# Integrabilidad de sistemas Hamiltonianos lineales no-autónomos a través de teoría de Galois diferencial

**Sergio Alejandro Carrillo Torres**

Universidad Nacional de Colombia
Facultad de Ciencias, Departamento de Matemáticas
Bogotá, Colombia
2011

# Integrabilidad de sistemas Hamiltonianos lineales no-autónomos a través de teoría de Galois diferencial

**Sergio Alejandro Carrillo Torres**

Trabajo de grado presentado como requisito parcial para optar al título de:
**Magister en Ciencias-Matemáticas**

Director:
Ph.D. David Blázquez Sanz
Codirector:
Ph.D. Félix Humberto Soriano Méndez

Línea de Investigación:
Métodos algebraicos en ecuaciones diferenciales

Universidad Nacional de Colombia
Facultad de Ciencias, Departamento de Matemáticas
Bogotá, Colombia
2011

# Agradecimientos

A mi director David Blázquez Sanz, profesor investigador de la Universidad Sergio Arboleda, por su guía y apoyo durante partes del trabajo. Sin sus indicaciones y consejos hubiese sido más complicado de lo que fue. Especialmente, en los últimos días que estuvo todo el tiempo dándome ánimo para no desfallecer.

A la Universidad Nacional de Colombia por haberme acogido estos dos años con su cálido abrazo haciéndome sentir en casa.

A mi codirector Félix Humberto Soriano Méndez, profesor de la Universidad Nacional de Colombia, por haberme ayudado durante todo el tiempo que me tomó realizar este trabajo, durante las clases y el miniseminario de un año y medio, donde solo asistíamos los dos a discutir dudas paciente y a veces no muy pacientemente.

# Resumen

En este trabajo se introduce una noción de integrabilidad para sistemas Hamiltonianos no autónomos y se desarrolla geométricamente la teoría de Galois diferencial para sistemas de ecuaciones lineales. Para el caso de hamiltonianos cuadráticos homogéneos con $2 + \frac{1}{2}$ grados de libertad, se demuestra que esta noción es equivalente a la integrabilidad completa del sistema en el espacio de fase extendido, se da el recíproco del teorema de Morales-Ramis y se calculan sus formas canónicas a través de cambios de variable simplécticos con coeficientes funciones algebraicas del tiempo.

**Palabras clave: Sistemas Hamiltonianos, Integrabilidad, Teoría de Galois diferencial.**

# Abstract

In this work a notion of integrability for non autonomous Hamiltonian systems is introduced and the differencial Galois theory for linear differential equations is developed geometrically. For the case of quadratic homogeneous Hamiltonians with $2 + \frac{1}{2}$ degrees of freedom its proved that this notion is equivalent to the classical complete integrability of the system in the extended phase space, the reciprocal of the Morales-Ramis result is given and their canonical forms are calculated through symplectic changes of frames involving algebraic functions of time.

**Keywords: Hamiltonian Systems, Integrability, Differential Galois Theory.**

# Contenido

# Lista de figuras

# Lista de tablas

# Introducción

Desde el análisis de Poincaré del problema de los tres cuerpos, en los sistemas dinámicos deben considerarse dos dicotomías. La primera es entre la dinámica regular y caótica, y la segunda entre ecuaciones integrables y no integrables. En general se espera que las ecuaciones integrables exhiban una dinámica regular y las no integrables exhiban una dinámica caótica. Sin embargo no existe un diccionario claro entre estos conceptos, dado que aún no se ha desarrollado una teoría general de la integrabilidad.

En el caso de los sistemas Hamiltonianos (mecánica clásica) existe el caso particular de los *sistemas completamente integrables* que poseen tantas leyes de conservación independientes y en involución como grados de libertad. La reducción a variables de acción-ángulo, debida a J. Liouville y reinterpretada geométricamente por V. I. Arnold [2] indica que dichos sistemas tienen la propiedad de que su evolución en el tiempo es "bien comportada" con respecto a las condiciones iniciales, es decir, la dinámica es regular. En muchos casos, se aborda el estudio de sistemas más generales entendiéndolos como pequeñas perturbaciones de sistemas Hamiltonianos completamente integrables. Además, los sistemas completamente integrables son objetos dignos de estudio por sí mismos apareciendo de forma natural en muchos otros problemas matemáticos, como las jerarquías de EDP's integrables, la caracterización de variedades Jacobianas ó la cohomología cuántica.

Los sistemas integrables son muy excepcionales. En cualquier topología razonable en el espacio de sistemas Hamiltonianos la propiedad genérica es la ocurrencia de fenómenos caóticos, y por tanto la no existencia de leyes de conservación. Sin embargo, es una tarea muy difícil decidir si un sistema Hamiltoniano es completamente integrable. Es por tanto un problema matemáticamente relevante, el encontrar los sistemas completamente integrables dentro de una familia de sistemas Hamiltonianos.

También es muy interesante encontrar las formas canónicas que los sistemas completamente integrables pueden presentar. Es decir, clasificar los sistemas integrables que existen dentro de una determinada familia con respecto a la acción de un determinado grupo de transformaciones. Matemáticos como Liapjunov, Painlevé, Poincaré y Kovalewskaya dedicaron importantes investigaciones a este problema.

En este trabajo, dentro de los sistemas Hamiltonianos, se consideran sistemas lineales no-autónomos. Estos sistemas, si bien son lineales en las variables posición-momento, pueden ser altamente no lineales con respecto al tiempo.

Recientemente se han desarrollado potentes técnicas algebraicas para la detección de la integrabilidad. Una de estas, el esquema de Morales-Ramis [7], está basada en la teoría de Galois diferencial de los sistemas de ecuaciones lineales [3, 4]. La teoría de Galois diferencial relaciona la integrabilidad de las ecuaciones lineales con la estructura de los grupos algebraicos [5]. El teorema de Morales-Ramis establece que los sistemas completamente integrables, al linealizarse dan lugar a ecuaciones con grupos de Galois con componente conexa de la identidad abeliana. Sin embargo, no está claro que recíprocamente, las ecuaciones lineales con grupos de Galois virtualmente abelianos puedan reinterpretarse como sistemas Hamiltonianos completamente integrables.

En este trabajo se proponen los siguientes problemas:

1. Caracterizar la integrabilidad completa, mediante leyes de conservación meromorfas, de los sistemas Hamiltonianos lineales no-autónomos (no lineales en el tiempo) en términos de sus grupos de Galois.

2. Clasificar los sistemas Hamiltonianos lineales no-autónomos (no lineales en el tiempo) completamente integrables, y dar sus formas canónicas para $2 + \frac{1}{2}$ grados de libertad.

Para tratarlos se expone parte de la teoría clásica de sistemas Hamiltonianos y se desarrolla la teoría de Galois diferencial desde un punto de vista geométrico. Para la primera, se comienza por estudiar la estructura simpléctica de una variedad, los campos hamiltonianos - cuyas curvas integrales dan lugar a los sistemas Hamiltonianos -, el paréntesis de Poisson, y la involución. Se demuestra el teorema de Liouville-Arnold, que asegura que un hamiltoniano que tenga $n$ funciones independientes y en involución es integrable por cuadraturas y sus órbitas se mantienen sobre toros de dimensión $n$, y se trata el concepto de integrabilidad completa. Luego se pasa al caso no-autónomo, es decir, cuando el hamiltoniano depende del tiempo, donde se introduce una noción de integrabilidad. Finalmente se considera la suspensión simpléctica y se demuestra que los sentidos de integrabilidad son compatibles, esto es, si el hamiltoniano no autónomo es integrable, su suspensión es completamente integrable.

Para la teoría de Galois diferencial, se estudian los sistemas de ecuaciones lineales en el campo complejo, sus foliaciones, prolongaciones analíticas y su monodromía. Se introduce la topología $\mathcal{M}(\Gamma)-$Zariski, que permite conocer las relaciones algebraicas de las soluciones de la ecuación, y se define el grupo de Galois de una hoja de la foliación como las matrices que preservan esas relaciones algebraicas. Esos grupos resultan ser algebraicos lineales y poseen propiedades muy interesantes, por ejemplo contienen a los grupos de monodromía de la ecuación y su acción sobre una hoja produce la clausura $\mathcal{M}(\Gamma)-$Zariski de la misma. Calcular estos grupos no es tarea fácil y no hay un método genérico para ello, aunque, por ejemplo, todos los subgrupos algebraicos de $\mathrm{Sp}(1,\mathbb{C}) = \mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ están clasificados [7]. Con la teoría de grupos disponible, se expone el teorema de Morales-Ramis. De esta forma, los grupos de Galois determinan en parte si un sistema es integrable o no.

Usando estas teorías se muestra para hamiltonianos cuadráticos no autónomos en $2+\frac{1}{2}$ grados de libertad la equivalencia entre: ser integrable en el sentido no autónomo, tener suspensión simpléctica completamente integrable y tener grupo de Galois con componente conexa de la identidad abeliana. Esto se logra con la clasificación de los subgrupos algebraicos abelianos conexos de $\mathrm{Sp}(2,\mathbb{C})$. En ese punto, se calculan las formas normales a las cuales se puede reducir un sistema de ese tipo. Desafortunadamente las técnicas aplicadas en la clasificación de los grupos mencionados no es práctica, en el sentido de que para dimensiones mayores los cálculos son demasiado complicados. Queda entonces abierta la pregunta de la equivalencia entre las nociones de integrabilidad en más grados de libertad.

# 1. Sistemas Hamiltonianos

En este capítulo vamos a exponer las herramientas con las que se suele trabajar en sistemas Hamiltonianos autónomos y no autónomos, tales como variedades simplécticas, flujos hamiltonianos, paréntesis de Poisson, entre otros. Para esto usaremos herramientas de geometría diferencial tales como la derivada de Lie respecto a un campo vectorial [1]. Estudiamos la noción de integrabilidad completa en el caso autónomo y basados en ella introducimos la integrabilidad en el sentido no autónomo en variedades de la forma $\mathbb{C}^{2n} \times \Gamma$, donde $\Gamma$ es una superficie de Riemman. Se presenta también una demostración del teorema de Liouville-Arnold sobre la integrabilidad de sistemas Hamiltonianos. Al final del capítulo, se expone brevemente la suspensión simpléctica, que sirve para reducir el caso no autónomo al caso autónomo.

## 1.1. Geometría simpléctica lineal

Fijemos $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ó $\mathbb{C}$. En general puede tomarse cualquier cuerpo de característica diferente de 2.

**Definición 1.1.** Un espacio vectorial simpléctico es un espacio vectorial $V$ sobre $\mathbb{K}$ con una forma bilineal antisimétrica no degenerada $\omega$.

**Nota 1.1.** Recordemos que $\omega$ es no degenerada si y solo si $\omega(v, w) = 0$ para todo $w \in V$ implica que $v = 0$. Es decir, la aplicación polar $i_\omega : V \to V^*$ dada por $i_\omega(v)(u) = \omega(v, u)$ es inyectiva. Que $\omega$ sea antisimétrica significa que para todo $v, u \in V$, $\omega(v, u) + \omega(u, v) = 0$. Si $\mathbb{K}$ no es de característica 2, esto implica que $\omega(v, v) = 0$. Es decir, todos los vectores son $\omega-$ortogonales a sí mismos.

Si $W$ es un subespacio de $V$, denotaremos por $W^\perp = \{v \in V | \omega(v, w) = 0 \text{ para todo } w \in W\}$, al subespacio de vectores que son $\omega-$ortogonales a $W$. Caso contrario a lo que ocurre en geometría euclidiana, puede suceder que $W \cap W^\perp \neq \{0\}$.

**Ejemplo 1.1.** $\mathbb{K}^{2n} = \{(p_1, ..., p_n, q_1, ..., q_n) | p_i, q_i \in \mathbb{K}, i = 1, ..., n\}$ es el espacio vectorial simpléctico canónico con $\omega = \sum_{i=1}^n dp_i \wedge dq_i$, es decir:

$$\omega(v, w) = \sum_{i=1}^{n} x_i u_i - y_i z_i = v^t J_n w,$$

donde $v = (x_1, ..., x_n, y_1, ..., y_n)$, $w = (z_1, ..., z_n, u_1, ..., u_n)$ y $J_n$ es la matriz:

$$\begin{bmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{bmatrix},$$

donde $I_n$ denota la matriz identidad de $n \times n$. $\omega$ es no degenerada porque $\det(J_n) = 1 \neq 0$. Si $\{e_i\}$, $i = 1, ..., 2n$ es la base canónica de $\mathbb{K}^{2n}$, note que $\omega(e_i, e_{i+n}) = 1$, $\omega(e_i, e_{j+n}) = \omega(e_{i+n}, e_{j+n}) = 0$, $i, j = 1, ..., n$ y $\omega(e_i, e_j) = 0$, $i \neq j, i, j = 1, ..., n$.

**Nota 1.2.** Si $\omega$ es como en el ejemplo anterior y $(,)$ es el producto escalar canónico entonces $\omega(v, w) = v^t J_n w = (-J_n v)^t w = (-J_n v, w)$. Esto significa que $-J_n = J_n^t$ es la matriz, en la base canónica, de la aplicación polar $i_\omega$. Además $J_n^2 = -I_{2n}$.

**Proposición 1.1.** *Sea $V$ un espacio vectorial de dimensión finita $n$ y $\omega$ una forma bilineal antisimétrica sobre $V$. Entonces existen vectores $v_1, ..., v_k, w_1, ..., w_k$ linealmente independientes tales que $\omega(v_i, w_i) = 1$, $\omega(v_i, v_j) = \omega(w_i, w_j) = 0$, $\omega(v_i, w_j) = 0, i \neq j$, $i, j = 1, ..., n$. Si $V_i$ es el subespacio dos dimensional generado por $v_i$ y $w_i$ entonces $V = V_1 \perp ... \perp V_k \perp V_0$, donde $V_0 = V^\perp$.*

*Demostración.* Si $\omega = 0$, sea $V = V_0$. Si $\omega \neq 0$ existen vectores $v_1, w_1 \in V$ tales que $\omega(v_1, w_1) = 1$. Estos vectores son linealmente independientes porque si $av_1 + bw_1 = 0$ entonces $0 = \omega(av_1 + bw_1, v_1) = -b$ y $0 = \omega(av_1 + bw_1, w_1) = a$. $V = V_1 \perp V_1^\perp$ porque si $v \in V$, $w = \omega(v, w_1)v_1 - \omega(v, v_1)w_1 \in V_1$ y $v - w \in V_1^\perp$. Además es claro que $V_1 \cap V_1^\perp = \{0\}$.

Si $\omega|_{V_1^\perp \times V_1^\perp} = 0$ hemos terminado. Si no, existen vectores $v_2, w_2 \in V_1^\perp$ tales que $\omega(v_2, w_2) = 1$ y tenemos que $V = V_1 \perp V_2 \perp V_2^\perp$. Repitiendo este procedimiento, que concluye porque la dimensión de $V$ es finita, obtenemos una descomposición de $V$ como la del enunciado. $\square$

**Nota 1.3.** Si $u_1, ..., u_{n-2k}$ es una base de $V_0$, en la base $v_1, ..., v_k, w_1, ..., w_k, u_1, ..., u_{n-2k}$ de $V$, la matriz que representa a $\omega$ es $\begin{bmatrix} J_k & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$. Si $\omega$ es no degenerada, $V_0 = \{0\}$ y la dimensión de $V$ es necesariamente par.

**Definición 1.2.** Sean $(V, \omega)$ y $(\overline{V}, \overline{\omega})$ espacios vectoriales simplécticos. Una transformación lineal $S : V \to \overline{V}$ se dice simpléctica si $\overline{\omega}(Sv, Sw) = \omega(v, w)$, para todo $v, w \in V$. El conjunto de todos los automorfismos simplécticos de $\mathbb{K}^{2n}$, $\mathrm{Sp}(n, \mathbb{K})$, es llamado el grupo simpléctico.

**Corolario 1.1.** *Todos los espacios simplécticos de la misma dimensión son isomorfos.*

De ahora en adelante solo trabajaremos con el espacio canónico $\mathbb{K}^{2n}$.

**Proposición 1.2.** *Una transformación es simpléctica si y solo si su matriz $S$ en la base canónica satisface $S^t J_n S = J_n$. En particular, $J_n$ es simpléctica.*

*Demostración.* La transformación es simpléctica si y solo si $\omega(Sv, Sw) = \omega(v, w)$. Como $\omega(v, w) = (-J_n v, w)$, que $S$ sea simpléctica significa que $(-J_n Sv, Sw) = (-J_n v, w)$ ó $(S^t J_n Sv, w) = (J_n v, w)$. Como $v$ y $w$ eran arbitrarios obtenemos $S^t J_n S = J_n$. $\square$

**Definición 1.3.** Un subespacio $W$ de $\mathbb{K}^{2n}$ se dice nulo ó isotrópico si $\omega|_{W\times W} = 0$. Si $\dim W = n$, $W$ se conoce como un subespacio Lagrangiano.

**Nota 1.4.** Un subespacio $W$ es nulo si y solo si $J_nW$ es ortogonal a $W$ con respecto al producto escalar usual $(,)$.

**Proposición 1.3.** *Si $W$ es un subespacio nulo de $\mathbb{K}^{2n}$, entonces $\dim W \leq n$.*

*Demostración.* Como $J_n$ es un isomorfismo, $\dim W = \dim J_nW$ y como $W$ es ortogonal a $J_nW$ entonces $W \cap J_nW = \{0\}$, porque si $v \in W \cap J_nW$, $v = J_nw$, $w \in W$ y $(v, v) = (v, J_nw) = 0$. Por tanto $2 \cdot \dim W = \dim(W \bigoplus J_nW) \leq \dim \mathbb{K}^{2n} = 2n$. □

## 1.2. Sistemas Hamiltonianos autónomos

Los espacios adecuados para trabajar la mecánica hamiltoniana son las variedades diferenciables ó analíticas dotadas de una estructura adicional. Esta estructura consiste en fijar una 2-forma diferencial ó meromorfa, cerrada no degenerada. Antes de discutir sobre este tipo de variedades, basados en el algebra exterior sobre variedades diferenciables, hablaremos sobre campos y 1-formas meromorfas sobre variedades analíticas.

### 1.2.1. Formas meromorfas sobre variedades analíticas

Sea $M$ una variedad analítica con $\dim M = n$. Si interpretamos a $M$ como una variedad diferencial, $M$ tiene dimensión $2n$ y cada punto $p \in M$ posee su espacio tangente y cotangente, $T_pM$ y $T_p^*M$. Estos son espacios vectoriales reales de dimensión $2n$. En adelante trabajaremos con las complexificaciones $T_pM \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ y $T_p^*M \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$. Estos son espacios vectoriales sobre $\mathbb{C}$ de dimensión $2n$.

Si $z_1 = x_1 + iy_1, ..., z_n = x_n + iy_n$ son coordenadas alrededor de $p \in M$, entonces $T_pM \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ es generado sobre $\mathbb{C}$ por $\frac{\partial}{\partial x_1}(p), ..., \frac{\partial}{\partial x_n}(p), \frac{\partial}{\partial y_1}(p), ..., \frac{\partial}{\partial y_n}(p)$. Para cada $j = 1, ..., n$, definimos los vectores:

$$\frac{\partial}{\partial z_j}(p) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x_j}(p) - i\frac{\partial}{\partial y_j}(p)\right),$$

$$\frac{\partial}{\partial \overline{z_j}}(p) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x_j}(p) + i\frac{\partial}{\partial y_j}(p)\right).$$

Como:

$$\frac{\partial}{\partial x_j}(p) = \frac{\partial}{\partial z_j}(p) + \frac{\partial}{\partial \overline{z_j}}(p) \quad \text{y} \quad \frac{\partial}{\partial y_j}(p) = i\frac{\partial}{\partial z_j}(p) - i\frac{\partial}{\partial \overline{z_j}}(p), \quad j = 1, ..., n,$$

los vectores $\frac{\partial}{\partial z_1}(p), ..., \frac{\partial}{\partial z_n}(p), \frac{\partial}{\partial \overline{z_1}}(p), ..., \frac{\partial}{\partial \overline{z_n}}(p)$ son una base de $T_pM \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$. La base dual correspondiente resulta ser $dz_1(p), ..., dz_n(p), d\overline{z_1}(p), ..., d\overline{z_n}(p)$ donde:

$$dz_j = dx_j + idy_j \quad \text{y} \quad d\overline{z_j} = dx_j - idy_j \quad j = 1, ..., n.$$

Si definimos: $T_p^{1,0}M = \left\langle \frac{\partial}{\partial z_1}(p), ..., \frac{\partial}{\partial z_n}(p) \right\rangle$, $T_p^{0,1}M = \left\langle \frac{\partial}{\partial \overline{z}_1}(p), ..., \frac{\partial}{\partial \overline{z}_n}(p) \right\rangle$, $(T_p^*M)^{1,0} = \langle dz_1(p), ..., dz_n(p) \rangle$ y $(T_p^*M)^{0,1} = \langle d\overline{z}_1(p), ..., d\overline{z}_n(p) \rangle$, es claro que:

$$T_pM \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} = T_p^{1,0}M \oplus T_p^{0,1}M,$$
$$T_p^*M \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} = (T_p^*M)^{1,0} \oplus (T_p^*M)^{0,1}.$$

Estos subespacios no dependen de las coordenadas alrededor de $p$. Para ver esto, sean $z_j = x_j + iy_j$ y $\zeta_j = \xi_j + i\eta_j$, $j = 1, ..., n$, coordenadas alrededor de $p$. Como los cambios de coordenadas $(\xi_k(x_1, ..., x_n, y_1, ..., y_n), \eta_k(x_1, ..., x_n, y_1, ..., y_n))$ son analíticos, satisfacen las ecuaciones de Cauchy-Riemann:

$$\frac{\partial \xi_k}{\partial x_j} = \frac{\partial \eta_k}{\partial y_j}, \qquad \frac{\partial \xi_k}{\partial y_j} = -\frac{\partial \eta_k}{\partial x_j} \qquad j, k = 1, ..., n.$$

Por ejemplo para $(T_p^*M)^{1,0}$, vemos que:

$$\begin{aligned} d\zeta_k = d\xi_k + id\eta_k &= \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \xi_k}{\partial x_j} dx_j + \frac{\partial \xi_k}{\partial y_j} dy_j + i\frac{\partial \eta_k}{\partial x_j} dx_j + i\frac{\partial \eta_k}{\partial y_j} dy_j \\ &= \sum_{j=1}^{n} \left( \frac{\partial \xi_k}{\partial x_j} - i\frac{\partial \xi_k}{\partial y_j} \right) dx_j + i \left( \frac{\partial \xi_k}{\partial x_j} - i\frac{\partial \xi_k}{\partial y_j} \right) dy_j \\ &= \sum_{j=1}^{n} \left( \frac{\partial \xi_k}{\partial x_j} - i\frac{\partial \xi_k}{\partial y_j} \right) dz_j. \end{aligned}$$

Por tanto $\langle dz_1(p), ..., dz_n(p) \rangle = \langle d\zeta_1(p), ..., d\zeta_n(p) \rangle$. Para los demás subespacios los cálculos son iguales.

De manera análoga al caso diferencial introducimos los fibrados tangente y cotangente de $M$: $TM \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} = \bigcup_{p\in M} T_pM \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$, $T^*M \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} = \bigcup_{p\in M} T_p^*M \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$. Estos fibrados se descomponen como:

$$TM \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} = T^{1,0}M \oplus T^{0,1}M,$$
$$T^*M \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} = (T^*M)^{1,0} \oplus (T^*M)^{0,1}.$$

Estos conjuntos son variedades analíticas y las proyecciones sobre $M$ son funciones analíticas.

**Definición 1.4.** Una función $X : M \to T^{1,0}M$ es un campo vectorial meromorfo sobre $M$ cuando $X$ es una función meromorfa tal que $\pi \circ X = id$, donde $\pi : T^{1,0}M \to M$ es la proyección natural. Denotaremos por $\mathfrak{X}(M)$ el conjunto de campos vectoriales meromorfos sobre $M$.
Análogamente, una función $\theta : M \to (T^*M)^{1,0}$ es una 1-forma meromorfa sobre $M$ cuando $\theta$ es una función meromorfa tal que $\pi \circ \theta = id$, donde $\pi : (T^*M)^{1,0} \to M$ es la proyección natural. Denotaremos por $\Omega^1(M)$ el conjunto de 1-formas meromorfas sobre $M$.
Para definir 2-formas meromorfas sobre $M$ reemplazamos el fibrado $(T^*M)^{1,0}$ por $\bigwedge^2(T^{1,0}M)^* = \bigcup_{p\in M} \bigwedge^2(T_p^{1,0}M)^*$, donde $\bigwedge^2(T_p^{1,0}M)^*$ son las formas bilineales alternantes definidas sobre $T_p^{1,0}M$. Luego una 2-forma meromorfa es una función meromorfa $\omega : M \to \bigwedge^2(T^{1,0}M)^*$ tal que $\pi \circ \theta = id$, donde $\pi : \bigwedge^2(T^{1,0}M)^* \to M$ es la proyección.

De la definición vemos que localmente los campos, 1-formas y 2-formas meromorfas sobre $M$ se pueden escribir como:

$$X(p) = \sum_{i=1}^{n} f_i(p)\frac{\partial}{\partial z_i}, \quad \theta(p) = \sum_{i=1}^{n} f_i(p)dz_i \quad \text{y} \quad \omega(p) = \sum_{1\leq j<k\leq n} f_{jk}dz_j \wedge dz_k,$$

respectivamente, donde $f_i, g_i, f_{jk}$ son funciones meromorfas definidas localmente en $M$.

El principal ejemplo de 1-formas meromorfas proviene de funciones meromorfas definidas sobre $M$. Si $f : M \to \mathbb{C}$ es una función meromorfa es fácil comprobar que en coordenadas locales, $df = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_j}dx_j + \frac{\partial f}{\partial y_j}dy_j = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial z_j}dz_j + \frac{\partial f}{\partial \overline{z_j}}d\overline{z_j}$, salvo en las singularidades de $f$. Pero al ser analítica en los puntos que no son singularidades, si $f = u+iv$, por las ecuaciones de Cauchy-Riemann vemos que:

$$\frac{\partial f}{\partial \overline{z_j}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x_j} + i\frac{\partial}{\partial y_j}\right)(u+iv) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x_j} + i\frac{\partial v}{\partial x_j} + i\frac{\partial u}{\partial y_j} - \frac{\partial v}{\partial y_j}\right) = 0$$

y por tanto $df = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial z_j}dz_j \in \Omega^1(M)$.

Para el caso $n = 1$, $M = \Gamma$ es una superficie de Riemann y dadas dos 1-formas meromorfas $\theta_1, \theta_2$ sobre $\Gamma$ es posible definir el cociente $\theta_1/\theta_2$ como una función meromorfa, siempre que $\theta_2 \not\equiv 0$, de la siguiente manera: si $z = x+iy$ es una coordenada local definida en $U \subseteq \Gamma$ entonces $\theta_i = g_i(z)dz$, con $g_i : U \to \mathbb{C}$ una función meromorfa, $i = 1, 2$. En $U$ definimos $\frac{\theta_1}{\theta_2}(z) = \frac{g_1(z)}{g_2(z)}$. Para ver que la definición no depende de las coordenadas sea $\zeta = \xi + i\eta$ otra coordenada definida en un abierto $V$ tal que $U \cap V \neq \emptyset$. Supongamos que $\theta_i = h_i(\zeta)d\zeta$ en $V$. Como $d\zeta = (\xi_x - i\xi_y)dz$, entonces en $U \cap V$, $h_i(\zeta)d\zeta = h_i(\zeta(z))(\xi_x - i\xi_y)dz = g_i(z)dz$. Por tanto:

$$\frac{g_1(z)}{g_2(z)} = \frac{h_1(\zeta(z))(\xi_x - i\xi_y)}{h_2(\zeta(z))(\xi_x - i\xi_y)} = \frac{h_1(z)}{h_2(z)}.$$

Si denotamos por $\mathcal{M}(\Gamma)$ el cuerpo de funciones meromorfas definidas sobre $\Gamma$, $\Omega^1(\Gamma)$ es un espacio vectorial sobre $\mathcal{M}(\Gamma)$ de dimensión 1 porque si $\theta_1, \theta_2 \in \Omega^1(\Gamma)$, $\theta_2 = f\theta_1$, donde $f = \frac{\theta_2}{\theta_1}$. En particular, si $f \in \mathcal{M}(\Gamma)$, todo elemento de $\Omega^1(\Gamma)$ se puede escribir como $gdf$, con $g \in \mathcal{M}(\Gamma)$.

### 1.2.2. Variedades simplécticas

**Definición 1.5.** Sea $M$ una variedad diferencial (analítica) y $\omega$ una 2-forma diferencial(meromorfa) cerrada no degenerada sobre $M$. La pareja $(M, \omega)$ se conoce como una variedad simpléctica y decimos que $\omega$ dota de una estructura simpléctica a $M$.

**Nota 1.5.** En el caso diferenciable, $(T_pM, \omega(p))$ es un espacio vectorial simpléctico para cada $p \in M$. Como $\dim M = \dim T_pM$, si $M$ admite una estructura simpléctica, por la nota 1.3, su dimensión es par. De la misma forma, en el caso analítico, $(T_p^{1,0}M, \omega(p))$ es un espacio vectorial simpléctico para cada $p \in M$ y como $\dim M = \dim T_p^{1,0}M$, la dimensión de $M$ es par.

Para no recargar la notación, en adelante cuando $M$ sea una variedad analítica escribiremos $T_pM$ en vez de $T_p^{1,0}M$ y $T_p^*M$ en vez de $(T_p^*M)^{1,0}$ y nos referiremos a estos espacios como el espacio tangente y el espacio cotangente a $M$ en $p$, respectivamente.

**Ejemplo 1.2.** $M = \mathbb{R}^{2n} = \{(p_1, ..., p_n, q_1, ..., q_n)\}$ ó $M = \mathbb{C}^{2n}$ y $\omega = \sum_{i=1}^n dp_i \wedge dq_i$.

**Ejemplo 1.3.** Sea $M = \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$, donde $\mathbb{P}^1 = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ denota la esfera de Riemman. En $\mathbb{C}^2 = \{(p, q)\}$ ponemos $\omega = dp \wedge dq$. Si $\widetilde{p}$ y $\widetilde{q}$ son las coordenadas en el infinito $\widetilde{p}, \widetilde{q} : \mathbb{P}^1 \setminus \{0\} \to \mathbb{C}$, $\widetilde{p}(p) = \frac{1}{p}$ y $\widetilde{q}(q) = \frac{1}{q}$ entonces en la vecindad $\mathbb{P}^1 \setminus \{0\} \times \mathbb{P}^1 \setminus \{0\}$ de $\{\infty\} \times \{\infty\}$ tenemos:

$$\omega = \frac{1}{\widetilde{p}^2 \widetilde{q}^2} d\widetilde{p} \wedge d\widetilde{q}.$$

**Ejemplo 1.4.** Sea $N$ una variedad diferencial de dimensión $n$ y $M = T^*N$, el fibrado cotangente de $N$ que tiene dimensión $2n$. Se puede definir una estructura simpléctica sobre $M$ de la siguiente manera:

Sea $\pi : M \to N$ la proyección canónica dada por $\pi(\alpha) = x$ si $\alpha \in T_x^*N$. Entonces, para cada $v \in T_\alpha M$ definimos:

$$\theta(v) = \alpha(d\pi_\alpha(v)).$$

Veamos que $\theta$ es una 1-forma diferencial sobre $M$. Para esto, sea $p : U \subseteq N \to \mathbb{R}^n$ una carta de $N$ en una vecindad abierta $U$ de $x$. Como las 1-fomas $dp_1, ..., dp_n$ son linealmente independientes en todo $U$, podemos escribir:

$$\alpha = q_1(\alpha) dp_1(x) + \cdots + q_n(\alpha) dp_n(x).$$

Luego, las funciones $p_1 = p_1 \circ \pi, ...., p_n = p_n \circ \pi, q_1, ..., q_n$ son coordenadas locales de $M$. En estas coordenadas:

$$\begin{aligned}\theta(\alpha)(v) = \alpha(d\pi_\alpha(v)) &= q_1(\alpha)dp_1(x)(d\pi_\alpha(v)) + \cdots + q_n(\alpha)dp_n(x)(d\pi_\alpha(v)) \\ &= q_1(\alpha)dp_1(\alpha)(v) + \cdots + q_n(\alpha)dp_n(\alpha)(v),\end{aligned}$$

lo que muestra que $\theta$ es una 1-forma sobre $M$. $\theta$ se conoce como la forma de Liouville. Note que $\theta$ no depende de las coordenadas. Si ponemos $\omega = -d\theta$, $\omega$ es una 2-forma y es no degenerada porque en las coordenadas anteriores $\omega = \sum_{i=1}^n dp_i \wedge dq_i$.

Un hecho interesante es que toda variedad simpléctica es localmente difeomorfa a la del ejemplo 1.2. El siguiente teorema, que tiene validez tanto en el contexto diferencial como analítico, es demostrado en el anexo A.

**Teorema 1.1** (Darboux). *Sea $\omega$ una 2-forma diferencial cerrada no degenerada en una vecindad de un punto $x \in \mathbb{R}^{2n}$. Entonces es posible escoger un sistema de coordenadas $(p_1, .., p_n, .q_1, .., q_n)$ en un abierto de $x$ tal que $\omega = \sum_{i=1}^n dp_i \wedge dq_i$.*

**Definición 1.6.** Decimos que $(p_1, .., p_n, q_1, ..., q_n)$ son coordenadas simplécticas de $(M, \omega)$ si localmente $\omega = \sum_{i=1}^n dp_i \wedge dq_i$.

En estos términos, el teorema de Darboux asegura que toda variedad simpléctica posee localmente coordenadas simplécticas.

La estructura simpléctica de una variedad $M$ establece un isomorfismo entre $T_pM$ y $T_p^*M$: A cada vector $X \in T_pM$, $p \in M$, se le asocia la 1-forma $\omega_X : T_pM \to \mathbb{K}$ definida como $\omega_X(v) = \omega(p)(X, v)$, $v \in T_pM$. Esta correspondencia es uno a uno: si $\omega_X(v) = 0$, para todo $v \in T_pM$ entonces $X = 0$ porque $\omega$ es no degenerada. Como dim $T_pM =$ dim $M =$ dim $T_p^*M$, la correspondencia es sobre. De esta forma a cada campo vectorial le corresponde una única 1-forma diferencial (meromorfa) y viceversa.

**Definición 1.7.** Si $H : M \to \mathbb{R}($ ó $\mathbb{C})$ es una función diferenciable(meromorfa), llamaremos campo hamiltoniano asociado a $H$ al campo $X_H$ que le corresponde a la 1-forma $dH$.

Por definición, $X_H$ es el único campo vectorial en $M$ que satisface:

$$dH = \omega(X_H, \cdot) = i_{X_H}\omega.$$

**Ejemplo 1.5.** En $(\mathbb{K}^{2n}, dp \wedge dq)$, $dH = \sum_{i=1}^n \frac{\partial H}{\partial p_i}dp_i + \frac{\partial H}{\partial q_i}dq_i$. Si $\{e_k\}$ denota la base canónica de $\mathbb{K}^{2n}$ y ponemos $X_H = \sum_{i=1}^n a_ie_i + b_ie_{i+n}$ entonces si $v \in \mathbb{K}^{2n}$:

$$dH(v) = \omega(X_H, v) = \sum_{j=1}^n a_j\omega(e_j, v) + b_j\omega(e_{j+n}, v) = \sum_{j=1}^n a_jdq_j(v) - b_jdp_j(v).$$

Si $v = e_i$, $i = 1, ..., n$, $\frac{\partial H}{\partial p_i} = dH(e_i) = -b_i$ y si $v = e_{i+n}$, $i = 1, ..., n$, $\frac{\partial H}{\partial q_i} = dH(e_{i+n}) = a_i$. Por tanto, $X_H = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial H}{\partial q_i} e_i - \frac{\partial H}{\partial p_i} e_{i+n}$.

De la misma manera, si $(p_1, ..., p_n, q_1, ..., q_n)$ son coordenadas simplécticas sobre $(M, \omega)$,

$$X_H = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial H}{\partial q_i} \frac{\partial}{\partial p_i} - \frac{\partial H}{\partial p_i} \frac{\partial}{\partial q_i}$$

y en estas coordenadas, las ecuaciones diferenciales asociadas a $X_H$ son las ecuaciones de Hamilton:

$$\frac{dp_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial q_i}, \qquad \frac{dq_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial p_i}, \qquad i = 1, ..., n.$$

Nos referiremos a este tipo de sistemas de ecuaciones diferenciales como sistemas hamiltonianos autónomos con $n$ grados de libertad.

A continuación mencionamos algunos de los ejemplos clásicos de sistemas hamiltonianos.

**Ejemplo 1.6** (Oscilador armónico)**.** Sea $H(p, q) = \frac{1}{2}(p^2 + q^2)$ definida en $\mathbb{R}^2$. El sistema de ecuaciones diferenciales asociado es:

$$\frac{dp}{dt} = q, \qquad \frac{dq}{dt} = -p.$$

Más generalmente, $H(p, q) = \frac{1}{2}a^2p^2 + \frac{1}{2}b^2q^2$ con ecuaciones $\frac{dp}{dt} = a^2q$, $\frac{dq}{dt} = -b^2q$.

**Ejemplo 1.7** (Péndulo)**.** La ecuación diferencial $\frac{d^2p}{dt^2} + \sin(p) = 0$ ó como sistema de ecuaciones diferenciales:

$$\frac{dp}{dt} = q, \qquad \frac{dq}{dt} = -\sin(p),$$

es un sistema hamiltoniano autónomo si ponemos $H(p, q) = \frac{1}{2}q^2 - \cos(p)$.

**Ejemplo 1.8** (Problema de los $N$ cuerpos)**.** Consideremos $N$ puntos en movimiento en $\mathbb{R}^3$ con sus respectivas masas y supongamos que las únicas fuerzas que actúan sobre ellos son sus mutuas atracciones gravitacionales. Sea $p_i \in \mathbb{R}^3$ la posición de la partícula $i$-ésima con masa $m_i > 0$. Aplicando la segunda ley de Newton y la ley de gravitación universal la ecuación del movimiento es:

$$m_i \frac{d^2p_i}{dt^2} = \sum_{j=1, j\neq i}^{N} \frac{Gm_im_j(p_j - p_i)}{\|p_i - p_j\|^3} = \frac{\partial U}{\partial p_i}, \quad i = 1, ..., N,$$

donde $U = \displaystyle\sum_{1\leq i,j\leq N, j\neq i}^{N} \frac{Gm_im_j}{\|p_i - p_j\|}$ y $G$ es la constante de gravitación universal.

Si $p = (p_1, ..., p_N) \in \mathbb{R}^{3N}$ y $M = diag(m_1, m_1, m_1, ..., m_N, m_N, m_N)$ es la matriz diagonal con entradas $m_1, m_1, m_1, ..., m_N, m_N, m_N$, las ecuaciones se pueden escribir como:

$$M\frac{d^2p}{dt^2} = -\frac{\partial U}{\partial p}.$$

Sea $q = (q_1, ..., q_N) \in \mathbb{R}^{3N}$ dada por $q = Mp'$. Entonces $q_i = m_i p_i'$ es el momento de la $i$-ésima partícula. Las ecuaciones del movimiento son:

$$\frac{dp_i}{dt} = \frac{q_i}{m_i} = \frac{\partial H}{\partial q_i}, \qquad \frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial U}{\partial p_i} = -\frac{\partial H}{\partial p_i},$$

donde el hamiltoniano es $H = \sum_{j=1}^{N} \frac{\|q_i\|^2}{2m_i} - U$.

**Ejemplo 1.9** (Sistemas hamiltonianos lineales)**.** En $\mathbb{K}^{2n}$ sea:

$$H(p_1, ..., p_n, q_1, ..., q_n) = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{1}{2}a_{ij}p_ip_j + \frac{1}{2}b_{ij}q_iq_j + c_{ij}p_iq_j,$$

un hamiltoniano cuadrático, donde $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$ y $C = (c_{ij})$ son matrices de $n \times n$ con coeficientes constantes y $A$ y $B$ son simétricas. Si $p = (p_1, ..., p_n)$ y $q = (q_1, ..., q_n)$, el sistema de $2n$ ecuaciones diferenciales lineales resulta ser (ver capítulo 3):

$$\frac{dp}{dt} = C^tp + Bq, \qquad \frac{dq}{dt} = -Ap - Cq.$$

En el artículo [11] y en el apéndice 6 de [2] están dadas todas las formas normales a las cuales se pueden reducir estos sistemas de ecuaciones.

**Teorema 1.2.** *Sea $\phi_t$ el flujo de un campo hamiltoniano. Entonces $(\phi_t)^*\omega = \omega$, es decir, los flujos de campos hamiltonianos preservan la estructura simpléctica.*

*Demostración.* En términos de la derivada de Lie, hay que probar que $\mathfrak{L}_{X_H}\omega = 0$. Esto se deduce inmediatamente de la fórmula de Cartan: $\mathfrak{L}_X = i(X) \circ d + d \circ i(X)$, porque:

$$\mathfrak{L}_{X_H}\omega = i(X_H)(d\omega) + d(i(X_H)\omega) = d(dH) = 0.$$

□

**Corolario 1.2.** *Para cada $k > 0$, $(\phi_t)^*\omega^k = \omega^k$, donde $\omega^k = \omega \wedge \underbrace{\cdots}_{k\ veces} \wedge\omega$*

*Demostración.* $(\phi_t)^*\omega^k = (\phi_t)^*(\omega \wedge \cdots \wedge \omega) = (\phi_t)^*(\omega) \wedge \cdots \wedge (\phi_t)^*(\omega) = \omega^k$. □

**Corolario 1.3** (Liouville)**.** *En $(\mathbb{R}^{2n}, \omega)$, $(\phi_t)^*$ preserva el volumen.*

*Demostración.* Notemos que $\omega^n = n!dp_1 \wedge dq_1 \wedge \cdots \wedge dp_n \wedge dq_n = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} n!dp_1 \wedge \cdots \wedge dp_n \wedge dq_1 \wedge \cdots \wedge dq_n$. Como $(\phi_t)^*\omega^n = \omega^n$, entonces $(\phi_t)^*(dp_1 \wedge \cdots \wedge dp_n \wedge dq_1 \wedge \cdots \wedge dq_n) = dp_1 \wedge \cdots \wedge dp_n \wedge dq_1 \wedge \cdots \wedge dq_n$.

□

Podemos aplicar estas ideas para mostrar que una transformación lineal simpléctica tiene determinante 1. Sea $S : \mathbb{K}^{2n} \to \mathbb{K}^{2n}$ lineal simpléctica. Como $S$ es lineal, usando la identificación natural de $\mathbb{K}^{2n}$ con $T_p\mathbb{K}^{2n}$, $dS(p) = S$, para todo $p \in \mathbb{K}^{2n}$. El hecho de que $S$ sea simpléctica significa que $S^*\omega = \omega$ porque:

$$S^*\omega(p)(v,w) = \omega(S(p))(dS(p)(v), dS(p)(w)) = \omega(S(p))(S(v), S(w)) = \omega(p)(v,w).$$

Entonces $S^*\omega^n = \omega^n$, pero como $S^*\omega^n = \det(S)\omega^n$ entonces $\det(S) = 1$.

**Definición 1.8.** Si $F, H : M \to \mathbb{R}($ ó $\mathbb{C})$ son funciones diferenciables(meromorfas), el paréntesis de Poisson de $F$ y $H$, $(F,H)$, es una nueva función definida por:

$$(F,H)(p) = \frac{d}{dt}(F(\phi_H^t(p)))\Big|_{t=0} = X_H F.$$

donde $\phi_H^t(p)$ denota el flujo del campo $X_H$.

**Definición 1.9.** Una función $F$ es una integral primera de un campo vectorial $X$ si $F$ es constante a lo largo de las órbitas del campo, es decir, si $\{\phi_t\}$ denota el flujo de $X$, entonces para todo $p \in M$, $F(\phi_t(p))$ es constante respecto a $t$.

**Proposición 1.4.** *$F$ es una integral primera de un campo hamiltoniano $X_H$ si y sólo si el paréntesis de Poisson de $F$ y $H$ es idénticamente cero, $(F,H)(p) = 0$, para todo $p \in M$.*

Para poder calcular el paréntesis de Poisson de dos funciones no hace falta conocer los flujos de los campos hamiltonianos asociados. De hecho:

**Proposición 1.5.** *Si $F, H : M \to \mathbb{R}($ ó $\mathbb{C})$ son funciones diferenciables(meromorfas) sobre $M$, entonces $(F,H) = dF(X_H)$.*

*Demostración.* Por la regla de la cadena:

$$\begin{aligned}(F,H)(p) &= \frac{d}{dt}(F(\phi_H^t(p)))\Big|_{t=0} \\ &= dF(\phi_H^t(p))\left(\frac{d}{dt}(\phi_H^t(p))\right)\Big|_{t=0} \\ &= dF(p)(X_H(p)).\end{aligned}$$

□

**Corolario 1.4.** *Si $F, H : M \to \mathbb{R}(\ ó\ \mathbb{C})$ son funciones diferenciables(meromorfas) sobre $M$, entonces $(F, H) = \omega(X_F, X_H)$. En particular, $X_H F = -X_F H$.*

*Demostración.* $\omega_p(X_F(p), X_H(p)) = dF(p)(X_H(p)) = (F, H)(p)$. □

**Corolario 1.5.** *$H$ es una integral primera del flujo del campo hamiltoniano $X_H$.*

*Demostración.* $(H, H) = \omega_p(X_H, X_H) = 0$. □

**Ejemplo 1.10.** Si $(p_1, ..., p_n, q_1, ..., q_n)$ son coordenadas simplécticas sobre $(M, \omega)$, entonces:

$$(F, H) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial p_i}\frac{\partial H}{\partial q_i} - \frac{\partial F}{\partial q_i}\frac{\partial H}{\partial p_i}.$$

En particular $(p_j, H) = \frac{\partial H}{\partial q_j}$ y $(q_j, H) = -\frac{\partial H}{\partial p_j}$. Esto nos permite escribir las ecuaciones de campo $X_H$ como:

$$\frac{dp_i}{dt} = (p_i, H) \qquad \frac{dq_i}{dt} = (q_i, H) \qquad i = 1, ..., n$$

Un hecho importante es que las funciones diferenciables (meromorfas) sobre una variedad diferenciable (analítica) forman un algebra de Lie con el paréntesis de Poisson. Para probar esto veamos primero lo siguiente:

**Teorema 1.3.** *Si $F, H : M \to \mathbb{R}(\ ó\ \mathbb{C})$ son funciones diferenciables(meromorfas) entonces $X_{(F,H)} = [X_H, X_F]$.*

*Demostración.* En general, si $X$ y $Y$ son campos vectoriales y $\omega$ una forma sobre una variedad se cumple que $\mathfrak{L}_X(i(Y)\omega) = i(\mathfrak{L}_X Y)\omega + i(Y)(\mathfrak{L}_X \omega)$. Luego, por el teorema 1,2,

$$\begin{aligned} i([X_H, X_F])\omega = i(\mathfrak{L}_{X_H} X_F)\omega &= \mathfrak{L}_{X_H}(i(X_F)\omega) - i(X_F)(\mathfrak{L}_{X_H}\omega) \\ &= \mathfrak{L}_{X_H}(i(X_F)\omega) \\ &= i(X_H)(d(i(X_F)\omega)) + d(i(X_H)i(X_F)\omega) \\ &= d(\omega(X_F, X_H)) = d(F, H) = i(X_{(F,H)})\omega \end{aligned}$$

Por tanto, $X_{(F,H)} = [X_H, X_F]$.

□

**Corolario 1.6.** *Los campos hamiltonianos forman una subalgebra de Lie de $\mathfrak{X}(M)$.*

**Corolario 1.7.** *Las funciones diferenciables (meromorfas) sobre $M$ forman una algebra de Lie con el paréntesis de Poisson y la asignación $F \to -X_F$ es un morfismo de algebras de Lie.*

*Demostración.* Por el corolario 1,4, el paréntesis de Poisson es antisimétrico y bilineal porque:

$$(F,H)=\omega(X_F,X_H)=-\omega(X_H,X_F)=-(H,F),$$

$$(aH_1+bH_2,F)=\omega(X_{aH_1+bH_2},X_F)=\omega(aX_{H_1}+bX_{H_2},X_F)=a(H_1,F)+b(H_2,F).$$

La identidad de Jacobi se sigue del teorema 1.3 porque como $(F,H)=X_HF=\mathfrak{L}_{X_H}F=-\mathfrak{L}_{X_F}H$, entonces:

$$\begin{aligned}(F,(G,H)) &= -\mathfrak{L}_{X_F}(G,H)=\mathfrak{L}_{X_F}\mathfrak{L}_{X_G}H\\ (G,(H,F)) &= -\mathfrak{L}_{X_G}(H,F)=-\mathfrak{L}_{X_G}\mathfrak{L}_{X_F}H\\ (H,(F,G)) &= \mathfrak{L}_{X_{(F,G)}}H=\mathfrak{L}_{[X_G,X_F]}H,\end{aligned}$$

de donde se sigue que $(F,(G,H))+(G,(H,F))+(H,(F,G))=0$. □

**Corolario 1.8.** *Si $F_1$ y $F_2$ son integrales primeras del campo $X_H$, también lo es $(F_1,F_2)$. En otras palabras, las integrales primeras de $X_H$ son una subalgebra de Lie de todas las funciones diferenciables (meromorfas) de $M$.*

*Demostración.* Por la identidad de Jacobi, $((F_1,F_2),H)=(F_1,(F_2,H))+(F_2,(H,F_1))=0$. □

Ahora discutiremos la integrabilidad completa de sistemas Hamiltonianos autónomos.

**Definición 1.10.** Dos funciones $F$ y $G$ sobre $M$ están en involución si $(F,G)=0$.

**Definición 1.11.** Decimos que el campo $X_H$ es completamente integrable si existen $F_1,...,F_n$ funciones diferenciables(meromorfas) definidas sobre $M$ tales que:

1. $(F_i,F_j)=0$, $i,j=1,...,n$.
2. $(H,F_i)=0, i=1,...,n$.
3. $dF_1(p),...,dF_n(p)$ son linealmente independientes para todo $p\in M$, donde estén definidas, excepto tal vez en un conjunto discreto de puntos.

El teorema que justifica la definición de integrabilidad es el famoso teorema de Liouville-Arnold que es demostrado a continuación.

**Nota 1.6.** La variedad $M$ puede tener a lo más $n$ funciones en involución e independientes en el sentido de la definición anterior. Esto se debe a que si $F_1,...,F_m$ son funciones que satisfacen esas hipótesis entonces $X_{F_1}(p),...,X_{F_m}(p)\in T_pM$ son vectores linealmente independientes tales que $\omega(p)(X_{F_i}(p),X_{F_j}(p))=0$. Entonces el subespacio generado por estos vectores es un subespacio nulo de dimensión $m$. Por la proposición 1.3, $m\leq n$.

**Nota 1.7.** Si $F_1, ..., F_m$ son funciones sobre $M$, independientes en el sentido de que $dF_1, ..., dF_n$ son linealmente independientes en todo punto, entonces no existe función diferenciable (analítica) no nula $G : \mathbb{K}^m \to \mathbb{K}$ tal que $G(F_1(p), ..., F_m(p)) = 0$. Por esta razón, se suele decir que las funciones $F_1, ..., F_m$ son funcionalmente independientes.

**Ejemplo 1.11.** En $\mathbb{K}^{2n}$, supongamos que $H(p_1, ..., p_n, q_1, ..., q_n) = \sum_{i=1}^{n} H_i(p_i, q_i)$. $X_H$ es completamente integrable tomando $F_i = H_i$. Como $\dfrac{\partial H_i}{\partial p_k} = \dfrac{\partial H_i}{\partial q_k} = 0$ si $i \neq k$, entonces si $i \neq j$:

$$(F_i, F_j) = \frac{\partial H_i}{\partial p_i}\frac{\partial H_i}{\partial q_i} - \frac{\partial H_i}{\partial q_i}\frac{\partial H_j}{\partial p_i} + \frac{\partial H_i}{\partial p_j}\frac{\partial H_i}{\partial q_j} - \frac{\partial H_i}{\partial q_j}\frac{\partial H_j}{\partial p_j} = 0.$$

Además $(H, F_i) = \sum_{j=1}^{n}(H_j, H_i) = 0$.

**Teorema 1.4** (Liouville-Arnold)**.** *Sea $(M, \omega)$ una variedad diferencial simpléctica. Si $H = F_1, ..., F_n$ son funciones sobre $(M, \omega)$, en involución e independientes en el sentido de que $dF_1, ..., dF_n$ son linealmente independientes en todo punto, entonces dado $\vec{c} = (c_1, ..., c_n) \in \mathbb{R}^n$ tenemos que:*

1. *El conjunto $M_{\vec{c}} = \{p \in M | F_i(p) = c_i, i = 1, .., n\}$ es una subvariedad de $M$ de dimensión $n$ invariante por los flujos de los hamiltonianos $F_i$ y tal que $\omega|_{M_{\vec{c}}} = 0$.*

2. *Si $M_{\vec{c}}$ es compacta y conexa, esta es difeomorfa al toro de dimensión $n$, $\mathbb{T}^n$ y existen coordenadas $\varphi_1, ..., \varphi_n$ en las que las ecuaciones del sistema hamiltoniano de $H$ toman la forma $\frac{d\varphi_i}{dt} = w_i(\vec{c})$, donde $w_1(\vec{c}), ..., w_n(\vec{c})$ son constantes, que dependen de $\vec{c}$.*

3. *Existe una vecindad de $M_{\vec{c}}$ difeomorfa a $B^n \times \mathbb{T}^n$, $B^n$ la bola unitaria en $\mathbb{R}^n$, donde se pueden construir coordenadas $I_1, ..., I_n, \varphi_1, ..., \varphi_n$ tales que $\omega = \sum_{i=1}^{n} dI_i \wedge d\varphi_i$ en las cuales las ecuaciones toman la forma:*

$$\frac{dI_i}{dt} = 0, \qquad \frac{d\varphi_i}{dt} = w_i(\vec{c}).$$

4. *El sistema es integrable por cuadraturas.*

**Nota 1.8.** En esta demostración seguimos [2] y [1]. En el contexto de sistemas Hamiltonianos analíticos es cierto que los sistemas completamente integrables pueden resolverse mediante cuadraturas (Liouville) si bien la parte geométrica del enunciado debida a Arnold, no se verifica (ver [6]).

*Demostración.* Sea $F : M \to \mathbb{R}^n$ dada por $F(p) = (F_1(p), ..., F_n(p))$. $F$ es una función diferenciable y $dF(p) = (dF_1(p), ..., dF_n(p))$. Entonces $M_{\vec{c}} = F^{-1}(\vec{c})$ y como $dF_1(p), ..., dF_n(p)$ son linealmente independientes para todo $p \in M$, $dF(p)$ es sobreyectiva para todo $p \in M$. Por el teorema de la función implícita, $M_{\vec{c}}$ es una subvariedad de $M$ de dimensión

$\dim M - \dim \mathbb{R}^n = 2n - n = n$. El hecho de que $M_{\vec{c}}$ sea invariante por los flujos se sigue de que $(F_i, F_j)(p) = \frac{d}{dt}(F_i(\phi_j^t(p)))\Big|_{t=0} = 0$, para todo $p \in M$, porque si $p \in M_c$, como $F_i(\phi_j^t(p))$ es constante, $F_i(\phi_j^t(p)) = F_i(p) = c_i$, $i = 1, ..., n$.

Para probar que $\omega|_{M_{\vec{c}}} = 0$, veamos que existen $n$ campos vectoriales linealmente independientes que anulan a $\omega$. En efecto, estos campos no son más que $X_{F_1}, ..., X_{F_n}$, que son linealmente independientes en todo punto porque, por hipótesis, $dF_1, ..., dF_n$ lo son. Si $p \in M_{\vec{c}}$, $X_{F_1}(p), ..., X_{F_n}(p) \in T_pM_{\vec{c}}$ porque $X_{F_i}(p)$ es el vector tangente a la curva $\phi_i^t(p) \in M_{\vec{c}}$ en $t = 0$. Como $\dim T_pM_{\vec{c}} = n$, $X_{F_1}(p), ..., X_{F_n}(p)$ son una base de $T_pM_{\vec{c}}$. Ahora, $\omega(X_{F_i}, X_{F_j}) = (F_j, F_i) = 0$, entonces por la bilinealidad de $\omega$, $\omega(p)(v, w) = 0$, para todo $v, w \in T_pM_{\vec{c}}$. Esto demuestra la parte 1. Observe también que $[X_{F_i}(p), X_{F_j}(p)] = -(F_i, F_j)(p) = 0$.

**Lema 1.1.** *Si $M$ es una variedad diferencial de dimensión $n$ compacta y conexa que tiene $n$ campos vectoriales $X_1, ..., X_n$ tales que $[X_i, X_j] = 0$ y que son linealmente independientes en cada punto entonces $M$ es difeomorfa al toro $n$-dimensional $\mathbb{T}^n$.*

*Demostración.* Sean $\phi_i^t$ los flujos de los campos $X_i$, $i = 1, ..., n$. Como $[X_i, X_j] = 0$ entonces $\phi_i^t \circ \phi_j^s = \phi_j^s \circ \phi_i^t$ para todo $t, s \in \mathbb{R}$ (los flujos están definidos en todo $\mathbb{R}$ porque $M$ es compacta). Podemos definir una acción $g$ del grupo aditivo $\mathbb{R}^n$ sobre $M$ de la siguiente manera:

$$g : \mathbb{R}^n \times M \to M, g((t_1, ..., t_n), p) = \phi_1^{t_1} \circ ... \circ \phi_n^{t_n}(p).$$

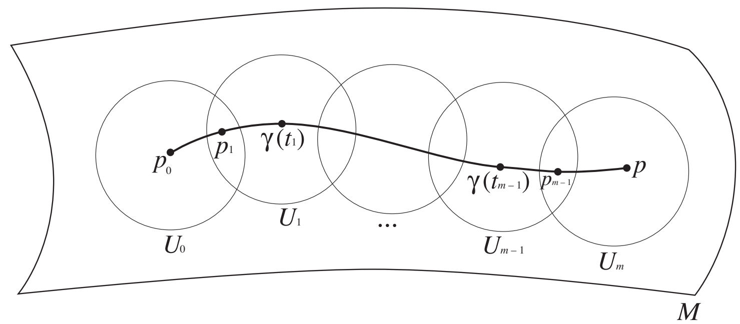
En efecto, como $\phi_i^0 = id$, $g(\vec{0}, p) = p$. Además, por la conmutatividad de los flujos: $g((t_1 + s_1, ..., t_n + s_n), p) = g((t_1, ..., t_n), g((s_1, ..., s_n), p))$.

Sea $p_0 \in M$ fijo y notemos por $g_0 : \mathbb{R}^n \to M$ a $g_0(\vec{t}) = g(\vec{t}, p_0)$. $g_0$ es una función diferenciable y $dg_0(\vec{t})(a_1, ..., a_n) = a_1X_1(g_0(\vec{t})) + ... + a_nX_n(g_0(\vec{t}))$. Como los campos son linealmente independientes en cada punto, $dg_0(t)$ es 1-1 y por tanto un isomorfismo. Entonces $g_0$ es un difeomorfismo local. En particular existe una vecindad $V$ de $\vec{0}$ difeomorfa a una vecindad $U$ de $p_0$.

Veamos que $g_0$ es sobreyectiva. Dado $p \in M$, al ser $M$ conexa, existe una curva continua $\gamma : [0, 1] \to M$ que conecta a $\gamma(0) = p_0$ con $\gamma(1) = p$. Por cada $t \in [0, 1]$ escogemos una vecindad $U_t$ de $\gamma(t)$ difeomorfa a una vecindad $V_t$ de $\vec{0}$ ($U_t = g_{\gamma(t)}(V_t)$, donde $g_{\gamma(t)}(\vec{s}) = g(\vec{s}, \gamma(t))$. Los conjuntos abiertos $U_t$ cubren a $\gamma([0, 1])$ y como $M$ es compacta existen finitos $t_0 = 0, t_1, .., t_{m-1}, t_m = 1$ tales que los conjuntos $U_{t_i} = U_i$ cubren a $\gamma([0, 1])$. Sin pérdida de generalidad podemos suponer, tomando suficientes vecindades si es necesario, que $U_i \cap U_{i+1} \neq \emptyset$.

Sea $p_1 \in U_0 \cap U_1$, entonces existen $\vec{t_0} \in V_0$ y $\vec{s_0} \in V_1$ tales que $p_1 = g_0(\vec{t_0}) = g(\vec{t_0}, p_0)$ y $\gamma(t_1) = g(\vec{s_0}, p_1))$. Sea $p_2 \in U_1 \cap U_2$, entonces $p_2 = g(\vec{s_1}, \gamma(t_1))$ para algún $\vec{s_1} \in V_1$. Si ponemos $\vec{t_1} = \vec{s_0} + \vec{s_1}$, $g(\vec{t_1}, p_1) = p_2$. Repitiendo este procedimiento (ver Figura **1-1**) podemos encontrar puntos $p_i \in U_i \cap U_{i+1}$ y vectores $\vec{t_2}, ..., \vec{t}_{m-1}$ tales que $p_{i+1} = g(\vec{t_i}, p_i)$. Si llamamos $\vec{t} = \vec{t_0} + ... + \vec{t}_{m-1}$ entonces $g(\vec{t}, p_0) = p_m = p$, es decir, $p = g_0(\vec{t})$.

**Figura 1-1**.: $g_0$ es una función sobreyectiva.




$g_0$ no puede ser inyectiva por que si lo fuera, esta establecería un difeomorfismo entre $M$ que es compacta y $\mathbb{R}^n$ que no lo es. Sea $G_{p_0}$ el subgrupo de isotropía de $p_0$, es decir:

$$G_{p_0} = \{\vec{t} \in \mathbb{R}^n | g(\vec{t}, p_0) = p_0\} = g_0^{-1}(p_0).$$

Este subgrupo de $\mathbb{R}^n$ es independiente del punto $p_0$ porque dado cualquier otro $p \in M$ podemos escribir $p = g(\vec{t_0}, p_0)$ y si $\vec{t} \in G_{p_0}$, $g(\vec{t}, p) = g(\vec{t} + \vec{t_0}, p_0) = g(\vec{t_0}, g(\vec{t}, p_0)) = g(\vec{t_0}, p_0) = p$, es decir, $G_{p_0} \subseteq G_p$. De la misma forma $G_p \subseteq G_{p_0}$. Notemos por $H$ a este subgrupo.

$H$ es un conjunto discreto de $\mathbb{R}^n$. En efecto, ya sabemos que $\vec{0}$ tiene una vecindad $V$ difeomorfa a la vecindad $U = g_0(V)$ de $p_0$, en particular $g_0|_V$ es inyectiva, por tanto no existe $\vec{t} \in V$, $\vec{t} \neq \vec{0}$ con $g(\vec{t}, p_0) = p_0$. Ahora dado $\vec{t} \in H$, la vecindad $\vec{t} + V$ de $\vec{t}$ no contiene ningún otro punto de $G$ porque si $\vec{s} \in (\vec{t} + V) \cap H$, entonces $\vec{s} - \vec{t} \in V \cap H = \{\vec{0}\}$, es decir $\vec{s} = \vec{t}$.

Hemos probado que $H$ es un subgrupo discreto de $\mathbb{R}^n$. Todo subgrupo discreto de $\mathbb{R}^n$ es de la forma $v_1\mathbb{Z} + ... + v_k\mathbb{Z}$, donde $v_1, ..., v_k \in \mathbb{R}^n$ son vectores linealmente independientes (lema 3, página 276, [2]). Podemos escribir entonces $H = v_1\mathbb{Z} + ... + v_k\mathbb{Z}$.

Veamos que $k = n$. Sea $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ un isomorfismo lineal tal que $A(2\pi e_i) = v_i$, $i = 1, ..., k$. Note que $H = A(2\pi e_1\mathbb{Z} + ... + 2\pi e_k\mathbb{Z})$. Ahora, sea $G : \mathbb{T}^k \times \mathbb{R}^{n-k} \to M$, definida como:

$$G(\varphi_1, ..., \varphi_k, s) = g_0(A(\varphi_1, ..., \varphi_k, s)) = g(A(\varphi_1, ..., \varphi_k, s), p_0), \quad (\varphi_1, ..., \varphi_k) \mod 2\pi.$$

Para ver que $G$ está bien definida supongamos que $(\varphi_1, ..., \varphi_k) = (\psi_1, ..., \psi_k) \mod 2\pi$. Entonces $A(\varphi_1 - \psi_1, ..., \varphi_k - \psi_k, 0) \in H$ y $g_0(A(\varphi_1, ..., \varphi_k, s) - A(\psi_1, ..., \psi_k, s)) = p_0$.

$G$ es un difeomorfismo local y sobreyectiva porque $g_0$ es un difeomorfismo local y sobre y $A$ es un isomorfismo. $G$ es inyectiva porque si $G(\varphi_1, ..., \varphi_k, s_1) = G(\psi_1, ..., \psi_k, s_2)$ entonces $g_0(A(\varphi_1 - \psi_1, ..., \varphi_k - \psi_k, s_1 - s_2)) = p_0$, es decir, $A(\varphi_1 - \psi_1, ..., \varphi_k - \psi_k, s_1 - s_2) \in H = A(2\pi e_1\mathbb{Z} + ... + 2\pi e_k\mathbb{Z})$. De esto se deduce que $s_1 = s_2$ y $(\varphi_1, ..., \varphi_k) = (\psi_1, ..., \psi_k) \mod 2\pi$. Como un difeomorfismo local biyectivo es un difeomorfismo, $G$ es un difeomorfismo. Como $M$ es compacta, $k = n$ y $M$ es difeomorfa a $\mathbb{T}^n$. □

Aplicando el lema a $M_{\vec{c}}$, vemos que esta variedad es difeomorfa a $\mathbb{T}^n$ y usando el difeomorfismo $G$ construimos coordenadas $\varphi_1, ..., \varphi_n : M_c \to \mathbb{R}$ definidas por:

$$p = g(A(\varphi_1(p), ..., \varphi_n(p)), p_0).$$

Note que si $w = (w_1, ..., w_n) \in \mathbb{R}^n$ es tal que $A(w) = e_1$ y escribimos $\vec{t} = (t_1, ..., t_n) = A(\varphi_1(p), ..., \varphi_n(p))$ entonces:

$$\begin{aligned}
\varphi_i(\phi_1^t(p)) &= \varphi_i(\phi_1^t(g(\vec{t}, p_0))) \\
&= \varphi_i(\phi_1^t(\phi_1^{t_1} \circ ... \circ \phi_n^{t_n}(p_0)) \\
&= \varphi_i(\phi_1^{t+t_1} \circ ... \circ \phi_n^{t_n}(p_0)) \\
&= \varphi_i(g(te_1 + \vec{t}, p_0)) \\
&= \varphi_i(g(A(tw + (\varphi_1(p), ..., \varphi_n(p))), p_0)) = tw_i + \varphi_i(p).
\end{aligned}$$

Como $X_H(p)(\varphi_i) = \frac{d}{dt}(\varphi_i(\phi_1^t(p)))\big|_{t=0} = (\varphi_i, H)(p)$, entonces $X_H(p)(\varphi_i) = w_i$. Por tanto las ecuaciones del campo hamiltoniano $X_H$ son:

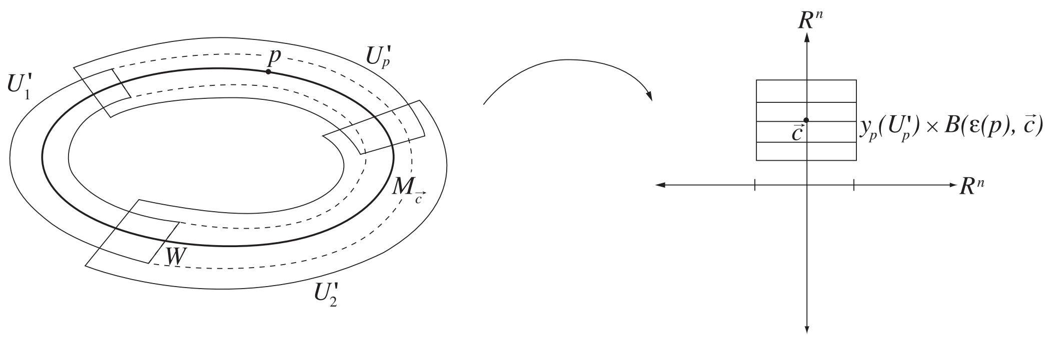
$$\frac{d\varphi_i}{dt} = w_i = w_i(\vec{c}), \qquad i = 1, ..., n$$

cuya solución está dada por $\varphi_i(t) = \varphi_i(0) + tw_i(\vec{c})$. Hemos probado la parte 2.

Veamos que existe una vecindad de $M_{\vec{c}}$ difeomorfa a $B^n \times \mathbb{T}^n$. Sea $p \in M_{\vec{c}}$. Como los diferenciales de las funciones $F_1, ..., F_n$ son independientes, estas son parte de un sistema de coordenadas en una vecindad $V_p$ alrededor de $p$ en $M$, es decir, existen funciones $y_1, ..., y_n$ diferenciables definidas en $V_p$ tales que $v_p = (y_p, F) = (y_1, ..., y_n, F_1, ..., F_n)$ son coordenadas en $V_p$. Si ponemos $U_p = V_p \cap M_{\vec{c}}$, $U_p$ es un abierto en $M_{\vec{c}}$ tal que $v_p(U_p) = (\mathbb{R}^n \times \{c\}) \cap v_p(V_p)$. Sea $U'_p \subseteq U_p$ vecindad conexa de $p$ tal que $\overline{U'_p}$ es compacta y existe $\varepsilon(p)$ de forma que $y_p(U'_p) \times B(\varepsilon(p), \vec{c}) \subseteq v_p(V_p)$, donde $B(\varepsilon(p), \vec{c})$ es la bola con centro en $\vec{c}$ y radio $\varepsilon(p)$ en $\mathbb{R}^n$. Los $U'_p$ son un cubrimiento de $M_{\vec{c}}$ y por tanto existen finitos puntos $p_1, ..., p_m \in M_{\vec{c}}$ tales que $U'_i = U'_{p_i}$ cubren $M_{\vec{c}}$.

Si $\varepsilon = \min_{1\leq i\leq m} \varepsilon(p_i)$ entonces $W = \bigcup_{i=1}^{m} v_{p_i}^{-1}(y_{p_i}(U_i') \times B(\varepsilon, \vec{c}))$ es una vecindad abierta de $M_{\vec{c}}$ tal que si $\vec{d} \in B(\varepsilon, \vec{c})$, $M_{\vec{d}} \subset W$, ver Figura **1-2**. De hecho $M_{\vec{d}} = \bigcup_{i=1}^{m} y_{p_i}^{-1}(y_{p_i}(\overline{U_i'}) \times \{d\})$. Como $v_{p_i}$ es un difeomorfismo, el conjunto $v_{p_i}^{-1}(y_{p_i}(\overline{U_i'}) \times \{\vec{d}\})$ es compacto y conexo. Por tanto $M_{\vec{d}}$ es compacto y conexo para cada $\vec{d} \in B(\varepsilon, \vec{c})$.

**Figura 1-2.**: $M_{\vec{c}}$ posee una vecindad $W$ difeomorfa a $B^n \times \mathbb{T}^n$.




Por la parte 2. sabemos que $M_{\vec{d}}$ tiene coordenadas angulares, digamos $(\varphi_1^{\vec{d}}, ..., \varphi_n^{\vec{d}})$ definidas por $p = g(A(\varphi_1^{\vec{d}}(p), ..., \varphi_n^{\vec{d}}(p)), p_0)$, $p, p_0 \in M_{\vec{d}}$, $p_0$ fijo. Como $F(p_0) = \vec{d}$, las coordenadas dependen del punto $p_0$. Como $g$ y $A$ son diferenciables, las coordenadas dependen diferenciablemente de $p_0$.

La función $(F, \varphi) : W \to B^n \times \mathbb{T}^n$ dada por:

$$(F(p), \varphi(p)) = (F_1(p), ..., F_n(p), \varphi_1^{F(p)}(p), ..., \varphi_1^{F(p)}(p)),$$

define coordenadas en $W$, en las que las ecuaciones del campo hamiltoniano $X_H$ son:

$$\frac{dF}{dt} = 0, \qquad \frac{d\varphi}{dt} = w(F),$$

porque $X_H(F_i) = (F_i, H) = (F_i, F_1) = 0$. En estas coordenadas la solución está dada por $F(t) = F(0)$ y $\varphi(t) = \varphi(0) + tw(F(0))$.

En general las coordenadas $(F, \varphi)$ no son simplécticas, pero es posible construir coordenadas simplécticas $(I_1, .., I_n, \varphi_1, ..., \varphi_n)$ en una vecindad de $M_{\vec{c}}$, donde $I_i = I_i(F_1, ..., F_n)$. En estas coordenadas también tenemos que:

$$\frac{dI}{dt} = 0,\ I = (I_1, ..., I_n), \qquad \frac{d\varphi}{dt} = w_i = w_i(F),\ \varphi = (\varphi_1, ..., \varphi_n), \qquad i = 1, ..., n.$$

Solo vamos a construir las coordenadas para el caso canónico $M = \mathbb{R}^{2n}, \omega = \sum_{i=1}^{n} dp_i \wedge dq_i$. Tenemos que construir un difeomorfismo simpléctico $\psi : W \to B^n \times \mathbb{T}^n$. Por cada $\vec{c} \in \operatorname{Im} F \subseteq \mathbb{R}^n$, sabemos que $M_{\vec{c}}$ es difeomorfa a $\mathbb{T}^n$. Si $\gamma_i, i = 1, ..., n$, detonan los ciclos fundamentales de $\mathbb{T}^n$ dados por $\gamma_i(t) = 2\pi t e_i \mod 2\pi, t \in [0,1]$, llamemos $\gamma_i(\vec{c})$ a los ciclos de $M_{\vec{c}}$ que proviene de los ciclos $\gamma_i$. Definimos $\lambda = (\lambda_1, ..., \lambda_n) : F(W) \to \mathbb{R}^n$ por:

$$\lambda_i(\vec{c}) = \frac{1}{2\pi} \int_{\gamma_i(\vec{c})} pdq,$$

donde $pdq = \sum_{i=1}^{n} p_i dq_i$. Supongamos que $\lambda$ es un difeomorfismo sobre su imagen ([1], capítulo 5, página 398). Entonces las funciones $I_i = \lambda_i \circ F : W \to \mathbb{R}^n$ son las primeras $n$ coordenadas deseadas. Ahora buscaremos una función $\Gamma : W \to \mathbb{T}^n$ tal que $(I, \Gamma)$ son coordenadas simplécticas.

Sea $x_0 = (p_0, q_0) = (p_0^1, ..., p_0^n, q_0^1, ..., q_0^n) \in M_{\vec{c}}$ fijo. Como $\det(\partial F_i / \partial p_j) \neq 0$ podemos despejar $p$ de la ecuación $F(p,q) = \vec{c} = \lambda^{-1}(I)$, para $I$ fijo. Luego, en una vecindad $V$ de $x_0$ en $\mathbb{R}^{2n}$ obtenemos que $p$ depende de $q$ e $I$, $p = p(I,q)$, $q(x_0) = q_0$. Pongamos:

$$S(I,q) = \int_{(p_0,q_0)}^{(p,q)} p(I,q) dq,$$

donde se integra sobre cualquier camino que une a $(p_0, q_0)$ con $(p,q)$, el camino está sobre el toro $M_{\lambda^{-1}(I)}$. En una vecindad simplemente conexa de $q_0$, $S$ está definida unívocamente porque la forma $pdq$ es cerrada en $M_{\lambda^{-1}(I)}$, pero al verla como función definida globalmente $S$ es multivaluada. Note que por el teorema fundamental del cálculo,

$$\frac{\partial S}{\partial q_i} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial q_i} \int_{q_0}^{q} p_j(I,q) dq_i = p_i(I,q) = p_i.$$

Sea $\Gamma : W \to \mathbb{T}^n$, $\Gamma = (\Gamma_1, ..., \Gamma_n)$, donde:

$$\Gamma_i(p,q) = \left. \frac{\partial S(q,I)}{\partial I_i} \right|_{I = \lambda(F(p,q))}.$$

Para ver que $\Gamma$ está bien definida calculemos sus variaciones sobre los ciclos $\gamma_k(\vec{c}) = \gamma_k(\lambda^{-1}(I))$. Estos están dados por:

$$\begin{aligned} \int_{\gamma_k(\vec{c})} d\Gamma_i = \int_{\gamma_k(\vec{c})} d\left(\frac{\partial S}{\partial I_i}\right) &= \frac{\partial}{\partial I_i}\left(\int_{\gamma_k(\vec{c})} dS\right) \\ &= \frac{\partial}{\partial I_i}\left(\int_{\gamma_k(\vec{c})} pdq\right) = \frac{\partial}{\partial I_i}\left(2\pi\lambda_k(\vec{c})\right) = 2\pi \frac{\partial I_k}{\partial I_i} = 2\pi\delta_{ki}, \end{aligned}$$

donde usamos el hecho de que $dS|_{I=\lambda(\vec{c})} = pdq$.

Finalmente se define $\psi = I \times \Gamma : W \to B^n \times \mathbb{T}^n$ y suponemos que es biyectiva. La transformación es simpléctica porque:

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^n dp_i \wedge dq_i + \sum_{i=1}^n d\Gamma_i \wedge dI_i &= d\left(\sum_{i=1}^n p_i \wedge dq_i + \Gamma_i \wedge dI_i\right) \\ &= d\left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial S}{\partial q_i} \wedge dq_i + \sum_{i=1}^n \frac{\partial S}{\partial I_i} \wedge dI_i\right) \\ &= d(dS) = 0.\end{aligned}$$

Al ser simpléctica, $\psi$ es un difeomorfismo local y como es biyectiva es un difeomorfismo global. Esto demuestra el enunciado 3.

Para terminar, observe que todas las construcciones que se realizaron se obtuvieron por operaciones algebraicas (invertir funciones) y cuadraturas (cálculo de integrales de funciones conocidas). Por tanto, es posible integrar por cuadraturas el sistema hamiltoniano canónico de $2n$ ecuaciones conociendo $n$ integrales primeras en involución. Esto demuestra la parte 4 y la demostración del teorema queda completa. $\square$

**Nota 1.9.** Si $M_{\vec{c}}$ es conexa y los flujos $\phi_i^t$ de los campos $X_i$, $i = 1, ..., n$, están definidos en toda $M_{\vec{c}}$ entonces $M_{\vec{c}}$ es difeomorfa a $\mathbb{T}^k \times \mathbb{R}^{n-k}$, para algún $k$ entre 0 y $n$.

**Nota 1.10.** Las variables $I_i$ se conocen como las variables de acción, que junto con las variables $\varphi_i$ forman el sistema de coordenadas canónicas acción ángulo en una vecindad de $M_{\vec{c}}$.

**Ejemplo 1.12.** Para el caso del oscilador armónico $H(p,q) = \frac{p^2+q^2}{2}$ estamos en un grado de libertad. En este caso Im $H$ son los números reales no negativos y si $r \geq 0$, $\lambda(r) = \frac{1}{2\pi}\int_{rS^1} pdq = \frac{1}{2\pi}\int_{rB^1} dpdq = \frac{\pi r^2}{2\pi} = \frac{r^2}{2}$. Entonces la variable de acción es $I = H$. Consideremos el caso $p > 0$, $p(q, I) = \sqrt{2I - q^2}$. Aquí:

$$\begin{aligned}S(q,I) = \int_0^q p(q,I)dq = \int_0^q \sqrt{2I-q^2}dq &= \frac{q}{2}\sqrt{2I-q^2} + I \arcsin\left(\frac{q}{\sqrt{2I}}\right) \\ &= \frac{q}{2}\sqrt{2I-q^2} + I \arctan\left(\frac{q}{\sqrt{2I-q^2}}\right),\end{aligned}$$

donde usamos la identidad $\arcsin(x) = \arctan\left(\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right)$. Si calculamos $\varphi = \frac{\partial S}{\partial I}$, obtenemos $\varphi = \arctan\left(\frac{q}{p}\right)$. Entonces, el cambio de coordenadas no es otro que cambiar a coordenadas polares $p = r\cos(\varphi), q = r\sin(\varphi)$, con $I = \frac{r^2}{2}$.

## 1.3. Sistemas Hamiltonianos no autónomos, caso diferenciable

En esta sección seguimos [1]. Sea $M$ una variedad diferencial y $X : M \times \mathbb{R} \to TM$ un campo vectorial sobre $M$ que depende del tiempo, esto es, $X$ es una función suave y $X(\cdot, t) \in \mathfrak{X}(M)$, para todo $t \in \mathbb{R}$. A partir de $X$ podemos construir un campo vectorial $\widetilde{X}$ en $M \times \mathbb{R}$ de la siguiente manera:

$$\widetilde{X}(p,t) = (X(p,t),(t,1)),$$

en otras palabras, $\widetilde{X} = X + \frac{\partial}{\partial t}$. Es claro que $\widetilde{X} \in \mathfrak{X}(M \times \mathbb{K})$. $\widetilde{X}$ se conoce como la suspensión de $X$ a $M \times \mathbb{R}$. Decimos que $\gamma$ es una curva integral de $X$ en $p \in M$, si $\gamma(0) = p$ y $\gamma'(t) = X(\gamma(t), t)$.

Sea $\widetilde{\gamma}(t)$ una curva integral de $\widetilde{X}$ en $(p, t_0)$. Entonces $\widetilde{\gamma}'(t) = \widetilde{X}(\widetilde{\gamma}(t))$. Si ponemos $\widetilde{\gamma}(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t))$ entonces obtenemos:

$$\gamma_1'(t) = X(\gamma_1(t), t), \gamma_1(0) = p, \gamma_2'(t) = 1, \gamma_2(0) = t_0.$$

Por tanto, $\widetilde{\gamma}(t) = (\gamma(t), t+t_0)$, donde $\gamma(t)$ es una curva integral de $X$ en $p$. Si $\phi^s(p,t)$ denota el flujo de $X$, entonces el flujo de $\widetilde{X}$ está dado por $\widetilde{\phi}(p,t,s) = (\phi^s(p,t), t+s)$.

Como antes, sea $(M, \omega)$ una variedad simpléctica. Supongamos que tenemos $H : M \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función diferenciable. En este caso es imposible que la variedad $M \times \mathbb{R}$ sea simpléctica porque su dimensión es impar. Para cada $t \in \mathbb{R}$, sea $H(\cdot, t) : M \to \mathbb{R}$ la restricción de $H$ a $M \times \{t\}$. A esta función le asociamos el único campo $X_{H(\cdot,t)}$ sobre $M$ que satisface $dH(\cdot, t) = i_{X_{H(\cdot,t)}}\omega$.

Sea $X_H : M \times \mathbb{R} \to TM$ dado por $X_H(p,t) = X_{H(\cdot,t)}(p)$. Este es un campo vectorial que depende del tiempo y por tanto tiene su suspensión:

$$\widetilde{X}_H(p,t) = (X_H(p,t),(t,1)).$$

Usando coordenadas simplécticas $(p_i, q_i)$ en $M$, $\gamma(t)$ es una curva integral de $X_H$ si y sólo si:

$$\frac{d}{dt}(p_i(\gamma(t))) = \frac{\partial H}{\partial q_i}(\gamma(t), t),$$

$$\frac{d}{dt}(q_i(\gamma(t))) = -\frac{\partial H}{\partial p_i}(\gamma(t), t).$$

Si $\pi_1 : M \times \mathbb{R} \to M$ denota la proyección del primer factor, sea $\widetilde{\omega} = \pi_1^*(\omega)$(el pull-back de $\omega$ por $\pi_1$). Note que $\widetilde{\omega}$ es cerrada porque $d\widetilde{\omega} = d(\pi_1^*(\omega)) = \pi_1^*(d\omega) = \pi_1^*(0) = 0$.

**Proposición 1.6.** *$\widetilde{X}_H$ es el único campo sobre $M \times \mathbb{R}$ que satisface $i_{\widetilde{X}_H} dt = 1$ y $i_{\widetilde{X}_H}\widetilde{\omega} = dH - \frac{\partial H}{\partial t} dt$.*

*Demostración.* Por definición $(i_{\widetilde{X}_H} dt)(p,t) = dt(\widetilde{X}_H(p,t)) = dt(X_H(p,t),(t,1)) = 1$. Si $d|_M$ es la derivada exterior restringida a $M$, entonces $dH(p,t)(v,w) = d|_M(H(\cdot,t))(p)(v) + \frac{\partial H}{\partial t}(p,t)dt(p,t)(v,w)$, para todo $(p,t) \in M \times \mathbb{R}$ y $(v,w) \in T_{(p,t)}M \times \mathbb{R}$. Aplicando que $d\pi_1(v,w) = v$, obtenemos:

$$
\begin{aligned}
i_{\widetilde{X}_H}\widetilde{\omega}(p,t)(v,w) &= \widetilde{\omega}(p,t)(\widetilde{X}_H(p,t),(v,w)) = \omega(p)(d\pi_1(\widetilde{X}_H(p,t)), d\pi_1(v,w)) \\
&= \omega(p)(X_{H(\cdot,t)}(p), v) = (i_{X_{H(\cdot,t)}}\omega)(p)(v) \\
&= d(H(\cdot,t))(p)(v) = \left(dH - \frac{\partial H}{\partial t} dt\right)(p,t)(v,w).
\end{aligned}
$$

□

**Definición 1.12.** Si $F, G : M \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ son funciones diferenciables, se define el Paréntesis de Poisson vertical de $F$ y $G$ por la fórmula:

$$
\{F,G\}(p,t) = \frac{d}{ds}\left(F(\phi^s_{G(\cdot,t)}(p),t)\right)\Big|_{s=0}
$$

donde $\phi^s_{G(\cdot,t)}$ denota el flujo del campo $X_{G(\cdot,t)}$.

Es inmediato de la definición que $\{F,G\}(p,t) = (F(\cdot,t), G(\cdot,t))(p)$. Por el corolario 1.20, las funciones diferenciables sobre $M \times \mathbb{R}$ forman un algebra de Lie con este producto.

**Nota 1.11.** Si $(p_1,..,p_n,q_1,..,q_n)$ son coordenadas simplécticas locales sobre $M$ entonces:

$$
\{F,G\} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial p_i}\frac{\partial G}{\partial q_i} - \frac{\partial F}{\partial q_i}\frac{\partial G}{\partial p_i} = \widetilde{X}_F(G) - \frac{\partial G}{\partial t}.
$$

**Lema 1.2.** $\mathfrak{L}_{\widetilde{X}_H} F = \{F,H\} + \frac{\partial F}{\partial t}$. *En particular* $\mathfrak{L}_{\widetilde{X}_H} H = \frac{\partial H}{\partial t}$.

*Demostración.* Note que:

$$
\begin{aligned}
dF(X_H)(p,t) &= d|_M(F(\cdot,t))(p)(X_{H(\cdot,t)}(p)) + \frac{\partial F}{\partial t}(p,t)dt(X_{H(\cdot,t)}(p)) \\
&= \omega(p)(X_{F(\cdot,t)}(p), X_{H(\cdot,t)}(p)) = (F(\cdot,t), H(\cdot,t))(p) = \{F,H\}(p,t).
\end{aligned}
$$

Entonces $\mathfrak{L}_{\widetilde{X}_H} F = i(\widetilde{X}_H)(dF) = dF(X_H + \frac{\partial}{\partial t}) = \{F,H\} + \frac{\partial F}{\partial t}$. □

**Proposición 1.7.** *$F$ es una integral primera de $\widetilde{X}_H$ si y sólo si $\{F,H\} + \frac{\partial F}{\partial t} = 0$.*

*Demostración.* $F$ es una integral primera de $\widetilde{X}_H$ si y sólo si $\mathfrak{L}_{\widetilde{X}_H} F = 0$. $\square$

**Nota 1.12.** Si $F$ es una integral primera de $\widetilde{X}_H$ que no depende del tiempo, $F(p,t) = F(p)$, entonces $F$ es una integral primera de cada $X_{H(\cdot,t)}$, $t \in \mathbb{R}$. En efecto,

$$(F, H(\cdot,t))(p) = (F(\cdot,t), H(\cdot,t))(p) = \{F, H\}(p,t) = 0.$$

Ahora introducimos la noción de integrabilidad en el sentido no autónomo en el caso diferenciable. Más adelante discutiremos el caso analítico, en el cual permitiremos ramificaciones.

**Definición 1.13.** Sea $H : M \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ diferenciable. Decimos que el campo $X_H$ es integrable en el sentido no autónomo si existen funciones diferenciables $F_1, ..., F_n : M \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tales que:

1. $\{F_i, F_j\} = 0$, $i, j = 1, ..., n$.
2. $\widetilde{X}_H(F_i) = 0$, $i = 1, ..., n$.
3. $dF_1(p,t), ..., dF_n(p,t), dt(p,t)$ son linealmente independientes en todo punto $(p,t) \in M \times \mathbb{R}$, excepto tal vez en un conjunto discreto de puntos.

**Ejemplo 1.13.** Sea $H : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $H(p,q,t) = \frac{t}{2}(p^2 + q^2)$. En este caso las ecuaciones son:

$$\frac{dp}{dt} = tq, \quad \frac{dq}{dt} = -tp.$$

Note que $p\frac{dp}{dt} + q\frac{dq}{dt} = 0$. Entonces $p^2 + q^2$ es constante y por tanto $F(p,q,t) = p^2 + q^2$ es una integral primera del sistema. El sistema es integrable en el sentido no autónomo porque:

1. $\{F, F\} = (F, F) = 0$,
2. $\widetilde{X}_H F = \frac{\partial H}{\partial p}\frac{\partial F}{\partial q} - \frac{\partial H}{\partial q}\frac{\partial F}{\partial p} + \frac{\partial F}{\partial t} = (tp)(2q) - (tq)(2p) = 0$,
3. $dF = 2pdp + 2qdq$ y $dt$ son linealmente independientes.

Podemos resolver el sistema de ecuaciones para obtener:

$$p(t) = c_1 \sin\left(\frac{t^2}{2}\right) + c_2 \cos\left(\frac{t^2}{2}\right),$$

$$q(t) = c_1 \cos\left(\frac{t^2}{2}\right) - c_2 \sin\left(\frac{t^2}{2}\right).$$

## 1.4. Sistemas Hamiltonianos no autónomos, caso analítico

La herramienta que necesitamos para poder introducir el concepto de integrabilidad en el caso analítico son los revestimientos ramificados finitos, que son los dominios adecuados para trabajar con funciones multivaluadas de tipo algebraico. Para más información sobre esta teoría ver [8].

**Definición 1.14.** Sean $\overline{\Gamma}$ y $\Gamma$ superficies de Riemman y $\pi : \overline{\Gamma} \to \Gamma$ una función analítica. Un punto $\overline{p} \in \overline{\Gamma}$ se dice un punto de ramificación de orden $m$ y $p = \pi(\overline{p})$ se dice un valor de ramificación de $\pi$ si dadas las coordenadas $\zeta$ y $z$ de $\overline{p}$ y $p$, respectivamente, $\pi$ queda descrita por $f(\zeta) = z$ y $f'(\zeta(\overline{p})) = ... = f^{(m)}(\zeta(\overline{p})) = 0$. $\pi$ se dice un revestimiento ramificado finito si: es sobre, el conjunto de sus valores de ramificación forman un conjunto discreto de $\Gamma$ y si $\Gamma^\times$ denota el complemento de este conjunto y $\overline{\Gamma}^\times = \pi^{-1}(\Gamma^\times)$ entonces $\pi : \overline{\Gamma}^\times \to \Gamma^\times$ es un revestimiento.

**Ejemplo 1.14.** La función $\phi_n : D \to D$, $\phi(x) = x^n$ donde $D \subset \mathbb{C}$ es la bola abierta con centro en 0 y radio 1. En efecto, es claro que 0 es el único punto de ramificación y $\phi_n : D^* \to D^*$, con $D^* = D \setminus \{0\}$ es un revestimiento de $D^*$ que corresponde a las $n$ determinaciones de la función $z^{1/n}$.

Dada $f \in \mathcal{M}(\Gamma)$, siempre es posible verla como una función meromorfa definida sobre $\overline{\Gamma}$: es suficiente poner $\overline{f} = f \circ \pi$. Es claro que $\overline{f} \in \mathcal{M}(\overline{\Gamma})$ y sus singularidades están situadas en los puntos que se proyectan sobre las singularidades de $f$. Además si $\overline{f} = \overline{g}$ entonces dado $p \in \Gamma$, como $\pi$ es sobre, si $\overline{p} \in \pi^{-1}(p)$ entonces:

$$f(p) = f(\pi(\overline{p})) = \overline{f}(\overline{p}) = \overline{g}(\overline{p}) = g(\pi(\overline{p})) = g(p),$$

es decir $f = g$ y podemos concluir que $\mathcal{M}(\Gamma) \subseteq \mathcal{M}(\overline{\Gamma})$ es una extensión de cuerpos.

También es posible levantar las 1-formas meromorfas de $\Gamma$ a 1-formas meromorfas sobre $\overline{\Gamma}$: si $\theta \in \Omega^1(\Gamma)$ entonces $\pi^*(\theta) \in \Omega^1(\overline{\Gamma})$, donde $\pi^*$ es el pull-back de $\theta$ por $\pi$. Supongamos que $\pi^*(\theta_1) = \pi^*(\theta_2)$. Como $\pi$ es sobre, $d\pi(\overline{p})$ es sobre para cada $\overline{p} \in \overline{\Gamma}$. Dados $p \in \Gamma$ y $v \in T_p\Gamma$ sean $\overline{p} \in \pi^{-1}(p)$ y $\overline{v} \in d\pi(\overline{p})^{-1}(v)$. Entonces:

$$\theta_1(p)(v) = \theta_1(\pi(\overline{p}))(d\pi(\overline{p})(\overline{v})) = \pi^*(\theta_1)(\overline{p})(\overline{v}) = \pi^*(\theta_2)(\overline{p})(\overline{v}) = \theta_2(p)(v),$$

por tanto $\theta_1 = \theta_2$ y $\Omega^1(\Gamma) \subseteq \Omega^1(\overline{\Gamma})$.

Dada la superficie de Riemann $\Gamma$ podemos dotar a $\mathcal{M}(\Gamma)$ de estructura de campo diferencial seleccionando una 1-forma meromorfa $df$ y poniendo $\partial = \frac{d}{df}$, es decir, definiendo $\partial(g) = \frac{dg}{df}$ (el cociente entre las 1-fomas $dg$ y $df$, ver sección 1.2.1). Entonces es claro que $\partial(g + h) = \partial(g) + \partial(h)$ y $\partial(gh) = h\partial(g) + g\partial(h)$. El caso de la derivada usual de funciones meromorfas en un abierto del plano complejo es un caso particular de esto, tomando como 1-forma a $dz$. Como las 1-formas se extienden a cualquier revestimiento ramificado finito $\overline{\Gamma}$ de $\Gamma$ entonces esta derivación se puede extender a $\mathcal{M}(\overline{\Gamma})$ y resulta que $\left(\mathcal{M}(\Gamma), \frac{d}{dt}\right) \subseteq \left(\mathcal{M}(\overline{\Gamma}), \frac{d}{dt}\right)$ es una extensión de cuerpos diferenciales.

Con esto en mente podemos discutir el concepto de integrabilidad para el caso analítico. En la sección anterior trabajamos con hamiltonianos definidos sobre $M \times \mathbb{R}$, con $(M, \omega)$ una variedad simpléctica. Ahora estudiaremos el caso de sistemas hamiltonianos definidos en $\mathbb{C}^{2n} \times \Gamma$, con $\omega = \sum_{i=1}^{n} dp_i \wedge dq_i$ y $\Gamma$ una superficie de Riemann que será el espacio de la variable tiempo $t$. La razón por la cual ponemos una superficie de Riemann y no un abierto de $\mathbb{P}^1$ es porque deseamos admitir funciones hamiltonianas que sean meromorfas en $\mathbb{C}^{2n}$ y multivaluadas finitas en $t$. Cada vez que necesitemos utilizar funciones que sean multivaluadas reemplazaremos $\Gamma$ por un revestimiento ramificado finito $\overline{\Gamma}$ en el cual las funciones estén bien definidas y extenderemos toda la estructura al nuevo espacio $\mathbb{C}^{2n} \times \overline{\Gamma}$.

En adelante fijaremos una 1-forma meromorfa $dt$ sobre $\Gamma$ que nos permitirá escribir las ecuaciones diferenciales definidas en $\mathbb{C}^{2n} \times \Gamma$. Como en la sección anterior, sea $X : \mathbb{C}^{2n} \times \Gamma \to T\mathbb{C}^{2n}$ un campo vectorial sobre $\mathbb{C}^{2n}$ que depende del tiempo. Si $\frac{\partial}{\partial t}$ denota el campo vectorial meromorfo dual a la forma $dt$, la suspensión de $X$ a $\mathbb{C}^{2n} \times \Gamma$ se define como:

$$\widetilde{X} = X + \frac{\partial}{\partial t}.$$

Sea $H : \mathbb{C}^{2n} \times \Gamma \to \mathbb{C}$ una función meromorfa. Para cada $t \in \Gamma$, sea $H(\cdot, t) : \mathbb{C}^{2n} \to \mathbb{C}$ la restricción de $H$ a $\mathbb{C}^{2n} \times \{t\}$. A esta función le asociamos el único campo $X_{H(\cdot,t)}$ sobre $\mathbb{C}^{2n}$ que satisface $dH(\cdot, t) = i_{X_{H(\cdot,t)}}\omega$. Sea $X_H : \mathbb{C}^{2n} \times \Gamma \to T\mathbb{C}^{2n}$ dado por $X_H(p, t) = X_{H(\cdot,t)}(p)$. Este es un campo vectorial meromorfo que depende del tiempo y por tanto tiene su suspensión:

$$\widetilde{X}_H(p, t) = X_H + \frac{\partial}{\partial t}.$$

La propiedad fundamental que caracteriza a $\widetilde{X}_H$, cuya demostración es idéntica a la de la proposición 1.6, es:

**Proposición 1.8.** *$\widetilde{X}_H$ es el único campo sobre $\mathbb{C}^{2n} \times \Gamma$ que satisface $i_{\widetilde{X}_H} dt = 1$ y $i_{\widetilde{X}_H}\omega = dH - \frac{\partial H}{\partial t} dt$.*

Las ecuaciones diferenciales de una curva integral $\gamma(t)$ de $\widetilde{X}_H$ son:

$$\frac{d}{dt}(p_i(\gamma(t))) = \frac{\partial H}{\partial q_i}(\gamma(t), t) \qquad \frac{d}{dt}(q_i(\gamma(t))) = -\frac{\partial H}{\partial p_i}(\gamma(t), t) \quad i = 1, ..., n,$$

donde $\frac{d}{dt}(p_i(\gamma(t)))$ y $\frac{d}{dt}(q_i(\gamma(t)))$ son los cocientes entre las 1-formas $d(p_i \circ \gamma)$ y $dt$, y $d(q_i \circ \gamma)$ y $dt$, respectivamente.

Podemos definir directamente el paréntesis de Poisson vertical para funciones meromorfas sobre $\mathbb{C}^{2n} \times \Gamma$, conjunto que denotaremos por $\mathcal{M}(\mathbb{C}^{2n} \times \Gamma)$, dado por:

$$\{F, G\} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial p_i}\frac{\partial G}{\partial q_i} - \frac{\partial F}{\partial q_i}\frac{\partial G}{\partial p_i}.$$

Con este producto $\mathcal{M}(\mathbb{C}^{2n} \times \Gamma)$ es un algebra de Lie. Al igual que antes tenemos que $F$ es una integral primera de $\widetilde{X}_H$ si y sólo si $\{F, H\} + \frac{\partial F}{\partial t} = 0$.

Supongamos que $H : \mathbb{C}^{2n} \times \Gamma \to \mathbb{C}$ depende meromorfamente de $p_1, ..., p_n, q_1, ..., q_n$ y que es multivaluada finita en $t$. Para poder utilizar a $H$ como un hamiltoniano tomamos $\pi : \overline{\Gamma} \to \Gamma$, $\pi(z) = t$, un revestimiento ramificado finito de $\Gamma$ donde $H$ esté bien definida. Podemos levantar toda la estructura a $\mathbb{C}^{2n} \times \overline{\Gamma}$ de la siguiente manera:

- Las funciones meromorfas sobre $\mathbb{C}^{2n} \times \overline{\Gamma}$ se levantan definiendo: $f(p, q, z) = f(p, q, \pi(z))$.

- Al tomar el pull-back de $dt$, localmente podemos escribir $\pi^*(dt) = f(z)dz$, para cierta función $f \in \mathcal{M}(\overline{\Gamma})$. Entonces las ecuaciones del sistema hamiltoniano en $\mathbb{C}^{2n} \times \overline{\Gamma}$ quedan:

$$\frac{dp_i}{f(z)dz} = \frac{\partial H}{\partial q_i}, \qquad \frac{dq_i}{f(z)dz} = -\frac{\partial H}{\partial p_i} \quad i = 1, ..., n.$$

- El paréntesis de Poisson vertical se extiende a $\mathcal{M}(\mathbb{C}^{2n} \times \overline{\Gamma})$ por la misma fórmula que antes.

- El campo $\frac{\partial}{\partial t}$ sube a un campo en $\overline{\Gamma}$, que localmente es $\frac{1}{f(z)}\frac{\partial}{\partial z}$, porque:

$$f(z)dz\left(\frac{1}{f(z)}\frac{\partial}{\partial z}\right) = 1.$$

  Por tanto una función $F$ es una integral primera del sistema extendido si y sólo si $\{F, H\} + \frac{1}{f(z)}\frac{\partial F}{\partial z} = 0$.

En base a la noción de integrabilidad para el caso real introducimos la definición de integrabilidad en el sentido no autónomo.

**Definición 1.15.** Sea $\Gamma$ una superficie de Riemman, $\overline{\Gamma}$ un revestimiento ramificado finito de $\Gamma$ y $H \in \mathcal{M}(\mathbb{C}^{2n} \times \overline{\Gamma})$. Decimos que $H$ es integrable en el sentido no autónomo si existe un revestimiento ramificado finito $\widehat{\Gamma}$ de $\overline{\Gamma}$ y funciones $F_1, ..., F_n \in \mathcal{M}(\mathbb{C}^{2n} \times \widehat{\Gamma})$ tales que:

1. $\{F_i, F_j\} = 0$, $i, j = 1, ..., n$.
2. $\widetilde{X}_H(F_i) = 0$, $i = 1, ..., n$.
3. $dF_1(p, t), ..., dF_n(p, t), dt(p, t)$ son linealmente independientes en todo punto $(p, t) \in \mathbb{C}^{2n} \times \widehat{\Gamma}$ donde estén definidas, excepto tal vez en un conjunto discreto de puntos. Aquí $dt$ denota el pull-back de la 1-forma inicial $dt$.

Las funciones $F_1, ..., F_n$ se conocen como un sistema completo de integrales primeras de $X_H$.

La necesidad de considerar otro revestimiento ramificado finito surge porque es posible que existan integrales primeras de $X_H$ que sean multivaluadas en $\overline{\Gamma}$. Para poder utilizarlas tomamos un revestimiento adecuado $\widehat{\Gamma}$ donde las funciones estén bien definidas y trabajamos en el espacio $\mathbb{C}^{2n} \times \widehat{\Gamma}$.

**Ejemplo 1.15.** En $\mathbb{C}^2 \times \Gamma = \mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}$, trabajando con la 1-forma $dt$, consideremos el hamiltoniano $H(p,q,t) = \dfrac{pq}{3t} + \sqrt{t}\dfrac{p^2}{2}$. Inicialmente el sistema de ecuaciones sería:

$$\frac{dp}{dt} = \frac{p}{3t}, \qquad \frac{dq}{dt} = -\frac{q}{3t} - \sqrt{t}p.$$

Como $H$ no está bien definida, porque aparece la función multivaluada $\sqrt{t}$, debemos reemplazar $\Gamma$ con un revestimiento ramificado. Tomemos el revestimiento $\phi : \overline{\Gamma} = \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ dado por $\phi(z) = z^2$. Este es un revestimiento con ramificación en 0 de orden 2. $H$ sube a $\mathbb{C}^2 \times \overline{\Gamma}$, donde queda $H(p,q,z) = \dfrac{pq}{3z^2} + z\dfrac{p^2}{2}$. Debemos subir también la 1-forma $dt$, calculando el pull-back por $\phi$: la nueva 1-forma es $\phi^*(dt) = d(z^2) = 2zdz$. Por tanto el sistema hamiltoniano queda:

$$\frac{dp}{2zdz} = \frac{p}{3z^2}, \qquad \frac{dq}{2zdz} = -\frac{q}{3z^2} - zp,$$

que es lo mismo que:

$$\frac{dp}{dz} = \frac{2p}{3z}, \qquad \frac{dq}{dz} = -\frac{2q}{3z} - 2z^2p.$$

La función $F(p,q,z) = \dfrac{p}{\sqrt[3]{z^2}}$ es una integral primera del sistema porque:

$$\{F,H\} + \frac{\partial F}{\partial t} = \frac{\partial F}{\partial p}\frac{\partial H}{\partial q} - \frac{\partial F}{\partial q}\frac{\partial H}{\partial p} + \frac{1}{2z}\frac{\partial F}{\partial z} = \frac{1}{\sqrt[3]{z^2}}\frac{p}{3z^2} + \frac{1}{2z}\left(\frac{-2}{3z\sqrt[3]{z^2}}\right) = 0.$$

Para que $F$ esté bien definida tomamos el revestimiento $\psi : \widehat{\Gamma} = \mathbb{C} \to \overline{\Gamma}$ dado por $\psi(\zeta) = \zeta^3$ cuya única ramificación es en 0. Al subir a $\mathbb{C}^2 \times \widehat{\Gamma}$ obtenemos $H(p,q,\zeta) = \dfrac{pq}{3\zeta^6} + \zeta^3\dfrac{p^2}{2}$, $F(p,q,\zeta) = \dfrac{p}{3\zeta^2}$, $\psi^*(2zdz) = 6\zeta^5 d\zeta$ y el sistema es:

$$\frac{dp}{d\zeta} = 4\zeta^2 p, \qquad \frac{dq}{d\zeta} = -4\zeta^2 q - 12\zeta^{11}p.$$

Para terminar de mostrar que $H$ es integrable en el sentido no autónomo observemos que las 1-formas:

$$dF = \frac{1}{3\zeta^2}dp - \frac{2p}{3\zeta^3}d\zeta \quad \text{y} \quad 6\zeta^5 d\zeta$$

son linealmente indepentientes en todo punto de $\mathbb{C}^2 \times \widehat{\Gamma}$ donde están definidas.

## 1.5. Suspensión simpléctica

La suspensión simpléctica de una variedad simpléctica $(M, \omega)$ permite reducir el estudio del caso de los sistemas hamiltonianos no autónomos al del caso los sistemas autónomos. Solo haremos la construcción para el caso $\mathbb{C}^{2n} \times \Gamma$, pero en general se puede hacer para cualquier $M \times \mathbb{K}$. La idea es agregar una variable $h$ y trabajar con la variedad $\mathbb{C}^{2n} \times \Gamma \times \mathbb{C}$ y con la 2-forma $\hat{\omega} = \omega + dt \wedge dh$. Es inmediato verificar que:

**Proposición 1.9.** $(\mathbb{C}^{2n} \times \Gamma \times \mathbb{C}, \hat{\omega})$ *es una variedad simpléctica. Este espacio se conoce como la suspensión simpléctica de* $\mathbb{C}^{2n} \times \Gamma$.

Dada $H : \mathbb{C}^{2n} \times \Gamma \to \mathbb{C}$, sea $\hat{H}(p, t, h) = H(p, t) + h$. El campo hamiltoniano asociado es:

$$X_{\hat{H}} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial H}{\partial q_i} \frac{\partial}{\partial p_i} - \frac{\partial H}{\partial p_i} \frac{\partial}{\partial q_i} + \frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial H}{\partial t} \frac{\partial}{\partial h},$$

y las ecuaciones correspondientes quedan:

$$\frac{dp}{dt} = \frac{\partial H}{\partial q}, \quad \frac{dq}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial p},, \quad \frac{dt}{dt} = 1, \quad \frac{dh}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial t}.$$

Nos referiremos a este sistema de ecuaciones como el sistema hamiltoniano no autónomo de $H$ con $n + \frac{1}{2}$ grados de libertad.

**Nota 1.13.** Sea $\pi : \mathbb{C}^{2n} \times \Gamma \times \mathbb{C} \to \mathbb{C}^{2n} \times \Gamma$ la proyección natural. $X_{\hat{H}}$ es proyectable por $\pi$ y $d\pi(X_{\hat{H}}) = \widetilde{X}_H$.

Las nociones de integrabilidad entre las funciones $H$ y $\hat{H}$ se pueden relacionar de la siguiente manera.

**Teorema 1.5.** *Sea* $H : \mathbb{C}^{2n} \times \Gamma \to \mathbb{C}$ *meromorfa. Si el campo* $X_H$ *es integrable en el sentido no autónomo y* $\widehat{\Gamma}$ *es un revestimiento ramificado finito de* $\Gamma$ *tal que hay un sistema completo de integrales primeras de* $X_H$ *en* $\mathcal{M}(\mathbb{C}^{2n} \times \widehat{\Gamma})$ *entonces* $\hat{H}$ *es integrable en el sentido autónomo en* $\mathbb{C}^{2n} \times \widehat{\Gamma} \times \mathbb{C}$.

*Demostración.* Si $X_H$ es integrable en el sentido no autónomo, existen funciones $F_1, ..., F_n \in \mathcal{M}(\mathbb{C}^{2n} \times \widehat{\Gamma})$ que satisfacen las condiciones de la definición 1.15. Sean $\hat{F}_i(p, t, h) = F_i(p, t), i = 1, ..., n$. Veamos que $\hat{H}, \hat{F}_1, ..., \hat{F}_n$ satisfacen las condiciones de la definición 1.11.

Las funciones están en involución porque para cada $i, j = 1, ..., n$:

$$\begin{aligned}(\hat{F}_i, \hat{F}_j) &= \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial \hat{F}_i}{\partial p_k} \frac{\partial \hat{F}_j}{\partial q_k} - \frac{\partial \hat{F}_i}{\partial q_k} \frac{\partial \hat{F}_j}{\partial p_k} + \frac{\partial \hat{F}_i}{\partial t} \frac{\partial \hat{F}_j}{\partial h} - \frac{\partial \hat{F}_i}{\partial h} \frac{\partial \hat{F}_j}{\partial t} \\ &= \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial F_i}{\partial p_k} \frac{\partial F_j}{\partial q_k} - \frac{\partial F_i}{\partial q_k} \frac{\partial F_j}{\partial p_k} = (F_i, F_j) = 0,\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
(\hat{H}, \hat{F}_i) &= \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial \hat{H}}{\partial p_k}\frac{\partial \hat{F}_i}{\partial q_k} - \frac{\partial \hat{H}}{\partial q_k}\frac{\partial \hat{F}_i}{\partial p_k} + \frac{\partial \hat{H}}{\partial h}\frac{\partial \hat{F}_i}{\partial t} - \frac{\partial \hat{H}}{\partial t}\frac{\partial \hat{F}_i}{\partial h} \\
&= \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial H}{\partial p_k}\frac{\partial F_i}{\partial q_k} - \frac{\partial H}{\partial q_k}\frac{\partial F_i}{\partial p_k} + \frac{\partial F_i}{\partial t} = \widetilde{X}_H(F_i) = 0.
\end{aligned}
$$

Solo resta ver que $d\hat{H}(p,t,h), d\hat{F}_1(p,t,h), ..., d\hat{F}_n(p,t,h)$ son independientes para todo $(p,t,h) \in \mathbb{C}^{2n} \times \widehat{\Gamma} \times \mathbb{C}$ donde estén definidas. Supongamos que existen constantes $a_0, a_1, ..., a_n$ tales que:

$$a_0 d\hat{H}(p,t,h) + a_1 d\hat{F}_1(p,t,h) + .... + a_n d\hat{F}_n(p,t,h) = 0.$$

Entonces $a_0 dH(p,t) + a_0 dh(p,t,h) + a_1 dF_1(p,t) + .... + a_n dF_n(p,t) = 0$. En esta ecuación, la 1-forma $dh$ no aparece en los $dF_i$, por tanto $a_0 = 0$. Por hipótesis, los $dF_i$ son linealmente independientes para todo $(p,t) \in \mathbb{C}^{2n} \times \widehat{\Gamma}$, entonces $a_1 = ... = a_n = 0$.

□

# 2. Teoría de Galois diferencial

En este capítulo desarrollaremos la teoría de Galois diferencial para ecuaciones diferenciales lineales definidas sobre una superficie de Riemman desde el punto de vista de la geometría compleja. Seguiremos las ideas expuestas en las notas [4]. El objetivo es asociar a cada solución global de una ecuación lineal, un grupo de matrices que respete las relaciones algebraicas que satisfaga esta solución. Para esto introduciremos una topología que depende del campo de funciones meromorfas de la superficie de Riemman donde estemos trabajando. Veremos que estos grupos resultan ser grupos algebraicos lineales que contienen la monodromía de la ecuación. Se enunciarán sin demostración dos grandes teoremas que nos serán útiles para obtener información sobre la integrabilidad de sistemas hamiltonianos a través del grupo de Galois de la ecuación: el teorema de reducción de Lie-Kolchin [3] y el teorema de Morales-Ramis [7].

Sea $\Gamma$ una superficie de Riemman, donde seleccionamos una 1-forma meromorfa $dx$ que permanecerá fija. Consideramos la ecuación diferencial lineal:

$$\frac{dy}{dx} = A(x)y(x), \quad y(x) \in \mathbb{C}^n, \quad A \in Mat(n \times n, \mathcal{M}(\Gamma)). \tag{2-1}$$

**Definición 2.1.** Decimos que $x_0 \in \Gamma$ es un punto regular de la ecuación (2-1) si $dx$ no tiene un polo en $x_0$ y los coeficientes de la matriz $A(x)$ son analíticos en $x_0$. En el caso de que $x_0$ sea polo de $dx$ ó que alguno de los coeficientes tenga un polo en $x_0$, decimos que $x_0$ es un punto singular de la ecuación (2-1).

El hecho de que $dx$ tenga un polo en $x_0$, indica que en coordenadas adecuadas en una vecindad de $x_0$ podemos escribir $dx = \frac{g(t)}{(t-t(x_0))^m}dt$, donde $g$ es analítica en $x_0$, $g(x_0) \neq 0$ y $m$ es un entero positivo. Reemplazando esta expresión en la ecuación diferencial tenemos que $A(x)y = A(x(t))y = \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy}{dt}\dfrac{dt}{dx} = \dfrac{(t-t(x_0))^m}{g(t)}\dfrac{dy}{dt}$ y la ecuación toma la forma:

$$\frac{dy}{dt} = \frac{g(t)}{(t-t(x_0))^m}A(t)y.$$

Por tanto $x_0$ es un polo de los coeficientes de la nueva matriz. Por esta razón en la definición anterior removemos los polos de $dx$.

Recordemos que el conjunto de singularidades de funciones y 1-formas meromorfas definidas sobre $\Gamma$ siempre es discreto y por tanto el conjunto de singularidades de la ecuación (2-1) es discreto. En adelante denotaremos por $\Gamma^{\times}$ a la superficie de Riemman que se obtiene de $\Gamma$ removiendo las singularidades de la ecuación (2-1).

Una de las principales propiedades de los puntos regulares es que siempre podemos resolver la ecuación en una vecindad simplemente conexa del punto dando condiciones iniciales arbitrarias, es decir, siempre existen soluciones locales de la ecuación alrededor de puntos regulares. Esto se puede demostrar utilizando series de potencias o el método del punto fijo [10].

**Teorema 2.1.** *Suponga que $x_0$ es un punto regular de la ecuación (2-1). Entonces existen $n$ soluciones linealmente independientes de la ecuación definidas en una vecindad de $x_0$. En otras palabras, el $\mathbb{C}$-espacio vectorial de germenes $S_{x_0}$ en $x_0$ de soluciones analíticas de la ecuación tiene dimensión $n$.*

Esto muestra que para cada $y_0 \in \mathbb{C}^n$ podemos encontrar un germen de solución $y$ definido alrededor de $x_0$ tal que $y(x_0) = y_0$ y de esta forma identificar a $S_{x_0}$ con el espacio de condiciones iniciales $\mathbb{C}^n$. Otra propiedad interesante de las soluciones alrededor de puntos regulares es que podemos prolongarlas analíticamente a lo largo de cualquier curva que comience en $x_0$ y no contenga singularidades para obtener de nuevo germenes de soluciones definidos alrededor del punto final de la curva. Más precisamente:

**Proposición 2.1.** *Sea $y$ un germen de solución de la ecuación (2-1) definida alrededor de $x_0 \in \Gamma^{\times}$ y $\gamma : [0,1] \to \Gamma^{\times}$ una curva continua con $\gamma(0) = x_0$. Entonces $y$ se puede prolongar analíticamente a una solución de (2-1) a lo largo de $\gamma$.*

*Demostración.* Supongamos que $y$ no se puede prolongar a lo largo de todo $\gamma$. Sea $T \in [0,1]$ el supremo de los valores tales que $y$ se puede prolongar a lo largo de $\gamma([0,T])$. Como $y$ está definido en una vecindad abierta de $x_0$, $0 < T < 1$. Como $\gamma(T)$ no es una singularidad de la ecuación entonces el límite $\lim\limits_{t\to T} y(\gamma(t))$ existe, digamos $y_0$.

Por el teorema 2.1, existe una solución $y_T$ de la ecuación (2-1) definida en una vecindad $U$ de $\gamma(T)$ tal que $y_T(T) = y_0$. Si $\epsilon > 0$ es tal $\gamma((T-\epsilon, T+\epsilon)) \subseteq U$, entonces $y_T$ es una prolongación de $y$ a lo largo de $\gamma([T, T+\epsilon])$. Esto contradice la escogencia de $T$. Por tanto $T = 1$ y $y$ se prolonga a lo largo de todo $\gamma$.

□

## 2.1. Grupo de monodromía

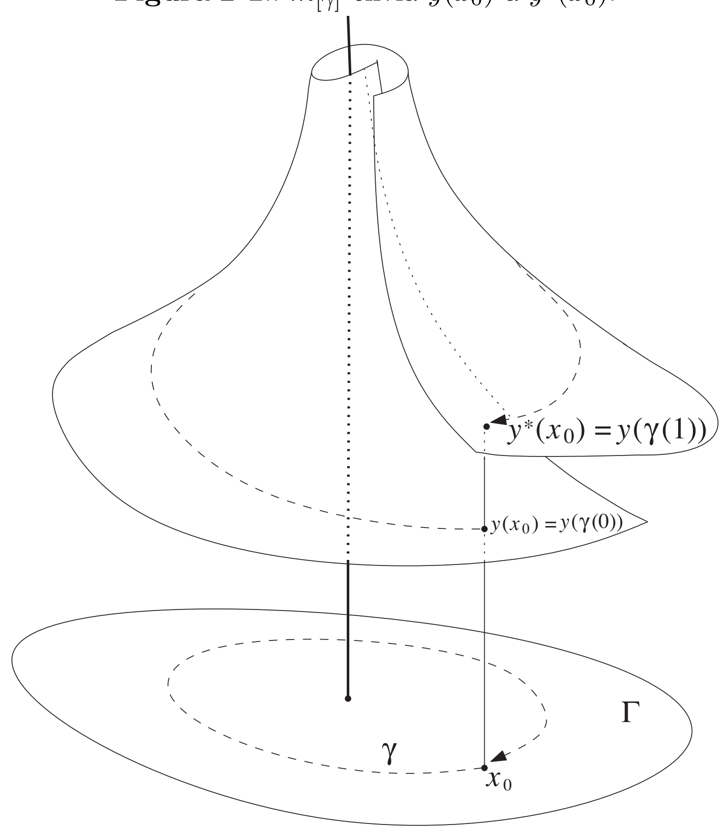
A cada ecuación de la forma (2-1) y cada punto en $\Gamma^{\times}$ le asociaremos un grupo, conocido como el grupo de monodromía que nos ayudará a medir en qué forma cambian las soluciones cuando prolongamos analíticamente soluciones alrededor de singularidades.

Sea $\gamma : [0,1] \to \Gamma^{\times}$ una curva continua en $\Gamma^{\times}$. Si continuamos analíticamente cualquier solución definida alrededor de $\gamma(0)$ obtenemos una solución alrededor de $\gamma(1)$, ver Figura **2-1**. Por el teorema de monodromía, esta prolongación no depende de la clase de homotopía $[\gamma]$ de $\gamma$. Esta clase determina una función:

$$m_{[\gamma]} : S_{\gamma(0)} \to S_{\gamma(1)},$$

que envía germenes de soluciones en $\gamma(0)$ a germenes de soluciones en $\gamma(1)$. Esta función es lineal porque si $y_1$ y $y_2$ son germenes de soluciones en $\gamma(0)$ y $y_1^*$ y $y_2^*$ son los germenes de soluciones obtenidos alrededor de $\gamma(1)$ al hacer la continuación analítica a lo largo de $\gamma$, entonces $\alpha y_1^* + \beta y_2^*$ es una prolongación analítica de $\alpha y_1 + \beta y_2$, para todo $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$. Como la continuación analítica a lo largo de una curva fija es única entonces $m_{[\gamma]}(\alpha y_1 + \beta y_2) = \alpha m_{[\gamma]}(y_1) + \beta m_{[\gamma]}(y_2)$.

**Figura 2-1**.: $m_{[\gamma]}$ envía $y(x_0)$ a $y^*(x_0)$.




Sea $x_0 \in \Gamma^{\times}$ fijo. El conjunto de las clases de homotopía de curvas en $\Gamma^{\times}$ con punto inicial y final $x_0$ tiene estructura de grupo, con el producto dado por $[\gamma_1] * [\gamma_2] = [\gamma_1 * \gamma_2]$ donde:

$$\gamma_1 * \gamma_2(t) = \begin{cases} \gamma_2(2t) & \text{si} \quad 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ \gamma_1(2t-1) & \text{si} \quad \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}.$$

Este grupo se suele denotar por $\pi_1(\Gamma^\times, z_0)$ y se conoce como el grupo fundamental de $\Gamma^\times$ en $x_0$.

Dados $[\gamma_1], [\gamma_2] \in \pi_1(\Gamma^\times, x_0)$ y $y_0$ un germen de solución de la ecuación (2-1) definida alrededor de $x_0$, si $y_1$ es el germen de solución obtenido al hacer la continuación analítica de $y_0$ a lo largo de $\gamma_1$ y $y_2$ es el germen de solución obtenido al hacer la continuación analítica de $y_1$ a lo largo de $\gamma_2$ entonces $y_2$ es un germen de solución de la ecuación que se obtuvo prolongando $y_0$ a lo largo de $\gamma_2 * \gamma_1$, luego $m_{[\gamma_2 * \gamma_1]}(y_0) = y_2 = m_{[\gamma_2]}(y_1) = m_{[\gamma_2]}(m_{[\gamma_1]}(y_0))$. Esto muestra que:

$$m_{[\gamma_2 * \gamma_1]} = m_{[\gamma_2]} \circ m_{[\gamma_1]}.$$

Por tanto, para cada $[\gamma] \in \pi_1(\Gamma^\times, x_0)$, $m_{[\gamma]}$ es un automorfismo lineal de $S_{x_0}$. Si identificamos a $S_{x_0}$ con el espacio de condiciones iniciales $\mathbb{C}^n$ obtenemos un homomorfismo de grupos:

$$\mathrm{mon}(\Gamma^\times, x_0) : \pi_1(\Gamma^\times, x_0) \to \mathrm{GL}(n, \mathbb{C}),$$

conocido como la representación de monodromía de la ecuación (2-1) en el punto $x_0$.

**Definición 2.2.** El grupo de monodromía $\mathrm{Mon}(x_0, \Gamma^\times)$ de la ecuación (2-1) en $x_0$ se define como $\mathrm{mon}(\Gamma^\times, x_0)(\pi_1(\Gamma^\times, x_0))$.

**Ejemplo 2.1.** Si $\Gamma$ es simplemente conexo y los coeficientes de $A(x)$ son funciones analíticas entonces cualquier continuación analítica a lo largo de cualquier curva cerrada siempre lleva al mismo germen de solución y por tanto el grupo de monodromía en cualquier punto es trivial.

**Ejemplo 2.2.** En $\mathbb{C}$, consideremos la siguiente ecuación:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(a+b)x - b}{x^2 - x} y,$$

donde $a, b \in \mathbb{C}$ son constantes. En este caso $\Gamma^\times = \mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$. La solución está dada por $y(x) = cx^a(x-1)^b$ y está bien definida en cualquier dominio simplemente conexo de $\mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$. El grupo fundamental $\pi_1(\mathbb{C} \setminus \{0, 1\}, x_0)$ es el grupo libre generado por las clases de homotopía de dos caminos cerrados simples $\gamma_0$ y $\gamma_1$ que pasan por $x_0$ alrededor de 0 y 1, respectivamente y con la orientación en el sentido contrario de las manecillas del reloj. Al hacer la continuación analítica alrededor de $\gamma_0$ obtenemos la solución:

$$y^0(x) = ce^{2\pi i a} x^a (x-1)^b = e^{2\pi i a} y(x),$$

y al hacerlo alrededor de $\gamma_1$ nos queda:

$$y^1(x) = ce^{2\pi ib}x^a(x-1)^b = e^{2\pi ia}y(x).$$

Luego la representación de monodromía es:

$$\gamma_0 \to e^{2\pi ia} \qquad \gamma_1 \to e^{2\pi ib}$$

y el grupo de monodromía resulta ser $\left\{e^{2\pi i(ma+nb)}|m,n\in\mathbb{Z}\right\}$.

**Ejemplo 2.3.** La ecuación de orden 3, $y''' + \frac{5}{2x}y'' + \frac{1}{2x^2}y' = 0$ podemos escribirla como la ecuación:

$$\frac{d}{dx}\begin{bmatrix} y \\ u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -\frac{1}{2x^2} & -\frac{5}{2x} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y \\ u \\ v \end{bmatrix},$$

cuya solución está definida en cualquier dominio simplemente conexo de $\mathbb{C}\setminus\{0\}$. La solución general de la ecuación de orden 3 es $y(x) = c_1 + c_2\log(x) + c_3\sqrt{x}$ y por tanto la solución de la ecuación matricial es:

$$\begin{bmatrix} y(x) \\ u(x) \\ v(x) \end{bmatrix} = c_1\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + c_2\begin{bmatrix} \log(x) \\ \frac{1}{x} \\ -\frac{1}{x^2} \end{bmatrix} + c_3\begin{bmatrix} \sqrt{x} \\ \frac{1}{2\sqrt{x}} \\ -\frac{1}{4z\sqrt{x}} \end{bmatrix}.$$

El grupo fundamental de $\mathbb{C}\setminus\{0\}$ en cualquier $x_0$ es el generado por la clase de homotopía de un camino cerrado simple alrededor de 0. Para calcular la monodromía en 1, usamos como base del espacio solución $S_1$ a $(1,0,0), \left(\log(x), \frac{1}{x}, -\frac{1}{x^2}\right), \left(\sqrt{x}, \frac{1}{2\sqrt{x}}, -\frac{1}{4x\sqrt{x}}\right)$. Al hacer la continuación analítica de la solución alrededor de 0 se obtiene la solución:

$$\begin{bmatrix} y^*(x) \\ u^*(x) \\ v^*(x) \end{bmatrix} = c_1\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + c_2\begin{bmatrix} \log(x)+2\pi i \\ \frac{1}{x} \\ -\frac{1}{x^2} \end{bmatrix} + c_3\begin{bmatrix} -\sqrt{x} \\ -\frac{1}{2\sqrt{x}} \\ \frac{1}{4z\sqrt{x}} \end{bmatrix}.$$

Observe que:

$$\begin{bmatrix} 1 & \log(x)+2\pi i & -\sqrt{x} \\ 0 & \frac{1}{x} & -\frac{1}{2\sqrt{x}} \\ 0 & -\frac{1}{x^2} & \frac{1}{4x\sqrt{x}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \log(x) & \sqrt{x} \\ 0 & \frac{1}{x} & \frac{1}{2\sqrt{x}} \\ 0 & -\frac{1}{x^2} & -\frac{1}{4x\sqrt{x}} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2\pi i & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Por tanto el grupo de monodromía de la ecuación en 1, $Mon(\mathbb{C}\setminus\{0\},1) = G$ es el subgrupo de matrices generado por $\begin{bmatrix} 1 & 2\pi i & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$, es decir:

$$G = \left\{\begin{bmatrix} 1 & 2\pi in & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (-1)^n \end{bmatrix}\middle|\, n\in\mathbb{Z}\right\} \simeq (\mathbb{Z},+).$$

**Ejemplo 2.4.** (Monodromía de la ecuación hipergeométrica) La ecuación:

$$y'' + \frac{(a+b+1)z-c}{z(z-1)}y' + \frac{ab}{z(z-1)} = 0,$$

se conoce como la ecuación hipergeométrica, donde $a, b, c \in \mathbb{C}$. Es un ecuación que tiene tres singularidades localizadas en $0, 1$ e $\infty$.

Suponiendo que ninguno de los valores $c-1, a-b, a+b-c$ es entero, dos soluciones linealmente independientes definidas alrededor de 0 son $F(a,b,c,z)$ y $z^{1-c}F(1+a-c, 1+b-c, 2-c, z)$, donde $F(a,b,c,z)$ denota la función hipergeométrica dada por:

$$F(a,b,c,z) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a(a+1)\cdots(a+n-1)b(b+1)\cdots(b+n-1)}{n!c(c+1)\cdots(c+n-1)} z^n,$$

que converge para $|z| < 1$.

Tomemos $z_0 = \frac{1}{2}$. El grupo fundamental de $\mathbb{C} \setminus \{0,1\}$ es generado por los dos círculos que pasan por $\frac{1}{2}$ alrededor de 0 y 1, con la orientación positiva. Al hacer la continuación analítica alrededor de 0 obtenemos la matriz $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{-2\pi i c} \end{bmatrix}$.

Al hacerlo alrededor de 1 obtenemos la matriz $\begin{bmatrix} B_{1,1} & B_{1,2} \\ B_{2,1} & B_{2,2} \end{bmatrix}$, con (ver [8]):

$$B_{1,1} = 1 - 2ie^{\pi i(c-a-b)} \frac{\sin(\pi a)\sin(\pi b)}{\sin(\pi c)},$$

$$B_{1,2} = -2\pi i e^{\pi i(c-a-b)} \frac{\Gamma(2-c)\Gamma(1-c)}{\Gamma(1-a)\Gamma(1-b)\Gamma(1+a-c)\Gamma(1+b-c)},$$

$$B_{2,1} = 1 - 2ie^{\pi i(c-a-b)} \frac{\Gamma(c)\Gamma(c-1)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)\Gamma(a)\Gamma(b)},$$

$$B_{2,2} = 1 + 2ie^{\pi i(c-a-b)} \frac{\sin(\pi(c-a))\sin(\pi(c-b))}{\sin(\pi c)}.$$

Una pregunta natural es cómo se transforma el grupo de monodromía de la ecuación al cambiar el punto. La respuesta es que los grupos resultan ser isomorfos y más precisamente:

**Proposición 2.2.** *Sean $x_0, x_1 \in \Gamma^\times$ y $\gamma : [0,1] \to \Gamma^\times$ una curva continua tal que $x_0 = \gamma(0)$ y $x_1 = \gamma(1)$. Entonces $Mon(\Gamma^\times, x_0) = m_{[\gamma]}^{-1} Mon(\Gamma^\times, x_1) m_{[\gamma]}$.*

*Demostración.* Consideremos la aplicación $\phi : \pi_1(\Gamma^\times, x_0) \to \pi_1(\Gamma^\times, x_1)$ dada por:

$$\phi([\rho]) = [\gamma * \rho * \gamma^{-1}],$$

$\phi$ está bien definida y es un isomorfismo de grupos con inversa dada por $\phi^{-1}([\rho]) = [\gamma^{-1} * \rho * \gamma]$. Si $\rho \in \pi_1(\Gamma^\times, x_0)$, como $\rho = \gamma^{-1} * (\gamma * \rho * \gamma^{-1}) * \gamma$ entonces:

$$m_{[\rho]} = m_{[\gamma]}^{-1} m_{[\phi([\rho])]} m_{[\gamma]}$$

de donde se sigue el resultado.

□

## 2.2. Foliaciones inducidas por ecuaciones diferenciales lineales

El objetivo de esta sección es ver como la ecuación (2-1) permite descomponer el espacio $\Gamma^\times \times \mathbb{C}^n$ en conjuntos que localmente son gráficos de soluciones y que pueden pensarse como soluciones globales de la ecuación. Estos conjuntos se denominarán hojas de la foliación inducida por la ecuación (2-1). También haremos una descomposición del espacio $\Gamma^\times \times \mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ a través del sistema matricial de ecuaciones asociado a la ecuación (2-1), cuyas soluciones son sus matrices fundamentales de soluciones.

Recordemos que una matriz fundamental de soluciones de la ecuación (2-1) es una matriz $U(x)$ de tamaño $n \times n$ cuyas columnas son soluciones linealmente independientes de (2-1). Esto es lo mismo que decir que $U(x)$ es una solución de la ecuación diferencial:

$$\frac{dU}{dx} = A(x)U(x), \quad U \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{C}), \quad A \in Mat(n \times n, \mathcal{M}(\Gamma)). \tag{2-2}$$

Cuando conocemos un germen de solución de la ecuación (2-2) alrededor de un punto $x_0$ inmediatamente tenemos una base para $S_{x_0}$, el espacio solución de la ecuación (2-1) en el punto $x_0$. En efecto, si $U(x)$ es una solución de (2-2) y $y_0 \in \mathbb{C}^n$, entonces $U(x)y_0$ es una solución de (2-1) porque $\frac{d}{dx}(Uy_0) = \frac{dU}{dx} y_0 = A(x)(Uy_0)$. Luego $U(x)e_1, ..., U(x)e_n$ es la base $S_{x_0}$.

**Proposición 2.3.** *Dado $x_0 \in \Gamma^\times$, el grupo $GL(n, \mathbb{C})$ actúa por derecha sobre el conjunto $P_{x_0}$ de germenes de soluciones de (2-2) definidos alrededor de $x_0$ como $(U(x), \sigma) \to U(x)\sigma$. Además esta acción es libre y transitiva.*

*Demostración.* Si $U(x)$ es un germen de solución de la ecuación (2-2) en $x_0$, $U(x)\sigma$ también lo es porque $\frac{d}{dx}(U\sigma) = \frac{dU}{dx}\sigma = A(x)(U\sigma)$. Que la acción sea libre significa que el grupo de isotropía de cualquier elemento se reduce a la identidad. Esto es claro ya que si $U(x)\sigma = U(x)$, al ser $U(x)$ invertible, vemos que $\sigma = I_n$.

Una acción es transitiva si la órbita de un elemento es todo el espacio. Sean $U_1(x), U_2(x) \in P_x$. Derivando la expresión $U_2(x)U_2(x)^{-1} = I_n$ tenemos que:

$$\frac{dU_2^{-1}}{dx} = -U_2^{-1}\frac{dU_2}{dx}U_2^{-1} = -U_2^{-1}A(x).$$

Luego:

$$\frac{d(U_2^{-1}U_1)}{dx} = \frac{dU_2^{-1}}{dx}U_1 + U_2^{-1}\frac{dU_1}{dx} = 0.$$

Por tanto $U_2^{-1}(x)U_1(x)$ es constante y $U_1(x) = U_2(x)U_2^{-1}(x_0)U_1(x_0)$. □

En adelante cuando tengamos un grupo $G$, diremos que un conjunto $X$ es un $G$-espacio si $G$ actúa sobre $X$. Si la acción es transitiva decimos que $X$ es homogéneo y cuando sea libre diremos que $X$ es un $G$-espacio principal. En estos términos la proposición asegura que para cada $x_0 \in \Gamma^\times$, $P_{x_0}$ es un $\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$-espacio principal homogéneo.

Ahora descompondremos el espacio $\Gamma^\times \times \mathbb{C}^n$. Para esto, introducimos una relación de equivalencia: dos puntos $(x_0, y_0)$ y $(x_1, y_1)$ son equivalentes si existe $\gamma : [0,1] \to \Gamma^\times$ con $\gamma(0) = x_0$ y $\gamma(1) = x_1$ tal que la continuación analítica $y^*$ a lo largo de $\gamma$ de la solución $y$ definida alrededor de $x_0$ tal que $y(x_0) = y_0$ satisface $y^*(x_1) = y_1$.

**Definición 2.3.** Las clases de equivalencia de la anterior relación se denominan hojas de la foliación inducida por la ecuación (2-1).

Dado $(x_0, y_0) \in \Gamma^\times \times \mathbb{C}^n$, por el teorema 2.1, existe una vecindad $U \subseteq \Gamma^\times$ de $x_0$ donde está definida la única solución $y$ de (2-1) tal que $y(x_0) = y_0$. Si $Y$ es la hoja que contiene a $(x_0, y_0)$ entonces el gráfico de $y$, $\{(x, y(x)) \in \Gamma^\times \times \mathbb{C}^n | x \in U\}$ está contenido en $Y$. Esto muestra que cada hoja es localmente el gráfico de una solución de (2-1). Además $Y$ contiene los gráficos de todas las continuaciones analíticas de $y$. De esta manera, podemos pensar en las hojas como soluciones globales de la ecuación (2-1). Otra propiedad que es aparente de la construcción es que cada hoja es arcoconexa y por tanto conexa. Notemos que si $\Gamma^\times$ es simplemente conexa (en cuyo caso la ecuación no puede tener singularidades y $\Gamma = \Gamma^\times$), las hojas son los gráficos de soluciones que están definidas en todo $\Gamma$.

De la misma forma, la ecuación (2-2) induce una foliación de $\Gamma^\times \times \mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$. Sea $\mathcal{L}$ una hoja de esta foliación. Si $\sigma \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$, por la proposición 2.3, el conjunto:

$$\mathcal{L} \cdot \sigma = \{(x, U\sigma) | (x, U) \in \mathcal{L}\},$$

es de nuevo una hoja. Esto muestra que $\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ actúa en el conjunto de hojas. Esta acción resulta transitiva pero no libre: sean $\mathcal{L}$ y $\mathcal{L}'$ dos hojas de la foliación. Supongamos que $(x_0, U_0) \in \mathcal{L}$ y $(x_0, V_0) \in \mathcal{L}'$. Entonces $(x_0, V_0) \in \mathcal{L} \cdot (V_0^{-1}U_0) \cap \mathcal{L}'$ y como dos hojas o son disjuntas ó son iguales, $\mathcal{L}' = \mathcal{L} \cdot (V_0^{-1}U_0)$.

**Proposición 2.4.** *Si $\mathcal{L}_{x_0}$ es la hoja que pasa por $(x_0, I_n)$, el grupo de monodromía en $x_0$, $Mon(\Gamma^\times, x_0)$, de la ecuación (2-1) es el grupo de isotropía de la hoja $\mathcal{L}_{x_0}$.*

*Demostración.* Sea $m_{[\gamma]} \in Mon(\Gamma^\times, x_0)$, donde $[\gamma] \in \pi_1(\Gamma^\times, x_0)$. Si $y$ es un germen de solución en $x_0$ de la ecuación (2-1) con $y(x_0) = y_0$ y $y^*$ es la continuación analítica de $y$ a lo largo de $\gamma$ entonces, identificando a $S_{x_0}$ con las condiciones iniciales, $y^*(x_0) = m_{[\gamma]}y_0$.

Por tanto, si $U(x)$ es el germen de solución de la ecuación (2-2) con $U(x_0) = I_n$, su prolongación analítica a lo largo de $\gamma$ está dada por $U(x)m_{[\gamma]}$. Entonces $U(x)$ y $U(x)m_{[\gamma]}$ están en la misma hoja y $\mathcal{L}_{x_0} = \mathcal{L}_{x_0} \cdot m_{[\gamma]}$.

Ahora, sea $\sigma \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ tal que $\mathcal{L}_{x_0} = \mathcal{L}_{x_0} \cdot \sigma$. Entonces $(x_0, I_n)$ y $(x_0, \sigma)$ están en $\mathcal{L}_{x_0}$. Como $\mathcal{L}_{x_0}$ es arcoconexa, existe $\widetilde{\gamma} : [0,1] \to \mathcal{L}_{x_0}$ tal que $\widetilde{\gamma}(0) = (x_0, I_n)$ y $\widetilde{\gamma}(1) = (x_0, \sigma)$. Si $\pi : \Gamma^\times \times \mathrm{GL}(n, \mathbb{C}) \to \Gamma^\times$ denota la proyección en la primera coordenada entonces $\gamma = \pi \circ \widetilde{\gamma}$ es una curva en $\Gamma^\times$ tal que $\sigma = m_{[\gamma]} \in Mon(\Gamma^\times, x_0)$.

□

**Nota 2.1.** Sea $M$ una variedad diferenciable (analítica) de dimensión $n$ y supongamos que existe un conjunto de 1-formas $\omega_1, ..., \omega_m$, $m \leq n$ que son linealmente independientes en cada punto y que satisfacen:

$$d\omega_i = \sum_{k=1}^{m} \omega_k \wedge \eta_{ik},$$

para ciertas 1-formas $\eta_{ik}$. Para cada $p \in M$, sea $E_p$ el subespacio de $T_pM$ que anula a $\omega_1(p), ..., \omega_m(p)$. Entonces $\dim E_p = n - m$. Supongamos que existen campos vectoriales $X_1, ..., X_{n-m}$ tales que para cada $p \in M$, $X_1(p), ..., X_{n-m}(p)$ son una base de $E_p$.

La aplicación $p \mapsto E_p$ es una distribución integrable. Para mostrar esto solo falta probar que para cada $i, j = 1, ..., n - m$, $[X_i(p), X_j(p)] \in E_p$. Usando la identidad:

$$d\omega(X, Y) = X(\omega(Y)) - Y(\omega(X)) - \omega([X, Y]),$$

válida para cualquier 1-forma $\omega$ y cualquier par de campos vectoriales $X, Y$ sobre $M$ vemos que:

$$\begin{aligned} \omega_k([X_i, X_j]) &= X_i(\omega_k(X_j)) - X_j(\omega_k(X_i)) - d\omega_k(X_i, X_j) \\ &= -d\omega_k(X_i, X_j) = -\sum_{l=1}^{m} \omega_l \wedge \eta_{kl}(X_i, X_j). \end{aligned}$$

Como $\omega_l(X_k) = 0$ para cada $l = 1, .., m$, $k = 1, ..., n - m$, es claro que $\omega_l \wedge \eta_{kl}(X_i, X_j) = 0$ y por tanto $\omega_k([X_i, X_j]) = 0$ que era lo que queríamos ver.

Por el teorema de Frobenius ([1], teorema 2.2.26), esta distribución es inducida por una única foliación de $M$ de codimensión $m$ (las hojas de la foliación son las subvariedades integrales conexas maximales de la distribución). Esto muestra que un conjunto de 1-formas $\omega_1, ..., \omega_m$ que satisfacen las condiciones de arriba induce una foliación de $M$.

Para nuestro caso en particular consideramos las 1-formas $\omega_{ij} = du_{ij} - \sum_{k=1}^{n} a_{ik}u_{kj}dx$, $i, j = 1, ..., n$. Es claro que estas $n^2$ 1-formas son independientes y:

$$\begin{aligned} d\omega_{ij} &= -d\left(\sum_{k=1}^{n} a_{ik}u_{kj}\right) \wedge dx = \sum_{k=1}^{n} du_{kj} \wedge (-a_{ik}dx) \\ &= \sum_{k=1}^{n}\left(du_{kj} - \sum_{l=1}^{n} a_{kl}u_{lj}dx\right) \wedge (-a_{ik}dx) = \sum_{k=1}^{n} \omega_{kj} \wedge (-a_{ik}dx). \end{aligned}$$

El campo que anula a estas formas es:

$$X = \frac{\partial}{\partial x} + \sum_{i,j=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{n} a_{ik}u_{kj}\right)\frac{\partial}{\partial u_{ij}}.$$

Las hojas de la foliación inducida por estas 1-formas son precisamente las soluciones de la ecuación (2-2) y por tanto los conjuntos que obtuvimos en esta sección.

## 2.3. Topología de Zariski y grupos algebraicos lineales

Como deseamos saber sobre las relaciones algebraicas que satisfacen las hojas de las foliaciones necesitamos introducir la topología de Zariski en $\mathbb{C}^n$ para poder discutir sobre grupos algebraicos lineales y algunas de sus propiedades. Más adelante definimos la $\mathcal{M}(\Gamma)$-topología sobre $\Gamma^\times \times \mathbb{C}^n$ que es la topología que nos permitirá definir el grupo de Galois.

La topología de Zariski en $\mathbb{C}^n$ es la topología en la cual los cerrados son los conjuntos de ceros de polinomios en $n$ indeterminadas. Más precisamente, un conjunto $Y$ es cerrado en la topología Zariski si existe un ideal $I$ en $\mathbb{C}[x_1, ..., x_n]$ tal que $Y = Z(I) = \{(a_1, ..., a_n) \in \mathbb{C}^n | P(a_1, ..., a_n) = 0 \text{ para todo } P \in I\}$. Luego si un conjunto es cerrado en la topología Zariski, es cerrado en la topología usual, aunque la recíproca no es válida.

**Proposición 2.5.** *Los complementos de conjuntos de la forma $Z(I)$, donde $I$ es un ideal de $\mathbb{C}[x_1, ..., x_n]$, son una topología de $\mathbb{C}^n$.*

*Demostración.* Si $Y_1 = Z(I_1)$ y $Y_2 = Z(I_2)$, entonces $Y_1 \cup Y_2 = Z(I_1 I_2)$ donde $I_1 I_2$ denota el ideal generado por los productos de un elemento de $I_1$ con un elemento de $I_2$. En efecto, si $(a_1, ..., a_n) \in Y_1 \cup Y_2$, entonces $(a_1, ..., a_n) \in I_1$ ó $(a_1, ..., a_n) \in I_2$ y por tanto $(a_1, ..., a_n)$ es un cero de cada polinomio en $I_1 I_2$. Recíprocamente, si $(a_1, ..., a_n) \in Z(I_1 I_2)$, y si $(a_1, ..., a_n) \notin$

$I_1$, existe $P_1 \in I_1$ tal que $P_1(a_1,...,a_n) \neq 0$. Ahora dado $P_2 \in T_2$, $P_1P_2 \in I_1I_2$, luego $(P_1P_2)(a_1,...,a_n) = 0$ y necesariamente $P_2(a_1,...,a_n) = 0$, así que $(a_1,...,a_n) \in Y_2$.

Si $Y_\alpha = Z(I_\alpha)$, donde $\{I_\alpha\}_{\alpha\in A}$ es cualquier familia de ideales, entonces $\cap_{\alpha\in A}Y_\alpha = Z(\langle\cup_{\alpha\in A}I_\alpha\rangle)$, donde $\langle\cup_{\alpha\in A}I_\alpha\rangle$ denota el ideal generado por la unión. Además $\emptyset = Z(1)$ y $\mathbb{C}^n = Z(0)$. □

**Nota 2.2.** $\mathbb{C}^n$ con la topología de Zariski es un espacio topológico noetheriano, es decir, toda cadena descendente de conjuntos cerrados es finitamente constante. En efecto, sea $C_1 \supseteq C_2 \supseteq \cdots \supseteq C_n \supseteq \cdots$ una cadena descendente de conjuntos cerrados. Para cada $C_i$, sea $I_i = \{P \in \mathbb{C}[x_1,...,x_n] | P(a_1,...,a_n) = 0 \text{ para todo } (a_1,...,a_n) \in C_i\}$, el ideal de polinomios que anulan $C_i$. Es claro entonces que $I_1 \subseteq I_2 \subseteq \cdots \subseteq I_n \subseteq \cdots$. Por el teorema de la base de Hilbert, el anillo $\mathbb{C}[x_1,...,x_n]$ es noetheriano. Entonces existe $N$, entero positivo, tal que $I_n = I_N$, para todo $n \geq N$. Como los $C_i$ son cerrados, entonces $Z(I_i) = C_i$ y $C_n = C_N$ para todo $n \geq N$.

Cualquier subconjunto de $\mathbb{C}^m$ se puede dotar de la topología Zariski tomando la topología de subespacio. En particular el grupo $\mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$, al verlo como un subespacio de $\mathbb{C}^{n^2}$, adquiere la topología de Zariski.

**Definición 2.4.** Un grupo algebraico lineal $G$ es un subgrupo de $\mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$, para algún entero positivo $n$, que es cerrado en la topología de Zariski.

**Ejemplo 2.5.** $(\mathbb{C},+)$ es un grupo algebraico lineal al identificarlo con el subgrupo de $\mathrm{GL}(2,\mathbb{C})$:

$$\alpha \longmapsto \begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

**Ejemplo 2.6.** Las matrices diagonales $\mathrm{D}(n,\mathbb{C}) \subseteq \mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$ son un grupo algebraico lineal porque están definidas por los polinomios $a_{ij} = 0$ con $1 \leq i,j \leq n, i \neq j$.

**Ejemplo 2.7.** Las matrices triangulares superiores invertibles $\mathrm{Tr}(n,\mathbb{C})$ son un grupo algebraico lineal porque están definidas por los polinomios:

$$a_{ij} = 0 \text{ si } i > j.$$

**Ejemplo 2.8.** El grupo especial lineal $\mathrm{SL}(n,\mathbb{C}) = \{A \in \mathrm{GL}(n,\mathbb{C}) | \det A = 1\}$ es un grupo algebraico lineal porque $\mathrm{SL}(n,\mathbb{C}) = Z(\det -1)$.

**Ejemplo 2.9.** El grupo ortogonal $\mathrm{O}(n) = \{A \in \mathrm{GL}(n,\mathbb{C}) | AA^t = I_n\}$, donde $A^t$ denota la transpuesta de $A$, es un grupo algebraico lineal porque está definido por los polinomios:

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik}a_{jk} = \delta_{ij} \qquad 1 \leq i,j, \leq n.$$

**Ejemplo 2.10.** El grupo especial ortogonal $\mathrm{SO}(n,\mathbb{C}) = \{A \in \mathrm{O}(n) | \det A = 1\} = \mathrm{O}(n) \cap \mathrm{SL}(n,\mathbb{C})$.

**Ejemplo 2.11.** El grupo simpléctico $\mathrm{Sp}(n,\mathbb{C}) = \{A \in \mathrm{GL}(2n,\mathbb{C}) | A^t J_n A = J_n\}$.

**Lema 2.1.** *Si $G \subseteq GL(n,\mathbb{C})$ es un grupo lineal algebraico y $\sigma \in G$, las dos aplicaciones $R_\sigma : G \to G$ y $L_\sigma : G \to G$ definidas por $R_\sigma(A) = A\sigma$ y $L_\sigma(A) = \sigma A$ son homeomorfismos.*

*Demostración.* Basta con notar que si $I$ es un ideal de $\mathbb{C}[u_{ij}]$, el anillo de polinomios en las $n^2$ variables $u_{ij}, i, j = 1, ..., n$, entonces $R_\sigma^{-1}(Z(I)) = Z(J)$, donde $J$ es ideal conformado por polinomios $Q(U) = P(U\sigma), U = (u_{ij})$, con $P \in I$. □

En adelante denotaremos por $G^0$ la componente conexa de $G$ que contiene a la matriz identidad.

**Proposición 2.6.** *Sea $G \subseteq GL(n,\mathbb{C})$ un grupo lineal algebraico y $G^0$ la componente conexa de la identidad. Entonces $G^0$ es un subgrupo normal de índice finito. Además, si $H$ es un subgrupo cerrado de $G$ de índice finito entonces $G^0 \subseteq H$.*

*Demostración.* Sea $\sigma \in G^0$. Como $G^0$ es conexo, por el lema, $\sigma^{-1}G^0$ es conexo y además $I_n \in \sigma^{-1}G^0$, luego $\sigma^{-1}G^0 \subseteq G^0$, en particular $\sigma^{-1} \in G^0$. Entonces $G^0$ es cerrado bajo inversos. De la misma forma $\sigma G^0 \subset G^0$ para todo $\sigma \in G^0$, luego $G^0$ es cerrado bajo productos. Por tanto $G^0$ es un subgrupo de $G$. Además, si $\tau \in G$, el conjunto $\tau G^0 \tau^{-1}$ es conexo y contiene a $I_n$, por tanto $\tau G^0 \tau^{-1} \subseteq G^0$, es decir $G^0$ es normal.

Sean $\{\sigma_i\}_{i \in I}$ un conjunto de representantes de clases laterales a derecha de $G^0$ en $G$. Es claro que $G = \bigcup_{i \in I} G^0 \sigma_i$ y que cada $G^0\sigma_i$ es una componente conexa de $G$. Al ser $G$ un espacio noetheriano (nota 2.2), tiene solo un número finito de estas. Es decir, hay finitos $\sigma_i$, por tanto el índice de $G^0$ en $G$ es finito. Sea $H$ un subgrupo cerrado de índice finito de $G$. Entonces existen $\sigma_1, ..., \sigma_n \in G$ tales que $G = H \cup \sigma_1 H \cup ... \cup \sigma_n H$. Esto muestra que $H$ es abierto. Luego $G^0 = (G^0 \cap H) \cup (G^0 \cap \sigma_1 H) \cup ... \cup (G^0 \cap \sigma_n H)$, es decir, $G^0$ se descompone como unión de conjuntos abiertos. Como $G^0$ es conexo e interseca a $H$ entonces $G^0 \subseteq H$. □

**Ejemplo 2.12.** Sea $G = \left\{ \begin{pmatrix} c & 0 \\ 0 & c^{-1} \end{pmatrix} \middle| c \in \mathbb{C}^* \right\} \cup \left\{ \begin{pmatrix} 0 & c \\ -c^{-1} & 0 \end{pmatrix} \middle| c \in \mathbb{C}^* \right\}$. $G$ es un subgrupo algebraico de $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$. En este caso $G^0 = \left\{ \begin{pmatrix} c & 0 \\ 0 & c^{-1} \end{pmatrix} \middle| c \in \mathbb{C}^* \right\}$.

A continuación enunciamos uno de los principales resultados sobre grupos algebraicos lineales cuya demostración se puede encontrar en [5].

**Teorema 2.2.** *(Lie-Kolchin) Sea $H$ un subgrupo lineal algebraico conexo. Entonces $H$ es soluble si y sólo si es triangulable, esto es, existe $\sigma \in GL(n,\mathbb{C})$ tal que $\sigma H \sigma^{-1}$ es un subgrupo de $Tr(n,\mathbb{C})$.*

La idea de la prueba es utilizar las hipótesis para reducir al caso en el que $H$ es abeliano. Una vez logrado esto, se aplica el conocido hecho de algebra lineal que establece que cualquier conjunto de matrices triangulables que conmutan entre sí es simultáneamente triangulable.

**Definición 2.5.** Sea $G$ un grupo algebraico lineal conexo. Un subgrupo de Borel $B \subseteq G$ es un subgrupo maximal conexo soluble de $G$.

Por el teorema de Lie-Kolchin, los subgrupos de Borel de $\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ son conjugados de $\mathrm{Tr}(n, \mathbb{C})$.

**Nota 2.3.** Dado un grupo algebraico lineal $G \subseteq \mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$, en particular es un grupo de Lie con la topología usual de $\mathbb{C}^{n^2}$ y $G^0$ sigue siendo su componente conexa de la identidad. Como $G$ es conexo si y sólo si $G = G^0$, entonces $G$ es conexo en la topología de Zariski si y sólo si es conexo en la topología usual.

Podemos entonces asignarle a cada grupo algebraico lineal $G$ un algebra de Lie: el algebra de Lie que le corresponde como grupo de Lie, es decir, su espacio tangente en $I_n$, $\mathfrak{g} = T_{I_n}G$. Al identificar $T_{I_n}\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ con $Mat(n \times n, \mathbb{C}) = \mathfrak{gl}(n, \mathbb{C})$, el corchete de Lie viene dado por $[A, B] = AB - BA$ y $\mathfrak{g}$ resulta ser una subalgebra de Lie de $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{C})$. Vale la pena resaltar que $G^0$ y $G$ tienen la misma algebra de Lie, porque $G^0$ es una componente conexa de $G$. También es cierto que si $G$ es conexo, es abeliano si y sólo si $\mathfrak{g}$ es un algebra de Lie abeliana. En adelante nos referiremos a la dimensión de $G$ como la dimensión de su algebra de Lie (y por tanto a su dimensión como variedad).

A continuación damos los ejemplos de algunas algebras de Lie de los grupos de Lie clásicos:

$$\begin{aligned}
\mathfrak{tr}(n, \mathbb{C}) &= \{A \in Mat(n \times n, \mathbb{C}) | A \text{ es triangular superior}\},\\
\mathfrak{sl}(n, \mathbb{C}) &= \{A \in Mat(n \times n, \mathbb{C}) | tr(A) = 0\},\\
\mathfrak{o}(n, \mathbb{C}) &= \{A \in Mat(n \times n, \mathbb{C}) | A + A^t = 0\},\\
\mathfrak{sp}(n, \mathbb{C}) &= \{A \in Mat(2n \times 2n, \mathbb{C}) | A^t J_n + J_n A = 0\}.
\end{aligned}$$

Necesitamos ahora introducir una topología sobre $\Gamma \times \mathbb{C}^n$ que nos dé información sobre las relaciones algebraicas que satisfagan sus subconjuntos. Dado un ideal $I$ de $\mathcal{M}(\Gamma)[y_1, ..., y_n]$, si $x \in \Gamma$ y $\mathcal{O}_x$ denota el anillo de funciones meromorfas sobre $\Gamma$ que son analíticas en $x$, sea:

$$Z(I) = \{(x, a_1, ..., a_n) \in \Gamma \times \mathbb{C}^n | P(x, a_1, ..., a_n) = 0 \text{ para todo } P \in I \cap \mathcal{O}_x[y_1, ..., y_n]\}.$$

**Nota 2.4.** Si $I \subseteq J$ entonces $Z(J) \subseteq Z(I)$. En efecto, si $(x_0, a_1, ..., a_n) \in Z(J)$ y $P \in I \cap \mathcal{O}_{x_0}[y_1, ..., y_n] \subseteq J \cap \mathcal{O}_{x_0}[y_1, ..., y_n]$ por definición, $P(x_0, a_1, ..., a_n) = 0$. Como $P$ fue arbitrario, $(x_0, a_1, ..., a_n) \in Z(I)$.

**Proposición 2.7.** *Los complementos de conjuntos de la forma $Z(I)$, donde $I$ es un ideal de $\mathcal{M}(\Gamma)[y_1,...,y_n]$ son una topología de $\Gamma \times \mathbb{C}^n$. Esta topología se conoce como la topología $\mathcal{M}(\Gamma) - Zariski$ de $\Gamma \times \mathbb{C}^n$.*

*Demostración.* Es claro de la definición que $\Gamma\times\mathbb{C}^n = Z(0)$ y $\emptyset = Z(\mathcal{M}(\Gamma)[y_1,...,y_n])$. Veamos ahora que la unión finita e intersección arbitraria de conjuntos de la forma $Z(I)$ son de la misma manera.

Dados $I_1$ e $I_2$ ideales de $\mathcal{M}(\Gamma)[y_1,...,y_n]$, si $I$ es el ideal generado por los polinomios de la forma $P_1 \cdot P_2$ con $P_i \in I_i$, $i = 1,2$, entonces $Z(I) = Z(I_1) \cup Z(I_2)$. En efecto, como $I \subseteq I_i$, $i = 1,2$, $Z(I_1) \cup Z(I_2) \subseteq Z(I)$. Sea $(x_0, a_1, ..., a_n) \in Z(I)$ y supongamos que $(x_0, a_1, ..., a_n) \notin Z(I_2)$. Entonces existe $P_2 \in I_2 \cap \mathcal{O}_{x_0}[y_1,...,y_n]$ tal que $P_2(x_0,a_1,...,a_n) \neq 0$. Sea $P_1 \in I_1 \cap \mathcal{O}_{x_0}[y_1,...,y_n]$. Como $P_1 \cdot P_2 \in I \cap \mathcal{O}_{x_0}[y_1,...,y_n]$, $(P_1 \cdot P_2)(x_0,a_1,...,a_n) = 0$. Luego $P_1(x_0,a_1,...,a_n) = 0$ y $(x_0,a_1,...,a_n) \in Z(I_1)$.

Tomemos cerrados $Z(I_\alpha)$, $\alpha \in A$. Sea $I$ el ideal generado por $\bigcup_{\alpha\in A} I_\alpha$. Se sigue de inmediato que $Z(I) = \bigcap_{\alpha\in A} Z(I_\alpha)$. □

Recíprocamente podemos asignarle a cada conjunto $Y \subseteq \Gamma \times \mathbb{C}^n$ el ideal de polinomios que lo anulan. Si $\pi : \Gamma \times \mathbb{C}^n \to \Gamma$ la proyección en el primer factor, definimos:

$$\begin{aligned}\mathcal{I}(Y) =&\{P \in \mathcal{M}(\Gamma)[y_1,...,y_n] | \text{ existe } S_P \subset Y \text{ tal que } \pi(S_P) \text{ es discreto, contiene}\\ &\text{las singularidades de los coeficientes de } P \text{ y } P(x,a_1,...,a_n) = 0 \text{ para todo}\\ &(x,a_1,...,a_n) \in Y \setminus S_P\}.\end{aligned}$$

La razón por la cual introducimos los subconjuntos $S_P$ es para evitar problemas al reemplazar, porque pueden haber expresiones que no estén definidas. En general, cuando sea posible tomaremos $S_P = \pi^{-1}(S) \cap Y$, donde $S$ es el conjunto de singularidades de los coeficientes de $P$.

Debemos comprobar que $\mathcal{I}(Y)$ es un ideal de $\mathcal{M}(\Gamma)[y_1,...,y_n]$. Si $P_1, P_2 \in \mathcal{I}(Y)$, existen conjuntos $S_1, S_2 \subset Y$ tales que $\pi(S_1)$, $\pi(S_2)$ son discretos y contienen las singularidades de los coeficientes de $P_1$, $P_2$ respectivamente y $P_i(x,a_1,...,a_n) = 0$ para todo $(x,a_1,...,a_n) \in Y \setminus S_i$, $i = 1,2$. Sea $S = S_1 \cup S_2$. $S$ es tal que $\pi(S) = \pi(S_1) \cup \pi(S_2)$ es discreto, contiene las singularidades de $P_1 + P_2$ y $(P_1 + P_2)(x,a_1,...,a_n) = 0$ para todo $(x,a_1,...,a_n) \in Y \setminus S$. Por tanto, $P_1 + P_2 \in \mathcal{I}(Y)$.

Sean $P \in \mathcal{I}(Y)$ y $Q \in \mathcal{M}(\Gamma)[y_1,...,y_n]$. Si $S \subset \Gamma$ es el conjunto de singularidades de los coeficientes de $Q$, que es discreto, sea $S_{PQ} = S_P \cup (\pi^{-1}(S) \cap Y)$. $\pi(S_{PQ})$ es discreto, contiene las singularidades de $PQ$ y $(PQ)(x, a_1, ..., a_n) = 0$ para todo $(x, a_1, ..., a_n) \in Y \setminus S_{PQ}$, luego $PQ \in \mathcal{I}(Y)$.

Notemos además que si $Y_1 \subseteq Y_2$ entonces $\mathcal{I}(Y_2) \subseteq \mathcal{I}(Y_1)$.

**Proposición 2.8.** *Sea $Y \subseteq \Gamma \times \mathbb{C}^n$. Si $\overline{Y}^{zar}$ denota la clausura $\mathcal{M}(\Gamma)$-Zariski de $Y$, entonces $Z(\mathcal{I}(Y)) = \overline{Y}^{zar}$.*

*Demostración.* Sea $(x_0, a_1, ..., a_n) \in Y$ y $P \in \mathcal{I}(Y) \cap \mathcal{O}_{x_0}[y_1, ..., y_n]$. Como $x_0$ no es singularidad de los coeficientes de $P$, $(x_0, a_1, .., a_n) \notin S_P$ y entonces $P(x_0, a_1, ..., a_n) = 0$. Por tanto, $(x_0, a_1, ..., a_n) \in Z(\mathcal{I}(Y))$ y $Y \subseteq Z(\mathcal{I}(Y))$. Como $Z(\mathcal{I}(Y))$ es cerrado, tomando clausuras, $\overline{Y}^{zar} \subseteq Z(\mathcal{I}(Y))$.

Recíprocamente, supongamos que $Y \subseteq Z(J)$, para algún ideal $J$ de $\mathcal{M}(\Gamma)[y_1, ..., y_n]$. Debemos probar que $Z(\mathcal{I}(Y)) \subseteq Z(J)$. Primero observemos que $J \subseteq \mathcal{I}(Z(Y))$. Si $P \in J$ y $S_P = \pi^{-1}(S)$ es la imagen inversa de las singularidades de los coeficientes de $P$, entonces si tomamos $(x_0, a_1, ..., a_n) \in Z(J) \setminus S_P$, $P \in J \cap \mathcal{O}_{x_0}[y_1, ..., y_n]$ y $P(x_0, a_1, .., a_n) = 0$. Esto muestra que $P \in \mathcal{I}(Z(Y))$. Como $Y \subseteq Z(J)$, $\mathcal{I}(Z(Y)) \subseteq \mathcal{I}(Y)$. Por tanto, $J \subseteq \mathcal{I}(Y)$ y de aquí vemos que $Z(\mathcal{I}(Y)) \subseteq Z(J)$.

□

## 2.4. El grupo de Galois

En esta sección le asociaremos a cada hoja de la foliación (2-2) el grupo de matrices que respetan las relaciones algebraicas que satisface las hojas. Estos grupos resultan ser grupos algebraicos lineales y además contienen al grupo de monodromía de la ecuación (2-1).

En la sección anterior, dotamos al espacio $\Gamma \times \mathbb{C}^{n^2}$ de la topología $\mathcal{M}(\Gamma)$-Zariski. Esta topología induce naturalmente una topología sobre $\Gamma^\times \times \mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$. Sea $\mathcal{L}$ una hoja de la foliación (2-2) en $\Gamma^\times \times \mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$. En adelante denotaremos por $\overline{\mathcal{L}}$ su clausura $\mathcal{M}(\Gamma)$-Zariski.

**Proposición 2.9.** *El conjunto $\overline{\mathcal{L}}$ es unión de hojas de la foliación (2-2).*

*Demostración.* Como $\overline{\mathcal{L}}$ es cerrado, existe un ideal $I$ de $\mathcal{M}(\Gamma)[y_{ij}]$ tal que $\overline{\mathcal{L}} = Z(I)$. Luego $(x, U(x)) \in \overline{\mathcal{L}}$ si y sólo si $P_l(x, U(x)) = 0$ para cada $P_l \in I \cap \mathcal{O}_x[y_{ij}]$. Sea $(x_0, U_0) \in \mathcal{L}$ y $U(x) = (u_{ij}(x))$ una matriz fundamental de soluciones definida en una vecindad suficientemente pequeña de $x_0$ tal que el gráfico de $U(x)$ está contenido en $\mathcal{L}$. Como $P_l(x, U(x)) = 0$, derivando respecto a $x$ obtenemos:

$$\frac{d}{dx} P_l(x, U) = \frac{\partial P_l}{\partial x}(x, U(x)) + \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial P_l}{\partial u_{ij}}(x, U(x)) \frac{du_{ij}}{dx}(x) = 0.$$

y aplicando que $U(x)$ es solución de la ecuación (2-2),

$$\frac{\partial P_l}{\partial x}(x, U(x)) + \sum_{i,j,k=1}^{n} a_{ik}(x) u_{kj} \frac{\partial P_l}{\partial u_{ij}}(x, U(x)) = 0.$$

Esto muestra que $\frac{d}{dx} P_l(x, U)$ son polinomios en $\mathcal{M}(\Gamma)[u_{ij}]$ que se anulan en $(x_0, U_0)$. Como $(x_0, U_0)$ fue arbitrario vemos que $\frac{dP_l}{dx}(x, U) \in \mathcal{I}(L)$. Estos polinomios también se anulan en $\overline{\mathcal{L}}$ porque, por la proposición 2.8, $\overline{\mathcal{L}} = Z(\mathcal{I}(\mathcal{L}))$. Repitiendo este procedimiento vemos que para todo $m > 0$, $\dfrac{d^m P_l}{dx^m}(x, U) \in \mathcal{M}(\Gamma)[u_{ij}]$ y se anulan en $\overline{\mathcal{L}}$.

Si $(x_0, U_0) \in \overline{\mathcal{L}}$, sea $U(x)$ una matriz fundamental de soluciones definida en una vecindad de $x_0$ tal que $U(x_0) = U_0$. Entonces hemos mostrado que:

$$\frac{d^m P_l}{dx^m}(x_0, U_0) = 0 \qquad m = 0, 1, \ldots$$

Como $P_l(x, U(x))$ es una función analítica en $x_0$, $P_l(x, U(x)) = 0$ en una vecindad de $x_0$ y por tanto el grafo de $U(x)$ está contenido en $\overline{\mathcal{L}}$. El resultado se sigue del hecho de que cada hoja de la foliación es cubierta por gráficos de soluciones de la ecuación (2-2).

□

**Nota 2.5.** Note que hemos probado que si $(x_0, U_0) \in \overline{\mathcal{L}}$ y $\mathcal{L}'$ es la hoja de la foliación que contiene a ese punto entonces $\mathcal{L}' \subseteq \overline{\mathcal{L}}$.

**Definición 2.6.** El grupo de Galois de una hoja $\mathcal{L}$ de la foliación (2-2), $Gal(\mathcal{L})$, se define como el conjunto de matrices $\sigma \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ tales que $\overline{\mathcal{L}} \cdot \sigma = \overline{\mathcal{L}}$, ver Figura **2-2**.

**Lema 2.2.** *Si $\sigma \in GL(n, \mathbb{C})$, la función $R_\sigma : \Gamma \times GL(n, C) \to \Gamma \times GL(n, C)$ dada por $R_\sigma(x, U) = (x, U\sigma)$ es un homeomorfismo en la topología $\mathcal{M}(\Gamma)$-Zariski.*

*Demostración.* Es suficiente probar que $R_\sigma^{-1}(Z(I))$ es cerrado para cada ideal $I$ de $\mathcal{M}(\Gamma)[y_{ij}]$. Si $P \in \mathcal{M}(\Gamma)[y_{ij}]$ y $\tau \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ notaremos $P_\tau(x, U) = P(x, U\tau)$.

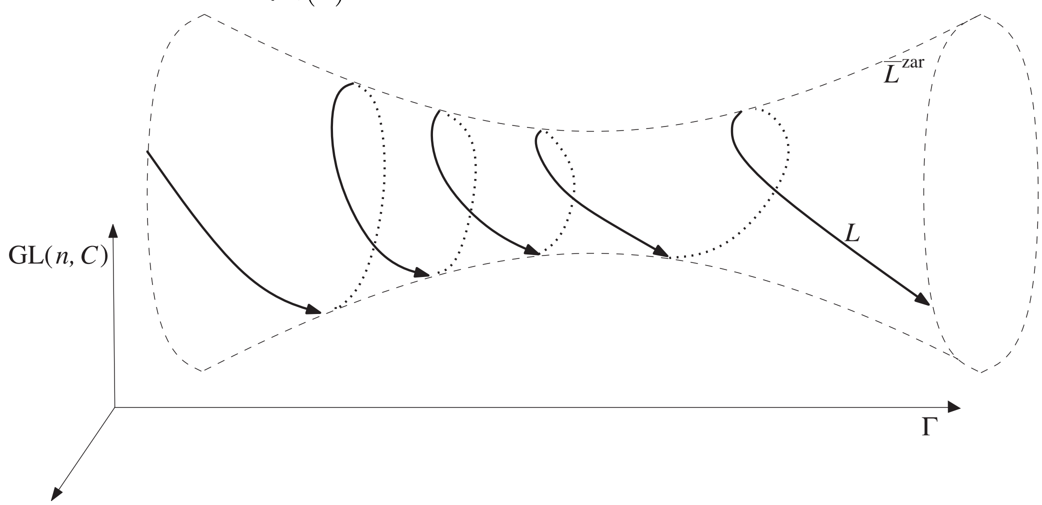
Sea $I_\sigma = \{P_\sigma | P \in I\}$. $I_\sigma$ es un ideal de $\mathcal{M}(\Gamma)[y_{ij}]$ porque si $P_\sigma, Q_\sigma \in I_\sigma$, como $P_\sigma + Q_\sigma = (P + Q)_\sigma$ y $P + Q \in I$, $P_\sigma + Q_\sigma \in I_\sigma$. Ahora, si $P_\sigma \in I_\sigma$ y $Q \in \mathcal{M}(\Gamma)[y_{ij}]$, como $P_\sigma Q = (PQ_{\sigma-1})_\sigma$ y $PQ_{\sigma^{-1}} \in I$, vemos que $P_\sigma Q \in I_\sigma$.

$(x_0, U) \in R_\sigma^{-1}(Z(I))$ si y sólo si $(x_0, U\sigma) \in Z(I)$ si y sólo si para todo $P \in I \cap \mathcal{O}_{x_0}[y_{ij}]$, $P(x_0, U\sigma) = 0$. Esto muestra que $(x_0, U) \in R_\sigma^{-1}(Z(I))$ si y sólo si $(x_0, U) \in Z(I_\sigma)$. Luego $R_\sigma^{-1}(Z(I)) = Z(I_\sigma)$. Entonces $R_\sigma$ es continua. Como $R_\sigma^{-1} = R_{\sigma^{-1}}$, $R_\sigma$ es un homeomorfismo.

□

**Nota 2.6.** En general, para mostrar que una matriz $\sigma \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ está en $Gal(\mathcal{L})$ es suficiente probar que $\mathcal{L} \cdot \sigma \subseteq \overline{\mathcal{L}}$.

**Figura 2-2.**: Para calcular el grupo de Galois de una hoja de la foliación (2-2) se debe tomar su clausura $\mathcal{M}(\Gamma)$-Zariski.




**Teorema 2.3.** *Sea $\mathcal{L}$ una hoja de la foliación (2-2). Entonces:*

1. $\overline{\mathcal{L}} = \bigcup_{\sigma \in Gal(\mathcal{L})} \mathcal{L} \cdot \sigma.$

2. *Si $\mathcal{L}$ y $\mathcal{L}'$ son dos hojas tales que $\mathcal{L}' = \mathcal{L} \cdot \tau$, entonces $Gal(\mathcal{L}) = \tau Gal(\mathcal{L}')\tau^{-1}$.*

3. *Si $\mathcal{L}$ y $\mathcal{L}'$ son dos hojas que tienen la misma clausura, entonces $Gal(\mathcal{L}) = Gal(\mathcal{L}')$.*

4. *$Gal(\mathcal{L})$ es un grupo lineal algebraico.*

*Demostración.* 1. Si $\sigma \in Gal(\mathcal{L})$, por el lema anterior, como $R_\sigma$ es un homeomorfismo, $\mathcal{L} \cdot \sigma \subseteq \overline{\mathcal{L} \cdot \sigma} = \overline{\mathcal{L}} \cdot \sigma = \overline{\mathcal{L}}$. Para mostrar la otra contenencia sea $(x, U) \in \overline{\mathcal{L}}$ y $\mathcal{L}'$ la hoja de la foliación (2-2) que contiene a este punto. Por la nota 2.5, $\mathcal{L}' \subseteq \overline{\mathcal{L}}$. Si $\sigma \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ es tal que $\mathcal{L}' = \mathcal{L} \cdot \sigma$, por la nota 2.6, $\sigma \in Gal(\mathcal{L})$ y $(x, U) \in \mathcal{L} \cdot \sigma$.

2. Si $\mathcal{L}' = \mathcal{L} \cdot \tau$, vemos que $\overline{\mathcal{L}'} = \overline{\mathcal{L}} \cdot \tau$. Dado $\sigma \in Gal(\mathcal{L})$, tenemos que:

$$\overline{\mathcal{L}'} \cdot \tau^{-1} \cdot \sigma \cdot \tau = \overline{\mathcal{L}} \cdot \sigma \cdot \tau = \overline{\mathcal{L}} \cdot \tau = \overline{\mathcal{L}'},$$

es decir, $\tau^{-1}\sigma\tau \in Gal(\mathcal{L}')$ que implica que $\sigma \in \tau Gal(\mathcal{L}')\tau^{-1}$.

4. Si $\sigma_1, \sigma_2 \in Gal(\mathcal{L})$, entonces $\overline{\mathcal{L}} \cdot (\sigma_1 \cdot \sigma_2) = (\overline{\mathcal{L}} \cdot \sigma_1) \cdot \sigma_2 = \overline{\mathcal{L}} \cdot \sigma_2 = \overline{\mathcal{L}}$. Luego $\sigma_1 \cdot \sigma_2 \in Gal(\mathcal{L})$. Si $\sigma \in Gal(\mathcal{L})$, multiplicando por $\sigma^{-1}$ la ecuación $\overline{\mathcal{L}} = \overline{\mathcal{L}} \cdot \sigma$, obtenemos $\overline{\mathcal{L}} \cdot \sigma^{-1} = \overline{\mathcal{L}}$, es decir, $\sigma^{-1} \in Gal(\mathcal{L})$.

Para mostrar que $Gal(L)$ es un grupo algebraico tomemos $(x_0, U_0) \in \mathcal{L}$. Sea $I$ el ideal de $\mathbb{C}[u_{ij}]$ generado por los polinomios de la forma $P(x_0, U_0U)$ y $P(x_0, U_0U^{-1})$, donde $P \in \mathcal{I}(\mathcal{L}) \cap \mathcal{O}_{x_0}[u_{ij}]$. Veamos que $Gal(\mathcal{L}) = \{\sigma \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{C}) | Q(\sigma) = 0 \text{ para todo } Q \in I\}$.

Si $\sigma \in Gal(\mathcal{L})$, entonces $\overline{\mathcal{L} \cdot \sigma} = \overline{\mathcal{L}}$. Luego $(x_0, U_0\sigma) \in \overline{\mathcal{L}} = Z(\mathcal{I}(\mathcal{L}))$. Por definición, $P(x_0, U_0\sigma) = 0$ para todo $P \in \mathcal{I}(L) \cap \mathcal{O}_{x_0}[u_{ij}]$. De la misma forma, $(x_0, U_0\sigma^{-1}) \in Z(\mathcal{I}(\mathcal{L}))$ y $P(x_0, U_0\sigma^{-1}) = 0$ para todo $P \in \mathcal{I}(L) \cap \mathcal{O}_{x_0}[u_{ij}]$.

Supongamos que $Q(\sigma) = 0$, para todo $Q \in I$. Entonces $P(x_0, U_0\sigma) = 0$ para todo $P \in \mathcal{I}(\mathcal{L}) \cap \mathcal{O}_{x_0}[u_{ij}]$. Luego $(x_0, U_0\sigma) \in \overline{\mathcal{L}}$. Como $(x_0, U_0\sigma) \in \mathcal{L} \cdot \sigma$, entonces $\mathcal{L} \cdot \sigma \subseteq \overline{\mathcal{L}}$ y por tanto $\overline{\mathcal{L}} \cdot \sigma \subseteq \overline{\mathcal{L}}$. Pero también $P(x_0, U_0\sigma^{-1}) = 0$ para todo $P \in \mathcal{I}(L) \cap \mathcal{O}_{x_0}[u_{ij}]$, por lo que $\mathcal{L} \cdot \sigma^{-1} \subseteq \overline{\mathcal{L}}$. Esto implica que $\overline{\mathcal{L}} \cdot \sigma^{-1} \subseteq \overline{\mathcal{L}}$. Podemos concluir entonces que $\overline{\mathcal{L}} = \overline{\mathcal{L}} \cdot \sigma$, es decir, $\sigma \in Gal(\mathcal{L})$.

□

**Nota 2.7.** En demostración anterior consideramos expresiones del tipo $P(x_0, U_0U^{-1})$, donde $P \in \mathcal{M}(\Gamma)[u_{ij}]$. En general $P(x_0, U_0U^{-1}) \notin \mathbb{C}[u_{ij}]$ porque aparece el término $\det(u_{ij})^{-1}$. Lo que si podemos asegurar es que $P(x_0, U_0U^{-1}) \in \mathbb{C}[u_{ij}, \det(u_{ij})^{-1}]$. Esto no afecta la demostración porque si $Q \in \mathbb{C}[u_{ij}, \det(u_{ij})^{-1}]$, podemos encontrar $m > 0$ tal que $\det(u_{ij})^m Q \in \mathbb{C}[u_{ij}]$.

**Definición 2.7.** El grupo de Galois de la ecuación (2-1) en el punto $x \in \Gamma^\times$ se define como $Gal(\Gamma^\times, x) = Gal(\mathcal{L}_x)$, donde $\mathcal{L}_x$ de la hoja de la foliación (2-2) que pasa por $(x, I_n)$.

**Definición 2.8.** El fibrado de Galois $Gal(\Gamma^\times)$ es el subconjunto de $\Gamma^\times \times \mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ definido por:

$$Gal(\Gamma^\times) = \{(x, \sigma) \in \Gamma^\times \times \mathrm{GL}(n, \mathbb{C}) | \sigma \in Gal(\mathcal{L}_x)\}.$$

**Proposición 2.10.** *Si $\gamma : [0, 1] \to \Gamma^\times$ es un camino continuo entonces:*

$$Gal(\Gamma^\times, \gamma(0)) = m_{[\gamma]}^{-1} Gal(\Gamma^\times, \gamma(1)) m_{[\gamma]}.$$

*Demostración.* Se deduce de la parte 2 del teorema 2.3 porque como $(\gamma(1), m_{[\gamma]}) \in \mathcal{L}_{\gamma(0)}$ entonces $(\gamma(1), I_n) \in \mathcal{L}_{\gamma(0)} \cdot m_{[\gamma]}^{-1}$. Esto implica que $\mathcal{L}_{\gamma(0)} = \mathcal{L}_{\gamma(1)} \cdot m_{[\gamma]}$. □

Esta proposición muestra que basta con conocer el grupo de Galois de la ecuación (2-1) en un solo punto para conocerlo en todos pues todos son conjugados.

**Proposición 2.11.** *Para cada $x \in \Gamma^\times$, $Mon(\Gamma^\times, x) \subseteq Gal(\Gamma^\times, x)$.*

*Demostración.* Por la proposición 2.4, $Mon(\Omega^\times, x)$ es el grupo de isotropía de la hoja $\mathcal{L}_x$. Si $m_{[\gamma]} \in Mon(\Omega^\times, x)$, entonces $\mathcal{L}_x = \mathcal{L}_x \cdot m_{[\gamma]}$. Si tomamos clausuras es evidente que $m_{[\gamma]} \in Gal(\mathcal{L}_x) = Gal(\Gamma^\times, x)$. □

**Nota 2.8.** Supongamos que $(x, V_1)$ y $(x, V_2)$ están $\overline{\mathcal{L}}$. Por la parte 1 del teorema 2.3, existen $\sigma_1, \sigma_2 \in Gal(\mathcal{L})$ y $U_1, U_2 \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ tales que $(x, U_i) \in \mathcal{L}$ y $(x, V_i) = (x, U_i) \cdot \sigma_i$, $i = 1, 2$. Como $(x, U_2) = (x, U_1) \cdot U_1^{-1}U_2 \in \mathcal{L} \cap (\mathcal{L} \cdot U_1^{-1}U_2)$, entonces $\mathcal{L} = \mathcal{L} \cdot U_1^{-1}U_2$ y es claro que $U_1^{-1}U_2 \in Gal(\mathcal{L})$. Luego $V_1^{-1}V_2 = \sigma_1^{-1}U_1^{-1}U_2\sigma_2 \in Gal(\mathcal{L})$.

**Teorema 2.4.** *Sea $Y$ una hoja de la foliación de la ecuación (2-1) en $\Gamma^\times \times \mathbb{C}^n$. Su clausura en la topología $\mathcal{M}(\Gamma)$-Zariski se obtiene por la acción del grupo de Galois, es decir:*

$$\overline{Y}^{zar} = Gal(\Gamma^\times) \cdot Y = \{(x, \sigma y) \in \Gamma^\times \times \mathbb{C}^n | (x, y) \in Y, \sigma \in Gal(\Gamma^\times, x)\}.$$

*Demostración.* Sea $(x_0, y_0) \in Y$ y $\mathcal{L}_{x_0}$ la hoja de la foliación (2-3) que pasa por $(x_0, I_n)$. Si tomamos otro $(x, y) \in Y$ y consideramos $\gamma$ una curva continua que une a $x_0$ con $x$ entonces $y = m_{[\gamma]}y_0$. Además si $U$ es la solución de (2-2) tal que $U(x_0) = I_n$ entonces $U(x) = m_{[\gamma]}$ y $(x, m_{[\gamma]}) \in \mathcal{L}_{x_0}$. Esto muestra que:

$$Y = \mathcal{L}_{x_0} \cdot y_0 = \{(x, \sigma y_0) \in \Gamma^\times \times \mathrm{GL}(n, \mathbb{C}) | (x, \sigma) \in \mathcal{L}_{x_0}\}.$$

Luego $Y \subseteq \overline{\mathcal{L}_{x_0}} \cdot y_0$. Ahora probaremos que $\overline{\mathcal{L}}_{x_0} \cdot y_0 = Gal(\Gamma^\times) \cdot Y$. Sea $(x, \sigma y) \in Gal(\Gamma^\times) \cdot Y$, donde $(x, y) \in Y$ y $\sigma \in Gal(\mathcal{L}_x)$. Por tanto $(x, \sigma) \in \overline{\mathcal{L}_x}$ y como $\mathcal{L}_{x_0} = \mathcal{L}_x \cdot m_{[\gamma]}$, entonces $(x, \sigma m_{[\gamma]}) \in \overline{\mathcal{L}_x} \cdot m_{[\gamma]} = \overline{\mathcal{L}_{x_0}}$. En conclusión, $(x, \sigma y) = (x, \sigma m_{[\gamma]} y_0) \in \overline{\mathcal{L}_{x_0}} \cdot y_0$. Recíprocamente, sea $(x, \sigma y_0) \in \overline{\mathcal{L}_{x_0}} \cdot y_0$, con $(x, \sigma) \in \overline{\mathcal{L}_{x_0}}$. Ya sabemos que $y_0 = m_{[\gamma]}^{-1} \cdot y$. Como $(x, m_{[\gamma]}) \in \mathcal{L}_{x_0} \subseteq \overline{\mathcal{L}_{x_0}}$, por la nota anterior, $\sigma \cdot m_{[\gamma]}^{-1} \in Gal(\mathcal{L}_x)$. Tenemos entonces que $(x, \sigma y_0) = (x, \sigma \cdot m_\gamma^{-1} \cdot y) \in Gal(\Gamma^\times) \cdot Y$.

Sea $f : \Gamma^\times \times \mathrm{GL}(n, \mathbb{C}) \to \Gamma^\times \times \mathbb{C}^n$ dada por $f(x, U) = (x, U \cdot y_0)$. $f$ es continua en las topologías $\mathcal{M}(\Gamma)$-Zariski porque si $Z(I)$ es un cerrado en $\Gamma^\times \times \mathbb{C}^n$, donde $I$ es un ideal de $\mathcal{M}(\Gamma)[y_1, ..., y_n]$, entonces $f^{-1}(Z(I)) = Z(J)$ donde $J$ es el ideal de $\mathcal{M}(\Gamma)[y_1, ..., y_n]$ generado por los polinomios de la forma $P(x, U \cdot y_0)$, donde $P \in I$.

Supongamos que $Y \subseteq Z$, con $Z$ cerrado. Entonces:

$$M = f^{-1}(Z) = \{(x, \sigma) \in \Gamma^\times \times \mathrm{GL}(n, \mathbb{C}) | (x, \sigma \cdot y_0) \in Z\},$$

es un subconjunto cerrado de $\Gamma^\times \times \mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ y además es claro que $M \cdot y_0 = Z$. Si $(x, \sigma) \in \mathcal{L}_{x_0}$, $(x, \sigma \cdot y_0) \in \mathcal{L}_{x_0} \cdot y_0 = Y \subseteq Z$, luego $\mathcal{L}_{x_0} \subseteq M$. Tomando clausuras y multiplicando por $y_0$ queda que $Gal(\Gamma^\times) \cdot Y = \overline{\mathcal{L}_{x_0}} \cdot y_0 \subseteq M \cdot y_0 = Z$. Podemos concluir entonces que $Gal(\Gamma^\times) \cdot Y$ es la clausura de $Y$. □

**Ejemplo 2.13.** Consideremos la ecuación:

$$\frac{dy}{dx} = y,$$

definida en $\mathbb{C}$. Como los coeficientes de la ecuación no tienen singularidades, $\Gamma^\times = \mathbb{C}$. La solución general es $y(x) = ce^x$, $x \in \mathbb{C}$ y las hojas de la foliación tienen la forma $\mathcal{L}_{x_0} =$

$\{(x, e^{x-x_0})|x \in \mathbb{C}\}$. Estos conjuntos son $\mathcal{M}(\mathbb{C})$-cerrados porque $(x, y) \in \mathcal{L}_{x_0}$ si y sólo si $y - e^{x-x_0} = 0$ y $y - e^{x-x_0} \in \mathcal{M}(\mathbb{C})[y]$. Luego $\overline{\mathcal{L}_{x_0}} = \mathcal{L}_{x_0}$. Si $\sigma \in \mathrm{GL}(1, \mathbb{C}) = \mathbb{C}^*$ es tal que $\mathcal{L}_{x_0} = \mathcal{L}_{x_0} \cdot \sigma$, tenemos que $(x_0, \sigma) \in \mathcal{L}_{x_0}$. El único punto en $\mathcal{L}_{x_0}$ que tiene primera componente igual a $x_0$ es $(x_0, 1)$. Entonces $\sigma = 1$ y $Gal(\mathcal{L}_{x_0}) = \{1\}$, para todo $x_0 \in \mathbb{C}$.

Si en vez de trabajar en $\mathbb{C}$, lo hacemos en $\mathbb{P}^1$, en una vecindad de $\infty$ la ecuación toma la forma:

$$\frac{dy}{d\xi} = -\frac{1}{\xi^2} y,$$

donde $x = \frac{1}{\xi}$. Entonces $\infty$ es una singularidad de la ecuación y $\Gamma^\times = \mathbb{P}^1 \setminus \{\infty\} = \mathbb{C}$. Las hojas siguen teniendo la forma $\mathcal{L}_{x_0} = \{(x, e^{x-x_0})|x \in \mathbb{C}\}$ pero ya no son $\mathcal{M}(\mathbb{P}^1)$-Zariski cerradas porque $\mathcal{M}(\mathbb{P}^1) = \mathbb{C}(x)$, las funciones racionales en $x$, y $e^x \notin \mathbb{C}(x)$. De hecho, al ser $e^x$ trascendente sobre $\mathbb{C}(x)$, vemos que $\mathcal{I}(\mathcal{L}_{x_0}) = \{0\}$. Por tanto, $\overline{\mathcal{L}_{x_0}} = Z(\mathcal{I}(\mathcal{L}_{x_0})) = Z(0) = \mathbb{C} \times \mathbb{C}^*$. Es claro que $\overline{\mathcal{L}_{x_0}} = \overline{\mathcal{L}_{x_0}} \cdot \sigma$ para todo $\sigma \in \mathbb{C}^*$ y entonces $Gal(\mathcal{L}_{x_0}) = \mathbb{C}^*$.

Para finalizar esta sección presentamos el siguiente resultado que nos dice dónde buscar a los grupos de Galois con solo tener cierta información sobre la matriz $A(x)$.

**Teorema 2.5.** *Sea $G \subseteq GL(n, \mathbb{C})$ un grupo algebraico lineal con algebra de Lie $\mathfrak{g}$. Supongamos que la matriz $A(x) = (a_{ij}(x))$ de la ecuación (2-1) toma valores en $\mathfrak{g}$, el algebra de Lie de $G$. Entonces el grupo de Galois $Gal(\Gamma^\times, x)$ es un subgrupo de $G$.*

*Demostración.* En general si $M$ es una variedad con una foliación dada por un sistema de 1-formas $\omega_1, ..., \omega_m$ y $X_1, ..., X_{n-m}$ son los campos que anulan estas formas, una condición para que una subvariedad $N$ de $M$ sea foliada por hojas de $M$ es que $X_1(p), ..., X_n(p) \in T_pN$, para todo $p \in N$. En nuestro caso particular deseamos probar que $\Gamma^\times \times G$ se descompone en hojas de la foliación (2-3) de $\Gamma^\times \times \mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$.

Por la nota 2.1, tenemos que probar que el campo $X = \dfrac{\partial}{\partial x} + \displaystyle\sum_{i,j=1}^{n} \left( \sum_{k=1}^{n} a_{ik} u_{kj} \right) \dfrac{\partial}{\partial u_{ij}}$ es tangente a $\Gamma^\times \times G$, es decir, para todo $(x, \sigma) \in \Gamma^\times \times G$, $X(x, \sigma) \in T_{(x,\sigma)}(\Gamma^\times \times G) = T_x\Gamma^\times \oplus T_\sigma G$.

Sea $(x_0, \sigma) \in \Gamma^\times \times G$ y consideremos $R_\sigma : \mathrm{GL}(n, \mathbb{C}) \to \mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ la multiplicación por $\sigma$ a derecha, $R_\sigma(A) = A\sigma$. Como $R_\sigma$ es invertible, la derivada de $R_\sigma$ en $I_n$, $dR_\sigma(I_n)$, es un isomorfismo entre $\mathfrak{g}$ y $T_\sigma G$. Luego $dR_\sigma(I_n)(\mathfrak{g}) = T_\sigma G$.

Por hipótesis $A(x_0) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x_0) \left.\frac{\partial}{\partial u_{ij}}\right|_{I_n} \in \mathfrak{g}$. Es fácil ver que:

$$dR_\sigma(I_n)(A(x_0)) = \sum_{i,j=1}^{n} \left( \sum_{k=1}^{n} a_{ik}(x_0) u_{kj}(\sigma) \right) \left.\frac{\partial}{\partial u_{ij}}\right|_{\sigma}.$$

Por tanto, $X(x_0,\sigma) = \left.\frac{\partial}{\partial x}\right|_{x_0} + dR_\sigma(I_n)(A(x_0)) \in T_{x_0}\Gamma^\times \oplus T_\sigma G$. Entonces $\Gamma^\times \times G$ es unión de hojas de la foliación (2-3). Sea $\mathcal{L}_{x_0}$ la hoja de la foliación (2-3) que pasa por $(x_0, I_n)$. Como $(x_0, I_n) \in \Gamma^\times \times G$, $\mathcal{L}_{x_0} \subseteq \Gamma^\times \times G$. Al ser $G$ un grupo algebraico, $\Gamma^\times \times G$ es $\mathcal{M}(\Gamma)$-Zariski cerrado. Luego $\overline{\mathcal{L}_{x_0}} \subseteq \Gamma^\times \times G$. Si $\sigma \in Gal(\Gamma^\times, x_0) = Gal(\mathcal{L}_{x_0})$, por definición $(x_0,\sigma) \in \overline{\mathcal{L}_{x_0}}$. En particular, $\sigma \in G$. □

**Corolario 2.1.** *Si la matriz $A(x)$ es triangular superior entonces $Gal(\Gamma^\times, x)$ es un subgrupo de $Tr(n,\mathbb{C})$.*

*Demostración.* Se deduce del teorema anterior y de la nota 2.3 porque $\mathfrak{tr}(n,\mathbb{C})$ es el algebra de Lie de las matrices triangulares superiores. □

**Ejemplo 2.14.** Consideremos la ecuación:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = r(x)y,$$

en $\mathbb{C}$, con $r \in \mathcal{M}(\mathbb{C})$ ó como ecuación de primer orden $\frac{d}{dx}\begin{bmatrix} y \\ u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ r(x) & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y \\ u \end{bmatrix}$.

En este caso $\Gamma^\times$ es $\mathbb{C}$ menos las singularidades de $r$. Si $(y_1,u_1)$ y $(y_2,u_2)$ son dos soluciones locales linealmente independientes entonces el wronskiano $W(y_1,y_2) = y_1u_2 - y_2u_1$ es constante porque:

$$\frac{dW}{dx} = \frac{dy_1}{dx}u_2 + y_1\frac{du_2}{dx} - \frac{dy_2}{dx}u_1 - y_2\frac{du_1}{dx} = u_1u_2 + ry_1y_2 - u_1u_2 - ry_1y_2 = 0.$$

Esto muestra que cada hoja $\mathcal{L}$ de la ecuación:

$$\frac{d}{dx}\begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ r(x) & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{bmatrix},$$

satisface un polinomio de la forma $p_\lambda(u_{11},u_{12},u_{21},u_{22}) = u_{11}u_{22} - u_{12}u_{21} - \lambda$, con $\lambda \in \mathbb{C}^*$. Si $\sigma \in Gal(\mathcal{L})$ y $(x_0, u_{11}^0, u_{12}^0, u_{21}^0, u_{22}^0) \in \mathcal{L}$ entonces $(x_0, u_{11}^0, u_{12}^0, u_{21}^0, u_{22}^0)\cdot\sigma \in \overline{\mathcal{L}}$. Por la proposición 2.15, $p_\lambda$ anula a $\overline{\mathcal{L}}$. Luego:

$$0 = p_\lambda((u_{11}^0, u_{12}^0, u_{21}^0, u_{22}^0)\cdot\sigma) = \det(\sigma)(u_{11}^0u_{22}^0 - u_{12}^0u_{21}^0) - \lambda = (\det(\sigma)-1)\lambda.$$

Por tanto $\sigma \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$. Por el teorema 2.3 podemos concluir que $Gal(\mathcal{L})$ es un subgrupo algebraico de $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$. Esto también se puede deducir del teorema anterior porque $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ r(x) & 0 \end{bmatrix} \in \mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$, para cada $x \in \Gamma^\times$.

## 2.5. Integración por cuadraturas

En esta sección deseamos establecer condiciones sobre el grupo de Galois de la ecuación (2-1) para saber cuándo esta es integrable por cuadraturas. Al final de la sección se enuncia el teorema de reducción de Lie-Kolchin que permite simplificar la ecuación (2-1) mediante un cambio de variable siempre que tengamos alguna información sobre el grupo de Galois.

Podemos aplicar los métodos clásicos de separación de variables y variación de constantes para resolver la ecuación (2-1) siempre que la matriz $A(x)$ sea triangular superior. La idea es entonces estudiar cuándo existe un cambio de variable que transforme la matriz $A(x)$ es una triangular superior y así poder integrar por cuadraturas.

**Nota 2.9.** En adelante cuando nos refiramos a un cambio de variable meromorfo $B$ con valores en un grupo algebraico lineal $G \subseteq \mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$, significará que $B : \Gamma \to G$ es una función tal que sus entradas son elementos de $\mathcal{M}(\Gamma)$ y simplemente escribiremos $B \in G(\mathcal{M}(\Gamma))$.

Cuando hacemos los cambios de variables $z = B(x)y$, $V = B(x)U$ en las ecuaciones (2-1) y (2-2), respectivamente, donde $B \in \mathrm{GL}(n, \mathcal{M}(\Gamma))$, obtenemos las nuevas ecuaciones diferenciales lineales:

$$\frac{dz}{dx} = \left(\frac{dB(x)}{dx} + B(x)A(x)\right) B(x)^{-1} z, \tag{2-3}$$

$$\frac{dV}{dx} = \left(\frac{dB(x)}{dx} + B(x)A(x)\right) B(x)^{-1} V. \tag{2-4}$$

Estos cambios de variable pueden agregar nuevas singularidades situadas en los polos de $B(x)$ y eliminar singularidades de $A(x)$ ó de $dx$. Los grupos de Galois de las ecuaciones iniciales y nuevas se relacionan por conjugación como muestra la siguiente proposición:

**Proposición 2.12.** *Sea $\Gamma^*$ la superficie de Riemann que se obtiene al remover de $\Gamma$ las singularidades de las ecuaciones (2-1) y (2-3). Si $x_0 \in \Gamma^*$ y $\mathcal{L}_{x_0}$ y $\mathcal{M}_{x_0}$ son las hojas de las foliaciones (2-2) y (2-4), respectivamente, que pasan por $(x_0, I_n)$, entonces $Gal(\mathcal{M}_{x_0}) = B(x_0) \cdot Gal(\mathcal{L}_{x_0}) \cdot B(x_0)^{-1}$.*

*Demostración.* Toda solución de (2-4) es de la forma $B(x)U(x)$, donde $U(x)$ es una solución de (2-2). Luego si $\mathcal{L}$ es una hoja de la foliación (2-3), el conjunto $B \cdot \mathcal{L} = \{(x, B(x)\sigma) | (x, \sigma) \in \mathcal{L}\}$ es una hoja de la foliación (2-4). Esto muestra que $\mathcal{M}_{x_0} = B \cdot \mathcal{L}_{x_0} \cdot B(x_0)^{-1}$, porque $(x_0, I_n) \in \mathcal{M}_{x_0} \cap B \cdot \mathcal{L}_{x_0} \cdot B(x_0)^{-1}$.

Si $\sigma \in Gal(\mathcal{L}_{x_0})$, entonces $\overline{\mathcal{L}_{x_0}} \cdot \sigma = \overline{\mathcal{L}_{x_0}}$. Usando el lema 2.2,

$$\begin{aligned}\overline{\mathcal{M}_{x_0}} \cdot B(x_0) \cdot \sigma \cdot B(x_0)^{-1} &= \overline{B \cdot \mathcal{L}_{x_0} \cdot B(x_0)^{-1}} \cdot B(x_0) \cdot \sigma \cdot B(x_0)^{-1} \\ &= \overline{B \cdot \mathcal{L}_{x_0} \cdot \sigma \cdot B(x_0)^{-1}} = \overline{B \cdot \mathcal{L}_{x_0} \cdot B_{x_0}^{-1}} = \overline{\mathcal{M}_{x_0}}.\end{aligned}$$

Luego $B(x_0) \cdot \sigma \cdot B(x_0)^{-1} \in Gal(\mathcal{M}_{x_0})$. La otra contenencia se demuestra igual. □

**Definición 2.9.** Sea $G \subseteq \mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$ un grupo algebraico lineal. Un $G$-fibrado principal meromorfo sobre $\Gamma$ es un subconjunto $P \subset \Gamma \times \ \mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$ tal que:

1. La imagen de $P$ por la proyección $\pi : \Gamma \times \mathrm{GL}(n,\mathbb{C}) \to \Gamma$ sobre $\Gamma$, $\Gamma^* = \pi(P)$ es el complemento de un conjunto discreto.
2. $P$ es $\mathcal{M}(\Gamma)$-Zariski cerrado.
3. Para cada $x_0 \in \Gamma^*$, $P_{x_0} = \pi^{-1}(x_0)$ es un $G$-espacio principal.

**Lema 2.3.** *Sea $H \subset GL(n,\mathbb{C})$ un subgrupo algebraico lineal conexo soluble y $P \subset \Gamma^\times \times GL(n,\mathbb{C})$ un $H$-fibrado principal meromorfo sobre $\Gamma^\times$. Entonces existe una sección meromorfa de $P$ definida sobre $\Gamma^\times$, es decir, existe $\widehat{\sigma} : \Gamma^\times \to \Gamma^\times \times GL(n,\mathbb{C})$ meromorfa tal que $\pi \circ \widehat{\sigma} = id$.*

*Demostración.* Ver [9]. □

**Proposición 2.13.** *El grupo de Galois $Gal(\Gamma^\times, x_0)$ es un subgrupo de algún subgrupo de Borel de $GL(n,\mathbb{C})$ si y sólo si existe un cambio de variable $z = B(x)y$, $B(x) \in GL(n,\mathcal{M}(\Gamma))$ tal que la matriz de coeficientes de la ecuación (2-3) es triangular superior y por tanto se puede integrar por cuadraturas.*

*Demostración.* Si existe dicho cambio de variable por la proposición 2.10 y el corolario 2.1, $Gal(\Gamma^\times, x_0)$ es conjugado a un subgrupo de $\mathrm{Tr}(n,\mathbb{C})$. Por el teorema de Lie-Kolchin, teorema 2.2, $Gal(\Gamma^\times, x_0)$ es un subgrupo de algún subgrupo de Borel de $\mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$.

Recíprocamente, sea $\mathcal{L}$ una hoja de la foliación (2-3). Estamos suponiendo que $Gal(\mathcal{L}) \subseteq G$ es un subgrupo de algún subgrupo de Borel $G$ de $\mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$. De nuevo por el teorema de Lie-Kolchin, existe $\tau \in \mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$ tal que $\tau^{-1}G\tau = \mathrm{Tr}(n,\mathbb{C})$. Consideremos la hoja $\mathcal{L}' = \mathcal{L} \cdot \tau$. Por la parte 2 del teorema 2.3, $Gal(\mathcal{L}') \subseteq \mathrm{Tr}(n,\mathbb{C})$.

Sea $P = \overline{\mathcal{L}'} \cdot \mathrm{Tr}(n,\mathbb{C}) = \{(x, m\sigma) | (x,m) \in \overline{\mathcal{L}'}, \sigma \in \mathrm{Tr}(n,\mathbb{C})\}$. Por construcción, $P$ es $\mathcal{M}(\Gamma)$-Zariski cerrado y contiene a $\overline{\mathcal{L}'}$. Veamos que $P$ es un $\mathrm{Tr}(n,\mathbb{C})$-fibrado principal sobre $\Gamma$. La primera condición de la definición 2.9 se satisface porque $\pi(P) = \Gamma^\times$. Para ver la tercera condición sea $x_0 \in \Gamma^\times$. Entonces $P_{x_0} = \{(x_0, m \cdot \sigma) | (x_0, m) \in \overline{\mathcal{L}'}, \sigma \in \mathrm{Tr}(n,\mathbb{C})\}$. $\mathrm{Tr}(n,\mathbb{C})$ actúa en $P_{x_0}$ por $((x_0, m\sigma), \sigma') \mapsto (x_0, m\sigma\sigma')$ y esta acción es libre.

Por el lema 2.3, existe una sección meromorfa de $P$, $\widehat{\sigma}(x) = (x, \sigma(x)) = (x, m(x)\mu(x))$, donde $(x, m(x)) \in \overline{\mathcal{L}'}$ y $\mu(x) \in \mathrm{Tr}(n,\mathbb{C})$. Consideremos el cambio de variable $z = B(x)y = \sigma^{-1}(x)y$. Sea $\Gamma^*$ la superficie que se obtiene de $\Gamma$ de remover las singularidades de ambas ecuaciones.

Como vimos en la demostración de la proposición 2.12, $\mathcal{M} = B \cdot \mathcal{L}'$ es una hoja de la foliación (2-4). Si tomamos un elemento $(x, B(x)m\sigma)$ de:

$$B \cdot P = \{(x, B(x)m\sigma) | (x, m) \in \overline{\mathcal{L}'}, \sigma \in \mathrm{Tr}(n, \mathbb{C})\},$$

entonces $B(x)m\sigma = \mu^{-1}(x)m^{-1}(x)m\sigma$. Como $m^{-1}(x)m \in Gal(\mathcal{L}') \subseteq \mathrm{Tr}(n, \mathbb{C})$ y $\mu^{-1}(x), \sigma \in \mathrm{Tr}(n, \mathbb{C})$ vemos que $(x, B(x)m\sigma) \in \Gamma^* \times \mathrm{Tr}(n, \mathbb{C})$, es decir $B \cdot P \subseteq \Gamma^* \times \mathrm{Tr}(n, \mathbb{C})$. En particular, $\mathcal{M} \subseteq \Gamma^* \times \mathrm{Tr}(n, \mathbb{C})$.

Dado $x_0 \in \Gamma^*$, sea $V(x)$ un germen de solución de (2-4) alrededor de $x_0$ tal que su grafo está contenido en $\mathcal{M}$. Luego $V(x)$ es una matriz triangular superior y por tanto, $\frac{dV(x)}{dx}$ y $V(x)^{-1}$ también lo son. Como:

$$\left(\frac{dB(x)}{dx} + B(x)A(x)\right) B(x)^{-1} = \frac{dV(x)}{dx} V(x)^{-1},$$

podemos concluir que $\left(\frac{dB(x)}{dx} + B(x)A(x)\right) B(x)^{-1}$ es una matriz triangular superior.

□

Recordemos que cuando tomamos un revestimiento ramificado finito $\pi : \overline{\Gamma} \to \Gamma$ de $\Gamma$ podemos extender la ecuación (2-1) a una ecuación en $\overline{\Gamma}$ y verla como una ecuación con coeficientes en $\mathcal{M}(\overline{\Gamma})$. Nuestro próximo objetivo es mostrar que siempre podemos tomar un revestimiento ramificado finito de $\Gamma$ tal que el grupo de Galois de la nueva ecuación sea conexo.

**Proposición 2.14.** *Dado $x_0 \in \Gamma^\times$, existe un revestimiento finito $\pi : \overline{\Gamma} \to \Gamma$ de $\Gamma$, ramificado sobre las singularidades de (2-1) tal que:*

1. *El grupo $Aut(\overline{\Gamma}/\Gamma)$ de automorfismo del cubrimiento $\overline{\Gamma}$ es isomorfo al cociente $Gal(\Gamma^\times, x_0)/Gal^0(\Gamma^\times, x_0)$.*
2. *Si $\overline{\Gamma}^\times$ es la superficie de Riemann que se obtiene al remover de $\overline{\Gamma}$ los puntos que se proyectan sobre las singularidades de (2-1), entonces el grupo de Galois $Gal(\overline{\Gamma}^\times, \overline{x})$ de la ecuación (2-1) definida en $\overline{\Gamma}$, en el punto $\overline{x}$, es $Gal^0(\Gamma^\times, \pi(\overline{x}))$ y por tanto conexo.*

*Demostración.* 1. Sea $\mathcal{L}$ una hoja de la foliación (2-2), $Gal(\mathcal{L})$ su grupo de Galois, $Gal^0(\mathcal{L})$ la componente conexa de la identidad del mismo y $\phi : \overline{\mathcal{L}} \to \Gamma^\times$ la proyección sobre $\Gamma^\times$. Por la parte 1 del teorema 2.3, es claro que la aplicación $((x, U), \sigma) \mapsto (x, U) \cdot \sigma = (x, U\sigma)$ define una acción a derecha de $Gal(\mathcal{L})$ sobre $\overline{\mathcal{L}}$. Por tanto, $Gal^0(\mathcal{L})$ también actúa sobre $\mathcal{L}$.

Si $(x_0, U) \in \overline{\mathcal{L}}$, denotemos por $[x_0, U] = \{(x_0, U\sigma) | \sigma \in Gal^0(\mathcal{L})\}$ a su órbita por la acción de $Gal^0(\mathcal{L})$. Consideremos ahora el espacio cociente $\overline{\mathcal{L}}/Gal^0(\mathcal{L})$, esto es, el conjunto de órbitas y sea $\pi : \overline{\mathcal{L}}/Gal^0(\mathcal{L}) \to \Gamma^\times$ la proyección $\pi([x_0, U]) = x_0$. Como $Gal^0(\mathcal{L})$ es un subgrupo de $Gal(\mathcal{L})$ de índice finito, podemos escribir $Gal(\mathcal{L}) = \sigma_0 Gal^0(\mathcal{L}) \cup \sigma_1 Gal^0(\mathcal{L}) \cup ... \cup \sigma_m Gal^0(\mathcal{L})$, para ciertos $\sigma_i \in Gal(\mathcal{L})$, con $\sigma_0 = I_n$.

Veamos que si $x_0 \in \Gamma^\times$, entonces $\pi^{-1}(x_0) = \{[x_0, U], [x_0, U\sigma_1], ..., [x_0, U\sigma_m]\}$, donde $U$ es tal que $(x_0, U) \in \mathcal{L}$. En efecto, si $(x_0, U_1) \in \overline{\mathcal{L}}$, por la nota 2.8, $U^{-1}U_1 \in Gal(\mathcal{L})$. Luego, podemos escribir $U^{-1}U_1 = \sigma_i\tau$, para cierto $\tau \in Gal^0(\mathcal{L})$. Entonces $(x_0, U_1) = (x_0, U)\cdot(\sigma_i\tau)$ y por tanto $[(x_0, U_1)] = [(x_0, U\sigma_i)]$. Esto además muestra que todo punto $x_0 \in \Gamma^\times$ posee una vecindad $V$ tal que $\pi^{-1}(V) = \bigcup_{i=0}^m V_i$, donde los $V_i$ son conjuntos disjuntos. En efecto, si $(x_0, U) \in \mathcal{L}$ y $U(x)$ es un germen de solución de la ecuación (2-1) definido en una vecindad $V$ de $x_0$ tal que $U(x_0) = U$, entonces $\{(x, U(x))|x \in V\} \subseteq \mathcal{L}$ y $\pi^{-1}(V) = \bigcup_{i=0}^{m} \{[x, U(x)\sigma_i]|x \in V\}$.

$\overline{\Gamma}^\times = \overline{\mathcal{L}}/Gal^0(\mathcal{L})$ es un espacio topológico con la topología que hace a $\pi$ continua. Por el párrafo anterior, es un revestimiento finito de $\Gamma^\times$. Además la estructura de superficie de Riemman de $\Gamma$ se hereda a este espacio mediante $\pi$. Entonces hemos obtenido un revestimiento $\pi : \overline{\Gamma}^\times \to \Gamma^\times$. En general, si $\Gamma^\times \subseteq \Gamma$ y $\overline{\Gamma}^\times$ son superficies de Riemman tales que el complemento de $\Gamma^\times$ es discreto, un revestimiento finito $\pi : \overline{\Gamma}^\times \to \Gamma^\times$ se puede extender a un revestimiento ramificado finito $\overline{\pi} : \overline{\Gamma} \to \Gamma$, con ramificaciones en los puntos del complemento de $\Gamma^\times$ (ver [8], capítulo 2).

Si $f \in Aut(\overline{\Gamma}/\Gamma)$, entonces $\pi(f([x, V]) = \pi([x, V]))$ para todo $[x, V] \in \overline{\Gamma}^\times$. Luego $f([x, V]) = [x, V\sigma_i]$ para cierto $i$. Como $f$ es un homeomorfismo, entonces $f([x, V]) = [x, V\sigma_i]$, para todo $[x, V] \in \overline{\Gamma}^\times$. Entonces la asignación $f \mapsto \sigma_i Gal^0(\mathcal{L})$ establece un isomorfismo entre $Aut(\overline{\Gamma}/\Gamma)$ y $Gal(\mathcal{L})/Gal^0(\mathcal{L})$.

2. Sea $x_0 \in \Gamma^\times$ fijo y $\pi^{-1}(x_0) = \{\overline{x}_0, \overline{x}_1 ..., \overline{x}_m\}$. Para cada $i = 0, 1, ..., m$, denotemos por $\mathcal{M}_i$ la hoja de la foliación (2-2) en $\overline{\Gamma}^\times \times \mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ que pasa por $(\overline{x}_i, I_n)$. Como $\pi$ es un revestimiento, $x_0$ posee una vecindad $V \subseteq \Gamma^\times$ tal que $\pi^{-1}(V) = \bigcup_{i=0}^m V_i$, donde los $V_i$ son abiertos en $\overline{\Gamma}^\times$ homeomorfos a $V$ por $\pi$ y $\overline{x}_i \in V_i$. Reduciendo $V$ si es necesario, podemos suponer que el germen $U(x)$ de solución de la ecuación (2-1) tal que $U(x_0) = I_n$ está definido en $V$. Entonces $(\pi \times id)^{-1}(\{(x, U(x))|x \in V\}) = \bigcup_{i=0}^{m} \{(\overline{x}, U(\pi(\overline{x})))|\overline{x} \in V_i\}$. Notemos que $\{(\overline{x}, U(\pi(\overline{x})))|\overline{x} \in V_i\} \subseteq \mathcal{M}_i$. Usando el hecho de que las hojas son cubiertas por gráficos de soluciones y que $\{(x, U(x))|x \in V\} \subseteq \mathcal{L}_{x_0}$ tenemos que $(\pi \times id)^{-1}(\mathcal{L}_{x_0}) = \bigcup_{i=0}^{m} \mathcal{M}_i$. Es fácil ver que $\pi \times id$ es una función continua del espacio $\overline{\Gamma} \times \mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ con la topología $\mathcal{M}(\overline{\Gamma})$-Zariski al espacio $\Gamma \times \mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ con la topología $\mathcal{M}(\Gamma)$-Zariski. Usando que $\pi$ es un revestimiento tenemos que $(\pi \times id)^{-1}(\overline{\mathcal{L}_{x_0}}) = \bigcup_{i=0}^m \overline{\mathcal{M}_i}$. Si $\sigma \in Gal(\mathcal{L})$ entonces obtenemos que $\bigcup_{i=0}^{m} \overline{\mathcal{M}_i}\sigma = \bigcup_{i=0}^{m} \overline{\mathcal{M}_i}$. Por la forma del recubrimiento $\overline{\Gamma}$, esto implica que $\sigma \in Gal(\mathcal{M}_i)$ si y solo si $\sigma \in Gal^0(\mathcal{L})$.

□

Para terminar esta sección enunciamos sin demostración el teorema de reducción de Lie-Kolchin. Este resultado fue probado por Kolchin y Kovacic. Este teorema será usado en el capítulo 3 para llevar a cabo la reducción a forma normal de los sistemas hamiltonianos no autónomos para $2+\frac{1}{2}$ de libertad.

**Teorema 2.6.** *(Reducción de Lie-Kolchin) Consideremos la ecuación (2-1). Supongamos que para algún $x_0 \in \Gamma^\times$, $Gal^0(\Gamma^\times, x_0)$ es un subgrupo de un grupo algebraico lineal $G \subseteq GL(n,\mathbb{C})$. Entonces existe un revestimiento ramificado finito $\overline{\Gamma}$ de $\Gamma$ y un cambio de variable $B \in G(\mathcal{M}(\overline{\Gamma}))$ tal que para cada $x \in \overline{\Gamma}$, $\frac{dB(x)}{dx}B(x)^{-1} + B(x)A(x)B(x)^{-1}$ está en el algebra de Lie del grupo de Galois $Gal^0(\Gamma^\times, x_0)$, $\mathfrak{gal}(\Gamma^\times, x_0) \subseteq \mathfrak{g}$.*

*Demostración.* Ver [3]. □

## 2.6. El teorema de Morales-Ramis

El teorema de Morales-Ramis es la herramienta fundamental que relaciona la integrabilidad de sistemas hamiltonianos con el grupo de Galois de la ecuación variacional a lo largo de cualquier solución particular de nuestra ecuación original. En esta sección enunciaremos sin demostración este importante resultado que fue probado por Juan Morales-Ruiz y Jean Pierre Ramis.

Sea $H$ un hamiltoniano meromorfo definido en una variedad analítica simpléctica $(M,\omega)$ de dimensión $2n$. Supongamos que $\phi_0(t) = (p_1^0(t), ..., p_n^0(t), q_1^0(t), ..., q_n^0(t))$ es una solución no constante conocida del sistema hamiltoniano asociado, es decir, una curva integral del campo $X_H$ que no sea un punto de equilibrio.

Podemos entonces considerar la linealización del sistema a lo largo de $\phi_0$. En coordenadas simplécticas, esta es el sistema de ecuaciones diferenciales lineales:

$$\begin{aligned} \frac{d\xi_i}{dt} &= \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 H}{\partial q_i \partial p_j}(\phi_0)\,\xi_j + \frac{\partial^2 H}{\partial q_i \partial q_j}(\phi_0)\,\eta_j, \\ \frac{d\eta_i}{dt} &= \sum_{j=1}^{n} -\frac{\partial^2 H}{\partial p_i \partial p_j}(\phi_0)\,\xi_j - \frac{\partial^2 H}{\partial p_i \partial q_j}(\phi_0)\,\eta_j, \end{aligned} \tag{2-5}$$

para $i = 1, ..., n$. En forma más abreviada:

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} \xi \\ \eta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 H}{\partial q \partial p}(\phi_0) & \frac{\partial^2 H}{\partial q^2}(\phi_0) \\ -\frac{\partial^2 H}{\partial p^2}(\phi_0) & -\frac{\partial^2 H}{\partial p \partial q}(\phi_0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi \\ \eta \end{bmatrix},$$

donde $\xi = (\xi_1, ..., \xi_n)$, $\eta = (\eta_1, ..., \eta_n)$ y:

$$\frac{\partial^2 H}{\partial q \partial p} = \left[\frac{\partial^2 H}{\partial q_i \partial p_j}\right], \quad \frac{\partial^2 H}{\partial q^2} = \left[\frac{\partial^2 H}{\partial q_i \partial q_j}\right], \quad \frac{\partial^2 H}{\partial p^2} = \left[\frac{\partial^2 H}{\partial p_i \partial p_j}\right], \quad \frac{\partial^2 H}{\partial p \partial q} = \left[\frac{\partial^2 H}{\partial p_i \partial q_j}\right],$$

son las matrices de tamaño $n \times n$ indicadas.

**Definición 2.10.** La ecuación (2-5) se conoce como la ecuación variacional de $X_H$ a lo largo de $\phi_0$.

Notemos que la curva $\left(\frac{\partial H}{\partial q_1}(\phi_0(t)), ..., \frac{\partial H}{\partial q_n}(\phi_0(t)), -\frac{\partial H}{\partial p_1}(\phi_0(t)), ..., -\frac{\partial H}{\partial p_n}(\phi_0(t))\right)$ siempre es una solución de la ecuación (2-5). En efecto, para cada $i = 1, ..., n$ tenemos que:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial H}{\partial q_i}(\phi_0(t))\right) &= \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 H}{\partial q_i \partial p_j}(\phi_0(t))\frac{dp_j^0}{dt} + \frac{\partial^2 H}{\partial q_i \partial q_j}(\phi_0(t))\frac{dq_j^0}{dt} \\
&= \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 H}{\partial q_i \partial p_j}(\phi_0(t))\frac{\partial H}{\partial q_j}(\phi_0(t)) - \frac{\partial^2 H}{\partial q_i \partial q_j}(\phi_0(t))\frac{\partial H}{\partial p_j}(\phi_0(t)),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\left(-\frac{\partial H}{\partial p_i}(\phi_0(t))\right) &= \sum_{j=1}^{n} -\frac{\partial^2 H}{\partial p_i \partial p_j}(\phi_0(t))\frac{dp_j^0}{dt} - \frac{\partial^2 H}{\partial p_i \partial q_j}(\phi_0(t))\frac{dq_j^0}{dt} \\
&= \sum_{j=1}^{n} -\frac{\partial^2 H}{\partial p_i \partial p_j}(\phi_0(t))\frac{\partial H}{\partial q_j}(\phi_0(t)) + \frac{\partial^2 H}{\partial p_i \partial q_j}(\phi_0(t))\frac{\partial H}{\partial p_j}(\phi_0(t)),
\end{aligned}$$

Esto además implica que la función $\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial H}{\partial p_i}(\phi_0(t))\xi_i + \frac{\partial H}{\partial q_i}(\phi_0(t))\eta_i$ es una integral primera del sistema (2-5). Con esta solución y esta integral primera es posible reducir el sistema (2-5) a un sistema de tamaño $2(n-1)$. El sistema obtenido se conoce como la ecuación variacional normal de $X_H$ a lo largo de $\phi_0$.

**Ejemplo 2.15.** Consideremos el hamiltoniano $H(p_1, p_2, q_1, q_2) = \frac{q_1^2+q_2^2}{2} - p_1 p_2^2$ definido en $\mathbb{C}^4$. Entonces el sistema hamiltoniano es:

$$\frac{dp_1}{dt} = q_1, \quad \frac{dp_2}{dt} = q_2, \quad \frac{dq_1}{dt} = p_2^2, \quad \frac{dq_2}{dt} = 2p_1 p_2.$$

Una solución particular es $\phi_0(t) = \left(\frac{t}{2}, 0, \frac{1}{2}, 0\right), t \in \mathbb{C}$. La ecuación variacional a lo largo de $\phi_0$ resulta ser:

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \eta_1 \\ \eta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2p_2(\phi_0(t)) & 0 & 0 \\ 2p_2(\phi_0(t)) & 2p_1(\phi_0(t)) & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \eta_1 \\ \eta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2t & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \eta_1 \\ \eta_2 \end{bmatrix},$$

con solución conocida $\left(\frac{1}{2}, 0, 0, 0\right)$ e integral primera $\eta_1$. Como $\frac{d\xi_1}{dt} = \eta_1 = c_1$, $\xi_1 = c_1 t + c_2$. Entonces la ecuación variacional normal es:

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} \xi_2 \\ \eta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2t & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_2 \\ \eta_2 \end{bmatrix},$$

que no es otra que la ecuación de Airy: $\dfrac{d^2\xi_2}{dt^2} = t\xi_2$.

**Teorema 2.7.** *(Morales-Ramis) Supongamos que el hamiltoniano $H$ es completamente integrable. Sea $\phi_o$ una curva integral de $X_H$. Entonces la componente conexa de la identidad del grupo de Galois de la ecuación variacional (2-5) y de la ecuación variacional normal a lo largo de $\phi_0$ es abeliana.*

*Demostración.* Ver [7]. $\square$

# 3. Formas canónicas de sistemas integrables para $2 + \frac{1}{2}$ grados de libertad

En este capítulo aplicaremos la teoría desarrollada en los capítulos anteriores a los sistemas hamiltonianos no autónomos que provienen de hamiltonianos cuadráticos homogéneos. Para este tipo de sistemas hamiltonianos en el caso de $2 + \frac{1}{2}$ grados de libertad probaremos la equivalencia entre: ser integrable en el sentido no autónomo, que la suspensión simpléctica sea completamente integrable y que la componente conexa de la identidad del grupo de Galois de la ecuación sea abeliana. Esta equivalencia depende de la clasificación de los subgrupos abelianos conexos de $\mathrm{Sp}(2, \mathbb{C})$, problema que se analiza y se desarrolla en la sección 3.1. Lo más interesante en esta equivalencia es el recírpoco del teorema de Morales-Ramis, esto es, si la componente conexa de la identidad del grupo de Galois de la ecuación es abeliana, entonces el sistema es integrable. Finalmente en la sección 3.3, se calculan todas las formas canónica a las cuales se puede reducir un hamiltoniano del tipo mencionado.

Un hamiltoniano cuadrático homogéneo con coeficientes en $\mathcal{M}(\Gamma)$ es una función $H : \Gamma \times \mathbb{C}^{2n} \to \mathbb{C}$ de la forma:

$$H(t, p_1, ..., p_n, q_1, ..., q_n) = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{1}{2} a_{ij}(t) p_i p_j + \frac{1}{2} b_{ij}(t) q_i q_j + c_{ij}(t) p_i q_j$$

donde $A(t) = (a_{ij}(t))$, $B = (b_{ij}(t))$ y $C = (c_{ij}(t))$ son matrices de $n \times n$ con coeficientes en $\mathcal{M}(\Gamma)$ y $A$ y $B$ son simétricas. Es inmediato comprobar que para $i = 1, .., n$ tenemos:

$$\frac{\partial H}{\partial p_i} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(t) p_j + c_{ij}(t) q_j,$$
$$\frac{\partial H}{\partial q_i} = \sum_{j=1}^{n} c_{ji}(t) p_j + b_{ij}(t) q_j,$$

y por tanto el sistema hamiltoniano no autónomo correspondiente es:

$$\frac{dp_i}{dt} = \sum_{j=1}^{n} c_{ji}(t) p_j + b_{ij}(t) q_j, \qquad \frac{dq_i}{dt} = \sum_{j=1}^{n} -a_{ij}(t) p_j - c_{ij}(t) q_j, \qquad i = 1, ..., n, \tag{3-1}$$

ó en forma más concisa:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} p \\ q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C^t(t) & B(t) \\ -A(t) & -C(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p \\ q \end{bmatrix}, \quad p = (p_1, ..., p_n), q = (q_1, ..., q_n).$$

Este es un sistema de ecuaciones lineales y por tanto podemos estudiarlo con la teoría de Galois diferencial desarrollada en el capítulo 2.

Recordemos que el algebra de Lie de $\mathrm{Sp}(n, \mathbb{C})$, $\mathfrak{sp}(n, \mathbb{C})$, son las matrices de tamaño $2n \times 2n$ tales que $M^t J_n + J_n M = 0$. Si escribimos a $M$ en bloques de tamaño $n \times n$, digamos:

$$M = \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{bmatrix},$$

la ecuación $M^t J_n + J_n M = 0$ implica que $M_{12}^t = M_{12}$, $M_{21}^t = M_{21}$ y $M_{11}^t = -M_{22}$. De aquí se deduce que la dimensión de $\mathfrak{sp}(n, \mathbb{C})$ es $2n^2 + n$. Esto también muestra que para cada $t \in \Gamma$, $\begin{bmatrix} C^t(t) & B(t) \\ -A(t) & -C(t) \end{bmatrix} \in \mathfrak{sp}(n, \mathbb{C})$. Por la parte 4. del teorema 2.3 y teorema 2.5, el grupo de Galois de la ecuación es un subgrupo algebraico de $\mathrm{Sp}(n, \mathbb{C})$.

Denotaremos por $\mathcal{M}(\Gamma)[\mathbb{C}^{2n}]_2$ al $\mathcal{M}(\Gamma)$-espacio vectorial de hamiltonianos cuadráticos homogéneos con coeficientes en $\mathcal{M}(\Gamma)$. En el primer capítulo vimos que las funciones meromorfas definidas sobre $\mathbb{C}^{2n} \times \Gamma$ forman un algebra de Lie con el producto dado por el paréntesis de Poisson vertical. En particular, $\mathcal{M}(\Gamma)[\mathbb{C}^{2n}]_2$ es un algebra de Lie con este producto. Claro que debemos comprobar que si $H, G \in \mathcal{M}(\Gamma)[\mathbb{C}^{2n}]_2$ entonces $\{H, G\} \in \mathcal{M}(\Gamma)[\mathbb{C}^{2n}]_2$. Para esto sean:

$$H = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{1}{2} a_{ij} p_i p_j + \frac{1}{2} b_{ij} q_i q_j + c_{ij} p_i q_j \quad \text{y} \quad G = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{1}{2} d_{ij} p_i p_j + \frac{1}{2} e_{ij} q_i q_j + f_{ij} p_i q_j.$$

Haciendo los cálculos tenemos que:

$$\frac{\partial H}{\partial p_i} \frac{\partial G}{\partial q_i} = \sum_{j,l=1}^{n} a_{ij} f_{li} p_j p_l + c_{ij} e_{il} q_j q_l + a_{ij} e_{il} p_j q_l + c_{ij} f_{li} p_l q_j,$$

$$\frac{\partial H}{\partial q_i} \frac{\partial G}{\partial p_i} = \sum_{j,l=1}^{n} c_{ji} d_{il} p_j p_l + b_{ij} f_{il} q_j q_l + b_{ij} d_{il} p_l q_j + c_{ji} f_{il} p_j q_l.$$

Por tanto:

$$\begin{aligned} \{H, G\} &= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial H}{\partial p_i} \frac{\partial G}{\partial q_i} - \frac{\partial H}{\partial q_i} \frac{\partial G}{\partial p_i} \\ &= \sum_{i,j,l=1}^{n} (a_{ij} f_{li} - c_{ji} d_{il}) p_j p_l + (c_{ij} e_{il} - b_{ij} f_{il}) q_j q_l + (a_{ij} e_{il} - c_{ji} f_{il}) p_j q_l \\ &\quad + (c_{ij} f_{li} - b_{ij} d_{il}) p_l q_j. \end{aligned}$$

Agrupando respecto al índice $i$, usando que $A, B, D$ y $E$ son simétricas y multiplicando y dividiendo por $\frac{1}{2}$ vemos que:

$$
\begin{aligned}
\{H,G\} &= \sum_{j,l=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{n} a_{ji}f_{li} - c_{ji}d_{il}\right)p_jp_l + \left(\sum_{i=1}^{n} c_{ij}e_{il} - b_{ji}f_{il}\right)q_jq_l \qquad (3\text{-}2)\\
&+ \left(\sum_{i=1}^{n} a_{ji}e_{il} - c_{ji}f_{il} + c_{il}f_{ji} - b_{li}d_{ij}\right)p_jq_l\\
&= \sum_{j,l=1}^{n}\frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{n} a_{ji}f_{li} - c_{ji}d_{il} + a_{li}f_{ji} - c_{li}d_{ij}\right)p_jp_l + \frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{n} c_{ij}e_{il} - b_{ji}f_{il} + c_{il}e_{ij} - b_{li}f_{ij}\right)q_jq_l\\
&\quad + \left(\sum_{i=1}^{n} a_{ji}e_{il} - c_{ji}f_{il} + c_{il}f_{ji} - b_{li}d_{ij}\right)p_jq_l\\
&= \sum_{j,l=1}^{n}\frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{n} a_{ji}f_{li} - c_{ji}d_{il} + f_{ji}a_{il} - d_{ji}c_{li}\right)p_jp_l + \frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{n} c_{ij}e_{il} - b_{ji}f_{il} + e_{ji}c_{il} - f_{ij}b_{il}\right)q_jq_l\\
&\quad + \left(\sum_{i=1}^{n} a_{ji}e_{il} - c_{ji}f_{il} + f_{ji}c_{il} - d_{ji}b_{il}\right)p_jq_l,
\end{aligned}
$$

y queda probado que $\{H,G\} \in \mathcal{M}(\Gamma)[\mathbb{C}^{2n}]_2$. Con estas expresiones a la mano podemos demostrar el siguiente hecho.

**Proposición 3.1.** *La aplicación $\varphi$ de $\mathcal{M}(\Gamma)[\mathbb{C}^{2n}]_2$ a $\mathfrak{sp}(n,\mathcal{M}(\Gamma))$ dada por:*

$$H = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{1}{2}a_{ij}p_ip_j + \frac{1}{2}b_{ij}q_iq_j + c_{ij}p_iq_j \longmapsto \varphi(H) = \begin{bmatrix} C^t & B \\ -A & -C \end{bmatrix},$$

*es un isomorfismo de algebras de Lie.*

*Demostración.* Para la demostración vale la pena escribir a los hamiltonianos de la siguiente forma: si ponemos $p^t = (p_1, ..., p_n)$ y $q^t = (q_1, ..., q_n)$, tenemos que:

$$2H(p,q) = p^tAp + q^tBq + 2p^tCq = p^tAp + q^tBq + p^tCq + q^tC^tp = \begin{bmatrix} p, q \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A & C \\ C^t & B \end{bmatrix}\begin{bmatrix} p \\ q \end{bmatrix}.$$

Esto muestra que todo hamiltoniano cuadrático homogéneo está determinado por una matriz de la forma $\frac{1}{2}\begin{bmatrix} A & C \\ C^t & B \end{bmatrix}$. Luego podemos pensar en la aplicación definida arriba como:

$$\frac{1}{2}\begin{bmatrix} A & C \\ C^t & B \end{bmatrix} \longmapsto \begin{bmatrix} C^t & B \\ -A & -C \end{bmatrix} = J_n\begin{bmatrix} A & C \\ C^t & B \end{bmatrix}.$$

Es claro que la función es lineal y su inversa está dada por $M \longmapsto -\frac{1}{2}J_nM$. Para comprobar que el corchete de Lie se respeta, sea $2G = \begin{bmatrix} p, q \end{bmatrix}\begin{bmatrix} D & F \\ F^t & E \end{bmatrix}\begin{bmatrix} p \\ q \end{bmatrix}$ otro hamiltoniano. La ecuación (3-2) muestra que:

$$2\{H,G\} = \left[\begin{array}{c} p, q \end{array}\right] \left[\begin{array}{cc} AF^t - CD + FA - DC^t & AE - CF + FC - DB \\ EA - F^tC^t + C^tF^t - BD & C^tE - BF + EC - F^tB \end{array}\right] \left[\begin{array}{c} p \\ q \end{array}\right].$$

Entonces la matriz correspondiente a $\{H,G\}$ es:

$$\begin{aligned} \varphi(\{H,G\}) =& \left[\begin{array}{cc} C^tF^t - F^tC^t + EA - BD & EC + C^tE - BF - F^tB \\ -AF^t - FA + DC^t + CD & -FC + CF - AE + DB \end{array}\right] \\ =& \left[\begin{array}{cc} C^t & B \\ -A & -C \end{array}\right] \left[\begin{array}{cc} F^t & E \\ -D & -F \end{array}\right] - \left[\begin{array}{cc} F^t & E \\ -D & -F \end{array}\right] \left[\begin{array}{cc} C^t & B \\ -A & -C \end{array}\right] \\ =& \varphi(H)\varphi(G) - \varphi(G)\varphi(H). \end{aligned}$$

□

**Corolario 3.1.** *Si $\mathfrak{a}$ es una subalgebra abeliana de $\mathfrak{sp}(n,\mathbb{C})$, entonces* $\dim \mathfrak{a} \leq n$.

*Demostración.* Sea $A_1, ..., A_m$ una base de $\mathfrak{a}$. La proposición anterior muestra que $\varphi$ es un isomorfismo de algebras de Lie entre $\mathfrak{sp}(n,\mathbb{C})$ y $\mathbb{C}[\mathbb{C}^{2n}]_2$. Entonces los hamiltonianos cuadráticos $F_i = \varphi^{-1}(A_i), i = 1, ..., m$, están en involución y son linealmente independientes sobre $\mathbb{C}$. Si ponemos $F_l = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{a_{ij}^{(l)}}{2} p_i p_j + \frac{b_{ij}^{(l)}}{2} q_i q_j + c_{ij}^{(l)} p_i q_j$, $l = 1, ..., m$, es claro que para cada $l = 1, ..., m$ tenemos:

$$dF_l = \sum_{i=1}^{n} \left( \sum_{j=1}^{n} a_{ij}^{(l)} p_j + c_{ij}^{(l)} q_j \right) dp_i + \left( \sum_{j=1}^{n} c_{ji}^{(l)} p_j + b_{ij}^{(l)} q_j \right) dq_i.$$

De estas expresiones vemos que exite al menos un punto $(p_0, q_0) \in \mathbb{C}^{2n}$ tal que $dF_1(p_0, q_0), ..., dF_m(p_0, q_0)$ son linealmente independientes. Luego los vectores $X_{F_1}(p_0, q_0), ..., X_{F_m}(p_0, q_0) \in T_{(p_0,q_0)}\mathbb{C}^{2n}$ generan un subespacio nulo de dimensión $m$. Por la proposición 1.3, $m \leq n$.

□

## 3.1. Clasificación de los subgrupos algebraicos abelianos conexos de Sp$(2,\mathbb{C})$

En esta sección clasificaremos salvo conjugación los subgrupos algebraicos abelianos conexos de $\mathrm{Sp}(2,\mathbb{C})$. Para esto usaremos la exponencial de matrices, la forma canónica de Jordan y varias propiedades de los grupos algebraicos lineales. Salvo estas herramientas, los métodos usados son solo tediosos cálculos que están del todo incluidos. Denotaremos por $\mathbb{C}^*$ al grupo algebraico lineal multiplicativo $(\mathbb{C}^*, \cdot)$ y por $\mathbb{C}$ al grupo algebraico lineal aditivo $(\mathbb{C}, +)$.

**Proposición 3.2.** *Si $G \subseteq GL(n,\mathbb{C})$ es un grupo de Lie abeliano y conexo, la función exponencial* $\exp : \mathfrak{g} \to G$ *es sobreyectiva. En particular esto es válido si $G$ es un grupo algebraico lineal abeliano conexo.*

*Demostración.* Consideremos al espacio vectorial $\mathfrak{g} \simeq \mathbb{C}^m$, $m = \dim G$, como una variedad. Entonces la función exponencial $\exp : \mathfrak{g} \to G$ es analítica y su derivada en 0, $d(\exp)(0) : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ es la identidad. En efecto, si $A \in T_0\mathfrak{g} = \mathfrak{g}$, $\gamma(t) = tA$ es una curva en $\mathfrak{g}$ con $\gamma(0) = 0$ y $\gamma'(0) = A$ y por tanto $d(\exp)(0)(A) = \frac{d}{dt}(e^{tA})\big|_{t=0} = A$. Aplicando el teorema de la función inversa, existen vecindades $U$ de 0 y $V$ de $I_n$ tales que exp es un homeomorfismo entre $U$ y $V$.

Veamos ahora que la conexidad de $G$ implica que dado $\sigma \in G$, existen $A_1, ..., A_k \in \mathfrak{g}$ tales que $\sigma = e^{A_1}e^{A_2}\cdots e^{A_k}$. Sea $\alpha : [0,1] \to G$ una curva continua con $\alpha(0) = I_n$ y $\alpha(1) = \sigma$. Los conjuntos $\alpha(t)V$ son un cubrimiento por abierto de $\gamma([0,1])$. Como este conjunto es compacto, podemos escoger puntos $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_m = 1$ tales que $\alpha(t_k)V$ lo cubren. Tomando más puntos si es necesario podemos suponer que $\alpha(t_{i-1})^{-1}\alpha(t_i) \in V$, para cada $i = 1, ..., k$. Si escogemos $A_i \in \mathfrak{g}$ tal que $e^{A_i} = \alpha(t_{i-1})^{-1}\alpha(t_i)$ entonces:

$$\sigma = (\alpha(t_0)^{-1}\alpha(t_1))(\alpha(t_1)^{-1}\alpha(t_2))\cdots(\alpha(t_{m-1})^{-1}\alpha(t_m)) = e^{A_1}e^{A_2}\cdots e^{A_k}.$$

Como estamos suponiendo que $G$ es abeliano, $\mathfrak{g}$ es un algebra de Lie abeliana. Por tanto, $\sigma = e^{A_1}e^{A_2}\cdots e^{A_k} = e^{A_1+\cdots+A_k}$.

La proposición es válida si $G$ es un grupo algebraico lineal abeliano conexo porque, por la nota 2.3, $G$ es en particular un grupo de Lie y es conexo en la topología usual. □

Discutiremos ahora sin demostración la estructura de los grupos algebraicos lineales conexos abelianos. Todos los hechos que mencionamos a continuación se encuentran demostrados en [5], capítulo 6. En general si $\sigma \in G \subseteq \mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$, la descomposición de Jordan asegura que existen matrices $D_\sigma$ diagonalizable y $N_\sigma$ nilpotente únicas tales que $\sigma = D_\sigma + N_\sigma$ y $D_\sigma N_\sigma = N_\sigma D_\sigma$. Como $\sigma$ es invertible, todos sus valores propios son distintos de 0 y por tanto $D_\sigma$ también es invertible. Luego $\sigma = D_\sigma(I_n + D_\sigma^{-1}N_\sigma) = D_\sigma U_\sigma$. Notemos que $D_\sigma^{-1}N_\sigma$ es nilpotente. Una matriz se dice unipotente si es la suma de la matriz identidad y una matriz nilpotente. En estos términos, vemos que cada elemento de un grupo algebraico lineal se descompone como producto de una matriz diagonal y una matriz unipotente. Es posible mostrar que $D_\sigma$ y $U_\sigma$ son elementos de $G$ ([5], teorema 15.3).

Sean $G_D = \{\sigma \in G | \sigma = D_\sigma\}$ y $G_N = \{\sigma \in G | \sigma = U_\sigma\}$. Si $G$ es abeliano entonces $G_D$ y $G_N$ son subgrupos cerrados de $G$. Además $G$ resulta isomorfo a $G_D \times G_N$ ([5], teorema 15.5). Como $G_D$ es un grupo algebraico conformado por matrices diagonales que conmutan, el conjunto $G_D$ se puede diagonalizar simultáneamente y entonces $G_D$ resulta ser isomorfo a $(\mathbb{C}^*)^m$, para algún $m$ entero positivo. Si $G$ es conexo, $G_D$ y $G_N$ también lo son. Bajo estas hipótesis $G_N$ es un grupo algebraico lineal abeliano y conexo. Por la proposición 3.2, la función exponencial $\exp : \mathfrak{g}_N \to G_N$ es sobreyectiva. Sea $A_1, ..., A_l$ una base de $\mathfrak{g}_N$. Luego todo elemento de $G_N$ es de la forma $e^{t_1 A_1 + \cdots + t_l A_l}$, con $t_i \in \mathbb{C}$. Esto implica que $G_N$ es isomorfo a $\mathbb{C}^l$. Resumiendo podemos enunciar el siguiente teorema sobre la estructura de los grupos algebraicos conexos abelianos.

**Teorema 3.1.** *Sea $G$ un grupo algebraico lineal abeliano conexo. Entonces $G$ es isomorfo a $(\mathbb{C}^*)^m \times \mathbb{C}^l$ para ciertos enteros positivos $m$ y $l$ con $\dim G = m + l$.*

**Corolario 3.2.** *Cualquier grupo algebraico lineal conexo de dimensión 1 es isomorfo a $(\mathbb{C}, +)$ ó a $(\mathbb{C}^*, \cdot)$.*

*Demostración.* Cualquier grupo algebraico lineal de dimensión 1 es abeliano. Por el teorema anterior, nuestro grupo es isomorfo a $(\mathbb{C}^*)^m \times \mathbb{C}^l$ con $m+l = 1$. Luego $m = 1$ y $l = 0$ ó $m = 0$ y $l = 1$. □

**Corolario 3.3.** *Si un grupo algebraico lineal abeliano conexo $G \subseteq GL(n, \mathbb{C})$ es isomorfo a $\mathbb{C}^l$, entonces todos los elementos de su algebra de Lie son nilpotentes. En particular un grupo algebraico lineal conexo $G \subseteq GL(n, \mathbb{C})$ de dimensión 1 es isomorfo a $\mathbb{C}$ si y sólo si su algebra de Lie es generada por una matriz nilpotente.*

*Demostración.* Si $G$ es isomorfo a $\mathbb{C}^l$, es porque $G = G_N$. Sea $A \in \mathfrak{g}$, $A \neq 0$. Entonces $e^{tA} \in G_N$, para todo $t \in \mathbb{C}$, y por tanto es de la forma $e^{tA} = I_n + M(t)$, donde $M(t)$ es nilpotente. Como $M(t) \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{C})$, entonces $M(t)^n = 0$, es decir, $(e^{tA} - I_n)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^{n-k} (e^{tA})^k = 0$. Esto implicaría que la función exponencial es una función algebraica y es claro que esto es una contradicción. Por tanto $A$ debe nilpotente porque este es el único caso en que $e^{tA}$ se reduce a un polinomio. □

**Definición 3.1.** Sea $G$ un grupo algebraico lineal. Un subgrupo algebraico lineal $T$ de $G$ es llamado un toro si es isomorfo $(\mathbb{C}^*)^m$, para algún entero positivo $m$.

**Lema 3.1.** *Sea $S \in Sp(n, \mathbb{C})$. Entonces el polinomio característico de $S$, $p(\lambda)$, satisface que $p(\lambda) = \lambda^{2n} p\left(\frac{1}{\lambda}\right)$.*

*Demostración.* Usando que $S^t J_n S = J_n$, $\det(S) = 1$, $\det(J_n) = 1$ y $J_n^2 = -I_{2n}$ tenemos:

$$
\begin{aligned}
p(\lambda) = \det(\lambda I_{2n} - S) = \lambda^{2n} \det\left(I_{2n} - \frac{1}{\lambda} S\right) &= \lambda^{2n} \det\left(I_{2n} + \frac{1}{\lambda} J_n (S^t)^{-1} J_n\right) \\
&= \lambda^{2n} \det\left(-J_n^2 + \frac{1}{\lambda} J_n (S^{-1})^t J_n\right) \\
&= \lambda^{2n} \det(S) \det\left(-I_{2n} + \frac{1}{\lambda} (S^t)^{-1}\right) \\
&= \lambda^{2n} \det\left(\frac{1}{\lambda} I_{2n} - S\right) = \lambda^{2n} p\left(\frac{1}{\lambda}\right).
\end{aligned}
$$

$\square$

**Proposición 3.3.** *Los toros maximales en $Sp(n, \mathbb{C})$ son los grupos conjugados a:*

$$T_n = \left\{ diag(\lambda_1, ..., \lambda_n, \lambda_1^{-1}, ..., \lambda_n^{-1}) : \lambda_i \in \mathbb{C}^*, i = 1, ..., n \right\}.$$

*Demostración.* Por el lema anterior, si $\lambda_0 \in \mathbb{C}^*$ es un valor propio de $S \in \mathrm{Sp}(n, \mathbb{C})$, $\lambda_0^{-1}$ también lo es y por tanto los valores propios de matrices simplécticas aparecen en parejas $(\lambda_0, \lambda_0^{-1})$. Entonces los elementos de la diagonal de una matriz diagonal de $Sp(n, \mathbb{C})$ tienen la forma $\lambda_1, \lambda_1^{-1}, ..., \lambda_n, , \lambda_n^{-1}$. Usando que $S^t J_n S = J_n$ vemos que el subgrupo de matrices diagonales de $\mathrm{Sp}(n, \mathbb{C})$ tiene la forma del enunciado. $\square$

**Nota 3.1.** El algebra de Lie del grupo $T_n$ es la subalgebra abeliana de $\mathfrak{sp}(n, \mathbb{C})$ dada por $\mathfrak{t_n} = \{diag(a_1, ..., a_n, -a_1, ..., -a_n) : a_i \in \mathbb{C}^*, i = 1, ..., n\}$.

Ahora usaremos todos estos resultados para determinar los subgrupos algebraicos abelianos conexos de $\mathrm{Sp}(2, \mathbb{C})$.

**Lema 3.2.** *Sea $A$ una matriz nilpotente no nula en $\mathfrak{sp}(2, \mathbb{C})$. Entonces:*

1. *$A$ es conjugada a una matriz de la forma* $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$*, y por tanto $A^2 = 0$ y $Ker(A)$ es dimensión* 3.
2. *$A$ es conjugada a una matriz de la forma* $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$*, $A^2 = 0$ y $Ker(A)$ es dimensión* 2.
3. *$A$ es conjugada a una matriz de la forma* $\begin{bmatrix} 0 & 1 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$*, para algún $\lambda \in \mathbb{C}$, $A^3 \neq 0$, $A^4 = 0$ y $Ker(A)$ es dimensión* 1.

*Demostración.* Si $A$ es nilpotente su único valor propio es 0. Entonces, usando su forma canónica de Jordan, sabemos que existe $B \in \mathrm{GL}(4, \mathbb{C})$ tal que:

$$\overline{A} = B^{-1}AB = \begin{bmatrix} 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

donde $a, b$ y $c$ pueden ser 0 ó 1. En esta base la matriz asociada a la forma simpléctica es una matriz invertible y antisimétrica $\overline{J}$, digamos:

$$\overline{J} = B^t J_2 B = \begin{bmatrix} 0 & j_{12} & j_{13} & j_{14} \\ -j_{12} & 0 & j_{23} & j_{24} \\ -j_{13} & -j_{23} & 0 & j_{34} \\ -j_{14} & -j_{24} & -j_{34} & 0 \end{bmatrix}.$$

Por tanto:

$$\overline{A}^t\overline{J} + \overline{J}\,\overline{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & bj_{12} & cj_{13} \\ 0 & 0 & aj_{13} & aj_{14}+cj_{23} \\ -bj_{12} & -aj_{13} & 0 & bj_{24} \\ -cj_{13} & -aj_{14}-cj_{23} & -bj_{24} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Como $A \neq 0$, el caso $a = b = c = 0$ queda descartado. Los casos $a = b = 1, c = 0$ y $a = 0, b = c = 1$ implican que $j_{12} = j_{13} = j_{14} = j_{24} = 0$ y $j_{12} = j_{13} = j_{23} = j_{24} = 0$, respectivamente y esto a su vez diría que $\det \overline{J} = 0$. Luego estos casos no son posibles.

Los casos $a = 1, b = c = 0$, $a = c = 0, b = 1$ y $a = b = 0, c = 1$ son equivalentes y conducen al caso 1. El caso $a = c = 1, b = 0$ produce el caso 2. y finalmente $a = b = c = 1$ dan el caso 3. del lema. Esto se hace buscando una matriz $C \in \mathrm{GL}(4,\mathbb{C})$ tal que $C^t\overline{J}C = J_2$ y calculando $C^{-1}\overline{A}C$. □

**Proposición 3.4.** *Sea $G$ un subgrupo algebraico conexo abeliano de $Sp(2,\mathbb{C})$ de dimensión 1. Entonces $G$ es conjugado a uno de los siguientes subgrupos:*

1. *$G$ es isomorfo al grupo multiplicativo $\mathbb{C}^*$.*

   a) $G \simeq \left\{ \begin{bmatrix} \lambda^p & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda^q & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda^{-p} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda^{-q} \end{bmatrix} : \lambda \in \mathbb{C}^* \right\}$, *donde $p, q$ son enteros primos relativos.*

   b) $G \simeq \left\{ \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda^{-1} \end{bmatrix} : \lambda \in \mathbb{C}^* \right\}$.

   c) $G \simeq \left\{ \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} : \lambda \in \mathbb{C}^* \right\}$.

2. *$G$ es isomorfo al grupo aditivo $\mathbb{C}$.*

a) $G \simeq \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} : \lambda \in \mathbb{C}^* \right\}.$

b) $G \simeq \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \lambda \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} : \lambda \in \mathbb{C}^* \right\}.$

c) $G \simeq \left\{ \begin{bmatrix} 1 & \lambda & -\frac{\lambda^3}{6} + \alpha\lambda & \frac{\lambda^2}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{\lambda^2}{2} & \lambda \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda & 1 \end{bmatrix} : \lambda \in \mathbb{C}^* \right\}$, *para algún* $\alpha \in \mathbb{C}$.

*Demostración.* Si $G$ es un subgrupo algebraico conexo abeliano de $Sp(2,\mathbb{C})$ de dimensión 1, por el corolario 3.5, $G$ es isomorfo a $\mathbb{C}^*$ ó a $\mathbb{C}$. Supongamos primero que $G$ es isomorfo a $\mathbb{C}^*$. Como todo grupo multiplicativo está contenido en un toro maximal, $G$ es conjugado a un subgrupo de $T_2$. Podemos suponer que $\mathfrak{g} \subseteq \mathfrak{t}_2$ y por tanto los elementos de $\mathfrak{g}$ son de la forma $diag(a, b, -a, -b)$, con parámetros $a, b \in \mathbb{C}$. Como $\dim \mathfrak{g} = 1$, debe existir cierta relación entre los parámetros $a$ y $b$. Por la proposición 3.3, $G = \exp(\mathfrak{g})$. Supongamos que $b = 0$. En este caso $\exp(\mathfrak{g}) = \{diag(\lambda, 1, \lambda^{-1}, 1) | \lambda \in \mathbb{C}^*\}$ y obtenemos el grupo del caso 1.c. De igual manera, si ponemos $a = 0$, obtenemos un grupo conjugado al de 1.c . Si $a = b$, $\exp(\mathfrak{g}) = \{diag(\lambda, \lambda, \lambda^{-1}, \lambda^{-1}) | \lambda \in \mathbb{C}^*\}$ y obtenemos el grupo del caso 1.b. Supongamos ahora que $a$ y $b$ son linealmente dependientes sobre $\mathbb{Q}$. Entonces existen enteros $p$ y $q$ primos relativos tales que $pb = qa$. Luego $\mathfrak{g} = \{(pa, qa, -pa, -qa) | a \in \mathbb{C}\}$ y $\exp(\mathfrak{g}) = \{(\lambda^p, \lambda^q, \lambda^{-p}, \lambda^{-q}) | \lambda \in \mathbb{C}^*\}$ que es el grupo del caso 1.a Finalmente si $a$ y $b$ son linealmente independientes sobre $\mathbb{Q}$, el grupo que generan no es algebraico y por tanto este caso no se puede dar. Esto termina la clasificación en el caso multiplicativo.

Supongamos que $G$ es isomorfo a $\mathbb{C}$. Por el corolario 3.6, $\mathfrak{g}$ es generada por una matriz nilpotente de $\mathfrak{sp}(2,\mathbb{C})$. Las clases de conjugación de este tipo de matrices están dadas en el lema anterior. Luego los casos 2.a, 2.b y 2.c no son más que los grupos que resultan de calcular la exponencial de las algebras generadas por tales matrices.

□

**Teorema 3.2.** *Sea $G$ un subgrupo abeliano maximal conexo de $Sp(2,\mathbb{C})$. Entonces $G$ es conjugado a uno de los siguientes subgrupos:*

1. *$G$ es isomorfo a $\mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^*$.* $G \simeq \left\{ \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu^{-1} \end{bmatrix} : \lambda, \mu \in \mathbb{C}^* \right\}$

*2. G es isomorfo a* $\mathbb{C}\times\mathbb{C}^*$.

$$\text{a) } G \simeq \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & \mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu^{-1} \end{bmatrix} : \mu\in\mathbb{C}^*, \lambda\in\mathbb{C} \right\}.$$

$$\text{b) } G \simeq \left\{ \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 & \lambda\mu \\ 0 & \lambda^{-1} & \lambda^{-1}\mu & 0 \\ 0 & 0 & \lambda^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix} : \lambda\in\mathbb{C}^*, \mu\in\mathbb{C} \right\}.$$

*3. G es isomorfo a* $\mathbb{C}\times\mathbb{C}$.

$$\text{a) } G \simeq \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \mu \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} : \lambda, \mu\in\mathbb{C}^* \right\}.$$

$$\text{b) } G \simeq \left\{ \begin{bmatrix} 1 & \lambda & \mu-\frac{\lambda^3}{6} & \frac{\lambda^2}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{\lambda^2}{2} & \lambda \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda & 1 \end{bmatrix} : \lambda, \mu\in\mathbb{C}^* \right\}.$$

*Demostración.* Si $G$ es un subgrupo abeliano maximal conexo de $\mathrm{Sp}(2,\mathbb{C})$, su algebra de Lie $\mathfrak{g}$ es una subalgebra abeliana de dimensión máxima de $\mathfrak{sp}(2,\mathbb{C})$. Por el corolario 3.1, $\dim G = \dim\mathfrak{g} \leq 2$.

Veamos ahora que cualquier grupo de dimensión 1 de $\mathrm{Sp}(2,\mathbb{C})$ está contenido en un subgrupo abeliano de dimensión 2. Si nuestro grupo el multiplicativo, este es conjugado a un subgrupo de $T_2$, que es abeliano de dimensión 2. Si el grupo es aditivo, por la proposición 3.4, este es conjugado a un grupo de la forma 2.a, 2.b ó 2.c de esa proposición. La afirmación se sigue de observar que los casos 2.a y 2.b están contenido en el caso 3.a del enunciado y el caso 2.c está contenidos en el caso 3.b.

Para terminar, debemos probar que cualquier subgrupo $G$ abeliano conexo de dimensión 2 de $\mathrm{Sp}(2,\mathbb{C})$ es conjugado a uno de los del enunciado. Por el teorema 3.1, $G$ es isomorfo a $\mathbb{C}^*\times\mathbb{C}^*$, $\mathbb{C}\times\mathbb{C}^*$ ó $\mathbb{C}\times\mathbb{C}$. En el primer caso, $G$ es isomorfo a $T_2$ y estamos en el caso 1. Supongamos que $G$ es isomorfo a $\mathbb{C}\times\mathbb{C}^*$. Entonces, por el corolario 3.3, existe una matriz nilpotente $A\in\mathfrak{g}$, que genera el único subespacio de dimensión 1 de $\mathfrak{g}$ formado por matrices nilpotentes. Entonces $A$ es una de las tres matrices del lema 3.2. Si $A$ es la matriz del caso 3 del lema se verifica tras un cálculo que las matrices en $\mathfrak{sp}(2,\mathbb{C})$ que conmutan con ella son las de la forma:

$$C = \begin{bmatrix} 0 & a & b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -a & 0 \end{bmatrix},$$

y además $C^4 = 0$. Como $\mathfrak{g}$ es un subalgebra abeliana maximal entonces $C \in \mathfrak{g}$, pero esto contradice que haya un único subespacio de $\mathfrak{g}$ generado por una matriz nilpotente. Entonces $A$ debe caer en los casos 1 ó 2 de lema 3.2.

Si $A$ es la matriz del caso 1 del lema, las matrices en $\mathfrak{sp}(2,\mathbb{C})$ que conmutan con ella son las de la forma:

$$\begin{bmatrix} 0 & a & b & c \\ 0 & d & c & e \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & f & -a & -d \end{bmatrix}.$$

Como las matrices $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ y $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ son nilpotentes y conmutan con $A$, no pueden estar en $\mathfrak{g}$, luego $c = e = 0$. Podemos asumir que $b = 0$, porque este valor corresponde a la propia $A$. Si diagonalizamos la matriz $\begin{bmatrix} 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & f & -a & -d \end{bmatrix}$ mediante una matriz simpléctica obtenemos $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -d \end{bmatrix} = d \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ y en esa base $A$ sigue siendo igual. Luego $\exp(\mathfrak{g})$ es el grupo del caso 2.a.

Si $A$ es la matriz del caso 2 del lema, es fácil ver que las matrices en $\mathfrak{sp}(2,\mathbb{C})$ que conmutan con ella son las de la forma:

$$\begin{bmatrix} 0 & a & b & c \\ -a & 0 & c & d \\ 0 & 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & -a & 0 \end{bmatrix}.$$

Podemos suponer que $b = 0$ porque corresponde a parte de la matriz $A$. Como las matrices $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ y $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ son nilpotentes y conmutan con $A$, no pueden estar en $\mathfrak{g}$

y por tanto $c = d = 0$. Al diagonalizar $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$ mediante una matriz simpléctica obtenemos la matriz $\begin{bmatrix} i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i \end{bmatrix} = i \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. En esa nueva base $A$ se transforma en $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ y por tanto $\exp(\mathfrak{g})$ resulta ser el grupo del caso 2.b.

Finalmente, si $G$ es isomorfo a $\mathbb{C}\times\mathbb{C}$, $\mathfrak{g}$ es generada por dos matrices nilpotentes que conmutan. Si alguna matriz en $\mathfrak{g}$ cae en el caso 3 del lema 3.2, entonces la otra matriz linealmente independiente que falta para completar una base de $\mathfrak{g}$ es $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. Calculando $\exp(\mathfrak{g})$ llegamos al caso 3.b. Si $\mathfrak{g}$ no contiene matrices del tipo 3 del lema 3.2, las únicas posibles matrices son las del caso 1 y 2 del lema. Entonces podemos tomar como base de $\mathfrak{g}$ a la matrices $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ y $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ que claramente llevan al caso 3.a.

□

**Corolario 3.4.** *Cualquier subgrupo maximal abeliano conexo de $Sp(2,\mathbb{C})$ es de dimensión 2.*

## 3.2. Caracterización de integrabilidad en términos de teoría de Galois

Ya teniendo a disposición las clases de conjugación de todos los subgrupos algebraicos lineales abelianos conexos de $\mathrm{Sp}(2,\mathbb{C})$ podemos estudiar la integrabilidad de los sistemas hamiltonianos lineales no autónomos. Para esto debemos ver cómo se comporta el sistema (3-1) al hacer un cambio de variable simpléctico.

En general, si hacemos un cambio de variable a la ecuación (3-1), $\begin{bmatrix} \xi \\ \eta \end{bmatrix} = B(t) \begin{bmatrix} p \\ q \end{bmatrix}$, con $B(t) \in \mathrm{Sp}(n, \mathcal{M}(\Gamma))$, aplicando (2-3), obtenemos:

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} \xi \\ \eta \end{bmatrix} = \left( \frac{dB(t)}{dt} B(t)^{-1} + B(t) \begin{bmatrix} C^t & B \\ -A & -C \end{bmatrix} B(t)^{-1} \right) \begin{bmatrix} \xi \\ \eta \end{bmatrix}.$$

Es fácil ver la nueva matriz de coeficientes está de nuevo en $\mathfrak{sp}(n, \mathcal{M}(\Gamma))$. Por la proposición 3.1, esta matriz proviene del hamiltoniano:

$$2\overline{H}(\xi,\eta) = \begin{bmatrix} \xi, \eta \end{bmatrix} (-J_n) \left( \frac{dB(t)}{dt} B(t)^{-1} + B(t) \begin{bmatrix} C^t & B \\ -A & -C \end{bmatrix} B(t)^{-1} \right) \begin{bmatrix} \xi \\ \eta \end{bmatrix}.$$

Como $B(t)^t J_n B(t) = J_n$ obtenemos:

$$2\overline{H}(\xi,\eta) = \begin{bmatrix} \xi, \eta \end{bmatrix} (-J_n) \frac{dB(t)}{dt} B(t)^{-1} \begin{bmatrix} \xi \\ \eta \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \xi, \eta \end{bmatrix} (B(t)^{-1})^t J_n \begin{bmatrix} C^t & B \\ -A & -C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p \\ q \end{bmatrix}$$

$$= - \begin{bmatrix} \xi, \eta \end{bmatrix} J_n \frac{dB(t)}{dt} B(t)^{-1} \begin{bmatrix} \xi \\ \eta \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} p, q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & C \\ C^t & B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p \\ q \end{bmatrix}.$$

Por tanto, la relación entre los hamiltonianos de los sistemas es:

$$\overline{H}(\xi,\eta) = H(x,y) - \begin{bmatrix} \xi, \eta \end{bmatrix} J_n \frac{dB(t)}{dt} B(t)^{-1} \begin{bmatrix} \xi \\ \eta \end{bmatrix}. \tag{3-3}$$

Finalmente tenemos todas las herraminetas necesarias para poder caracterizar la integrabilidad de tales sistemas de la siguiente manera:

**Teorema 3.3.** *Sea $H \in \mathcal{M}(\overline{\Gamma})[\mathbb{C}^4]_2$ un hamiltoniano cuadrático homogéneo con coeficientes en $\mathcal{M}(\overline{\Gamma})$, donde $\overline{\Gamma}$ es un revestimiento ramificado de $\Gamma$. Es equivalente:*

1. *El hamiltoniano extendido $\widehat{H}$ es completamente integrable por funciones meromorfas en $\mathbb{C}^4 \times \widehat{\Gamma} \times \mathbb{C}$, para algún revestimiento ramificado $\widehat{\Gamma}$ de $\overline{\Gamma}$.*

2. *$H$ es integrable en el sentido no autónomo por funciones meromorfas en $\mathbb{C}^4 \times \widehat{\Gamma}$, para algún revestimiento ramificado $\widehat{\Gamma}$ de $\overline{\Gamma}$.*

3. *$H$ es integrable en el sentido no autónomo por funciones cuadráticas $F_1, F_2 \in \mathcal{M}(\widehat{\Gamma})[\mathbb{C}^4]_2$, para algún revestimiento ramificado $\widehat{\Gamma}$ de $\overline{\Gamma}$.*

4. *La componente conexa de la identidad del grupo de Galois de $X_H$ es abeliana.*

*Demostración.* Sea $H = \sum_{i,j=1}^{2} \frac{1}{2} a_{ij} p_i p_j + \frac{1}{2} b_{ij} q_i q_j + c_{ij} p_i q_j$ y $\widehat{H} = H - h$. Para mostrar que 1. implica 4. aplicaremos el teorema de Morales-Ramis al hamiltoniano $\widehat{H}$. Las ecuaciones del campo $X_{\widehat{H}}$ están dadas por:

$$\frac{dp_i}{dt} = \sum_{j=1}^{2} c_{ji}(t)p_j + b_{ij}(t)q_j, \quad \frac{dq_i}{dt} = \sum_{j=1}^{2} -a_{ij}(t)p_j - c_{ij}(t)q_j, \quad \frac{dt}{dt} = 1,$$

$$\frac{dh}{dt} = \sum_{i,j=1}^{2} -\frac{da_{ij}}{dt}\frac{p_ip_j}{2} - \frac{db_{ij}}{dt}\frac{q_iq_j}{2} - \frac{dc_{ij}}{dt}p_iq_j, \quad i = 1, 2.$$

La ecuación variacional de este sistema a lo largo de la solución particular $(0, 0, 0, 0, t, 0)$ es:

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} \xi \\ \eta \\ \tau \\ \chi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C^t & B & 0 & 0 \\ -A & -C & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \xi \\ \eta \\ \tau \\ \chi \end{bmatrix}.$$

De aquí vemos que $\tau$ y $\chi$ son constantes y por tanto la ecuación variacional normal correspondiente resulta ser:

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} \xi \\ \eta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C^t & B \\ -A & -C \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \xi \\ \eta \end{bmatrix},$$

que es el sistema hamiltoniano correspondiente a $X_H$. Como estamos suponiendo que $\widehat{H}$ es completamente integrable, por el teorema de Morales-Ramis la componente conexa de la identidad del grupo de Galois de la ecuación variacional normal es abeliana.

Por el teorema 1.5, 2. implica 1. Que 3. implica 2. es evidente porque los elementos de $\mathcal{M}(\widehat{\Gamma})[\mathbb{C}^4]_2$ son funciones meromorfas sobre $\mathbb{C}^4 \times \widehat{\Gamma}$. Solo nos falta mostrar que 4. implica 3. Sea $G$ el grupo de Galois de $X_H$. Por la proposición 2.14 existe un revestimiento ramificado finito $\overline{\Gamma}^1$ de $\overline{\Gamma}$ tal que el grupo de Galois del sistema extendido es igual a $G^0$, la componente conexa de la identidad del grupo de Galois de la ecuación en $\overline{\Gamma}$ y por tanto el grupo es conexo y por hipótesis, abeliano. Por el teorema de reducción de Lie-Kolchin, teorema 2.6, existe un revestimiento ramificado finito $\widehat{\Gamma}$ de $\overline{\Gamma}^1$, y por tanto de $\overline{\Gamma}$, y un cambio de variable $B(t) \in \mathrm{Sp}(2, \mathcal{M}(\widehat{\Gamma}))$:

$$\begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \eta_1 \\ \eta_2 \end{bmatrix} = B(t)\begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ q_1 \\ q_2 \end{bmatrix},$$

tal que para cada $t \in \widehat{\Gamma}$, $\overline{A}(t) = \frac{dB(t)}{dt}B(t)^{-1} + B(t)\begin{bmatrix} C^t & B \\ -A & -C \end{bmatrix}B(t)^{-1}$ está en $\mathfrak{g}$, que es una subalgebra abeliana de $\mathfrak{sp}(2, \mathbb{C})$. Por el corolario 3.4, $\mathfrak{g}$ está contenida en una subalgebra abeliana de dimensión 2, generada por digamos $A_1$ y $A_2$. Por la proposición 3.1, existen dos hamiltonianos cuadráticos $F_1(\xi_1, \xi_2, \eta_1, \eta_2)$ y $F_2(\xi_1, \xi_2, \eta_1, \eta_2)$ en involución, que provienen de estas matrices. Como $\overline{A}(t) \in \mathfrak{g}$, entonces $\overline{H}$ está involución con $F_1(\xi_1, \xi_2, \eta_1, \eta_2)$ y $F_2(\xi_1, \xi_2, \eta_1, \eta_2)$. Luego, cuando regresamos a las variables $(p_1, p_2, q_1, q_2)$, y utilizando la ecuación (3-3), obtenemos dos hamiltonianos cuadráticos $G_1(p_1, p_2, q_1, q_2)$ y $G_2(p_1, p_2, q_1, q_2)$ que están en involución entre sí y con $H$. Por tanto $H$ es integrable en el sentido no autónomo en el revestimiento $\widehat{\Gamma}$. □

**Nota 3.2.** La única parte de esta prueba que depende de la hipótesis $n = 2$ es la implicación 4. a 3. Allí usamos que todo subgrupo algebraico lineal abeliano conexo maximal de $\mathrm{Sp}(2, \mathbb{C})$ era de dimensión 2 y por tanto toda subalgebra abeliana de $\mathfrak{sp}(2, \mathbb{C})$ que provenga de uno de estos grupos está contenida en una de dimensión 2. En general, sabemos por el corolario 3.1, que la máxima dimensión que puede tener una subalgebra abeliana de $\mathfrak{sp}(n, \mathbb{C})$ es $n$ y por la nota 3.1 sabemos que existen subalgebras de dimensión $n$. Lo que no podemos asegurar es que toda subalgebra abeliana maximal sea de dimensión $n$. Si supiéramos esto, el teorema sería válido para cualquier número de grados de libertad.

## 3.3. Formas normales

En esta sección daremos las formas normales a las que se puede reducir un sistema hamiltoniano no autónomo con $2 + \frac{1}{2}$ de libertad. El método para lograr la reducción a la forma normal es consecuencia del teorema de reducción de Lie-Kolchin.

El método para hallar la forma normal de un hamiltoniano $H \in \mathcal{M}(\overline{\Gamma})[\mathbb{C}^4]_2$, conociendo su grupo de Galois $G$, se puede escribir de la siguiente manera:

1. Calculamos el algebra de Lie del grupo $G$.

2. Aplicamos el teorema de reducción de Lie-Kolchin para encontrar un revestimiento ramificado finito $\widehat{\Gamma}$ de $\overline{\Gamma}$ y un cambio de variable $B(t) \in \mathrm{Sp}(2, \mathcal{M}(\widehat{\Gamma}))$, de forma que la nueva ecuación tome valores en $\mathfrak{g}$.

3. Calculamos $\overline{H}$, como se indica al principio de la sección 3.2.

Una vez conocida su forma normal, podemos encontrar las funciones cuadráticas homogéneas que conmutan con él. Por la proposición 3.1, basta con encontrar las matrices simplécticas linealmente independientes que conmutan con la matriz que representa a $\overline{H}$.

Para calcular todas las formas normales del sistema (3-1) debemos realizar este procedimiento con cada uno de los grupos que se obtuvieron en la sección 3.1. Solo lo haremos para el primer grupo de la proposición 3.4. Los cálculos para los demás casos son iguales. Finalmente en el teorema 3.4 están enunciadas todas las formas normales del sistema (3-1), con sus grupos correspondientes y con sus integrales primeras.

**Ejemplo 3.1.** Supongamos que el grupo de Galois de la ecuación (3-1) es $G \simeq \{diag(\lambda^p, \lambda^q, \lambda^{-p}, \lambda^{-q}) | \lambda \in \mathbb{C}^*\}$. Su algebra de Lie está dada por:

$$\mathfrak{g} \simeq \{diag(p\alpha, q\alpha, -p\alpha, -q\alpha) : \alpha \in \mathbb{C}\}.$$

Por el teorema de reducción de Lie-Kolchin, existe un cambio de variable:

$$\begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \eta_1 \\ \eta_2 \end{bmatrix} = B(t) \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ y_1 \\ y_2 \end{bmatrix},$$

con $B(t) \in \mathrm{Sp}(2, \mathcal{M}(\widehat{\Gamma}))$, tal que el sistema (3-1) se puede escribir como:

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \eta_1 \\ \eta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} pf(t) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & qf(t) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -pf(t) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -qf(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ y_1 \\ y_2 \end{bmatrix},$$

para cierta $f(t) \in \mathcal{M}(\widehat{\Gamma})$. Por la proposición 3.1, el hamiltoniano en las coordenadas $(\xi_1, \xi_2, \eta_1, \eta_2)$ es:

$$\begin{aligned} \overline{H}(t, \xi_1, \xi_2, \eta_1, \eta_2) = & [\xi_1, \xi_2, \eta_1, \eta_2] \left(-\frac{1}{2} J_2\right) \begin{bmatrix} pf(t) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & qf(t) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -pf(t) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -qf(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \eta_1 \\ \eta_2 \end{bmatrix} \\ = & f(t) \left(p\xi_1\eta_1 + q\xi_2\eta_2\right). \end{aligned}$$

Esta última expresión es la forma normal del hamiltoniano $H$. Es fácil ver que las únicas matrices en $\mathfrak{sp}(2, \mathbb{C})$ que conmutan con $diag(p, q, -p, -q)$ son de la forma $diag(a, b, -a, -b)$. El hamiltoniano correspondiente a $diag(1, 0, -1, 0)$ es $F_1 = \xi_1\eta_1$ y el correspondiente a $diag(0, 1, 0, -1)$ es $F_2 = \xi_2\eta_2$. Luego $F_1, F_2$ son las integrales primeras de $H$.

**Teorema 3.4.** *Sea $H(t, x_1, x_2, y_1, y_2) \in \mathcal{M}(\overline{\Gamma})[\mathbb{C}^4]_2$ un hamiltoniano cuadrático homogéneo de $2+\frac{1}{2}$ grados de libertad. Entonces existe un revestimiento ramificado $\widehat{\Gamma}$ de $\overline{\Gamma}$ y un cambio de variable simpléctico: $[\xi_1, \xi_2, \eta_1, \eta_2] = B(t)\,[x_1, x_2, y_1, y_2]$ con $B(t) \in Sp(2, \mathcal{M}(\widehat{\Gamma}))$, de forma que el nuevo hamiltoniano $\overline{H}(t, \xi_1\xi_2, \eta_1, \eta_2)$ tiene las propiedades descritas en la tabla **3-1**:*

**Tabla 3-1**.: Formas normales de sistemas integrables, siendo $f(t)$ y $g(t)$ funciones meromorfas en $\widehat{\Gamma}$, $\lambda \in \mathbb{C}$ y $p, q$ enteros positivos primos relativos.

| **Forma Normal** | **Galois** | **Invariantes cuadráticos** | **Parámetros** |
|---|---|---|---|
| $0$ | $\{1\}$ | Todos | Ninguno |
| $f(t)\,(p\xi_1\eta_1 + q\xi_2\eta_2)$ | $\mathbb{C}^*$ | $\xi_1\eta_1, \xi_2\eta_2$ | $f(t), p, q$ |
| $f(t)\,(\xi_1\eta_1 + \xi_2\eta_2)$ | $\mathbb{C}^*$ | $\xi_1\eta_1, \xi_2\eta_2, \xi_1\eta_2, \xi_2\eta_1$ | $f(t)$ |
| $f(t)\xi_1\eta_1$ | $\mathbb{C}^*$ | $\xi_1\eta_1, \xi_2^2, \eta_2^2, \xi_2\eta_2$ | $f(t)$ |
| $f(t)\frac{\eta_1^2}{2}$ | $\mathbb{C}$ | $\eta_1^2, \xi_2^2, \eta_2^2, \xi_2\eta_2, \xi_2\eta_1, \eta_1\eta_2$ | $f(t)$ |
| $f(t)\frac{\eta_1^2+\eta_2^2}{2}$ | $\mathbb{C}$ | $\eta_1^2, \eta_2^2, \eta_1\eta_2, \xi_1\eta_2 - \xi_2\eta_1$ | $f(t)$ |
| $f(t)\left(\xi_2\eta_1 + \lambda\frac{\eta_1^2}{2} + \frac{\eta_2^2}{2}\right)$ | $\mathbb{C}$ | $2\xi_2\eta_1 + \eta_2^2, \eta_1^2$ | $f(t), \lambda$ |
| $f(t)\xi_1\eta_1 + g(t)\xi_2\eta_2$ | $\mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^*$ | $\xi_1\eta_1, \xi_2\eta_2$ | $f(t), g(t)$ |
| $f(t)\frac{\eta_1^2}{2} + g(t)\xi_2\eta_2$ | $\mathbb{C} \times \mathbb{C}^*$ | $\eta_1^2, \xi_2\eta_2$ | $f(t), g(t)$ |
| $f(t)\,(\xi_1\eta_1 - \xi_2\eta_2) + g(t)\eta_1\eta_2$ | $\mathbb{C} \times \mathbb{C}^*$ | $\xi_1\eta_1 + \xi_2\eta_2, \eta_1\eta_2$ | $f(t), g(t)$ |
| $f(t)\frac{\eta_1^2}{2} + g(t)\frac{\eta_2^2}{2}$ | $\mathbb{C} \times \mathbb{C}$ | $\eta_1^2, \eta_2^2, \eta_1\eta_2$ | $f(t), g(t)$ |
| $f(t)\left(\xi_2\eta_1 + \frac{\eta_2^2}{2}\right) + g(t)\frac{\eta_1^2}{2}$ | $\mathbb{C} \times \mathbb{C}$ | $2\xi_2\eta_1 + \eta_2^2, \eta_1^2$ | $f(t), g(t)$ |

# 4. Conclusiones y Recomendaciones

## 4.1. Conclusiones

1. La noción de integrabilidad introducida en el caso no autónomo es compatible con la integrabilidad completa del sistema extendido.

2. Para hamiltonianos cuadráticos homogéneos en dos grados y medio de libertad son equivalentes los diferentes sentidos de integrabilidad, se puede demostrar el recíproco del teorema de Morales-Ramis y el sistema se puede integrar por medio de funciones cuadráticas con coeficientes meromorfos.

3. A través de la clasificación salvo conjugación de los subgrupos algebraicos abelianos conexos de $\mathrm{Sp}(2, \mathbb{C})$ es posible calcular las formas normales y las integrales primeras de hamiltonianos cuadráticos homogéneos para dos grados y medio de libertad.

4. Si fuese posible demostrar que todo subgrupo algebraico lineal abeliano conexo maximal de $\mathrm{Sp}(n, \mathbb{C})$ es de dimensión $n$ se tendría que toda subalgebra abeliana maximal de $\mathfrak{sp}(n, \mathbb{C})$ es de dimensión $n$ y el teorema 3.3 sería válido para cualquier número de grados de libertad.

## 4.2. Recomendaciones

1. Estudiar a fondo, con herrameintas algebraicas más sofisticadas, los subgrupos algebraicos de $\mathrm{Sp}(n, \mathbb{C})$.

2. Para sistemas hamiltonianos, analizar la aplicación momento para interpretar la acción del fibrado de Galois sobre hojas de la foliació correspondiente al sistema como variables de acción-ángulo.

# A. Anexo: Demostración del teorema de Darboux

**Teorema A.1** (Darboux)**.** *Sea $\omega$ una 2-forma diferencial cerrada no degenerada en una vecindad de un punto $x \in \mathbb{R}^{2n}$. Entonces es posible escoger un sistema de coordenadas $(p_1, .., p_n, .q_1, .., q_n)$ en un abierto de $x$ tal que $\omega = \sum_{i=1}^{n} dp_i \wedge dq_i$.*

*Demostración.* La prueba es por inducción sobre $n$. Sea $p_1$ una función diferenciable tal que $dp_1(x) \neq 0$. Por simplicidad, pongamos $p_1(x) = 0$. Sea $P_1 = X_{p_1}$. $P_1(x) \neq 0$ porque $dp_1(x) \neq 0$. Sea $P_1^t$ el flujo de $P_1$. Sea $N$ un subespacio de $\mathbb{R}^{2n}$ de dimensión $2n-1$ que pase por $x$ y que no contenga a $P_1(x)$.

Veamos que existe una vecindad de $U$ de $x$ en $\mathbb{R}^{2n}$ tal que para todo $z \in U$, existen únicos $t \in \mathbb{R}$ y $y \in N$, con $z = P_1^t(y)$. En efecto, sea $v_1, ..., v_n$ una base de $N$ y $A : \mathbb{R}^{2n-1} \to \mathbb{R}^{2n}$, $A(a_1, ..., a_{2n-1}) = a_1 v_1 + ... + a_{2n-1} v_{2n-1}$. Si definimos $F : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{2n-1} \to \mathbb{R}^{2n}$ por $F(t, a_1, ..., a_{2n-1}) = P_1^t(x - A(a_1, ..., a_{2n-1}))$, $F$ es diferenciable y su derivada en el punto $(t, a_1, ..., a_{2n-1})$ es:

$$\begin{aligned} dF(t, a_1, ..., a_{2n-1}) =& \frac{d}{dt}(P_1^t(x - A(a_1, ..., a_{2n-1})))dt + \\ & d(P_1^t)(x - A(a_1, ..., a_{2n-1}))d(x - A(a_1, ..., a_{2n-1})) \\ =& P_1(P_1^t(x - A(a_1, ..., a_{2n-1})))dt + d(P_1^t)(x - A(a_1, ..., a_{2n-1}))(-A). \end{aligned}$$

Como $P_1^0 = \mathrm{Id}$, $dP_1^0(p) = I_{2n}$ y:

$$dF(0, .., 0)(s, \alpha_1, ..., \alpha_{2n-1}) = sP_1(x) - A(\alpha_1, ..., \alpha_{2n-1}) = sP_1(x) - \alpha_1 v_1 - ... - \alpha_{2n-1} v_{2n-1}.$$

$dF(0, ..., 0)$ es 1-1 porque si $sP_1(x) - \alpha_1 v_1 - ... - \alpha_{2n-1} v_{2n-1} = 0$, como $P_1(x) \notin N$ y los $v_i$ son linealmente independientes, entonces $s = \alpha_1 = ... = \alpha_{2n-1} = 0$. Luego, $dF(0, ..., 0)$ es un isomorfismo y por el teorema de la función inversa existen vecindades $V$ y $U$ de $(0, ..., 0)$ y de $F(0, ..., 0) = x$ respectivamente, tales que $F|_V$ es un difeomorfismo. Esto muestra que si $z \in U$, existen $t \in \mathbb{R}$ y $(a_1, ..., a_{2n-1}) \in \mathbb{R}^{2n-1}$ tales que $z = P_1^t(y)$, donde $y = x - A(a_1, ..., a_{2n-1}) \in N$.

En $U$ definimos $q_1(z) = t$, donde $t$ es el único número real tal que $z = P_1^t(y)$, para algún $y \in N$, es decir, $P_1^{-t}(z) \in N$. Note que $q_1$ es diferenciable y $z \in N$ si y sólo si $q_1(z) = 0$. Además $q_1(P_1^s(z)) = s + q_1(z)$, porque si $t = q_1(z)$, $P_1^{-(t+s)}(P_1^s(z)) = P_1^{-t}(z) \in N$. Esto implica que $(q_1, p_1) = 1$ porque:

$$(q_1, p_1)(z) = \frac{d}{ds}(q_1(P_1^s z))\bigg|_{s=0} = \frac{d}{ds}(s + q_1(z))\bigg|_{t=0} = 1.$$

Si $n = 1$, hemos terminado. Si $n > 1$, supongamos que el teorema se ha probado para $\mathbb{R}^{2n-2}$. Sea $M = \{z \in U | p_1(z) = q_1(z) = 0\}$. En particular, $x \in M$. Si $z \in U$, $dp_1(z)$ y $dq_1(z)$ son linealmente independientes, porque $\omega(z)(P_1(z), Q_1(z)) = (q_1, p_1)(z) = 1$, donde $Q_1 = X_{q_1}$. Luego, por el teorema de la función implícita, $M$ es una subvariedad de $\mathbb{R}^{2n}$, contenida en $U$, de dimensión $2n - 2$.

Veamos que $(M, \omega|_M)$ es una variedad simpléctica. Para esto hay que demostrar que para todo $z \in M$, $\omega(z)$ es no degenerada. Sea $v \in T_zM \subset T_z\mathbb{R}^{2n}$, esto es, $v = \gamma'(0)$, donde $\gamma(t)$ es una curva en $M$ con $\gamma(0) = z$. Como $\gamma(t) \in M$, $p_1(\gamma(t)) = q_1(\gamma(t)) = 0$. Derivando estas expresiones y evaluando en 0 obtenemos $dp_1(z)(v) = dq_1(z)(v) = 0$. Por tanto, $\omega(z)(P_1(z), v) = dp_1(z)(v) = 0$ y $\omega(z)(Q_1(z), v) = dq_1(z)(v) = 0$. Hemos probado que el subespacio generado por $P_1(z), Q_1(z)$ es el complemento ortogonal de $T_zM$. Entonces, si $\omega(z)(v, w) = 0$, para todo $w \in T_zM$, $\omega(z)(v, w) = 0$, para todo $w \in T_z\mathbb{R}^{2n}$. Luego, $v = 0$ y $\omega(z)$ es no degenerada.

Por hipótesis de inducción, existen coordenadas simplécticas $p_2, q_2, ..., p_n, q_n$ definidas en una vecindad de $x$ en $M$. Vamos a extender estas coordenadas a una vecindad de $x$ en $\mathbb{R}^{2n}$. Para esto probaremos que existe una vecindad $W$ de $x$ en $\mathbb{R}^{2n}$ tal que todo punto de $W$ es de la forma $P_1^t Q_1^s w$, con $t, s \in \mathbb{R}$ y $w \in M$.

Sea $G : \mathbb{R}^2 \times M \to \mathbb{R}^{2n}$ dada por $G(t, s, w) = P_1^t Q_1^s w$. Para calcular su derivada en un punto $(t, s, w)$ aplicada en el vector $(a, b, v) \in T_{(t,s,w)}\mathbb{R}^{2n}$, sea $\gamma(t) \in M$ una curva en $M$ tal que $\gamma(0) = w$ y $\gamma'(0) = v$ y pongamos $\alpha(\tau) = (a\tau + t, b\tau + s, \gamma(\tau))$. $\alpha$ satisface $\alpha(0) = (t, s, w)$ y $\alpha'(0) = (a, b, v)$. Usando que $P_1^0 = Q_1^0 = \mathrm{Id}$, $dP_1^0(p) = dQ_1^0(p) = I_{2n}$ y la regla de la cadena obtenemos que:

$$\begin{aligned}
dG(t,s,w)(a,b,v) &= \frac{d}{d\tau}(G(\alpha(\tau)))\Big|_{\tau=0} \\
&= \frac{d}{d\tau}(P_1^{a\tau+t}Q_1^{b\tau+s}(\gamma(\tau)))|\Big|_{\tau=0} \\
&= (aP_1(P_1^{a\tau+t}Q_1^{b\tau+s}(\gamma(\tau))) \\
&\quad + d(P_1^{a\tau+t})(Q_1^{b\tau+s}(\gamma(\tau)))(bQ_1(Q_1^{b\tau+s}(\gamma(\tau)))) \\
&\quad + d(Q_1^{b\tau+s}(\gamma(\tau)))(\gamma'(\tau)))|_{\tau=0} \\
&= aP_1(P_1^tQ_1^sw) + bQ_1(Q_1^sw) + v.
\end{aligned}$$

En particular, $dG(0,0,x)(a,b,v) = aP_1(x)+bQ_1(x)+v$. $dG(0,0,x)$ es un isomorfismo porque $P_1(x)$ y $Q_1(x)$ son linealmente independientes y no están en $T_xM$. Usando el teorema de la función inversa, obtenemos la vecindad $W$.

Ahora extendemos las coordenadas $p_2, q_2, ..., p_n, q_n$ a $W$ de la siguiente manera: Si $z \in W$ y $z = P_1^tQ_1^sw$ sea $p_i(z) = p_i(w)$ y $q_i(z) = q_i(w)$, $i = 2, ..., n$. Las funciones $p_1, q_1, ..., p_n, q_n$ definidas en $W$ forman un sistema de coordenadas simplécticas. Para ver esto es suficiente mostrar que:

$$(p_i, p_j) = (q_i, q_j) = (p_i, q_j) = 0 \text{ y } (p_i, q_i) = 1.$$

Ya sabemos que $(q_1, p_1) = 1$. De esto, concluimos que los flujos de $P_1$ y $Q_1$ conmutan, $P_1^tQ_1^s = Q_1^sP_1^t$. Las funciones $p_i, q_i$, $i = 2, ..., n$ son invariantes por los flujos $P_1^tQ_1^s$ porque si $z = P_1^{t_0}Q_1^{s_0}w$, entonces por definición:

$$p_i(P_1^tQ_1^sz) = p_i(P_1^tQ_1^sP_1^{t_0}Q_1^{s_0}w) = p_i(P_1^{t+t_0}Q_1^{s+s_0}w) = p_i(w) = p_i(P_1^{t_0}Q_1^{s_0}w) = p_i(z).$$

De la misma forma, $q_i(P_1^tQ_1^sz) = q_i(z)$. Esto muestra que el paréntesis de Poisson de $p_1$ y $q_1$ con las $2n-2$ funciones $p_i, q_i$ es cero. Por tanto, la función $P_1^tQ_1^s$ conmuta con los flujos $P_i^t, Q_i^s$. Además,

$$d(P_1^tQ_1^s)(z)(P_i(z)) = \frac{d}{d\tau}(P_1^tQ_1^sP_i^\tau z)\Big|_{\tau=0} = \frac{d}{d\tau}(P_i^\tau(P_1^tQ_1^sz))\Big|_{\tau=0} = P_i(P_1^tQ_1^sz).$$

Igualmente $d(P_1^tQ_1^s)(z)(Q_i(z)) = Q_i(P_1^tQ_1^sz)$. Ahora veamos que los paréntesis de Poisson: $(p_i, p_j), (q_i, q_j)$, $(p_i, q_j)$ y $(p_i, q_i)$, $i, j = 2, ..., n$, son invariantes por $P_1^tQ_1^s$. $P_1^tQ_1^s$ preservan la estructura simpléctica $\omega$ porque son flujos hamiltonianos, es decir,

$$(P_1^tQ_1^s)^*\omega(z)(v, w) = \omega(z)(v, w),$$

para todo $z \in W$ y $v, w \in T_zM$. Entonces:

$$\begin{aligned}
(p_i, q_j)(P_1^t Q_1^s z) &= \omega(P_1^t Q_1^s z)(P_i(P_1^t Q_1^s z), Q_j(P_1^t Q_1^s z)) \\
&= \omega(P_1^t Q_1^s)(z)(d(P_1^t Q_1^s)(z)(P_i(z)), d(P_1^t Q_1^s)(z)(Q_j(z))) \\
&= (P_1^t Q_1^s)^* \omega(z)(P_i(z), Q_j(z)) \\
&= \omega(z)(P_i(z), Q_j(z)) \\
&= (p_i, q_j)(z).
\end{aligned}$$

Para $(p_i, p_j), (q_i, q_j)$ y $(p_i, q_i)$ el cálculo es igual. Como $p_2, q_2, ..., p_n, q_n$ son coordenadas simplécticas en $M$ satisfaces $(p_i, p_j) = (q_i, q_j) = (p_i, q_j) = 0$ y $(p_i, q_i) = 1$ sobre $M$, pero como estos paréntesis son invariantes por los flujos $P_1^t Q_1^s$, $p_2, q_2, ..., p_n, q_n$ satisfacen las relaciones en todo $W$. $\square$

# Bibliografía


[1] ABRAHAM, R.; MARSDEN, J. E.: *Foundations of Mechanics.* Second edition. Addison-Wesley Publishing Company, 1987.

[2] ARNOLD, V. I.: *Mathematical Methods of Classical Mechanics.* Second edition. Springer Verlag, 1989.

[3] BLÁZQUEZ SANZ, D.: *Differential Galois Theory and Lie-Vessiot Systems.* VDM Verlag, 2008.

[4] BLÁZQUEZ SANZ, D.: *On the Dynamical Meaning of Picard-Vessiot Theory.* En línea. 2010, disponible en (http://www.math.kyoto-u.ac.jp/ mitsu/conference/dynamicsdays9.html).

[5] HUMPHREYS J. E.: *Linear Algebraic Groups.* Springer Verlag, 1975.

[6] MALGRANGE B.: *Pseudogroupes de Lie et théorie de Galois différentielle.* Prepublicación del I.H.E.S., marzo 2010.

[7] MORALES RUIZ, J. J.: *Differential Galois Theory and Non-integrability of Hamiltonian Systems.* Birskhäuser, 1999.

[8] MUÑOZ, J.: *Curso de Teoría de Funciones 1.* Tecnos, 1978.

[9] SERRE, J. P.: *Espaces fibres algébriques.* En: Séminare Claude Chevalley, tome 3, 1958, p. 1-37.

[10] SOTOMAYOR, J.: *Liçóes de equaçóes diferenciais ordinárias.* Projeto Euclides, Impa, 1979.

[11] WILLIAMSON J.: *On the Algebraic Problem Concerning the Normal Forms of Linear Dynamical Systems.* En: American Journal of Mathematics, Vol. 58, No. 1, 1936, p. 141-163.