

TRABAJO FINAL DE MAESTRÍA

BIFURCACIONES BÁSICAS Y FORMAS NORMALES

Presentado por:

HÉCTOR APONTE BETANCUR

Estudiante Maestría en Matemáticas convenio UPTC

Director:

SERAFÍN BAUTISTA DÍAZ

UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA

FACULTAD DE CIENCIAS

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS

BOGOTÁ

2010

Índice general

1. Preliminares	1
1.1. Definición de sistemas dinámicos	1
1.2. Ecuaciones diferenciales y sistemas dinámicos	2
1.3. Órbitas y retratos de fase	3
1.4. Conjuntos invariantes y estabilidad	4
1.5. Equivalencia de sistemas dinámicos	5
1.6. Definición de bifurcaciones y sus formas normales	6
1.7. Estabilidad estructural	8
1.8. Teoremas de la función implícita y de la función inversa	10
2. Bifurcaciones	11
2.1. Bifurcaciones a un parámetro	11
2.2. La forma normal de la bifurcaciones fold	12
2.3. Teorema de la bifurcación fold	13
2.4. La forma normal de la bifurcación Hopf	18
2.5. Teorema de la bifurcación Hopf	20
3. Ejemplo de la bifurcación Hopf	42
Índice	55

Índice de figuras

1.1. Péndulo simple.	3
1.2. Bifurcación de un sistema lineal.	8
2.1. Bifurcaciones por pérdida de hiperbolicidad en equilibrios.	11
2.2. Gráficas de $f(x) = \alpha + x^2$ para la bifurcación fold.	12
2.3. Diagrama de la bifurcación Hopf.	20
2.4. Órbita del sistema.	39
3.1. Bifurcación Hopf subcrítica.	47
3.2. Bifurcación Hopf supercrítica.	48
3.3. Origen estable, no hay ciclo límite.	50
3.4. Origen inestable, no hay ciclo límite.	50
3.5. Ciclo límite estable.	52
3.6. Origen estable, ciclo límite inestable.	53

Introducción

El área de los sistemas dinámicos ha tenido un gran desarrollo en los últimos cincuenta años, y se debe en gran parte a la aparición de herramientas como el computador, y a ideas fundamentales dadas por Poincaré, Smale, etc.

En este trabajo, un sistema dinámico es una formulación matemática de un proceso determinístico. Esto implica que en un sistema dinámico hay variables de estado, una ley de evolución que no cambia con el tiempo, y parámetros. Fijados estos últimos, el sistema presenta un comportamiento, y al modificarlos, el sistema puede tener comportamientos distintos. Los elementos importantes en un sistema dinámico son las órbitas, y en matemáticas existen funciones que permiten comparar las órbitas de éstos. Más precisamente, dos sistemas son topológicamente equivalentes, si existe un homeomorfismo que lleva órbitas de un sistema en órbitas del otro conservando la dirección del tiempo. Una bifurcación es un cambio topológico en la estructura de las órbitas (vía equivalencia topológica) en un sistema dinámico indexado por parámetros.

Por lo anterior, en un sistema dinámico es importante el estudio de las bifurcaciones y juega un papel fundamental en el análisis de su comportamiento. Las bifurcaciones pueden ser globales y locales. Este trabajo final de maestría se encarga de analizar las características fundamentales de las bifurcaciones locales por pérdida de hiperbolicidad sobre puntos de equilibrios para sistemas 1-paramétricos continuos unidimensionales y bidimensionales, como son las bifurcaciones de fold (o tangente) y la de Hopf. Existen muchas aplicaciones en la literatura de la bifurcación de Hopf, Ver [1] y [2].

Para el análisis de las bifurcaciones locales en un sistema dado, se usa transformaciones invertibles locales que dependen del parámetro, con el fin de transformar el sistema en uno de tipo polinómico (forma normal), que sea localmente topológicamente equivalente al dado. Luego, en primera instancia se busca comprender las

demostraciones de los teoremas de formas normales, para luego generar un documento más detallado y de fácil comprensión sobre dicha temática. De igual forma se presentará una aplicación con las características fundamentales de la bifurcación de Hopf, que nos permite comprender la utilización de estos teoremas de formas normales.

Capítulo 1

Preliminares

1.1. Definición de sistemas dinámicos

La formulación matemática de un proceso determinístico es un *sistema dinámico*. Esta formulación permite predecir cualquier estado futuro del sistema, siempre y cuando se conozca la ley de evolución (la cual no cambia con el tiempo) y su estado inicial.

La ley de evolución de un sistema dinámico genera un cambio de estado en un tiempo $t \in T$, donde T es un conjunto ordenado. Si T representa el conjunto de números reales tenemos un *sistema dinámico de tiempo continuo*, y si T representa los números enteros, entonces tenemos un sistema *dinámico de tiempo discreto*.

Esta ley de evolución que determina el estado x_t del sistema dinámico en el tiempo t , a partir de un estado inicial x_0 , se define en un espacio de estado X , como una aplicación de la forma: $\varphi^t : X \rightarrow X$ donde $\varphi^t(x_0) = x_t$.

La función φ^t es llamada el operador evolución del sistema dinámico, y en el caso de sistemas dinámicos continuos la familia $[\varphi^t]_{t \in \mathbb{R}}$ de operadores de evolución es llamado *flujo*. El operador de evolución cumple con las siguientes propiedades:

$$\varphi^0(x) = x, \quad \forall x \in X \tag{1.1}$$

Esto quiere decir que el sistema no cambia de estado espontáneamente, y

$$\varphi^{s+t}(x) = \varphi^s(\varphi^t(x)); \quad \forall x \in X; s, t \in T \tag{1.2}$$

Esta propiedad nos muestra que la ley de evolución no cambia con el tiempo, es

decir, el sistema es determinístico.

Definición 1 *Un sistema dinámico es un par $\{X, \varphi^t\}$, donde X es un espacio de estado y $\varphi^t : X \rightarrow X$ es una familia de operadores de evolución en un tiempo t que satisfacen las propiedades (1.1) y (1.2) mencionadas anteriormente.*

Ejemplo 1. (Sistema lineal)

Consideramos el plano $X = \mathbb{R}^2$ y una familia de transformaciones lineales no singulares en X dado por la matriz en función de $t \in \mathbb{R}$,

$$\varphi^t = \begin{pmatrix} \exp(\lambda t) & 0 \\ 0 & \exp(\mu t) \end{pmatrix} \quad (1.3)$$

donde $\lambda, \mu \neq 0$ son números reales. En este caso tenemos un sistema dinámico de tiempo continuo en \mathbb{R}^2 dado por el flujo φ^t , para todo t en \mathbb{R} .

1.2. Ecuaciones diferenciales y sistemas dinámicos

Toda ecuación diferencial ordinaria de la forma

$$x' = f(x); \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad (1.4)$$

es un sistema dinámico de tiempo continuo, donde su espacio de estados es $X = \mathbb{R}^n$. Asuma que f es una función suave. La ley de evolución del sistema está dado implícitamente en términos del vector velocidad x' como función del vector posición $x \in \mathbb{R}^n$. Sea φ^t el flujo asociado a la ecuación (1.4).

Una función $x : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ es solución de la ecuación (1.4) en I , si $x'(t) = f(x(t))$ para todo $t \in I$. Una solución particular de la ecuación (1.4) con la condición inicial $x(t_0) = x_0$ es una solución del problema de Cauchy,

$$x' = f(x), x(t_0) = x_0. \quad (1.5)$$

Sin pérdida de generalidad podemos asumir que $t_0 = 0$.

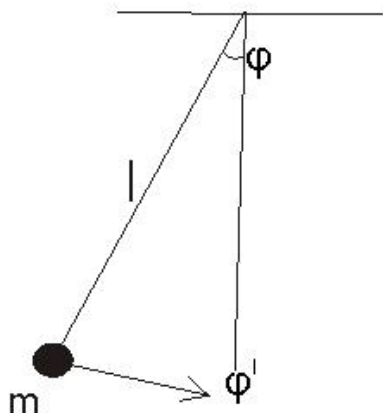


Figura 1.1: Péndulo simple.

Ejemplo 2. (La dinámica de un péndulo es descrita por la segunda ley de Newton)

$$\varphi'' = -k^2 \text{sen} \varphi, \text{ donde, } k^2 = \frac{g}{l} \quad (1.6)$$

Aquí, l es la longitud del péndulo, y g es la aceleración constante gravitacional. Se introduce $\psi = \varphi'$, tal que (φ, ψ) representa un punto en el espacio de estados $X = S^1 \times \mathbb{R}$, donde S^1 es el círculo unitario parametrizado por el ángulo y \mathbb{R} es el eje real que corresponde al conjunto de toda posible velocidad. Luego la ecuación (1.6) se puede expresar de la siguiente forma:

$$\begin{cases} \varphi' = \psi \\ \psi' = -k^2 \text{sen} \varphi \end{cases}$$

siendo $x = (\varphi, \psi)$, y $f(\varphi, \psi) = (\varphi, -k^2 \text{sen} \varphi)$.

1.3. Órbitas y retratos de fase

Una *órbita* a partir de x_0 es un subconjunto ordenado en el espacio \mathbb{R}^n , $Or(x_0) = \{x \in \mathbb{R}^n : x = \varphi^t(x_0), t \in \mathbb{R}\}$. Un punto $x_0 \in \mathbb{R}^n$ es llamado *punto de equilibrio* de la ecuación (1.5), si $f(x_0) = 0$. El tipo de órbita más simple es un punto de equilibrio en los sistemas continuos. Una órbita periódica (ciclo) de \mathbb{R}^n es una órbita $Or(x_0)$, tal que $\varphi^{t+T}(x_0) = \varphi^t(x_0)$ para algún número $T > 0$. El valor mínimo T que satisface la definición es llamado el período del ciclo.

Definición 2 *El retrato de fase de un sistema dinámico es una partición del espacio de estados en órbitas.*

El retrato de fase contiene mucha información sobre el comportamiento de un sistema dinámico. Como es imposible representar todas las órbitas del espacio de estados en un retrato de fase, siempre deben escogerse las órbitas más representativas.

1.4. Conjuntos invariantes y estabilidad

Definición 3 *Un conjunto $S \subset \mathbb{R}^n$ es invariante para un sistema dinámico $\{\mathbb{R}^n, \varphi^t\}$, si para todo $x_0 \in S$, se tiene que $\varphi^t(x_0) \in S$. De otra forma, $\varphi^t(S) \subset S$, para todo t .*

Como ejemplos de conjuntos invariantes tenemos el conjunto vacío, \mathbb{R}^n , una órbita, los puntos de equilibrios, los ciclos límites, entre otros.

Consideramos un sistema dinámico de tiempo continuo $x' = f(x)$, $x \in \mathbb{R}^n$, donde f es suave. Sea $x_0 = 0$ un equilibrio del sistema (esto es, $f(x_0) = 0$), y denotemos por A la diferencial $D_x f$ evaluada en x_0 . Sea n_- , n_0 y n_+ el número de valores propios de A con parte real negativa, cero y positiva respectivamente.

Definición 4 *Un punto de equilibrio x_0 de $x' = f(x)$ es llamado hiperbólico, si todos los valores propios de la matriz jacobiana A tienen parte real no nula.*

Se conoce que si todos los valores propios de esta matriz jacobiana tienen parte real negativa, se dice que el equilibrio es asintóticamente estable, y si alguno de ellos tiene parte real positiva se dice que el equilibrio es inestable. Definimos los siguientes conjuntos invariantes

$$W^s(x_0) = \{x : \varphi^t(x) \rightarrow x_0, t \rightarrow \infty\},$$

$$W^u(x_0) = \{x : \varphi^t(x) \rightarrow x_0, t \rightarrow -\infty\}$$

donde, $W^s(x_0)$ es llamado la variedad estable de x_0 , mientras $W^u(x_0)$ es llamado la variedad inestable de x_0 .

1.5. Equivalencia de sistemas dinámicos

Primero presentaremos el concepto de equivalencia topológica y equivalencia topológica local para sistemas que no dependen de parámetros, y luego para sistemas que si dependen de parámetros.

Se dice que dos sistemas dinámicos $x' = f(x)$ y $x' = g(x)$ son *topológicamente equivalentes*, si existe un homeomorfismo $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ que envía las órbitas de un sistema en las órbitas del otro sistema preservando la dirección del tiempo. Es decir, que el comportamiento en términos de estabilidad de los puntos de equilibrio de ambos sistemas es el mismo. Además, el retrato de fase de uno de los sistemas puede ser obtenido mediante el retrato de fase del otro, por medio de transformaciones continuas e invertibles.

Un sistema dinámico $x' = f(x)$ es llamado localmente topológicamente equivalente en una región $U \subset \mathbb{R}^n$, a un sistema dinámico $x' = g(x)$ en una región $V \subset \mathbb{R}^n$, si existe un homeomorfismo $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, $h(U) = V$, enviando órbitas del primer sistema restringido a U en órbitas del segundo sistema restringido a V , preservando la dirección del tiempo.

Ahora, considere los sistemas m -paramétricos

$$x' = f(x, \alpha), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad \alpha \in \mathbb{R}^m \quad (1)$$

y

$$y' = g(y, \alpha); \quad y \in \mathbb{R}^n, \quad \beta \in \mathbb{R}^m \quad (2)$$

donde f y g son funciones suaves.

Definición 5 *El sistema (1) es llamado topológicamente equivalente al sistema (2) si:*

- i) Existe un homeomorfismo en el espacio de parámetros $p(\alpha) : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$, $\beta = p(\alpha)$; y*
- ii) Existe un homeomorfismo (que depende de los parámetros) en el espacio de fase $h_\alpha : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, $y = h_\alpha(x)$, que envía órbitas del sistema (1) con valor de parámetros α en órbitas del sistema (2) con valor de parámetro $\beta = p(\alpha)$, preservando la dirección del tiempo.*

Observe que el homeomorfismo p transforma el espacio de parámetros del sistema (1) en el espacio de parámetros del sistema (2), mientras que el homeomorfismo h_α hace corresponder los respectivos retratos de fase. Aquí no se le pide que el homeomorfismo h_α dependa continuamente del parámetro α .

A continuación vamos a presentar la equivalencia topológica local de los sistemas (1) y (2) sobre vecindades del origen, la cual usaremos en el desarrollo de las formas normales de las bifurcaciones fold y Hopf.

Definición 6 *Los sistemas (1) y (2) son llamados topológicamente equivalentes cerca del origen si,*

- i) Existe un homeomorfismo en el espacio de parámetros $p(\alpha) : W_0 \subset \mathbb{R}^m \rightarrow p(W_0) \subset \mathbb{R}^m$, definido en una vecindad pequeña W_0 de $\alpha = 0$, $p(0) = 0$;*
- ii) Existe un homeomorfismo (que depende de los parámetros) definido en una vecindad pequeña U_α de $x = 0$, $h_0(0) = 0$, que envía órbitas del sistema (1) restricto a U_α en órbitas del sistema (2) restricto a $h_\alpha(U_\alpha)$, preservando la dirección del tiempo.*

Un resultado importante bien conocido en la literatura sobre equilibrios hiperbólicos se presenta a continuación.

Teorema 1 *El retrato de fase del sistema $x' = f(x)$, $x \in \mathbb{R}^n$ cerca a dos equilibrios hiperbólicos x_0 y y_0 , son localmente topológicamente equivalentes si esos equilibrios tienen el mismo número n_- y n_+ de valores propios con parte real negativa y parte real positiva respectivamente.*

Demostración. Ver Sotomayor, [7]. ■

La relación topológicamente equivalentes (local o global) sobre el espacio de los sistemas dinámicos es una *relación de equivalencia*.

1.6. Definición de bifurcaciones y sus formas normales

Ahora considere la siguiente familia de ecuaciones diferenciales:

$$x' = f(x, \alpha), x \in \mathbb{R}^n, \alpha \in \mathbb{R}, \quad (1.7)$$

donde $x \in \mathbb{R}^n$ es la variable de estado y $\alpha \in \mathbb{R}$ es un parámetro real que no depende del tiempo t . Con esta ecuación lo que se busca es analizar el comportamiento de las soluciones cuando se varia el parámetro α . Entonces, dados dos valores de parámetros, existen dos posibilidades: que los sistemas queden topológicamente equivalentes o no.

Definición 7 *La aparición de un retrato de fase de $x' = f(x, \alpha)$ no topológicamente equivalente por la variación del parámetro α se llama una bifurcación.*

Es decir, una bifurcación es un cambio de tipo topológico del sistema con relación a la variación de parámetros. Las bifurcaciones se clasifican como globales o locales, en este trabajo se analizará las bifurcaciones locales en ecuaciones diferenciales.

Definición 8 *Un diagrama de bifurcaciones de un sistema dinámico es una estratificación de su espacio de parámetros inducido por la equivalencia topológica, junto con los retratos de fase representados por cada estrato.*

Ejemplo 3. Considerando el siguiente sistema

$$x' = Ax,$$

donde la matriz A esta dada por

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & \alpha \end{pmatrix} \quad (1.8)$$

Es claro que el único punto de equilibrio que tiene el sistema es $x = 0$. Ahora si $\alpha = 0$ los valores propios de A son $\lambda_1 = i$ y $\lambda_2 = -i$, luego las órbitas que se generan son órbitas cerradas y el origen resulta ser un centro, ahora si $\alpha \neq 0$ los valores propios están dados por $\lambda_{1,2} = \frac{1}{2}(\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - 4})$ para valores de α muy cercanos a cero, estos valores propios son complejos, y tienen parte real diferente de cero. Entonces, si $\alpha > 0$ las órbitas resultan ser espirales inestables, y si $\alpha < 0$, las espirales resultan ser estables.

En el ejemplo se puede comprender que para $\alpha = 0$ el sistema tiene una estructura de órbitas diferente que cuando $\alpha \neq 0$, luego los retratos de fase no resultan ser

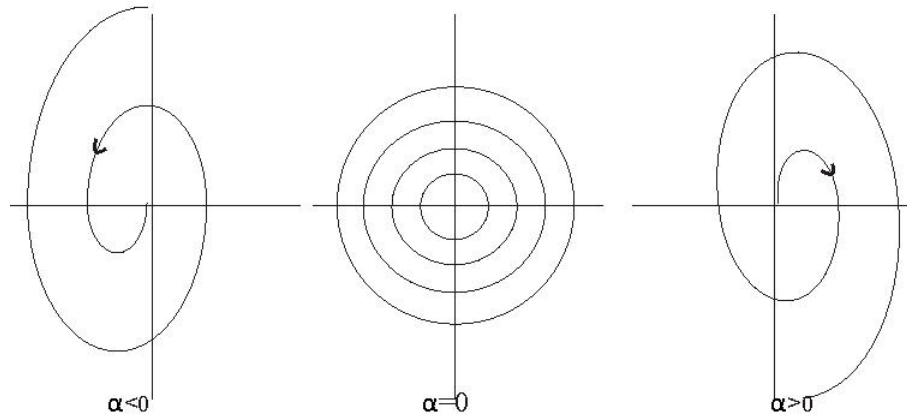


Figura 1.2: Bifurcación de un sistema lineal.

topológicamente equivalentes, debido a que en un caso las órbitas son cerradas y en los otros casos son espirales, por lo tanto $\alpha = 0$ es un valor de bifurcación.

Para las bifurcaciones locales los diagramas de bifurcación universales se obtienen mediante las *formas normales*. Esta es una de las nociones más importantes en la teoría de las bifurcaciones. Este concepto se puede presentar de la siguiente forma:

Definición 9 (Forma normal de una bifurcación) *Una forma normal de bifurcación para el sistema genérico $x' = f(x, \alpha)$ que tiene un equilibrio en $x = 0$ y presenta una bifurcación en $\alpha = 0$, es un sistema dinámico de la forma*

$$\xi' = g(\xi, \beta), \xi \in \mathbb{R}^n, \beta \in \mathbb{R}^m,$$

donde la función g es un polinomio en la variable $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$, depende del parámetro β , y $g(0, 0) = 0$ tal que estos sistemas son topológicamente equivalentes cerca del origen.

1.7. Estabilidad estructural

Existen sistemas dinámicos para los cuales los retratos de fase no cambian cualitativamente mediante pequeñas perturbaciones.

Ejemplo 4. (Persistencia de equilibrios hiperbólicos)

Suponiendo que x_0 es un equilibrio hiperbólico del sistemas de tiempo continuo

$$x' = f(x), x \in \mathbb{R}^n, \tag{1.9}$$

donde f es suave, $f(x_0) = 0$. Considerando, junto con el sistema (1.9) una perturbación de un parámetro

$$x' = f(x) + \varepsilon g(x), x \in \mathbb{R}^n, \quad (1.10)$$

donde g es también suave, y ε es un parámetro pequeño. Si $\varepsilon = 0$, el sistema (1.10) se convierte en (1.9). Luego el sistema (1.10) tiene un equilibrio $x(\varepsilon)$ para $|\varepsilon|$ suficientemente pequeño, dado que $x(0) = x_0$. Además la ecuación de equilibrio de (1.10) puede ser escrita como:

$$F(x, \varepsilon) = f(x) + \varepsilon g(x) = 0, \quad (1.11)$$

donde $F(x_0, 0) = f(x_0) = 0$, y se tiene que $F_x(x_0, 0) = A_0$. Así A_0 es la matriz jacobiana de (1.9) en el equilibrio x_0 , entonces $\det(A_0) \neq 0$, porque x_0 es hiperbólico. El teorema de la función implícita garantiza la existencia de una función suave $x = x(\varepsilon)$, $x(0) = 0$ que satisface:

$$F(x(\varepsilon), \varepsilon) = 0 \quad (1.12)$$

Para valores pequeños de $|\varepsilon|$, la matriz jacobiana de $x(\varepsilon)$ en (1.10) es:

$$A_\varepsilon = \left(\frac{df(x)}{dx} + \varepsilon \frac{dg(x)}{dx} \right) \Big|_{x=x(\varepsilon)}$$

la cual depende suavemente de ε y coincide con A_0 en (1.9) si $\varepsilon = 0$.

Luego se tiene que $x(\varepsilon)$ es un equilibrio hiperbólico de (1.10) para un $|\varepsilon|$ suficientemente pequeño. Por tal razón, los sistemas (1.9) y (1.10) son topológicamente equivalentes cerca al equilibrio x_0 .

Este ejemplo muestra que el equilibrio hiperbólico es una estructura estable para pequeñas perturbaciones.

Definición 10 *El sistema $x' = f(x)$, $x \in \mathbb{R}^n$ es llamado c^1 -estructuralmente estable en una región $U \subset \mathbb{R}^n$, si todo sistema $x' = g(x)$ que sea c^1 -cercano en U a $x' = f(x)$, es topológicamente equivalente en U a $x' = f(x)$.*

En la siguiente sección vamos a re-escribir dos teoremas importantes del análisis, que son útiles para encontrar las formas normales de la bifurcación fold en la recta, y de la bifurcación Hopf en el plano.

1.8. Teoremas de la función implícita y de la función inversa

Teorema 2 (Función implícita) Sean $U \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ un abierto, $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ una función de clase C^r ; $r \geq 1$, $a = (a_1, a_2) \in U$ y $c = f(a)$. Si la derivada $D_2f(a) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ es un isomorfismo, entonces existen vecindades abiertas V de a_1 en \mathbb{R}^m y Z de a en U con la siguiente propiedad: para cada $x \in V$, existe un único $\xi(x) \in \mathbb{R}^n$ con $(x, \xi(x)) \in Z$ y $f(x, \xi(x)) = c$. La aplicación $\xi : V \rightarrow \mathbb{R}^n$ así definida es de clase C^r , y su derivada en $x \in V$ es

$$\xi'(x) = -\frac{D_1f(x, \xi(x))}{D_2f(x, \xi(x))}$$

Demostración. Ver [4]. ■

Teorema 3 (Función inversa) Sean $U \in \mathbb{R}^m$ un abierto y $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ una función de clase C^r ; $r \geq 1$, y $a \in U$. Si $Df(a) : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ es un isomorfismo, entonces existen vecindades abiertas V de a y W de $f(a)$ en \mathbb{R}^m tales que $f : V \rightarrow W$ es un C^r -difeomorfismo. Además, la derivada de f^{-1} es $Df^{-1}(f(a)) = (Df(a))^{-1}$.

Demostración. Ver [4]. ■

Capítulo 2

Bifurcaciones

2.1. Bifurcaciones a un parámetro

Consideramos un sistema de tiempo continuo dependiendo de un parámetro

$$x' = f(x, \alpha), x \in \mathbb{R}^n, \alpha \in \mathbb{R}, \quad (2.1)$$

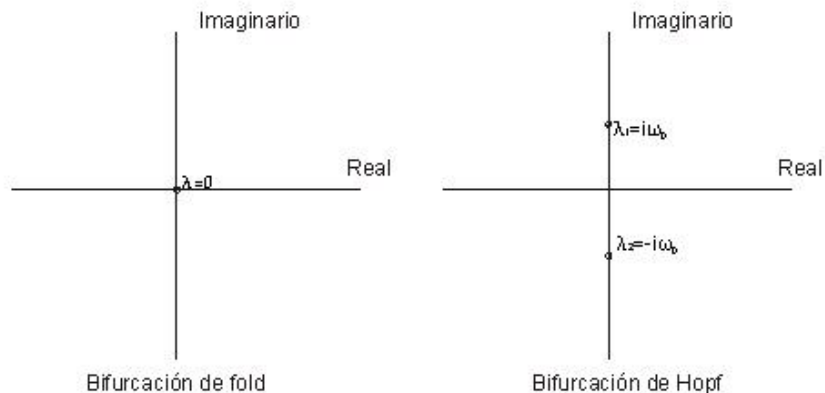


Figura 2.1: Bifurcaciones por pérdida de hiperbolicidad en equilibrios.

donde f es suave con respecto a x y α . Sea $x = x_0$ un equilibrio hiperbólico del sistema para $\alpha = \alpha_0$. Si el parámetro se cambia un poco, el equilibrio también se mueve, pero permanece hiperbólico. Existen dos formas donde la hiperbolicidad del equilibrio se puede perder: i) si uno de los valores propios de la matriz jacobiana

de f evaluada en el equilibrio se convierte en cero ($\lambda = 0$), o ii) si la parte real de dos valores propios complejos de la matriz jacobiana se vuelve cero ($\lambda_1 = iw_0$, $\lambda_2 = -iw_0$, $w_0 > 0$). El primer caso es condición necesaria para que ocurra una bifurcación fold o tangente, y la segunda para que ocurra una bifurcación de Hopf.

2.2. La forma normal de la bifurcaciones fold

Consideramos el siguiente sistema dinámico unidimensional dependiendo de un parámetro α ,

$$x' = \alpha + x^2 = f(x, \alpha); \quad x, \alpha \in \mathbb{R}. \quad (2.2)$$

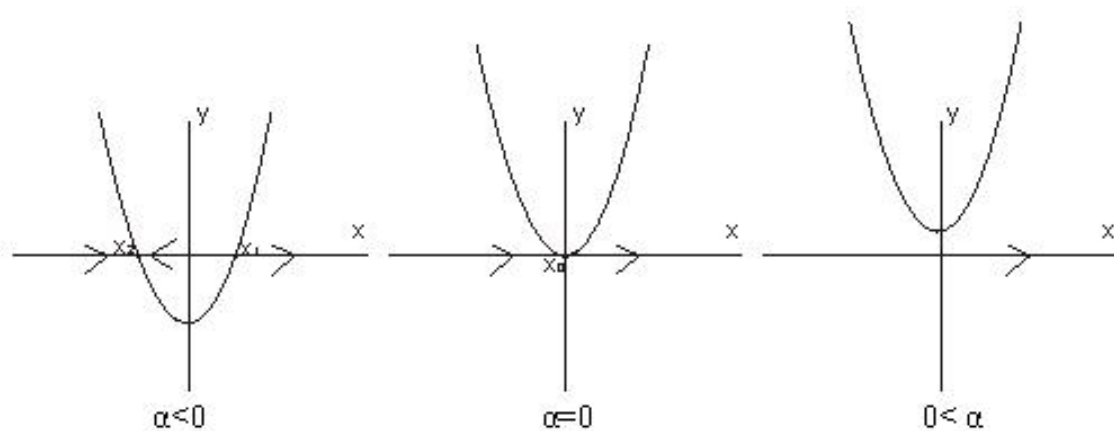


Figura 2.2: Gráficas de $f(x) = \alpha + x^2$ para la bifurcación fold.

En $\alpha = 0$ este sistema tiene un equilibrio no hiperbólico $x_0 = 0$ y no es estable ni inestable con $f_x(0, 0) = 0$. Para $\alpha < 0$ hay dos equilibrios en el sistema dados por $x_1(\alpha) = \sqrt{-\alpha}$ y $x_2(\alpha) = -\sqrt{-\alpha}$, en donde $x_2(\alpha)$ es equilibrio estable, mientras en $x_1(\alpha)$ es inestable. Ahora para $\alpha > 0$ no hay equilibrios en el sistema, la cual es una dinámica creciente. Podemos entender que cuando $\alpha = 0$ los dos equilibrios colisionan y desaparecen dando origen a un solo equilibrio en $x_0 = 0$ con valor propio $\lambda = 0$, la cual es condición necesaria de la bifurcación fold.

Ahora vamos adicionar términos de orden superior a la ecuación (2.2)

$$x' = \alpha + x^2 + o(x^3) = f(x, \alpha), \quad (2.3)$$

donde $o(x^3)$ puede depender sin problemas del parámetro α , luego en una vecindad suficientemente pequeña de $x = 0$ el término $o(x^3)$ no afecta el comportamiento del sistema, el número de equilibrios y estabilidad son los mismos para el sistema (2.2) y el sistema (2.3) en los correspondientes valores paramétricos siempre que α sea suficientemente pequeño. Para estos dos sistemas se preserva la condición de ser localmente topológicamente equivalentes. Estos resultados se formalizan con el siguiente lema.

Lema 1 *El sistema $x' = \alpha + x^2 + o(x^3)$ es local topológicamente equivalente cerca al origen al sistema $x' = \alpha + x^2$.*

Demostración. Ver demostración en [3], Pág. 80 ■

2.3. Teorema de la bifurcación fold

Mostraremos que el sistema $x' = \alpha + x^2 = f(x, \alpha)$ es una forma normal de un sistema unidimensional genérico que exhibe una bifurcación fold.

Considere el sistema

$$x' = f(x, \alpha), x \in \mathbb{R}, \alpha \in \mathbb{R}, \quad (2.4)$$

donde f es diferenciable y tiene un equilibrio $x = 0$, cuando $\alpha = 0$, tal que $\lambda = f_x(0, 0) = 0 = f_1(0)$. Expresé $f(x, \alpha)$ mediante una expansión de Taylor con respecto a x alrededor de $x = 0$,

$$f(x, \alpha) = \frac{f(0, \alpha)}{0!} + \frac{f_x(0, \alpha)}{1!}x + \frac{f_{xx}(0, \alpha)}{2!}x^2 + \dots = f_0(\alpha) + f_1(\alpha)x + f_2(\alpha)x^2 + \dots$$

Se asume que se satisfacen las siguientes dos condiciones:

- $f_0(0) = f(0, 0) = 0$ condición de equilibrio, y
- $f_1(0) = f_x(0, 0) = 0$ condición de la bifurcación fold.

La idea principal es transformar el sistema (2.4) en el sistema (2.2) mediante un cambio de coordenadas suaves invertibles, que dependen del parámetro. Consideramos inicialmente un cambio de coordenadas lineales introduciendo una nueva variable ξ

de la siguiente manera: Sea $\xi = x + \delta$, donde $\delta(\alpha)$ es una función suave. Entonces $\xi' = x'$ y $x = \xi - \delta$. Sustituyendo en la ecuación (2.4) se tiene

$$\xi' = x' = f_0(\alpha) + f_1(\alpha)(\xi - \delta) + f_2(\alpha)(\xi - \delta)^2 + f_3(\alpha)(\xi - \delta)^3 + \dots$$

Expandiendo las potencias se llega a

$$\begin{aligned} \xi' = f_0(\alpha) + f_1(\alpha)\xi - f_1(\alpha)\delta + f_2(\alpha)\xi^2 - 2f_2(\alpha)\xi\delta + f_2(\alpha)\delta^2 + f_3(\alpha)\xi^3 - 3f_3(\alpha)\xi^2\delta \\ + 3f_3(\alpha)\xi\delta^2 - f_3(\alpha)\delta^3 \dots \end{aligned}$$

y asociando los términos constantes, lineales, cuadráticos, y demás,

$$\begin{aligned} \xi' = [f_0(\alpha) - f_1(\alpha)\delta + f_2(\alpha)\delta^2 - f_3(\alpha)\delta^3 + \dots] + [f_1(\alpha) - 2f_2(\alpha)\delta + 3f_3(\alpha)(\delta)^2 + \dots]\xi \\ + [f_2(\alpha) - 3f_3(\alpha)\delta + \dots]\xi^2 + [f_3 + \dots]\xi^3 + \dots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \xi' = [f_0(\alpha) - f_1(\alpha)\delta + f_2(\alpha)\delta^2 + o(\delta^3)] + [f_1(\alpha) - 2f_2(\alpha)\delta + o(\delta^2)]\xi \\ + [f_2(\alpha) + o(\delta)]\xi^2 + o(\xi^3) \end{aligned} \quad (2.5)$$

donde $o(\delta^n)$, y $o(\xi^n)$ para $n = 1, 2, 3, \dots$ son funciones suaves que recogen todos los términos de grado mayores o iguales que n .

Ahora *asumimos* que $f_2(0) = \frac{1}{2}f_{xx}(0, 0) \neq 0$. Denotemos por $F(\alpha, \delta)$ el coeficiente de la parte lineal del sistema (2.5) el cual se expresa de la siguiente manera,

$$\begin{aligned} F(\alpha, \delta) &= f_1(\alpha) - 2f_2(\alpha)\delta + 3f_3(\alpha)\delta^2 + 4f_4(\alpha)\delta^3 + \dots \\ &= f_1(\alpha) - 2f_2(\alpha)\delta + \delta^2[3f_3(\alpha) + 4f_4(\alpha)\delta + \dots] \\ &= f_1(\alpha) - 2f_2(\alpha)\delta + \delta^2[\psi(\alpha, \delta)], \end{aligned}$$

donde ψ es una función suave.

Observe que,

$$F(0, 0) = 0, \quad \left. \frac{\partial F}{\partial \delta} \right|_{(0,0)} = -2f_2(0) \neq 0, \quad \text{y} \quad \left. \frac{\partial F}{\partial \alpha} \right|_{(0,0)} = f_1'(0)$$

entonces por el teorema de la función implícita tenemos la existencia y unicidad (local) de una función $\delta = \delta(\alpha)$ con $\delta(0) = 0$ y $F(\alpha, \delta(\alpha)) = 0$. También por teorema de la función implícita se conoce la derivada de δ ,

$$\delta'(0) = \frac{f_1'(0)}{2f_2(0)}.$$

Ahora se expresa $\delta(\alpha)$ como una serie de Taylor con respecto a α en $\alpha = 0$,

$$\delta(\alpha) = \delta(0) + \delta'(0)\alpha + o(\alpha^2)$$

como $\delta(0) = 0$, entonces

$$\delta(\alpha) = \delta'(0)\alpha + o(\alpha^2)$$

$$\delta(\alpha) = \frac{f_1'(0)}{2f_2(0)}\alpha + o(\alpha^2).$$

Ahora se toma la parte constante de la ecuación (2.5) en función de α de la siguiente manera:

$$h(\alpha) = f_0(\alpha) - f_1(\alpha)\delta(\alpha) + f_2(\alpha)\delta^2(\alpha) + o(\delta^3(\alpha)).$$

Por otra parte, se expresa $h(\alpha)$ como una serie de Taylor con respecto a α en $\alpha = 0$,

$$h(\alpha) = h(0) + h'(0)\alpha + h''(0)\alpha^2 + o(\alpha^3)$$

como

$$h(0) = 0, \quad h'(0) = f_0'(0), \quad h''(0) = f_0''(0) - \frac{f_1'^2(0)}{f_2(0)}$$

entonces se tiene que

$$h(\alpha) = f_0'(0)\alpha + f_0''(0)\alpha^2 - \frac{f_1'^2(0)}{f_2(0)}\alpha^2 + o(\alpha^3).$$

Por lo anterior se tiene que ξ' queda expresada como,

$$\xi' = [f_0'(0)\alpha + f_0''(0)\alpha^2 - \frac{f_1'^2(0)}{f_2(0)}\alpha^2 + o(\alpha^3)] + [f_2(0) + o(\alpha)]\xi^2 + o(\xi^3) \quad (2.6)$$

Considerando un nuevo parámetro $\mu = \mu(\alpha)$, tal que

$$\mu = f_0'(0)\alpha + f_0''(0)\alpha^2 - \frac{f_1'^2(0)}{f_2(0)}\alpha^2 + \phi(\alpha),$$

donde $\phi = o(\alpha^3)$ es alguna función suave. Así tenemos

- $\mu(0) = 0$
- $\mu'(0) = f_0'(0) = f_\alpha(0, 0)$

y si *asumimos* que $f_\alpha(0, 0) \neq 0$, entonces el teorema de la función inversa implica la existencia local y unicidad de una función inversa suave $\alpha = \alpha(\mu)$ con $\alpha(0) = 0$. Así la ecuación (2.6) se convierte en:

$$\xi' = \mu + \sigma(\mu)\xi^2 + o(\delta^3),$$

donde $\sigma(\mu)$ es una función suave con $\sigma(0) = f_2(0) \neq 0$.

Finalmente, si

$$\eta = |\sigma(\mu)|\xi \text{ y } \beta = |\sigma(\mu)|\mu$$

se tiene que

$$\xi' = \frac{\eta'}{\sigma(\mu)}.$$

Entonces,

$$\frac{\eta'}{|\sigma(\mu)|} = \frac{\beta}{|\sigma(\mu)|} + \frac{\sigma(\mu)\eta^2}{|\sigma(\mu)|^2} + o(\eta^3)$$

o

$$\eta' = \beta + \frac{\sigma(\mu)\eta^2}{|\sigma(\mu)|} + o(\eta^3)$$

y por lo tanto,

$$\eta' = \beta + s\eta^2 + o(\eta^3),$$

donde $s = \text{signo}(\sigma(0)) = \pm 1$. Luego el siguiente teorema queda demostrado.

Teorema 4 *Supongamos que un sistema unidimensional*

$$x' = f(x, \alpha), x \in \mathbb{R}, \alpha \in \mathbb{R},$$

donde f es diferenciable, tiene en $\alpha = 0$ el equilibrio $x = 0$, y sea $\lambda = f_x(0, 0) = 0$.

Si asumimos las siguientes condiciones genéricas:

1. $f_{xx}(0, 0) \neq 0$
2. $f_\alpha(0, 0) \neq 0$,

entonces existen cambios de coordenadas y parámetros invertibles que transforman el sistema en

$$\eta' = \beta \pm \eta^2 + o(\eta^3).$$

Aplicando el *Lema 1*. se puede eliminar $o(\eta^3)$ y finalmente llegar al siguiente resultado general.

Teorema 5 (Forma normal topológica para la bifurcación fold) *Cualquier sistema genérico con un parámetro*

$$x' = f(x, \alpha), x \in \mathbb{R}, \alpha \in \mathbb{R},$$

teniendo en $\alpha = 0$ el equilibrio $x = 0$ con $\lambda = f_x(0, 0) = 0$, es localmente topológicamente equivalente cerca al origen a una de las siguientes formas normales:

$$\eta' = \beta \pm \eta^2.$$

2.4. La forma normal de la bifurcación Hopf

Considerando el sistema de dos ecuaciones diferenciales dependiendo de un parámetro

$$\begin{cases} x_1' = \alpha x_1 - x_2 - (x_1^2 + x_2^2)x_1 \\ x_2' = x_1 + \alpha x_2 - (x_1^2 + x_2^2)x_2 \end{cases}$$

el cual también se puede escribir como

$$x' = \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & -1 \\ 1 & \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} - (x_1^2 + x_2^2) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = f(x, \alpha) \quad (2.7)$$

La matriz jacobiana esta dada por:

$$D_x f(x, \alpha) = A(x, \alpha) = \begin{pmatrix} \alpha - 3x_1^2 - x_2^2 & -1 - 2x_1x_2 \\ 1 - 2x_1x_2 & \alpha - 3x_2^2 - x_1^2 \end{pmatrix} \quad (2.8)$$

Este sistema tiene un punto de equilibrio $x = (x_1, x_2) = (0, 0)$ para cualquier valor de α , luego la matriz jacobiana evaluada en el equilibrio esta dada por:

$$A(\alpha) = A(0, \alpha) = \begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ 1 & \alpha \end{pmatrix} \quad (2.9)$$

Para encontrar los valores de esta matriz se tiene la ecuación característica $\lambda^2 - 2\alpha\lambda + \alpha^2 + 1 = 0$. Observe que se tienen los valores propios $\lambda_1 = \alpha + i$ y $\lambda_2 = \alpha - i$. Luego se puede decir que el origen es un punto de equilibrio linealmente estable si el parámetro α es negativo, e linealmente inestable si el parámetro α es positivo. Es claro, que cuando $\alpha = 0$ corresponde a una bifurcación Hopf. A continuación se estudiará la estabilidad del origen en este caso.

Para un mejor análisis es necesario convertir el sistema en un sistema equivalente en coordenadas polares. Primero se introduce la variable compleja

$$z = x_1 + ix_2, \quad \bar{z} = x_1 - ix_2, \quad |z|^2 = x_1^2 + x_2^2.$$

Esta variable satisface la ecuación diferencial

$$z' = x_1' + ix_2' = \alpha x_1 - x_2 - x_1(x_1^2 + x_2^2) + i[x_1 + \alpha x_2 - x_2(x_1^2 + x_2^2)]$$

o

$$z' = \alpha(x_1 + ix_2) + i(x_1 + ix_2) - (x_1 + ix_2)(x_1^2 + ix_2^2).$$

Luego el sistema se puede escribir de la siguiente manera

$$z' = (\alpha + i)z - z|z|^2.$$

Ahora se toma $z = \rho \exp(i\varphi)$, $\bar{z} = \rho \exp(-i\varphi)$, derivando se obtiene

$$z' = \rho' \exp(i\varphi) + \rho i \varphi' \exp(i\varphi),$$

luego

$$\rho' \exp(i\varphi) + \rho i \varphi' \exp(i\varphi) = \rho \exp(i\varphi)(\alpha + i - \rho^2),$$

cancelando $\exp(i\varphi)$ se tiene,

$$\rho' + \rho i \varphi' = \rho(\alpha + i - \rho^2),$$

entonces

$$\rho' = \rho(\alpha + i - \rho^2) - i\rho\varphi'$$

De esta forma el sistema en forma polar se escribe como

$$\begin{cases} \rho' = \rho(\alpha - \rho^2) \\ \varphi' = 1 \end{cases}$$

Este sistema tiene un punto de equilibrio $\rho = 0$ para todos los valores de α , dado que solo se considera $\rho \geq 0$. El equilibrio es estable si $\alpha < 0$, por otro lado es un punto de equilibrio no hiperbólico si $\alpha = 0$, y $\rho = 0$, por tanto no es linealmente estable. Si $\alpha > 0$ el origen es inestable, luego se concluye que $\alpha = 0$ es un valor de bifurcación. Mas aún, si $\alpha > 0$ existe otro punto de equilibrio que es $\rho = \sqrt{\alpha}$, el cual describe una órbita periódica que resulta ser estable, debido a que las órbitas tienden a ella cuando t tiende a infinito.

Esta es la bifurcación de Andronov-Hopf y se caracteriza por la aparición de un ciclo límite, cuando se varia el parámetro α . Existen dos tipos de bifurcación de Hopf, la *subcrítica* que es cuando el ciclo límite aparece para $\alpha < 0$, es decir, se encuentra

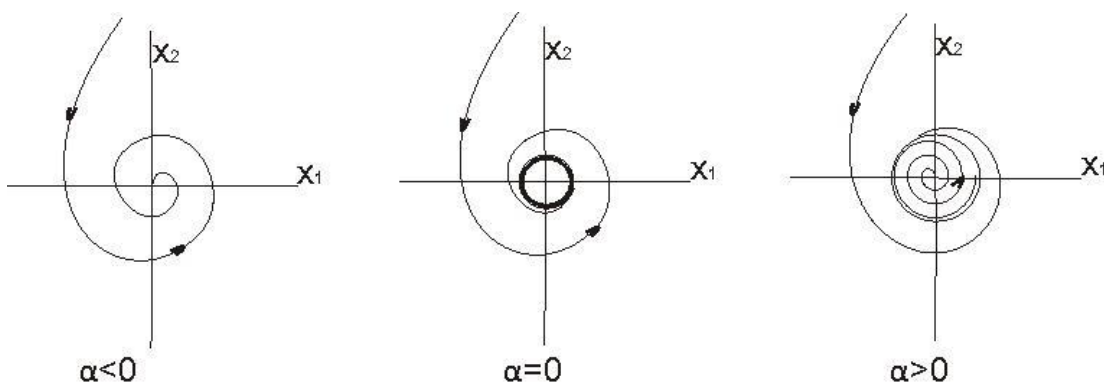


Figura 2.3: Diagrama de la bifurcación Hopf.

antes de la bifurcación; la otra es conocida como la *supercrítica* que es cuando el ciclo límite aparece después de la bifurcación, es decir, para $\alpha > 0$. Se puede concluir que de tener un punto de equilibrio se pasa a tener además de este punto de equilibrio, un ciclo límite estable.

El sistema anteriormente analizado hace referencia a una bifurcación de Hopf supercrítica.

2.5. Teorema de la bifurcación Hopf

Mostraremos que el sistema (2.7) es la forma normal topológica para un sistema bidimensional genérico exhibiendo una bifurcación Hopf.

Se considera el sistema

$$x' = f(x, \alpha); \quad x = (x_1, x_2)^T \in \mathbb{R}^2, \quad \alpha \in \mathbb{R},$$

donde f es una función suave, la cual tiene en $\alpha = 0$ el equilibrio $x = 0$ con valores propios $\lambda = \pm\omega_0 i$, $\omega_0 > 0$. Entonces $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ es un isomorfismo y por el teorema de la función implícita existe $\epsilon > 0$ suficientemente pequeño, tal que

$$\begin{aligned} x : (-\epsilon, \epsilon) &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ \alpha &\longmapsto x(\alpha) \end{aligned}$$

es una función suave y $f(x(\alpha), \alpha) = 0 ; \forall \alpha \in (-\epsilon, \epsilon)$.

Sin pérdida de generalidad se puede asumir que $x(\alpha) = 0$ para todo $\alpha \in (-\epsilon, \epsilon)$ (haciendo un shift de variables de estado dependiendo del parámetro).

Sea $|\alpha|$ suficientemente pequeño, entonces ahora expresamos f en series de Taylor

$$f(x, \alpha) = f(0, \alpha) + f_x(0, \alpha)x + \frac{f_{xx}(0, \alpha)x^2}{2} + \dots$$

Como $f(0, \alpha) = 0$, entonces

$$f(x, \alpha) = A(\alpha)x + F(x, \alpha),$$

donde $F(x, \alpha)$ es suave y contiene los términos de grado mayor o igual a dos.

La matriz jacobiana $A(\alpha)$ se puede expresar en forma general como

$$A(\alpha) = \begin{pmatrix} a(\alpha) & b(\alpha) \\ c(\alpha) & d(\alpha) \end{pmatrix}$$

donde a, b, c, d son funciones reales suaves en α . Los valores propios están dados por las raíces de la ecuación característica

$$\lambda^2 - \sigma\lambda + \Delta = 0,$$

donde

$$\sigma = \sigma(\alpha) = a(\alpha) + d(\alpha) = \text{Tr}A(\alpha),$$

y

$$\Delta = \Delta(\alpha) = a(\alpha)d(\alpha) - c(\alpha)b(\alpha) = \text{Det}A(\alpha).$$

Luego $\lambda_1 = \frac{1}{2}[\sigma(\alpha) + \sqrt{\sigma(\alpha)^2 - 4\Delta(\alpha)}]$ y $\lambda_2 = \frac{1}{2}[\sigma(\alpha) - \sqrt{\sigma(\alpha)^2 - 4\Delta(\alpha)}]$. La bifurcación Hopf implica que $\alpha = 0$, $\sigma(0) = 0$ y $\Delta(0) = \omega_0^2 > 0$.

Para un $|\alpha|$ suficientemente pequeño se puede introducir $\mu(\alpha) = \frac{1}{2}\sigma(\alpha)$, $\omega(\alpha) = \frac{1}{2}\sqrt{4\Delta(\alpha) - \sigma^2(\alpha)}$. Luego se obtiene $\lambda_1(\alpha) = \mu(\alpha)$, $\lambda_2(\alpha) = \overline{\lambda_1(\alpha)}$, donde $\lambda(\alpha) = \mu(\alpha) + i\omega(\alpha)$, dado que $\mu(0) = 0$, $\omega(0) = \omega_0 > 0$.

Ahora se demostraran algunas proposiciones que ayudan a la demostración del teorema de la bifurcación Hopf.

Proposición 1 *El sistema*

$$x' = A(\alpha)x + F(x, \alpha)$$

se puede escribirse para $|\alpha|$ suficientemente pequeño como

$$z' = \lambda(\alpha)z + g(z, \bar{z}, \alpha),$$

donde z es una variable compleja, $\lambda(\alpha)$ es un valor propio de $A(\alpha)$, y $g(z, \bar{z}, \alpha) = o(|z|^2)$ es una función suave de (z, \bar{z}, α) .

Demostración.

Sea $q(\alpha) = (q_1(\alpha), q_2(\alpha)) \in \mathbb{C}^2$ un vector propio de $A(\alpha)$ correspondiente al valor propio $\lambda(\alpha)$. Como $A(\alpha)q(\alpha) = \lambda(\alpha)q(\alpha)$, entonces también se tiene que $A(\alpha)\overline{q(\alpha)} = \overline{\lambda(\alpha)}\overline{q(\alpha)}$.

Tomemos $p(\alpha) = (p_1(\alpha), p_2(\alpha)) \in \mathbb{C}^2$ un vector propio de $A^T(\alpha)$, correspondiente al valor propio $\overline{\lambda(\alpha)}$, es decir $A^T(\alpha)p(\alpha) = \overline{\lambda(\alpha)}p(\alpha)$.

Es claro que $\lambda(\alpha)$ y $\overline{\lambda(\alpha)}$ son los valores propios de $A(\alpha)$ y también los son de $A^T(\alpha)$, porque $A(\alpha)$ es una matriz real y ambas matrices tienen la misma traza y el mismo determinante.

Tomemos $\langle p, q \rangle = \overline{p_1}q_1 + \overline{p_2}q_2$, donde $\langle \cdot, \cdot \rangle$ es el producto interno usual de \mathbb{C}^2 . Supongamos que $\langle p, q \rangle = 0$, entonces p es vector de A asociado a $\overline{\lambda}$. Así $A^T p = \overline{\lambda}p$ y $Ap = \overline{\lambda}p$, luego $(A + A^T)p = 2\overline{\lambda}p$ lo cual es una contradicción porque $(A + A^T)$ es simétrica y los valores propios de una matriz simétrica son reales. Entonces $\langle p, q \rangle \neq 0$, y por lo tanto podemos normalizar p respecto a q , esto es, $\langle p(\alpha), q(\alpha) \rangle = 1$.

Observe que cada $x \in \mathbb{R}^2$ puede ser representado para un $|\alpha|$ suficientemente pequeño como

$$x = zq(\alpha) + \bar{z}\bar{q}(\alpha) \quad \text{para algún } z \in \mathbb{C}$$

En efecto,

$$\langle p(\alpha), x \rangle = \langle p(\alpha), zq(\alpha) + \bar{z}\bar{q}(\alpha) \rangle = z\langle p(\alpha), q(\alpha) \rangle + \bar{z}\langle p(\alpha), \bar{q}(\alpha) \rangle$$

Dado que $\langle p, q \rangle = 1$ y $\langle p, \bar{q} \rangle = 0$

se tiene que

$z = \langle p(\alpha), x \rangle$, esto para cada $x \in \mathbb{R}^2$ y $|\alpha|$ suficientemente pequeño.

Ahora veamos que $\langle p(\alpha), \overline{q(\alpha)} \rangle = 0$.

$$\begin{aligned}\langle p(\alpha), \overline{q(\alpha)} \rangle &= \langle p(\alpha), \frac{1}{\lambda} A \overline{q(\alpha)} \rangle = \frac{1}{\lambda} \langle A^T p(\alpha), \overline{q(\alpha)} \rangle = \frac{1}{\lambda} \langle \overline{\lambda} p(\alpha), \overline{q(\alpha)} \rangle \\ &= \frac{\overline{\lambda}}{\lambda} \langle p(\alpha), \overline{q(\alpha)} \rangle = \frac{\lambda}{\lambda} \langle p(\alpha), \overline{q(\alpha)} \rangle,\end{aligned}$$

luego se tiene que

$$\left(1 - \frac{\lambda}{\overline{\lambda}}\right) \langle p(\alpha), \overline{q(\alpha)} \rangle = 0.$$

Como $\lambda(\alpha) \neq \overline{\lambda(\alpha)}$ para $|\alpha|$ suficientemente pequeño y $\omega(\alpha) > 0$, entonces

$$\langle p(\alpha), \overline{q(\alpha)} \rangle = 0.$$

Ahora derivando z se tiene que

$$z' = \langle p(\alpha), x' \rangle.$$

Como $x' = A(\alpha)x + F(x, \alpha)$, entonces

$$\begin{aligned}z' &= \langle p(\alpha), A(\alpha)[zq(\alpha) + \overline{z} \overline{q}(\alpha)] + F(zq(\alpha) + \overline{z} \overline{q}(\alpha), \alpha) \rangle \\ &= \langle p(\alpha), A(\alpha)[zq(\alpha) + \overline{z} \overline{q}(\alpha)] \rangle + \langle p(\alpha), F(zq(\alpha) + \overline{z} \overline{q}(\alpha), \alpha) \rangle \\ &= \langle p(\alpha), A(\alpha)zq(\alpha) \rangle + \langle p(\alpha), A(\alpha)\overline{z} \overline{q}(\alpha) \rangle + \langle p(\alpha), F(zq(\alpha) + \overline{z} \overline{q}(\alpha), \alpha) \rangle \\ &= A(\alpha)z \langle p(\alpha), q(\alpha) \rangle + A(\alpha)\overline{z} \langle p(\alpha), \overline{q}(\alpha) \rangle + \langle p(\alpha), F(zq(\alpha) + \overline{z} \overline{q}(\alpha), \alpha) \rangle.\end{aligned}$$

Dado que $\langle p(\alpha), \overline{q}(\alpha) \rangle = 0$, $\langle p(\alpha), q(\alpha) \rangle = 1$, entonces

$$\begin{aligned}z' &= \lambda(\alpha)z + \langle p(\alpha), F(zq(\alpha) + \overline{z} \overline{q}(\alpha), \alpha) \rangle \\ &= \lambda(\alpha)z + g(z, \overline{z}, \alpha),\end{aligned}$$

donde

$$g(z, \overline{z}, \alpha) = \langle p(\alpha), F(zq(\alpha) + \overline{z} \overline{q}(\alpha), \alpha) \rangle$$

De esta manera queda demostrada la Proposición 1. ■

Escribiendo g en una serie de Taylor en dos variables complejas (z, \overline{z}) para $|\alpha|$ fijo suficientemente pequeño se tiene que

$$g(z, \bar{z}, \alpha) = \sum_{k+l \geq 2} \frac{1}{k!l!} g_{kl}(\alpha) z^k \bar{z}^l,$$

donde

$$g_{kl}(\alpha) = \frac{\partial^{k+l}}{\partial z^k \partial \bar{z}^l} \langle p(\alpha), F(zq(\alpha) + \bar{z} \bar{q}(\alpha), \alpha) \rangle \Big|_{z=0}$$

para $k + l \geq 2$; $k, l = 0, 1, 2, \dots$

Observaciones

1. La ecuación $x = zq(\alpha) + \bar{z}q(\alpha)$ es una relación lineal entre (x_1, x_2) y $(\operatorname{Re}(z), \operatorname{Im}(z))$. Entonces al introducir z se puede ver como un cambio de variable invertible, $y = T(\alpha)x$ tomando $z = y_1 + iy_2$. Como se puede ver de $x = zq(\alpha) + \bar{z}q(\alpha)$, la componente (y_1, y_2) son las coordenadas de x en la base real de $A(\alpha)$ compuesta por $\{2\operatorname{Re}(q(\alpha)), -2\operatorname{Im}(q(\alpha))\}$. En esta base la matriz $A(\alpha)$ tiene forma canónica de Jordan real:

$$J(\alpha) = T(\alpha)A(\alpha)T^{-1}(\alpha) = \begin{pmatrix} \mu(\alpha) & -\omega(\alpha) \\ \omega(\alpha) & \mu(\alpha) \end{pmatrix}$$

2. Suponga que en $\alpha = 0$, la función $F(x, \alpha)$ se puede expresar de la forma

$$F(x, 0) = \frac{1}{2}B(x, x) + \frac{1}{6}C(x, x, x) + o(\|x\|^4),$$

donde $B(x, y)$ y $C(x, y, w)$ son funciones multilineales simétricas en \mathbb{R}^2 , esto es,

$$B : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$C : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2.$$

En coordenadas, si $F = (F_1, F_2)$ se tiene

$$DF(\xi, 0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1(\xi, 0)}{\partial \xi_1} & \frac{\partial F_1(\xi, 0)}{\partial \xi_2} \\ \frac{\partial F_2(\xi, 0)}{\partial \xi_1} & \frac{\partial F_2(\xi, 0)}{\partial \xi_2} \end{pmatrix}$$

y

$$D^2F(\xi, 0) = \left(\begin{array}{cc|cc} \frac{\partial^2 F_1(\xi, 0)}{\partial \xi_1 \partial \xi_1} & \frac{\partial^2 F_1(\xi, 0)}{\partial \xi_2 \partial \xi_1} & \frac{\partial^2 F_2(\xi, 0)}{\partial \xi_1 \partial \xi_1} & \frac{\partial^2 F_2(\xi, 0)}{\partial \xi_2 \partial \xi_1} \\ \frac{\partial^2 F_1(\xi, 0)}{\partial \xi_1 \partial \xi_2} & \frac{\partial^2 F_1(\xi, 0)}{\partial \xi_2 \partial \xi_2} & \frac{\partial^2 F_2(\xi, 0)}{\partial \xi_1 \partial \xi_2} & \frac{\partial^2 F_2(\xi, 0)}{\partial \xi_2 \partial \xi_2} \end{array} \right) = \\ (D^2F_1(\xi, 0) \mid D^2F_2(\xi, 0)).$$

Luego se tiene que

$$B_1(x, y) = (x_1, x_2) D^2F_1(\xi, 0) \Big|_{\xi=0} (y_1, y_2)^T$$

$$B_2(x, y) = (x_1, x_2) D^2F_2(\xi, 0) \Big|_{\xi=0} (y_1, y_2)^T,$$

entonces

$$B_i(x, y) = \sum_{j,k=1}^2 \frac{\partial^2 F_i(\xi, 0)}{\partial \xi_j \partial \xi_k} \Big|_{\xi=0} x_j y_k,$$

donde $i = 1, 2$

De la misma manera se tiene

$$C_i(x, y, w) = \sum_{j,k,l=1}^2 \frac{\partial^3 F_i(\xi, 0)}{\partial \xi_j \partial \xi_k \partial \xi_l} \Big|_{\xi=0} x_j y_k w_l,$$

donde $i = 1, 2$

Entonces

$$\begin{aligned} B(zq + \bar{z}\bar{q}, zq + \bar{z}\bar{q}) &= B(zq, zq) + 2B(zq, \bar{z}\bar{q}) + B(\bar{z}\bar{q}, \bar{z}\bar{q}) \\ &= z^2 B(q, q) + 2z\bar{z} B(q, \bar{q}) + \bar{z}^2 B(\bar{q}, \bar{q}), \end{aligned}$$

donde $q = q(0)$, $p = p(0)$. Así los coeficientes en la expansión de Taylor g_{kl} , $k+l=2$ del término cuadrático en $g(z, \bar{z}, 0)$ pueden ser expresado como:

$$g_{20} = \langle p, B(q, q) \rangle, \quad g_{11} = \langle p, B(q, \bar{q}) \rangle, \quad g_{02} = \langle p, B(\bar{q}, \bar{q}) \rangle.$$

De la misma forma,

$$g_{21} = \langle p, C(q, q, \bar{q}) \rangle.$$

3. La normalización de q es irrelevante en lo que sigue del trabajo. De hecho, suponga que q está normalizado $\langle q, q \rangle = 1$. Un vector $\tilde{q} = \gamma q$ es también un autovector de λ para todo $\gamma \neq 0$, pero con normalización $\langle \tilde{q}, \tilde{q} \rangle = |\gamma|^2$. Tomando $\tilde{p} = \frac{1}{\gamma} p$, entonces $\langle \tilde{p}, \tilde{q} \rangle = 1$ y los coeficientes en la expansión de Taylor de \tilde{g}_{kl} calculados usando \tilde{q}, \tilde{p} serán diferentes a los iniciales g_{kl} . Por ejemplo, se puede comprobar que

$$\tilde{g}_{20} = \gamma g_{20}, \quad \tilde{g}_{11} = \tilde{\gamma} g_{11}, \quad \tilde{g}_{02} = \frac{\tilde{\gamma}^2}{\gamma} g_{02}, \quad \tilde{g}_{21} = |\gamma|^2 g_{21}.$$

Sin embargo, este cambio puede ser neutralizado fácilmente por el escalamiento lineal de la variable $z = \frac{1}{\gamma} w$, con lo cual resulta la misma ecuación para w como antes.

Proposición 2 *La ecuación*

$$z' = \lambda z + \frac{g_{20}}{2} z^2 + g_{11} z \bar{z} + \frac{g_{02}}{2} \bar{z}^2 + o(|z|^3), \quad (2.10)$$

donde $\lambda = \lambda(\alpha) = \mu(\alpha) + i\omega(\alpha)$, $\mu(0) = 0$, $\omega(0) = \omega_0 > 0$, y $g_{ij} = g_{ij}(\alpha)$, puede ser transformada mediante el cambio invertible de coordenada compleja (que depende del parámetro)

$$z = z(w) = w + \frac{h_{20}}{2} w^2 + h_{11} w \bar{w} + \frac{h_{20}}{2} \bar{w}^2 \quad (2.11)$$

para todo $|\alpha|$ suficientemente pequeño, en la ecuación sin términos cuadráticos

$$w' = \lambda w + o(|w|^3).$$

Demostración.

El cambio inverso de coordenada (por el método de los coeficientes indeterminados) viene dado por:

$$w = w(z) = z - \frac{h_{20}}{2} z^2 - h_{11} z \bar{z} - \frac{h_{20}}{2} \bar{z}^2 + o(|z|^3).$$

En efecto, debe cumplirse que

$$z(w) = z(w(z)) = z$$

lo cual se verifica con las siguientes cuentas:

$$\begin{aligned} z(w) &= \left(z - \frac{h_{20}}{2} z^2 - h_{11} z \bar{z} - \frac{h_{20}}{2} \bar{z}^2 - \dots \right) + \frac{h_{20}}{2} \left(z - \frac{h_{20}}{2} z^2 - \dots \right)^2 \\ &\quad + h_{11} \left(z - \frac{h_{20}}{2} z^2 - \dots \right) \left(\bar{z} - \frac{\overline{h_{20}}}{2} \bar{z}^2 - \dots \right) + \frac{h_{20}}{2} \left(\bar{z} - \frac{\overline{h_{20}}}{2} \bar{z}^2 - \dots \right)^2 = z \end{aligned}$$

Ahora derivando w se tiene:

$$\begin{aligned} w' &= z' - h_{20} z z' - h_{11} (z' \bar{z} + z \bar{z}') - h_{02} \bar{z} \bar{z}' + \dots \\ &= z' - h_{20} z z' - h_{11} z' \bar{z} - h_{11} z \bar{z}' - h_{02} \bar{z} \bar{z}' + \dots \end{aligned}$$

Luego se sustituye z' y \bar{z}' utilizando la ecuación (2.10)

$$\begin{aligned} w' &= \lambda z + \frac{g_{20}}{2} z^2 + g_{11} z \bar{z} + \frac{g_{02}}{2} \bar{z}^2 + \dots - h_{20} z \left[\lambda z + \frac{g_{20}}{2} z^2 + g_{11} z \bar{z} + \frac{g_{02}}{2} \bar{z}^2 + \dots \right] \\ &\quad - h_{11} \bar{z} \left[\lambda z + \frac{g_{20}}{2} z^2 + g_{11} z \bar{z} + \frac{g_{02}}{2} \bar{z}^2 + \dots \right] - h_{11} z \left[\bar{\lambda} \bar{z} + \frac{\overline{g_{20}}}{2} \bar{z}^2 \right. \\ &\quad \left. + \overline{g_{11}} \bar{z} z + \frac{\overline{g_{02}}}{2} \bar{z}^2 + \dots \right] - h_{02} \bar{z} \left[\bar{\lambda} \bar{z} + \frac{\overline{g_{20}}}{2} \bar{z}^2 + \overline{g_{11}} \bar{z} z + \frac{\overline{g_{02}}}{2} \bar{z}^2 + \dots \right] + \dots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} w' &= \lambda z + \frac{g_{20}}{2} z^2 + g_{11} z \bar{z} + \frac{g_{02}}{2} \bar{z}^2 + \dots - \lambda h_{20} z^2 - h_{20} \frac{g_{20}}{2} z^3 + \dots - \lambda h_{11} z \bar{z} - h_{11} \frac{g_{20}}{2} z^2 \bar{z} \\ &\quad - h_{11} g_{11} z \bar{z}^2 + \dots - \bar{\lambda} h_{11} z \bar{z} - h_{11} \frac{\overline{g_{20}}}{2} z \bar{z}^2 - h_{11} \overline{g_{11}} z^2 \bar{z} - h_{11} \frac{\overline{g_{02}}}{2} z^3 + \dots - \bar{\lambda} h_{02} \bar{z}^2 - h_{02} \frac{\overline{g_{02}}}{2} \bar{z}^3 + \dots \end{aligned}$$

$$w' = \lambda z + \left(\frac{g_{20}}{2} - \lambda h_{20} \right) z^2 + (g_{11} - \lambda h_{11} - \bar{\lambda} h_{11}) z \bar{z} + \left(\frac{g_{20}}{2} - \bar{\lambda} h_{02} \right) \bar{z}^2 + o(|z|^3)$$

Ahora se reemplaza z y \bar{z} utilizando la ecuación (2.11) para obtener todo en función de w y \bar{w} .

$$w' = \lambda \left[w + \frac{h_{20}}{2} w^2 + h_{11} w \bar{w} + \frac{h_{20}}{2} \bar{w}^2 \right] + \left(\frac{g_{20}}{2} - \lambda h_{20} \right) \left[w + \frac{h_{20}}{2} w^2 + h_{11} w \bar{w} + \frac{h_{20}}{2} \bar{w}^2 \right]^2 +$$

$$(g_{11} - \lambda h_{11} - \bar{\lambda} h_{11}) \left[w + \frac{h_{20}}{2} w^2 + h_{11} w \bar{w} + \frac{h_{20}}{2} \bar{w}^2 \right] \left[\bar{w} + \frac{\bar{h}_{20}}{2} \bar{w}^2 + h_{11} \bar{w} w + \frac{\bar{h}_{20}}{2} w^2 \right] +$$

$$\left(\frac{g_{20}}{2} - \bar{\lambda} h_{02} \right) \left[\bar{w} + \frac{\bar{h}_{20}}{2} \bar{w}^2 + h_{11} \bar{w} w + \frac{\bar{h}_{20}}{2} w^2 \right]^2 + \dots$$

$$w' = \lambda w + \lambda \frac{h_{20}}{2} w^2 + \lambda h_{11} w \bar{w} + \lambda \frac{h_{02}}{2} \bar{w}^2$$

$$+ \left(\frac{g_{20}}{2} - \lambda h_{20} \right) w^2 + (g_{11} - \lambda h_{11} - \bar{\lambda} h_{11}) w \bar{w}$$

$$+ \left(\frac{g_{20}}{2} - \bar{\lambda} h_{02} \right) \bar{w}^2 + o(|w|^3)$$

$$w' = \lambda w + \left(\frac{g_{20}}{2} - \lambda \frac{h_{20}}{2} \right) w^2 + (g_{11} - \bar{\lambda} h_{11}) w \bar{w} + \left(\frac{g_{20}}{2} - \bar{\lambda} h_{02} + \lambda \frac{h_{02}}{2} \right) \bar{w}^2 + o(|w|^3)$$

$$= \lambda w + \frac{1}{2} (g_{20} - \lambda h_{20}) w^2 + (g_{11} - \bar{\lambda} h_{11}) w \bar{w} + \frac{1}{2} (g_{20} - h_{20}(2\bar{\lambda} - \lambda)) \bar{w}^2 + o(|w|^3).$$

Si tomamos

$$h_{20} = \frac{g_{20}}{\lambda}, \quad h_{11} = \frac{g_{11}}{\lambda}, \quad h_{02} = \frac{g_{20}}{2\bar{\lambda} - \lambda},$$

con estas igualdades se cancelan los términos cuadráticos. Observe que $\lambda(0) = \pm \omega_0 i \neq 0$, entonces para un $|\alpha|$ suficientemente pequeño, $\bar{\lambda}(\alpha) \neq 0$, $\lambda(\alpha) \neq 0$ y $2\bar{\lambda} - \lambda \neq 0$, luego estas funciones están bien definidas. Entonces se puede concluir que (2.10) puede ser transformado en la forma:

$$w' = \lambda w + o(|w|^3)$$

con lo cual se concluye la demostración. ■

Proposición 3 *La ecuación*

$$z' = \lambda z + \frac{g_{30}}{6} z^3 + \frac{g_{21}}{2} z^2 \bar{z} + \frac{g_{12}}{2} z \bar{z}^2 + \frac{g_{03}}{6} \bar{z}^3 + o(|z|^4) \quad (2.12)$$

donde $\lambda = \lambda(\alpha) = \mu(\alpha) + i\omega(\alpha)$, $\mu(0) = 0$, $\omega(0) = \omega_0 > 0$, y $g_{ij} = g_{ij}(\alpha)$, puede ser transformada mediante el cambio invertible de coordenada compleja (que dependen del parámetro)

$$z = w + \frac{h_{30}}{6}w^3 + \frac{h_{21}}{2}w^2\bar{w} + \frac{h_{12}}{2}w\bar{w}^2 + \frac{h_{03}}{6}\bar{w}^3$$

para un $|\alpha|$ suficientemente pequeño, en la ecuación

$$w' = \lambda w + c_1 w^2 \bar{w} + o(|w|^4),$$

donde

$$c_1 = c_1(\alpha).$$

Demostración.

La transformación inversa por el método de los coeficientes indeterminados es

$$w = z - \frac{h_{30}}{6}z^3 - \frac{h_{21}}{2}z^2\bar{z} - \frac{h_{12}}{2}z\bar{z}^2 - \frac{h_{03}}{6}\bar{z}^3 + o(|z|^4)$$

Ahora derivando w se tiene:

$$\begin{aligned} w' &= z' - \frac{h_{30}}{2}z^2z' - \frac{h_{21}}{2}(2z\bar{z}z' + z^2\bar{z}') - \frac{h_{12}}{2}(z'\bar{z}^2 + 2z\bar{z}\bar{z}') - \frac{h_{03}}{2}\bar{z}^2\bar{z}' + \dots \\ &= z' - \frac{h_{30}}{2}z^2z' - h_{21}z\bar{z}z' - \frac{h_{21}}{2}z^2\bar{z}' - \frac{h_{12}}{2}z'\bar{z}^2 - h_{12}z\bar{z}\bar{z}' - \frac{h_{03}}{2}\bar{z}^2\bar{z}' + \dots \end{aligned}$$

Remplazamos z' y \bar{z}' utilizando la ecuación (2.12)

$$\begin{aligned} w' &= \lambda z + \frac{g_{30}}{6}z^3 + \frac{g_{21}}{2}z^2\bar{z} + \frac{g_{12}}{2}z\bar{z}^2 + \frac{g_{03}}{6}\bar{z}^3 + \dots \\ &\quad - \frac{h_{30}}{2}z^2 \left[\lambda z + \frac{g_{30}}{6}z^3 + \frac{g_{21}}{2}z^2\bar{z} + \frac{g_{12}}{2}z\bar{z}^2 + \frac{g_{03}}{6}\bar{z}^3 + \dots \right] \\ &\quad - h_{21}z\bar{z} \left[\lambda z + \frac{g_{30}}{6}z^3 + \frac{g_{21}}{2}z^2\bar{z} + \frac{g_{12}}{2}z\bar{z}^2 + \frac{g_{03}}{6}\bar{z}^3 + \dots \right] \\ &\quad - \frac{h_{21}}{2}z^2 \left[\bar{\lambda}\bar{z} + \frac{\bar{g}_{30}}{6}\bar{z}^3 + \frac{\bar{g}_{21}}{2}\bar{z}^2z + \frac{\bar{g}_{12}}{2}\bar{z}z^2 + \frac{\bar{g}_{03}}{6}z^3 + \dots \right] \\ &\quad - \frac{h_{12}}{2}\bar{z}^2 \left[\lambda z + \frac{g_{30}}{6}z^3 + \frac{g_{21}}{2}z^2\bar{z} + \frac{g_{12}}{2}z\bar{z}^2 + \frac{g_{03}}{6}\bar{z}^3 + \dots \right] \\ &\quad - h_{12}z\bar{z} \left[\bar{\lambda}\bar{z} + \frac{\bar{g}_{30}}{6}\bar{z}^3 + \frac{\bar{g}_{21}}{2}\bar{z}^2z + \frac{\bar{g}_{12}}{2}\bar{z}z^2 + \frac{\bar{g}_{03}}{6}z^3 + \dots \right] \\ &\quad - \frac{h_{03}}{2}\bar{z}^2 \left[\bar{\lambda}\bar{z} + \frac{\bar{g}_{30}}{6}\bar{z}^3 + \frac{\bar{g}_{21}}{2}\bar{z}^2z + \frac{\bar{g}_{12}}{2}\bar{z}z^2 + \frac{\bar{g}_{03}}{6}z^3 + \dots \right] + \dots \end{aligned}$$

Ahora tomamos los términos lineales y cúbicos que son de nuestro interés,

$$w' = \lambda z + \frac{g_{30}}{6} z^3 + \frac{g_{21}}{2} z^2 \bar{z} + \frac{g_{12}}{2} z \bar{z}^2 + \frac{g_{03}}{6} \bar{z}^3 + \dots - \lambda \frac{h_{30}}{2} z^3 - \dots - \lambda h_{21} z^2 \bar{z} - \dots - \bar{\lambda} \frac{h_{21}}{2} z^2 \bar{z} - \dots \\ - \lambda \frac{h_{12}}{2} z \bar{z}^2 - \dots - \bar{\lambda} h_{12} z \bar{z}^2 - \dots - \bar{\lambda} \frac{h_{03}}{2} \bar{z}^3 - \dots$$

Luego se suman términos semejantes

$$w' = \lambda z + \left(\frac{g_{30}}{6} - \lambda \frac{h_{30}}{2} \right) z^3 + \left(\frac{g_{21}}{2} - \lambda h_{21} - \bar{\lambda} \frac{h_{21}}{2} \right) z^2 \bar{z} \\ + \left(\frac{g_{12}}{2} - \lambda \frac{h_{12}}{2} - \bar{\lambda} h_{12} \right) z \bar{z}^2 + \left(\frac{g_{03}}{6} - \bar{\lambda} h_{03} \right) \bar{z}^3 + \dots$$

Ahora se escribe todo en función de w usando el cambio de coordenada compleja,

$$w' = \lambda \left(w + \frac{h_{30}}{6} w^3 + \frac{h_{21}}{2} w^2 \bar{w} + \frac{h_{12}}{2} w \bar{w}^2 + \frac{h_{03}}{6} \bar{w}^3 \right) \\ + \left(\frac{g_{30}}{6} - \lambda \frac{h_{30}}{2} \right) (w + \dots)^3 + \left(\frac{g_{21}}{2} - \lambda h_{21} - \bar{\lambda} \frac{h_{21}}{2} \right) (w + \dots)^2 (\bar{w} + \dots) \\ + \left(\frac{g_{12}}{2} - \lambda \frac{h_{12}}{2} - \bar{\lambda} h_{12} \right) (w + \dots) (\bar{w} + \dots)^2 + \left(\frac{g_{03}}{6} - \bar{\lambda} h_{03} \right) (\bar{w} + \dots)^3 + \dots$$

$$w' = \lambda w + \lambda \frac{h_{30}}{6} w^3 + \lambda \frac{h_{21}}{2} w^2 \bar{w} + \lambda \frac{h_{12}}{2} w \bar{w}^2 + \lambda \frac{h_{03}}{6} \bar{w}^3 + \left(\frac{g_{30}}{6} - \lambda \frac{h_{30}}{2} \right) w^3 + \\ \left(\frac{g_{21}}{2} - \lambda h_{21} - \bar{\lambda} \frac{h_{21}}{2} \right) w^2 \bar{w} + \left(\frac{g_{12}}{2} - \lambda \frac{h_{12}}{2} - \bar{\lambda} h_{12} \right) w \bar{w}^2 + \left(\frac{g_{03}}{6} - \bar{\lambda} h_{03} \right) \bar{w}^3 + \dots$$

Y por último se suman los términos semejantes,

$$w' = \lambda w + \left(\frac{g_{30}}{6} - \lambda \frac{h_{30}}{3} \right) w^3 + \left(\frac{g_{21}}{2} - \lambda \frac{h_{21}}{2} - \bar{\lambda} \frac{h_{21}}{2} \right) w^2 \bar{w} + \\ \left(\frac{g_{12}}{2} - \bar{\lambda} h_{12} \right) w \bar{w}^2 + \left(\frac{g_{03}}{6} - \bar{\lambda} \frac{h_{30}}{2} + \lambda \frac{h_{03}}{6} \right) \bar{w}^3 + o(|w|^4)$$

$$w' = \lambda w + \frac{1}{6} (g_{30} - 2\lambda h_{30}) w^3 + \frac{1}{2} (g_{21} - (\lambda + \bar{\lambda}) h_{21}) w^2 \bar{w} + \frac{1}{2} (g_{12} - 2\bar{\lambda} h_{12}) w \bar{w}^2 + \frac{1}{6} (g_{03} + (\lambda - 3\bar{\lambda}) h_{30}) w^3 + o(|w|^4)$$

Sin problemas podemos tomar

$$h_{30} = \frac{g_{30}}{2\lambda}, \quad h_{12} = \frac{g_{12}}{2\bar{\lambda}}, \quad h_{03} = \frac{g_{03}}{3\bar{\lambda} - \lambda}$$

dado que las expresiones 2λ , $2\bar{\lambda}$, y $3\bar{\lambda} - \lambda$ son distintas de cero para $|\alpha|$ suficientemente pequeño. Como $\lambda(0) + \bar{\lambda}(0) = 0$ no se puede tomar $h_{21} = \frac{g_{21}}{\lambda + \bar{\lambda}}$, así esta expresión tenga sentido para $\alpha \neq 0$ pequeño. Entonces tome $h_{21} = 0$ y defina

$$c_1 = c_1(\alpha) = \frac{g_{21}}{2}.$$

Por lo tanto,

$$w' = \lambda w + c_1 w^2 \bar{w} + o(|w|^4)$$

y la demostración queda completa. ■

El término $w^2 \bar{w}$ es llamado un *término resonante* y el mismo para $z^2 \bar{z}$.

Proposición 4 (Forma normal para la bifurcación Hopf) *La ecuación*

$$z' = z\lambda + \sum_{2 \leq k+l \leq 3} \frac{1}{k!l!} g_{kl}(\alpha) z^k \bar{z}^l + o(|w|^4),$$

donde $\lambda = \lambda(\alpha) = \mu(\alpha) + i\omega(\alpha)$, $\mu(0) = 0$, $\omega(0) = \omega_0 > 0$, $g_{ij} = g_{ij}(\alpha)$, puede ser transformada mediante el cambio invertible de coordenada compleja (que dependen del parámetro),

$$z = w + \frac{h_{20}}{2} w^2 + h_{11} w \bar{w} + \frac{h_{02}}{2} \bar{w}^2 + \frac{h_{30}}{6} w^3 + \frac{h_{12}}{2} w \bar{w}^2 + \frac{h_{03}}{6} \bar{w}^3,$$

para $|\alpha|$ suficientemente pequeño, en la ecuación con solo el término resonante cubico

$$w' = \lambda w + c_1 w^2 \bar{w} + o(|w|^4),$$

donde $c_1 = c_1(\alpha)$.

Demostración. Esta proposición es consecuencia de las proposiciones anteriores, donde se eliminan los términos cuadráticos y los términos cúbicos, w^3 , \bar{w}^3 , $w\bar{w}^2$ excepto el resonante $w^2\bar{w}$. ■

El coeficiente $c_1(\alpha)$ es importante para determinar el tipo de bifurcación Hopf. Por lo tanto, vamos a presentar una expresión explícita en coordenadas para su cálculo.

Retomemos las siguientes tres ecuaciones,

$$z' = \lambda z + \frac{g_{20}}{2} z^2 + g_{11} z \bar{z} + \frac{g_{02}}{2} \bar{z}^2 + o(|z|^3), \quad (1)$$

$$z = w + \frac{h_{20}}{2} w^2 + h_{11} w \bar{w} + \frac{h_{20}}{2} \bar{w}^2, \quad (2)$$

$$w' = \lambda w + c_1 w^2 \bar{w} + o(|w|^4). \quad (3)$$

Existen dos formas para obtener la derivada de z en función de w . Una forma es derivar la ecuación (2), y remplazar w' con ayuda de la ecuación (3), y la otra forma es remplazar la ecuación (2) en la ecuación (1), y luego igualamos los coeficientes correspondientes de $w^2\bar{w}$ para poder obtener $c_1(\alpha)$.

Entonces derivando la ecuación (2) se obtiene

$$z' = w' + h_{20} w w' + h_{11} (w' \bar{w} + w \bar{w}') + h_{02} \bar{w} \bar{w}'.$$

Ahora, si remplazamos w' dada en la ecuación (3) se tiene

$$\begin{aligned} z' &= \lambda w + c_1 w^2 \bar{w} + \dots + h_{20} w (\lambda w + c_1 w^2 \bar{w} + \dots) + \\ & h_{11} [(\lambda w + c_1 w^2 \bar{w} + \dots) \bar{w} + w (\bar{\lambda} \bar{w} + \bar{c}_1 w \bar{w}^2 + \dots)] + h_{02} \bar{w} (\bar{\lambda} \bar{w} + \bar{c}_1 w \bar{w}^2 + \dots) \end{aligned}$$

y el coeficiente de $w^2\bar{w}$ es $c_1 = c_1(\alpha)$.

Por otro lado, remplazamos la ecuación (2) en la ecuación (1)

$$\begin{aligned} z' &= \lambda \left(w + \frac{h_{20}}{2} w^2 + h_{11} w \bar{w} + \frac{h_{20}}{2} \bar{w}^2 \right) + \frac{g_{20}}{2} \left(w + \frac{h_{20}}{2} w^2 + h_{11} w \bar{w} + \frac{h_{20}}{2} \bar{w}^2 \right)^2 + \\ & g_{11} \left(w + \frac{h_{20}}{2} w^2 + h_{11} w \bar{w} + \frac{h_{20}}{2} \bar{w}^2 \right) \left(\bar{w} + \frac{\bar{h}_{20}}{2} \bar{w}^2 + \bar{h}_{11} \bar{w} w + \frac{\bar{h}_{20}}{2} w^2 \right) \\ & + \frac{g_{02}}{2} \left(\bar{w} + \frac{\bar{h}_{20}}{2} \bar{w}^2 + \bar{h}_{11} \bar{w} w + \frac{\bar{h}_{20}}{2} w^2 \right)^2 + \dots \end{aligned}$$

Luego se toman los coeficientes de $w^2\bar{w}$ que son:

$$\frac{g_{20}}{2}(2h_{11}) + g_{11} \left(\frac{h_{20}}{2} + \bar{h}_{11} \right) + \frac{g_{20}}{2} (\bar{h}_{02}) + \frac{g_{21}}{2}$$

Como

$$\bar{h}_{02} = \frac{\bar{g}_{02}}{2\lambda - \bar{\lambda}},$$

entonces se tiene que

$$\frac{g_{02}\bar{h}_{02}}{2} = \frac{(g_{02})^2}{2(2\lambda - \bar{\lambda})}.$$

También se tiene que

$$\bar{h}_{11} = \frac{\bar{g}_{11}}{\lambda}, \quad h_{20} = \frac{g_{20}}{\lambda}, \quad \text{y} \quad h_{11} = \frac{g_{11}}{\lambda}.$$

Reemplazando estas expresiones en los coeficientes de $w^2\bar{w}$, agrupando términos e igualando al coeficiente anterior $c_1(\alpha)$ se obtiene:

$$c_1(\alpha) = \frac{g_{20}(\alpha)g_{11}(\alpha)[2\lambda(\alpha) + \bar{\lambda}(\alpha)]}{2|\lambda(\alpha)|^2} + \frac{|g_{11}(\alpha)|^2}{\lambda(\alpha)} + \frac{|g_{02}(\alpha)|^2}{2(2\lambda(\alpha) - \bar{\lambda}(\alpha))} + \frac{g_{21}(\alpha)}{2}.$$

Entonces para $\alpha = 0$ se obtiene:

$$c_1(0) = \frac{g_{20}(0)g_{11}(0)[2\omega_0 i - \omega_0 i]}{2\omega_0^2} + \frac{|g_{11}(0)|^2}{\omega_0 i} + \frac{|g_{02}(0)|^2}{2(2\omega_0 i + \omega_0 i)} + \frac{g_{21}(0)}{2},$$

$$c_1(0) = \frac{i}{2\omega_0} \left[g_{20}(0)g_{11}(0) - 2|g_{11}(0)|^2 - \frac{1}{3}|g_{02}(0)|^2 \right] + \frac{g_{21}(0)}{2}. \quad (2.13)$$

Proposición 5 *Considere la ecuación*

$$\frac{dw}{dt} = (\mu(\alpha) + i\omega(\alpha))w + c_1(\alpha)w|w|^2 + o(|w|^4)$$

donde $\mu(0) = 0$, $\omega(0) = \omega_0 > 0$. Suponga que $\mu'(0) \neq 0$ y $Re(c_1(0)) \neq 0$. Entonces la ecuación puede ser transformada mediante un cambio de coordenada (dependiendo

del parámetro) y una parametrización no lineal del tiempo, en una ecuación de la forma

$$\frac{du}{d\theta} = (\beta + i)u + su|u|^2 + o(|u|^4),$$

donde u es una nueva coordenada compleja, θ es el nuevo tiempo, β es el nuevo parámetro, y $s = \text{signo}[Re(c_1(0))] = \pm 1$.

Demostración.

1. Escalamiento lineal del tiempo.

Introducimos el nuevo tiempo de la forma $\tau = \omega(\alpha)t$. Como $\omega(\alpha) > 0$ para $|\alpha|$ suficientemente pequeño, entonces se preserva la dirección del tiempo.

$$\frac{dw}{d\tau} = \frac{dw}{dt} \frac{dt}{d\tau} = \frac{dw}{dt} \frac{1}{\frac{d\tau}{dt}} = \frac{1}{\omega(\alpha)} \frac{dw}{dt}.$$

Remplazando la derivada de w respecto t se obtiene:

$$\frac{dw}{d\tau} = \left(\frac{\mu(\alpha)}{\omega(\alpha)} + i \frac{\omega(\alpha)}{\omega(\alpha)} \right) w + \frac{c_1(\alpha)}{\omega(\alpha)} w|w|^2 + o(|w|^4),$$

$$\frac{dw}{d\tau} = (\beta + i)w + d_1(\beta)w|w|^2 + o(|w|^4),$$

con

$$\beta = \beta(\alpha) = \frac{\mu(\alpha)}{\omega(\alpha)}, d_1(\beta) = \frac{c_1(\alpha)}{\omega(\alpha)}$$

localmente $\alpha = \alpha(\beta)$, porque $\beta(0) = 0$ y $\beta'(0) = \frac{\mu'(0)}{\omega_0} \neq 0$. Luego por teorema de la función inversa se tiene

$$d_1(\beta) = d_1(\alpha(\beta)) = \frac{c_1(\alpha(\beta))}{\omega(\alpha(\beta))}.$$

ahora se obtiene

$$\frac{dw}{d\tau} = (\beta + i)w + d_1(\beta)w|w|^2 + o(|w|^4)$$

2. Reparametrización no lineal del tiempo.

A lo largo de la órbita se introduce el nuevo tiempo: $\theta = \theta(\tau, \beta)$, donde

$$d\theta = (1 + e_1(\beta)|w|^2)d\tau, \text{ con } e_1(\beta) = \text{Im}(d_1(\beta)).$$

Este cambio de tiempo es una transformación próxima a la identidad en una vecindad pequeña del origen ($|w|^2 \approx 0$).

Así,

$$\frac{dw}{d\theta} = \frac{dw}{d\tau} \frac{d\tau}{d\theta}.$$

Por lo tanto,

$$\frac{dw}{d\theta} = [(\beta + i)w + d_1(\beta)w|w|^2 + o(|w|^4)] [1 + e_1(\beta)|w|^2]^{-1}.$$

Como

$$\frac{1}{1 + e_1(\beta)|w|^2} = 1 - e_1(\beta)|w|^2 + (e_1(\beta)|w|^2)^2 - \dots$$

entonces,

$$\frac{dw}{d\theta} = [(\beta + i)w + d_1(\beta)w|w|^2 + o(|w|^4)][1 - e_1(\beta)|w|^2 + (e_1(\beta)|w|^2)^2 - \dots],$$

Distribuimos términos

$$\begin{aligned} \frac{dw}{d\theta} = & (\beta + i)w + d_1(\beta)w|w|^2 + o(|w|^4) - \\ & [(\beta + i)w + d_1(\beta)w|w|^2 + o(|w|^4)] [e_1(\beta)|w|^2] + o(|w|^4), \end{aligned}$$

Sumando términos semejantes se obtiene

$$\frac{dw}{d\theta} = (\beta + i)w + (d_1(\beta) - \beta \text{Im}(d_1(\beta)) - ie_1(\beta))w|w|^2 + o(|w|^4).$$

Como $d_1(\beta) = \text{Re}(d_1(\beta)) + i\text{Im}(d_1(\beta))$, luego $d_1(\beta) - i\text{Im}(d_1(\beta)) = \text{Re}(d_1(\beta))$, entonces

$$\frac{dw}{d\theta} = (\beta + i)w + (\text{Re}(d_1(\beta)) - \beta \text{Im}(d_1(\beta)))w|w|^2 + o(|w|^4)$$

$$\frac{dw}{d\theta} = (\beta + i)w + l_1(\beta)w|w|^2 + o(|w|^4),$$

donde $l_1(\beta) = \operatorname{Re}(d_1(\beta)) - \beta \operatorname{Im}(d_1(\beta))$ es un número real que se conoce como el *primer coeficiente de Lyapunov*. Además,

$$l_1(0) = \frac{\operatorname{Re}(c_1(0))}{\omega(0)}$$

3. Escalamiento lineal de coordenadas.

Finalmente se introduce una nueva variable compleja u

$$w = \frac{u}{\sqrt{|l_1(\beta)|}}$$

Por hipótesis $\operatorname{Re}(c_1(0)) \neq 0$, entonces $l_1(0) \neq 0$. Luego $l_1(\beta) \neq 0$ en una vecindad de 0 en β .

$$\frac{du}{d\theta} = \sqrt{|l_1(\beta)|} \frac{dw}{d\theta}$$

$$\sqrt{|l_1(\beta)|} \frac{dw}{d\theta} = \sqrt{|l_1(\beta)|} \left[(\beta + i) \frac{u}{\sqrt{|l_1(\beta)|}} + \left(\frac{u}{\sqrt{|l_1(\beta)|}} \frac{|u|^2}{|l_1(\beta)|} \right) l_1(\beta) + o(|w|^4) \right],$$

luego se tiene

$$\frac{du}{d\theta} = (\beta + i)u + su|u|^2 + o(|u|^4)$$

donde

$$s = \frac{l_1(\beta)}{|l_1(\beta)|} = \pm 1$$

con lo cual se termina la demostración. ■

Ahora se enuncia el teorema de la bifurcación Hopf.

Teorema 6 *Suponga un sistema bidimensional*

$$x' = f(x, \alpha); \quad x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2, \alpha \in \mathbb{R}$$

con f función suave, tiene para todo $|\alpha|$ suficientemente pequeño el equilibrio $x = 0$ con valores propios

$$\lambda_{1,2} = \mu(\alpha) \pm i\omega(\alpha),$$

donde $\mu(0) = 0$, $\omega(0) = \omega_0 > 0$.

Asuma que se tienen las siguientes condiciones genéricas:

1. $\mu'(0) \neq 0$
2. $l_1(0) \neq 0$, donde l_1 es el primer coeficiente de Lyapunov.

Entonces existe un cambio invertible de coordenadas y parámetros, y una reparametrización del tiempo que transforma el sistema en

$$\begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta & -1 \\ 1 & \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \pm (x_1^2 + x_2^2) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + o(\|x\|^4)$$

Demostración. La demostración de este teorema es consecuencia de las proposiciones anteriores. ■

A continuación se analizará el siguiente lema, que es importante para obtener la forma normal de la bifurcación Hopf.

Lema 2 *El sistema*

$$z' = (\alpha + i)z - z|z|^2 + o(|z|^4) \quad (2.14)$$

es localmente topológicamente equivalente cerca al origen al sistema

$$z' = (\alpha + i)z - z|z|^2 \quad (2.15)$$

Demostración. Primero se demuestra que el sistema (2.14) tiene una órbita periódica. Escribamos el sistema en coordenadas polares.

Sea $z = \rho \exp(i\varphi)$, $\bar{z} = \rho \exp(-i\varphi)$ y $|z|^2 = z\bar{z}$. Entonces $z' = \rho' \exp(i\varphi) + \rho i\varphi' \exp(i\varphi)$.

Ahora se sustituye z y z' en la ecuación (2.14)

$$\rho' \exp(i\varphi) + i\rho\varphi' \exp(i\varphi) = (\alpha + i)\rho \exp(i\varphi) - \rho \exp(i\varphi)\rho^2 + \operatorname{Re}(\phi(\rho, \varphi)) + \operatorname{Im}(\phi(\rho, \varphi)),$$

donde $\phi(\rho, \varphi) = \operatorname{Re}(\phi(\rho, \varphi)) + \operatorname{Im}(\phi(\rho, \varphi))$ es una función suave que recoge todos los términos mayores e iguales a cuatro. Por lo tanto,

$$\rho' + i\rho\varphi' = (\alpha + i)\rho - \rho^3 + \frac{\operatorname{Re}(\phi(\rho, \varphi))}{\exp(i\varphi)} + \frac{\operatorname{Im}(\phi(\rho, \varphi))}{\exp(i\varphi)}.$$

Luego tenemos que $\rho' = \rho(\alpha - \rho^2) + \frac{\operatorname{Re}(\phi(\rho, \varphi))}{\exp(i\varphi)}$, y $\rho\varphi' = \rho + \frac{\operatorname{Im}(\phi(\rho, \varphi))}{\exp(i\varphi)}$, entonces

$$\varphi' = 1 + \frac{\operatorname{Im}(\phi(\rho, \varphi))}{\rho \exp(i\varphi)}.$$

Sean $\psi = \frac{\operatorname{Im}(\phi(\rho, \varphi))}{\rho \exp(i\varphi)}$ una función suave que recoge todos los términos $O(|\rho|^3)$, y $\theta = \frac{\operatorname{Re}(\phi(\rho, \varphi))}{\exp(i\varphi)}$ una función suave que recoge todos los términos $O(|\rho|^3)$. Entonces se llega al sistema

$$\begin{cases} \rho' = \rho(\alpha - \rho^2) + \theta \\ \varphi' = 1 + \psi. \end{cases}$$

Dado que

$$\frac{1}{1 + \psi} = 1 - \psi + \psi^2 - \psi^3 + \dots,$$

entonces

$$\begin{aligned} \frac{\rho(\alpha - \rho^2) + \theta}{1 + \psi} &= [\rho(\alpha - \rho^2) + \theta] [1 - \psi + \psi^2 - \psi^3 + \dots] = \\ &\rho(\alpha - \rho^2) + \theta - (\rho(\alpha - \rho^2) + \theta)(\psi + \psi^2 - \psi^3 + \dots) \end{aligned}$$

Sea

$$R(\rho, \varphi) = \theta - (\rho(\alpha - \rho^2) + \theta)(\psi + \psi^2 - \psi^3 + \dots), \quad R(\rho, \varphi) = O(|\rho|^4).$$

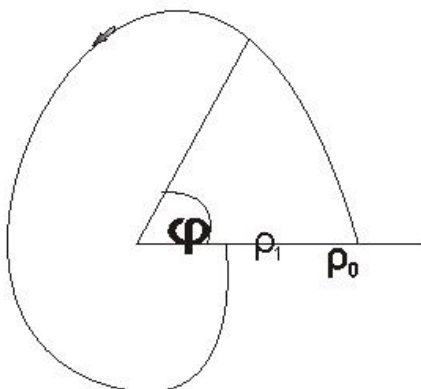


Figura 2.4: Órbita del sistema.

Entonces una órbita del sistema que inicia en $(\rho, \varphi) = (\rho_0, 0)$ (ver Figura 2.4) tiene la siguiente representación $\rho = \rho(\varphi; \rho_0)$, $\rho_0 = \rho(0; \rho_0)$, donde ρ satisface la siguiente ecuación

$$\frac{d\rho}{d\varphi} = \frac{\rho(\alpha - \rho^2) + \theta}{1 + \psi} = \rho(\alpha - \rho^2) + R(\rho, \varphi). \quad (2.16)$$

Ahora se expresa $\rho = \rho(\varphi, \rho_0)$ en series de Taylor

$$\rho = u_1(\varphi)\rho_0 + u_2(\varphi)\rho_0^2 + u_3(\varphi)\rho_0^3 + \dots \quad (2.17)$$

Derivando ρ se tiene

$$\rho' = u_1' \rho_0 + u_2' \rho_0^2 + u_3' \rho_0^3 + \dots$$

Ahora sustituyendo ρ y ρ' en (2.16)

$$u_1' \rho_0 + u_2' \rho_0^2 + u_3' \rho_0^3 + \dots = (u_1 \rho_0 + u_2 \rho_0^2 + u_3 \rho_0^3)(\alpha - (u_1 \rho_0 + u_2 \rho_0^2 + u_3 \rho_0^3)^2) + \dots$$

Igualando las respectivas potencias de ρ_0 , se obtiene las siguientes ecuaciones diferenciales

1. $u_1' = \alpha u_1, u_1(0) = 1$
2. $u_2' = \alpha u_2, u_2(0) = 0$
3. $u_3' = u_1^3 + \alpha u_3, u_3(0) = 0$

Resolviendo las ecuaciones se tienen las siguientes soluciones:

$$u_1(\varphi) = \exp(\alpha\varphi), \quad u_2(\varphi) = 0$$

$$u_3(\varphi) = \exp(\alpha\varphi) \frac{1 - \exp(\alpha\varphi)}{2\alpha}$$

Remplazando las u_i , $i = 1, 2, 3$ en la ecuación de la expansión de Taylor se obtiene

$$\rho = \exp(\alpha\varphi)\rho_0 - \exp(\alpha\varphi) \left(\frac{1 - \exp(\alpha\varphi)}{2\alpha} \right) \rho_0^3 + \dots$$

Esta función representa el valor de ρ en un ángulo φ , cuando la órbita tiene origen en $\rho = \rho_0$, $\varphi = 0$. Si se toma $\varphi = 2\pi$, $\rho_1(2\pi, \rho_0)$ tendría una órbita que parte del eje $\varphi = 0$ con un radio $\rho = \rho_0$ y que regresa a este mismo eje con un radio $\rho = \rho_1$

$$\rho_1 = \exp(2\pi\alpha)\rho_0 - \exp(2\pi\alpha)(2\pi + o(\alpha))\rho_0^3 + \dots$$

La función ρ_1 puede ser analizada para un ρ_0 , si $|\alpha|$ es suficientemente pequeño. Ahora si ρ_1 tiene un punto fijo, esto indica que las órbitas que describe la solución del sistema en coordenadas polares, es cerrada. Ahora se determinará cuando ρ_1 tiene un punto fijo, para diferentes valores del parámetro α . Supongamos que ρ_0 es punto fijo y veamos que condiciones debe satisfacer.

$$\rho_0 = \exp(2\pi\alpha)\rho_0 - \exp(2\pi\alpha)(2\pi + o(\alpha))\rho_0^3$$

$$1 = \exp(2\pi\alpha) - \exp(2\pi\alpha)(2\pi + o(\alpha))\rho_0^2.$$

Luego se tiene

$$\rho_0 = \pm \sqrt{\frac{1 - \exp(2\pi\alpha)}{2\pi + o(\alpha)}}$$

De la expresión anterior deducimos que si $\alpha = 0$, el único punto fijo es $\rho_0 = 0$. Si $\alpha > 0$, no hay puntos fijos y si $\alpha < 0$, hay dos puntos fijos, que era lo que se quería. Esto es lo que sucede en la bifurcación de Hopf. Por lo tanto queda demostrado que el sistema en coordenadas polares, tiene una órbita periódica. Ahora vamos a construir el homeomorfismo. Para $|\alpha|$ pequeño se sabe que ambos sistemas tienen una órbita

cerrada, en alguna vecindad del origen. Tomamos un punto (z_1, z_2) en el retrato de fase del sistema (2.15). Por este punto pasa una única órbita que comienza en $(\varphi, \rho) = (0, \rho_0)$ y llega al punto (z_1, z_2) en $t = \tau_0$. Considerando ahora el retrato de fase del sistema (2.14) y construyendo la órbita que comienza en $(0, \rho_0)$. Esta órbita en el tiempo $t = \tau_0$ pasa por un punto (x_1, x_2) . La construcción del homeomorfismo es inmediata $h(z_1, z_2) = (x_1, x_2)$. Dada esta función resulta ser continua y además invertible. ■

Usando este lema podemos eliminar $O(\|x\|^4)$, y finalmente llegar al siguiente resultado general.

Teorema 7 (Forma normal topológica para la bifurcación Hopf) *Cualquier sistema genérico bidimensional y uniparamétrico*

$$x' = f(x, \alpha),$$

que tenga en $\alpha = 0$ el equilibrio $x = 0$ con valores propios

$$\lambda_{1,2}(0) = \pm i\omega_0, \omega_0 > 0,$$

es localmente topológicamente equivalente cerca al origen a la siguiente forma normal:

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta & -1 \\ 1 & \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \pm (x_1^2 + x_2^2) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

Capítulo 3

Ejemplo de la bifurcación Hopf

Se estudiará con detalles el siguiente sistema en el plano, que depende de un parámetro que presenta una bifurcación Hopf. Consideremos el sistema dinámico bidimensional.

$$\begin{cases} x' = f(x, y) = \mu x - \omega_0 y + (ax - by)(x^2 + y^2) \\ y' = g(x, y) = \omega_0 x + \mu y + (bx + ay)(x^2 + y^2), \end{cases}$$

donde a, b y $\omega_0 > 0$ son tres valores reales fijos y μ es un parámetro real.

Para encontrar los puntos de equilibrio del sistema, igualamos a cero las ecuaciones, obteniendo un punto de equilibrio en el origen del plano. Ahora para estudiar la estabilidad de este punto de equilibrio, se debe hallar los autovalores del sistema. Entonces se calcula la matriz jacobiana del sistema.

$$A(x, y) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} & \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} \\ \frac{\partial g(x,y)}{\partial x} & \frac{\partial g(x,y)}{\partial y} \end{bmatrix} \quad (3.1)$$

$$A(x, y) = \begin{bmatrix} \mu + 3ax^2 + ay^2 - 2bxy & -\omega_0 + 2axy - bx^2 - 3by^2 \\ \omega_0 + 3bx^2 + by^2 + 2ayx & \mu + abxy + ax^2 + 3ay^2 \end{bmatrix}$$

Ahora si evaluamos la matriz en el punto de equilibrio, se obtiene

$$A(0, 0) = \begin{bmatrix} \mu & -\omega_0 \\ \omega_0 & \mu \end{bmatrix},$$

y luego calculamos los autovalores

$$\begin{bmatrix} \mu - \lambda & -\omega_0 \\ \omega_0 & \mu - \lambda \end{bmatrix} = 0.$$

Entonces se tiene que $\lambda_{1,2} = \mu \pm i\omega_0$.

Por lo tanto, se puede decir que el origen es un punto de equilibrio linealmente estable si el parámetro μ es negativo, y no linealmente estable si el parámetro μ es positivo, ahora si $\mu = 0$ linealmente no se puede establecer su estabilidad. Es claro entonces, que el valor $\mu = 0$ corresponde a una bifurcación. A continuación se estudiará la estabilidad del origen en este caso.

Para esto calculamos el coeficiente de Lyapunov usando la ecuación 2.13.

Primero hallamos los vectores propios asociados a los valores propios, de tal forma que $A(\alpha)q(\alpha) = \lambda(\alpha)q(\alpha)$ y $A^T(\mu)p(\mu) = \overline{\lambda(\mu)}p(\mu)$

Como

$$\begin{pmatrix} \mu & -\omega_0 \\ \omega_0 & \mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ i \end{pmatrix} = (\mu + i\omega_0) \begin{pmatrix} -1 \\ i \end{pmatrix},$$

entonces

$$q \approx \begin{pmatrix} -1 \\ i \end{pmatrix}$$

y

$$\begin{pmatrix} \mu & \omega_0 \\ -\omega_0 & \mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ i \end{pmatrix} = (\mu - i\omega_0) \begin{pmatrix} -1 \\ i \end{pmatrix},$$

entonces

$$p \approx \begin{pmatrix} -1 \\ i \end{pmatrix}.$$

Normalizamos p respecto a q , tal que $\langle p, q \rangle = 1$,

luego

$$q = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 \\ i \end{pmatrix} \text{ y } p = \begin{pmatrix} -1 \\ i \end{pmatrix}.$$

Ahora calculamos g_{20} , g_{11} , g_{11} , g_{02} , g_{21} , entonces si calculamos $B(q, q)$, $B(q, \bar{q})$, $B(\bar{q}, \bar{q})$

observamos que $B(q, q) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $B(q, \bar{q}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $B(\bar{q}, \bar{q}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, luego

$$g_{20} = \langle p, B(q, q) \rangle = 0, \quad g_{11} = \langle p, B(q, \bar{q}) \rangle = 0, \quad g_{02} = \langle p, B(\bar{q}, \bar{q}) \rangle = 0.$$

Como

$$C(q, q, \bar{q}) = \begin{pmatrix} -a - bi \\ -b + ai \end{pmatrix}, \quad C(q, \bar{q}, \bar{q}) = \begin{pmatrix} -b - ai \\ -a + bi \end{pmatrix}, \quad C(\bar{q}, \bar{q}, \bar{q}) = 0,$$

entonces

$$g_{21} = \langle p, c(q, q, \bar{q}) \rangle = 2a + 2bi, \quad g_{12} = \langle p, c(q, \bar{q}, \bar{q}) \rangle = 0, \quad g_{03} = \langle p, c(\bar{q}, \bar{q}, \bar{q}) \rangle = 0.$$

También se tiene que

$$g_{kl} = 0, \quad \text{para } k + l \geq 4.$$

En este caso

$$c_1(0) = \frac{g_{21}}{2} = \frac{2a + 2bi}{2} = a + bi,$$

ahora

$$l_1(0) = \frac{\text{Re}c_1(0)}{\omega_0} = \frac{a}{\omega_0},$$

siendo $l_1(0)$ el primer coeficiente de Lyapunov.

La bifurcación Hopf supercrítica, se presenta cuando $l_1 < 0$, es decir cuando $a < 0$, dado que $\omega_0 > 0$ y sus órbitas periódicas son estables. Este caso se caracteriza por el nacimiento o desvanecimiento de una órbita periódica atractora, al momento de variar el parámetro de bifurcación alrededor de $\mu = 0$. Como se muestra en la figura (3.2).

La bifurcación Hopf subcrítica, se presenta cuando $l_1 > 0$, es decir, cuando $a > 0$ y sus órbitas periódicas son inestables. Este caso se caracteriza por el nacimiento o desvanecimiento de una órbita periódica repulsora, al momento de variar el parámetro de bifurcación alrededor de $\mu = 0$. Como se muestra en la figura (3.1).

Otro tipo de bifurcación Hopf que se presenta es la bifurcación Hopf degenerada, la cual se presenta cuando $l_1 = 0$, es decir, $a = 0$. Esta se caracteriza por la presencia de un centro de órbitas periódicas, justo cuando el parámetro de bifurcación es igual a 0.

Se sabe que el sistema se puede ver como $z' = \lambda(\alpha)z + g(z, \bar{z}, \alpha)$, donde

$$g(z, \bar{z}, \alpha) = \sum_{k+l \geq 2} \frac{1}{k!l!} g_{kl}(\alpha) z^k \bar{z}^l$$

$$g(z, \bar{z}, \alpha) = \frac{g_{20}}{2} z^2 + g_{11} z \bar{z} + \frac{g_{02}}{2} \bar{z}^2 + \frac{g_{30}}{6} z^3 + \frac{g_{21}}{2} z^2 \bar{z} + \frac{g_{12}}{2} z \bar{z}^2 + \frac{g_{03}}{6} \bar{z}^3 + o(|z|^4)$$

luego se tiene la siguiente ecuación:

$$z' = \lambda z + (a + ib)z|z|^2, \text{ dado que } z = \langle p(\mu), (x, y) \rangle.$$

Por otra parte, este sistema se puede expresar en coordenadas polares de manera sencilla y se pueden estudiar el comportamiento de las soluciones vía integración. Este comportamiento lleva a concluir que el sistema presenta bifurcaciones Hopf, y se estudia su estabilidad sin calcular los coeficientes de Lyapunov. Estas cuentas fueron hechas en [5]. A continuación se reescriben para comparar los resultados obtenidos.

Introduciendo la función compleja

$$z(t) = x(t) + iy(t), \quad (3.2)$$

donde

$$\bar{z} = x - iy, \quad |z|^2 = z\bar{z} = x^2 + y^2.$$

Esta variable satisface la ecuación diferencial

$$\begin{aligned} z' &= x' + iy' = \mu x - \omega_0 y + (ax - by)(x^2 + y^2) + i[\omega_0 x + \mu y + (bx + ay)(x^2 + y^2)] \\ &= \mu(x + iy) + i\omega_0(x + iy) + (x^2 + y^2)[(ax - by) + i(bx + ay)] \end{aligned}$$

Luego se puede escribir el sistema de la forma

$$z' = \mu z + i\omega_0 z + (a + ib)z|z|^2 = (\mu + i\omega_0)z + (a + ib)z|z|^2$$

ahora se puede observar que el sistema se puede escribir de la forma

$$z' = (\mu + i\omega_0)z + (a + ib)z|z|^2. \quad (3.3)$$

Se utiliza la forma polar para tener un análisis mejor de la ecuación (3.3)

$$z(t) = \rho(t) \exp(i\theta(t)) \quad (3.4)$$

$$\overline{z(t)} = \rho(t) \exp(-i\theta(t))$$

luego

$$z'(t) = \rho'(t) \exp(i\theta(t)) + \rho(t) \exp(i\theta(t))i\theta'(t) \quad (3.5)$$

Remplazando la ecuación (3.5) en la ecuación (3.3) se obtiene:

$$z'(t) = (\mu + i\omega_0)\rho(t) \exp(i\theta(t)) + (a + ib)\rho(t)^3 \exp(i\theta(t)) \quad (3.6)$$

Si se igualan las ecuaciones (3.5) y la ecuación (3.6) se obtiene:

$$\rho'(t) \exp(i\theta(t)) + \rho(t) \exp(i\theta(t))i\theta'(t) = (\mu + i\omega_0)\rho(t) \exp(i\theta(t)) + (a + ib)\rho(t)^3 \exp(i\theta(t))$$

$$\begin{aligned} \rho'(t) + \rho(t)i\theta'(t) &= (\mu + i\omega_0)\rho(t) + (a + ib)\rho(t)^3 \\ &= \mu\rho(t) + i\omega_0\rho(t) + a\rho(t)^3 + ib\rho(t)^3 \end{aligned}$$

Ahora si tomamos la parte real, e imaginaria, se tienen las ecuaciones

$$\frac{d\rho}{dt} = \mu\rho + a\rho^3 \quad (\text{evolución del radio polar})$$

$$\frac{d\theta}{dt} = \omega_0 + b\rho^2 \quad (\text{evolución del ángulo polar})$$

La primera ecuación solo tiene sentido para $\rho > 0$ y no depende del ángulo polar, por lo tanto puede ser estudiada por separado.

Para encontrar los puntos de equilibrio de la ecuación diferencial del radio polar, se debe igualar la ecuación a cero.

$$\mu\rho + a\rho^3 = 0 \quad \text{entonces} \quad \rho(\mu + a\rho^2) = 0$$

Se obtiene un punto de equilibrio en $\rho = 0$ para cualquier valor de μ , es correspondiente al punto de equilibrio en el origen del sistema original. La ecuación posee otro punto de equilibrio.

$\mu + a\rho^2 = 0$, entonces se tiene que $\rho(\mu) = \sqrt{-\frac{\mu}{a}}$ y existe como solución real cuando el radical es positivo, es decir, si $\frac{\mu}{a}$ es negativo.

La existencia de este punto de equilibrio $\rho(\mu)$ para el radio polar supone que en el sistema original existe un círculo estacionario centrado en el origen, cuyo radio es este valor de equilibrio $\rho(\mu)$. Esta órbita del sistema plano será estable o inestable según el punto de equilibrio de la ecuación diferencial del radio polar sea estable o inestable. Para analizar la estabilidad del ciclo límite de radio $\rho(\mu)$, es suficiente analizar el signo de la derivada, que viene dada por

$$\left. \frac{d}{d\rho}(\mu\rho + a\rho^3) \right|_{\rho=\sqrt{-\frac{\mu}{a}}} = \mu + 3a\left(-\frac{\mu}{a}\right) = -2\mu$$

Luego el punto de equilibrio y el ciclo límite asociado, es estable cuando $\mu > 0$ e inestable cuando $\mu < 0$.

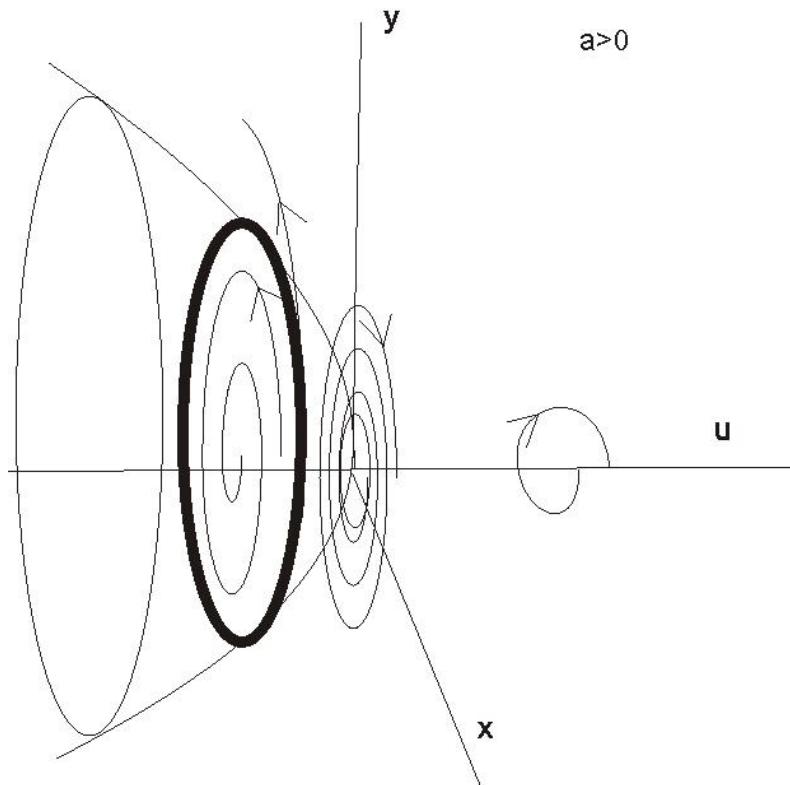


Figura 3.1: Bifurcación Hopf subcrítica.

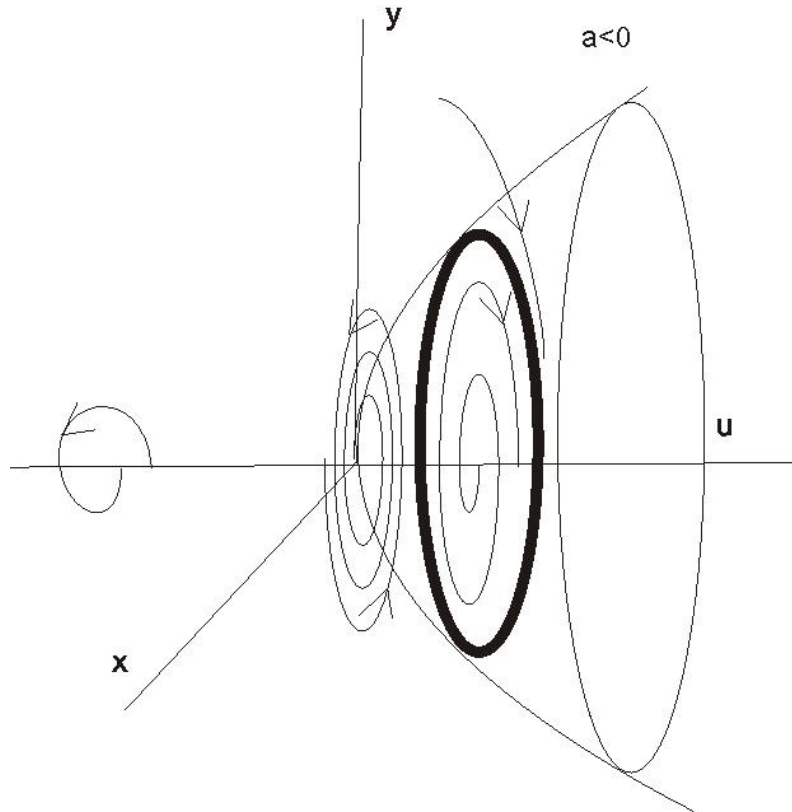


Figura 3.2: Bifurcación Hopf supercrítica.

El caso donde $a > 0$ corresponde a una bifurcación subcrítica, para este caso el ciclo límite existe sólo si $\mu < 0$ y es inestable, y en el caso donde $a < 0$ corresponde a una bifurcación supercrítica, en este caso el ciclo límite existe si $\mu > 0$ y es estable.

Las ecuaciones diferenciales del sistema en coordenadas polares se puede integrar con facilidad, luego se tiene las soluciones del sistema explícitamente. Ahora tomando un caso particular, supongamos que $b = 0$ y $\omega_0 = 1$, entonces se tiene $\theta = t$, en el caso general sucede de la misma manera.

Si la condición inicial es $\rho(0) = \rho_0 > 0$, separando variables e integrando se tiene

$$\int_{\rho_0}^{\rho} \frac{d\rho}{\mu\rho + a\rho^3} = \int_0^t dt$$

Para resolver la integral, se utiliza la descomposición en fracciones simples

$$\frac{1}{\mu\rho + a\rho^3} = \frac{1}{\mu} \left(\frac{1}{\rho} - \frac{a\rho}{\mu + a\rho^2} \right)$$

luego se tiene

$$\int_{\rho_0}^{\rho} \frac{d\rho}{\mu\rho + a\rho^3} = \frac{1}{\mu} \left[\int_{\rho_0}^{\rho} \left(\frac{1}{\rho} - \frac{a\rho}{\mu + a\rho^2} \right) d\rho \right] = \frac{1}{\mu} \left[\log \rho - \frac{1}{2} \log |\mu + a\rho^2| \right]_{\rho_0}^{\rho} = \frac{1}{\mu} \left[\log \frac{\rho}{|\mu + a\rho^2|^{\frac{1}{2}}} \right]_{\rho_0}^{\rho}$$

y obtenemos entonces

$$\frac{1}{\mu} \left[\log \frac{\rho}{|\mu + a\rho^2|^{\frac{1}{2}}} \right]_{\rho_0}^{\rho} = t$$

de donde se deduce que la dependencia de ρ y t viene establecida por la ecuación

$$\frac{\rho^2}{|\mu + a\rho^2|} = \frac{\rho_0^2}{|\mu + a\rho_0^2|} \exp(2\mu t).$$

Para analizar las soluciones, es conveniente distinguir dos casos, determinados por el signo del producto $a\mu$.

Caso $a\mu > 0$

En este caso el signo μ es el mismo signo de a , para este caso no existe ciclo límite. Tomando $\frac{\mu}{a} = r^2$, la relación entre ρ y t se tiene de la siguiente forma:

$$\frac{\rho^2}{\mu + a\rho^2} = \frac{\rho_0^2}{\mu + a\rho_0^2} \exp(2\mu t)$$

Si se despeja ρ se obtiene la siguiente expresión con la dependencia de t

$$\rho = \frac{\rho_0 \exp(\mu t)}{\sqrt{1 + \frac{\rho_0^2}{r^2} (1 - \exp(2\mu t))}}$$

Las soluciones presentan un comportamiento diferente según el parámetro si es positivo o negativo.

En el caso donde $\mu < 0$, el radicando del denominador es siempre positivo, por lo que la solución está definida en todo el intervalo $[0, \infty]$. Además, se tiene que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \rho = 0$$

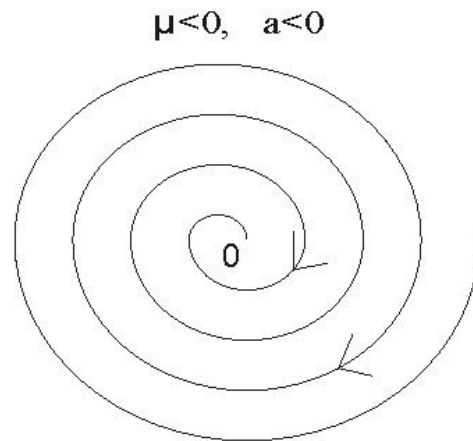


Figura 3.3: Origen estable, no hay ciclo límite.

es decir, el origen es un punto de equilibrio asintóticamente estable cuyo dominio de atracción es todo el plano.

En el caso, donde $\mu > 0$ el radicando sólo tiene sentido en el intervalo $[0, T]$, donde $T = \frac{1}{2\mu} \log(1 + \frac{r^2}{\rho^2})$ y además se tiene que

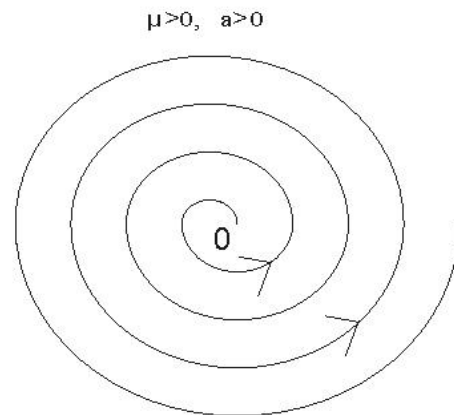


Figura 3.4: Origen inestable, no hay ciclo límite.

$$\lim_{t \rightarrow T} \rho = \infty$$

Luego la solución no se hace acotada en un tiempo finito. Esta situación indica que el origen es un punto de equilibrio inestable.

Caso $a\mu < 0$

En este caso, los signos de μ y a son diferentes, luego existe un ciclo límite. Donde $\frac{\mu}{a} = -r^2$, el ciclo límite es un círculo centrado en el origen de radio r . Como se conoce $\rho = \sqrt{-\frac{\mu}{a}}$, la relación entre ρ y t se escribe de la forma:

$$\frac{\rho^2}{|\rho^2 - r^2|} = \frac{\rho_0^2}{|\rho_0^2 - r^2|} \exp(2\mu t)$$

Es claro que la ecuación presenta un punto de equilibrio en $\rho = r$, y también si $\rho_0 > r$ se tiene que $\rho > r$. Por otra parte, si $\rho_0 < r$ entonces $\rho < r$ para todo $t > 0$. Ahora se puede deducir la siguiente relación.

$$\frac{\rho^2}{\rho^2 - r^2} = \frac{\rho_0^2}{\rho_0^2 - r^2} \exp(2\mu t),$$

dado que las $\rho^2 - r^2$, y $\rho_0^2 - r^2$ tienen en todo caso el mismo signo. Despejando en la ecuación el valor de ρ , se obtiene la fórmula

$$\rho = \frac{\rho_0 \exp(\mu t)}{\sqrt{1 + \frac{\rho_0^2}{r^2} (\exp(2\mu t) - 1)}}$$

El comportamiento de esta solución es diferente según el valor de μ si es positivo o negativo.

Si $\mu > 0$, el radicando del denominador es siempre positivo, cualquiera que sea el valor de $\rho \neq r$.

Si calculamos el límite tenemos

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \rho = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\rho_0 \exp^{\mu t}}{\sqrt{1 + \frac{\rho_0^2}{r^2} (\exp(2\mu t) - 1)}} = r$$

En el sistema original, esto significa que el origen del sistema es un punto de equilibrio inestable, el cual se encuentra rodeado por una órbita cerrada aislada (ciclo límite), que es única y estable. El ciclo límite tiene un radio $\rho(\mu) = r$ cuyo dominio de atracción es el plano, salvo el origen que es un punto de equilibrio inestable. Es decir, que todas las órbitas que empiezan fuera o dentro del ciclo límite, sin incluir el origen, tienden a este ciclo límite cuando t tiende a infinito. Este caso hace referencia a una bifurcación de Hopf supercrítica.

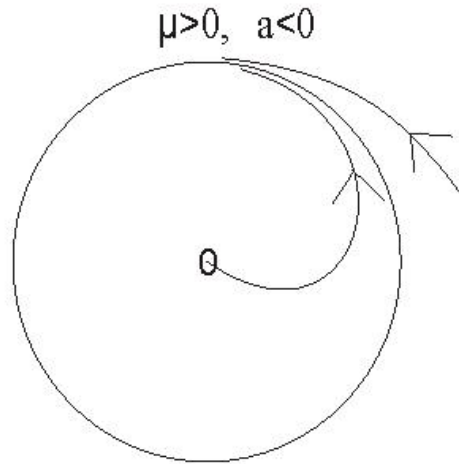


Figura 3.5: Ciclo límite estable.

Ahora, si $\mu < 0$ es necesario analizar $\rho_0 < r$ y $\rho_0 > r$, es decir, que el punto inicial esté fuera o dentro del ciclo límite. Si $\rho_0 < r$, el radicando del denominador siempre toma valores positivos, donde la solución existe para todo $t > 0$ y tenemos que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \rho = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\rho_0 \exp(\mu t)}{\sqrt{1 + \frac{\rho_0^2}{r^2} (\exp(2\mu t) - 1)}} = 0$$

En cambio si $\rho_0 > r$ la solución sólo existe mientras

$$t \leq \frac{1}{2\mu} \log\left(1 - \frac{r^2}{\rho_0^2}\right) = T.$$

Además se cumple que

$$\lim_{t \rightarrow T} \rho = \infty$$

Por lo tanto el origen es punto de equilibrio estable y su dominio de atracción es el círculo centrado en el origen y de radio r . Por otra, parte si se toma una órbita fuera del círculo esta se pierde, luego es un ciclo límite inestable.

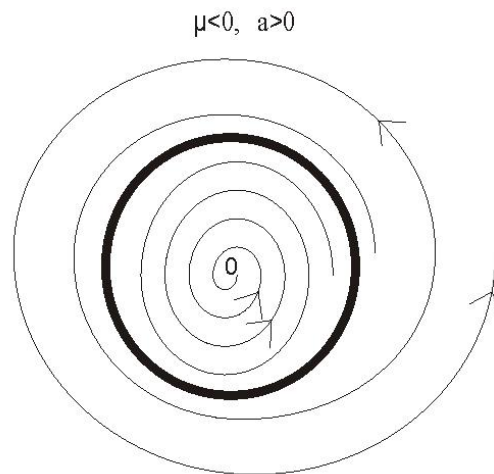


Figura 3.6: Origen estable, ciclo límite inestable.

Bibliografía

- [1] HAN, M. and ZHANG, W. *On Hopf bifurcation in non-smooth planar systems*. J. Differential Equations 248 (2010), No. 9.
- [2] HU, H. and Huang, L. *Stability and Hopf bifurcation in a delayed predator-prey system with stage structure for prey*. Nonlinear Anal. Real World Appl. 11 (2010), No. 4.
- [3] KUZNETSOV, Y. *Elements of applied bifurcation theory*. Third Edition. Springer, 2004.
- [4] LAGES LIMA, E. *Curso de análise, Volume 2*. IMPA.
- [5] NOGUEROL, A. *Análisis de la bifurcación de Hopf en el regulador centrífugo de watt*. Septiembre 2006.
- [6] ROBINSON, C. *Dynamical systems. Second Edition*. CRC Press, 1999.
- [7] SOTOMAYOR, J. *Lições de equações diferenciais ordinárias*. IMPA, 1979.
- [8] TOVAR, A. *Identificador gráfico de bifurcaciones*. Universidad Nacional de Colombia. Bogotá, 2001.

Índice alfabético

- Órbita, 3
 - Periódica, 3
- Bifurcación, 7
- Coefficiente de Lyapunov, 36
- Diagrama de bifurcación, 7
- Equilibrio, 3
 - Hiperbólico, 4
- Flujo, 1
- Forma normal
 - Bifurcación, 8
- Retrato de fase, 4
- Sistema dinámico, 2
- Sistemas
 - Localmente topológicamente equivalentes, 5
 - Topológicamente equivalentes, 5
- Término
 - Resonante, 31
- Variedad
 - Estable, 4
 - Inestable, 4