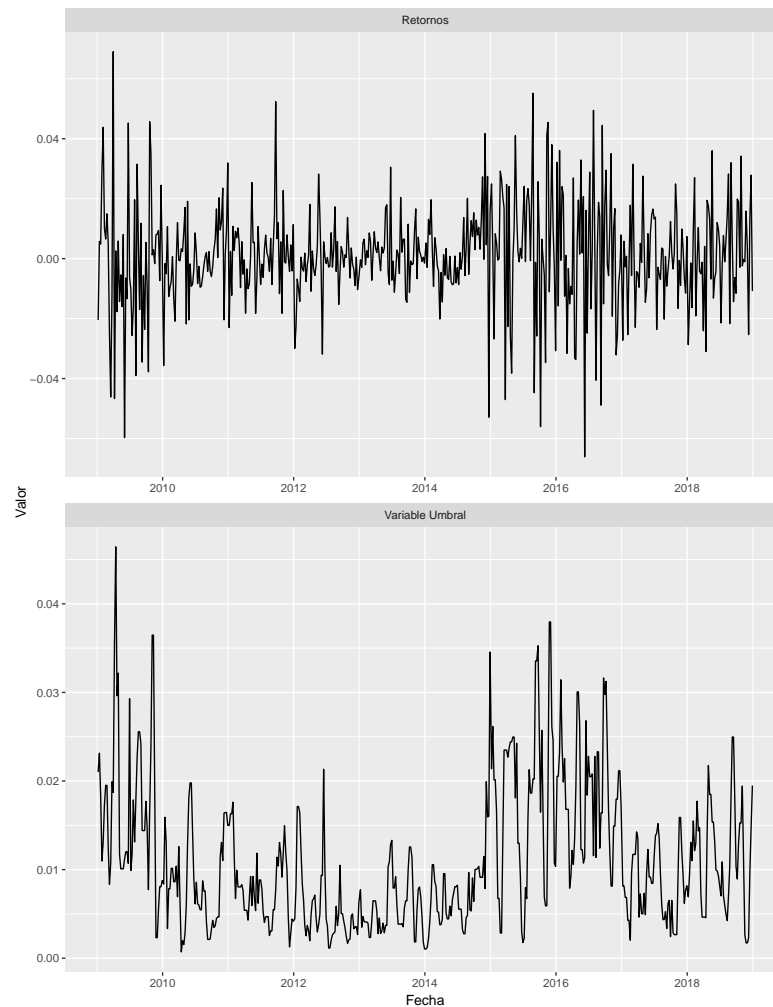
donde FX_{7t} y FX_{1t} representan la tasa de cambio nominal del último/primer día de la t -ésima semana.

¹La medida propuesta por [LeBaron, 1992] es el promedio en las últimas j semanas, con j un número conocido.

Por otro lado, la variable determinante de los umbrales es (note que en este caso el valor de delay d es igual a 0):

$$Z_t = \text{med}(|Ret_{t-1}|, |Ret_{t-2}|, |Ret_{t-3}|, |Ret_{t-4}|) \quad (5-2)$$

Figura 5-1.: Comportamiento de los retornos semanales de tasa de cambio COP/USD y la medida de volatilidad usada como determinante del cambio de régimen.



El panel superior presenta los retornos semanales de la tasa de cambio COP/USD desde la primera semana de 2009 hasta la última de 2018. El panel inferior presenta la mediana del valor absoluto de los retornos en las cuatro semanas anteriores a cada semana.

Los resultados de la prueba de no linealidad se presentan en el cuadro 5-1. Como puede observarse para los valores del orden autoregresivo $p = 1, 2$ al usar la función LS (es decir, cuando la prueba no es robusta a valores atípicos) se rechaza la hipótesis nula de linealidad en favor de la de no linealidad tipo TAR a un nivel de significancia estadística de 10%.

Tabla 5-1.: P -valores prueba de no linealidad para diferentes ordenes p del proceso autoregresivo utilizando la medida de volatilidad como variable de transición.

p	LS	Huber $k=1.345$	Huber $k=3.291$	Tukey $c=4.685$	Tukey $c=15$
1	0.05	0.11	0.03	0.27	0.02
2	0.09	0.11	0.07	0.31	0.08
3	0.16	0.11	0.09	0.14	0.10
4	0.14	0.17	0.12	0.27	0.18
5	0.13	0.16	0.16	0.21	0.24

Esta tabla presenta los p -valores de la prueba de no-linealidad propuesta por [Hung et al., 2009] adaptada al caso de modelos TAR para diferentes valores del orden autoregresivo. La serie de tiempo considerada es la serie de retornos de tasa de cambio semanales COP/USD en el período 2009-2019. La variable utilizada para determinar los umbrales es la mediana de los valores absolutos de los retornos en las últimas cuatro semanas.

Sin embargo, al llevar a cabo la prueba con las funciones $\psi : Huber, Tukey$ con parámetros $k = 1.345, c = 4.685$ no se rechaza la hipótesis nula a este nivel de significancia. Sin embargo, al tomar valores mayores de los parámetros k y c la conclusión derivada al usar las funciones $\psi : Huber$ y $Tukey$ es la misma que la obtenida con la función de mínimos cuadrados.

5.2. Segundo ejemplo

En un estudio relativamente reciente, [Mohammadi and Jahan-Parvar, 2012] encuentran que puede existir un relación entre los precios reales de petróleo y las tasas de cambio reales para países en los que hay una alta producción de este producto. Siendo Colombia un país en el que se cumple esta condición, se lleva a cabo la prueba de no linealidad una vez más, pero, considerando que la variable de umbrales es el cambio del precio real semanal del barril de petróleo Brent². En la figura 5-2 se presentan las dos series.

Los resultados de la prueba de no linealidad, para diferentes valor de orden autoregresivo³, se presentan en el cuadro 5-2. Como puede observarse se encuentra que para todos los rezagos y usando todas las funciones $\psi(\cdot)$ existe evidencia estadística para rechazar la hipótesis nula de linealidad en favor de la de no linealidad tipo TAR . En base a este resultado, se procede

²Esto teniendo en cuenta que este precio representa una mejor aproximación al petróleo exportado por Colombia.

³En el apéndice F, figura F-1, se presenta la función de autocorrelación parcial para la serie de retornos. La gráfica sugiere que un buen valor de orden autoregresivo podría ser 1.

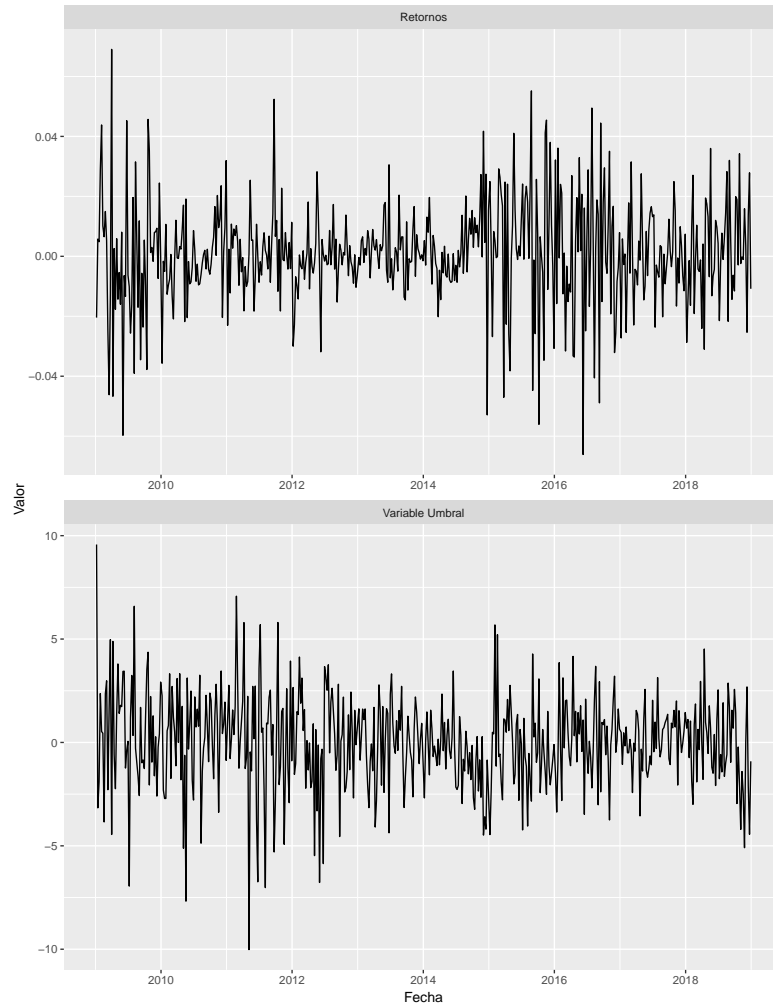
a llevar a cabo la estimación del modelo *TAR* con dos regímenes utilizando la función ψ : *Huber* con parámetro k igual a 1.345⁴.

Para elegir los órdenes autoregresivos se lleva a cabo el procedimiento de estimación para todas las posibles combinaciones $p_1 = 1, \dots, 5$ y $p_2 = 1, \dots, 5$. El mejor modelo es elegido a través del criterio de información de Akaike construido como se presenta en la sección 2.4.

El valor óptimo del umbral r se obtiene llevando a cabo un procedimiento similar al especificado en la sección 2.4 una vez conocidos los valores de p_1 y p_2 . Se asume por facilidad que el número de regímenes es 2, en aplicaciones empíricas se sugiere realizar este proceso para distinto número de regímenes y comparar los resultados obtenidos.

⁴La estimación se lleva a cabo con esta función en razón a su mejor desempeño relativo ilustrado en la subsección 4.1.2.

Figura 5-2.: Comportamiento de los retornos semanales de tasa de cambio COP/USD y el cambio en el precio real del barril de petróleo Brent medido en USD



El panel superior presenta los retornos semanales de la tasa de cambio COP/USD desde la primera semana de 2009 hasta la última de 2018. El panel inferior presenta el cambio en el precio del barril de petróleo Brent medido en dólares.

Tabla 5-2.: P -valores prueba de no-linealidad para diferentes ordenes p del proceso autoregresivo utilizando como variable que determina los umbrales los cambios en el precio real del barril de petróleo Brent.

p	LS	Huber $k=1.345$	Huber $k=3.291$	Tukey $c=4.685$	Tukey $c=15$
1	6.7×10^{-16}	8.0×10^{-11}	3.9×10^{-13}	1.2×10^{-7}	5.1×10^{-13}
2	1.1×10^{-15}	1.7×10^{-8}	1.7×10^{-11}	6.3×10^{-5}	4.2×10^{-11}
3	3.8×10^{-15}	3.2×10^{-6}	3.3×10^{-9}	3.8×10^{-5}	8.4×10^{-9}
4	2.8×10^{-14}	3.5×10^{-4}	2.2×10^{-6}	2.2×10^{-2}	1.8×10^{-6}
5	2.2×10^{-14}	7.3×10^{-4}	5.2×10^{-6}	6.5×10^{-3}	4.0×10^{-6}

Esta tabla presenta los p -valores de la prueba de no-linealidad propuesta por [Hung et al., 2009] adaptada al caso de modelos TAR para diferentes valores del orden autoregresivo. La serie de tiempo considerada es la serie de retornos de tasa de cambio semanales COP/USD en el período 2009-2019. La variable utilizada para determinar los umbrales es el cambio del precio real semanal del barril de petróleo Brent.

Tabla 5-3.: Valores del criterio de información de Akaike para las distintas combinaciones de p_1 y p_2 utilizadas para obtener el estimador GM con selección de función ψ : $Huber k = 1.345$.

p_1/p_2	1	2	3	4	5
1	-2260.20	-2347.18	-2357.90	-2356.50	-2355.73
2	-2268.12	-2267.31	-2346.77	-2356.56	-2350.59
3	-2276.35	-2262.60	-2253.61	-2274.53	-2347.00
4	-2271.96	-2267.79	-2255.57	-2261.20	-2344.17
5	-2284.75	-2288.07	-2274.72	-2277.78	-2267.48

Esta tabla presenta los valores del criterio de información AIC definido en la ecuación 3-1 para las distintas combinaciones de p_1 y p_2 seleccionadas para llevar a cabo la estimación del modelo TAR utilizando el estimador GM con selección de función ψ : $Huber k = 1.345$.

Los resultados del cuadro **5-3** muestran que el modelo seleccionado a través del criterio de información de Akaike es $p_1 = 1$ y $p_2 = 3$. Para este modelo, el valor del umbral estimado \hat{r} es -1.482^5 . Al llevar a cabo el procedimiento de estimación se encuentra que el último coeficiente en el segundo régimen no es significativo, por tanto se lleva a cabo la estimación para el modelo $p_1 = 1$ y $p_2 = 2$ y se obtienen los siguientes resultados:

⁵El valor de los umbrales estimados para el segundo y tercer modelo en términos de menor AIC es -1.567 .

Tabla 5-4.: Resultados estimación del método *GM* para el modelo *TAR* ($k = 2, p_1 = 1, p_2 = 2, d = 0$), $r = -1.482$ con selección de función ψ : *Huber* $k = 1.345$.

		ϕ_0	ϕ_1	ϕ_2	σ
Primer régimen	$\hat{\phi}^{(1)}$	0.007***	0.398***	-	0.013
	$\hat{\sigma}_{\phi^{(1)}}$	0.001	0.126	-	-
Segundo régimen	$\hat{\phi}^{(2)}$	-0.0007	0.005	0.135**	0.011
	$\hat{\sigma}_{\phi^{(2)}}$	0.0006	0.061	0.064	-

Esta tabla presenta los resultados de estimación del modelo *TAR* con dos regímenes, $p_1 = 1, p_2 = 2, r = -1.482$ utilizando el método *GM* con elección de función ψ : *Huber* $k = 1.345$. Se presentan los resultados para cada uno de los regímenes. $\hat{\phi}^{(j)}$ y $\hat{\sigma}_{\phi^{(j)}}$ denotan las estimaciones y sus respectivos errores estándar para el j -ésimo régimen. Estos últimos son calculados utilizando la expresión en la ecuación 2-12. La significancia se evalúa a través de estadísticos Z basados en el supuesto de normalidad asintótica.

Los resultados del modelo propuesto sugieren que efectivamente el comportamiento de la tasa de cambio nominal COP/USD se modifica en respuesta a los cambios en el precio real del petróleo Brent. De hecho, cuando se presenta una caída durante la semana por encima de 1.482 dólares (en términos reales) en el precio del barril de petróleo Brent, la tasa de cambio nominal COP/USD tiene un comportamiento con una mayor persistencia respecto al valor de la semana anterior (régimen 1). Por otro lado, cuando este precio disminuye menos de este valor (ó aumenta) se observa que esta variable tiene una menor persistencia, de hecho, sus valores están determinados en parte por el valor de hace dos semanas. La varianza en cada uno de estos regímenes es bastante cercana.

El modelo se puede escribir como:

$$Ret_t = \begin{cases} 0.007 + 0.398Ret_{t-1} + 0.013\epsilon_t, & \text{si } Z_t < -1.482 \\ -0.0007 + 0.005Ret_{t-1} + 0.135Ret_{t-2} + 0.011\epsilon_t & -1.482 \leq Z_t \end{cases}$$

En el apéndice F se presentan las pruebas de Ljung-Box para cada uno de los regímenes; no parece existir evidencia de autocorrelación remanente en los residuales. Por otro lado, las gráficas *QQ* de normalidad son adecuadas. Así pues, concluimos que los resultados del apéndice sugieren que el modelo no presenta ningún problema de especificación.

6. Conclusiones

En este documento se lleva a cabo una adaptación de la prueba de no linealidad propuesta por [Hung et al., 2009] y el método de estimación propuesto por [Chan and Cheung, 1994] para los coeficientes autoregresivos de los regímenes en el caso de modelos *TAR*. Se utilizan experimentos de Monte Carlo para comparar la potencia y el tamaño de la prueba de no linealidad respecto a la prueba clásica (la cual no es robusta a observaciones atípicas) bajo la presencia de datos atípicos de carácter aditivo. El método de estimación robusto se contrasta con el de mínimos cuadrados a través de las razones de error cuadrático medio y el sesgo bajo la presencia de estas observaciones. Adicionalmente, se estudia el efecto de diferentes porcentajes de contaminación, proporción de observaciones en cada régimen del modelo y se evalúa la aproximación de la distribución empírica de los estimadores de los coeficientes por medio de la distribución normal univariada junto a los niveles de cobertura de los intervalos de confianza asintóticos para los parámetros

Los resultados respecto a la prueba de no linealidad evidencian que la prueba clásica (basada en mínimos cuadrados) presenta discrepancias en su tamaño empírico y el nominal en presencia de observaciones atípicas aditivas, mientras que la prueba robusta no. Se observa que la función robusta de tipo *Huber* tiene ligeramente una mejor potencia que la de tipo *Tukey*. Los resultados son similares respecto a diferentes porcentajes de contaminación. La potencia de la prueba de no linealidad es muy sensible respecto a la proporción de observaciones en cada régimen, sin embargo, este problema se soluciona con el aumento en el tamaño de la muestra.

Por otro lado respecto al método de estimación de los coeficientes autoregresivos, los ejercicios de simulación muestran que el estimador robusto basado en la metodología *GM* tiene un mejor desempeño en términos de error cuadrático medio frente al de mínimos cuadrados siempre que efectivamente existan observaciones atípicas aditivas en los datos. Estos resultados se mantienen al cambiar los porcentajes de contaminación y la proporción de observaciones en cada uno de los regímenes.

Si bien, la distribución empírica marginal de cada uno de los estimadores por el método *GM* es aparentemente similar a una distribución normal univariada, los resultados de la

prueba de [Shapiro and Wilk, 1965] sugieren que esta aproximación solo es acertada cuando el tamaño de muestra es lo suficientemente grande ($T = 1000$). En todo caso, los porcentajes de cobertura de los intervalos de confianza asintóticos basados en el supuesto de normalidad son alentadores incluso para tamaños de muestra pequeños como $T = 100$ y $T = 200$ por lo que su uso en situaciones prácticas parece estar justificado.

En la aplicación empírica se utiliza la prueba de no linealidad y el procedimiento de estimación adaptados, para el caso de una serie de tiempo que puede considerarse contaminada con observaciones atípicas. Los resultados de la prueba de no linealidad robusta son consistentes con diferentes elecciones de función ψ : y los resultados del procedimiento de estimación son adecuados.

Este documento se ha centrado en procedimientos robustos para llevar a cabo la prueba de no linealidad y la estimación de los coeficientes autoregresivos en modelos *TAR* bajo la presencia de datos atípicos aditivos. Una línea de investigación futura puede ser evaluar el desempeño de la propuesta de estimación para los parámetros no estructurales del modelo y como llevar a cabo inferencia sobre ellos. También podría ser útil verificar el rendimiento de la metodología propuesta por [Battaglia and Orfei, 2005] adaptada para el caso de modelos *TAR* con el fin de identificar la ubicación de los datos atípicos apropiadamente.

A. Anexo: Pruebas de no linealidad

Tabla A-1.: Frecuencias relativas empíricas del rechazo de la hipótesis de linealidad basadas en 1000 replicaciones con un modelo $TAR(Z, 2, 1, 1, 0)$, tamaño de muestra igual a 100, $\nu = -0.5$.

$\phi_0^{(1)}$	$\phi_1^{(1)}$	$\phi_0^{(2)}$	$\phi_1^{(2)}$	ω	$\alpha =$	LS			Huber $k=1.345$			Huber $k=3.291$			Tukey $c=4.685$			Tukey $c=15$		
						1%	5%	10%	1%	5%	10%	1%	5%	10%	1%	5%	10%	1%	5%	10%
0.5	0.5	0.5	-0.8	0	$\alpha =$	0.983	0.996	0.999	0.939	0.974	0.989	0.977	0.994	0.997	0.834	0.930	0.959	0.975	0.993	0.996
						0.855	0.942	0.968	0.883	0.959	0.982	0.898	0.970	0.988	0.767	0.901	0.939	0.896	0.968	0.984
						0.582	0.747	0.802	0.858	0.956	0.975	0.821	0.929	0.959	0.767	0.894	0.933	0.784	0.927	0.959
0.5	0.5	0.5	-0.5	0	$\alpha =$	0.384	0.527	0.610	0.833	0.938	0.971	0.733	0.895	0.945	0.764	0.891	0.936	0.701	0.882	0.935
						0.854	0.950	0.979	0.686	0.860	0.928	0.820	0.951	0.975	0.545	0.754	0.828	0.820	0.944	0.974
						0.624	0.798	0.878	0.579	0.808	0.882	0.639	0.818	0.896	0.468	0.697	0.793	0.638	0.819	0.893
0.5	0.5	0.5	-0.2	0	$\alpha =$	0.394	0.564	0.666	0.558	0.774	0.867	0.509	0.741	0.825	0.464	0.708	0.794	0.487	0.732	0.824
						0.289	0.430	0.529	0.548	0.749	0.854	0.479	0.705	0.804	0.478	0.689	0.783	0.465	0.707	0.788
						0.526	0.748	0.842	0.358	0.620	0.727	0.469	0.715	0.810	0.282	0.503	0.622	0.477	0.714	0.807
0.5	0.5	0.5	0	0	$\alpha =$	0.353	0.556	0.668	0.284	0.536	0.668	0.299	0.529	0.646	0.238	0.461	0.586	0.306	0.543	0.658
						0.267	0.431	0.550	0.256	0.516	0.644	0.224	0.436	0.576	0.229	0.444	0.578	0.210	0.431	0.569
						0.237	0.377	0.455	0.260	0.492	0.630	0.194	0.403	0.514	0.239	0.472	0.586	0.178	0.382	0.516
0.5	0.5	0.5	0	0	$\alpha =$	0.280	0.491	0.599	0.188	0.378	0.489	0.244	0.458	0.581	0.169	0.323	0.443	0.240	0.455	0.579
						0.179	0.370	0.489	0.141	0.326	0.439	0.143	0.316	0.450	0.133	0.287	0.401	0.158	0.331	0.464
						0.169	0.321	0.431	0.129	0.312	0.420	0.114	0.253	0.367	0.114	0.282	0.398	0.105	0.256	0.370
0.5	0.5	0.5	0.2	0	$\alpha =$	0.209	0.317	0.388	0.135	0.296	0.405	0.092	0.243	0.349	0.140	0.300	0.398	0.093	0.228	0.340
						0.106	0.261	0.383	0.068	0.181	0.298	0.088	0.229	0.334	0.058	0.178	0.303	0.097	0.244	0.344
						0.100	0.243	0.346	0.058	0.168	0.264	0.058	0.175	0.253	0.061	0.168	0.255	0.058	0.179	0.267
0.5	0.5	0.5	0	0	$\alpha =$	0.129	0.246	0.330	0.048	0.144	0.245	0.025	0.129	0.206	0.052	0.149	0.251	0.031	0.123	0.206
						0.165	0.278	0.352	0.049	0.150	0.226	0.034	0.104	0.188	0.044	0.159	0.252	0.028	0.102	0.186
						0.012	0.048	0.098	0.006	0.046	0.087	0.010	0.046	0.096	0.013	0.049	0.105	0.010	0.045	0.096
0.5	0.5	0.5	0.8	0	$\alpha =$	0.026	0.084	0.144	0.009	0.044	0.080	0.009	0.060	0.097	0.010	0.049	0.098	0.011	0.053	0.090
						0.070	0.158	0.234	0.003	0.041	0.076	0.012	0.034	0.085	0.011	0.051	0.098	0.011	0.029	0.082
						0.126	0.245	0.322	0.003	0.036	0.075	0.004	0.039	0.079	0.009	0.053	0.094	0.007	0.029	0.062
0.5	0.5	0.5	0	0	$\alpha =$	0.149	0.373	0.504	0.112	0.313	0.440	0.149	0.362	0.485	0.118	0.272	0.402	0.145	0.371	0.493
						0.102	0.243	0.360	0.089	0.242	0.377	0.096	0.269	0.389	0.087	0.236	0.354	0.097	0.237	0.357
						0.116	0.228	0.300	0.080	0.216	0.334	0.076	0.203	0.305	0.075	0.228	0.345	0.055	0.173	0.281
0.5	0.5	0.5	0	0	$\alpha =$	0.113	0.222	0.291	0.073	0.229	0.343	0.059	0.174	0.270	0.091	0.256	0.367	0.061	0.165	0.260

Esta tabla presenta los porcentajes de rechazo de la hipótesis de no linealidad al utilizar la prueba de [Hung et al., 2009] adaptada al caso de un modelo TAR . En la ecuación (4-1) se presenta el modelo, el valor de ω está relacionado con la magnitud de los datos atípicos y su definición se presenta en la parte inferior de la ecuación (2-3). El valor del parámetro ν es igual a -0.5 y el tamaño de muestra es $T = 100$.

Tabla A-2.: Frecuencias relativas empíricas del rechazo de la hipótesis de linealidad basadas en 1000 replicaciones con un modelo $TAR(Z, 2, 1, 1, 0)$, tamaño de muestra igual a 200, $\nu = -0.5$.

$\phi_0^{(1)}$	$\phi_1^{(1)}$	$\phi_0^{(2)}$	$\phi_1^{(2)}$	ω	LS			Huber k=1.345			Huber k=3.291			Tukey c=4.685			Tukey c=15		
					$\alpha =$	1%	5%	10%	1%	5%	10%	1%	5%	10%	1%	5%	10%	1%	5%
0.5	0.5	0.5	-0.8	0	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	0.993	0.999	0.999	0.999	1.000	1.000	1.000
				3	0.994	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	0.988	0.997	0.999	0.999	0.999	1.000	1.000
				6	0.826	0.911	0.936	0.999	1.000	1.000	0.996	0.999	1.000	0.980	0.996	0.998	0.992	0.998	1.000
				10	0.463	0.650	0.730	0.994	0.998	0.999	0.985	0.996	0.997	0.979	0.998	1.000	0.985	0.995	0.997
0.5	0.5	0.5	-0.5	0	0.999	1.000	1.000	0.984	0.998	1.000	0.996	1.000	0.922	0.976	0.992	0.996	1.000	1.000	
				3	0.903	0.972	0.986	0.951	0.986	0.998	0.946	0.990	0.996	0.859	0.953	0.970	0.957	0.993	0.996
				6	0.610	0.770	0.840	0.944	0.986	0.998	0.895	0.969	0.985	0.880	0.956	0.981	0.892	0.973	0.986
				10	0.329	0.500	0.594	0.933	0.981	0.995	0.845	0.950	0.975	0.890	0.973	0.985	0.844	0.949	0.975
0.5	0.5	0.5	-0.2	0	0.902	0.975	0.983	0.743	0.894	0.938	0.874	0.960	0.977	0.617	0.797	0.860	0.875	0.958	0.980
				3	0.628	0.797	0.869	0.643	0.836	0.900	0.655	0.834	0.905	0.535	0.745	0.833	0.660	0.850	0.910
				6	0.355	0.538	0.646	0.616	0.812	0.884	0.518	0.744	0.829	0.525	0.732	0.817	0.529	0.765	0.846
				10	0.223	0.341	0.438	0.577	0.813	0.885	0.427	0.679	0.793	0.534	0.746	0.837	0.437	0.698	0.824
0.5	0.5	0.5	0	0	0.582	0.794	0.873	0.413	0.642	0.750	0.547	0.765	0.849	0.312	0.534	0.658	0.541	0.768	0.848
				3	0.359	0.579	0.678	0.316	0.569	0.691	0.323	0.547	0.672	0.257	0.493	0.605	0.338	0.573	0.700
				6	0.217	0.385	0.472	0.285	0.541	0.655	0.223	0.439	0.569	0.269	0.498	0.602	0.225	0.436	0.581
				10	0.181	0.308	0.396	0.299	0.530	0.672	0.196	0.400	0.530	0.272	0.514	0.628	0.184	0.410	0.557
0.5	0.5	0.5	0.2	0	0.213	0.416	0.549	0.148	0.333	0.441	0.174	0.380	0.519	0.134	0.285	0.408	0.189	0.387	0.519
				3	0.141	0.308	0.413	0.106	0.266	0.386	0.098	0.258	0.359	0.107	0.249	0.369	0.112	0.273	0.377
				6	0.139	0.271	0.362	0.108	0.247	0.379	0.072	0.196	0.309	0.102	0.258	0.366	0.072	0.197	0.322
				10	0.143	0.240	0.315	0.106	0.232	0.336	0.056	0.165	0.247	0.102	0.267	0.364	0.056	0.169	0.254
0.5	0.5	0.5	0.5	0	0.013	0.069	0.121	0.010	0.057	0.108	0.012	0.068	0.117	0.016	0.085	0.135	0.013	0.069	0.114
				3	0.031	0.094	0.166	0.013	0.047	0.092	0.014	0.054	0.099	0.017	0.075	0.123	0.012	0.057	0.090
				6	0.078	0.182	0.253	0.008	0.052	0.103	0.010	0.055	0.102	0.014	0.070	0.131	0.011	0.041	0.088
				10	0.105	0.193	0.260	0.008	0.046	0.099	0.007	0.038	0.080	0.016	0.069	0.124	0.006	0.028	0.067
0.5	0.5	0.5	0.8	0	0.453	0.696	0.797	0.378	0.589	0.719	0.450	0.675	0.783	0.297	0.536	0.644	0.445	0.675	0.785
				3	0.265	0.459	0.555	0.282	0.518	0.630	0.298	0.529	0.657	0.243	0.479	0.594	0.291	0.511	0.649
				6	0.144	0.290	0.376	0.231	0.474	0.609	0.205	0.412	0.550	0.241	0.459	0.585	0.169	0.380	0.509
				10	0.121	0.225	0.294	0.235	0.452	0.591	0.157	0.341	0.463	0.255	0.477	0.597	0.150	0.318	0.441

Esta tabla presenta los porcentajes de rechazo de la hipótesis de no linealidad al utilizar la prueba de [Hung et al., 2009] adaptada al caso de un modelo TAR . En la ecuación (4-1) se presenta el modelo, el valor de ω está relacionado con la magnitud de los datos atípicos y su definición se presenta en la parte inferior de la ecuación (2-3). El valor del parámetro ν es igual a -0.5 y el tamaño de muestra es $T = 200$.

Tabla A-3. Frecuencias relativas empíricas del rechazo de la hipótesis de linealidad basadas en 1000 replicaciones con un modelo $TAR(Z, 2, 1, 1, 0)$, tamaño de muestra igual a 100, $\nu = 0.8$.

$\phi_0^{(1)}$	$\phi_1^{(1)}$	$\phi_0^{(2)}$	$\phi_1^{(2)}$	ω	$\alpha =$	LS			Huber $k=1.345$			Huber $k=3.291$			Tukey $c=4.685$			Tukey $c=15$		
						1%	5%	10%	1%	5%	10%	1%	5%	10%	1%	5%	10%	1%	5%	10%
0.5	0.5	0.5	-0.8	0	$\alpha =$	0.936	0.973	0.980	0.827	0.916	0.950	0.918	0.966	0.977	0.730	0.866	0.913	0.911	0.965	0.973
						0.809	0.917	0.944	0.761	0.875	0.916	0.826	0.912	0.946	0.671	0.820	0.866	0.815	0.904	0.939
						0.557	0.719	0.794	0.753	0.881	0.922	0.742	0.880	0.928	0.663	0.829	0.886	0.715	0.859	0.911
0.5	0.5	0.5	-0.5	0	$\alpha =$	0.378	0.547	0.622	0.756	0.877	0.920	0.682	0.842	0.897	0.678	0.836	0.889	0.662	0.817	0.885
						0.712	0.881	0.922	0.581	0.779	0.853	0.695	0.864	0.913	0.484	0.682	0.782	0.691	0.864	0.913
						0.509	0.732	0.804	0.491	0.716	0.802	0.513	0.728	0.821	0.426	0.636	0.741	0.515	0.725	0.812
0.5	0.5	0.5	-0.2	0	$\alpha =$	0.347	0.548	0.624	0.472	0.685	0.780	0.431	0.635	0.739	0.396	0.627	0.727	0.403	0.610	0.715
						0.264	0.414	0.505	0.450	0.678	0.782	0.365	0.604	0.725	0.399	0.629	0.735	0.337	0.582	0.706
						0.394	0.612	0.728	0.283	0.506	0.633	0.376	0.591	0.695	0.235	0.446	0.559	0.361	0.599	0.695
0.5	0.5	0.5	0	0	$\alpha =$	0.225	0.395	0.515	0.226	0.447	0.562	0.192	0.392	0.497	0.201	0.411	0.528	0.159	0.353	0.472
						0.199	0.340	0.436	0.183	0.417	0.539	0.134	0.319	0.444	0.189	0.378	0.507	0.119	0.297	0.430
						0.186	0.374	0.488	0.139	0.306	0.438	0.179	0.363	0.474	0.114	0.283	0.410	0.182	0.362	0.477
0.5	0.5	0.5	0	0	$\alpha =$	0.160	0.330	0.444	0.114	0.277	0.398	0.118	0.282	0.392	0.105	0.258	0.367	0.121	0.278	0.393
						0.149	0.299	0.402	0.090	0.248	0.360	0.075	0.215	0.299	0.089	0.233	0.342	0.067	0.202	0.296
						0.172	0.292	0.368	0.081	0.247	0.355	0.062	0.191	0.283	0.087	0.241	0.362	0.062	0.175	0.264
0.5	0.5	0.5	0.2	0	$\alpha =$	0.079	0.172	0.265	0.055	0.161	0.242	0.065	0.172	0.253	0.054	0.153	0.245	0.068	0.170	0.263
						0.076	0.187	0.284	0.053	0.134	0.231	0.052	0.144	0.219	0.047	0.142	0.227	0.051	0.155	0.229
						0.107	0.247	0.344	0.046	0.128	0.204	0.036	0.112	0.179	0.046	0.135	0.218	0.033	0.108	0.167
0.5	0.5	0.5	0.5	0	$\alpha =$	0.144	0.264	0.337	0.041	0.128	0.208	0.031	0.096	0.163	0.055	0.121	0.214	0.033	0.097	0.153
						0.038	0.102	0.148	0.008	0.046	0.092	0.008	0.058	0.105	0.012	0.061	0.109	0.012	0.053	0.099
						0.071	0.143	0.206	0.009	0.039	0.086	0.018	0.056	0.101	0.014	0.061	0.116	0.016	0.051	0.086
0.5	0.5	0.5	0.8	0	$\alpha =$	0.128	0.233	0.313	0.014	0.044	0.097	0.015	0.055	0.100	0.017	0.058	0.119	0.016	0.050	0.094
						0.285	0.508	0.631	0.206	0.407	0.529	0.251	0.463	0.578	0.170	0.355	0.466	0.252	0.466	0.576
						0.225	0.417	0.534	0.180	0.387	0.495	0.207	0.413	0.531	0.135	0.326	0.435	0.184	0.394	0.504
0.5	0.5	0.5	0.8	0	$\alpha =$	0.193	0.343	0.453	0.161	0.345	0.461	0.154	0.326	0.451	0.148	0.330	0.442	0.127	0.273	0.383
						0.166	0.301	0.391	0.139	0.323	0.446	0.119	0.278	0.387	0.140	0.315	0.429	0.094	0.229	0.345

Esta tabla presenta los porcentajes de rechazo de la hipótesis de no linealidad al utilizar la prueba de [Hung et al., 2009] adaptada al caso de un modelo TAR . En la ecuación (4-1) se presenta el modelo, el valor de ω está relacionado con la magnitud de los datos atípicos y su definición se presenta en la parte inferior de la ecuación (2-3). El valor del parámetro ν es igual a 0.8 y el tamaño de muestra es $T = 100$.

Tabla A-4.: Frecuencias relativas empíricas del rechazo de la hipótesis de linealidad basadas en 1000 replicaciones con un modelo $TAR(Z, 2, 1, 1, 0)$, tamaño de muestra igual a 200, $\nu = 0.8$.

$\phi_0^{(1)}$	$\phi_1^{(1)}$	$\phi_0^{(2)}$	$\phi_1^{(2)}$	ω	LS			Huber k=1.345			Huber k=3.291			Tukey c=4.685			Tukey c=15		
					$\alpha =$	1 %	5 %	10 %	1 %	5 %	10 %	1 %	5 %	10 %	1 %	5 %	10 %	1 %	5 %
0.5	0.5	0.5	-0.8	0	0.999	1.000	1.000	0.991	0.998	0.999	0.999	1.000	1.000	0.978	0.989	0.992	0.999	1.000	1.000
				3	0.992	0.996	0.997	0.986	0.995	0.999	0.993	1.000	1.000	0.970	0.986	0.994	0.994	1.000	1.000
				6	0.832	0.909	0.949	0.983	0.995	0.997	0.975	0.994	0.999	0.963	0.987	0.991	0.972	0.994	0.997
				10	0.486	0.656	0.740	0.976	0.993	1.000	0.967	0.992	0.996	0.964	0.986	0.995	0.957	0.988	0.995
0.5	0.5	0.5	-0.5	0	0.980	0.996	0.998	0.947	0.981	0.990	0.984	0.996	0.998	0.871	0.947	0.968	0.979	0.996	0.998
				3	0.869	0.956	0.968	0.892	0.973	0.985	0.904	0.969	0.987	0.823	0.923	0.957	0.904	0.974	0.989
				6	0.596	0.737	0.814	0.876	0.950	0.970	0.828	0.923	0.959	0.823	0.920	0.952	0.806	0.913	0.948
				10	0.317	0.488	0.581	0.870	0.944	0.972	0.776	0.899	0.939	0.839	0.936	0.965	0.753	0.893	0.930
0.5	0.5	0.5	-0.2	0	0.783	0.915	0.948	0.653	0.848	0.914	0.764	0.907	0.944	0.545	0.741	0.828	0.762	0.906	0.947
				3	0.568	0.752	0.837	0.569	0.802	0.877	0.574	0.754	0.844	0.469	0.701	0.787	0.573	0.764	0.858
				6	0.359	0.576	0.679	0.524	0.751	0.851	0.434	0.687	0.784	0.472	0.694	0.760	0.405	0.664	0.785
				10	0.216	0.382	0.488	0.503	0.715	0.830	0.379	0.619	0.725	0.465	0.689	0.778	0.348	0.600	0.723
0.5	0.5	0.5	0	0	0.488	0.705	0.809	0.375	0.610	0.734	0.472	0.695	0.789	0.318	0.527	0.653	0.480	0.695	0.797
				3	0.358	0.577	0.683	0.335	0.548	0.657	0.323	0.534	0.634	0.285	0.483	0.611	0.337	0.528	0.639
				6	0.239	0.437	0.544	0.278	0.519	0.644	0.213	0.425	0.563	0.258	0.481	0.605	0.188	0.401	0.529
				10	0.183	0.319	0.423	0.266	0.491	0.643	0.191	0.393	0.520	0.255	0.493	0.613	0.156	0.352	0.471
0.5	0.5	0.5	0.2	0	0.161	0.367	0.473	0.121	0.293	0.407	0.155	0.352	0.468	0.126	0.287	0.382	0.148	0.354	0.472
				3	0.150	0.340	0.453	0.106	0.248	0.360	0.092	0.243	0.355	0.107	0.251	0.330	0.095	0.238	0.353
				6	0.147	0.302	0.426	0.086	0.261	0.369	0.061	0.208	0.298	0.109	0.243	0.345	0.058	0.187	0.283
				10	0.151	0.275	0.368	0.100	0.252	0.361	0.059	0.186	0.286	0.108	0.261	0.356	0.043	0.161	0.259
0.5	0.5	0.5	0.5	0	0.009	0.047	0.102	0.009	0.051	0.093	0.013	0.044	0.090	0.018	0.064	0.111	0.012	0.041	0.095
				3	0.025	0.100	0.149	0.005	0.038	0.081	0.012	0.050	0.098	0.011	0.051	0.102	0.011	0.050	0.098
				6	0.077	0.187	0.262	0.010	0.050	0.105	0.015	0.057	0.112	0.013	0.060	0.107	0.009	0.043	0.091
				10	0.084	0.177	0.246	0.006	0.052	0.092	0.012	0.052	0.095	0.014	0.059	0.112	0.007	0.048	0.076
0.5	0.5	0.5	0.8	0	0.603	0.804	0.864	0.468	0.685	0.765	0.571	0.771	0.841	0.371	0.588	0.705	0.573	0.766	0.841
				3	0.488	0.691	0.767	0.418	0.658	0.762	0.499	0.708	0.802	0.343	0.569	0.663	0.469	0.667	0.778
				6	0.295	0.507	0.615	0.393	0.599	0.705	0.394	0.617	0.708	0.333	0.542	0.650	0.297	0.525	0.636
				10	0.244	0.406	0.505	0.367	0.591	0.700	0.324	0.549	0.668	0.336	0.557	0.675	0.258	0.467	0.598

Esta tabla presenta los porcentajes de rechazo de la hipótesis de no linealidad al utilizar la prueba de [Hung et al., 2009] adaptada al caso de un modelo TAR . En la ecuación (4-1) se presenta el modelo, el valor de ω está relacionado con la magnitud de los datos atípicos y su definición se presenta en la parte inferior de la ecuación (2-3). El valor del parámetro ν es igual a 0.8 y el tamaño de muestra es $T = 200$.

Tabla A-5: Frecuencias relativas empíricas del rechazo de la hipótesis de linealidad basadas en 1000 replicaciones con un modelo $TAR(Z, 2, 1, 1, 0)$, tamaño de muestra igual a 100, $\nu = -0.8$.

$\phi_0^{(1)}$	$\phi_1^{(1)}$	$\phi_0^{(2)}$	$\phi_1^{(2)}$	ω	$\alpha =$	LS			Huber k=1.345			Huber k=3.291			Tukey c=4.685			Tukey c=15		
						1%	5%	10%	1%	5%	10%	1%	5%	10%	1%	5%	10%	1%	5%	10%
0.5	0.5	0.5	-0.8	0	$\alpha =$	0.983	0.996	0.996	0.925	0.974	0.986	0.972	0.992	0.997	0.821	0.922	0.956	0.967	0.991	0.993
						0.836	0.931	0.956	0.866	0.942	0.969	0.896	0.959	0.973	0.754	0.898	0.935	0.888	0.954	0.970
						0.594	0.757	0.806	0.853	0.943	0.970	0.801	0.928	0.955	0.761	0.901	0.939	0.784	0.911	0.954
0.5	0.5	0.5	-0.5	0	$\alpha =$	0.387	0.540	0.607	0.823	0.933	0.965	0.722	0.879	0.927	0.750	0.887	0.932	0.686	0.858	0.919
						0.861	0.947	0.971	0.708	0.861	0.918	0.839	0.936	0.965	0.564	0.760	0.835	0.838	0.935	0.967
						0.630	0.811	0.886	0.604	0.790	0.868	0.653	0.825	0.896	0.479	0.700	0.781	0.649	0.827	0.897
0.5	0.5	0.5	-0.2	0	$\alpha =$	0.418	0.585	0.673	0.584	0.774	0.857	0.533	0.750	0.827	0.479	0.691	0.785	0.496	0.734	0.821
						0.310	0.463	0.539	0.550	0.763	0.849	0.473	0.708	0.797	0.490	0.695	0.776	0.447	0.683	0.786
						0.552	0.754	0.844	0.393	0.616	0.739	0.493	0.718	0.808	0.292	0.528	0.657	0.497	0.721	0.832
0.5	0.5	0.5	0	0	$\alpha =$	0.363	0.579	0.677	0.303	0.535	0.668	0.316	0.544	0.650	0.247	0.473	0.602	0.330	0.562	0.670
						0.264	0.432	0.518	0.281	0.510	0.640	0.234	0.431	0.551	0.238	0.462	0.566	0.217	0.418	0.552
						0.245	0.362	0.432	0.261	0.501	0.629	0.193	0.396	0.504	0.249	0.479	0.608	0.168	0.385	0.521
0.5	0.5	0.5	0	0	$\alpha =$	0.285	0.516	0.640	0.194	0.401	0.509	0.236	0.473	0.599	0.151	0.338	0.444	0.244	0.468	0.604
						0.180	0.380	0.492	0.152	0.346	0.451	0.138	0.315	0.428	0.127	0.298	0.413	0.148	0.334	0.464
						0.183	0.325	0.436	0.129	0.326	0.436	0.106	0.259	0.368	0.108	0.290	0.399	0.105	0.275	0.367
0.5	0.5	0.5	0.2	0	$\alpha =$	0.192	0.319	0.397	0.135	0.293	0.414	0.084	0.241	0.325	0.135	0.276	0.404	0.086	0.234	0.338
						0.114	0.260	0.387	0.070	0.187	0.294	0.091	0.235	0.346	0.063	0.174	0.285	0.097	0.236	0.351
						0.094	0.223	0.336	0.052	0.161	0.260	0.048	0.145	0.245	0.055	0.172	0.263	0.050	0.152	0.255
0.5	0.5	0.5	0.5	0	$\alpha =$	0.133	0.246	0.329	0.052	0.142	0.244	0.041	0.125	0.203	0.055	0.147	0.251	0.043	0.120	0.210
						0.176	0.283	0.370	0.052	0.140	0.237	0.048	0.117	0.198	0.056	0.160	0.254	0.039	0.115	0.190
						0.012	0.051	0.092	0.008	0.032	0.079	0.008	0.046	0.090	0.013	0.044	0.105	0.009	0.046	0.087
0.5	0.5	0.5	0.8	0	$\alpha =$	0.029	0.084	0.134	0.006	0.037	0.085	0.009	0.053	0.098	0.005	0.050	0.112	0.009	0.054	0.090
						0.073	0.159	0.230	0.010	0.043	0.087	0.014	0.049	0.092	0.011	0.048	0.102	0.013	0.042	0.083
						0.149	0.237	0.303	0.005	0.034	0.088	0.009	0.046	0.089	0.011	0.049	0.100	0.010	0.044	0.077
0.5	0.5	0.5	0.8	0	$\alpha =$	0.149	0.360	0.472	0.113	0.294	0.422	0.144	0.353	0.485	0.102	0.277	0.391	0.142	0.352	0.469
						0.092	0.237	0.340	0.091	0.240	0.354	0.094	0.244	0.374	0.086	0.231	0.329	0.080	0.248	0.361
						0.104	0.222	0.299	0.081	0.213	0.333	0.073	0.208	0.311	0.077	0.236	0.337	0.058	0.179	0.287
10	10	10	10	10	$\alpha =$	0.121	0.226	0.302	0.070	0.213	0.325	0.054	0.150	0.247	0.085	0.241	0.349	0.049	0.143	0.235

Esta tabla presenta los porcentajes de rechazo de la hipótesis de no linealidad al utilizar la prueba de [Hung et al., 2009] adaptada al caso de un modelo TAR . En la ecuación (4-1) se presenta el modelo, el valor de ω está relacionado con la magnitud de los datos atípicos y su definición se presenta en la parte inferior de la ecuación (2-3). El valor del parámetro ν es igual a -0.8 y el tamaño de muestra es $T = 100$.

Tabla A-6.: Frecuencias relativas empíricas del rechazo de la hipótesis de linealidad basadas en 1000 replicaciones con un modelo $TAR(Z, 2, 1, 1, 0)$, tamaño de muestra igual a 200, $\nu = -0.8$.

$\phi_0^{(1)}$	$\phi_1^{(1)}$	$\phi_0^{(2)}$	$\phi_1^{(2)}$	ω	LS			Huber k=1.345			Huber k=3.291			Tukey c=4.685			Tukey c=15		
					$\alpha =$	1%	5%	10%	1%	5%	10%	1%	5%	10%	1%	5%	10%	1%	5%
0.5	0.5	0.5	-0.8	0	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
				3	0.990	0.998	0.999	0.999	1.000	1.000	0.999	1.000	1.000	0.988	0.999	0.999	0.999	1.000	1.000
				6	0.816	0.922	0.957	0.997	0.998	1.000	0.996	1.000	1.000	0.987	0.995	0.999	0.994	0.997	0.999
				10	0.464	0.614	0.695	0.999	1.000	1.000	0.985	0.997	1.000	0.986	0.998	0.999	0.976	0.999	1.000
0.5	0.5	0.5	-0.5	0	0.999	1.000	1.000	0.984	0.996	0.998	0.998	1.000	1.000	0.914	0.972	0.989	0.997	1.000	1.000
				3	0.903	0.972	0.983	0.949	0.988	0.995	0.959	0.990	0.994	0.868	0.948	0.977	0.954	0.988	0.995
				6	0.584	0.758	0.829	0.935	0.986	0.993	0.891	0.958	0.975	0.860	0.956	0.976	0.886	0.953	0.978
				10	0.308	0.468	0.573	0.936	0.978	0.988	0.835	0.937	0.969	0.880	0.959	0.979	0.831	0.945	0.974
0.5	0.5	0.5	-0.2	0	0.909	0.972	0.986	0.772	0.907	0.937	0.873	0.956	0.976	0.600	0.801	0.876	0.875	0.958	0.979
				3	0.639	0.804	0.874	0.663	0.840	0.905	0.660	0.837	0.898	0.541	0.744	0.827	0.680	0.862	0.911
				6	0.353	0.532	0.630	0.616	0.823	0.885	0.520	0.744	0.818	0.546	0.755	0.830	0.525	0.751	0.832
				10	0.220	0.362	0.457	0.610	0.826	0.894	0.447	0.689	0.810	0.549	0.766	0.850	0.468	0.712	0.820
0.5	0.5	0.5	0	0	0.604	0.785	0.880	0.403	0.621	0.741	0.530	0.758	0.859	0.320	0.528	0.645	0.548	0.752	0.856
				3	0.341	0.559	0.681	0.314	0.549	0.657	0.306	0.523	0.649	0.250	0.466	0.582	0.325	0.533	0.684
				6	0.215	0.375	0.487	0.308	0.525	0.643	0.217	0.429	0.541	0.257	0.488	0.607	0.230	0.445	0.558
				10	0.167	0.302	0.378	0.299	0.534	0.644	0.177	0.397	0.537	0.279	0.486	0.610	0.197	0.421	0.548
0.5	0.5	0.5	0.2	0	0.227	0.430	0.558	0.151	0.355	0.462	0.197	0.396	0.535	0.127	0.300	0.426	0.198	0.413	0.536
				3	0.141	0.315	0.435	0.120	0.277	0.410	0.107	0.240	0.361	0.109	0.262	0.370	0.116	0.270	0.377
				6	0.136	0.253	0.348	0.113	0.256	0.384	0.067	0.189	0.283	0.105	0.259	0.373	0.067	0.187	0.308
				10	0.143	0.252	0.310	0.114	0.265	0.377	0.051	0.158	0.251	0.120	0.276	0.379	0.057	0.168	0.258
0.5	0.5	0.5	0.5	0	0.010	0.060	0.110	0.013	0.057	0.103	0.011	0.056	0.102	0.019	0.069	0.133	0.011	0.056	0.105
				3	0.040	0.101	0.159	0.013	0.050	0.103	0.013	0.053	0.101	0.018	0.062	0.120	0.015	0.048	0.092
				6	0.083	0.185	0.259	0.009	0.059	0.099	0.012	0.053	0.095	0.018	0.059	0.127	0.009	0.050	0.080
				10	0.092	0.164	0.234	0.005	0.042	0.091	0.002	0.036	0.071	0.016	0.063	0.124	0.002	0.025	0.064
0.5	0.5	0.5	0.8	0	0.422	0.661	0.750	0.340	0.568	0.694	0.410	0.652	0.743	0.293	0.514	0.635	0.408	0.657	0.744
				3	0.218	0.392	0.506	0.280	0.495	0.614	0.269	0.492	0.612	0.241	0.469	0.586	0.247	0.475	0.597
				6	0.120	0.253	0.345	0.237	0.444	0.582	0.189	0.402	0.506	0.244	0.447	0.585	0.160	0.357	0.471
				10	0.113	0.207	0.286	0.217	0.431	0.558	0.130	0.310	0.423	0.253	0.455	0.581	0.112	0.298	0.424

Esta tabla presenta los porcentajes de rechazo de la hipótesis de no linealidad al utilizar la prueba de [Hung et al., 2009] adaptada al caso de un modelo TAR . En la ecuación (4-1) se presenta el modelo, el valor de ω está relacionado con la magnitud de los datos atípicos y su definición se presenta en la parte inferior de la ecuación (2-3). El valor del parámetro ν es igual a -0.8 y el tamaño de muestra es $T = 200$.

B. Anexo: Estimación de coeficientes autoregresivos.

Tabla B-1.: Razón del error cuadrático medio entre el estimador *GM* y el clásico basadas en 1000 replicaciones con un modelo $TAR(Z, 2, 1, 1, 0)$, tamaño de muestra igual a 100, $\nu = -0.5$.

$\phi_0^{(1)}$	$\phi_1^{(1)}$	$\phi_0^{(2)}$	$\phi_1^{(2)}$	ω	$\alpha =$	Huber $k=1.345$				Tukey $c=4.685$			
						$\hat{\phi}_0^{(1)}$	$\hat{\phi}_1^{(1)}$	$\hat{\phi}_0^{(2)}$	$\hat{\phi}_1^{(2)}$	$\hat{\phi}_0^{(1)}$	$\hat{\phi}_1^{(1)}$	$\hat{\phi}_0^{(2)}$	$\hat{\phi}_1^{(2)}$
0.5	0.5	0.5	-0.8	0	3	1.168	1.392	1.191	1.492	1.423	2.683	1.534	2.676
						0.907	0.739	0.682	0.444	1.094	1.247	0.835	0.714
						0.459	0.286	0.304	0.138	0.509	0.454	0.351	0.219
						0.254	0.172	0.179	0.100	0.285	0.272	0.197	0.145
0.5	0.5	0.5	-0.5	0	3	1.175	1.517	1.178	1.431	1.513	3.002	1.525	2.751
						0.867	0.723	0.800	0.750	1.080	1.314	0.967	1.289
						0.495	0.294	0.415	0.302	0.591	0.505	0.504	0.522
						0.270	0.186	0.208	0.195	0.304	0.298	0.247	0.324
0.5	0.5	0.5	-0.2	0	3	1.176	1.389	1.219	1.435	1.532	2.787	1.608	2.676
						0.851	0.657	0.923	1.101	1.104	1.167	1.233	2.111
						0.423	0.287	0.523	0.718	0.496	0.496	0.640	1.225
						0.257	0.211	0.300	0.612	0.316	0.369	0.390	1.151
0.5	0.5	0.5	0	0	3	1.175	1.424	1.267	1.455	1.597	2.589	1.760	2.721
						0.788	0.704	1.050	1.345	1.013	1.164	1.459	2.576
						0.411	0.322	0.667	1.158	0.497	0.532	0.883	2.134
						0.247	0.223	0.357	1.185	0.311	0.364	0.468	2.226
0.5	0.5	0.5	0.2	0	3	1.201	1.483	1.203	1.410	1.780	2.953	1.773	2.625
						0.779	0.675	0.878	1.081	1.100	1.191	1.243	1.993
						0.405	0.309	0.487	0.723	0.566	0.572	0.642	1.254
						0.247	0.219	0.314	0.587	0.305	0.359	0.427	1.041
0.5	0.5	0.5	0.5	0	3	1.342	1.478	1.374	1.526	2.048	2.703	2.266	3.038
						0.804	0.684	0.828	0.697	1.193	1.188	1.288	1.262
						0.407	0.322	0.365	0.311	0.525	0.511	0.549	0.528
						0.249	0.225	0.231	0.197	0.313	0.335	0.331	0.334
0.5	0.5	0.5	0.8	0	3	1.272	1.451	1.335	1.427	1.886	2.644	2.191	2.803
						0.737	0.684	0.521	0.422	1.010	1.094	0.699	0.687
						0.370	0.282	0.192	0.144	0.489	0.450	0.266	0.225
						0.215	0.181	0.118	0.091	0.262	0.270	0.153	0.132

Esta tabla presenta la razón del error cuadrático medio obtenido a través de simulaciones entre el estimador *GM* y el de mínimos cuadrados. En la ecuación (4-1) se presenta el modelo, el valor de ω está relacionado con la magnitud de los datos atípicos y su definición se presenta en la parte inferior de la ecuación (2-3). El valor del parámetro ν es igual a -0.5 y el tamaño de muestra es $T = 100$.

Tabla B-2.: Razón del error cuadrático medio entre el estimador GM y el clásico basadas en 1000 replicaciones con un modelo $TAR(Z, 2, 1, 1, 0)$, tamaño de muestra igual a 200, $\nu = -0.5$.

$\phi_0^{(1)}$	$\phi_1^{(1)}$	$\phi_0^{(2)}$	$\phi_1^{(2)}$	ω	$\alpha =$	Huber $k=1.345$				Tukey $c=4.685$				
						$\hat{\phi}_0^{(1)}$	$\hat{\phi}_1^{(1)}$	$\hat{\phi}_0^{(2)}$	$\hat{\phi}_1^{(2)}$	$\hat{\phi}_0^{(1)}$	$\hat{\phi}_1^{(1)}$	$\hat{\phi}_0^{(2)}$	$\hat{\phi}_1^{(2)}$	
0.5	0.5	0.5	-0.8	0		1.165	1.354	1.185	1.375	1.400	2.419	1.465	2.378	
						3	0.870	0.499	0.638	0.275	1.011	0.812	0.749	0.384
						6	0.438	0.141	0.237	0.070	0.474	0.214	0.264	0.096
						10	0.251	0.079	0.145	0.043	0.271	0.118	0.162	0.059
0.5	0.5	0.5	-0.5	0		1.176	1.323	1.188	1.380	1.438	2.383	1.522	2.496	
						3	0.831	0.461	0.721	0.488	0.995	0.717	0.866	0.779
						6	0.408	0.154	0.346	0.165	0.447	0.230	0.392	0.259
						10	0.209	0.096	0.200	0.102	0.213	0.134	0.220	0.151
0.5	0.5	0.5	-0.2	0		1.226	1.395	1.191	1.307	1.575	2.450	1.546	2.204	
						3	0.763	0.486	0.908	0.948	0.933	0.772	1.153	1.637
						6	0.337	0.175	0.484	0.555	0.389	0.250	0.602	0.933
						10	0.199	0.108	0.284	0.410	0.223	0.158	0.338	0.654
0.5	0.5	0.5	0	0		1.180	1.346	1.218	1.419	1.540	2.407	1.656	2.560	
						3	0.652	0.464	0.983	1.348	0.792	0.724	1.331	2.469
						6	0.295	0.159	0.627	1.173	0.342	0.245	0.825	2.195
						10	0.179	0.117	0.314	1.019	0.196	0.180	0.406	1.990
0.5	0.5	0.5	0.2	0		1.288	1.537	1.206	1.427	1.793	2.810	1.656	2.471	
						3	0.644	0.489	0.880	0.980	0.818	0.769	1.174	1.709
						6	0.274	0.174	0.466	0.565	0.340	0.264	0.588	0.922
						10	0.174	0.118	0.342	0.429	0.209	0.173	0.416	0.686
0.5	0.5	0.5	0.5	0		1.274	1.390	1.261	1.416	1.835	2.432	1.815	2.579	
						3	0.587	0.454	0.637	0.474	0.768	0.691	0.848	0.753
						6	0.228	0.153	0.246	0.161	0.298	0.231	0.303	0.235
						10	0.145	0.098	0.160	0.103	0.182	0.145	0.194	0.152
0.5	0.5	0.5	0.8	0		1.274	1.415	1.333	1.454	1.969	2.635	2.003	2.531	
						3	0.591	0.530	0.386	0.294	0.821	0.861	0.503	0.414
						6	0.212	0.157	0.111	0.077	0.270	0.223	0.128	0.099
						10	0.120	0.091	0.069	0.046	0.153	0.131	0.084	0.061

Esta tabla presenta la razón del error cuadrático medio obtenido a través de simulaciones entre el estimador GM y el de mínimos cuadrados. En la ecuación (4-1) se presenta el modelo, el valor de ω está relacionado con la magnitud de los datos atípicos y su definición se presenta en la parte inferior de la ecuación (2-3). El valor del parámetro ν es igual a -0.5 y el tamaño de muestra es $T = 200$.

Tabla B-3.: Razón del error cuadrático medio entre el estimador GM y el clásico basadas en 1000 replicaciones con un modelo $TAR(Z, 2, 1, 1, 0)$, tamaño de muestra igual a 100, $\nu = 0.8$.

$\phi_0^{(1)}$	$\phi_1^{(1)}$	$\phi_0^{(2)}$	$\phi_1^{(2)}$	ω	$\alpha =$	Huber $k=1.345$				Tukey $c=4.685$				
						$\hat{\phi}_0^{(1)}$	$\hat{\phi}_1^{(1)}$	$\hat{\phi}_0^{(2)}$	$\hat{\phi}_1^{(2)}$	$\hat{\phi}_0^{(1)}$	$\hat{\phi}_1^{(1)}$	$\hat{\phi}_0^{(2)}$	$\hat{\phi}_1^{(2)}$	
0.5	0.5	0.5	-0.8	0		1.365	1.620	1.155	1.272	2.135	3.232	1.387	2.437	
						3	0.938	0.809	0.715	0.435	1.422	1.440	0.819	0.690
						6	0.472	0.334	0.303	0.146	0.654	0.586	0.356	0.215
						10	0.287	0.229	0.198	0.077	0.377	0.359	0.217	0.113
0.5	0.5	0.5	-0.5	0		1.304	1.454	1.184	1.504	1.939	3.010	1.501	2.835	
						3	0.892	0.669	0.802	0.809	1.219	1.153	0.992	1.450
						6	0.430	0.342	0.414	0.355	0.564	0.567	0.517	0.604
						10	0.277	0.228	0.236	0.233	0.332	0.386	0.261	0.376
0.5	0.5	0.5	-0.2	0		1.253	1.506	1.227	1.437	1.779	3.067	1.562	2.686	
						3	0.783	0.698	0.987	1.300	1.021	1.179	1.291	2.380
						6	0.361	0.321	0.539	1.040	0.461	0.552	0.642	1.828
						10	0.249	0.254	0.309	0.843	0.295	0.403	0.377	1.523
0.5	0.5	0.5	0	0		1.179	1.409	1.242	1.452	1.774	2.662	1.750	2.779	
						3	0.709	0.664	1.079	1.389	0.926	1.061	1.589	2.784
						6	0.371	0.329	0.584	1.531	0.466	0.532	0.744	2.998
						10	0.229	0.222	0.327	1.452	0.285	0.338	0.437	3.018
0.5	0.5	0.5	0.2	0		1.251	1.385	1.091	1.387	1.904	2.599	1.614	2.902	
						3	0.788	0.718	0.903	1.074	1.131	1.215	1.283	2.145
						6	0.419	0.324	0.520	0.830	0.574	0.508	0.748	1.622
						10	0.272	0.251	0.348	0.710	0.340	0.374	0.437	1.214
0.5	0.5	0.5	0.5	0		1.214	1.299	1.293	1.438	1.736	2.327	2.193	2.910	
						3	0.750	0.668	0.810	0.680	0.992	1.082	1.231	1.223
						6	0.410	0.329	0.390	0.342	0.524	0.519	0.511	0.540
						10	0.253	0.242	0.274	0.237	0.297	0.339	0.364	0.370
0.5	0.5	0.5	0.8	0		1.267	1.457	1.356	1.406	1.941	2.725	2.387	2.767	
						3	0.748	0.734	0.576	0.500	1.025	1.204	0.876	0.828
						6	0.440	0.360	0.206	0.169	0.613	0.595	0.291	0.267
						10	0.237	0.218	0.124	0.101	0.307	0.324	0.166	0.149

Esta tabla presenta la razón del error cuadrático medio obtenido a través de simulaciones entre el estimador GM y el de mínimos cuadrados. En la ecuación (4-1) se presenta el modelo, el valor de ω está relacionado con la magnitud de los datos atípicos y su definición se presenta en la parte inferior de la ecuación (2-3). El valor del parámetro ν es igual a 0.8 y el tamaño de muestra es $T = 100$.

Tabla B-4.: Razón del error cuadrático medio entre el estimador GM y el clásico basadas en 1000 replicaciones con un modelo $TAR(Z, 2, 1, 1, 0)$, tamaño de muestra igual a 200, $\nu = 0.8$.

$\phi_0^{(1)}$	$\phi_1^{(1)}$	$\phi_0^{(2)}$	$\phi_1^{(2)}$	ω	$\alpha =$	Huber $k=1.345$				Tukey $c=4.685$			
						$\hat{\phi}_0^{(1)}$	$\hat{\phi}_1^{(1)}$	$\hat{\phi}_0^{(2)}$	$\hat{\phi}_1^{(2)}$	$\hat{\phi}_0^{(1)}$	$\hat{\phi}_1^{(1)}$	$\hat{\phi}_0^{(2)}$	$\hat{\phi}_1^{(2)}$
0.5	0.5	0.5	-0.8	0	0	1.283	1.406	1.225	1.375	1.764	2.566	1.480	2.375
					3	0.723	0.477	0.621	0.289	0.909	0.769	0.702	0.388
					6	0.325	0.162	0.277	0.073	0.396	0.231	0.293	0.092
					10	0.193	0.099	0.155	0.040	0.225	0.142	0.164	0.054
0.5	0.5	0.5	-0.5	0	0	1.258	1.395	1.175	1.406	1.849	2.472	1.451	2.425
					3	0.663	0.498	0.725	0.513	0.861	0.742	0.859	0.789
					6	0.297	0.178	0.330	0.161	0.376	0.251	0.381	0.237
					10	0.183	0.115	0.202	0.101	0.216	0.157	0.215	0.144
0.5	0.5	0.5	-0.2	0	0	1.250	1.429	1.199	1.380	1.753	2.539	1.531	2.449
					3	0.630	0.463	0.881	1.050	0.818	0.710	1.124	1.884
					6	0.275	0.172	0.468	0.612	0.334	0.255	0.546	1.007
					10	0.165	0.113	0.283	0.419	0.192	0.154	0.329	0.685
0.5	0.5	0.5	0	0	0	1.260	1.469	1.197	1.538	1.714	2.529	1.579	2.892
					3	0.665	0.492	0.964	1.549	0.840	0.758	1.254	3.021
					6	0.277	0.169	0.535	1.528	0.316	0.231	0.698	2.887
					10	0.176	0.107	0.348	1.418	0.203	0.158	0.431	2.658
0.5	0.5	0.5	0.2	0	0	1.210	1.485	1.195	1.419	1.712	2.707	1.635	2.646
					3	0.628	0.491	0.893	0.932	0.789	0.757	1.177	1.683
					6	0.250	0.165	0.457	0.514	0.298	0.239	0.570	0.869
					10	0.161	0.114	0.293	0.408	0.187	0.163	0.351	0.702
0.5	0.5	0.5	0.5	0	0	1.292	1.339	1.266	1.431	1.812	2.361	1.848	2.535
					3	0.619	0.442	0.595	0.485	0.800	0.663	0.755	0.735
					6	0.249	0.165	0.228	0.175	0.292	0.230	0.284	0.255
					10	0.154	0.110	0.145	0.121	0.183	0.146	0.172	0.163
0.5	0.5	0.5	0.8	0	0	1.292	1.545	1.174	1.255	1.921	2.812	1.766	2.152
					3	0.620	0.553	0.361	0.311	0.819	0.847	0.454	0.428
					6	0.231	0.179	0.100	0.083	0.299	0.258	0.116	0.103
					10	0.137	0.113	0.052	0.044	0.166	0.161	0.062	0.058

Esta tabla presenta la razón del error cuadrático medio obtenido a través de simulaciones entre el estimador GM y el de mínimos cuadrados. En la ecuación (4-1) se presenta el modelo, el valor de ω está relacionado con la magnitud de los datos atípicos y su definición se presenta en la parte inferior de la ecuación (2-3). El valor del parámetro ν es igual a 0.8 y el tamaño de muestra es $T = 200$.

Tabla B-5.: Razón del error cuadrático medio entre el estimador GM y el clásico basadas en 1000 replicaciones con un modelo $TAR(Z, 2, 1, 1, 0)$, tamaño de muestra igual a 100, $\nu = -0.8$.

$\phi_0^{(1)}$	$\phi_1^{(1)}$	$\phi_0^{(2)}$	$\phi_1^{(2)}$	ω	$\alpha =$	Huber $k=1.345$				Tukey $c=4.685$			
						$\hat{\phi}_0^{(1)}$	$\hat{\phi}_1^{(1)}$	$\hat{\phi}_0^{(2)}$	$\hat{\phi}_1^{(2)}$	$\hat{\phi}_0^{(1)}$	$\hat{\phi}_1^{(1)}$	$\hat{\phi}_0^{(2)}$	$\hat{\phi}_1^{(2)}$
0.5	0.5	0.5	-0.8	0	0	1.170	1.403	1.178	1.399	1.398	2.631	1.500	2.452
					3	0.932	0.698	0.712	0.442	1.099	1.157	0.866	0.701
					6	0.486	0.273	0.317	0.139	0.544	0.453	0.372	0.210
					10	0.262	0.171	0.178	0.098	0.285	0.263	0.195	0.132
0.5	0.5	0.5	-0.5	0	0	1.195	1.447	1.206	1.467	1.545	2.894	1.619	2.868
					3	0.840	0.660	0.807	0.766	1.040	1.222	1.032	1.368
					6	0.505	0.284	0.398	0.303	0.581	0.459	0.480	0.509
					10	0.268	0.178	0.224	0.193	0.304	0.293	0.266	0.299
0.5	0.5	0.5	-0.2	0	0	1.200	1.470	1.255	1.470	1.593	2.957	1.736	2.806
					3	0.871	0.680	0.973	1.109	1.131	1.274	1.357	2.168
					6	0.420	0.302	0.503	0.685	0.520	0.566	0.665	1.254
					10	0.262	0.218	0.314	0.592	0.319	0.363	0.393	1.090
0.5	0.5	0.5	0	0	0	1.170	1.401	1.256	1.445	1.592	2.488	1.821	2.801
					3	0.806	0.736	1.020	1.281	1.032	1.231	1.499	2.546
					6	0.402	0.324	0.642	1.151	0.484	0.527	0.878	2.231
					10	0.231	0.226	0.335	0.850	0.288	0.374	0.454	1.616
0.5	0.5	0.5	0.2	0	0	1.229	1.548	1.173	1.394	1.855	2.998	1.779	2.606
					3	0.761	0.701	0.859	1.057	1.107	1.252	1.261	1.963
					6	0.406	0.316	0.504	0.684	0.537	0.539	0.705	1.204
					10	0.249	0.234	0.322	0.565	0.307	0.359	0.439	0.998
0.5	0.5	0.5	0.5	0	0	1.319	1.451	1.288	1.454	2.088	2.729	1.991	2.827
					3	0.753	0.650	0.785	0.696	1.177	1.156	1.123	1.235
					6	0.392	0.322	0.353	0.289	0.510	0.529	0.496	0.467
					10	0.220	0.202	0.221	0.193	0.286	0.310	0.299	0.316
0.5	0.5	0.5	0.8	0	0	1.237	1.383	1.325	1.433	1.924	2.572	2.137	2.804
					3	0.724	0.662	0.512	0.408	1.017	1.077	0.715	0.684
					6	0.338	0.257	0.187	0.137	0.442	0.400	0.255	0.220
					10	0.209	0.170	0.113	0.083	0.275	0.261	0.150	0.127

Esta tabla presenta la razón del error cuadrático medio obtenido a través de simulaciones entre el estimador GM y el de mínimos cuadrados. En la ecuación (4-1) se presenta el modelo, el valor de ω está relacionado con la magnitud de los datos atípicos y su definición se presenta en la parte inferior de la ecuación (2-3). El valor del parámetro ν es igual a -0.8 y el tamaño de muestra es $T = 100$.

Tabla B-6.: Razón del error cuadrático medio entre el estimador GM y el clásico basadas en 1000 replicaciones con un modelo $TAR(Z, 2, 1, 1, 0)$, tamaño de muestra igual a 200, $\nu = -0.8$.

$\phi_0^{(1)}$	$\phi_1^{(1)}$	$\phi_0^{(2)}$	$\phi_1^{(2)}$	ω	$\alpha =$	Huber $k=1.345$				Tukey $c=4.685$			
						$\hat{\phi}_0^{(1)}$	$\hat{\phi}_1^{(1)}$	$\hat{\phi}_0^{(2)}$	$\hat{\phi}_1^{(2)}$	$\hat{\phi}_0^{(1)}$	$\hat{\phi}_1^{(1)}$	$\hat{\phi}_0^{(2)}$	$\hat{\phi}_1^{(2)}$
0.5	0.5	0.5	-0.8	0	0	1.186	1.465	1.164	1.383	1.374	2.604	1.427	2.417
					3	0.869	0.532	0.629	0.262	0.964	0.830	0.729	0.389
					6	0.444	0.155	0.252	0.070	0.463	0.232	0.283	0.096
					10	0.253	0.093	0.139	0.039	0.264	0.134	0.150	0.055
0.5	0.5	0.5	-0.5	0	0	1.189	1.408	1.212	1.407	1.417	2.522	1.597	2.383
					3	0.834	0.474	0.704	0.496	0.944	0.755	0.873	0.743
					6	0.407	0.147	0.300	0.164	0.438	0.236	0.363	0.229
					10	0.224	0.100	0.176	0.098	0.245	0.152	0.212	0.136
0.5	0.5	0.5	-0.2	0	0	1.189	1.413	1.255	1.478	1.504	2.530	1.664	2.658
					3	0.764	0.459	0.963	1.074	0.934	0.736	1.274	1.949
					6	0.367	0.163	0.498	0.539	0.414	0.236	0.611	0.942
					10	0.214	0.111	0.285	0.415	0.241	0.170	0.347	0.691
0.5	0.5	0.5	0	0	0	1.227	1.426	1.261	1.420	1.648	2.639	1.762	2.519
					3	0.688	0.427	0.944	1.194	0.877	0.723	1.275	2.142
					6	0.314	0.162	0.564	1.028	0.374	0.248	0.745	1.837
					10	0.198	0.115	0.358	1.038	0.241	0.170	0.461	1.800
0.5	0.5	0.5	0.2	0	0	1.188	1.396	1.279	1.429	1.609	2.481	1.792	2.558
					3	0.634	0.452	0.970	1.042	0.804	0.732	1.336	1.918
					6	0.276	0.166	0.506	0.514	0.313	0.248	0.675	0.884
					10	0.174	0.111	0.320	0.417	0.205	0.168	0.432	0.696
0.5	0.5	0.5	0.5	0	0	1.290	1.486	1.272	1.453	1.938	2.762	1.879	2.608
					3	0.627	0.483	0.599	0.488	0.830	0.766	0.809	0.796
					6	0.258	0.167	0.237	0.174	0.324	0.250	0.313	0.256
					10	0.145	0.106	0.150	0.107	0.185	0.159	0.194	0.162
0.5	0.5	0.5	0.8	0	0	1.258	1.374	1.205	1.350	1.872	2.438	1.768	2.412
					3	0.584	0.489	0.364	0.259	0.794	0.758	0.457	0.363
					6	0.209	0.152	0.109	0.073	0.255	0.212	0.137	0.102
					10	0.122	0.092	0.068	0.044	0.149	0.129	0.080	0.057

Esta tabla presenta la razón del error cuadrático medio obtenido a través de simulaciones entre el estimador GM y el de mínimos cuadrados. En la ecuación (4-1) se presenta el modelo, el valor de ω está relacionado con la magnitud de los datos atípicos y su definición se presenta en la parte inferior de la ecuación (2-3). El valor del parámetro ν es igual a -0.8 y el tamaño de muestra es $T = 200$.

C. Anexo: Ejercicios de simulación adicionales

Tabla C-1.: Razón del error cuadrático medio entre el estimador GM y el clásico basadas en 1000 replicaciones con un modelo $TAR(Z, 2, 1, 1, 0)$, tamaño de muestra igual a 200 y porcentaje de contaminación 1%, $\nu = 0.5$.

$\phi_0^{(1)}$	$\phi_1^{(1)}$	$\phi_0^{(2)}$	$\phi_1^{(2)}$	ω	$\alpha =$	Huber $k=1.345$				Tukey $c=4.685$			
						$\hat{\phi}_0^{(1)}$	$\hat{\phi}_1^{(1)}$	$\hat{\phi}_0^{(2)}$	$\hat{\phi}_1^{(2)}$	$\hat{\phi}_0^{(1)}$	$\hat{\phi}_1^{(1)}$	$\hat{\phi}_0^{(2)}$	$\hat{\phi}_1^{(2)}$
0.5	0.5	0.5	-0.8	0	0	1.201	1.432	1.142	1.328	1.553	2.562	1.357	2.298
					3	1.111	1.108	0.965	0.753	1.425	1.907	1.143	1.269
					6	0.781	0.508	0.663	0.249	0.979	0.867	0.787	0.399
					10	0.538	0.277	0.390	0.108	0.666	0.473	0.454	0.179
0.5	0.5	0.5	-0.5	0	0	1.163	1.352	1.187	1.357	1.583	2.393	1.453	2.362
					3	1.035	0.999	1.077	0.992	1.401	1.739	1.317	1.661
					6	0.693	0.465	0.776	0.487	0.916	0.779	0.950	0.840
					10	0.500	0.289	0.521	0.270	0.679	0.498	0.626	0.452
0.5	0.5	0.5	-0.2	0	0	1.228	1.335	1.202	1.405	1.650	2.372	1.536	2.503
					3	1.071	1.000	1.094	1.336	1.413	1.767	1.376	2.377
					6	0.663	0.437	0.947	1.099	0.866	0.738	1.200	1.933
					10	0.434	0.278	0.653	0.852	0.566	0.481	0.815	1.509
0.5	0.5	0.5	0	0	0	1.198	1.332	1.154	1.379	1.614	2.257	1.479	2.510
					3	1.024	0.996	1.095	1.346	1.364	1.668	1.377	2.399
					6	0.661	0.481	0.964	1.367	0.857	0.786	1.234	2.497
					10	0.428	0.279	0.705	1.194	0.563	0.462	0.898	2.156
0.5	0.5	0.5	0.2	0	0	1.268	1.464	1.211	1.403	1.796	2.629	1.654	2.569
					3	1.039	1.020	1.116	1.289	1.438	1.798	1.530	2.387
					6	0.628	0.480	0.910	1.032	0.851	0.823	1.240	1.857
					10	0.401	0.288	0.635	0.785	0.548	0.492	0.858	1.415
0.5	0.5	0.5	0.5	0	0	1.252	1.405	1.290	1.384	1.782	2.328	1.918	2.430
					3	1.036	0.999	1.059	0.984	1.461	1.627	1.552	1.700
					6	0.627	0.492	0.585	0.439	0.885	0.806	0.852	0.752
					10	0.400	0.304	0.386	0.282	0.561	0.492	0.561	0.483
0.5	0.5	0.5	0.8	0	0	1.253	1.447	1.302	1.463	1.844	2.660	1.950	2.583
					3	1.058	1.068	0.871	0.801	1.538	1.904	1.248	1.343
					6	0.625	0.542	0.357	0.273	0.916	0.958	0.509	0.453
					10	0.370	0.294	0.203	0.145	0.521	0.519	0.292	0.242

Esta tabla presenta la razón del error cuadrático medio obtenido a través de simulaciones entre el estimador GM y el de mínimos cuadrados, el porcentaje de contaminación es de 1%. En la ecuación (4-1) se presenta el modelo, el valor de ω está relacionado con la magnitud de los datos atípicos y su definición se presenta en la parte inferior de la ecuación (2-3). El valor del parámetro ν es igual a 0.5 y el tamaño de muestra es $T = 200$.

Tabla C-2.: Razón del error cuadrático medio entre el estimador GM y el clásico basadas en 1000 replicaciones con un modelo $TAR(Z, 2, 1, 1, 0)$, tamaño de muestra igual a 200 y porcentaje de contaminación 10%, $\nu = 0.5$.

$\phi_0^{(1)}$	$\phi_1^{(1)}$	$\phi_0^{(2)}$	$\phi_1^{(2)}$	ω	$\alpha =$	Huber $k=1.345$				Tukey $c=4.685$			
						$\hat{\phi}_0^{(1)}$	$\hat{\phi}_1^{(1)}$	$\hat{\phi}_0^{(2)}$	$\hat{\phi}_1^{(2)}$	$\hat{\phi}_0^{(1)}$	$\hat{\phi}_1^{(1)}$	$\hat{\phi}_0^{(2)}$	$\hat{\phi}_1^{(2)}$
0.5	0.5	0.5	-0.8	0	0	1.201	1.432	1.142	1.328	1.553	2.562	1.357	2.298
					3	0.633	0.373	0.504	0.202	0.708	0.448	0.532	0.214
					6	0.271	0.133	0.210	0.065	0.269	0.139	0.212	0.056
					10	0.165	0.089	0.117	0.037	0.161	0.096	0.108	0.033
0.5	0.5	0.5	-0.5	0	0	1.163	1.352	1.187	1.357	1.583	2.393	1.453	2.362
					3	0.528	0.358	0.586	0.321	0.622	0.452	0.675	0.410
					6	0.250	0.149	0.274	0.137	0.262	0.160	0.297	0.165
					10	0.161	0.109	0.161	0.095	0.165	0.120	0.159	0.107
0.5	0.5	0.5	-0.2	0	0	1.228	1.335	1.202	1.405	1.650	2.372	1.536	2.503
					3	0.548	0.355	0.714	0.785	0.617	0.454	0.886	1.425
					6	0.239	0.152	0.374	0.518	0.233	0.166	0.424	0.858
					10	0.163	0.110	0.211	0.384	0.163	0.118	0.239	0.642
0.5	0.5	0.5	0	0	0	1.198	1.332	1.154	1.379	1.614	2.257	1.479	2.510
					3	0.509	0.344	0.825	1.246	0.564	0.428	1.077	2.585
					6	0.225	0.156	0.425	1.297	0.220	0.175	0.500	2.339
					10	0.147	0.110	0.224	1.069	0.143	0.121	0.258	2.012
0.5	0.5	0.5	0.2	0	0	1.268	1.464	1.211	1.403	1.796	2.629	1.654	2.569
					3	0.484	0.359	0.744	0.740	0.545	0.455	0.984	1.291
					6	0.222	0.161	0.378	0.466	0.225	0.188	0.450	0.764
					10	0.139	0.108	0.204	0.387	0.134	0.117	0.233	0.576
0.5	0.5	0.5	0.5	0	0	1.252	1.405	1.290	1.384	1.782	2.328	1.918	2.430
					3	0.460	0.351	0.451	0.342	0.522	0.417	0.520	0.423
					6	0.199	0.155	0.203	0.146	0.211	0.170	0.219	0.165
					10	0.129	0.115	0.135	0.109	0.129	0.119	0.143	0.121
0.5	0.5	0.5	0.8	0	0	1.253	1.447	1.302	1.463	1.844	2.660	1.950	2.583
					3	0.446	0.363	0.287	0.234	0.545	0.485	0.296	0.252
					6	0.164	0.139	0.097	0.073	0.176	0.154	0.090	0.070
					10	0.112	0.093	0.059	0.044	0.107	0.102	0.052	0.041

Esta tabla presenta la razón del error cuadrático medio obtenido a través de simulaciones entre el estimador GM y el de mínimos cuadrados, el porcentaje de contaminación es de 10%. En la ecuación (4-1) se presenta el modelo, el valor de ω está relacionado con la magnitud de los datos atípicos y su definición se presenta en la parte inferior de la ecuación (2-3). El valor del parámetro ν es igual a 0.5 y el tamaño de muestra es $T = 200$.

Tabla C-3: Frecuencias relativas empíricas del rechazo de la hipótesis de linealidad basadas en 1000 replicaciones con un modelo $TAR(Z, 2, 1, 1, 0)$, tamaño de muestra igual a 200 y porcentaje de contaminación 1%, $\nu = 0.5$.

$\phi_0^{(1)}$	$\phi_1^{(1)}$	$\phi_0^{(2)}$	$\phi_1^{(2)}$	ω	$\alpha =$	LS			Huber k=1.345			Huber k=3.291			Tukey c=4.685			Tukey c=15						
						1%	5%	10%	1%	5%	10%	1%	5%	10%	1%	5%	10%	1%	5%	10%				
0.5	0.5	0.5	-0.8	0	1.000	1.000	1.000	1.000	0.999	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000		
						3	1.000	1.000	1.000	0.999	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
						6	0.993	0.998	0.999	0.998	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
0.5	0.5	0.5	-0.5	0	0.994	0.922	0.962	0.974	0.999	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000		
						3	0.984	0.995	0.997	0.965	0.999	1.000	0.965	0.996	0.998	0.995	0.999	0.999	0.999	0.999	0.999	0.999	0.999	0.999
						6	0.936	0.978	0.982	0.959	0.994	0.996	0.984	0.997	0.999	0.999	0.999	0.999	0.999	0.999	0.999	0.999	0.999	0.999
0.5	0.5	0.5	-0.2	0	0.841	0.841	0.911	0.936	0.954	0.993	0.997	0.982	0.998	1.000	0.992	0.968	0.978	0.978	0.996	0.997	0.978	0.999		
						3	0.861	0.949	0.971	0.702	0.879	0.939	0.832	0.940	0.973	0.584	0.778	0.857	0.838	0.944	0.975	0.861	0.949	0.971
						6	0.804	0.929	0.955	0.682	0.870	0.936	0.783	0.926	0.964	0.559	0.784	0.863	0.786	0.930	0.961	0.804	0.929	0.955
0.5	0.5	0.5	0	0	0.693	0.748	0.882	0.934	0.677	0.873	0.929	0.765	0.912	0.952	0.574	0.764	0.849	0.773	0.906	0.953	0.748			
						3	0.693	0.830	0.878	0.673	0.859	0.921	0.735	0.886	0.941	0.566	0.774	0.849	0.738	0.887	0.940	0.693	0.830	0.878
						6	0.532	0.754	0.850	0.392	0.620	0.745	0.518	0.736	0.836	0.316	0.532	0.644	0.503	0.733	0.839	0.532	0.754	0.850
0.5	0.5	0.2	0	0	0.493	0.493	0.713	0.810	0.375	0.608	0.727	0.474	0.686	0.804	0.300	0.518	0.631	0.466	0.700	0.804	0.493			
						3	0.468	0.702	0.789	0.373	0.601	0.727	0.433	0.674	0.781	0.314	0.524	0.629	0.417	0.668	0.774	0.468	0.702	0.789
						6	0.514	0.717	0.804	0.371	0.611	0.738	0.453	0.682	0.795	0.320	0.526	0.637	0.443	0.676	0.789	0.514	0.717	0.804
0.5	0.5	0.2	0	0	0.199	0.199	0.378	0.522	0.147	0.319	0.428	0.184	0.370	0.494	0.132	0.294	0.396	0.179	0.374	0.505	0.199			
						3	0.189	0.372	0.508	0.138	0.321	0.409	0.166	0.342	0.469	0.131	0.284	0.390	0.167	0.341	0.472	0.189	0.372	0.508
						6	0.225	0.410	0.534	0.143	0.303	0.412	0.156	0.322	0.434	0.133	0.284	0.393	0.150	0.329	0.439	0.225	0.410	0.534
0.5	0.5	0.5	0.5	0	0.297	0.297	0.477	0.572	0.146	0.298	0.402	0.147	0.314	0.443	0.139	0.295	0.385	0.141	0.313	0.431	0.297			
						3	0.021	0.075	0.132	0.011	0.055	0.109	0.011	0.053	0.105	0.012	0.071	0.129	0.012	0.056	0.107	0.021	0.075	0.132
						6	0.067	0.150	0.222	0.011	0.059	0.116	0.012	0.054	0.114	0.017	0.075	0.128	0.011	0.053	0.108	0.067	0.150	0.222
0.5	0.5	0.5	0.8	0	0.161	0.161	0.281	0.355	0.012	0.056	0.105	0.011	0.055	0.097	0.014	0.071	0.128	0.011	0.057	0.095	0.161			
						3	0.528	0.728	0.808	0.434	0.656	0.755	0.540	0.752	0.832	0.348	0.557	0.680	0.542	0.749	0.834	0.528	0.728	0.808
						6	0.444	0.624	0.721	0.411	0.648	0.746	0.507	0.728	0.823	0.341	0.556	0.666	0.509	0.721	0.819	0.444	0.624	0.721
0.5	0.5	0.5	0	0	0.387	0.387	0.581	0.670	0.406	0.639	0.746	0.439	0.674	0.780	0.331	0.555	0.678	0.434	0.662	0.774	0.387			
						3	0.021	0.075	0.132	0.011	0.055	0.109	0.011	0.053	0.105	0.012	0.071	0.129	0.012	0.056	0.107	0.021	0.075	0.132
						6	0.067	0.150	0.222	0.011	0.059	0.116	0.012	0.054	0.114	0.017	0.075	0.128	0.011	0.053	0.108	0.067	0.150	0.222

Esta tabla presenta los porcentajes de rechazo de la hipótesis de no linealidad al utilizar la prueba de [Hung et al., 2009] adaptada al caso de un modelo TAR , el porcentaje de contaminación es de 1%. En la ecuación (4-1) se presenta el modelo, el valor de ω está relacionado con la magnitud de los datos atípicos y su definición se presenta en la parte inferior de la ecuación (2-3). El valor del parámetro ν es igual a 0.5 y el tamaño de muestra es $T = 200$.

Tabla C-4: Frecuencias relativas empíricas del rechazo de la hipótesis de linealidad basadas en 1000 repeticiones con un modelo $TAR(Z, 2, 1, 1, 0)$, tamaño de muestra igual a 200 y porcentaje de contaminación 10%, $\nu = 0.5$.

$\phi_0^{(1)}$	$\phi_1^{(1)}$	$\phi_0^{(2)}$	$\phi_1^{(2)}$	ω	$\alpha =$	LS			Huber k=1.345			Huber k=3.291			Tukey c=4.685			Tukey c=15				
						1%	5%	10%	1%	5%	10%	1%	5%	10%	1%	5%	10%	1%	5%	10%	1%	5%
0.5	0.5	0.5	-0.8	0	1.000	1.000	1.000	1.000	0.999	1.000	1.000	1.000	1.000	0.992	0.998	0.999	0.992	0.998	0.999	1.000	1.000	1.000
				3	0.959	0.988	0.992	0.984	0.984	0.997	0.998	0.996	0.987	0.987	0.985	0.995	0.962	0.985	0.995	0.986	0.997	0.997
				6	0.546	0.733	0.819	0.981	0.981	0.996	0.998	0.989	0.913	0.913	0.989	0.997	0.960	0.989	0.997	0.897	0.968	0.989
				10	0.178	0.334	0.444	0.974	0.974	0.994	0.997	0.975	0.848	0.848	0.975	0.997	0.956	0.996	0.997	0.805	0.933	0.963
0.5	0.5	0.5	-0.5	0	0.994	0.999	1.000	0.965	0.965	0.996	0.998	0.999	0.995	0.995	0.999	0.896	0.969	0.983	0.995	0.998	0.999	0.999
				3	0.743	0.893	0.942	0.856	0.856	0.959	0.980	0.964	0.806	0.806	0.936	0.964	0.775	0.917	0.952	0.823	0.936	0.973
				6	0.309	0.495	0.595	0.824	0.824	0.939	0.976	0.976	0.618	0.618	0.798	0.891	0.774	0.908	0.950	0.590	0.800	0.882
				10	0.120	0.242	0.327	0.805	0.805	0.922	0.955	0.955	0.523	0.523	0.737	0.832	0.812	0.927	0.959	0.470	0.711	0.807
0.5	0.5	0.5	-0.2	0	0.861	0.949	0.971	0.702	0.702	0.879	0.939	0.939	0.832	0.832	0.940	0.973	0.584	0.778	0.857	0.838	0.944	0.975
				3	0.427	0.669	0.764	0.499	0.499	0.741	0.841	0.841	0.418	0.418	0.677	0.775	0.421	0.636	0.768	0.433	0.694	0.790
				6	0.158	0.328	0.445	0.464	0.464	0.697	0.798	0.798	0.271	0.271	0.502	0.628	0.420	0.652	0.752	0.236	0.497	0.632
				10	0.080	0.174	0.262	0.428	0.428	0.662	0.770	0.770	0.208	0.208	0.417	0.546	0.435	0.649	0.762	0.169	0.389	0.530
0.5	0.5	0.5	0	0	0.532	0.754	0.850	0.392	0.392	0.620	0.745	0.745	0.518	0.518	0.736	0.836	0.316	0.532	0.644	0.503	0.733	0.839
				3	0.281	0.464	0.591	0.266	0.266	0.512	0.634	0.634	0.214	0.214	0.430	0.540	0.228	0.436	0.565	0.228	0.457	0.570
				6	0.112	0.242	0.339	0.234	0.234	0.444	0.552	0.552	0.101	0.101	0.274	0.399	0.218	0.430	0.542	0.098	0.258	0.382
				10	0.076	0.139	0.200	0.192	0.192	0.396	0.528	0.528	0.076	0.076	0.220	0.311	0.224	0.421	0.536	0.057	0.180	0.288
0.5	0.5	0.5	0.2	0	0.199	0.378	0.522	0.147	0.147	0.319	0.428	0.428	0.184	0.184	0.370	0.494	0.132	0.294	0.396	0.179	0.374	0.505
				3	0.119	0.272	0.371	0.110	0.110	0.239	0.341	0.341	0.078	0.078	0.199	0.287	0.099	0.234	0.328	0.076	0.193	0.309
				6	0.077	0.175	0.270	0.087	0.087	0.212	0.308	0.308	0.039	0.039	0.128	0.207	0.090	0.212	0.308	0.036	0.129	0.208
				10	0.066	0.138	0.201	0.078	0.078	0.205	0.298	0.298	0.028	0.028	0.107	0.166	0.099	0.230	0.331	0.030	0.091	0.155
0.5	0.5	0.5	0.5	0	0.010	0.059	0.109	0.012	0.012	0.061	0.115	0.115	0.014	0.014	0.051	0.103	0.017	0.078	0.135	0.012	0.056	0.101
				3	0.029	0.091	0.155	0.009	0.009	0.054	0.109	0.109	0.014	0.014	0.068	0.128	0.018	0.065	0.109	0.010	0.069	0.128
				6	0.044	0.122	0.199	0.009	0.009	0.044	0.083	0.083	0.018	0.018	0.069	0.134	0.006	0.048	0.094	0.011	0.044	0.098
				10	0.044	0.091	0.153	0.011	0.011	0.054	0.090	0.090	0.012	0.012	0.048	0.097	0.014	0.058	0.120	0.010	0.035	0.068
0.5	0.5	0.5	0.8	0	0.573	0.774	0.847	0.434	0.434	0.656	0.755	0.755	0.540	0.540	0.752	0.832	0.348	0.557	0.680	0.542	0.749	0.834
				3	0.289	0.488	0.614	0.313	0.313	0.539	0.667	0.667	0.361	0.361	0.602	0.714	0.259	0.470	0.591	0.306	0.555	0.655
				6	0.132	0.243	0.359	0.229	0.229	0.454	0.573	0.573	0.205	0.205	0.417	0.547	0.233	0.431	0.557	0.130	0.318	0.441
				10	0.081	0.179	0.268	0.217	0.217	0.431	0.553	0.553	0.156	0.156	0.327	0.446	0.253	0.469	0.579	0.089	0.238	0.346

Esta tabla presenta los porcentajes de rechazo de la hipótesis de no linealidad al utilizar la prueba de [Hung et al., 2009] adaptada al caso de un modelo TAR , el porcentaje de contaminación es de 10%. En la ecuación (4-1) se presenta el modelo, el valor de ω está relacionado con la magnitud de los datos atípicos y su definición se presenta en la parte inferior de la ecuación (2-3). El valor del parámetro ν es igual a 0.5 y el tamaño de muestra es $T = 200$.

Tabla C-5.: Razón del error cuadrático medio entre el estimador GM y el clásico basadas en 1000 replicaciones con un modelo $TAR(Z, 2, 1, 1, 0)$, tamaño de muestra igual a 200 y umbral $r = 0.6$, $\nu = 0.5$.

$\phi_0^{(1)}$	$\phi_1^{(1)}$	$\phi_0^{(2)}$	$\phi_1^{(2)}$	ω	$\alpha =$	Huber $k=1.345$				Tukey $c=4.685$			
						$\hat{\phi}_0^{(1)}$	$\hat{\phi}_1^{(1)}$	$\hat{\phi}_0^{(2)}$	$\hat{\phi}_1^{(2)}$	$\hat{\phi}_0^{(1)}$	$\hat{\phi}_1^{(1)}$	$\hat{\phi}_0^{(2)}$	$\hat{\phi}_1^{(2)}$
0.5	0.5	0.5	-0.8	0		1.186	1.397	1.150	1.380	1.615	2.574	1.461	2.534
				3		0.683	0.418	0.650	0.387	0.827	0.625	0.765	0.620
				6		0.244	0.126	0.330	0.119	0.294	0.181	0.374	0.175
				10		0.148	0.073	0.183	0.070	0.171	0.101	0.207	0.104
0.5	0.5	0.5	-0.5	0		1.266	1.375	1.172	1.398	1.781	2.402	1.493	2.422
				3		0.622	0.402	0.779	0.651	0.786	0.570	0.949	1.060
				6		0.237	0.125	0.387	0.234	0.279	0.173	0.456	0.363
				10		0.140	0.076	0.233	0.162	0.159	0.102	0.270	0.243
0.5	0.5	0.5	-0.2	0		1.170	1.324	1.205	1.305	1.529	2.305	1.559	2.292
				3		0.579	0.381	0.922	1.109	0.687	0.545	1.201	2.058
				6		0.216	0.120	0.499	0.737	0.242	0.165	0.621	1.309
				10		0.133	0.074	0.283	0.586	0.148	0.100	0.322	0.957
0.5	0.5	0.5	0	0		1.231	1.421	1.204	1.452	1.676	2.512	1.681	2.776
				3		0.561	0.375	1.003	1.434	0.692	0.553	1.432	2.863
				6		0.209	0.121	0.580	1.064	0.238	0.168	0.802	2.096
				10		0.128	0.075	0.356	1.104	0.146	0.105	0.472	2.091
0.5	0.5	0.5	0.2	0		1.202	1.318	1.274	1.437	1.659	2.181	1.883	2.706
				3		0.511	0.382	0.973	1.161	0.627	0.540	1.363	2.150
				6		0.212	0.130	0.572	0.680	0.247	0.169	0.761	1.193
				10		0.139	0.080	0.328	0.547	0.165	0.110	0.444	0.974
0.5	0.5	0.5	0.5	0		1.219	1.425	1.286	1.405	1.787	2.497	1.966	2.478
				3		0.505	0.385	0.745	0.648	0.638	0.556	1.043	1.049
				6		0.180	0.126	0.337	0.279	0.212	0.164	0.431	0.417
				10		0.104	0.076	0.235	0.197	0.122	0.103	0.310	0.277
0.5	0.5	0.5	0.8	0		1.211	1.426	1.234	1.352	1.806	2.577	1.800	2.547
				3		0.499	0.403	0.495	0.398	0.638	0.595	0.664	0.637
				6		0.174	0.124	0.166	0.120	0.200	0.160	0.206	0.174
				10		0.095	0.072	0.106	0.077	0.113	0.096	0.120	0.111

Esta tabla presenta la razón del error cuadrático medio obtenido a través de simulaciones entre el estimador GM y el de mínimos cuadrados. En la ecuación (4-1) se presenta el modelo, el valor de ω está relacionado con la magnitud de los datos atípicos y su definición se presenta en la parte inferior de la ecuación (2-3). El valor del parámetro ν es igual a 0.5, el tamaño de muestra es $T = 200$ y el valor del umbral r es 0.6 de forma que aproximadamente 30% de las observaciones quedan en el segundo régimen.

Tabla C-6.: Frecuencias relativas empíricas del rechazo de la hipótesis de linealidad basadas en 1000 repeticiones con un modelo $TAR(Z, 2, 1, 1, 0)$, tamaño de muestra igual a 200 y umbral $r = 0.6$, $\nu = 0.5$.

$\phi_0^{(1)}$	$\phi_1^{(1)}$	$\phi_0^{(2)}$	$\phi_1^{(2)}$	ω	$\alpha =$	LS			Huber k=1.345			Huber k=3.291			Tukey c=4.685			Tukey c=15		
						1 %	5 %	10 %	1 %	5 %	10 %	1 %	5 %	10 %	1 %	5 %	10 %	1 %	5 %	10 %
0.5	0.5	0.5	-0.8	0	0.969	0.990	0.998	0.859	0.955	0.976	0.968	0.989	0.997	0.765	0.880	0.935	0.965	0.988	0.995	
		3		3	0.890	0.944	0.968	0.810	0.924	0.951	0.884	0.958	0.976	0.722	0.872	0.922	0.880	0.957	0.975	
		6		6	0.619	0.768	0.831	0.801	0.921	0.952	0.824	0.923	0.961	0.729	0.866	0.922	0.807	0.913	0.952	
		10		10	0.365	0.558	0.643	0.775	0.907	0.943	0.764	0.900	0.941	0.712	0.872	0.923	0.736	0.883	0.939	
0.5	0.5	0.5	-0.5	0	0.850	0.942	0.970	0.670	0.842	0.906	0.823	0.936	0.965	0.574	0.776	0.853	0.821	0.928	0.961	
		3		3	0.640	0.807	0.871	0.576	0.781	0.864	0.617	0.803	0.889	0.485	0.722	0.814	0.618	0.820	0.895	
		6		6	0.410	0.587	0.702	0.549	0.771	0.851	0.516	0.733	0.826	0.509	0.714	0.814	0.491	0.703	0.818	
		10		10	0.254	0.413	0.512	0.571	0.760	0.837	0.465	0.698	0.792	0.518	0.744	0.831	0.433	0.682	0.770	
0.5	0.5	0.5	-0.2	0	0.494	0.731	0.827	0.333	0.584	0.709	0.464	0.701	0.811	0.283	0.495	0.632	0.471	0.706	0.807	
		3		3	0.327	0.577	0.694	0.265	0.523	0.655	0.286	0.531	0.652	0.228	0.460	0.583	0.276	0.536	0.665	
		6		6	0.243	0.444	0.560	0.247	0.487	0.638	0.200	0.441	0.562	0.236	0.448	0.576	0.187	0.415	0.544	
		10		10	0.185	0.326	0.406	0.255	0.484	0.607	0.161	0.378	0.497	0.263	0.472	0.575	0.150	0.348	0.475	
0.5	0.5	0.5	0	0	0.252	0.466	0.596	0.188	0.377	0.493	0.243	0.445	0.588	0.170	0.333	0.455	0.240	0.456	0.581	
		3		3	0.196	0.380	0.506	0.156	0.340	0.445	0.154	0.324	0.435	0.154	0.302	0.422	0.157	0.335	0.450	
		6		6	0.182	0.331	0.438	0.148	0.313	0.412	0.095	0.240	0.359	0.137	0.301	0.406	0.078	0.219	0.350	
		10		10	0.146	0.269	0.364	0.131	0.291	0.403	0.072	0.213	0.322	0.151	0.291	0.408	0.057	0.190	0.288	
0.5	0.5	0.5	0.2	0	0.084	0.224	0.325	0.073	0.208	0.294	0.074	0.220	0.323	0.085	0.207	0.293	0.075	0.221	0.324	
		3		3	0.089	0.221	0.329	0.065	0.177	0.255	0.045	0.147	0.239	0.067	0.178	0.259	0.047	0.147	0.252	
		6		6	0.125	0.253	0.352	0.057	0.165	0.264	0.035	0.128	0.205	0.075	0.183	0.260	0.034	0.123	0.206	
		10		10	0.139	0.248	0.322	0.057	0.164	0.259	0.029	0.107	0.190	0.074	0.189	0.286	0.019	0.097	0.169	
0.5	0.5	0.5	0.5	0	0.010	0.059	0.109	0.012	0.061	0.115	0.014	0.051	0.103	0.017	0.078	0.135	0.012	0.056	0.101	
		3		3	0.027	0.096	0.154	0.006	0.051	0.112	0.013	0.058	0.122	0.013	0.064	0.121	0.011	0.059	0.116	
		6		6	0.076	0.187	0.264	0.011	0.053	0.113	0.015	0.052	0.102	0.014	0.079	0.124	0.012	0.041	0.087	
		10		10	0.091	0.179	0.249	0.009	0.053	0.094	0.012	0.050	0.097	0.015	0.067	0.123	0.011	0.033	0.072	
0.5	0.5	0.5	0.8	0	0.262	0.452	0.585	0.160	0.335	0.461	0.223	0.421	0.555	0.139	0.294	0.403	0.213	0.419	0.550	
		3		3	0.180	0.365	0.465	0.142	0.306	0.427	0.183	0.394	0.512	0.113	0.258	0.379	0.162	0.352	0.481	
		6		6	0.133	0.239	0.349	0.117	0.282	0.403	0.127	0.317	0.423	0.112	0.280	0.377	0.095	0.237	0.377	
		10		10	0.136	0.242	0.324	0.109	0.262	0.388	0.099	0.254	0.358	0.115	0.263	0.379	0.077	0.205	0.314	

Esta tabla presenta los porcentajes de rechazo de la hipótesis de no linealidad al utilizar la prueba de [Hung et al., 2009] adaptada al caso de un modelo TAR . En la ecuación (4-1) se presenta el modelo, el valor de ω está relacionado con la magnitud de los datos atípicos y su definición se presenta en la parte inferior de la ecuación (2-3). El valor del parámetro ν es igual a 0.5, el tamaño de muestra es $T = 200$ y el valor del umbral r es 0.6 de forma que aproximadamente 30% de las observaciones quedan en el segundo régimen.

D. Anexo: Pruebas de normalidad univariada

Tabla D-1.: P-valores de la prueba de [Shapiro and Wilk, 1965] de normalidad para las distribuciones empíricas de los estimadores GM basados en 1000 replicaciones del proceso de estimación con un modelo $TAR(Z, 2, 1, 1, 0)$, tamaño de muestra igual a 200, $\nu = 0.5$.

$\phi_0^{(1)}$	$\phi_1^{(1)}$	$\phi_0^{(2)}$	$\phi_1^{(2)}$	ω	Huber $k=1.345$				Tukey $c=4.685$			
					$\hat{\phi}_0^{(1)}$	$\hat{\phi}_1^{(1)}$	$\hat{\phi}_0^{(2)}$	$\hat{\phi}_1^{(2)}$	$\hat{\phi}_0^{(1)}$	$\hat{\phi}_1^{(1)}$	$\hat{\phi}_0^{(2)}$	$\hat{\phi}_1^{(2)}$
0.5	0.5	0.5	-0.8	0	0.00	0.00	0.91	0.00	0.00	0.00	0.07	0.00
				3	0.00	0.01	0.81	0.00	0.00	0.00	0.71	0.00
				6	0.00	0.00	0.68	0.00	0.00	0.00	0.40	0.00
				10	0.01	0.00	0.10	0.00	0.00	0.00	0.16	0.00
0.5	0.5	0.5	-0.5	0	0.20	0.04	0.03	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
				3	0.14	0.01	0.29	0.00	0.00	0.00	0.01	0.00
				6	0.11	0.04	0.30	0.00	0.00	0.00	0.02	0.00
				10	0.17	0.06	0.52	0.74	0.00	0.01	0.10	0.00
0.5	0.5	0.5	-0.2	0	0.00	0.00	0.45	0.23	0.00	0.00	0.25	0.02
				3	0.00	0.01	0.35	0.37	0.00	0.02	0.08	0.05
				6	0.00	0.17	0.02	0.69	0.00	0.01	0.05	0.12
				10	0.00	0.00	0.21	0.23	0.00	0.00	0.18	0.55
0.5	0.5	0.5	0	0	0.01	0.04	0.01	0.02	0.03	0.01	0.00	0.09
				3	0.25	0.12	0.01	0.04	0.05	0.29	0.00	0.58
				6	0.11	0.01	0.01	0.04	0.00	0.01	0.00	0.14
				10	0.05	0.01	0.00	0.11	0.00	0.00	0.00	0.23
0.5	0.5	0.5	0.2	0	0.00	0.00	0.00	0.76	0.00	0.00	0.00	0.75
				3	0.00	0.01	0.00	0.90	0.00	0.18	0.00	0.76
				6	0.00	0.00	0.01	0.49	0.00	0.00	0.01	0.58
				10	0.00	0.00	0.03	0.52	0.00	0.00	0.01	0.83
0.5	0.5	0.5	0.5	0	0.00	0.02	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
				3	0.00	0.12	0.00	0.02	0.00	0.01	0.00	0.00
				6	0.01	0.00	0.01	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
				10	0.21	0.41	0.00	0.06	0.00	0.12	0.00	0.01
0.5	0.5	0.5	0.8	0	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
				3	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
				6	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
				10	0.00	0.00	0.00	0.01	0.00	0.00	0.00	0.00

Esta tabla presenta los P-valores obtenidos al llevar a cabo la prueba de normalidad de [Shapiro and Wilk, 1965] sobre la distribución empírica de los coeficientes estimados a través del método GM obtenidos a través de simulaciones. En la ecuación (4-1) se presenta el modelo, el valor de ω está relacionado con la magnitud de los datos atípicos y su definición se presenta en la parte inferior de la ecuación (2-3). El valor del parámetro ν es igual a 0.5, el tamaño de muestra es $T = 200$ y el valor del umbral r es 0.

E. Anexo: Cobertura intervalos de confianza

Tabla E-1.: Cobertura empírica de los intervalos de confianza al 10 % contruidos a partir del estimador GM basados en 1000 replicaciones con un modelo $TAR(Z, 2, 1, 1, 0)$, tamaño de muestra igual a 100, $\nu = 0.5$.

$\phi_0^{(1)}$	$\phi_1^{(1)}$	$\phi_0^{(2)}$	$\phi_1^{(2)}$	ω	$\alpha =$	Huber $k=1.345$				Tukey $c=4.685$				
						$\hat{\phi}_0^{(1)}$	$\hat{\phi}_1^{(1)}$	$\hat{\phi}_0^{(2)}$	$\hat{\phi}_1^{(2)}$	$\hat{\phi}_0^{(1)}$	$\hat{\phi}_1^{(1)}$	$\hat{\phi}_0^{(2)}$	$\hat{\phi}_1^{(2)}$	
0.5	0.5	0.5	-0.8	0		0.87	0.88	0.89	0.87	0.87	0.86	0.89	0.86	
						3	0.88	0.87	0.88	0.86	0.88	0.85	0.89	0.86
						6	0.87	0.86	0.90	0.87	0.86	0.87	0.89	0.86
						10	0.88	0.87	0.89	0.88	0.87	0.86	0.89	0.86
0.5	0.5	0.5	-0.5	0		0.88	0.86	0.88	0.86	0.86	0.85	0.86	0.86	
						3	0.87	0.84	0.88	0.86	0.87	0.86	0.87	0.87
						6	0.86	0.84	0.87	0.86	0.86	0.86	0.86	0.88
						10	0.88	0.86	0.88	0.87	0.86	0.85	0.86	0.85
0.5	0.5	0.5	-0.2	0		0.86	0.85	0.86	0.87	0.86	0.85	0.85	0.86	
						3	0.86	0.85	0.87	0.88	0.87	0.87	0.87	0.87
						6	0.87	0.85	0.87	0.88	0.86	0.86	0.87	0.85
						10	0.84	0.86	0.87	0.87	0.86	0.87	0.86	0.87
0.5	0.5	0.5	0	0		0.87	0.89	0.88	0.88	0.87	0.88	0.87	0.86	
						3	0.86	0.86	0.88	0.87	0.86	0.85	0.87	0.88
						6	0.86	0.87	0.89	0.89	0.85	0.86	0.89	0.88
						10	0.87	0.88	0.90	0.89	0.87	0.87	0.89	0.87
0.5	0.5	0.5	0.2	0		0.87	0.88	0.87	0.87	0.88	0.87	0.85	0.85	
						3	0.87	0.85	0.87	0.86	0.87	0.86	0.84	0.84
						6	0.87	0.86	0.87	0.87	0.87	0.86	0.85	0.87
						10	0.87	0.87	0.87	0.84	0.86	0.87	0.85	0.87
0.5	0.5	0.5	0.5	0		0.86	0.88	0.87	0.84	0.87	0.88	0.86	0.86	
						3	0.87	0.87	0.88	0.83	0.86	0.87	0.86	0.85
						6	0.87	0.86	0.87	0.84	0.86	0.86	0.86	0.85
						10	0.85	0.87	0.87	0.86	0.85	0.86	0.88	0.86
0.5	0.5	0.5	0.8	0		0.88	0.87	0.85	0.85	0.88	0.87	0.84	0.85	
						3	0.87	0.85	0.83	0.81	0.87	0.86	0.85	0.85
						6	0.87	0.86	0.84	0.83	0.88	0.87	0.85	0.85
						10	0.88	0.86	0.85	0.86	0.89	0.87	0.84	0.84

Esta tabla presenta la cobertura empírica de los intervalos de confianza obtenidos a través de simulaciones basados en el estimador GM y siguiendo lo propuesto en la subsección 2.3. En la ecuación (4-1) se presenta el modelo, el valor de ω está relacionado con la magnitud de los datos atípicos y su definición se presenta en la parte inferior de la ecuación (2-3). El valor del parámetro ν es igual a 0.5, el tamaño de muestra es $T = 100$ y el valor del umbral r es 0.

Tabla E-2.: Cobertura empírica de los intervalos de confianza al 10 % contruidos a partir del estimador GM basados en 1000 replicaciones con un modelo $TAR(Z, 2, 1, 1, 0)$, tamaño de muestra igual a 200, $\nu = 0.5$.

$\phi_0^{(1)}$	$\phi_1^{(1)}$	$\phi_0^{(2)}$	$\phi_1^{(2)}$	ω	$\alpha =$	Huber $k=1.345$				Tukey $c=4.685$			
						$\hat{\phi}_0^{(1)}$	$\hat{\phi}_1^{(1)}$	$\hat{\phi}_0^{(2)}$	$\hat{\phi}_1^{(2)}$	$\hat{\phi}_0^{(1)}$	$\hat{\phi}_1^{(1)}$	$\hat{\phi}_0^{(2)}$	$\hat{\phi}_1^{(2)}$
0.5	0.5	0.5	-0.8	0	0	0.88	0.88	0.89	0.89	0.89	0.87	0.89	0.90
					3	0.87	0.86	0.89	0.87	0.87	0.88	0.88	0.89
					6	0.88	0.85	0.90	0.87	0.88	0.86	0.89	0.89
					10	0.87	0.84	0.88	0.87	0.88	0.88	0.89	0.91
0.5	0.5	0.5	-0.5	0	0	0.89	0.89	0.91	0.89	0.89	0.89	0.92	0.89
					3	0.88	0.86	0.90	0.88	0.89	0.88	0.91	0.88
					6	0.88	0.87	0.90	0.88	0.88	0.87	0.91	0.90
					10	0.88	0.87	0.90	0.90	0.89	0.87	0.90	0.90
0.5	0.5	0.5	-0.2	0	0	0.89	0.88	0.88	0.88	0.90	0.89	0.88	0.88
					3	0.89	0.85	0.89	0.89	0.90	0.87	0.89	0.88
					6	0.89	0.86	0.90	0.90	0.90	0.87	0.89	0.89
					10	0.90	0.87	0.89	0.88	0.90	0.88	0.88	0.89
0.5	0.5	0.5	0	0	0	0.91	0.92	0.89	0.89	0.90	0.90	0.88	0.89
					3	0.90	0.88	0.88	0.89	0.89	0.88	0.88	0.89
					6	0.89	0.88	0.90	0.89	0.90	0.90	0.89	0.88
					10	0.90	0.88	0.89	0.90	0.89	0.89	0.89	0.89
0.5	0.5	0.5	0.2	0	0	0.91	0.90	0.89	0.88	0.90	0.90	0.89	0.89
					3	0.89	0.88	0.89	0.87	0.90	0.90	0.88	0.90
					6	0.89	0.88	0.90	0.87	0.89	0.90	0.90	0.88
					10	0.89	0.87	0.88	0.87	0.90	0.90	0.89	0.87
0.5	0.5	0.5	0.5	0	0	0.88	0.89	0.89	0.88	0.89	0.88	0.89	0.87
					3	0.87	0.85	0.87	0.86	0.89	0.89	0.88	0.87
					6	0.88	0.86	0.87	0.85	0.87	0.88	0.88	0.87
					10	0.88	0.88	0.89	0.86	0.88	0.88	0.90	0.88
0.5	0.5	0.5	0.8	0	0	0.91	0.88	0.87	0.88	0.89	0.88	0.86	0.88
					3	0.89	0.87	0.85	0.83	0.89	0.89	0.87	0.87
					6	0.88	0.87	0.86	0.85	0.89	0.89	0.87	0.87
					10	0.87	0.86	0.87	0.86	0.89	0.88	0.88	0.89

Esta tabla presenta la cobertura empírica de los intervalos de confianza obtenidos a través de simulaciones basados en el estimador GM y siguiendo los propuesto en la subsección 2.3. En la ecuación (4-1) se presenta el modelo, el valor de ω está relacionado con la magnitud de los datos atípicos y su definición se presenta en la parte inferior de la ecuación (2-3). El valor del parámetro ν es igual a 0.5, el tamaño de muestra es $T = 200$ y el valor del umbral r es 0.

Tabla E-3.: Cobertura empírica de los intervalos de confianza al 1 % construidos a partir del estimador GM basados en 1000 replicaciones con un modelo $TAR(Z, 2, 1, 1, 0)$, tamaño de muestra igual a 100, $\nu = 0.5$.

$\phi_0^{(1)}$	$\phi_1^{(1)}$	$\phi_0^{(2)}$	$\phi_1^{(2)}$	ω	$\alpha =$	Huber $k=1.345$				Tukey $c=4.685$			
						$\hat{\phi}_0^{(1)}$	$\hat{\phi}_1^{(1)}$	$\hat{\phi}_0^{(2)}$	$\hat{\phi}_1^{(2)}$	$\hat{\phi}_0^{(1)}$	$\hat{\phi}_1^{(1)}$	$\hat{\phi}_0^{(2)}$	$\hat{\phi}_1^{(2)}$
0.5	0.5	0.5	-0.8	0		0.98	0.97	0.99	0.97	0.97	0.97	0.99	0.98
				3		0.98	0.97	0.99	0.97	0.98	0.96	0.99	0.97
				6		0.98	0.97	0.99	0.98	0.98	0.98	0.98	0.98
				10		0.98	0.96	0.99	0.98	0.97	0.97	0.98	0.97
0.5	0.5	0.5	-0.5	0		0.98	0.98	0.98	0.97	0.97	0.97	0.97	0.97
				3		0.98	0.97	0.98	0.96	0.97	0.97	0.98	0.97
				6		0.98	0.96	0.98	0.97	0.97	0.96	0.97	0.97
				10		0.98	0.97	0.98	0.97	0.97	0.97	0.97	0.98
0.5	0.5	0.5	-0.2	0		0.98	0.98	0.98	0.98	0.98	0.97	0.97	0.97
				3		0.97	0.97	0.98	0.98	0.98	0.97	0.98	0.98
				6		0.97	0.97	0.98	0.97	0.98	0.97	0.97	0.98
				10		0.98	0.98	0.98	0.96	0.98	0.97	0.98	0.97
0.5	0.5	0.5	0	0		0.98	0.98	0.98	0.98	0.97	0.97	0.98	0.97
				3		0.97	0.97	0.98	0.98	0.97	0.96	0.97	0.97
				6		0.98	0.98	0.98	0.98	0.97	0.97	0.97	0.98
				10		0.98	0.97	0.99	0.97	0.97	0.97	0.98	0.97
0.5	0.5	0.5	0.2	0		0.98	0.98	0.98	0.98	0.97	0.97	0.97	0.97
				3		0.97	0.98	0.98	0.97	0.97	0.97	0.98	0.96
				6		0.97	0.97	0.98	0.96	0.97	0.97	0.97	0.97
				10		0.97	0.97	0.98	0.96	0.97	0.97	0.98	0.96
0.5	0.5	0.5	0.5	0		0.98	0.98	0.97	0.97	0.97	0.98	0.97	0.97
				3		0.97	0.97	0.97	0.97	0.97	0.97	0.97	0.96
				6		0.97	0.98	0.97	0.96	0.97	0.97	0.97	0.96
				10		0.98	0.98	0.98	0.97	0.97	0.97	0.98	0.97
0.5	0.5	0.5	0.8	0		0.98	0.97	0.97	0.97	0.98	0.97	0.97	0.97
				3		0.97	0.97	0.97	0.96	0.98	0.97	0.97	0.97
				6		0.98	0.96	0.96	0.96	0.98	0.97	0.97	0.97
				10		0.98	0.97	0.97	0.97	0.98	0.97	0.97	0.97

Esta tabla presenta la cobertura empírica de los intervalos de confianza obtenidos a través de simulaciones basados en el estimador GM y siguiendo los propuesto en la subsección 2.3. En la ecuación (4-1) se presenta el modelo, el valor de ω está relacionado con la magnitud de los datos atípicos y su definición se presenta en la parte inferior de la ecuación (2-3). El valor del parámetro ν es igual a 0.5, el tamaño de muestra es $T = 100$ y el valor del umbral r es 0.

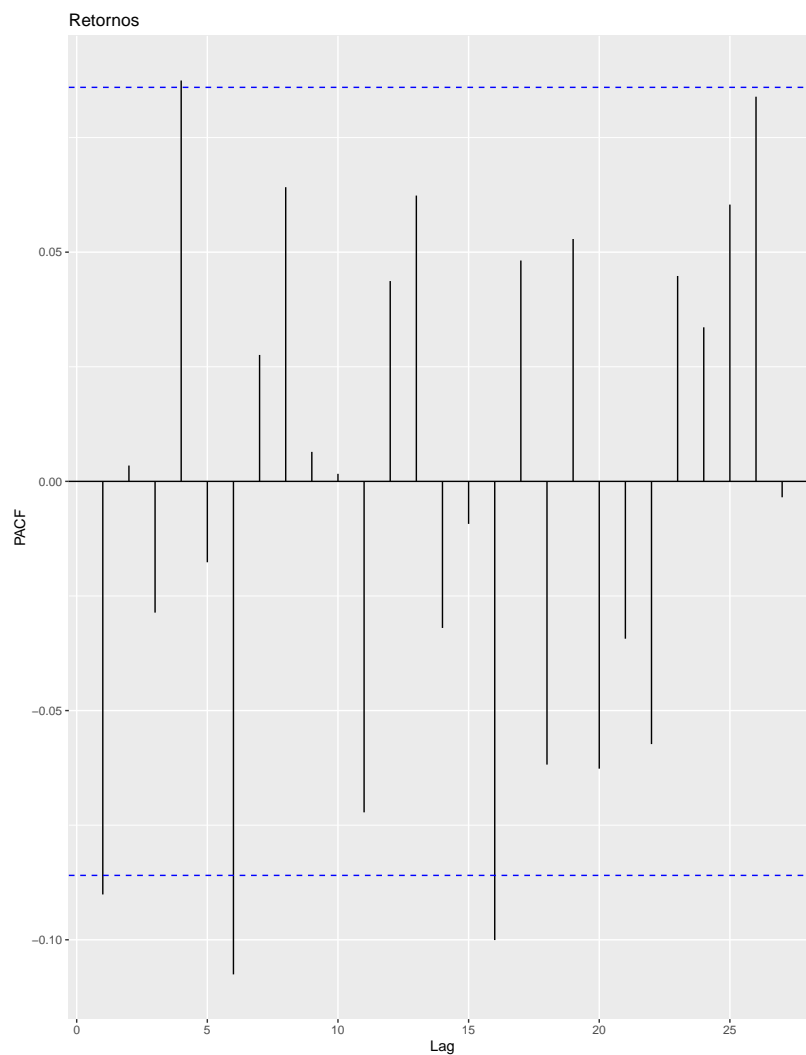
Tabla E-4.: Cobertura empírica de los intervalos de confianza al 1% construidos a partir del estimador GM basados en 1000 replicaciones con un modelo $TAR(Z, 2, 1, 1, 0)$, tamaño de muestra igual a 200, $\nu = 0.5$.

$\phi_0^{(1)}$	$\phi_1^{(1)}$	$\phi_0^{(2)}$	$\phi_1^{(2)}$	ω	$\alpha =$	Huber $k=1.345$				Tukey $c=4.685$				
						$\hat{\phi}_0^{(1)}$	$\hat{\phi}_1^{(1)}$	$\hat{\phi}_0^{(2)}$	$\hat{\phi}_1^{(2)}$	$\hat{\phi}_0^{(1)}$	$\hat{\phi}_1^{(1)}$	$\hat{\phi}_0^{(2)}$	$\hat{\phi}_1^{(2)}$	
0.5	0.5	0.5	-0.8	0	0	0.97	0.98	0.99	0.99	0.97	0.98	0.99	0.99	
					3	0.98	0.97	0.98	0.98	0.98	0.98	0.98	0.98	0.98
					6	0.98	0.97	0.99	0.98	0.98	0.98	0.99	0.98	0.99
					10	0.98	0.98	0.98	0.99	0.98	0.97	0.98	0.99	0.99
0.5	0.5	0.5	-0.5	0	0	0.99	0.98	0.99	0.99	0.98	0.98	0.99	0.98	
					3	0.98	0.98	0.99	0.98	0.99	0.98	0.99	0.98	
					6	0.98	0.97	0.99	0.98	0.98	0.97	0.99	0.98	
					10	0.98	0.97	0.99	0.98	0.97	0.98	0.99	0.98	
0.5	0.5	0.5	-0.2	0	0	0.99	0.98	0.98	0.98	0.98	0.98	0.98	0.99	
					3	0.98	0.97	0.98	0.98	0.99	0.98	0.99	0.98	
					6	0.98	0.98	0.99	0.98	0.98	0.97	0.99	0.99	
					10	0.98	0.98	0.99	0.97	0.98	0.98	0.98	0.99	
0.5	0.5	0.5	0	0	0	0.99	0.98	0.99	0.98	0.99	0.99	0.99	0.99	
					3	0.98	0.97	0.98	0.98	0.99	0.98	0.99	0.99	
					6	0.99	0.98	0.99	0.99	0.99	0.99	0.99	0.99	
					10	0.99	0.98	0.98	0.99	0.99	0.98	0.98	0.99	
0.5	0.5	0.5	0.2	0	0	0.99	0.99	0.98	0.98	0.98	0.98	0.99	0.98	
					3	0.99	0.98	0.98	0.98	0.99	0.98	0.99	0.98	
					6	0.98	0.98	0.98	0.97	0.98	0.98	0.99	0.99	
					10	0.98	0.98	0.98	0.97	0.98	0.98	0.99	0.98	
0.5	0.5	0.5	0.5	0	0	0.99	0.99	0.99	0.98	0.99	0.98	0.98	0.98	
					3	0.98	0.97	0.98	0.97	0.98	0.98	0.98	0.98	
					6	0.98	0.98	0.98	0.97	0.99	0.98	0.98	0.98	
					10	0.98	0.98	0.99	0.98	0.98	0.98	0.99	0.97	
0.5	0.5	0.5	0.8	0	0	0.98	0.98	0.99	0.98	0.98	0.98	0.98	0.97	
					3	0.98	0.97	0.98	0.97	0.98	0.98	0.98	0.97	
					6	0.98	0.97	0.97	0.97	0.98	0.98	0.98	0.97	
					10	0.98	0.97	0.98	0.98	0.99	0.97	0.98	0.98	

Esta tabla presenta la cobertura empírica de los intervalos de confianza obtenidos a través de simulaciones basados en el estimador GM y siguiendo los propuesto en la subsección 2.3. En la ecuación (4-1) se presenta el modelo, el valor de ω está relacionado con la magnitud de los datos atípicos y su definición se presenta en la parte inferior de la ecuación (2-3). El valor del parámetro ν es igual a 0.5, el tamaño de muestra es $T = 200$ y el valor del umbral r es 0.

F. Anexo: Bondad de ajuste del modelo propuesto en la aplicación empírica

Figura F-1.: PACF: Retornos



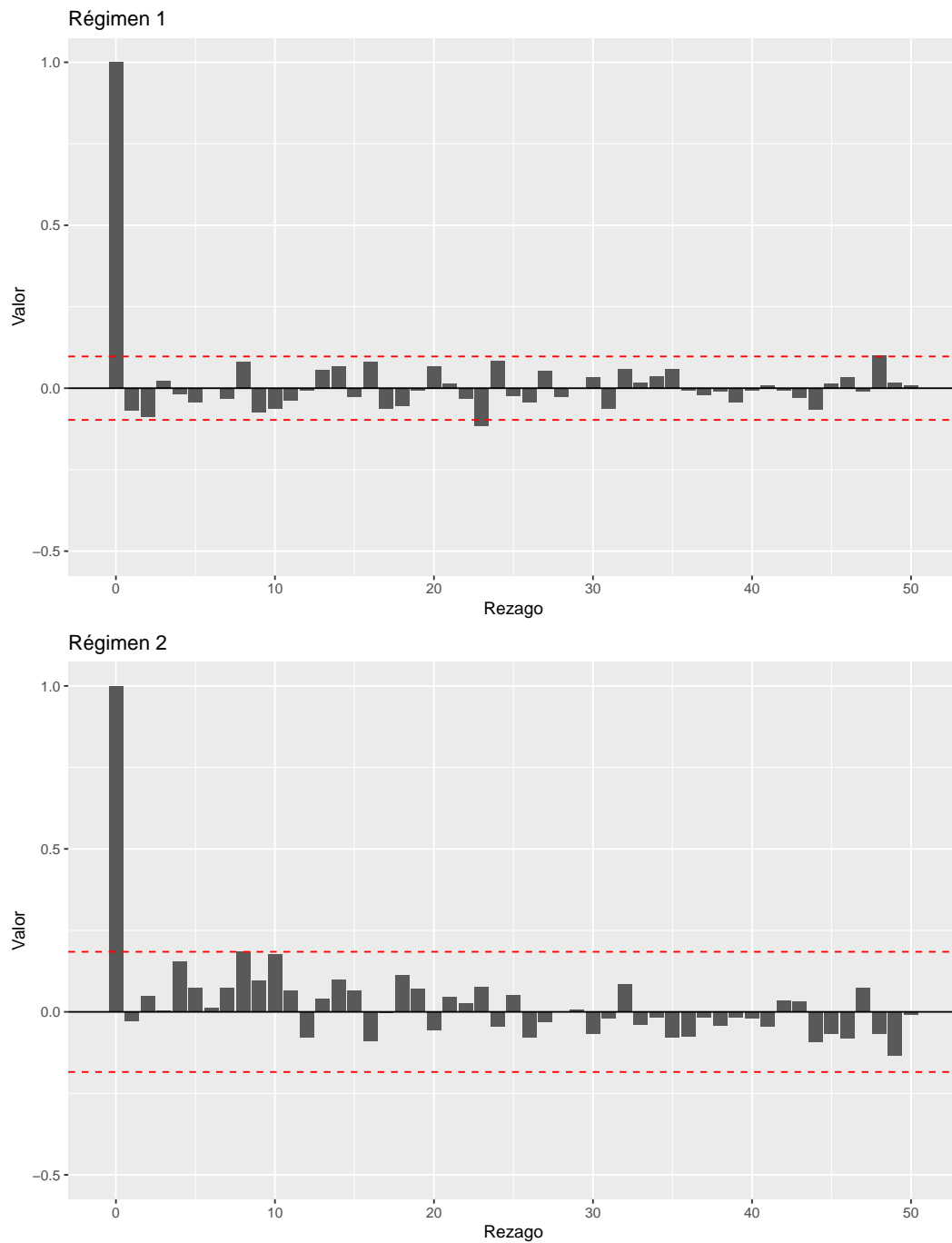
La figura presenta las función de autocorrelación parcial para la serie de retornos de tasa de cambio nominal con frecuencia semanal utilizada en la sección 5.

Tabla F-1.: P -valores prueba de Ljung-Box para el modelo $TAR(k = 2, p_1 = 1, p_2 =, d = 0)$, $r = -1.482$ con selección de función ψ : *Huber* $k = 1.345$.

Rezago	Régimen 1	Régimen 2
5	0.28	0.56
6	0.40	0.69
7	0.47	0.71
8	0.31	0.35
9	0.23	0.35
10	0.21	0.18
11	0.24	0.21
12	0.31	0.23
13	0.30	0.28
14	0.25	0.27
15	0.30	0.30
16	0.21	0.30
17	0.19	0.36
18	0.19	0.32
19	0.24	0.34
20	0.20	0.38

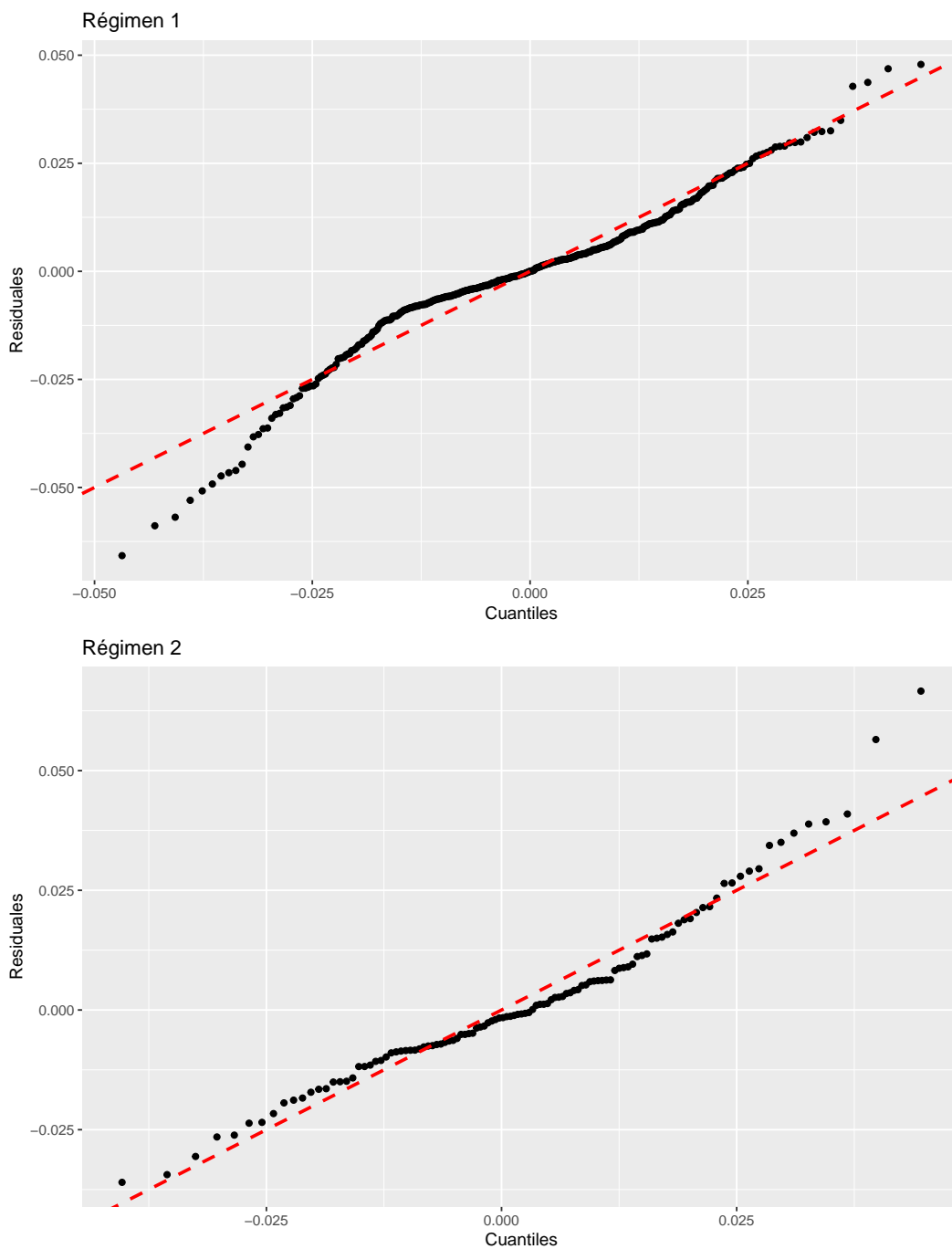
Esta tabla presenta los p -valores de la prueba de Ljung-Box aplicada a los residuales obtenidos para cada uno de los regímenes tras llevar a cabo la estimación del modelo $TAR(k = 2, p_1 = 1, p_2 =, d = 0)$, $r = -1.482$ con selección de función ψ : *Huber* $k = 1.345$ propuesto en la sección 5.

Figura F-2.: ACF residuales para cada régimen en el modelo $TAR(k = 2, p_1 = 1, p_2 =, d = 0)$, $r = -1.482$ con selección de función $\psi : Huber$ $k = 1.345$



La figura presenta las funciones de autocorrelación para los residuales obtenidos para cada uno de los regímenes tras llevar a cabo la estimación del modelo $TAR(k = 2, p_1 = 1, p_2 =, d = 0)$, $r = -1.482$ con selección de función $\psi : Huber$ $k = 1.345$ propuesto en la sección 5.

Figura F-3.: Gráfica QQ para los residuales de cada régimen en el modelo $TAR(k = 2, p_1 = 1, p_2 =, d = 0)$, $r = -1.482$ con selección de función ψ : *Huber* $k = 1.345$



La figura presenta la gráfica QQ para evaluar normalidad construida con los residuales obtenidos para cada uno de los regímenes tras llevar a cabo la estimación del modelo $TAR(k = 2, p_1 = 1, p_2 =, d = 0)$, $r = -1.482$ con selección de función ψ : *Huber* $k = 1.345$ propuesto en la sección 5.

Bibliografía

- [Battaglia and Orfei, 2005] Battaglia, F. and Orfei, L. (2005). Outlier detection and estimation in nonlinear time series. *Journal of Time Series Analysis*, 26(1):107–121.
- [Chan and Tong, 1990] Chan, K. and Tong, H. (1990). On likelihood ratio tests for threshold autoregression. *Journal of the Royal Statistical Society. Series B: Statistical Methodology*, 52(3):469–476.
- [Chan and Cheung, 1994] Chan, W.-S. and Cheung, S.-H. (1994). On robust estimation of threshold autoregressions. *Journal of Forecasting*, 13(1):37–49.
- [Chan and Ng, 2004] Chan, W.-S. and Ng, M.-W. (2004). Robustness of alternative non-linearity tests for setar models. *Journal of Forecasting*, 23(3):215–231.
- [Chen and Liu, 1993] Chen, C. and Liu, L.-M. (1993). Joint estimation of model parameters and outlier effects in time series. *Journal of the American Statistical Association*, 88(421):284–297.
- [Davies and Gather, 1993] Davies, L. and Gather, U. (1993). The identification of multiple outliers. *Journal of the American Statistical Association*, 88(423):782–792.
- [Denby and Martin, 1979] Denby, L. and Martin, R. D. (1979). Robust estimation of the first-order autoregressive parameter. *Journal of the American Statistical Association*, 74(365):140–146.
- [Franses et al., 2000] Franses, P. H., Van Dijk, D., et al. (2000). *Non-linear time series models in empirical finance*. Cambridge University Press.
- [Giordani, 2006] Giordani, P. (2006). A cautionary note on outlier robust estimation of threshold models. *Journal of Forecasting*, 25(1):37–47.
- [Granger and Teräsvirta, 1993] Granger, C. and Teräsvirta, T. (1993). *Modelling Non-Linear*

Economic Relationships. Oxford University Press.

- [Hampel et al., 1986] Hampel, F. R., Ronchetti, E. M., Rousseeuw, P. J., and Stahel, W. A. (1986). *Robust statistics: the approach based on influence functions*, volume 196. John Wiley & Sons.
- [Hansen, 2011] Hansen, B. E. (2011). Threshold autoregression in economics. *Statistics and its Interface*, 4(2):123–127.
- [Hoaglin et al., 1983] Hoaglin, D., Mosteller, F., and Tukey, J. W. (1983). *Understanding Robust and Exploratory Data Analysis*. Wiley Interscience.
- [Hung et al., 2009] Hung, K. C., Cheung, S. H., Chan, W.-S., and Zhang, L.-X. (2009). On a robust test for setar-type nonlinearity in time series analysis. *Journal of forecasting*, 28(5):445–464.
- [LeBaron, 1992] LeBaron, B. (1992). Some relations between volatility and serial correlations in stock market returns. *Journal of Business*, pages 199–219.
- [Lucas, 1996] Lucas, A. (1996). *Outlier Robust Unit Root Analysis*. PhD thesis, Erasmus Universiteit.
- [Luukkonen et al., 1988] Luukkonen, R., Saikkonen, P., and Teräsvirta, T. (1988). Testing linearity against smooth transition autoregressive models. *Biometrika*, 75(3):491–499.
- [Maronna et al., 2006] Maronna, R. A., Martin, D. R., and Yohai, V. J. (2006). *Robust Statistics: Theory and Methods*. John Wiley and Sons.
- [Mohammadi and Jahan-Parvar, 2012] Mohammadi, H. and Jahan-Parvar, M. R. (2012). Oil prices and exchange rates in oil-exporting countries: evidence from tar and m-tar models. *Journal of Economics and Finance*, 36(3):766–779.
- [Petrucci, 1990] Petrucci, J. (1990). A comparison of tests for setar-type non-linearity in time series. *Journal of Forecasting*, 9(1):25–36.
- [Petrucci and Davies, 1986] Petrucci, J. and Davies, N. (1986). A portmanteau test for self-exciting threshold autoregressive-type nonlinearity in time series. *Biometrika*, 73(3):687–694.
- [Rousseeuw, 1984] Rousseeuw, P. J. (1984). Least median of squares regression. *Journal of*

- the American statistical association*, 79(388):871–880.
- [Rousseeuw and Van Zomeren, 1990] Rousseeuw, P. J. and Van Zomeren, B. C. (1990). Unmasking multivariate outliers and leverage points. *Journal of the American Statistical association*, 85(411):633–639.
- [Shapiro and Wilk, 1965] Shapiro, S. S. and Wilk, M. B. (1965). An analysis of variance test for normality (complete samples). *Biometrika*, 52(3/4):591–611.
- [Sin and White, 1996] Sin, C.-y. and White, H. (1996). Information criteria for selecting possibly misspecified parametric models. *Journal of Econometrics*, 71(1-2):207–225.
- [Tiao and Tsay, 1994] Tiao, G. C. and Tsay, R. S. (1994). Some advances in non-linear and adaptive modelling in time-series. *Journal of Forecasting*, 13(2):109–131.
- [Tong, 1978] Tong, H. (1978). On a threshold model. *Pattern Recognition and Signal Processing*.
- [Tong, 1993] Tong, H. (1993). *Non-linear Time Series: A Dynamical System Approach*. Dynamical System Approach. Clarendon Press.
- [Tsay and Chen, 2019] Tsay, R. and Chen, R. (2019). *Nonlinear Time Series Analysis*. Wiley Interscience.
- [Tsay, 1988] Tsay, R. S. (1988). Outliers, level shifts, and variance changes in time series. *Journal of forecasting*, 7(1):1–20.
- [Tsay, 1989] Tsay, R. S. (1989). Testing and modeling threshold autoregressive processes. *Journal of the American statistical association*, 84(405):231–240.
- [Vargas, 2011] Vargas, H. (2011). Monetary policy and the exchange rate in Colombia. In for International Settlements, B., editor, *Capital flows, commodity price movements and foreign exchange intervention*, volume 57 of *BIS Papers*, pages 129–153. Bank for International Settlements.
- [Zhang et al., 2009] Zhang, L.-X., Chan, W.-S., Cheung, S.-H., and Hung, K.-C. (2009). A note on the consistency of a robust estimator for threshold autoregressive processes. *Statistics & Probability Letters*, 79(6):807–813.