

Contribución de leptones exóticos del modelo 331
($\beta = -1/\sqrt{3}$) al momento magnético anómalo del
muón

Angela Mercedes Raba Páez

Noviembre de 2010

Índice general

1. Modelo Estándar de partículas elementales	1
1.1. El principio de gauge y la invarianza de gauge local	4
1.2. Interacción fuerte	6
1.3. Interacción electrodébil	6
1.4. Contenido de fermiones del ME	8
1.5. Rompimiento espontáneo de simetría	9
1.6. Mecanismo de Higgs	12
1.7. Masa de los fermiones	13
2. Modelo con dos dobletes de Higgs (M2DH)	15
2.1. Formalismo general del modelo	15
2.2. Sector cinético	17
2.3. Lagrangiano de Yukawa	19
2.4. M2DH tipo II	20
3. Modelo 331 ($\beta = -1/\sqrt{3}$)	22
3.1. Formalismo general del modelo	22
3.1.1. Sector fermiónico	23
3.1.2. Sector escalar	24
3.1.3. Sector vectorial	25
3.1.4. Lagrangiano del modelo	26
3.2. Espectro físico del modelo	27
3.2.1. Contenido de partículas	27
3.2.2. Espectro físico en estados de masa	28
3.2.3. Lagrangiano del modelo en estados de masa	30
4. Momento Magnético Anómalo (MMA) del muón	32
4.1. Acoplamiento electromagnético - Origen del momento magnético anómalo	34
4.1.1. Correcciones al factor de Landé - Término de Pauli o de momento anómalo	36
4.2. Generalización del MMA	37
4.3. MMA de un leptón	38
4.4. Función de vértice generalizada	39

4.5. MMA del muón en el ME	40
4.5.1. Predicción del $(g - 2)$ desde la QED	40
4.5.2. Correcciones electrodébiles	42
4.5.3. Contribución light by light	43
4.5.4. Predicciones del $g - 2$ a partir del ME	43
4.6. MMA del muón en los modelos 331	45
4.7. Medición del MMA	45
4.8. Propiedades del muón	47
4.9. Experimentos $g - 2$ del muón	48
4.10. Resumen de resultados experimentales	53
5. Resultados generales	55
5.1. MMA a partir de la función de vértice generalizada	56
5.2. Resultados obtenidos a partir de las contribuciones del Z' y de $M2DH$ tipo II al MMA del muón	57
5.3. Teoría del $g - 2$ del muón vs. experimento	65
6. Conclusiones	66
A. Notación y relaciones empleadas	71
A.1. Matrices de Pauli	71
A.2. Matrices Gamma de Dirac	71
A.3. Espinores de Dirac	73
A.4. Grupo $SU(2)$	74
A.5. Grupo $SU(3)$	74
A.6. Propiedades de la función Gamma	75
A.7. Integrales para la regularización dimensional	76
B. Contribución del bosón Z' al MMA del muón	77
C. Contribución de THDM al MMA del muón	84
Agradecimientos	90

Resumen de tesis

TÍTULO EN ESPAÑOL:

Contribución de leptones exóticos del modelo 331 ($\beta = -1/\sqrt{3}$) al momento magnético anómalo del muón.

TÍTULO EN INGLÉS:

Contribution of exotic leptons of 331 ($\beta = -1/\sqrt{3}$) model to the anomalous magnetic moment at the muon.

RESUMEN:

El modelo 331 ($\beta = -1/\sqrt{3}$) es un buen monitor de nueva física (NF) ya que a bajas energías contiene tres familias debido al criterio de cancelación de anomalías. El modelo tiene un mecanismo de rompimiento espontáneo de simetría que se espera probar en el LHC (Large Hadron Collider). De igual forma, en el LHC también se espera encontrar evidencia de en la escala de los TeV . En particular, establecemos la desviación del Momento Magnético Anómalo (MMA) del muón teniendo en cuenta el contenido de partículas del modelo 331 ($\beta = -1/\sqrt{3}$). Consideramos la contribución de Two Higgs Doublet Model (THDM) incluida en el modelo y así definimos el rango de masas del Z' según la ventana obtenida del MMA.

RESÚMEN EN INGLÉS:

The framework 331 ($\beta = -1/\sqrt{3}$) model is a good candidate of new physics (NP) because it has three families at low energy, due to cancelation of the anomalies. The model has another symmetry breaking which can be probe in the Large Hadron Collider (LHC). In the LHC is hope to probe evidence of NP at TeV scale. In particular, we establish the desviation of the Anomalous Magnetic Moment of the muon (AMM) taking into account the 331 ($\beta = -1/\sqrt{3}$) particle content by the model. We consider the contribution of the Two Higgs Doublet Model (THDM) embedded in 331 ($\beta = -1/\sqrt{3}$) model to AMM and we find the allowed region of the Z' mass in the open window of the AMM.

DESCRIPTORES O PALABRAS CLAVE:

Momento magnético anómalo, Muón, Modelos 331

DESCRIPTORES O PALABRAS CLAVE EN INGLÉS:

Anomalous magnetic moment, Muon, 331 models

Introducción

El estudio fenomenológico de lo que se ha denominado nueva física, en particular de las corrientes neutras extras asociadas al bosón pesado débil Z' , actualmente es un área de principal atención en la física de partículas. Desde experimentos de altas energías hasta la cosmología, el objetivo es común, determinar a que tipo de partículas o interacciones correspondería ésta alta escala de energía que maneja la nueva física. Es por esto que el advenimiento de experimentos como los que se esperan desarrollar en el Large Collider Hadronic (LHC) es de gran relevancia para la interpretación de parámetros obtenidos para observables físicos particulares, como los que se obtienen en este trabajo.

Actualmente el Modelo Estándar (ME) de partículas elementales es la teoría de campo cuántico más aceptada en la explicación de las propiedades físicas de las partículas e interacciones existentes en la naturaleza, a excepción del bosón de Higgs. Este último hecho y algunas otras particularidades como (el número de parámetros libres por ajustar en el modelo, la jerarquía de masas y las anomalías quirales) han llevado a que se postulen extensiones del ME que efectivamente compiten con el mismo. Entre estas cabe destacar el Modelo con Dos Dobletes de Higgs M2DH (THDM, sigla en inglés) extensión del ME, en la que el mecanismo de Higgs se ve levemente modificado por la inclusión de un doblete de campos escalares (en lugar de un singlete como ocurre en el ME) encargados de agregar el término cinético al Lagrangiano que finalmente llevará a que los fermiones del modelo se vean dotados de masa, a excepción de los neutrinos.

De otro lado, se encuentran los modelos 331. Teorías cuánticas de campo construidas bajo otro grupo de simetría, que en general incrementan los sectores fermiónico, vectorial y escalar físicos del ME, hecho que los hace excelentes candidatos para la explicación de física más allá del ME. Existen varios criterios de clasificación de estos modelos, pero el que en particular se tuvo en cuenta aquí fue el de la construcción de la carga eléctrica, puesto que debe reducirse a la forma del ME. Los fermiones del ME deben estar contenidos en los modelos 331, entonces existe un parámetro, β , que define la carga eléctrica haciendo que el número de parámetros del modelo sea mínimo y que la mayoría de su contenido fermiónico ya se haya estudiado experimentalmente. En particular, se ha escogido el modelo 331 ($\beta = -1/\sqrt{3}$) teniendo en cuenta que cumple con criterios como de economía, conjugación de la carga y anomalías quirales, además de que su sector escalar físico, contiene exáctamente el doblete de Higgs de THDM.

Los observables que se pueden determinar en este modelo, de cierta forma, corrigen

los valores predichos por el ME. Es decir existe una expresión universal (en el sentido de que es la misma independiente del contenido fermiónico del modelo) que relaciona las constantes de acoplamiento del ME y del 331 ($\beta = -1/\sqrt{3}$). Hecho que nos permitió escoger en particular, la corrección cuántica al Momento Magnético Anómalo (MMA) del muón o $g - 2$, como se denomina en el ámbito experimental.

En la física clásica la forma en que se acoplan las propiedades mecánicas y eléctricas de una partícula está dada por la razón giromagnética de la misma. Esta razón explicita los factores de Landé, g (factores de forma relacionados con propiedades específicas de la partículas), 1 para el momento angular, \vec{L} , y 2 para el momentum de espín, \vec{S} , corroborados posteriormente a partir de la ecuación de Schrödinger con campo electromagnético. Ahora bien, realizando las correcciones cuánticas respectivas, es decir estudiando el vértice de interacción de un leptón con un fotón, se puede ver que \vec{L} y \vec{S} no se acoplan exactamente a través de $g = 2$. Las correcciones cuánticas hacen que este valor se vea incrementado en una cantidad $\Delta g = g - 2$.

En particular para el muón, $g - 2$ es un parámetro que se ha medido con bastante precisión y que aún se espera seguir analizando, como por ejemplo en programas particulares del CERN. Así mismo se puede determinar de forma teórica, a partir de la función de vértice generalizada, construida para un proceso de interacción en particular. En el caso del ME, se han evaluado las contribuciones de los campos vectoriales físicos (inclusive hasta 4 loops), por esto el $g - 2$ es definitivamente uno de los mejores detectores de nueva física, permitiendo evaluar contribuciones de campos vectoriales exóticos y procesos de cambios de sabor a partículas exóticas, descartando así posibles extensiones del ME.

Motivados por lo expuesto, nuestro fin particular fue determinar la contribución del bosón exótico Z' al MMA del muón. Para esto realizamos revisiones de teorías de campo cuántico, necesarias en la determinación de la corrección cuántica a este observable, presentadas en los capítulos 1, 2 y 3, (para el ME, M2DH y para el modelo 331 ($\beta = -1/\sqrt{3}$), respectivamente). A continuación, en el capítulo 4, presentamos la física relacionada al MMA, en particular al MMA del muón. Partiendo desde el origen clásico de esta propiedad hasta la forma en que se determina cuánticamente. Así mismo se incluye brevemente la descripción del experimento $E821$, desarrollado en el Brookhaven National Laboratory (BNL) para la medición del $g - 2$ del muón y de forma sintética los resultados tanto teóricos como experimentales obtenidos para el mismo.

Por último presentamos los resultados obtenidos de las contribuciones del bosón exótico Z' y de $M2DH$ tipo II al MMA del muón. Los cálculos de los procesos de interacción (vértices) se presentan en los apéndices B y C , en tanto que en el apéndice A se presenta la notación, relaciones, identidades e integrales empleadas.

Capítulo 1

Modelo Estándar de partículas elementales

El Modelo Estándar (ME) de las interacciones electrodébiles fue propuesto por Glashow, Weinberg y Salam (GWS) [1] para fermiones. Hasta el presente es la mejor formulación que unifica las interacciones electromagnética y débil, es internamente consistente y está de acuerdo con todos los datos experimentales que involucran fenómenos de origen electrodébil. Para energías pequeñas, comparadas con la escala electrodébil, el ME reproduce la electrodinámica cuántica (QED) y el modelo de Fermi, modelos que describen adecuadamente las interacciones electromagnética y débil a bajas energías. El ME contiene el número mínimo de grados de libertad necesarios para describir correctamente todos los experimentos conocidos [2] [3]. Es una teoría cuántica de campos consistente, renormalizable y libre de anomalías. Dado un conjunto finito de parámetros de entrada, el ME permite calcular correcciones cuánticas de cantidades medibles que pueden ser predichas orden a orden en teoría de perturbaciones [3].

Los experimentos fijan el número exacto de partículas que debe contener el ME, por lo que ésta teoría establece la existencia de solo dos clases de fermiones elementales: leptones y quarks; tres leptones cargados: electrón (e), muón (μ) y tau (τ), y tres sin carga: neutrino electrónico (ν_e), neutrino muónico (ν_μ) y neutrino taónico (ν_τ). Adicionalmente el ME establece la existencia de tres pares de quarks: up/down (u, d), charm/strange (c, s) y top/bottom (t, b).

En la tabla 1.1 se clasifican los fermiones del ME. En la tabla 1.2 [4] se presentan la jerarquía de masas de las partículas del ME.

LEPTONES	<i>Leptones negativos</i>	e	μ	τ
	<i>Neutrinos</i>	ν_e	ν_μ	ν_τ
QUARKS	<i>Quarks tipo up</i>	u	c	t
	<i>Quarks tipo down</i>	d	s	b

Tabla 1.1 Contenido de fermiones de espín 1/2 del ME.

Las partículas establecidas por el ME que componen la materia tienen propiedades que las hacen susceptibles a las interacciones fundamentales:

- Cada quark puede llevar tres cargas de color: roja, verde o azul, permitiéndoles participar en interacciones fuertes.
- Los quarks tipo up llevan una carga eléctrica de $+2/3$, y los tipo down una de $-1/3$, permitiéndoles participar en interacciones electromagnéticas.
- Los leptones no llevan carga de color - son neutros en este sentido, evitándoles que participen en interacciones fuertes.
- Los leptones cargados llevan una carga eléctrica de -1 , permitiéndoles participar en interacciones electromagnéticas.
- Los neutrinos no llevan carga eléctrica, evitándoles que participen en interacciones electromagnéticas.
- En el contexto del ME la masa de los neutrinos es cero, pero de experimentos de oscilación de neutrinos se sabe que no es así.
- Los quarks y los leptones izquierdos llevan varias cargas de sabor, incluyendo el isospin débil, permitiéndoles interactuar así recíprocamente vía la interacción débil.
- A cada partícula le corresponde una antipartícula con las mismas propiedades intrínsecas de la partícula exceptuando la carga, ya que es opuesta.

Primera generación	Segunda generación	Tercera generación	$\frac{Q}{ e }$
<i>electrón</i> e $m_e = 0,51099892$ $\pm 0,00000004$	<i>muón</i> μ $m_\mu = 105,658369$ $\pm 0,000009$	<i>tau</i> τ $m_\tau = 1776,99^{+0,99}_{-0,26}$	-1
<i>neutrino - e</i> ν_e $m_{\nu_e} = 0$	<i>neutrino - μ</i> ν_μ $m_{\nu_\mu} = 0$	<i>neutrino - τ</i> ν_τ $m_{\nu_\tau} = 0$	0
<i>up</i> u $m_u = 1,5 - 3,0$	<i>charm</i> c $m_c = 1,25 \pm 0,99^*$	<i>top</i> t $m_t = 174,2 \pm 3,3^*$	$\frac{2}{3}$
<i>down</i> d $m_d = 3 - 7$	<i>strange</i> s $m_s = 95 \pm 25$	<i>bottom</i> b $m_b = 4,20 \pm 0,07^*$	$-\frac{1}{3}$

Tabla 1.2 Partículas elementales del ME. Las unidades de masa utilizadas son MeV/c^2 y (*) GeV/c^2 . La carga eléctrica aparece comparada con la carga fundamental.

Los leptones y los quarks de cada uno de los tipos de carga forman diferentes conjuntos denominados generaciones. Cada generación es una copia más masiva de la generación previa. Las partículas de la tercera y segunda generación son inestables y decaén

en partículas de la primera generación, las cuales componen la materia ordinaria. Las partículas correspondientes entre cada familia son idénticas la una a la otra, a excepción de su masa y de su carga de sabor.

Interacción	Grupo de gauge	Bosón	Símbolo	Fuerza relativa
Electromagnética	$U(1)$	Fotón	A	$\alpha_{em} = \frac{1}{137}$
Débil	$SU(2)$	Bosones intermedios	W^\pm, Z^0	$\alpha_{débil} = 1,02 \times 10^{-5}$
Fuerte	$SU(3)$	8 Gluones	g	$\alpha_s(M_Z) = 0,121$

Tabla 1.3 Interacciones presentes en el ME. α permiten comparar la intensidad de las interacciones.

La interacción entre las partículas del ME se puede interpretar considerando el intercambio de una partícula portadora de la interacción - bosón mediador. El ME establece solo la existencia de tres clases de bosones mediadores: gluones, bosones vectoriales y fotón, partículas portadoras de la interacción fuerte, débil y electromagnética respectivamente. En la tabla 1.3 se describen de forma general las interacciones presentes entre las partículas establecidas por el ME.

El ME se construye proponiendo un lagrangiana invariante bajo transformaciones locales del grupo $SU(2)_L \otimes U(1)_Y$, donde el subíndice L significa que estas transformaciones únicamente actúan sobre las componentes de quiralidad izquierda de los fermiones y Y representa el número cuántico de hipercarga, como se verá más adelante. Este tipo de lagrangiano prohíbe la existencia de términos de masa para los fermiones y los campos de gauge. Entonces el ME es quiral, ya que los fermiones derechos e izquierdos se transforman de acuerdo con diferentes representaciones del grupo, consecuentemente ya que tienen distinta carga no se puede construir un término de masa que sea invariante. Así, las masas deberán ser generadas a través del mecanismo de Rompimiento Espontáneo de Simetría (RES), vía los acoplamientos de Yukawa, introduciendo un doblete de campos escalares Φ , cuyo valor esperado en el vacío es diferente de cero. Al introducir la interacción de este doblete con las partículas fermiónicas y los campos de gauge, los fermiones y los bosones adquieren masa después del RES, quedando como reducto el *bosón de Higgs*, partícula cuya masa es un parámetro libre y que hasta la fecha no se ha podido detectar [2].

El ME explica satisfactoriamente el decaimiento β en los procesos $\mu \rightarrow e\nu_\mu\bar{\nu}_e$ y $n \rightarrow pe\bar{\nu}_e$, predice la existencia de las corrientes neutras en la dispersión de neutrinos y la existencia del quark charm (necesario para explicar la ausencia de corrientes neutras que cambien el sabor a nivel árbol, mecanismo GIM), entre otros fenómenos. En ese sentido una de las dificultades más importantes del ME es el origen de las masas y de las matrices de mezcla entre los fermiones, tanto en el sector de los quarks como en el de los leptones [2].

1.1. El principio de gauge y la invarianza de gauge local

Salan y Ward [5], formularon el principio de gauge como la base para construir la teoría cuántica de campos interactuantes:

"Nuestro postulado básico es que sería posible generar términos de interacción fuerte, débil y electromagnética haciendo transformaciones de gauge locales de los términos de energía cinética en el lagrangiano libre para todas las partículas"[5].

Cualquier fermión representado por $\Psi = \Psi(x)$ cuyo lagrangiano cumple con el principio de mínima acción,

$$\mathcal{L}_{libre} = \bar{\Psi} (i\gamma^\mu \partial_\mu - m) \Psi, \quad (1.1)$$

tiene una ecuación de movimiento que se obtiene a partir de la ecuación de Euler-Lagrange [6], con $\bar{\Psi} = \Psi^\dagger \gamma^0$. En electrodinámica clásica, para considerar la interacción de la carga del fermión con un campo externo, representado por el potencial A_μ , el momentum se cambia por el momentum canónico $p_\mu \longrightarrow P_\mu \equiv p_\mu + qA_\mu$, en donde q representa la constante de acoplamiento de la partícula con el campo. Esta transformación se denomina transformación de calibre o gauge, ya que se ha introducido un campo, una interacción. Como el operador mecánico cuántico del momentum es $p_\mu = -i\hbar\partial_\mu$, para incluir la interacción de la partícula con un campo la derivada se cambia por la derivada covariante $\partial_\mu \longrightarrow D_\mu \equiv \partial_\mu - iqA_\mu$. Entonces se ha introducido un campo de gauge a través de un acoplamiento mínimo: $\mathcal{L} = \bar{\Psi} (i\gamma^\mu D_\mu - m) \Psi = \bar{\Psi} (i\gamma^\mu \partial_\mu - m) \Psi - qA_\mu \bar{\Psi} \gamma^\mu \Psi$

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{libre} - J^\mu A_\mu, \quad (1.2)$$

donde $J^\mu = q\bar{\Psi}\gamma^\mu\Psi$, representa la densidad de corriente debida al flujo de carga.

En la electrodinámica la invarianza de gauge resulta de escoger muchos potenciales que describen el mismo campo electromagnético. Se parte del lagrangiano libre de la partícula. Se exige que el lagrangiano o más precisamente la acción, sea invariante bajo cambios de fase¹ dependientes de la posición, i.e. locales $e^{iC(x)}$. Al exigir esta invarianza se debe introducir un campo vectorial A que transforma de forma particular, $A \longrightarrow A^\dagger \partial_\nu C(x)$, de forma tal que el lagrangiano total sea invariante. La forma que transforma A es exáctamente la transformación gauge de la electrodinámica clásica.

Muchos cuadri-potenciales diferentes producen los mismos campos electromagnéticos, y describen la misma física, manifestación de la invarianza de gauge.

Como consecuencia la corriente electromagnética se conserva y cada componente del potencial vectorial se identifica con el campo fotónico. Una vez se ha introducido su término cinético, el cual satisface las ecuaciones de Maxwell en el vacío, se satisface una ecuación de Klein-Gordon para un campo escalar. Existe entonces una relación entre la invarianza de gauge, la conservación de la corriente y los campos vectoriales sin masa. Si la acción es invariante bajo algún grupo de transformaciones (bajo alguna simetría), entonces existen una o más cantidades conservadas (constantes de movimiento) que

¹En el caso de la QED, para otras simetrías se exige otra transformación unitaria.

están asociadas a estas transformaciones, *teorema de Noether*. La simetría asociada a la ley de conservación de la carga es la transformación de cambio de fase.

En la electrodinámica cuántica, *QED*, la existencia y algunas de las propiedades del campo de gauge, el fotón, vienen de un principio de invarianza bajo transformaciones de gauge locales del grupo $U(1)$.

\mathcal{L}_{Dirac} es invariante bajo un cambio de fase global, $\Psi \longrightarrow e^{iq\alpha}\Psi$, pero no lo es bajo un cambio de fase local, $\Psi \longrightarrow e^{iq\alpha(x)}\Psi$. Como aparece un término adicional en el lagrangiano

$$\mathcal{L}_D = \bar{\Psi} (i\gamma^\mu D_\mu - m) \Psi - q\bar{\Psi}\gamma^\mu\Psi\partial_\mu\alpha(x),$$

en donde $\alpha(x)$ es una función arbitraria de las coordenadas, el potencial A_μ se puede calibrar de la forma

$$A_\mu \longrightarrow A_\mu - \partial_\mu\alpha(x),$$

para así eliminarlo. De esta forma el potencial y el lagrangiano se hacen invariantes bajo un cambio de fase local, por lo que el campo representado por el potencial A_μ se denomina *campo de gauge*. El acoplamiento entre Ψ y el campo de gauge surge de forma natural cuando se requiere la invarianza bajo transformaciones de gauge locales de los términos de energía cinética en el lagrangiano de fermión libre.

Para conservar la probabilidad -número de fermiones- el operador de transformación de cambio de fase, $U = e^{iq\alpha(x)}$, debe ser unitario. En consecuencia $\alpha(x)$ debe ser un operador hermítico.

Se puede obtener la representación de un grupo de Lie a través del operador de cambio de fase U , relacionando la constante de acoplamiento g y los generadores del grupo T_a , por medio de $q_a = gT_a$. La combinación lineal de los generadores, $[T_a, T_b] = if_{abc}T^c$, representa el algebra de Lie del grupo.

Para el campo electromagnético el tensor de campo $F_{\mu\nu}$ se define como:

$$iq_a F_{\mu\nu}^a \equiv [D_\nu, D_\mu], \quad (1.3)$$

definición que permite desarrollar teorías de Yang-Mills [7] (teorías de campos de gauge no abelianas). Sustituyendo la derivada covariante y el conmutador de los generadores de grupo, se obtiene

$$F_{\mu\nu}^a = \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a + gf_{bc}^a A_\mu^b A_\nu^c. \quad (1.4)$$

Con el tensor de campo (1.4), se construye el lagrangiano de Yang-Mills para el campo electromagnético²

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}, \quad (1.5)$$

que junto con $\mathcal{L} = \bar{\psi} (i\gamma^\mu\partial_\mu - m) \psi - qA_\mu\bar{\psi}\gamma^\mu\psi$, describe la electrodinámica cuántica.

²La interacción electromagnética está descrita por un grupo abeliano, lo que implica que el último término en el tensor de curvatura, $F_{\mu\nu}^a$, no aparece, lo que indica que los fotones no interactúan entre ellos.

1.2. Interacción fuerte

Los gluones median la interacción fuerte que mantiene unidos a los quarks para formar los hadrones (bariones constituidos por tres quarks y mesones por un quark y un antiquark), fermiones que exhiben la *libertad asintótica*, es decir la tendencia a comportarse como partículas libres para pequeñas distancias o grandes energías; en tanto que a distancias grandes en comparación con las distancias en las cuales es válida la interacción de tipo coulombiano, la interacción crece indefinidamente, en consecuencia los quarks están restringidos a una región muy pequeña ($\sim 10^{-15}m$), propiedad denominada *confinamiento* [8].

Los gluones son combinaciones de un par color/anticolor (el término *color*^{es} utilizado para denotar una característica cuántica intrínseca de la partícula) y en cada proceso de emisión o absorción pueden cambiar el color de un quark [8]. Continuamente los quarks de un hadrón cambian de color, pero debido a que los hadrones no tienen carga de color, este proceso no puede detectarse.

Para construir el modelo de la interacción fuerte se propone un lagrangiano invariante bajo transformaciones gauge locales del grupo $SU(3)_C$. El subíndice C indica que las transformaciones sólo actúan sobre las partículas con carga de color. En esta interacción se tienen 8 campos de gauge relacionados con los gluones G_μ^a ($a = 1, \dots, 8$). A cada G_μ^a se le asocian los generadores $T_a = \lambda_a/2$, en donde λ_a corresponden a las matrices de Gell-Mann. La derivada covariante está dada por

$$D'_\mu \equiv I\partial'_\mu - ig_s \frac{\lambda_a}{2} G_\mu^a,$$

I representa la matriz identidad. En analogía aplicando la definición (1.3), de $iq_a G_{\mu\nu}^a = [D_\nu, D_\mu]$ se obtiene el tensor de campo (1.4):

$$G_{\mu\nu}^a = \partial_\mu G_\nu^a - \partial_\nu G_\mu^a + g_s f_{abc} G_\mu^b G_\nu^c.$$

El lagrangiano de campo libre (1.5) es

$$\mathcal{L}_g = -\frac{1}{4} G_{\mu\nu}^a G_a^{\mu\nu}.$$

1.3. Interacción electrodébil

En el ME las interacciones electromagnética y débil se combinan en la interacción electrodébil. Las partículas portadoras de la interacción débil son los bosones de corto alcance W^+ y W^- , cargados eléctricamente, y Z^0 , bosón neutro, en tanto que la interacción electromagnética es mediada por el fotón (bosón neutro de largo alcance).

Para la interacción electrodébil se propone un lagrangiano invariante bajo transformaciones gauge locales del grupo $SU(2)_L \otimes U(1)_Y$. Esta interacción se representa por medio de 4 campos de gauge: W_μ^i ($i = 1, 2, 3$) y B_μ cuyos generadores asociados son $\tau_i = \sigma_i/2$ para $SU(2)_L$ y $y = IY/2$ para $U(1)_Y$. σ_i representa las matrices de Pauli. Las

constantes de acoplamiento de la carga de sabor con el campo electrodébil son $q_i = g_s \tau_i$, $q = g' y$. El algebra de Lie: $[\tau_i, \tau_j] = i\epsilon_{ijk} \tau^k$, $[\tau_i, y] = 0$, donde la constante de estructura del grupo $SU(2)$ está dada por el tensor de Levi-Civita. La derivada covariante está dada por:

$$D_\mu = I\partial_\mu - ig\frac{\sigma_i}{2}W_\mu^i - ig'I\frac{Y}{2}B_\mu, \quad (1.6)$$

aplicando la definición (1.3), se obtienen los tensores de campo, (1.4), $W_{\mu\nu}^i$ y $B_{\mu\nu}$:

$$\begin{aligned} W_{\mu\nu}^i &= \partial_\mu W_\nu^i - \partial_\nu W_\mu^i + g\epsilon_{ijk}W_\mu^j W_\nu^k, \\ B_{\mu\nu} &= \partial_\mu B_\nu - \partial_\nu B_\mu, \end{aligned}$$

en donde el tercer término de $B_{\mu\nu}$ es cero ya que el grupo $U(1)_Y$ es abeliano, por lo que su constante de estructura es cero.

El lagrangiano de los campos de gauge, (1.5), $W_{\mu\nu}^i$ y $B_{\mu\nu}$ tiene la forma

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}W_{\mu\nu}^i W_i^{\mu\nu} - \frac{1}{4}B_{\mu\nu}B^{\mu\nu}.$$

Combinaciones de las dos primeras componentes del campo de gauge $W_{\mu\nu}^i$: W_μ^1 y W_μ^2 , producen bosones vectoriales intermedios cargados W_μ^+ y W_μ^- :

$$W_\mu^\pm = \frac{1}{\sqrt{2}}(W_\mu^1 \mp iW_\mu^2). \quad (1.7)$$

Mezclando la tercera componente del campo de gauge $W_{\mu\nu}^i$, W_μ^3 , con el campo de gauge B_μ se obtiene el bosón vectorial intermedio sin carga, Z_μ^0 , y el bosón asociado con el campo electromagnético, A_μ^0 :

$$\begin{pmatrix} Z_\mu^0 \\ A_\mu^0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta_w & -\sin \theta_w \\ \sin \theta_w & \cos \theta_w \end{pmatrix} \begin{pmatrix} W_\mu^3 \\ B_\mu \end{pmatrix}, \quad (1.8)$$

en donde θ_w corresponde al ángulo de mezcla o ángulo de Weinberg, que en términos de las constantes de acoplamiento electrodébil está dado por:

$$\tan \theta_w = \frac{g'}{g}$$

y que permite obtener la cantidad conservada de la unificación de los campos debiles con el electromagnético, la carga del electrón

$$e = g \sin \theta_w = g' \cos \theta_w.$$

Sustituyendo (1.7) y (1.8) en la derivada covariante (1.6), se obtiene

$$D_\mu = I\partial_\mu - ieQA_\mu^0 - i\frac{g}{\sqrt{2}}T^+W_\mu^+ - i\frac{g}{\sqrt{2}}T^-W_\mu^- - i\frac{g}{\cos \theta_w}[T_3 - Q \sin^2 \theta_w]Z_\mu^0, \quad (1.9)$$

donde

$$Q = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} Y + 1 & 0 \\ 0 & Y - 1 \end{pmatrix}$$

y la hipercarga se ha relacionado con el operador carga eléctrica Q a través de la relación de Gell-Mann Nishijima [10]

$$Q = T_3 + \frac{1}{2}Y. \quad (1.10)$$

1.4. Contenido de fermiones del ME

En el ME cada fermión se representa por un espinor Ψ que se puede descomponer como $\Psi = \Psi_L + \Psi_R$, donde $\Psi_L = P_L \Psi$ y $\Psi_R = P_R \Psi$ representan los estados de quiralidad izquierda y de quiralidad derecha respectivamente y $P_L = (1 - \gamma^5)/2$ y $P_R = (1 + \gamma^5)/2$ representan los proyectores de la quiralidad.

Para que exista cancelación de anomalías los fermiones izquierdos deben estar en dobletes de $SU(2)_L$ y ya que según mediciones del ancho de decaimiento del Z se pudo determinar que el número de neutrinos izquierdos es igual a 3, solamente pueden establecerse tres familias de fermiones. En la versión minimal del ME los neutrinos tienen masa cero³.

El contenido de fermiones del ME no está fijado por un principio de simetría pero experimentalmente se ha evidenciado la existencia de tres generaciones: leptones cargados $e_i \equiv (e, \mu, \tau)$, leptones neutros $\nu_i \equiv (\nu_e, \nu_\mu, \nu_\tau)$, quarks tipo up $u_i \equiv (u, c, t)$ y quarks tipo down $d_i \equiv (d, s, b)$, donde $i = 1, 2, 3$ representa el índice de generación. Los estados de quiralidad izquierda de los fermiones se representan por medio de un doblete (L_{L_i} o Q_{L_i}) y los de quiralidad derecha por medio de un singlete (E_{R_i} , U_{R_i} o D_{R_i}) como sigue:

Componentes de quiralidad izquierda:

$$\begin{aligned} L_{L_i} &= \begin{pmatrix} e_{iL} \\ \nu_{iL} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} e_L \\ \nu_{eL} \end{pmatrix}^{-1} & \begin{pmatrix} \mu_L \\ \nu_{\mu L} \end{pmatrix}^{-1} & \begin{pmatrix} \tau_L \\ \nu_{\tau L} \end{pmatrix}^{-1} \\ Q_{L_i} &= \begin{pmatrix} u_{iL} \\ d_{iL} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} u_L \\ d_L \end{pmatrix}^{1/3} & \begin{pmatrix} c_L \\ s_L \end{pmatrix}^{1/3} & \begin{pmatrix} t_L \\ b_L \end{pmatrix}^{1/3} \end{aligned}$$

Componentes de quiralidad derecha:

$$\begin{aligned} E_{R_i} &= e_{iR} & e_R^{-1}, \mu_R^{-1}, \tau_R^{-1} \\ U_{R_i} = u_{iR} & \begin{pmatrix} u_R^{4/3} \\ c_R^{4/3} \\ t_R^{4/3} \end{pmatrix} & D_{R_i} = d_{iR} & \begin{pmatrix} d_R^{-2/3} \\ s_R^{-2/3} \\ b_R^{-2/3} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Las derivadas covariantes (1.9) que actúan sobre las componentes quirales de los campos leptónicos son:

$$D_{L\mu} = I\partial_\mu - ieQA_\mu^0 - i\frac{g}{\sqrt{2}}T^+W_\mu^+ - i\frac{g}{\sqrt{2}}T^-W_\mu^- - i\frac{g}{\cos\theta_w}[T_3 - Q\sin^2\theta_w]Z_\mu^0, \quad (1.11)$$

$$D_{R\mu} = \partial_\mu - ieQA_\mu^0 - i\frac{g}{\cos\theta_w}Q\sin^2\theta_wZ_\mu^0. \quad (1.12)$$

³En el ME no se introducen neutrinos derechos ya que no se han detectado experimentalmente.

El lagrangiano que describe la interacción de los leptones con los campos débil y electromagnético, (1.2) es:

$$\mathcal{L}_l = i\overline{L}_{L_i}\gamma^\mu D_{L_\mu}L_{L_i} + i\overline{E}_{R_i}\gamma^\mu D_{R_\mu}E_{R_i}. \quad (1.13)$$

El término de masa $m\overline{\Psi}\Psi = m(\overline{\Psi}_R\Psi_L + \overline{\Psi}_L\Psi_R)$ se suprime ya que no es invariante, debido a que las componentes quirales de los campos fermiónicos, Ψ_R y Ψ_L , tienen diferentes transformaciones de gauge. Sustituyendo (1.11) y (1.12), \overline{L}_{L_i} , L_{L_i} , \overline{E}_{R_i} y E_{R_i} en (1.13) se obtiene:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_l = & i\overline{\nu}_i\gamma^\mu\partial_\mu P_L\nu_i + i\overline{e}_i\gamma^\mu\partial_\mu e_i - e\overline{e}_i\gamma^\mu e_i A_\mu^0 \\ & + \frac{g}{2\cos\theta_w}\overline{\nu}_i\gamma^\mu P_L\nu_i Z_\mu^0 + \frac{g}{\sqrt{2}}\overline{\nu}_i\gamma^\mu P_L e_i W_\mu^+ + \frac{g}{\sqrt{2}}\overline{e}_i\gamma^\mu P_L\nu_i W_\mu^- \\ & + \frac{g}{2\cos\theta_w}\overline{e}_i\gamma^\mu [R_e P_R + L_e P_L] e_i Z_\mu^0, \end{aligned} \quad (1.14)$$

con $R_e = 2\sin^2\theta_w$ y $L_e = 2\sin^2\theta_w - 1$.

Cada uno de los términos del lagrangiano (1.14) corresponde a las interacciones de gauge para los leptones que se representan mediante diagramas de Feynman.

El lagrangiano electrodébil del sector de los quarks está dado por:

$$\mathcal{L}_q = i\overline{Q}_{L_i}\gamma^\mu D_{L_\mu}Q_{L_i} + i\overline{U}_{R_i}\gamma^\mu D_{R_\mu}U_{R_i} + i\overline{D}_{R_i}\gamma^\mu D_{R_\mu}D_{R_i}, \quad (1.15)$$

sustituyendo (1.11) y (1.12), \overline{Q}_{L_i} , Q_{L_i} , \overline{U}_{R_i} , U_{R_i} , \overline{D}_{R_i} y D_{R_i} en (1.15) se obtiene:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_q = & i\overline{u}_i\gamma^\mu\partial_\mu u_i + i\overline{d}_j\gamma^\mu\partial_\mu d_j + \frac{2e}{3}\overline{u}_i\gamma^\mu u_i A_\mu^0 - \frac{e}{3}\overline{d}_j\gamma^\mu d_j A_\mu^0 \\ & + \frac{g}{\sqrt{2}}V_{ij}\overline{u}_i\gamma^\mu P_L d_j W_\mu^+ + \frac{g}{\sqrt{2}}V_{ij}^*\overline{d}_j\gamma^\mu P_L u_i W_\mu^- \\ & + \frac{g}{\cos\theta_w}\overline{u}_i\gamma^\mu \left[\frac{1}{2}P_L - \frac{2}{3}\sin^2\theta_w \right] u_i Z_\mu^0 \\ & + \frac{g}{\cos\theta_w}\overline{d}_j\gamma^\mu \left[-\frac{1}{2}P_L + \frac{1}{3}\sin^2\theta_w \right] d_j Z_\mu^0. \end{aligned} \quad (1.16)$$

Cada uno de los términos del lagrangiano (1.16) corresponde a las interacciones de gauge para los quarks que se representan mediante diagramas de Feynman.

En el ME el campo electromagnético sólo interacciona con leptones cargados y el boson vectorial intermedio Z_μ^0 no produce cambio de sabor, en tanto que los bosones vectoriales intermedios cargados W_μ^\pm si pueden producir cambios de sabor.

1.5. Rompimiento espontáneo de simetría

El lagrangiano y el vacío (el estado base de la teoría) del ME son invariantes, es decir sus simetrías dan origen a leyes de conservación exactas. Cuando las leyes de

conservación no son exactas, al lagrangiano se le agrega un término, un potencial de auto-interacción de un campo escalar que rompe la simetría.

En las derivadas covariantes (1.11) y (1.12) y en los lagrangianos (1.13) y (1.15) no se presenta un término de masa, $m\bar{\Psi}\Psi$, ya que violaría la invariancia de gauge bajo una transformación del grupo $SU(2)_L$

$$\begin{aligned} m \left(\bar{\Psi}'_L \Psi'_R + \bar{\Psi}'_R \Psi'_L \right) &= m \left(\bar{\Psi}_L U^\dagger I \Psi_R + \bar{\Psi}_R I U^\dagger \Psi_L \right) \\ &\neq m \left(\bar{\Psi}_L \Psi_R + \bar{\Psi}_R \Psi_L \right). \end{aligned}$$

Para dotar de masa a las partículas y a los bosones del ME se hace uso del mecanismo de Higgs [11], que consiste en introducir un campo de Higgs, Φ , tabla 1.4, como un doblete de campos escalares complejos del grupo $SU(2)_L$

$$\Phi = \begin{pmatrix} \phi^+ \\ \phi^0 \end{pmatrix}.$$

La primera componente, $\phi^+ = \phi^+(x)$, corresponde a un campo escalar cargado y la segunda componente, $\phi^0 = \phi^0(x)$, a un campo neutro compuesto de una parte imaginaria, $\eta^0 = \eta^0(x)$, y una parte real, que adquiere un Valor Esperado en el Vacío (VEV) por lo que suele escribirse en dos partes: v y $h^0 = h^0(x)$, que representa las fluctuaciones alrededor del vacío.

Componentes del campo	T_3	Y	Q
$\Phi = \begin{pmatrix} \phi^+ \\ \frac{h^0 + v + i\eta^0}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

Tabla 1.4 Términos que aparecen en la derivada covariante para el campo de Higgs, Φ .

El modelo [12] consiste en proponer un lagrangiano, que consta de un término cinético y del potencial de Higgs, para describir los campos escalares:

$$\mathcal{L}_G = (\partial_\mu \Phi)^\dagger (\partial^\mu \Phi) - V(\Phi^\dagger \Phi). \quad (1.17)$$

Φ es un campo escalar real auto-interactuante y su potencial de auto-interacción renormalizable más general está definido por:

$$V(\Phi^\dagger \Phi) = \mu^2 \Phi^\dagger \Phi + \lambda (\Phi^\dagger \Phi)^2 \equiv \lambda \left[\Phi^\dagger \Phi + \frac{\mu^2}{2\lambda} \right]^2.$$

Suponiendo que el término cinético del lagrangiano no contribuye a la energía del estado base: $\mathcal{L}_G = -V(\Phi^\dagger \Phi) = -\left[\mu^2 \Phi^\dagger \Phi + \lambda (\Phi^\dagger \Phi)^2 \right]$. Con el fin de asegurar la estabilidad de la teoría se asume que los valores grandes de Φ son amortiguados a través del parámetro $\lambda > 0$, permitiendo la cota inferior del potencial y su estado fundamental. Si $\mu^2 > 0$, se tiene la ecuación de Klein-Gordon, $(\square + \mu^2)\Phi = 0$, por lo que $\mu = m$ se interpreta como la masa de Φ . Si $\mu^2 < 0$, $(\square - \mu^2)\Phi = 0$, μ no se puede interpretar como la masa del campo. En la figura 1.1 se representa el potencial de Higgs, $V(\Phi^\dagger \Phi)$, para: (a) $\mu^2 > 0$ y (b) $\mu^2 < 0$, ambos casos con $\lambda > 0$.

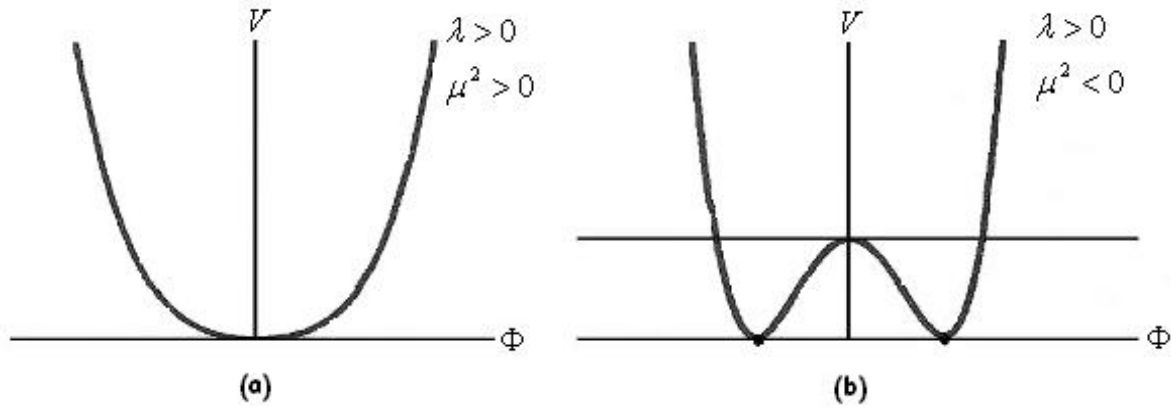


Figura 1.1: Potencial escalar para (a) $\mu^2 > 0$ y para (b) $\mu^2 < 0$.

Minimizando el potencial se obtiene el estado fundamental, el estado de más baja energía,

$$\delta V = 2\lambda \left(\Phi^\dagger \Phi + \frac{\mu^2}{2\lambda} \right) \Phi^\dagger (\delta\Phi) + 2\lambda \left(\Phi^\dagger \Phi + \frac{\mu^2}{2\lambda} \right) (\delta\Phi^\dagger) \Phi = 0.$$

El estado fundamental está dado por $\langle 0 | \Phi^\dagger \Phi | 0 \rangle = \langle \Phi^\dagger \Phi \rangle_0 = -\mu^2/2\lambda$. El Valor esperado del Vacío (VEV) $\langle \Phi \rangle_0$ es diferente de cero, el estado fundamental es degenerado, es decir se puede escoger entre muchos estados posibles con la misma energía. Ya que la teoría cuántica de campos exige que el estado fundamental sea único, al escoger uno de estos estados como el estado base se rompe la simetría, por lo que se dice que espontáneamente se ha roto.

La simetría no rota, o remanente, depende del estado base escogido, así: para $\mu^2 < 0$ se obtiene $\langle |\phi^0|^2 \rangle_0 = -\mu^2/\lambda \equiv v^2$, infinitos estados de vacío. Estos resultados se pueden expresar como

$$\langle \Phi \rangle_0 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix}.$$

Cuando los generadores del grupo $SU(2)_L \otimes U(1)_Y$, (τ_i, y) , actúan sobre el estado fundamental, $\langle \Phi \rangle_0 \neq 0$; en cambio el vacío es invariante bajo transformaciones del grupo $U(1)$ generado por el operador Q ; por esto se dice que la simetría se rompe según el esquema $SU(2)_L \otimes U(1)_Y \rightarrow U(1)_Q$. Entonces para el ME se escoge el estado fundamental de tal forma que la simetría remanente corresponda al grupo de gauge de la electrodinámica, $U(1)_Q$, en el que el generador no roto corresponde a la carga electromagnética, definida por la relación (1.10).

El lagrangiano de la teoría es invariante bajo una transformación de simetría continua cuando el estado fundamental de la teoría también lo es. Así el término de RES hace referencia a un cambio en la simetría en el lagrangiano de la teoría. Posterior al proceso de ruptura el lagrangiano pierde simetría asociada a sí mismo, en tanto que el potencial de Higgs queda con una simetría remanente denominada "simetría de custodia".

Reemplazando Φ en el lagrangiano (1.17), se observa que este toma la forma

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_G = & (\partial_\mu \phi^-) (\partial^\mu \phi^+) + \frac{1}{2} (\partial_\mu h^0) (\partial^\mu h^0) + \frac{1}{2} (\partial_\mu \eta^0) (\partial^\mu \eta^0) \\ & - \lambda \left[(\phi^+ \phi^-)^2 + \left(\frac{h^{02} + \eta^{02}}{2} \right)^2 + \phi^+ \phi^- (h^{02} + \eta^{02}) + v^2 h^{02} \right. \\ & \left. + 2vh^0 \left(\phi^+ \phi^- + \frac{h^{02} + \eta^{02}}{2} \right) \right], \end{aligned} \quad (1.18)$$

sin considerar correcciones radiativas, a nivel árbol, con $v^2 = -\mu^2/\lambda$, $\delta T = 0$. En (1.18) los términos cuadráticos corresponden a términos de masa y los de orden superior a interacciones; como consecuencia del RES h^0 adquiere masa, aparecen 3 bosones de Goldstone (ϕ^+ , ϕ^- y η^0), asociados con los tres generadores de simetría rotos.

1.6. Mecanismo de Higgs

Ocurre cuando se introduce la invariancia de \mathcal{L}_G a las transformaciones de gauge locales y como consecuencia los grados de libertad de los 3 bosones escalares desaparecen y reaparecen como grados de libertad longitudinales de los campos de gauge dotandolos de masa. Se tienen 3 bosones vectoriales con masa (W_μ^\pm , Z_μ) con 2 estados de polarización, 1 grado de libertad longitudinal que evidencia la masa no nula de las partículas y 1 grado de libertad que corresponde a la polarización del bosón vectorial sin masa, el fotón; en total 12 grados de libertad.

El Lagrangiano de Higgs, \mathcal{L}_H , se obtiene haciendo interactuar dicho campo con los campos de gauge debiles y electromagnético, utilizando el principio de gauge antes descrito:

$$\mathcal{L}_H = (D_{L\mu} \Phi) (D_L^\mu \Phi) - \lambda \left[\Phi^\dagger \Phi + \frac{\mu^2}{2\lambda} \right]^2, \quad (1.19)$$

el primer término corresponde al lagrangiano cinético de los campos escalares, con la derivada covariante dada por (1.6). Reemplazando el doblete de Higgs por su VEV, $\Phi \rightarrow \langle \Phi_0 \rangle$, se obtienen los término de masa:

$$\mathcal{L}_{masa} = M_W^2 W_\mu^+ W^{-\mu} + \frac{1}{2} M_Z^2 Z_\mu^0 Z^{0\mu} + M_A^2 A_\mu^0 A^{0\mu},$$

donde

$$M_W = \frac{1}{2} g v, \quad M_Z = \frac{g v}{2 \cos \theta_w} \quad \text{y} \quad M_A^2 = 0. \quad (1.20)$$

La constante de acoplamiento g se puede establecer a partir de fenomenología a bajas energías mediante: $g^2/4 = \sqrt{2} G_F M_W^2$, por lo que de (1.20) $v^2 = 1/\sqrt{2} G_F$ y empleando los resultados experimentales reportados en [11], $M_W = 80,403 \pm 0,029 \text{ GeV}$ y $G_F = 1,16637(1) \times 10^{-5} \text{ GeV}^{-2}$, se obtiene $v \simeq 246,22 \text{ GeV}$, denominada escala de energía electrodébil, por lo que $\langle \Phi_0 \rangle = v/\sqrt{2} = 174,10 \text{ GeV}$. El mecanismo de Higgs implica la existencia de una nueva partícula, denominada el bosón de Higgs, cuya masa M_h depende del parámetro λ que tiene un valor desconocido.

En general, adquirieron masa los bosones cargados, W_μ^\pm , y el bosón neutro, Z_μ^0 , de la interacción débil, en tanto que el bosón A_μ^0 , acoplado al fotón, permanece sin masa. Otra consecuencia del RES es la aparición de 3 bosones de Goldstone (bosones sin masa), grados de libertad que desaparecen al hacer la sustitución minimal $\partial_\mu \longrightarrow D_\mu$ y que reaparecen como grados de libertad longitudinales en los campos de gauge, dotándolos así de masa. Este mecanismo se denomina el *Mecanismo de Higgs* [14].

1.7. Masa de los fermiones

El lagrangino de Yukawa representa la interacción entre los campos fermiónicos y el campo de Higgs:

$$-\mathcal{L}_Y = \overline{L_{L_i}^0} \eta_{ij}^E \Phi E_{R_j}^0 + \overline{Q_{L_i}^0} \eta_{ij}^U \tilde{\Phi} U_{R_j}^0 + \overline{Q_{L_i}^0} \eta_{ij}^D \Phi D_{R_j}^0 + h.c.,$$

donde $\tilde{\Phi} = i\tau_2 \Phi^*$, el superíndice 0 indica que los campos todavía no son auto-estados de masa y los índices $i, j = 1, 2, 3$ corresponden a los índices de cada generación. A cada doblete fermiónico se le asocian tres matrices adimensionales complejas 3×3 no-diagonales, η^X ($X = E, U, D$), que corresponden a las constantes de acoplamiento tipo Yukawa entre el campo fermiónico y el campo de Higgs. La presencia de η^X indica que pueden existir mezclas entre los fermiones, entonces es necesario diagonalizar las matrices para encontrar los autoestados de masa. Las masas de los fermiones surgen cuando se rompe la simetría. Así, después de hallar los autoestados de masa se escribe el lagrangiano original en términos de los nuevos campos:

$$\begin{aligned} -\mathcal{L}_Y &= \overline{e_{iL}^0} M_{ij}^E e_{jR}^0 + \overline{u_{iL}^0} M_{ij}^U u_{jR}^0 + \overline{d_{iL}^0} M_{ij}^D d_{jR}^0 \\ &+ \frac{1}{v} \left[\overline{e_{iL}^0} M_{ij}^E e_{jR}^0 + \overline{u_{iL}^0} M_{ij}^U u_{jR}^0 + \overline{d_{iL}^0} M_{ij}^D d_{jR}^0 \right] (h^0 + i\eta^0) \\ &+ \frac{\sqrt{2}}{v} \left[\overline{\nu_{iL}^0} M_{ij}^E \phi^+ e_{jR}^0 - \overline{d_{iL}^0} M_{ij}^U \phi^- u_{jR}^0 + \overline{u_{iL}^0} M_{ij}^D \phi^+ d_{jR}^0 \right] + h.c. \end{aligned}$$

Los elementos de la matriz de masa se definen como $M_{ij}^X = \eta_{ij}^X v / \sqrt{2}$, lo que permite escribir \mathcal{L}_Y en forma matricial como:

$$\begin{aligned} -\mathcal{L}_Y &= \overline{E_L^0} M^E E_R^0 + \overline{U_L^0} M^U U_R^0 + \overline{D_L^0} M^D D_R^0 \\ &+ \left[\overline{E_L^0} M^E E_R^0 + \overline{D_L^0} M^D D_R^0 \right] \frac{(h^0 + i\eta^0)}{v} + \overline{U_L^0} M^U U_R^0 \frac{(h^0 - i\eta^0)}{v} \\ &+ \frac{\sqrt{2}}{v} \left[\overline{N_L^0} M^E E_R^0 \phi^+ + \overline{U_L^0} M^D D_R^0 \phi^+ - \overline{D_L^0} M^U U_R^0 \phi^- \right] + h.c. \end{aligned}$$

Mediante las transformaciones unitarias $S_L, T_{L(R)}, V_{L(R)}$ y $W_{L(R)}$ los campos de \mathcal{L}_Y se convierten en autoestados de masa:

$$E_{L(R)} = T_{L(R)} E_{L(R)}^0, \quad U_{L(R)} = V_{L(R)} U_{L(R)}^0, \quad D_{L(R)} = W_{L(R)} D_{L(R)}^0 \quad \text{y} \quad N_L = S_L N_L^0,$$

y se diagonaliza la matriz de masa

$$M_E^{diag} = T_L M^E T_R^\dagger, \quad M_U^{diag} = V_L M^U V_R^\dagger \quad \text{y} \quad M_D^{diag} = W_L M^D W_R^\dagger.$$

Sustituyendo la matriz de mezcla de Cabibbo-Kobayashi-Maskawa CKM, $I = S_L T_L^\dagger$ y $V = V_L W_L^\dagger$, se aprecia que no existe mezcla en el sector leptónico, debido al acople Yukawa entre el Higgs y los leptones, además de que la mezcla en el sector de los quarks implica que los acoples Yukawa no actúan de igual manera sobre todos los quarks, en vez de esto se presenta una combinación entre ellos.

De forma explícita \mathcal{L}_Y en estados de masa tiene la forma:

$$\begin{aligned} -\mathcal{L}_Y = & m_{ei} \bar{e}_i e_i + m_{ui} \bar{u}_i u_i + m_{di} \bar{d}_i d_i \\ & + \frac{g}{2M_W} (m_{ei} \bar{e}_i e_i + m_{ui} \bar{u}_i u_i + m_{di} \bar{d}_i d_i) h^0 \\ & + \frac{ig}{2M_W} (m_{ei} \bar{e}_i \gamma^5 e_i - m_{ui} \bar{u}_i \gamma^5 u_i + m_{di} \bar{d}_i \gamma^5 d_i) \eta^0 \\ & + \frac{gm_{ei}}{\sqrt{2}M_W} \bar{\nu}_i P_R e_i \phi^+ + \frac{g}{\sqrt{2}M_W} \bar{u}_i [m_{d_j} P_R - m_{u_i} P_L] V_{ij} d_j \phi^+ \\ & + \frac{gm_{ei}}{\sqrt{2}M_W} \bar{e}_i P_L \nu_i \phi^- + \frac{g}{\sqrt{2}M_W} \bar{d}_i [m_{d_j} P_L - m_{u_i} P_R] V_{ij}^* u_j \phi^-. \end{aligned}$$

Se ha obtenido así: un bosón escalar masivo, 3 bosones vectoriales masivos y uno sin masa, quarks y leptones con masa, exceptuando los neutrinos.

Para la descripción de los siguientes modelos, cabe resaltar que en general los principios generales para construir teorías gauge [9] son:

- Escoger el grupo de gauge G con N_G generadores.
- Agregar N_G campos vectoriales (bosones gauge) en una representación específica del grupo de gauge.
- Escoger la representación fundamental para los campos físicos, partículas elementales.
- Agregar campos escalares para darles masa a algunos bosones vectoriales.
- Definir la derivada covariante y escribir de la forma más general el lagrangiano, invariante bajo G , el cual acopla todos los campos.
- Correr los campos escalares de tal forma que el mínimo del potencial sea cero.
- Aplicar técnicas de la teoría de campo cuántico para verificar la renormalizabilidad y para postular predicciones.

Capítulo 2

Modelo con dos dobletes de Higgs (M2DH)

2.1. Formalismo general del modelo

En la teoría electrodébil $SU(2)_L \otimes U(1)_Y$, descrita en el capítulo anterior, surge un bosón de Higgs escalar, cuya masa corresponde a un parámetro libre aún no fijado por la teoría. Puesto que aún no se tiene información experimental relevante del sector de Higgs, es viable considerar una extensión más compleja del ME, como lo es el Modelo con Dos Dobletes de Higgs (M2DH) [15], en el cual se introduce una réplica del doblete de Higgs complejo de $SU(2)_L$ con los mismos número cuánticos

$$\Phi_1 = \begin{pmatrix} \phi_1^+ \\ \phi_1^0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \phi_1^+ \\ \frac{h_1^0 + v_1 + i\eta_1^0}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} ; \quad \Phi_2 = \begin{pmatrix} \phi_2^+ \\ \phi_2^0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \phi_2^+ \\ \frac{h_2^0 + v_2 + i\eta_2^0}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}. \quad (2.1)$$

El lagrangiano que induce el RES tiene la forma

$$\mathcal{L}_G = (D_\mu \Phi_1)^\dagger (D^\mu \Phi_1) + (D_\mu \Phi_2)^\dagger (D^\mu \Phi_2) - V(\Phi_1^\dagger \Phi_2). \quad (2.2)$$

El potencial de Higgs del M2DH, como en el caso del ME, no es único, determina la estructura del RES, las masas de los Higgs, sus correspondientes autoestados de masa y sus auto-interacciones. Cumpliendo estas condiciones el potencial más general, renormalizable e invariante bajo $SU(2)_L \otimes U(1)_Y$, se puede escribir en términos de una base de operadores hermíticos invariantes gauge [16] como sigue,

$$\begin{aligned} \hat{A} &\equiv \Phi_1^\dagger \Phi_1, \quad \hat{B} \equiv \Phi_2^\dagger \Phi_2, \\ \hat{C} &\equiv \frac{1}{2} (\Phi_1^\dagger \Phi_2 + \Phi_2^\dagger \Phi_1) = \text{Re}(\Phi_1^\dagger \Phi_2), \\ D &\equiv -\frac{i}{2} (\Phi_1^\dagger \Phi_2 - \Phi_2^\dagger \Phi_1) = \text{Im}(\Phi_1^\dagger \Phi_2), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
V(\Phi_1, \Phi_2) = & -\mu_1^2 \hat{A} - \mu_2^2 \hat{B} - \mu_3^2 \hat{C} - \mu_4^2 \hat{D} \\
& + \lambda_1 \hat{A}^2 + \lambda_2 \hat{B}^2 + \lambda_3 \hat{C}^2 + \lambda_4 \hat{D}^2 \\
& + \lambda_5 \hat{A}\hat{B} + \lambda_6 \hat{A}\hat{C} + \lambda_8 \hat{A}\hat{D} + \lambda_7 \hat{B}\hat{C} + \lambda_9 \hat{B}\hat{D} + \lambda_{10} \hat{C}\hat{D}.
\end{aligned} \tag{2.3}$$

(2.3) hace que (2.2) tenga una forma más compleja que la de (1.19) ya que se deben fijar 14 parámetros libres. Vértices de interacción independientes de la matriz de masas y de los VEV en (2.3) desaparecen asumiendo que dicho potencial es invariante bajo conjugación de carga, C (equivalente a la invariancia carga paridad, CP , puesto que todos los campos son escalares), entonces se reduce a

$$\begin{aligned}
V(\Phi_1, \Phi_2) = & -\mu_1^2 \hat{A} - \mu_2^2 \hat{B} - \mu_3^2 \hat{C} \\
& + \lambda_1 \hat{A}^2 + \lambda_2 \hat{B}^2 + \lambda_3 \hat{C}^2 + \lambda_4 \hat{D}^2 \\
& + \lambda_5 \hat{A}\hat{B} + \lambda_6 \hat{A}\hat{C} + \lambda_7 \hat{B}\hat{C}.
\end{aligned} \tag{2.4}$$

Si todos los λ_i , que corresponden a parámetros reales que surgen por hermiticidad, son no-negativos el mínimo del potencial es

$$\langle \Phi_1 \rangle_0 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ v_1 \end{pmatrix}, \quad \langle \Phi_2 \rangle_0 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ v_2 e^{i\varsigma} \end{pmatrix}, \tag{2.5}$$

el cual rompe la simetría según el esquema $SU(2)_L \otimes U(1)_Y \longrightarrow U(1)_Q$. Cabe anotar que el rango permitido de los parámetros λ_i , que conducen a (2.5), corresponde a la región del espacio de parámetros que conducen a términos cuadráticos en masa positivos para los bosones de Higgs físicos, $V(0,0) > 0$. Con respecto al término de fase $e^{i\varsigma}$, este puede ser eliminado redefiniendo los campos de tal forma que no se afecte otros términos del potencial, es decir tomando $\varsigma = 0$ (implícitamente se ha asumido invariancia CP) [8]. En general, las masas y los autoestados de masa de los Higgs están definidos por los parámetros μ_i y λ_i de (2.4) por lo que siempre van a depender del potencial escogido.

Suprimiendo, mediante una mezcla, los bosones de Goldstone ϕ_1^\pm , ϕ_2^\pm , η_1^0 y η_2^0 se obtienen los Higgs físicos H^\pm y A^0 :

$$\begin{pmatrix} G_W^\pm \\ H^\pm \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \beta & \sin \beta \\ -\sin \beta & \cos \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_1^\pm \\ \phi_2^\pm \end{pmatrix}, \tag{2.6}$$

$$\begin{pmatrix} G_Z^0 \\ A^0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \beta & \sin \beta \\ -\sin \beta & \cos \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \eta_1^0 \\ \eta_2^0 \end{pmatrix}, \tag{2.7}$$

G_W^\pm y G_Z^0 corresponden a los nuevos bosones de Goldstone del sector Higgs, ortogonales a H^\pm y A^0 respectivamente. Un parámetro importante en M2DH es β el cual está determinado por la razón entre los VEV:

$$\tan \beta = \frac{v \sin \beta}{v \cos \beta} = \frac{v_2}{v_1}. \tag{2.8}$$

Ya que fue asumida invariancia CP , las partes imaginarias y las partes reales de los campos escalares neutros se ha desacoplado. Entonces es necesario definir un nuevo

ángulo de mezcla, α , entre los campos neutros de los dobletes h_1^0 y h_2^0 , y los autoestados de masa físicos H^0 y h^0 :

$$\begin{pmatrix} H^0 \\ h^0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1^0 \\ h_2^0 \end{pmatrix}. \quad (2.9)$$

H^0 es ortogonal a h^0 . La masa del campo de Higgs cargado está dada por

$$M_{H^\pm}^2 = \lambda_4 (v_1^2 + v_2^2),$$

la masa del campo escalar neutro (impar CP) por

$$M_{A^0}^2 = \lambda_6 (v_1^2 + v_2^2),$$

(con $v_1^2 + v_2^2 = v^2 = 4M_W^2/g^2$, dado por el RES electrodébil) y la masa de los campos escalares neutros (pares CP) por

$$M_{H^0, h^0}^2 = \frac{1}{2} \left[M_{11} + M_{22} \pm \sqrt{(M_{11} + M_{22})^2 + 4M_{12}^2} \right],$$

donde

$$M = \begin{pmatrix} 4v_1^2(\lambda_1 + \lambda_3) + v_2^2\lambda_5 & (4\lambda_3 + \lambda_5)v_1v_2 \\ (4\lambda_3 + \lambda_5)v_1v_2 & 4v_2^2(\lambda_2 + \lambda_3) + v_1^2\lambda_5 \end{pmatrix}.$$

α se obtiene de

$$\begin{aligned} \sin 2\alpha &= \frac{2M_{12}}{\sqrt{(M_{11} + M_{22})^2 + 4M_{12}^2}}, \\ \cos 2\alpha &= \frac{M_{11} - M_{22}}{\sqrt{(M_{11} + M_{22})^2 + 4M_{12}^2}}. \end{aligned}$$

De acuerdo con M_{H^0, h^0}^2 , $M_{H^0} > M_{h^0}$. En general M2DH posee un total de 5 bosones de Higgs físicos: el par cargado (H^\pm), 2 escalares neutros pares CP (H^0 y h^0) y un escalar neutro impar CP (A^0), generalmente llamado seudo-escalar neutro. M2DH contiene 6 parámetros libres por ajustar: 4 masas de Higgs (M_{H^\pm} , M_{A^0} , M_{H^0} y M_{h^0}), $\tan \beta$ y el ángulo de mezcla α .

2.2. Sector cinético

El lagrangiano cinético (2.10) dota con masa a los bosones de gauge, define las interacciones entre los bosones de gauge y los Higgs, y es invariante bajo la conjugación de la carga,

$$\mathcal{L}_K = (D_\mu \Phi_1)^\dagger (D^\mu \Phi_1) + (D_\mu \Phi_2)^\dagger (D^\mu \Phi_2). \quad (2.10)$$

La representación cuatri-dimensiional de cada doblete

$$\begin{aligned}\Phi_1 &= \begin{pmatrix} \text{Re } \phi_1^+ + i \text{Im } \phi_1^+ \\ \text{Re } \phi_1^0 + i \text{Im } \phi_1^0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} \text{Re } \phi_1^+ \\ \text{Im } \phi_1^+ \\ \text{Re } \phi_1^0 \\ \text{Im } \phi_1^0 \end{pmatrix}, \\ \Phi_2 &= \begin{pmatrix} \text{Re } \phi_2^+ + i \text{Im } \phi_2^+ \\ \text{Re } \phi_2^0 + i \text{Im } \phi_2^0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} \text{Re } \phi_2^+ \\ \text{Im } \phi_2^+ \\ \text{Re } \phi_2^0 \\ \text{Im } \phi_2^0 \end{pmatrix},\end{aligned}\quad (2.11)$$

y la representación real de los generadores con $L_a = -i\tau_a$:

$$\begin{aligned}L_1 &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & L_2 &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ L_3 &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, & L_4 &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix},\end{aligned}$$

incluidas en D_μ ,

$$D_\mu = \partial_\mu + gL_i W_\mu^i + g' L_4 W_\mu^4, \quad (2.12)$$

permiten expandir el lagrangiano (2.10).

Los términos de masa se obtienen desde los VEV, produciendo la siguiente matriz de masas

$$\frac{1}{2} M_{ab}^2 W_\mu^a W_\mu^b \quad \text{con} \quad M_{ab}^2 = 2 \sum_{k=1}^2 (g_a L_a v_k)^\dagger (g_b L_b v_k), \quad (2.13)$$

con $a, b = 1, 2, 3, 4$ indica los bosones de gauge correspondientes a los generadores τ^i, Y , respectivamente. Luego de la diagonalización de (2.13) los términos de masas y los autoestados para los bosones de gauge son:

$$W_\mu^\pm = \frac{W_\mu^1 \mp iW_\mu^2}{\sqrt{2}} \quad ; \quad M_{W^\pm}^2 = \frac{1}{4} g^2 (v_1^2 + v_2^2), \quad (2.14)$$

$$M_Z^2 = \frac{1}{4} (v_1^2 + v_2^2) (g'^2 + g^2) = \frac{M_W^2}{\cos^2 \theta_w}, \quad (2.15)$$

$$\begin{pmatrix} Z_\mu \\ A_\mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta_w & -\sin \theta_w \\ \sin \theta_w & \cos \theta_w \end{pmatrix} \begin{pmatrix} W_\mu^3 \\ W_\mu^4 \end{pmatrix}. \quad (2.16)$$

Las expresiones de las masas para los bosones vectoriales coinciden con las del ME cuando se cumple la restricción $v_1^2 + v_2^2 = v^2$ a nivel árbol (donde, como se indico en el apartado anterior, v es el VEV del doblete de Higgs en el ME).

Con las rotaciones inversas de (2.6), (2.7) y (2.9) son:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \phi_1^\pm \\ \phi_2^\pm \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \cos \beta & -\sin \beta \\ \sin \beta & \cos \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} G_W^\pm \\ H^\pm \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} \eta_1^0 \\ \eta_2^0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \cos \beta & -\sin \beta \\ \sin \beta & \cos \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} G_Z^0 \\ A^0 \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} h_1^0 \\ h_2^0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} H^0 \\ h^0 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

se obtiene

$$\begin{aligned} \phi_1^\pm &= G_W^\pm \cos \beta - H^\pm \sin \beta, \\ \phi_2^\pm &= G_W^\pm \sin \beta + H^\pm \cos \beta, \\ \phi_1^0 &= \frac{1}{\sqrt{2}} [H^0 \cos \alpha - h^0 \sin \alpha + v_1 + iG_Z^0 \cos \beta - iA^0 \sin \beta], \\ \phi_2^0 &= \frac{1}{\sqrt{2}} [H^0 \sin \alpha + h^0 \cos \alpha + v_2 + iG_Z^0 \sin \beta + iA^0 \cos \beta]. \end{aligned}$$

2.3. Lagrangiano de Yukawa

Para el M2DH el lagrangiano invariante gauge más general que acopla los campos Higgs a los fermiones tiene la siguiente forma:

$$\begin{aligned} -\mathcal{L}_Y &= \overline{L_{L_i}^0} \xi_{1ij}^E \Phi_1 E_{R_j}^0 + \overline{Q_{L_i}^0} \xi_{1ij}^U \tilde{\Phi}_1 U_{R_j}^0 + \overline{Q_{L_i}^0} \xi_{1ij}^D \Phi_1 D_{R_j}^0 \\ &\quad \overline{L_{L_i}^0} \xi_{2ij}^E \Phi_2 E_{R_j}^0 + \overline{Q_{L_i}^0} \xi_{2ij}^U \tilde{\Phi}_2 U_{R_j}^0 + \overline{Q_{L_i}^0} \xi_{2ij}^D \Phi_2 D_{R_j}^0 + h.c. \end{aligned} \quad (2.17)$$

donde $\Phi_{1,2}$ representa los dobletes de Higgs con $\tilde{\Phi}_{1,2} = i\tau_2 \Phi_{1,2}^*$ y $\xi_{1,2}^\chi$ ($\chi = E, U, D$), matrices adimensionales complejas 3×3 no-diagonales, asociadas a cada doblete, corresponden a las constantes de acoplamiento Yukawa entre los campos fermiónicos, tabla 1.4, y los dos campos de Higgs (2.11). El superíndice 0 indica que los campos aún no son autoestados de masa.

Utilizando las siguientes definiciones:

$$\begin{aligned} M^\chi &= \frac{\xi_1^\chi v_1 + \xi_2^\chi v_2}{\sqrt{2}} \\ \xi_1^\chi \cos \beta + \xi_2^\chi \sin \beta &= \frac{g}{\sqrt{2} M_W} M^\chi \\ -\xi_1^\chi \sin \beta + \xi_2^\chi \cos \beta &= \frac{g \cot \beta}{\sqrt{2} M_W} M^\chi - \frac{1}{\sin \beta} \xi_1^\chi \end{aligned}$$

en (2.17) escrito en forma matricial, se pueden convertir los campos del Lagrangiano de Yukawa en autoestados de masa a través de las transformaciones unitarias

$$E_{L(R)} = T_{L(R)} E_{L(R)}^0, \quad U_{L(R)} = V_{L(R)} U_{L(R)}^0, \quad D_{L(R)} = W_{L(R)} D_{L(R)}^0 \quad \text{y} \quad N_L = S_L N_L^0.$$

Dichas transformaciones además de obtener autoestados de masa diagonalizan las matrices

$$M_E^{diag} = T_L M^E T_R^\dagger, \quad M_U^{diag} = V_L M^U V_R^\dagger \quad \text{y} \quad M_D^{diag} = W_L M^D W_R^\dagger,$$

pero de forma simultánea no pueden diagonalizar la matriz ξ_1^x . Sustituyendo la matriz $I = S_L T_L^\dagger$ y la matriz de mezcla CKM $V = V_L W_L^\dagger$, se obtiene de forma explícita \mathcal{L}_Y en estados de masa para los leptones

$$\begin{aligned} -\mathcal{L}_Y^E(\alpha, \beta) = & \frac{g}{\sqrt{2}M_W} \bar{N} M_E^{diag} P_R E G_W^+ & (2.18) \\ & + \frac{g \cot \beta}{\sqrt{2}M_W} \bar{N} M_E^{diag} P_R E H^+ - \frac{1}{\sin \beta} \bar{N} \xi_1^E P_R E H^+ + h.c \\ & + \bar{E} M_E^{diag} E - i \frac{g}{2M_W} \bar{E} M_E^{diag} \gamma^5 E G_Z^0 \\ & + i \frac{g \cot \beta}{2M_W} \bar{E} M_E^{diag} \gamma^5 E A^0 - i \frac{1}{\sqrt{2} \sin \beta} \bar{E} \xi_1^E \gamma^5 E A^0 \\ & + \frac{g}{2M_W \sin \beta} \bar{E} M_E^{diag} E [H^0 \sin \alpha + h^0 \cos \alpha] \\ & - \frac{1}{\sqrt{2} \sin \beta} \bar{E} \xi_1^E E [H^0 \sin(\alpha - \beta) + h^0 \cos(\alpha - \beta)] \end{aligned}$$

Los argumentos empleados se extienden de igual forma para reproducir el Lagrangiano de Yukawa del sector de los quarks.

2.4. M2DH tipo II

Haciendo una reparametrización en (2.18) se obtienen el modelo M2DH tipo II. Implementando invariancia ante la simetría discreta

$$\Phi_1 \longrightarrow \Phi_1 \quad \text{y} \quad \Phi_2 \longrightarrow -\Phi_2$$

el campo Φ_1 se acopla al sector de Yukawa dando masa a los quarks tipo down y el campo Φ_2 se acopla al sector de Yukawa dotando de masa a los quarks tipo up. El lagrangiano de Yukawa para el M2DH tipo II, $-\mathcal{L}_Y^{II(CS)} = -\mathcal{L}_Y^x(\alpha - \pi/2, \beta - \pi/2)$,

tiene la siguiente forma:

$$\begin{aligned}
-\mathcal{L}_Y^{H(CS)} &= \frac{g}{\sqrt{2}M_W} \left(\bar{N}M_E^{diag}P_RE - \bar{U}M_U^{diag}VP_LD + \bar{U}VM_D^{diag}P_RD \right) G_W^+ \quad (2.19) \\
&- \frac{g \tan \beta}{\sqrt{2}M_W} \left(\bar{N}M_E^{diag}P_RE - \bar{U}M_U^{diag}VP_LD + \bar{U}VM_D^{diag}P_RD \right) H^+ \\
&+ \frac{1}{\cos \beta} \left(\bar{N}\xi_2^E P_RE - \bar{U}\xi_2^U VP_LD + \bar{U}V\xi_2^D P_RD \right) H^+ + h.c \\
&+ \bar{E}M_E^{diag}E + \bar{U}M_U^{diag}U + \bar{D}M_D^{diag}D \\
&- i \frac{g}{2M_W} \left(\bar{E}M_E^{diag}\gamma^5 E - \bar{U}\gamma^5 M_U^{diag}U + \bar{D}M_D^{diag}\gamma^5 D \right) G_Z^0 \\
&- i \frac{g \tan \beta}{2M_W} \left(\bar{E}M_E^{diag}\gamma^5 E - \bar{U}\gamma^5 M_U^{diag}U + \bar{D}M_D^{diag}\gamma^5 D \right) A^0 \\
&+ i \frac{1}{\sqrt{2} \cos \beta} \left(\bar{E}\xi_2^E \gamma^5 E - \bar{U}\gamma^5 \xi_2^U U + \bar{D}\xi_2^D \gamma^5 D \right) A^0 \\
&- \frac{g}{2M_W \cos \beta} \left(\bar{E}M_E^{diag}E - \bar{U}M_U^{diag}U + \bar{D}M_D^{diag}D \right) [H^0 \sin \alpha + h^0 \cos \alpha] \\
&+ \frac{1}{\sqrt{2} \cos \beta} \left(\bar{E}\xi_2^E E - \bar{U}\xi_2^U U + \bar{D}\xi_2^D D \right) [H^0 \sin(\alpha - \beta) + h^0 \cos(\alpha - \beta)].
\end{aligned}$$

En (2.19) se puede tomar los límites $\tan \beta \rightarrow 0$ o $\tan \beta \rightarrow \infty$.

Capítulo 3

Modelo 331 ($\beta = -1/\sqrt{3}$)

3.1. Formalismo general del modelo

En este capítulo se presentan los principios generales para la construcción del modelo de gauge basado en el grupo de simetría $SU(3)_C \otimes SU(3)_L \otimes U(1)_X$, el cual establece las bases espectrales en estados electrodébiles de partículas y campos, por lo que posteriormente se deben rotar apropiadamente esos estados a los estados de masa que describen las partículas y las interacciones físicas observadas experimentalmente [17] [19]. Se debe asegurar que el modelo incorpore la conservación de la carga eléctrica, lo cual se establece al exigir que el sector electrobébil, $SU(3)_L \otimes U(1)_X$, contenga el subgrupo $U(1)_Q$, con el generador de carga eléctrica, Q , definido como una combinación lineal de los generadores diagonales T_3 y T_8 , (A.23), del sector $SU(3)_L \otimes U(1)_X$:

$$Q = T_3 - \frac{1}{\sqrt{3}}T_8 + XI \quad (3.1)$$

donde T_3 se hace corresponder con el isoespín $SU(2)_L$ del ME, X representa el nuevo número cuántico asociado al grupo $U(1)_X$ y $\beta = -1/\sqrt{3}$ un parámetro que se fija de acuerdo al contenido fermiónico del modelo. De esta forma, es imposible identificar una única versión del modelo 331, por lo que β es un parámetro fundamental de clasificación condicionado además por criterios de tipo fenomenológico y de naturalidad del modelo [17].

En general, los criterios que restringen y permiten clasificar los modelos 331 físicamente posibles son:

1. Contener al ME como subgrupo. Exige que el contenido de partículas preserve las partículas fenomenológicas o del ME, ajustadas en subdobletes $SU(2)_L \subset SU(3)_L$ y con sus respectivas cargas cuantizadas.
2. Criterio de economía. Mantiene restringido el número de fermiones extras exigiendo sólo un multiplete de fermiones por cada familia con el fin de mantener un mínimo de parámetros libres.

3. Criterio de cancelación de anomalías quirales. Preserva la renormalización de la teoría en las correcciones cuánticas de la teoría clásica.
4. Criterio de conjugación. Asegura que todos los grados de libertad fermiónicos se encuentren dentro del espectro cargado; por cada campo fermiónico debe existir un campo conjugado asociado, de tal forma que existen todos los grados de libertad necesarios para construir espinores de Dirac.
5. Implementar un sector escalar adecuado que permita el correcto rompimiento de los generadores en cada fase del RES respetando el esquema $331 \rightarrow 321 \rightarrow 21$, es decir primero al ME y luego a la QED.
6. Asegurar un sector escalar que genere masas pesadas a las partículas extras asociadas a nueva física y masas más livianas a la escala electrodébil del espectro fenomenológico observado a bajas energías descrito por el ME.

3.1.1. Sector fermiónico

Según los criterios mencionados se construyen los sectores fermiónico y escalar del modelo. De acuerdo con el criterio de economía se puede introducir un conjunto arbitrario de tripletes (o antitripletes) con diferentes números cuánticos, es decir, cada familia (replica idéntica de multipletes con los mismos números cuánticos) puede contener submultipletes que se pueden diferenciar entre sí [18]. En el caso más general posible, se asigna a cada familia varios tripletes izquierdos que transforman exactamente de la misma forma bajo $SU(3)_L$, pero que en general pueden tener diferentes números cuánticos asociados a $U(1)_X$.

Si en adición al criterio de economía se exige el criterio de cuantización de la carga, según el cual se deben incorporar fermiones con cargas $2/3$, $-1/3$ para ajustar los quarks tipo up y down del ME y cargas de -1 , 0 para los leptones cargados y neutrinos del ME, se obtiene el espectro de la tabla 3.1.

		Q	X
QUARKS	$q_L^{(m)} = \begin{pmatrix} U^{(m)} \\ D^{(m)} \\ J^{(m)} \end{pmatrix}_L$ $U_R^{(m)}, D_R^{(m)}, J_R^{(m)}$	$\begin{pmatrix} 2/3 \\ -1/3 \\ 2/3 \end{pmatrix}$ $2/3, -1/3, 2/3$	$X_{q^{(m)}}^L = 1/3$ $X_{U^{(m)}D^{(m)}J^{(m)}}^R = Q_{U^{(m)}D^{(m)}J^{(m)}}$
LEPTONES	$\ell_L^{(n)} = \begin{pmatrix} \nu^{(n)} \\ e^{(n)} \\ E^{(n)} \end{pmatrix}_L$ $\nu_R^{(n)}, e_R^{(n)}, E_R^{(n)}$	$\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $0, -1, 0$	$X_{\ell^{(n)}}^L = -1/3$ $X_{\nu^{(n)}e^{(n)}E^{(n)}}^R = Q_{\nu^{(n)}e^{(n)}E^{(n)}}$

Tabla 3.1 Contenido de fermiones, que contiene a las partículas del ME, bajo el criterio de economía. Los valores del número cuántico X se determinaron de la definición del operador carga eléctrica.

Además de los parámetros m y n representan el número de triplete y singlete por familia de quarks, y número de triplete y singlete por familia de leptones, respectivamente.

La anulación de expresiones predichas por el criterio de cancelación de anomalías [17] [21] impone relaciones restrictivas entre los valores de los parámetros libres M , N , k y j , asegurando la cancelación de las anomalías: $[SU(3)_C]^2 \otimes U(1)_X$, $[SU(3)_L]^3$, $[SU(3)_L]^2 \otimes U(1)_X$, $[Grav]^2 \otimes U(1)_X$ y $[U(1)_X]^3$. Mezclando entre sí dichas relaciones restrictivas se pueden obtener expresiones que permiten obtener información física, como por ejemplo, el hecho de que el número de familias leptónicas tiene que ser igual al número de familias de quarks.

Obedeciendo el criterio de conjugación de la carga, el espectro cargado debe contener todos los grados de libertad necesarios para construir espinores de Dirac, es decir, que a partir de las componentes quirales del espectro se puedan reconstruir componentes completas de partícula y antipartícula. Esto se cumple cuando a cada una de las componentes leptónicas cargadas, ℓ_L , se les asocia una componente conjugada dentro del espectro, $(\ell^c)_L$ o ℓ_R .

Con los criterios mencionados se pueden determinar las diferentes estructuras fermiónicas físicamente posibles, las cuales deben contener las partículas del ME, con el fin de tener un escenario físico real. En este trabajo se ha fijado el parámetro $\beta = -1/\sqrt{3}$, ya que permite escoger una estructura particular que incluye un modelo fenomenológicamente posible sin descartar opciones físicamente viables, como se verá en el siguiente apartado.

3.1.2. Sector escalar

El sector escalar de la teoría se construye a partir de los criterios 5 y 6. Para el criterio de rompimiento espontáneo de simetría se exige el esquema de rompimiento dado por: $SU(3)_L \otimes U(1)_X \xrightarrow{\Phi_1} SU(2)_L \otimes U(1)_Y \xrightarrow{\Phi_2} U(1)_Q$, donde Φ_1 y Φ_2 representan dos conjuntos de campos escalares que rompen los generadores de grupo en primer lugar al ME y posteriormente a la QED [20].

Inicialmente se tienen 9 generadores de grupo, $(\hat{T}_\alpha, \hat{X})$, los \hat{T}_α dados por las 8 matrices de $SU(3)_L$ (A.23) y el \hat{X} proporcional a la matriz identidad. El VEV de Φ_1 debe causar el primer rompimiento a $SU(2)_L \otimes U(1)_Y$ que contiene 4 generadores dados por (\hat{T}_i, \hat{Y}) con los $\hat{T}_{1,2,3}$ dados por el subconjunto de las tres primeras matrices $SU(2)_L \subseteq SU(3)_L$ y el \hat{Y} , que representa la hipercarga, se construye a partir de la relación de Gell-Mann Nishijima, $\hat{Y} = \hat{Q} - \hat{T}_3 = -\frac{\hat{T}_8}{\sqrt{3}} + \hat{X}$, empleando la ecuación (3.1). En la primera transición se debe romper los 5 generadores restantes, $\hat{T}_{4,5,6,7}$ y $\hat{Y}^\perp = -\frac{\hat{T}_8}{\sqrt{3}} - \hat{X}$. Entonces se tiene para el primer rompimiento que:

$$\begin{aligned} \left[\hat{T}_{1,2,3}, \langle \Phi_1 \rangle_0 \right] &= 0, & \left[\hat{T}_{4,5,6,7}, \langle \Phi_1 \rangle_0 \right] &\neq 0, \\ \left[-\frac{\hat{T}_8}{\sqrt{3}} + X\hat{I}, \langle \Phi_1 \rangle_0 \right] &= 0, & \left[-\frac{\hat{T}_8}{\sqrt{3}} - X\hat{I}, \langle \Phi_1 \rangle_0 \right] &\neq 0. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Los 5 generadores rotos hacen que 5 bosones vectoriales adquieran masa, por lo que 5 componentes de Φ_1 representarán bosones de Goldstone y las componentes restantes quedarán en el espectro físico para formar bosones de Higgs.

De los 4 generadores del ME, debe quedar sin romper el generador carga eléctrica $\hat{Q} = \hat{T}_3 - \frac{\hat{T}_8}{\sqrt{3}} + \hat{X}$, del grupo $U(1)_Q$, entonces los tres generadores restantes, $\hat{T}_{1,2}$ y $\hat{Q}^\perp = \hat{T}_3 + \frac{\hat{T}_8}{\sqrt{3}} - \hat{X}$, rompen el VEV de Φ_2 . Se tiene entonces para el segundo rompimiento:

$$\begin{aligned} \left[\hat{Q}, \langle \Phi_2 \rangle_0 \right] &= 0, & \left[\hat{T}_{1,2}, \langle \Phi_2 \rangle_0 \right] &\neq 0, \\ \left[\hat{T}_3 + \frac{\hat{T}_8}{\sqrt{3}} - \hat{X}, \langle \Phi_2 \rangle_0 \right] &\neq 0. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Los 3 generadores rotos hacen que 3 bosones vectoriales adquieran masa, por lo que 3 componentes de Φ_2 representarán bosones de Goldstone y las componentes restantes se mezclarán con las de Φ_1 para completar el sector de Higgs.

A través de términos tipo Yukawa se da el acoplamiento entre fermiones y campos escalares. Estos términos deben ser invariantes bajo el grupo $SU(3)_L \otimes U(1)_X$, tomar formas bilineales, $\bar{\psi}\psi\Phi$, y deben formar singletes.

En general, el sector escalar estará restringido por las siguientes condiciones [17]

1. Los VEV deben cumplir con las ecuaciones (3.2) y (3.3) para cada rompimiento.
2. Las representaciones escalares se darán en singletes, tripletes, antitripletes o sextetes.
3. El número de componentes de Φ_1 por lo menos debe ajustar 5 grados de libertad para bosones de Goldstone, en tanto que Φ_2 necesitará por lo menos 3.
4. Los acoples Yukawa deben proveer masa a todos los fermiones cargados en cada transición, es decir, deberán dotar de masa a todas las componentes pesadas en la primera transición con Φ_1 y posteriormente a las componentes livianas con Φ_2 .

3.1.3. Sector vectorial

En cuanto al sector vectorial, los bosones de gauge asociados al grupo $SU(3)_L$ transforman según una representación adjunta, *triplete* \otimes *antitriplete*, que se puede escribir como:

$$\mathbf{W}_\mu = W_\mu^\alpha T_\alpha = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} W_\mu^3 + \frac{1}{\sqrt{3}}W_\mu^8 & \sqrt{2}W_\mu^+ & \sqrt{2}K_\mu^0 \\ \sqrt{2}W_\mu^- & -W_\mu^3 + \frac{1}{\sqrt{3}}W_\mu^8 & \sqrt{2}K_\mu^{-1} \\ \sqrt{2}K_\mu^1 & \sqrt{2}K_\mu^0 & -\frac{2}{\sqrt{3}}W_\mu^8 \end{bmatrix} \quad (3.4)$$

con W_μ^α representando los 8 campos de gauge asociados a $SU(3)_L$ y T_α las matrices de la representación fundamental (A.23). Los campos están definidos como:

$$W_\mu^\pm = \frac{1}{\sqrt{2}} (W_\mu^1 \mp W_\mu^2), \quad K_\mu^0 = \frac{1}{\sqrt{2}} (W_\mu^4 \mp W_\mu^5), \quad K_\mu^{\pm 1} = \frac{1}{\sqrt{2}} (W_\mu^6 \mp W_\mu^7).$$

A partir de (3.1), la carga eléctrica de W (específicamente para el modelo 331 ($\beta = -1/\sqrt{3}$)) está dada por:

$$Q_W = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}. \quad (3.5)$$

Para el sector $U(1)_X$ se tiene

$$\mathbf{B}_\mu = \mathbf{I}_{3 \times 3} B_\mu, \quad (3.6)$$

donde $\mathbf{I}_{3 \times 3}$ representa una matriz unitaria 3×3 y B_μ el campo de gauge asociado al grupo $U(1)_X$. $Q_B = 0$.

3.1.4. Lagrangiano del modelo

El lagrangiano más general del modelo 331 ($\beta = -1/\sqrt{3}$) contiene los siguientes sectores:

$$\mathcal{L}_{331(\beta=-1/\sqrt{3})} = \mathcal{L}_{QCD} + \mathcal{L}_D + \mathcal{L}_H + \mathcal{L}_{Y-M} + \mathcal{L}_Y + \mathcal{L}_{G-F} + \mathcal{L}_{F-P} \quad (3.7)$$

donde:

- \mathcal{L}_{QCD} corresponde al lagrangiano de $SU(3)_C$, el cual tiene la misma forma para este grupo en el ME.
- \mathcal{L}_D representa el lagrangiano de Dirac y describe la propagación de fermiones y la interacción fermión-bosón de gauge.
- \mathcal{L}_H corresponde al lagrangiano de Higgs, que contiene términos cinéticos asociados a los campos escalares, interacciones bosones escalares-bosones de gauge y autointeracciones entre bosones escalares.
- \mathcal{L}_{Y-M} el lagrangiano de Yang-Mills, el cual describe la propagación de los bosones gauge y sus autointeracciones.
- \mathcal{L}_Y representa el lagrangiano de Yukawa, el cual incluye el acoplamiento entre el sector escalar y el sector fermiónico.
- \mathcal{L}_{G-F} , el lagrangiano que fija el gauge, representa el acoplamiento entre los bosones de gauge con los correspondientes bosones de Goldstone en el RES
- \mathcal{L}_{F-P} el lagrangiano de Faddeev-Popov el cual reestablece la simetría rota por el \mathcal{L}_{G-F} y que además contiene interacciones entre campos fantasmas, bosones gauge y bosones escalares.

Los dos últimos sectores no se emplearán en este trabajo.

3.2. Espectro físico del modelo

3.2.1. Contenido de partículas

En la sección anterior se describieron los fundamentos generales que se deben tener en cuenta en la construcción del modelo 331 ($\beta = -1/\sqrt{3}$), con los criterios necesarios para encontrar un modelo físicamente posible. La construcción se describió bajo el marco del grupo de simetría $SU(3)_L \otimes U(1)_X$, el cual establece las bases espectrales en estados electrodébiles de partículas y campos, por lo que el paso a seguir consiste en rotar estos estados a estados de masa que describen las partículas y las interacciones observadas experimentalmente. A continuación se describe el espectro, tabla 3.2, y los lagrangianos de interacción en estados de masas con tres familias fermiónicas, según el contenido fenomenológico, del modelo 331 ($\beta = -1/\sqrt{3}$).

Para el sector escalar, la opción más sencilla para la primera transición corresponde a la de un triplete de χ , el cual provee de masa a los fermiones exóticos, diferentes a los del ME. Para la segunda transición se incluye una combinación de ρ y η , con el fin de darle masa, simultáneamente, a los quarks tipo up y down. En la tabla 3.3 se presenta el espectro más sencillo del sector escalar.

El espectro vectorial mantiene la misma forma de (3.4) y (3.6).

		Q	X
QUARKS	$q_L^{(1)} = \begin{pmatrix} U^{(1)} \\ D^{(1)} \\ J^{(1)} \end{pmatrix}_L$ $U_R^{(1)}, D_R^{(1)}, J_R^{(1)}$	$\begin{pmatrix} 2/3 \\ -1/3 \\ 2/3 \end{pmatrix}$ $2/3, -1/3, 2/3$	$X_{q^{(1)}}^L = 1/3$ $X_{U^{(1)}D^{(1)}J^{(1)}}^R = Q_{U^{(1)}D^{(1)}J^{(1)}}$
	$q_L^{(m^*)} = \begin{pmatrix} U^{(m^*)} \\ D^{(m^*)} \\ J^{(m^*)} \end{pmatrix}_L$ $U_R^{(m^*)}, D_R^{(m^*)}, J_R^{(m^*)}$	$\begin{pmatrix} -1/3 \\ 2/3 \\ -1/3 \end{pmatrix}$ $-1/3, 2/3, -1/3$	$X_{q^{(1)}}^L = 0$ $X_{U^{(m^*)}D^{(m^*)}J^{(m^*)}}^R = Q_{U^{(m^*)}D^{(m^*)}J^{(m^*)}}$
LEPTONES	$\ell_L^{(n)} = \begin{pmatrix} \nu^{(n)} \\ e^{(n)} \\ E^{(n)} \end{pmatrix}_L$ $\nu_R^{(n)}, e_R^{(n)}, E_R^{(n)}$	$\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $0, -1, 0$	$X_{\ell^{(n)}}^L = -1/3$ $X_{\nu^{(n)}e^{(n)}E^{(n)}}^R = Q_{\nu^{(n)}e^{(n)}E^{(n)}}$

Tabla 3.2 Contenido de fermiones del modelo 331 ($\beta = -1/\sqrt{3}$) para tres familias con $n = 1, 2, 3$. [17]

	Q	X
$\chi = \begin{pmatrix} \chi_1^0 \\ \chi_2^{\mp 1} \\ \frac{1}{\sqrt{2}}(\xi_\chi + \nu_\chi \pm i\zeta_\chi) \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 \\ \mp 1 \\ 0 \end{pmatrix}$	$-\frac{1}{3}$
$\rho = \begin{pmatrix} \rho_1^\pm \\ \frac{1}{\sqrt{2}}(\xi_\rho + \nu_\rho \pm i\zeta_\rho) \\ \rho_3^{\pm 1} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \pm 1 \\ 0 \\ \pm 1 \end{pmatrix}$	$\frac{2}{3}$
$\eta = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}(\xi_\eta + \nu_\eta \pm i\zeta_\eta) \\ \eta_2^{\mp 1} \\ \eta_3^0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 \\ \mp 1 \\ 0 \end{pmatrix}$	$-\frac{1}{3}$

 Tabla 3.3 Contenido del sector escalar para el modelo 331 ($\beta = -1/\sqrt{3}$) [17] [18]

3.2.2. Espectro físico en estados de masa

Sector vectorial físico

Las masas para los campos físicos cargados son [18]

$$M_{W^\pm}^2 = \frac{g_L^2}{4} (\nu_\rho^2 + \nu_\eta^2), \quad M_{K^0}^2 = \frac{g_L^2}{4} (\nu_\chi^2 + \nu_\eta^2), \quad M_{K^{\mp 1}}^2 = \frac{g_L^2}{4} (\nu_\chi^2 + \nu_\rho^2). \quad (3.8)$$

Las masas de K^0 y $K^{\mp 1}$ (masas pesadas) se obtienen en la primera transición y son del orden de ν_χ y la masa de W^\pm , del orden de la escala electrodébil $\nu = \sqrt{\nu_\rho^2 + \nu_\eta^2}$, se obtiene en la segunda transición.

Luego de la diagonalización de la matriz de masa del sector neutro se obtiene, mediante rotaciones, los valores propios de A_μ , Z_μ y Z'_μ [18],

$$\begin{aligned} A_\mu &= s_w W_\mu^3 + c_w \left(-\frac{1}{\sqrt{3}} t_w W_\mu^8 + \sqrt{1 - \frac{1}{3} t_w^2} B_\mu \right), \\ Z_\mu &= c_w W_\mu^3 - s_w \left(-\frac{1}{\sqrt{3}} t_w W_\mu^8 + \sqrt{1 - \frac{1}{3} t_w^2} B_\mu \right), \\ Z'_\mu &= -\sqrt{1 - \frac{1}{3} t_w^2} W_\mu^8 - \frac{1}{\sqrt{3}} t_w B_\mu. \end{aligned} \quad (3.9)$$

Las masas de los campos neutros son [18]

$$M_{A_\mu}^2 = 0, \quad M_{Z_\mu}^2 \simeq \frac{g_L^2}{4c_w^2} (\nu_\rho^2 + \nu_\eta^2), \quad M_{Z'_\mu}^2 \simeq \frac{g_X^2}{3t_w^2} \nu_\chi^2, \quad (3.10)$$

donde el ángulo de Weinberg se ha definido como

$$s_w \equiv \sin \theta_w = \frac{g_X}{\sqrt{g_L^2 + \frac{4}{3}g_X^2}}. \quad (3.11)$$

Se obtiene una pequeña mezcla entre los estados Z_μ y Z'_μ al escribir el lagrangiano de masa en estados rotados y al realizar una nueva rotación a la matriz de mezcla, se obtienen los verdaderos estados neutros de masa [21]

$$Z_{1\mu} = Z_\mu \cos \theta + Z'_\mu \sin \theta \quad ; \quad Z_{2\mu} = -Z_\mu \sin \theta + Z'_\mu \cos \theta$$

$$\tan \theta = \frac{1}{\Lambda + \sqrt{\Lambda^2 + 1}} \quad ; \quad \Lambda = \frac{-2s_w c_w^2 g_X^2 \nu_\chi^2 + \frac{3}{2}s_w t_w^2 g_L^2 (\nu_\eta^2 + \nu_\rho^2)}{g_L g_X t_w^2 \left[-\frac{3}{\sqrt{3}} s_w^2 (\nu_\eta^2 + \nu_\rho^2) + c_w^2 (\nu_\eta^2 - \nu_\rho^2) \right]}, \quad (3.12)$$

donde $Z_{1\mu}$ representa el bosón electrodébil neutro a bajas energías y $Z_{2\mu}$ el nuevo bosón neutro físico pesado. $\tan \theta$ depende inversamente de ν_χ , por lo que según la relación entre las escalas de rompimiento, el ángulo de mezcla tendrá una magnitud pequeña.

Sector escalar físico

Descartando términos que no son invariantes $U(1)_X$, el potencial de Higgs, V_H , más general para el modelo 331 ($\beta = -1/\sqrt{3}$) (bajo la estructura de tripletes de Higgs) es ([17]) y ([18]):

$$V_H = \mu_1^2 \chi^i \chi_i + \mu_2^2 \rho^i \rho_i + \mu_3^2 \eta^i \eta_i + f (\chi_i \rho_j \eta_k \varepsilon^{ijk} + h.c.) + \lambda_1 (\chi^i \chi_i)^2 + \lambda_2 (\rho^i \rho_i)^2 \quad (3.13)$$

$$+ \lambda_3 (\eta^i \eta_i)^2 + \lambda_4 \chi^i \chi_i \rho^j \rho_j + \lambda_5 \chi^i \chi_i \eta^j \eta_j + \lambda_6 \rho^i \rho_i \eta^j \eta_j + \lambda_7 \chi^i \eta_i \eta^j \chi_j + \lambda_8 \chi^i \rho_i \rho^j \chi_j$$

$$+ \lambda_9 \eta^i \rho_i \rho^j \eta_j + V_{-1/\sqrt{3}},$$

donde los dos últimos términos solamente aparecen si $\beta = -1/\sqrt{3}$; para este caso específico se obtiene el término adicional $U(1)_X$

$$V_{-1/\sqrt{3}} = \mu_4^2 (\chi^i \eta_i + h.c.) + \lambda_{10} \chi^i \chi_i (\chi^j \eta_j + h.c.) \quad (3.14)$$

$$+ \lambda_{11} \eta^i \eta_i (\eta^j \chi_j + h.c.) + \lambda_{12} \rho^i \rho_i (\chi^j \eta_j + h.c.)$$

$$+ \lambda_{13} (\chi^i \eta_i \chi^j \eta_j + h.c.) + \lambda_{14} (\rho^i \chi_i \eta^j \rho_j + h.c.).$$

El término adicional (3.14) modificará las matrices de masas del espectro escalar, introduciendo más parámetros libres (μ_4 y λ_{10-14}). Estas modificaciones hacen al modelo menos predictivo, ya que habrán más parámetros por ajustar. No obstante esto, se obtendrá el mismo número de bosones de Higgs y de Goldstone, con una estructura de masas equivalentes. En general, este sector es prácticamente independiente del valor de β , por lo que para hallar los valores de los términos de masa, μ_i^2 , se considera el V_H , ecuación (3.13), sin el último término.

Para cada VEV se emplea la condición $\partial \langle V_H \rangle / \nu_i = 0$, obteniendo los valores de μ_1^2 , μ_2^2 y μ_3^2 [18], los que se reemplazarán en V_H para expresar el espectro de masas en términos de los VEV y de las constantes de acoplamiento λ_i y f . Posteriormente se determinan las matrices de masa de las partes imaginaria $M_{\zeta\zeta}^2$, real $M_{\xi\xi}^2$ y cargada M_ϕ^2 .

Dentro del espectro físico que se obtiene se encuentra: 8 bosones de Goldstone asociados al grado de libertad longitudinal de cada bosón de gauge que adquiere masa, 9 bosones masivos pesados (con masas del orden de la primera transición) y un bosón liviano h^0 (con masa de orden electrodébil). Para el modelo 331 ($\beta = -1/\sqrt{3}$) se obtiene

$Q_1 = 0$, por lo que el bosón de gauge $K^{\pm Q_1}$ se convierte en dos bosones neutros K^0 y $\overline{K^0}$ (uno la antipartícula del otro) que adquieren masa a través de los bosones de Goldstone $G_1^{\pm Q_1} = (G_1^0, \overline{G_1^0})$, quedando en el espectro físico los bosones de Higgs neutros pesados $H_1^{\pm Q_1} = (H_1^0, \overline{H_1^0})$, que desboblan ligeramente su masa cuando se tiene en cuenta el término de potencial extra dado por (3.14), debido a las constantes de acople $\lambda_{10,13}$.

Sector fermiónico físico

Para este sector, se verifica que el espectro de la tabla 3.2 sea invariante $U(1)_X$ en los diferentes términos del lagrangiano de Yukawa. Para el sector de quarks se obtienen los siguientes términos

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_Y^q = & \sum_{m^*=2}^3 \overline{q_L^{(1)}} \left(h_{U_R^{(1)}}^{1\eta} U_R^{(1)} \eta + h_{D_R^{(1)}}^{1\rho} D_R^{(1)} \rho + h_{J_R^{(1)}}^{1\chi} J_R^{(1)} \chi \right. \\ & \left. + h_{U_R^{(m^*)}}^{1\eta} U_R^{(m^*)} \eta + h_{D_R^{(m^*)}}^{1\rho} D_R^{(m^*)} \rho \right) \\ & + \sum_{m^*, m'^*=2}^3 \overline{q_L^{(m^*)}} \left(h_{U_R^{(1)}}^{m^*\rho} U_R^{(1)} \rho + h_{D_R^{(1)}}^{m^*\eta} D_R^{(1)} \eta + h_{U_R^{(m'^*)}}^{m^*\rho} U_R^{(m'^*)} \rho \right. \\ & \left. + h_{D_R^{(m'^*)}}^{m^*\eta} D_R^{(m'^*)} \eta + h_{J_R^{(m'^*)}}^{m^*\chi} J_R^{(m'^*)} \chi \right) \\ & + h.c + \mathcal{L}_{-1/\sqrt{3}}^q \end{aligned} \quad (3.15)$$

el término $\mathcal{L}_{-1/\sqrt{3}}^q$ origina mezclas en la matriz de masa entre los quarks tipo up y down livianos, y los quarks exóticos pesados $J_{1,2,3}$. Ya que la primera transición se considera con una escala de energía más alta que la segunda, los quarks exóticos se pueden desacoplar de los livianos y el término $\mathcal{L}_{-1/\sqrt{3}}^q$ se considera despreciable, por lo que el lagrangiano más general para cualquier valor de β tiene la forma de la expresión (3.15).

Para el sector léptico los términos tienen la forma

$$\mathcal{L}_Y^l = \sum_{n, n'=1}^3 \overline{\ell_L^{(n)}} \left(h_{\nu_R^{(n')}}^{n\eta} \nu_R^{(n')} \eta + h_{e_R^{(n')}}^{n\rho} e_R^{(n')} \rho + h_{E_R^{(n')}}^{n\chi} E_R^{(n')} \chi \right) + h.c + \mathcal{L}_{-1/\sqrt{3}}^l \quad (3.16)$$

con

$$\mathcal{L}_{-1/\sqrt{3}}^l = \sum_{n=1}^3 \overline{\ell_L^{(n)}} \left(h_{\nu_R^{(n)}}^{n\chi} E_R^{(n)} \chi + h_{E_R^{(n)}}^{n\eta} \nu_R^{(n)} \eta \right) + \frac{1}{2} \sum_{n, n'=1}^3 \overline{\ell_L^{i(n)}} \left(\ell_L^{j(n')} \right)^c (h_{\rho} \rho_k) \varepsilon^{ijk} + h.c, \quad (3.17)$$

(3.17) induce mezclas entre leptones pesados y livianos en las matrices de masa y en primera aproximación se puede desacoplar y despreciar.

3.2.3. Lagrangiano del modelo en estados de masa

El lagrangiano del modelo 331 ($\beta = -1/\sqrt{3}$) expresado en estados de masa se obtiene a partir del lagrangiano escrito en estados electrodébiles.

Tomando el sector vectorial en estados de masa, A_μ, Z_μ, Z'_μ , y reemplazandolo en el lagrangiano de Dirac en estados electrodébiles se obtiene el lagrangiano de Dirac en base de sabor electrodébil, $f^0 = N^0, L^0, E^0$ [17]. Al aplicar la transformación a una base fermiónica de masa según

$$\begin{aligned} V_L^{f\dagger} M_{f^0} V_R^f &= M_f = \text{diag}(m_{f_1}, m_{f_2}, m_{f_3}) \\ f_L^0 &= V_L^f f_L; \quad f_R^0 = V_R^f f_R \end{aligned}$$

y considerando que las matrices de masa son hermíticas, el lagrangiano de Dirac en base de sabor electrodébil toma la forma

$$\mathcal{L}_D^\ell = i\bar{f}\not{\partial}f + eQ_f\bar{f}Af + \frac{g_L}{2c_w} [\bar{f}\gamma_\mu (g_\nu^f - g_a^f\gamma_5) f Z^\mu + \bar{f}\gamma_\mu (\tilde{g}_\nu^f - \tilde{g}_a^f\gamma_5) f Z'^\mu].$$

Los acoplamientos de Z y Z' se escriben como [17] [23]

$$g_{v,a}^f = V_L^{f\dagger} g_{v,a}^{f^0} V_L^f = I g_{v,a}^{f^0} \quad (3.18)$$

$$\tilde{g}_{v,a}^{N,L,E} = V_L^{N,L,E\dagger} \tilde{g}_{v,a}^{N^0,L^0,E^0} V_L^{N,L,E} = I \tilde{g}_{v,a}^{N^0,L^0,E^0} \quad (3.19)$$

$$\tilde{g}_{v,a}^{U,D,J} = V_L^{U,D,J\dagger} \tilde{g}_{v,a}^{U^0,D^0,J^0} V_L^{U,D,J} \quad (3.20)$$

donde $g_{v,a}^{f^0}$ y $\tilde{g}_{v,a}^{f^0}$ corresponden a los acoplamientos neutros vectoriales y axiales de Z y Z' , escritos explícitamente en la tabla 4.4

Fermión	$g_v^{f^0}$	$g_a^{f^0}$	$\tilde{g}_v^{f^0}$	$\tilde{g}_a^{f^0}$
ν_j	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{2s_w^2 - 1}{2\sqrt{3 - 4s_w^2}}$	$\frac{2s_w^2 - 1}{2\sqrt{3 - 4s_w^2}}$
e_j	$-\frac{1}{2} + 2s_w^2$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{4s_w^2 - 1}{2\sqrt{3 - 4s_w^2}}$	$-\frac{1}{2\sqrt{3 - 4s_w^2}}$
E_j	0	0	$\frac{1 - s_w^2}{\sqrt{3 - 4s_w^2}}$	$\frac{1 - s_w^2}{\sqrt{3 - 4s_w^2}}$

Tabla 3.4 Acoplamientos vectoriales y axiales de fermiones con bosones neutros Z y Z' en el modelo 331 ($\beta = -1/\sqrt{3}$).

Como los acoplamientos de Z y Z' asociados a los leptones son iguales para todas las componentes de las bases f^0 , según las relaciones de los acoplamientos neutros vectoriales y axiales, las matrices de rotación no cambian la forma de estos acoples dejandolos diagonales en las familias según las definiciones de $g_{v,a}^f$ y $\tilde{g}_{v,a}^{N,L,E}$, mientras que el acoplamiento de Z' asociado a los quarks es diferente, por lo que las matrices de rotación $V_L^{U,D,J}$ producen acoplamientos NO diagonales en $\tilde{g}_{v,a}^{U,D,J}$, lo que origina efectos de cambios de sabor neutros (FCNC) a nivel arbol para Z' .

Reescribiendo el término de acoplamiento neutro con Z y Z' del lagrangiano de Dirac en base de sabor electrodébil, en términos de los campos rotados Z_1 y Z_2 se obtiene

$$\mathcal{L}_D^{NC} = \frac{g_L}{2c_w} \left[\bar{f}\gamma_\mu (G_\nu^f - g_a^f\gamma_5) f Z_1^\mu + \bar{f}\gamma_\mu (\tilde{G}_\nu^f - \tilde{G}_a^f\gamma_5) f Z_2^\mu \right] \quad (3.21)$$

en donde:

$$G_{\nu,a}^f \approx g_{\nu,a}^f + \tilde{g}_{\nu,a}^f s_\theta = g_{\nu,a}^f + \delta g_{\nu,a}^f, \quad (3.22)$$

$$\tilde{G}_{\nu,a}^f \approx \tilde{g}_{\nu,a}^f + g_{\nu,a}^f s_\theta = \tilde{g}_{\nu,a}^f + \delta \tilde{g}_{\nu,a}^f. \quad (3.23)$$

Capítulo 4

Momento Magnético Anómalo (MMA) del muón

Una carga q circulando en una espira de radio r , con frecuencia f , tiene una corriente asociada dada por $J = qf$. El momento magnético, $\vec{\mu}$, está orientado a lo largo de la normal al área circulada, $A = \pi r^2$, de acuerdo con la regla de la mano derecha y es igual al producto de la corriente y el área, $|\vec{\mu}| = JA = qf\pi r^2$. Si la masa de q es m , su momento de inercia será $I = mr^2$. Si la frecuencia angular es $\omega = 2\pi f$, el momentum angular \vec{L} será $|\vec{L}| = I\omega = 2\pi mr^2 f$. La razón giromagnética de una partícula masiva circulante eléctricamente cargada está dada por la razón

$$\gamma \equiv \frac{|\vec{\mu}|}{|\vec{L}|} = \frac{qf\pi r^2}{2\pi mr^2 f} = \frac{q}{2m},$$

y corresponde a la constante de proporcionalidad entre el momentum angular y el momento magnético de cualquier sistema físico

$$\vec{\mu} = \frac{q}{2m} \vec{L}.$$

Así, la forma de la razón giromagnética se ve como la razón entre la mitad de la carga y la masa.

Momento magnético orbital clásico

En la dinámica clásica, el Hamiltoniano para una partícula libre no-relativista está dado por $p^2/2m$ donde $p = |\vec{p}|$ es el momentum de la partícula. El Hamiltoniano para una partícula (de carga $-q$) moviéndose en un campo magnético $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$, puede expresarse en términos de un momento $\pi = |\vec{\pi}| = \left| \vec{p} + \frac{q}{c} \vec{A} \right|$

$$H = \frac{\pi^2}{2m} = \frac{1}{2m} \left(p^2 + 2\frac{q}{c} \vec{p} \cdot \vec{A} + \frac{q^2}{c^2} A^2 \right),$$

en la aproximación de campo débil el término $|\vec{A}|^2$ es despreciable y se expresa el potencial vectorial en términos del campo magnético $\vec{A} = \frac{1}{2} (\vec{B} \times \vec{r})$

$$H = \frac{1}{2m} \left(p^2 + 2\frac{q}{c}\vec{p} \cdot \frac{1}{2} (\vec{B} \times \vec{r}) \right),$$

aplicando relaciones del algebra vectorial con $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$

$$H = \frac{p^2}{2m} + \vec{\mu} \cdot \vec{B} = H_0 + H_I,$$

con $\vec{\mu} = (q/2mc)\vec{L}$. La energía de la interacción magnética se define entonces como el producto punto del momento magnético y el campo magnético, lo cual evidencia el hecho físico de que la energía se minimiza cuando se alinean el momento magnético y el campo externo (cuando su producto punto es máximo). En el caso del electrón el mínimo de la energía se presenta cuando el momento magnético y el momentum angular están anti-alineados.

Momento magnético orbital cuántico

Reemplazando el momentum por su respectivo operador, $\hat{p} \rightarrow \frac{\hbar}{i}\vec{\nabla}$, el momentum angular orbital y el momento magnético pueden ser expresados (en coordenadas esféricas) en términos de operadores tal que: $\vec{B} = B\hat{k}$, $H = \mu_B B L_z$ y $L_z\phi = m\phi$, donde μ_B es el magnetón de Bohr. En el caso de un sistema físico que tiene simetría azimutal, $\Psi = R(r)\Theta(\theta)\Phi(\phi)$, la parte azimutal de la función puede representarse por $\Phi(\phi) = e^{im\phi}$, $\frac{1}{i}\frac{\partial\Psi}{\partial\phi} = m\Psi$, donde n es el número cuántico azimutal o magnético, que se debe al surgimiento de un campo dipolar magnético alrededor del eje principal. Así, la ecuación de valores propios para la energía de interacción magnética es

$$\begin{aligned} \hat{H}_I\Psi &= \mu_B B_z m\Psi = E\Psi, \\ E &= \mu_B B_z m. \end{aligned} \tag{4.1}$$

El resultado obtenido se manifiesta en las medidas del efecto Zeeman, desdoblado los niveles de energía atómicos, para sistemas inmersos en un campo magnético. La interpretación correcta del desdoblamiento Zeeman surgió con la posibilidad de un cuarto número atómico relacionado con un momentum angular adicional intrínseco, de valor semi-entero, con un factor g , igual a dos veces su momentum angular orbital. Para el caso del electrón, el momento magnético total consistía ahora de dos partes: una debida a un momentum angular orbital y otra con doble razón giromagnética, debida a un movimiento independiente, o momentum angular intrínseco, que llegó a ser lladado espín, \hat{S}

$$\begin{aligned} \hat{\mu}_z &= \frac{q}{2mc} \left(g_l \hat{L} + g_s \hat{S} \right), \\ g_l &= 1, \quad g_s = 2. \end{aligned}$$

Landé separó las constantes físicas del factor g en la razón giromagnética.

4.1. Acoplamiento electromagnético - Origen del momento magnético anómalo

El descubrimiento del espín intrínseco del electrón y del factor g , hicieron que las predicciones del momento magnético anómalo se realizarán con bastante rigor. Ésto se obtiene de la derivación de la energía de interacción para una partícula de Dirac en un campo magnético externo. Entonces en este apartado se ilustrará la interacción de una partícula, regida por la ecuación de Dirac, con un campo electromagnético clásico externo caracterizado por el potencial $A_\mu(x)$.

Partiendo de la ecuación de Dirac

$$(i\partial\!\!\!/ - e\mathcal{A} - m)\psi(x) = 0, \quad (4.2)$$

la cual es invariante bajo las transformaciones de gauge $\psi(x) \rightarrow e^{ie\alpha(x)}\psi(x)$, $A_\mu(x) \rightarrow A_\mu(x) - \partial_\mu\alpha(x)$, en donde e representa la carga de la partícula; para el caso del electrón $e = |-e|$.

Explicitando la ecuación (4.2):

$$(i\gamma^0\partial_0 + i\gamma^i\partial_i - e\gamma^0A_0 - e\gamma^iA_i - m) \begin{pmatrix} \tilde{\varphi} \\ \tilde{\chi} \end{pmatrix} = 0,$$

con $\nabla_i = \frac{\partial}{\partial x^i}$ y $\begin{pmatrix} \tilde{\varphi} \\ \tilde{\chi} \end{pmatrix}$ representando el espinor de una partícula relativista pero en el límite no relativista, $\varphi > \chi$ por lo que $\chi \sim 0$,

$$\left(i\frac{\partial}{\partial t} + i\vec{\alpha} \cdot \vec{\nabla} - e\vec{\alpha} \cdot \vec{A} - m\beta \right) \begin{pmatrix} \tilde{\varphi}(x,t) \\ \tilde{\chi}(x,t) \end{pmatrix} = 0, \quad (4.3)$$

en donde $\vec{\alpha}$ y β corresponden a las matrices de Dirac (A.4). La solución a la ecuación de Schrödinger dependiente del tiempo puede escribirse como $H\Psi(x,t) = i\hbar d(\Psi(x,t)/dt)$, con $\Psi(x,t) = \varphi(x)e^{iEt/\hbar}$ y $H\varphi(x) = E\varphi(x)$, de aquí que $\tilde{\varphi}(x,t)$ dependa débilmente del tiempo. (4.3) toma una forma matricial en donde el primer término corresponde a la matriz identidad y el segundo y tercer término dependen de las matrices (A.4).

(??) corresponde a dos ecuaciones, una para $\varphi(x,t)$ y la otra para $\chi(x,t)$. El paso a seguir es despejar la ecuación de χ en función de φ , reemplazarla en (??) y obtener una sólo ecuación en función de φ .

$$i\frac{\partial}{\partial t}\varphi - \vec{\sigma} \cdot \vec{\nabla}\chi - e\vec{\sigma} \cdot \vec{A}\chi + m\varphi = 0, \quad (4.4)$$

$$i\frac{\partial}{\partial t}\chi - \vec{\sigma} \cdot \vec{\nabla}\varphi - e\vec{\sigma} \cdot \vec{A}\varphi + m\chi = 0. \quad (4.5)$$

Para estudiar las implicaciones físicas de estas ecuaciones, se considera que en el límite no relativista la energía no relativista de una partícula depende fuertemente de su masa: $E = \sqrt{p^2 + m^2} = E = m\sqrt{1 + (p^2/m^2)}$, $\Psi(x,t) = \varphi(x)e^{iEt/\hbar} \simeq \varphi(x)e^{-imt}$.

Si se supone que los campos χ varían lentamente con el tiempo, $i\partial\chi/dt \rightarrow 0$, (4.5) toma la siguiente forma

$$\vec{\sigma} \cdot \vec{\nabla}\varphi + e\vec{\sigma} \cdot \vec{A}\varphi - m\chi = 0,$$

de donde

$$\chi \simeq \frac{(i\vec{\sigma} \cdot \vec{\nabla} + e\vec{\sigma} \cdot \vec{A})}{2m}\varphi,$$

reemplazando este resultado en (4.4) se obtiene

$$i\frac{\partial}{\partial t}\varphi = \frac{\vec{\sigma} \cdot (-i\vec{\nabla} - e\vec{A}) \vec{\sigma} \cdot (-i\vec{\nabla} - e\vec{A})}{2m}\varphi, \quad (4.6)$$

la ecuación de Schrödinger que incluye el espín de la partícula. En general, de la ecuación de Dirac se obtuvo la ecuación de Schrödinger con campo electromagnético [24]. Para manipular la ecuación (4.6) se utilizan las reglas de conmutación y el algebra de las matrices de Pauli, ecuación (A.20), así se obtiene

$$2m \left[i\frac{\partial}{\partial t}\varphi \right] = (-i\vec{\nabla} - e\vec{A}) (-i\vec{\nabla} - e\vec{A}) \varphi + i\epsilon_{ijk} (-i\vec{\nabla} - eA_i) (-i\vec{\nabla} - eA_j) \sigma_k \varphi,$$

cambiando $-i\vec{\nabla} \rightarrow \vec{p}$

$$2m \left[i\frac{\partial}{\partial t}\varphi \right] = (\vec{p} - e\vec{A}) (\vec{p} - e\vec{A}) \varphi + i\epsilon_{ijk} (\vec{p} - eA_i) (\vec{p} - eA_j) \sigma_k \varphi,$$

esta expresión se divide en dos términos. Para el primer término se tiene:

$$1^\circ \text{ término} = p^2\varphi - e\vec{p} \cdot (\vec{A}\varphi) - e\vec{A} \cdot \vec{p}\varphi + e^2\vec{A} \cdot \vec{A}\varphi,$$

$\vec{A} \cdot \vec{A} \rightarrow 0$ para campos débiles, $e\vec{p} \cdot (\vec{A}\varphi) = e(\vec{p} \cdot \vec{A})\varphi + e\vec{A} \cdot \vec{p}\varphi = e\vec{A} \cdot \vec{p}\varphi$, en el gauge de Coulomb $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$. Entonces se obtiene

$$1^\circ \text{ término} = p^2\varphi - 2e\vec{A} \cdot \vec{p}\varphi.$$

Suponiendo la existencia de un campo externo, $\vec{\nabla} \times \vec{A} = \vec{B}$, si $\vec{A} = \frac{1}{2}\vec{B} \times \vec{r}$, $\vec{\nabla} \times \vec{A} = \frac{1}{2}(\vec{\nabla} \cdot \vec{B})\vec{r} - \frac{1}{2}\vec{B}\vec{\nabla} \cdot \vec{r}$

$$1^\circ \text{ término} = p^2\varphi - e\vec{B} \cdot \vec{L}\varphi. \quad (4.7)$$

(4.7) se puede tomar como la expresión que da la interacción del momento angular orbital del electrón con un campo magnético externo.

Para el segundo término se tiene:

$$2^\circ \text{ término} = i2e\vec{B} \cdot \vec{S}\varphi. \quad (4.8)$$

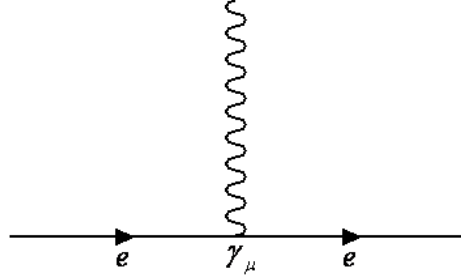


Figura 4.1: Diagrama de Feynman para una partícula que no tiene correcciones radiativas.

ya que el término de Levi-Civita no actúa sobre los productos simétricos¹.

Sumando los dos resultados se obtiene

$$i\frac{\partial}{\partial t}\varphi = \frac{p^2}{2m}\varphi - \frac{e}{2m}(\vec{L} + 2\vec{S}) \cdot \vec{B}\varphi. \quad (4.9)$$

En el átomo de hidrógeno el electrón alrededor del núcleo, descrito por la función de onda ψ_{nlm} , se acopla a un campo magnético \vec{B} ya sea a través de \vec{L} o a través de \vec{S} . Hay una pequeña diferencia en el acople del \vec{L} y el \vec{S} del electrón, dada por el factor de Landé $g = 2$, que corresponde a la razón giromagnética de la partícula.

Si la partícula no tuviera correcciones radiativas, g sería exactamente 2. Esta situación se representa en la figura 4.1.

El valor $g = 2$ es entonces una consecuencia de la interacción de una partícula de Dirac con un campo electromagnético clásico.

4.1.1. Correcciones al factor de Landé - Término de Pauli o de momento anómalo

Pauli notó que además de agregar un término proporcional al cuadri-potencial al lagrangiano de Dirac, también es posible agregar un término proporcional al tensor de campo electromagnético (es decir, términos con derivadas de A^μ). La ecuación no minimal que se debe usar para estudiar el comportamiento de las partículas en campos débiles es

$$\left[(i\vec{\mathcal{D}} - e\vec{A}) - m + \frac{\Delta g}{2} \frac{e}{4m} \sigma^{\mu\nu} F_{\mu\nu} \right] \psi(x) = 0,$$

que conduce a que la razón giromagnética de la partícula sea diferente de 2, $g = 2 + \Delta g$.

¹Teniendo en cuenta que $\epsilon_{ijk}A_i p_j = -\epsilon_{jik}A_i p_j$ cambiando $i \rightarrow j$ y $j \rightarrow i$, $\epsilon_{ijk}A_i p_j = -\epsilon_{ijk}A_j p_i$, aplicando este resultado: 2º término = $2ie\epsilon_{ijk}p_i A_j \sigma_k \varphi$. Con $\epsilon_{ijk}p_i A_j = (\vec{p} \times \vec{A})_k$, 2º término = $2\frac{ie}{2} (\vec{p} \times (\vec{B} \times \vec{r}))_k \sigma_k \varphi$. Por último con $\vec{p} \times (\vec{B} \times \vec{r}) = (\vec{p} \cdot \vec{r})\vec{B} - (\vec{p} \cdot \vec{B})\vec{r} = (\vec{p} \cdot \vec{r})\vec{B} = \vec{B}$, 2º término = $i2e\vec{B} \cdot \vec{S}\varphi$.

Del lenguaje no relativista se sabe que el tensor de campo electromagnético está relacionado con el campo magnético por $F_{ij} \sim \epsilon_{ijk} B_k$, $B_k \sim \epsilon_{ijk} F_{ij}$, por lo tanto $\vec{S} \cdot \vec{B} = \sigma_k F_{ij} \epsilon_{kij}$. En el lenguaje relativista y teniendo en cuenta las propiedades de las matrices de Dirac (A.6), se obtiene

$$\vec{S} \cdot \vec{B} \simeq \sigma_{\mu\nu} F^{\mu\nu}. \quad (4.10)$$

$$\mathcal{L} = \frac{e}{2m} (\bar{\psi} \sigma_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \psi),$$

en donde el término $\bar{\psi} \sigma_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \psi$ tiene dimensiones de momentum a la cinco, renormalizable al final.

En general, la sustitución minimal del momentum da origen al elemento de orden más bajo en A^μ , $\epsilon_n \gamma_\mu \square^n A^\mu$, en tanto que el término de Pauli es el de orden más bajo en la derivada de A^μ , $\mu_n \gamma_\mu \gamma_\nu \square^n F^{\mu\nu}$. Las constantes ϵ_n y μ_n , asociadas con los términos en A^μ y $F^{\mu\nu}$, respectivamente, tienen una importancia física directa. La primera constante, ϵ_0 , se identifica como la carga eléctrica ya que el término $\epsilon_0 \phi$ es la energía de interacción de una partícula en un potencial eléctrico. Del primer término de $\vec{S} \cdot \vec{B}$ se obtiene

$$\mu = \frac{\hbar}{2mc} \epsilon_0 + \mu_0 = \mu_B (1 + a), \quad (4.11)$$

donde $a = \mu_0/\mu_B$, es una constante adimensional que representa el Momento Magnético Anómalo. El factor de Landé lo predice la ecuación de Dirac en el límite de bajas energías. Extendiendo la teoría a ordenes más altos se incluyen factores de corrección cuánticos, Δg (algunas veces llamado $\Delta\kappa$). De la interacción del electrón con el fotón, sin tener en cuenta correcciones radiativas, se sabe que $g = 2$ entonces del diagrama de acople puntual se debe obtener Δg .

4.2. Generalización del MMA

El momento dipolar magnético es una propiedad intrínseca de las partículas que da lugar a efectos macroscópicos como el magnetismo. Los términos de interacción magnética mencionados surgen del *efecto Zeeman*: división de niveles vista en espectros atómicos. Si el espín está involucrado el fenómeno se denomina *efecto Zeeman anómalo*. La razón giromagnética γ de una partícula es la constante de proporcionalidad entre su momentum angular y su momento magnético. Se pueden obtener diferentes constantes de proporcionalidad ajustando las distribuciones de carga y masa independientemente, por ejemplo: $\vec{\mu} = g (q/2m) \vec{L}$, donde g es un factor de forma adimensional.

En la mecánica cuántica no relativista el momentum angular total \hat{J} está dado por la suma del momentum angular orbital \hat{L} y el momentum angular intrínseco de la partícula \hat{S} :

$$\mu_z = \frac{e}{2m} \left(g_l \hat{L} + g_s \hat{S} \right),$$

donde $g_l = 1$ y $g_s = 2$ corresponden a los factores de Landé. La esencia de $\hat{\mu}_z$ radica en asociar contenido físico del factor g a una nueva propiedad de la partícula.

En la mecánica cuántica relativista se puede hacer uso de la ecuación de Dirac e incluir la interacción de la partícula con un campo electromagnético en el momento cinético, $p_\mu \longrightarrow P_\mu = p_\mu + qA_\mu$. En el límite no relativista se obtiene la ecuación de Pauli en donde el operador de espín es $\hat{S} = \hbar\sigma/2$ y el factor de Landé es $g_s = 2$, como consecuencia de la interacción de una partícula de Dirac y un campo electromagnético clásico.

Para una partícula con espín el momento magnético es intrínseco y se obtiene reemplazando el operador momentum angular \vec{L} por el operador espín $\vec{S} = \vec{\sigma}/2$, donde σ_i ($i = 1, 2, 3$) son las matrices de Pauli. Así también se puede generalizar la forma clásica del momento magnético orbital

$$\vec{\mu}_m = gQ\mu_0 \frac{\vec{\sigma}}{2},$$

donde $\mu_0 = e/2m$, Q la carga eléctrica en unidades de e , $Q = -1$ para los leptones ($\ell = e, \mu, \tau$), $Q = +1$ para los antileptones y m es la masa. La última ecuación define la razón giromagnética g (factor g) cantidad que permite obtener importante información dinámica de los leptones.

La desviación desde el valor de Dirac $g_l/2 = 1$, obtenida a nivel clásico es el momento magnético anómalo

$$a_\ell \equiv \frac{g_\ell - 2}{2}. \quad (4.12)$$

A partir de correcciones cuánticas se puede expandir la función del vértice $\Gamma_\mu^a(p, q, p')$ de la interacción de una partícula con un fotón. El primer término de la expansión corresponde a la predicción de la ecuación de Dirac para $g_s = 2$. Los siguientes términos de la expansión son un conjunto de correcciones radiativas que conducen a una corrección de propiedades físicas, entre ellas, el momento dipolar magnético

$$\hat{\mu} = \hat{\mu}_z \left(1 + \frac{\Delta g}{2} \right) \quad (4.13)$$

de tal forma que se tiene un nuevo factor de Landé para la partícula

$$g = g_s \left(1 + \frac{g}{2} \right) = 2 + \Delta g \quad (4.14)$$

cuyo origen está en la cuantización del campo electromagnético y en la función de onda que representa la partícula. El término $\Delta g = g - 2$ es una constante adimensional que origina un **momento dipolar magnético anómalo**.

4.3. MMA de un leptón

El MMA de un leptón es una cantidad adimensional, un número, que en la QED podría ser calculado orden por orden como una expansión perturbativa en la constante de estructura fina α . Más allá de la QED, en el ME o en sus extensiones, las contribuciones de acoplamiento débil y fuerte deben calcularse.

La parte de la QED del momento magnético anómalo de un leptón cargado, a_l ($l = e, \mu, \tau$), surge desde el subconjunto de diagramas del ME que sólo contienen leptones y fotones. Para cada uno de los tres leptones l , de masa m_l , ésta cantidad adimensional tiene la forma

$$a_l^{QED} = A_1 + A_2 \left(\frac{m_l}{m_j} \right) + A_2 \left(\frac{m_l}{m_k} \right) + A_3 \left(\frac{m_l}{m_j}, \frac{m_l}{m_k} \right), \quad (4.15)$$

donde m_j y m_k son las masas de los otros dos leptones. El término A_1 surge de los diagramas que contienen fotones y leptones de un sólo un sabor. Los términos A_2 y A_3 son funciones de la relaciones entre masas mencionadas y son generadas por gráficas que contienen leptones de diferente sabor. La contribución de un leptón j al a_l^{QED} es suprimida por m_l^2/m_j^2 si $m_j \gg m_l$ y es incrementada por $\ln(m_l/m_j)$ si $m_j \ll m_l$. Por ejemplo, la contribución del muón a a_e^{QED} es fuertemente suprimida por un factor $(m_e^2/m_\mu^2) \sim 10^{-5}$; por el contrario la parte de la QED del $a_{\mu,\tau}$ más allá de un loop es dominada por términos independientes de la masa. Las funciones A_i ($i = 1, 2, 3$) se pueden expandir como series de potencias en α/π , calculadas orden por orden como

$$A_i = A_i^{(2)} \left(\frac{\alpha}{\pi} \right) + A_i^{(4)} \left(\frac{\alpha}{\pi} \right)^2 + A_i^{(6)} \left(\frac{\alpha}{\pi} \right)^3 + \dots \quad (4.16)$$

Sólo un diagrama está involucrado en la evaluación de la contribución de más bajo orden (primer orden en α , segundo orden en la carga eléctrica) la cual da el resultado de Schwinger $A_1^{(2)} = 1/2$. Los coeficientes dependientes de la masa son de orden más alto.

4.4. Función de vértice generalizada

La función de vértice electromagnético más general, Γ_μ , puede construirse en términos de todos los posibles invariantes de Lorentz asociados con el vértice. De ésta se obtiene la corriente electromagnética, $J_\mu(q_\mu^2)$, en donde $q_\mu = (p_2 - p_1)_\mu$ es el momento transferido proporcionado por el fotón externo y p_2, p_1 son los momenta del fermión entrante y saliente. Los posibles invariantes de Lorentz son: $q_\mu, q_\mu \gamma^5, \gamma_\mu, \gamma_\mu \gamma^5, \sigma_{\mu\nu} q^\nu, \sigma_{\mu\nu} q^\nu \gamma^5$, donde $\sigma_{\mu\nu} \equiv i [\gamma_\mu, \gamma_\nu] / 2$ ya que cualquier producto de tres o más matrices de Dirac se reduce a uno de estos términos.

En la teoría cuántica de campo, la identidad de Ward y su generalización por Takahashi son relaciones exactas entre las funciones irreducibles de una partícula y los propagadores, las cuales son válidas para todos los ordenes de la teoría de perturbaciones. Los coeficientes reales, $F_i(q^2)$ contienen la dependencia de la energía asociada con cada tipo de estructura de vértice. La estructura del vértice más general se puede escribir como

$$\langle p_2 | J_\mu(q_\mu^2) | p_1 \rangle = \bar{u}_2 \Gamma_\mu u_1,$$

donde los términos q_μ de Γ_μ no aparecen ya que son invariantes por paridad

$$\begin{aligned}\Gamma_\mu &= eF_1(q^2)\gamma_\mu + eF_A(q^2)(\gamma_\mu\gamma_5q^2 - 2m\gamma_5q_\mu) \\ &\quad + \frac{e}{2m}F_2(q^2)i\sigma_{\mu\nu}q^\nu + \frac{e}{2m}F_3(q^2)\sigma_{\mu\nu}q^\nu\gamma^5.\end{aligned}$$

Todos los factores de forma se normalizan a transferencia de momentum cero. El factor de forma de Dirac $F_1(q^2)$ se normaliza para la interacción de Coulomb a transferencia de momentum $F_1(0) = 1$. El factor de forma de Pauli $F_2(0)$ se normaliza para dar el momento magnético anómalo:

$$\begin{aligned}\mu &= \frac{\epsilon_0\hbar}{2mc} + \mu_0, \\ \mu &= \mu_B(F_1(0) + F_2(0)), \\ \mu &= \mu_B(1 + a),\end{aligned}$$

donde $F_2(0) \equiv a = \mu_0/\mu_B$ es la constante de momento magnético anómalo normalizada al magnetón de Bohr y μ_0 es la constante derivada de (??), que agregó Pauli al lagrangiano de Dirac-Maxwell acoplado minimalmente. El tercer factor, $F_3(0)$, está asociado con el momento dipolar eléctrico.

Así, la descomposición Gordon de la corriente electromagnética está dada por

$$\bar{u}_2\gamma_\mu u_1 = \frac{1}{2m}\bar{u}_2\left[(p_1 + p_2)_\mu + i\sigma_{\mu\nu}q^\nu\right]u_1,$$

lo cual implica que

$$i\bar{u}_2(p_1 + p_2)_\mu u_1 = 2im\bar{u}_2\gamma_\mu u_1 + \bar{u}_2(\sigma_{\mu\nu}q^\nu)u_1.$$

De esta última expresión se ve que los términos del tipo $p_\mu \equiv (p_1 + p_2)_\mu$ pueden ser reescritos en términos del tensor de estructura, $\sigma_{\mu\nu}q^\nu$, que contribuye a $F_2(0)$, y del vector de estructura, γ_μ , que contribuye a $F_1(0)$.

4.5. MMA del muón en el ME

Para calcular el MMA del muón en el ME es necesario calcular amplitudes de probabilidad como las de los diagramas de la figura 4.2.

Ya que en el ME los neutrinos son partículas sin masa estos diagramas no son relevantes en el cálculo del MMA del muón.

4.5.1. Predicción del $(g - 2)$ desde la QED

La predicción teórica del $(g - 2)$ desde la QED requiere del conocimiento de dos parámetros fundamentales: la constante de estructura fina, α , y la masa de los leptones. El parámetro más importante para calcular a_μ , a ordenes superiores, es la constante de

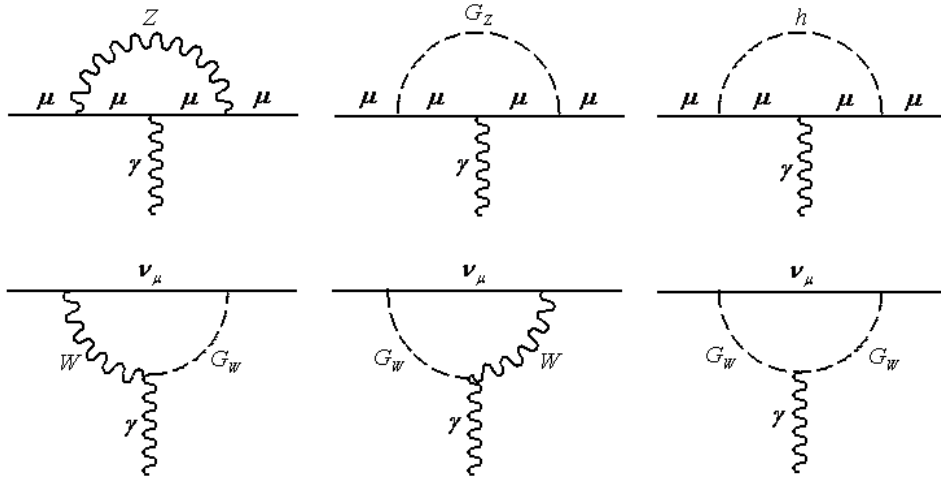


Figura 4.2: Diagramas de Feynman que se deben calcular para obtener el MMA del muón en el ME a un loop.

estructura fina, ya que el resultado que se obtiene a primer orden es $\frac{\alpha}{2\pi}$. Correcciones de más de dos loops incluyen contribuciones de loops en los que diferentes leptones pueden circular y los resultados dependen de las relaciones de masas correspondientes. Con las masas dadas en la tabla 1.2 los valores que se emplean para las relaciones de masas entre muón-electrón y muón-tau son: $m_\mu/m_e = 206,7682838$ (54) y $m_\mu/m_\tau = 0,0594592$ (97), respectivamente. Las contribuciones dependientes de la masa son diferentes para a_e , a_μ y a_τ , de modo que $a_e \neq a_\mu \neq a_\tau$.

El MMA, como cantidad adimensional, exhibe contribuciones numéricas expandidas en potencias de α , que se podrían obtener en la QED para un tipo de leptones y como contribuciones dependientes de las relaciones de masas si se toma en cuenta diferentes leptones. Así tomando en cuenta los tres leptones se obtienen funciones de las relaciones de las masas de los leptones: m_e , m_μ y m_τ . La contribución de la QED para el a_μ tiene la forma:

$$a_\mu^{QED} = A_1 + A_2 \left(\frac{m_\mu}{m_e} \right) + A_2 \left(\frac{m_\mu}{m_\tau} \right) + A_3 \left(\frac{m_\mu}{m_e}, \frac{m_\mu}{m_\tau} \right). \quad (4.17)$$

A_1 representa un término común para los tres leptones. Así mismo loops cerrados de fermiones contribuyen a este término con tal de que el fermión sea el muón (=leptón externo). El término A_2 se obtiene de contribuciones de diagramas con loops cerrados de fermiones. Tales contribuciones surgen a nivel de dos loops. Para el muón como un leptón externo se tienen dos posibilidades: un loop electrónico adicional (light-in-heavy) $A_2(m_\mu/m_e)$, o un loop taúnico adicional (heavy-in-light) $A_2(m_\mu/m_\tau)$, dos contribuciones de carácter bastante diferente. La primera produce logaritmos grandes $\propto \ln(m_\mu/m_e)^2$, en tanto que la segunda, a causa del desacoplamiento de partículas pesadas en teorías como la QED, produce solo pequeños efectos del orden de $\propto (m_\mu/m_e)^2$.

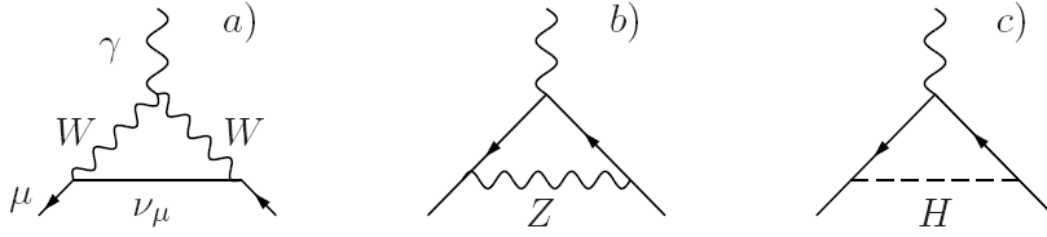


Figura 4.3: Diagramas de Feynman para la determinación de la contribución del ME al MMA del muón. [32]

La contribución de dos-escalas requiere un loop fotónico y un loop adicional pesado y de aquí surgen diagramas a tercer orden. Escribiendo cada uno de los términos en teoría de perturbaciones renormalizable, en términos de una expansión apropiada de α :

$$\begin{aligned} A_1 &= A_1^{(2)} \left(\frac{\alpha}{\pi}\right) + A_1^{(4)} \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^2 + A_1^{(6)} \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^3 + A_1^{(8)} \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^4 + A_1^{(10)} \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^5 + \dots \\ A_2 &= A_2^{(4)} \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^2 + A_2^{(6)} \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^3 + A_2^{(8)} \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^4 + A_2^{(10)} \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^5 + \dots \\ A_3 &= A_2^{(6)} \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^3 + A_2^{(8)} \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^4 + A_2^{(10)} \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^5 + \dots \end{aligned}$$

posteriormente se denotará:

$$C_L = \sum_{k=1}^3 A_k^{(2L)}$$

como el coeficiente de loop- L del término $(\alpha/\pi)^L$. La contribución a orden más bajo de la QED al a_l se puede escribir como

$$a_l^{(2)QED} = \frac{\alpha}{\pi} \int_0^1 dx (1-x) = \frac{\alpha}{2\pi}. \quad (4.18)$$

4.5.2. Correcciones electrodébiles

Ha sido de gran interés estudiar la contribución de procesos virtuales débiles al $g-2$ ya que es posible calcularla inequívocamente, por lo que juega un papel importante en la comparación con experimentos. La prueba actual de la existencia de la contribución débil radica en resultados experimentales obtenidos del experimento *E821*. La contribución débil consta de tres desviaciones del ME, como se ve en la figura 4.3.

Contribución a un loop

Ya que a_μ es un observable físico, se puede calcular directamente en el gauge unitario. El diagrama a) es de particular interés ya que exhibe un vértice de gauge triple. El acoplamiento del fotón al bosón cargado W (diagrama a) es determinado por la invariancia de gauge electromagnética. En la aproximación en la que los términos $O(m_\mu^2/M_{W,Z}^2)$

son despreciables, las contribuciones de los bosones de gauge están dadas por [32]:

$$\begin{aligned} a_\mu^{(2)EW}(W) &= \frac{\sqrt{2}G_\mu m_\mu^2}{16\pi^2} \frac{10}{3} \simeq +388,70(0) \times 10^{-11}, \\ a_\mu^{(2)EW}(Z) &= \frac{\sqrt{2}G_\mu m_\mu^2}{16\pi^2} \frac{(-1 + 4s_w^2)^2 - 5}{3} \simeq -193,89(2) \times 10^{-11}. \end{aligned} \quad (4.19)$$

Para el intercambio de Higgs se encuentra:

$$a_\mu^{(2)EW}(H) \simeq \frac{\sqrt{2}G_\mu m_\mu^2}{4\pi^2} \left\{ \begin{array}{ll} \frac{m_\mu^2}{m_H^2} \ln \frac{m_H^2}{m_\mu^2} & \text{para } m_H \gg m_\mu \\ \frac{3}{2} & \text{para } m_H \ll m_\mu \end{array} \right\}, \quad (4.20)$$

$$a_\mu^{(2)EW}(H) \leq 5 \times 10^{-14} \text{ para } m_H \geq 114 \text{ GeV.}$$

teniendo los límites experimentales del LEP para m_H esta contribución es despreciable. Usando los parámetros del ME para las masas de los campos [4] se obtiene finalmente

$$a_\mu^{(2)EW} = (194,82 \pm 0,02) \times 10^{-11}, \quad (4.21)$$

donde el error se debe a la incertidumbre en s_w^2 .

4.5.3. Contribución light by light

Extendiendo la teoría a ordenes de perturbación más altos se deben incluir diagramas de orden superior en α , recordando que $e^2 \sim \alpha/4\pi$. A orden superior, α^2 , se pueden presentar los diagramas de la figura 4.4.

En el caso en el que en el digrama (d) de la figura 4.4 se tengan quarks, surge el diagrama 4.5.

Analizando el término e/m del lagrangiano se ve que $q \sim m$, para el electrón $e^- \sim 0,5 \text{ MeV}$, pero para el muón $\mu^- \sim 150 \text{ MeV}$, por lo que correcciones del orden α^2 para el muón son proporcionales a $q^2 \sim m^2 \sim (150 \text{ MeV})^2$, escala de energía para la que la QCD ya no es una teoría perturbativa. Realmente no se conoce el cálculo del diagrama 4.5 y teniendo en cuenta que α^2 es del orden de 10^{-9} , en tanto que el MMA del muón se ha medido con una precisión de 10^{-11} (cifras significativas), se concluye que los diagramas 4.4 y el subdiagrama 4.5 contribuyen al MMA del muón de manera relevante.

4.5.4. Predicciones del $g - 2$ a partir del ME

En la siguiente tabla se indica las contribuciones que entran en la predicción teórica de a_μ .

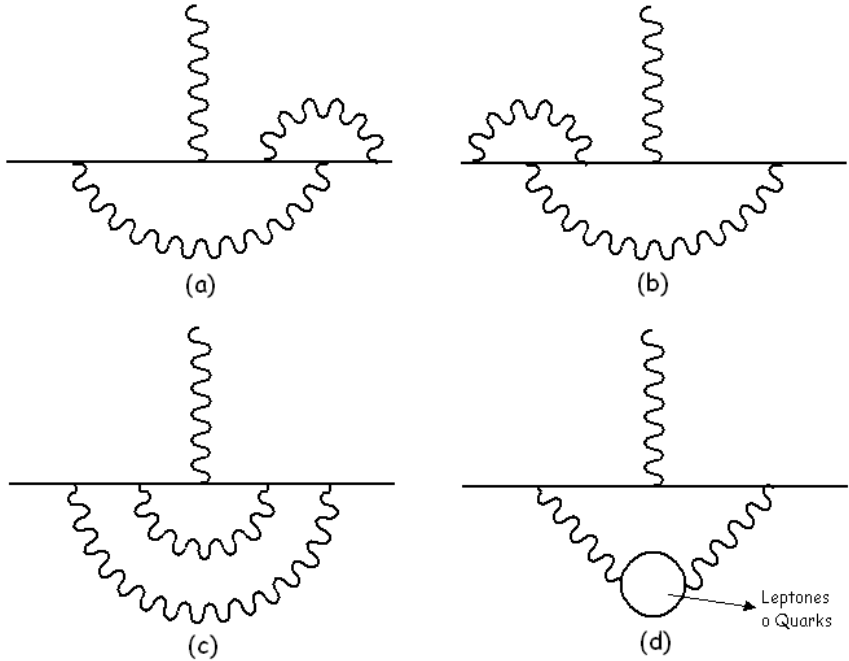


Figura 4.4: Diagramas de Feynman de orden superior, orden α^2 .

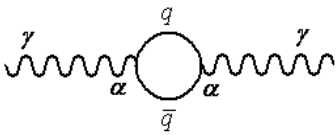


Figura 4.5: Subdiagrama de orden superior en α^2 con quarks.

Contribución	Valor ($\times 10^{-11}$)	Error
QED (incluye correcciones a 4 y 5 loops)	116584718,1	0,2
Principal de la polarización del vacío hadrónico	6903,0	52,6
Secundaria de la polarización del vacío hadrónico	-100,3	1,1
Light by light	116,0	39,0
Débil (incluye correcciones a 2 loops)	153,2	1,8
Teoría	116591790,0	64,6
Experimento	116592080,0	63,0
Experimento - Teoría	290,0	90,3

Tabla 4.1. Comparación entre resultados teóricos predichos por el ME para el MMA del muón y resultados experimentales [32].

Con respecto a la contribución de la polarización del vacío hadrónico cabe resaltar que debido a que es un efecto no perturbativo produce las contribuciones más grandes a las incertidumbres de las predicciones teóricas. En general, la incertidumbre de esta contribución se ha podido reducir con el progreso de las mediciones de secciones transversales de procesos tales como la aniquilación de e^+e^- . Así al mejorar la predicción del valor teórico del MMA del muón, el valor de la incertidumbre se reducirá de tal forma que su resultado se podrá comparar con el error experimental encontrado en la medición del $g - 2$ del muón.

4.6. MMA del muón en los modelos 331

Para calcular el MMA del muón en los modelos 331 es necesario calcular los diagramas de la figura 4.6. Se incluyen las partículas exóticas L y N que se caracterizan por ser pesadas.

En el próximo capítulo se presentarán los resultados generales de las correcciones cuánticas a un loop calculadas para el proceso de interacción Z' - muón y sus respectivas implicaciones en el MMA del muón. En el apéndice B se presentan los respectivos cálculos.

4.7. Medición del MMA

El momento magnético anómalo es un observable que se puede estudiar experimentalmente desde un análisis preciso del movimiento de un leptón en un campo magnético externo. Es una propiedad clave en física de partículas elementales debido a que puede ser predicho teóricamente con una exactitud muy alta y se puede medir con bastante precisión en un arreglo experimental inequívoco, cuyas condiciones se pueden controlar de forma muy precisa con pequeñas incertidumbres sistemáticas.

La primera medida del MMA del muón se realizó en la Universidad de Columbia en 1960 [25]. El resultado que se obtuvo fue de $a_\mu = 0,00122(8)$ con una precisión del 5 % sin mostrar alguna diferencia con el MMA del electrón. En 1961 en el ciclotrón del

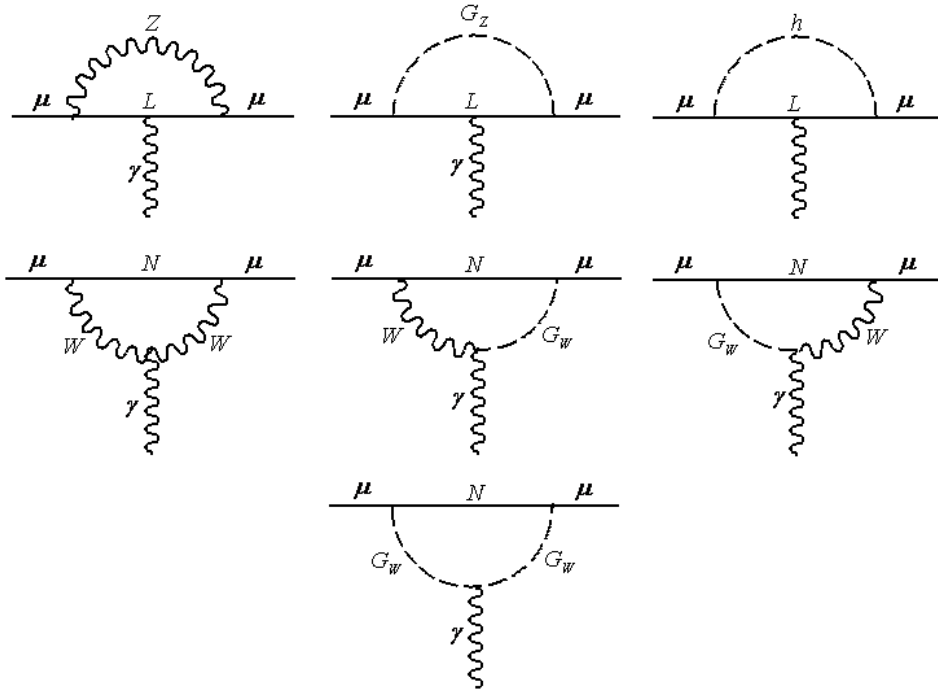


Figura 4.6: Correcciones cuánticas a un loop al MMA del muón en el modelo 331.

CERN [28] por primera vez se determinó esta medida con un buen grado de precisión. Esta medida fue la primera evidencia real de que un muón era un electrón pesado. El anillo de almacenamiento de muones se desarrolló por primera vez en el CERN [29] y permitió medir a_μ , con una precisión de 270 ppm y una desviación de $1,7\sigma$ con la teoría, para el μ^+ y para el μ^- , resultados que permitieron verificar el teorema CPT² para los muones. Posteriormente Aldins et al. [30] realizaron cálculos a tres loops $O(\alpha^3)$ que incluyeron contribuciones leptónicas y de dispersión light-by-light, inclusión que mejoró el acuerdo entre el experimento y la teoría. Con el segundo anillo de almacenamiento de muones desarrollado por el CERN se realizaron mediciones de a_μ con una precisión de 7 ppm, en las que por primera vez se tuvo en cuenta el término m_μ^2/m_e^2 , de contribución hadrónica, lo que evidenció la importancia de incluir estas contribuciones a fin de mejorar la precisión de la medida. 20 años después en el E821,

²El producto de las tres transformaciones discretas C , P y T , tomadas en cualquier orden, es una simetría de cualquier teoría de campo cuántico local relativista. CPT es una simetría universal y garantiza que las partículas y las antipartículas tengan masas idénticas y tiempos de vida como los que predice el ME. Los momentos dipolares magnético $\vec{\mu}_m$ y eléctrico \vec{d}_e son pseudo vectores y son proporcionales al vector de espín $\vec{\sigma}$. Los campos eléctrico \vec{E} y magnético \vec{B} transforman como campos vectoriales y pseudo vectoriales respectivamente. Un campo pseudo vectorial cambia de signo bajo T , pero no bajo P , en tanto que un campo vectorial cambia bajo P pero no bajo T . De aquí que en teorías que se conserve P y/o T sólo el término $-\vec{\mu}_m \cdot \vec{B}$ es permitido en tanto que un término de dipolo eléctrico $-\vec{d}_e \cdot \vec{E}$ es prohibido.

experimento del Brookhaven National Laboratory (BNL), se corrió el experimento de anillo de almacenamiento de muones, a una energía particular, *energía mágica*, que producía mucha más precisión [40].

4.8. Propiedades del muón

Los experimentos $g - 2$ del muón analizan el movimiento del espín de los muones sobre una órbita circular en un campo magnético homogéneo, lo que requiere que los muones estén polarizados. Luego del descubrimiento de la violación de paridad en la interacción débil se evidenció que los decaimientos débiles de piones cargados producen muones polarizados. De ese modo la violación de paridad máxima, en los procesos que intervienen corrientes cargadas, genera las condiciones ideales de los mismos. Ya que los neutrinos derechos ν_R no son producidos en transiciones débiles mediadas por los bosones de gauge W^\pm , la producción de ν_R en reacciones débiles ordinarias es casi nula, lo cual beneficia la conservación del número leptónico para todos los propósitos prácticos experimentales.

El mecanismo de producción de piones (partículas secundarias que se producen en el choque de protones con un blanco material) más efectivo se realiza vía excitación y subsecuente decaimiento de resonancias bariónicas. Para los piones el canal dominante es el $\Delta_{33} \rightarrow N\pi$.

Todos los experimentos $g - 2$ están basados en el canal de decaimiento

$$\begin{aligned} \pi &\longrightarrow \mu + \nu_\mu \\ \mu &\longrightarrow e + \nu_e + \nu_\mu \end{aligned}$$

el cual produce muones polarizados que a su vez decaen en electrones propagándose según la dirección de polarización de los muones.

Decaimiento del pion

$\pi^- = (\bar{u}\gamma_5 d)$ representa un estado ligado pseudo-escalar de un quark down y un antiquark up. La matriz de elementos del proceso de interés en este trabajo es

$$T = {}_{out} \langle \mu^-, \bar{\nu}_\mu | \pi^- \rangle_{in} = -i \frac{G^\mu}{\sqrt{2}} V_{ud} F_\pi [\bar{u}_\mu \gamma^\alpha (1 - \gamma_5) v_{\nu_\mu}] p_\alpha$$

en donde F_π define la constante de decaimiento de piones [32], dada por el elemento de matriz hadrónico, $\langle 0 | \bar{d} \gamma_\mu \gamma_5 u | \pi(p) \rangle = i F_\pi p_\mu$. El decaimiento descrito sólo es posible para muones con masa diferente de cero, respetando así la helicidad de la partícula. El ancho de decaimiento del pión está dado por

$$\Gamma_{\pi^- \rightarrow \mu^- \bar{\nu}_\mu} = \frac{G^\mu{}^2}{8\pi} |V_{ud}|^2 F_\pi^2 m_\pi m_\mu^2 \left(1 - \frac{m_\mu^2}{m_\pi^2}\right)^2 \times (1 + \delta_{QED}), \quad (4.22)$$

donde δ_{QED} representa la corrección hecha por la QED.

Decaimiento del muón

El muón decae vía decaimiento débil de tres cuerpos: $\mu^- \longrightarrow e^- \bar{\nu}_e \nu_\mu$. La matriz de elementos del decaimiento del muón, se obtiene a partir del lagrangiano efectivo de interacción

$$\mathcal{L}_{ef,int} = -\frac{G_\mu}{\sqrt{2}} [\bar{e}\gamma^\alpha (1 - \gamma_5) \nu_e] [\bar{\nu}_\mu \gamma_\alpha (1 - \gamma_5) \mu] + h.c.,$$

y tiene la forma

$$T = {}_{out} \langle e^-, \bar{\nu}_e \nu_\mu | \mu^- \rangle_{in} = \frac{G_\mu}{\sqrt{2}} [\bar{u}_e \gamma^\alpha (1 - \gamma_5) v_{\nu_e}] [\bar{u}_{\nu_\mu} \gamma_\alpha (1 - \gamma_5) u_\mu],$$

de donde se ve que el μ^- y el e^- tienen la misma helicidad (izquierda) en la aproximación de ausencia de masa. Según el esquema del decaimiento del muón, medir la dirección del momentum del electrón da la dirección del espín del muón.

El ancho de decaimiento diferencial de encontrar un e^\pm con energía reducida entre x_e y $x_e + dx_e$, emitido a un ángulo entre θ y $\theta + d\theta$, está dado por:

$$\frac{d^2\Gamma^\pm}{dx_e d\cos\theta} = \frac{G_\mu^2 m_\mu^5}{192\pi^3} x_e^2 [3 - 2x_e \pm P_\mu \cos\theta (2x_e - 1)], \quad (4.23)$$

en ésta expresión la energía reducida está dada por $x_e = E_e/W_{\mu e}$ con $W_{\mu e} = \text{máx } E_e = (m_\mu^2 + m_e^2)/2m_\mu$ y el ángulo de emisión es el ángulo entre el momentum \vec{p}_e del e^\pm y el vector polarización del muón \vec{P}_μ .

4.9. Experimentos $g - 2$ del muón

El experimento Brookhaven National Laboratory (BNL) $g - 2$ del muón

Como se ilustra en la figura 4.7, cuando muones polarizados viajan alrededor de una orbita circular en un campo magnético constante, a_μ es responsable de la dirección del espín del muón, por la *precesión Larmor*, caracterizada por la frecuencia $\vec{\omega}_a$. El principio del experimento BNL $g - 2$ del muón involucra el estudio del movimiento orbital y de espín de muones altamente polarizados en un anillo de almacenamiento magnético. Éste método ya había sido aplicado en un experimento del CERN [31], pero el experimento BNL incluye un valor muy alto de la intensidad del haz de protones primario desde el anillo de almacenamiento de protones AGS (Alternating Gradient Synchrotron) y la inyección de muones en lugar de piones junto con un imán super-férrico en el anillo de almacenamiento [33].

El experimento Brookhaven $g - 2$ del muón funciona como se ilustra en la figura 4.8. Protones de 24 GeV provenientes del AGS chocan con un blanco y producen piones inestables que decaén en muones y neutrinos. Los muones tienen un momento magnético en la dirección del eje de vuelo. Los muones polarizados longitudinalmente, producto del decaimiento de piones, son inyectados en un campo magnético uniforme \vec{B} en el que se mueven en círculo. El anillo es una estructura de forma toroide con un diámetro de 15 m y un tubo de 90 mm de apertura. El valor del campo es de $1,45 \text{ T}$ y el momento de los

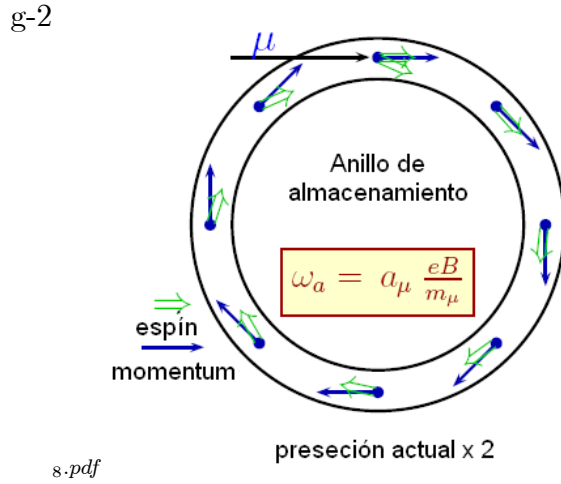


Figura 4.7: Presección del espín en el anillo $g - 2$ ($\sim 12^\circ/\text{círculo}$). [32]

muones es de $p_\mu = 3,094 \text{ GeV}$. En el plano horizontal de la órbita los muones se mueven de forma ciclotrónica relativista con una frecuencia angular ω_c . Por el movimiento del momento magnético del muón en el campo magnético homogéneo el espín cambia de una forma particular descrita por la precesión Larmor. Por cada círculo barrido, la dirección del espín del muón cambia 12° pero su momentum permanece inalterado, como se ilustra en la figuras 4.7 y 4.8. Así, el espín del muón está precesando con una frecuencia angular ω_s , ligeramente mayor que ω_c , por la frecuencia angular $\omega_a = \omega_s - \omega_c$,

$$\omega_c = \frac{eB}{m_\mu \gamma}, \quad \omega_s = \frac{eB}{m_\mu \gamma} + a_\mu \frac{eB}{m_\mu}, \quad \omega_a = a_\mu \frac{eB}{m_\mu}, \quad (4.24)$$

donde $\gamma = 1/\sqrt{1-v^2}$ es el factor de Lorentz relativista y v la velocidad del muón. Los parámetros medidos en el experimento son ω_a y B . En este experimento, la masa del muón se obtiene desde un experimento independiente, el "muonion", el cual corresponde al sistema ligado (μ^+e^-). Si el momento magnético del muón fuese exactamente el predicho por Dirac, $g = 2$ (a nivel árbol), la dirección del espín del muón no cambiaría.

Para retener los muones en el anillo se emplea un sistema de enfoque electrostático, por lo que adicional al campo magnético \vec{B} debe ser aplicado un campo eléctrico cuadrupolar \vec{E} en el plano normal a la orbita de la partícula, el cual cambiará la frecuencia angular de acuerdo con

$$\vec{\omega}_a = \frac{e}{m_\mu} \left[a_\mu \vec{B} - \left(a_\mu - \frac{1}{\gamma^2 - 1} \right) \vec{v} \times \vec{E} \right]. \quad (4.25)$$

Esta expresión clave para medir a_μ fue encontrada por Bargmann, Michel y Telegdi en 1959 [34]. En esta expresión γ se puede escoger de modo que $a_\mu - 1/(\gamma^2 - 1) = 0$, caso en el que ω_a es independiente de \vec{E} . Este parámetro es denominado γ mágico y cuando se corre el experimento con la energía mágica adecuada, los muones son altamente

anillo g-2

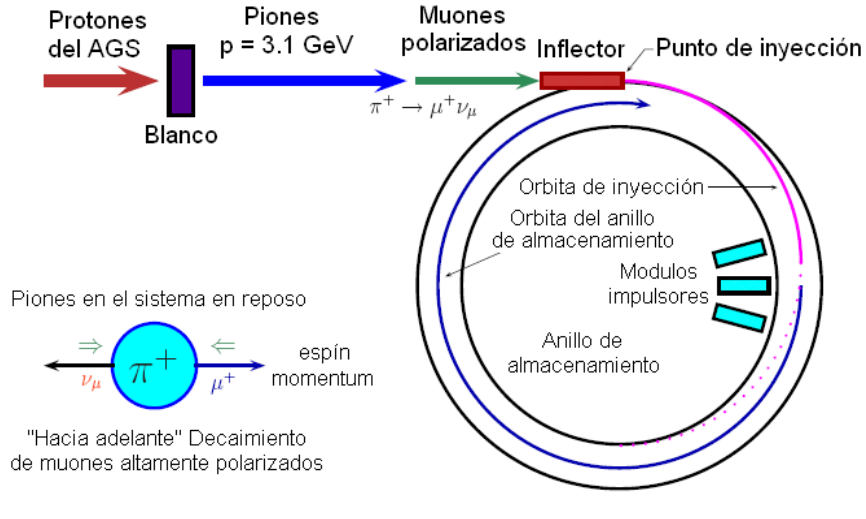


Figura 4.8: Esquema de la inyección y almacenamiento de muones en el anillo $g - 2$. [32]

relativistas, siendo así $\gamma = \sqrt{1 + 1/a_\mu} = 29,3$. Los muones viajan con velocidades próximas a la de la luz con energías mágicas de alrededor de $E_{mágica} = \gamma m_\mu \simeq 3,098 \text{ GeV}$. Este alto valor de energía, gobernado por el requerimiento de minimizar el cambio en la frecuencia de precesión causado por el cuadrupolo eléctrico impuesto sobre el campo magnético uniforme, conduce a una gran dilatación del tiempo. El tiempo de vida de un muón en reposo es de $2,19711 \mu s$, en tanto que en el anillo es de $64,435 \mu s$ (en teoría) ($64,378 \mu s$ en el experimento). Así, con un tiempo de vida superior al tiempo de vida en reposo, los muones circulan en el anillo muchas veces antes de decaer en un positrón y dos neutrinos: $\mu^+ \rightarrow e^+ + \nu_e + \bar{\nu}_\mu$. En este experimento hay una fuerte correlación entre la dirección del espín del muón y la dirección de emisión de los positrones. El ancho de decaimiento diferencial para el muón, en el sistema en reposo, está dado por (4.23) reescrita como

$$d\Gamma = N(E_e) \left(1 + \frac{1 - 2x_e}{3 - 2x_e} \cos \theta \right) d\Omega. \quad (4.26)$$

E_e representa la energía del positrón, x_e corresponde a E_e en unidades de energía máxima $m_\mu/2$, NE_e representa un factor de normalización y θ el ángulo entre el momentum del positrón en el sistema en reposo del muón y el espín del muón.

Los positrones que decaen son detectados por 24 calorímetros uniformemente distribuidos en el interior del anillo de almacenamiento de muones. Estos contadores miden la energía del positrón y permiten determinar la dirección del espín del muón. El número de positrones que decaen con energía más grande que E emitidos en un tiempo t , después

de que los muones son inyectados en el anillo de almacenamiento, está dado por

$$N(t) = N_0(E) \exp\left(\frac{-t}{\gamma\tau_\mu}\right) [1 + A(E) \sin(\omega_a t + \phi(E))], \quad (4.27)$$

donde $N_0(E)$ representa un factor de normalización, τ_μ el tiempo de vida del muón (en el sistema en reposo del muón) y $A(E)$ el factor de asimetría para positrones de energía mayor a E . La ley de decaimiento exponencial para el decaimiento de muones es modulada por la frecuencia angular $g - 2$. De esta forma la frecuencia angular ω_a se determina limpiamente de la distribución temporal del decaimiento de positrones observado con calorímetros electromagnéticos [35].

La otra cantidad que se debe medir con alta precisión es el campo magnético. Esto se logra a través de Resonancia Magnética Nuclear (sigla en inglés NMR), empleando una sonda estándar de H_2O [36], que se puede relacionar con el momento magnético de un protón libre a través de

$$B = \frac{\omega_p}{2\mu_p},$$

donde ω_p es la velocidad angular de precesión de espín Larmor de un protón en el agua. Usando ω_p y la frecuencia ω_a junto con $\mu_\mu = (1 + a_\mu) e / (2m_\mu)$, se obtiene

$$a_\mu = \frac{R}{\lambda - R} \quad (4.28)$$

donde $R = \omega_a / \omega_p$ y $\lambda = m_\mu / m_p$, cantidad incluida debido a que es necesaria la masa del muón m_μ , y a causa de que la medida de B requiere de la masa del protón m_p . Medidas reportadas en [37]-[39] permiten extraer un valor preciso para λ :

$$\lambda = \frac{m_\mu}{m_p} = 3,18334539 (10) \quad [30 \text{ ppb}]$$

valor usado en el experimento $E821$ para determinar a_μ utilizando la ecuación (4.28).

Puesto que la frecuencia de precesión del espín se puede medir muy bien, la precisión con la cual se puede medir $g - 2$ esencialmente está determinada por la posibilidad de configurar un campo magnético homogéneo constante \vec{B} y de determinar su valor de forma muy precisa. Así, las desviaciones que se presenten en el experimento podrían ser corregidas ajustando de forma apropiada el valor del campo magnético efectivo.

Una de las razones del porqué el movimiento relativista de los muones se entiende muy bien radica en el hecho de que el movimiento orbital de partículas cargadas, en el anillo de almacenamiento, se puede analizar separadamente del movimiento del espín. Las fuerzas asociadas con el momento magnético anómalo son muy débiles ($a_\mu \approx 1,16 \times 10^{-3}$) en comparación con las fuerzas sobre la carga de la partícula, las cuales determinan el movimiento orbital de la misma. Mientras que el campo magnético estático $\vec{B}(r, z) = (0, 0, B_0)$ provoca que las partículas se muevan sobre un círculo de radio $r_0 = \gamma m / (eB_0)$, el campo eléctrico cuadrupolar $\vec{E} = (E_r, E_\theta, E_z) = (\kappa x, 0, -\kappa z)$ (el cual produce una fuerza restauradora en la dirección vertical y una fuerza repulsiva en la dirección radial) conduce a un movimiento oscilatorio del muón, alrededor

de la posición del haz central (asumiendo la dirección de movimiento sobre el eje- y), determinado por

$$x = A \cos(\sqrt{1-n}\omega_c t), \quad z = B \cos(\sqrt{n}\omega_c t). \quad (4.29)$$

En esta expresión $x = r - r_0$, κ representa una constante positiva y $n = \kappa r_0 / \beta B_0$ con $\beta = v$, el índice del campo. Este tipo de movimiento es denominado *oscilación betatrón*. Las amplitudes dependen de las condiciones iniciales de las trayectorias de las partículas. Las frecuencias betatrón son $\omega_{yBO} = \sqrt{n}\omega_c$ y $\omega_{zBO} = \sqrt{1-n}\omega_c$ donde $\omega_c = v/r_0$ es la frecuencia ciclotrón.

El movimiento betatrón también afecta la precesión magnética anómala dada por la ecuación (4.25), el cual se mantiene para el campo magnético transversal $\vec{v} \cdot \vec{B} = 0$, debido al enfoque electrostático. Entonces la expresión más general para la frecuencia angular está dada por

$$\vec{\omega}_a = -\frac{e}{m_\mu} \left[a_\mu \vec{B} - a_\mu \left(\frac{\gamma}{\gamma+1} \right) (\vec{v} \cdot \vec{B}) \vec{v} + \left(a_\mu - \frac{1}{\gamma^2-1} \right) \vec{E} \times \vec{v} \right]. \quad (4.30)$$

Una corrección posible a la precesión magnética podría deberse al Momento Dipolar Eléctrico (MDE) del muón, que podría presentarse solo si su valor es bastante alto,

$$\vec{d} = \frac{\eta e}{2m_\mu} \vec{S}, \quad (4.31)$$

donde η es una constante adimensional equivalente al factor $-g$, \vec{E} el campo eléctrico aplicado y $\vec{E}^* = \gamma \vec{\beta} \times \vec{B}$ el campo eléctrico inducido por movimiento en la estructura de muones, el cuál adicionará una precesión extra al espín con una componente longitudinal \vec{E} y una sobre el eje perpendicular a \vec{B} :

$$\vec{\omega}_a = \vec{\omega}_{a0} + \vec{\omega}_{MDE} = \vec{\omega}_{a0} - \frac{\eta e}{2m_\mu} \left(\vec{E} + \vec{\beta} \times \vec{B} \right), \quad (4.32)$$

donde $\vec{\omega}_{a0}$ denota la frecuencia de precesión para $\eta = 0$. Entonces el cambio en la frecuencia originado por un η diferente de cero es

$$\Delta \vec{\omega}_a = -2d_\mu \left(\vec{\beta} \times \vec{B} \right) - 2d_\mu \vec{E},$$

de donde para $\beta \sim 1$ y $\vec{E} \sim 0$ se obtiene

$$\omega_a = B \sqrt{\left(\frac{e}{m_\mu} a_\mu \right)^2 + (2d_\mu)^2}. \quad (4.33)$$

El resultado es entonces que en el plano de precesión de frecuencias surge el factor

$$\delta \equiv \arctan \frac{\omega_{MDE}}{\omega_{a0}} = \arctan \frac{\eta \beta}{2a_\mu} \simeq \frac{\eta}{2a_\mu},$$

y la frecuencia de precesión se incrementa por un factor de

$$\omega_a = \omega_{a0} \sqrt{1 + \delta^2}. \quad (4.34)$$

La pendiente da lugar a una componente vertical oscilante de la polarización de muones y podría ser detectada registrando de forma separada los electrones que chocan los contadores arriba y abajo del plano medio del anillo. Esta medida ha sido desarrollada en el último experimento del $g - 2$ en el CERN. El resultado obtenido para $d_\mu = (3,7 \pm 3,4) \times 10^{-19} e \cdot cm$ es insignificativamente pequeño, cuyo límite experimental es $d_\mu < 2,7 \times 10^{-19} e \cdot cm$ en tanto que el modelo estándar estima un valor de $d_\mu \sim 3,2 \times 10^{-25} e \cdot cm$. Entonces se puede asumir un valor tan pequeño para d_μ que no afecta el valor de a_μ .

4.10. Resumen de resultados experimentales

Experimento	Año	Polaridad	$a_\mu \times 10^{-10}$	Pre. [ppm]
CERN I	1961	μ^+	11450000 (220000)	4300
CERN II	1962-1968	μ^+	11661600 (3100)	270
CERN III	1974-1976	μ^+	11659100 (110)	10
CERN III	1975-1976	μ^-	11659360 (120)	10
BNL	1997	μ^+	11659251 (150)	13
BNL	1998	μ^+	11659191 (59)	5
BNL	1999	μ^+	11659202 (15)	1,3
BNL	2000	μ^+	11659204 (9)	0,73
BNL	2001	μ^-	11659214 (9)	0,72
	Promedio		11659208,0 (6,3)	0,54

Tabla 4.2. Resumen de resultados del CERN y del E821 [41]

Antes de que el experimento $E821$ del Brookhaven presentará sus resultados (entre 2001 y 2004), la última serie de medidas del factor $-g$ anómalo publicadas por el CERN fueron publicadas 30 años atrás. De forma simultánea a_μ ha sido medido para muones de ambas cargas en el Anillo de Almacenamiento de muones del CERN:

$$\begin{aligned} a_{\mu^-} &= 1165937(12) \times 10^{-9}, \\ a_{\mu^+} &= 1165911(11) \times 10^{-9}, \end{aligned} \quad (4.35)$$

medidas que se encuentran en muy buen acuerdo y que combinadas producen el valor

$$a_\mu = 1165924,0(8,5) \times 10^{-9} \quad [7 \text{ ppm}], \quad (4.36)$$

valor muy cercano al predicho teóricamente, $a_\mu = 1165921,0(8,3) \times 10^{-9}$. Así las mediciones confirmaban calculos de la QED y contribuciones hadrónicas. En general, en los experimentos se mide la relación de la frecuencia de precesión muónica, $\omega_a = \omega_s - \omega_c$,

y la frecuencia de precesión de los protones, ω_p , a partir de la calibración del campo magnético: $R = \omega_a/\omega_p$, la cual junto con la razón del momento magnético del muón y del protón, $\lambda = \mu_\mu/\mu_p$, determina el MMA. El valor de a_μ determinado en el CERN se realizó con $\lambda = 3,1833437$ (23).

En el experimento BNL $g-2$ del muón se mejoró y perfeccionó el método empleado en experimentos ejecutados anteriormente por el CERN. Las medidas obtenidas fueron: $R_{\mu^-} = 0,0037072083$ (26) y $R_{\mu^+} = 0,0037072048$ (25), produciendo $\Delta R = (3,5 \pm 3,4) \times 10^{-9}$. Así junto con $\lambda = 3,18334539$ (10) se obtuvieron los valores de

$$\begin{aligned} a_{\mu^-} &= 11659214 (8) (3) \times 10^{-10}, \\ a_{\mu^+} &= 11659204 (7) (5) \times 10^{-10}, \end{aligned} \quad (4.37)$$

así tomando en cuenta correlaciones entre errores sistemáticos entre varios conjuntos de datos, el valor que se obtuvo fue $R = 0,0037072063$ (20). Entonces el nuevo valor promedio de a_μ es de

$$a_\mu = 11659208,0 (5,4) (3,3) [6,3] \times 10^{-10} \quad [0,54 \text{ ppm}], \quad (4.38)$$

en la que las dos primeras incertidumbres son estadísticas y la otra sistemática. En la tabla 4.2 se resumen todos los resultados recopilados por el CERN y por el E821. Se ve que el valor promedio es dominado por los resultados del BNL. La comparación con el resultado teórico incluye predicciones de extensiones del ME, que se presentarán más adelante.

Capítulo 5

Resultados generales

La condición más importante para el momento magnético anómalo es que es útil para probar una teoría, por lo que ésta debe ser una teoría de campo cuántico relativista y debe ser renormalizable. Ésto implica que $g - 2$ desaparece a nivel árbol y no puede ser un parámetro ajustable independientemente en cualquier teoría de campo cuántico renormalizable. Entonces para una teoría dada la cantidad $g - 2$ es calculable y el valor predicho puede ser confrontado con experimentos. Así el momento magnético anómalo del muón, a_μ , es un buen monitor para la detección de contribuciones de nueva física. El punto clave es que $g - 2$ puede predecirse de forma exacta y medirse con mucha precisión. Confrontando predicciones teóricas con medidas experimentales es posible ajustar una teoría y encontrar sus posibles limitaciones.

Una de las principales características del momento magnético anómalo de los leptones es que media transiciones producidas por helicidad. Ya que la probabilidad de una transición depende del modulo cuadrado de la amplitud, esto implica que el momento magnético anómalo depende de las fluctuaciones cuánticas debidas a partículas pesadas o a contribuciones de escalas de energías más altas, proporcionales a

$$\Delta a_l \propto \frac{m_l^2}{M^2} \quad (M \gg m_l),$$

donde M puede ser:

- la masa de una partícula pesada del ME,
- la masa de un estado hipotético más allá del ME, o
- una escala de energía como un cut-off ultravioleta donde el ME deja de ser válido.

Ya que la sensibilidad a la "nueva física" crece cuadráticamente con la masa del leptón, los efectos de interés son magnificados en a_μ relativo a a_e por un factor $(m_\mu/m_e)^2 \sim 4 \times 10^4$. La escala de energía más sensible a la nueva física no se ha descubierto aún experimentalmente, es por esto que a_μ es una cantidad predestinada a ser "monitor de nueva física" [26] [27].

5.1. MMA a partir de la función de vértice generalizada

A continuación se presenta la forma en que en la QED a_μ se puede determinar a partir de cálculos perturbativos considerando la matriz de elementos

$$M(x; p) = \langle \mu^-(p_2, r_2) | j_{em}^\mu(x) | \mu^-(p_1, r_1) \rangle,$$

de la corriente electromagnética para la dispersión de un muón $\mu^-(p_1, r_1)$ de momentum p_1 y tercera componente de espín r_1 a un muón $\mu^-(p_2, r_2)$ de momentum p_2 y tercera componente de espín r_2 , en el límite clásico de transferencia de momentum cero: $q^2 = (p_2 - p_1)^2 \rightarrow 0$, indicando así de forma general el proceso seguido en los cálculos realizados.

En el espacio de momentos se tiene

$$\begin{aligned} \tilde{M}(q; p) &= \int d^4x e^{-iqx} \langle \mu^-(p_2, r_2) | j_{em}^\mu(x) | \mu^-(p_1, r_1) \rangle \\ &= (2\pi)^4 \delta^{(4)}(q - p_2 + p_1) \langle \mu^-(p_2, r_2) | j_{em}^\mu(0) | \mu^-(p_1, r_1) \rangle, \end{aligned}$$

proporcional a la función de conservación del cuadri-momentum. Entonces la matriz de elementos para este proceso está dada por:

$$\langle \mu^-(p_2) | j_{em}^\mu(0) | \mu^-(p_1) \rangle = (-ie) \bar{u}(p_2) \Gamma^\mu(P, q) u(p_1), \quad (P = p_1 + p_2).$$

En la QED ésta matriz de elementos tiene una descomposición covariante de la forma

$$\Gamma^\mu(P, q) = (-ie) \bar{u}(p_2) \left[\gamma^\mu F_E(q^2) + i \frac{\sigma_{\mu\nu} q_\nu}{2m_\mu} F_M(q^2) \right] u(p_1),$$

donde $q = p_2 - p_1$ y $u(p)$ denota los espinores de Dirac asociados a la partícula. $F_E(q^2)$ representa el factor de forma de carga eléctrica o de Dirac y $F_M(q^2)$ representa el factor de forma magnético o de Pauli. La matriz $\sigma_{\mu\nu} = \frac{i}{2} [\gamma^\mu, \gamma^\nu]$ representa el tensor de momentum angular de espín 1/2. En el límite clásico

$$F_E(0) = 1, \quad F_M(0) = a_\mu$$

donde la primera relación es la condición de renormalización de la carga (en unidades de e) en tanto que la segunda relación permite predecir, de manera finita, el valor de a_μ en términos de F_M .

En lugar de calcular la función de vértice completa, $\Gamma_\mu(P, q)$, se puede expandir la función de vértice a orden lineal en el momento fotónico externo q :

$$\Gamma_\mu(P, q) \simeq \Gamma_\mu(P, 0) + q^\nu \frac{\partial}{\partial q^\nu} \Gamma_\mu(P, q) |_{q=0} \equiv V_\mu(q) + q^\nu T_{\nu\mu}(p)$$

para P fijo. Esto permite simplificar el cálculo realizandolo directamente en el límite $q \rightarrow 0$. Puesto que a_μ no depende de la dirección del momentum del muón se puede promediar sobre la dirección de P la cual es ortogonal a q ($P \cdot q = 0$), así se encuentra

$$a_\mu = \frac{1}{8(n-2)(n-1)m_\mu} \text{Tr} \{ (\not{P} + m_\mu) [\gamma^\mu, \gamma^\nu] (\not{P} + m_\mu) T_{\nu\mu}(p) \} \\ + \frac{1}{4(n-1)m_\mu^2} \text{Tr} \{ [m_\mu^2 \gamma^\mu - (d-1)m_\mu p^\mu - n \not{P} p^\mu] V_\mu(p) \} |_{p^2=m_\mu^2},$$

donde $n = 4 - \varepsilon$ corresponde a la dimensión del espacio-tiempo. En el caso de que se presenten divergencias UV la escogencia de $\varepsilon > 0$ da una regularización dimensional, hecho tenido en cuenta en la determinación analítica del $g - 2$. El límite $\varepsilon \rightarrow 0$ se desarrolla luego de la renormalización. Las amplitudes $V_\mu(p)$ y $T_{\nu\mu}(p)$ solo dependen del momentum on-shell $p = P/2$ y así el problema se reduce al calculo de diagramas tipo auto-energía on-shell ya que el momentum fotónico externo se puede tomar como cero.

A ordenes más altos el factor de forma requiere de una parte imaginaria, por lo que se puede escribir un lagrangiano de momento de dipolo efectivo con la inclusión de términos de acoplamiento complejos

$$\mathcal{L}_{ef}^{MD} = -\frac{1}{2} \left\{ \bar{\psi} \sigma^{\mu\nu} \left[D_\mu \frac{1 + \gamma_5}{2} + D_\mu^* \frac{1 - \gamma_5}{2} \right] \psi \right\} F_{\mu\nu},$$

con ψ representando el campo muónico y

$$\text{Re } D_\mu = a_\mu \frac{e}{2m_\mu}, \quad \text{Im } D_\mu = d_\mu = \frac{\eta_\mu}{2} \frac{e}{2m_\mu}.$$

Así la parte imaginaria de $F_M(0)$ corresponde a un momento dipolar eléctrico (MDE). La última parte no se desprecia sólo si se tiene violación T . La existencia de un MDE relativamente grande afectará el valor de a_μ .

5.2. Resultados obtenidos a partir de las contribuciones del Z' y de $M2DH$ tipo II al MMA del muón

Muchos modelos teóricos, más allá del ME, conciben la idea de la existencia de un bosón neutro adicional Z' . La importancia de su detección radica en que permitiría adquirir información relevante sobre la estructura de la teoría de grupo que gobierna la física más allá del ME. Desde el punto de vista teórico este bosón se puede estudiar a partir de desviaciones de los parámetros del ME con resultados experimentales. Así mismo, podría ser detectado en experimentos realizados a bajas energías o, a altas

energías en los futuros colisionadores hadrónicos, por lo que su producción y detección se puede utilizar en la calibración de próximos detectores de partículas.

En la expresión (3.21) los acoplamientos al bosón físico Z_1 tienen la misma forma que los acoples del ME, así las constantes vectoriales y axiales contienen una pequeña desviación debida al ángulo de mezcla:

$$G_{v,a} = g_{v,a}^{ME} + \delta g_{v,a}^\theta, \quad (5.1)$$

donde $g_{v,a}^{ME}$ representa las constantes de acoplamiento del ME asociadas al bosón Z y la desviación $\delta g_{v,a}^\theta$ dada por (3.22) y (3.23) con $\tilde{g}_{v,a}^f$ representando las constantes de acoplamiento asociadas al bosón Z' , expresiones (3.19) y (3.20). En general, la expresión (5.1) muestra el efecto a bajas energías de la presencia de un bosón extra pesado, para todos los modelos que incluyan este tipo de campos. Así, la relación (5.1) es independiente del modelo usado y $\delta g_{v,a}^\theta$ es un parámetro que se puede ajustar desde datos experimentales. (5.1) señala que todos los parámetros electrodébiles que se pueden determinar de forma experimental tienen las mismas relaciones analíticas del ME pero con leves factores de desviación debido a la presencia del término $\delta g_{v,a}^\theta$ en los acoplamientos neutros.

En general, cada observable físico que se puede determinar en el ME tiene un valor experimental asociado, además de su respectiva expresión analítica, la cual de alguna forma depende de las constantes de acoplamiento electrodébiles, $g_{v,a}^{ME}$ (o de forma simplificada g , como se denominarán más adelante). Al incluir las correcciones debidas a la mezcla $Z - Z'$ de las constantes de acoplamiento, expresión (5.1), las relaciones analíticas de los observables físicos se corrigen, sin dejar de depender de parámetros determinados por el ME, como el ángulo de Weinberg y la masa del bosón Z .

A partir de la ecuación de Dirac en el límite de bajas energías $\Delta a_\mu = (g - 2)_\mu$, se determino cuánto se desvía de 2 el Δa_μ al acoplarse el muón al fotón, a través de la contribución del campo exótico Z' (a un loop) al MMA del muón, dada por (B.1):

$$\Delta a_\mu^{Z'} = \frac{G_F m^2}{8\sqrt{2}\pi^2} \left[-\frac{2(A'B + B'A)}{c_W^2} J_1 - \frac{4(A'B + B'A)}{c_W^2} J_2 \right],$$

con las integrales:

$$J_1 = \int_0^1 \frac{(x^3 - 3x^2 + 2x)}{\frac{m^2}{M_W^2} x^2 + \frac{M^2}{M_W^2} (1-x)} dx,$$

$$J_2 = \int_0^1 \frac{x^2 - x}{\frac{m^2}{M_W^2} x^2 + \frac{M^2}{M_W^2} (1-x)} dx,$$

A y B las constantes de acoplamiento y los demás parámetros definidos al final de este apartado. Reemplazando los parámetros del cálculo, se obtuvieron las gráficas 5.1 y 5.2, las cuales muestran como se establece una cota inferior a $\Delta a_\mu^{Z'}$ a medida que se incrementa la masa del bosón exótico Z' , lo que indica que cuando disminuye la masa

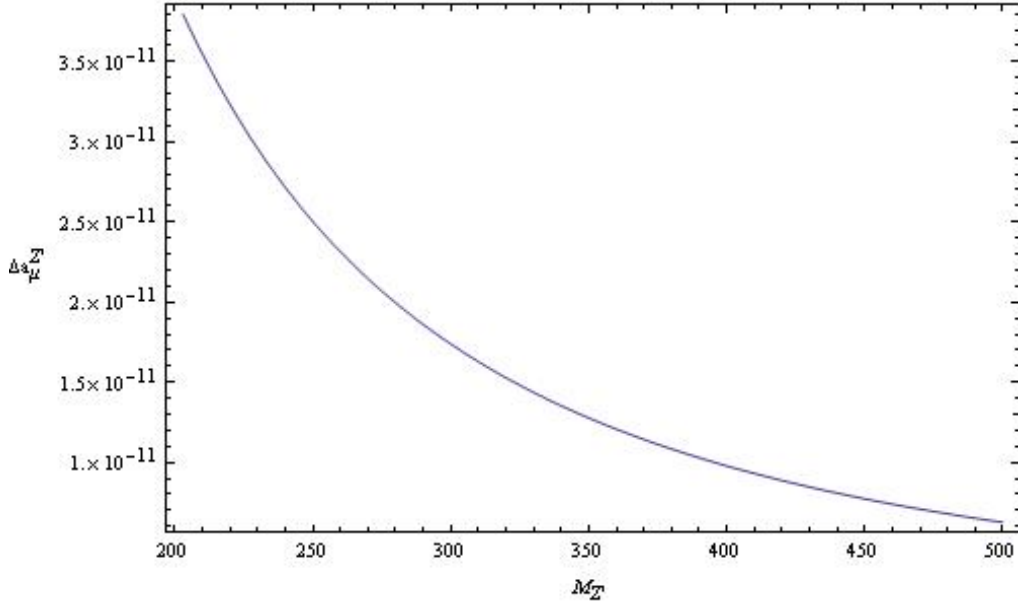


Figura 5.1: Contribución del bosón exótico Z' al MMA del muón. $200\text{GeV} \leq M_{Z'} \leq 500\text{GeV}$.

del Z' el valor de $\Delta a_{Z'}$ se acerca al valor reportado en la literatura. En las gráficas 5.3 y 5.4 se comparan los resultados obtenidos en las gráficas 5.1 y 5.2 con la ventana reportada en la literatura, $\Delta a_{\mu} = a_{\mu}^{\text{exp}} - a_{\mu}^{\text{ME}} = 22 (10) \times 10^{-10}$. Estas gráficas muestran que los resultados obtenidos con el campo exótico Z' están muy lejos de la ventana. Solamente ingresarían a esta con masas muy pequeñas como se muestra en la gráfica 5.5, resultado incorrecto para nuestro estudio.

La contribución de los campos escalares de nuestro modelo, η y ρ , no es relevante para la propiedad que estamos estudiando. Si únicamente se considera la contribución del Z' al $(g-2)_{\mu}$ del modelo 331 ($\beta = -1/\sqrt{3}$) se observa que la cota inferior es muy baja, por lo que si se toma la contribución de $M2DH$, que contiene 331, y se adiciona a la ventana establecida en la literatura, como se realiza a continuación, se cerraría aún más la ventana Δa_{μ} que contiene nueva física.

La contribución que obtuvimos de $M2DH$ tipo II al MMA del muón está dada por (C.1):

$$\Delta a_{\mu}^{M2DH} = \frac{G_F m^2}{8\sqrt{2}\pi^2} \left[\left(2(c_{\alpha}^2 + 1) t_{\beta}^2 \frac{m^2}{M_{H^0}^2} (I_1 - I_2) \right) + \left(2s_{\alpha}^2 t_{\beta}^2 \frac{m^2}{M_{h^0}^2} (I_3 - I_4) \right) \right]$$

con las integrales:

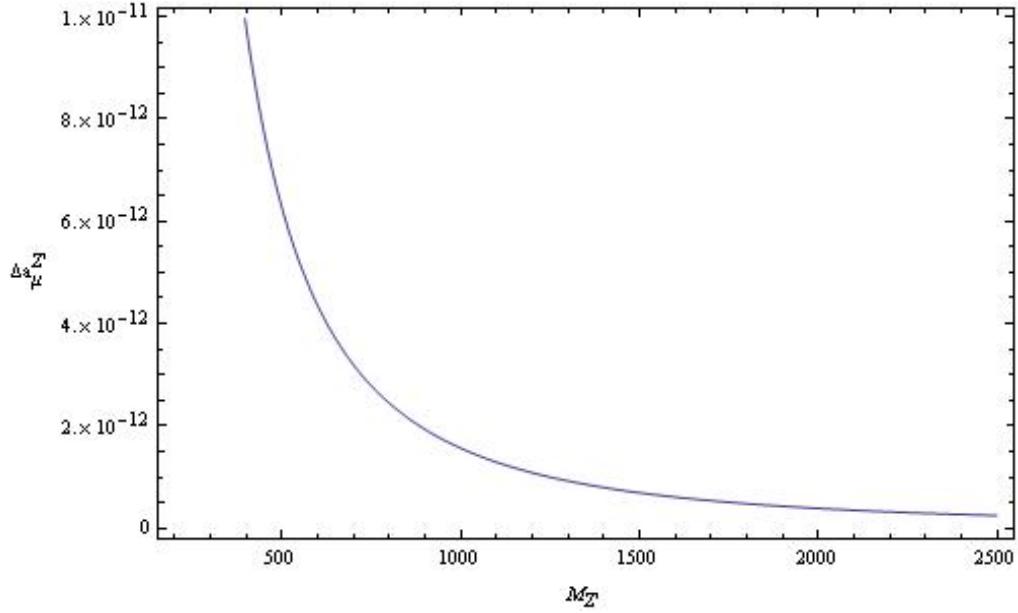


Figura 5.2: Contribución del bosón exótico Z' al MMA del muón. $200\text{GeV} \leq M_{Z'} \leq 2500\text{GeV}$.

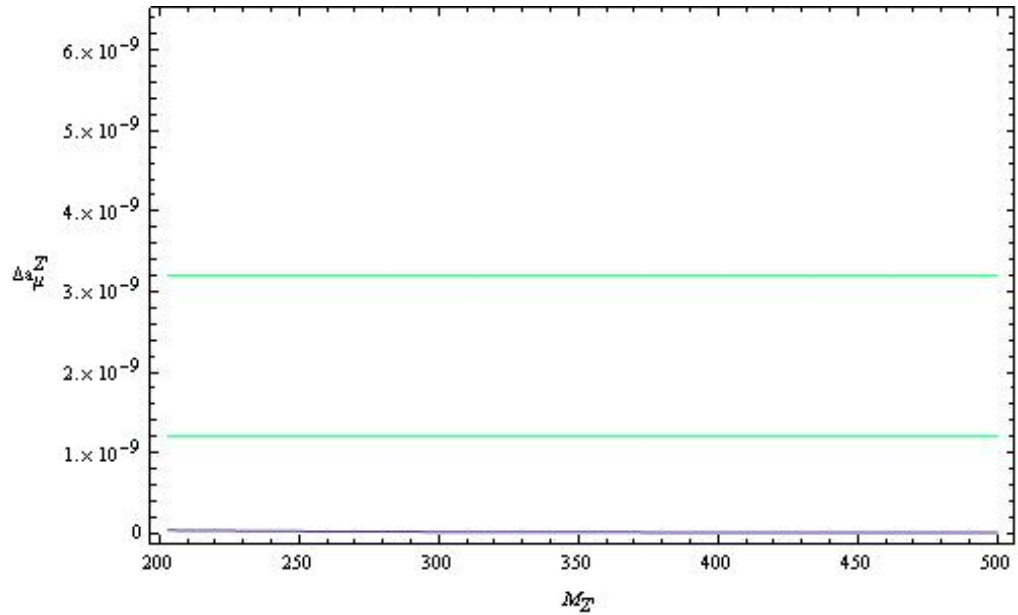


Figura 5.3: Comparación de la contribución del bosón exótico Z' al MMA del muón con el resultado $\Delta a_\mu = a_\mu^{\text{exp}} - a_\mu^{\text{ME}} = 22(10) \times 10^{-10}$. $200\text{GeV} \leq M_{Z'} \leq 500\text{GeV}$.

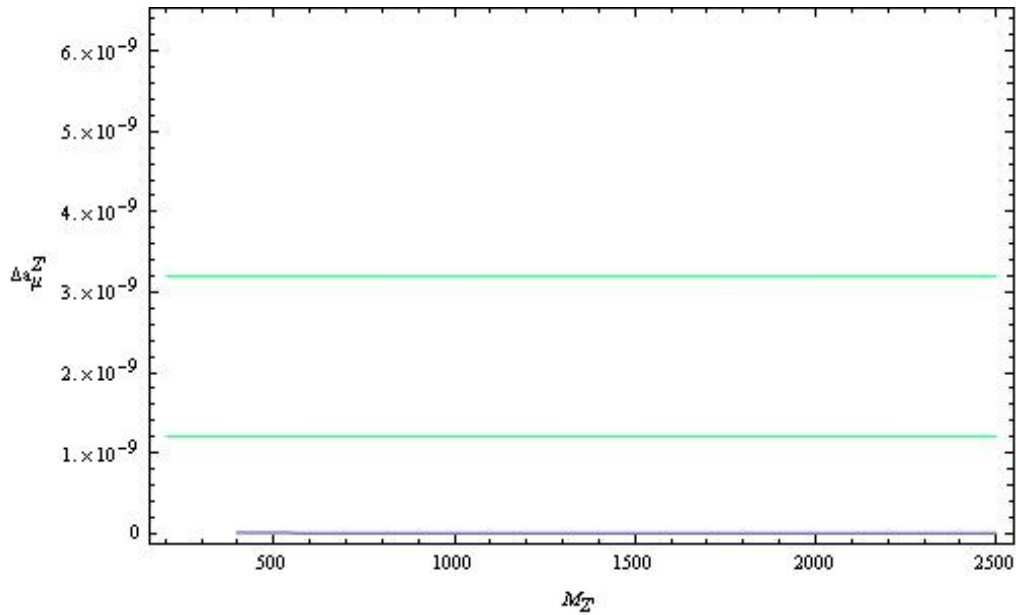


Figura 5.4: Comparación de la contribución del bosón exótico Z' al MMA del muón con el resultado $\Delta a_\mu = a_\mu^{\text{exp}} - a_\mu^{\text{ME}} = 22(10) \times 10^{-10}$. $200\text{GeV} \leq M_{Z'} \leq 2500\text{GeV}$.

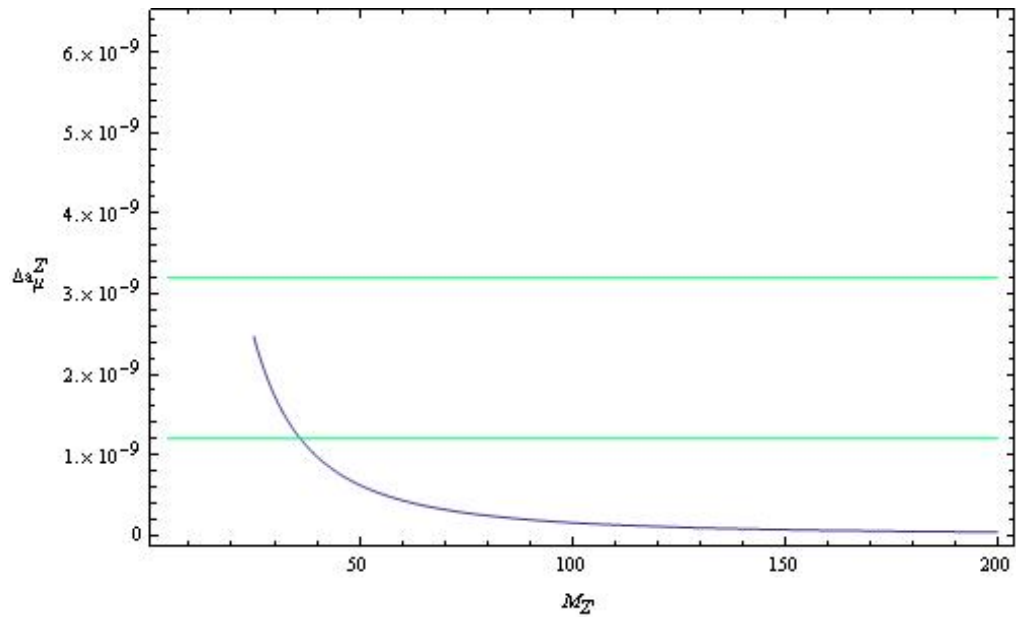


Figura 5.5: Comparación de la contribución del bosón exótico Z' al MMA del muón con el resultado $\Delta a_\mu = a_\mu^{\text{exp}} - a_\mu^{\text{ME}} = 22(10) \times 10^{-10}$. Rango de masa: $5\text{GeV} \leq M_{Z'} \leq 200\text{GeV}$.

$$\begin{aligned}
 I_1 &= \int_0^1 \frac{(x^3 - 3x^2 + 2x)}{\frac{m^2}{M_{H^0}^2}x^2 - x + 1} dx & I_3 &= \int_0^1 \frac{(x^3 - 3x^2 + 2x)}{\frac{m^2}{M_{h^0}^2}x^2 - x + 1} dx \\
 I_2 &= \int_0^1 \frac{x^2}{\frac{m^2}{M_{H^0}^2}x^2 - x + 1} dx & I_4 &= \int_0^1 \frac{x^2}{\frac{m^2}{M_{h^0}^2}x^2 - x + 1} dx
 \end{aligned}$$

y con $c_\alpha = \cos \alpha$, $s_\alpha = \sin \alpha$, $c_\beta = \cos \beta$, $t_\beta = \tan \beta$, y los demás parámetros definidos al final de este apartado.

Analizando la variación de los ángulos de mezcla, los resultados que se obtienen son:

Δa_μ^{M2DH}	$\alpha = 30$	$\alpha = 45$	$\alpha = 60$
$t_\beta = 1$	$-1,28605 \times 10^{-14}$	$-1,77761 \times 10^{-14}$	$-2,26916 \times 10^{-14}$
$t_\beta = 10$	$-1,28605 \times 10^{-12}$	$-1,77761 \times 10^{-12}$	$-2,26916 \times 10^{-12}$
$t_\beta = 100$	$-1,28605 \times 10^{-10}$	$-1,77761 \times 10^{-10}$	$-2,26916 \times 10^{-10}$

Se ve que los resultados que contribuyen a nuestro estudio corresponden a $t_\beta \geq 100$, por lo que los otros resultados quedan excluidos. Además se observa que un cambio en el ángulo de mezcla α es bastante significativo. A continuación se dejan todos los parámetros del cálculo fijos, y se evalúa Δa_μ^{M2DH} variando α entre 0 y 35, obteniendo las gráficas 5.6 y 5.7.

En la gráfica 5.6 se observa que a medida que aumenta el ángulo de mezcla α aumenta la contribución de $M2DH$ al $-\Delta a_\mu$. En la gráfica 5.7 se compara la contribución de $M2DH$ al $-\Delta a_\mu$ con la ventana reportada en la literatura, $\Delta a_\mu = a_\mu^{\text{exp}} - a_\mu^{ME} = 22(10) \times 10^{-10}$; para $\alpha = 0$ se obtiene el valor mínimo de la contribución $-\Delta a_\mu^{M2DH}$, alrededor de 2×10^{-9} ; para $10 \leq \alpha \leq 20$ se obtienen los valores más cercanos al valor medio de la ventana, $\Delta a_\mu = 22 \times 10^{-10}$; para $\alpha = 30$, se obtiene el valor máximo de la contribución $-\Delta a_\mu^{M2DH}$, alrededor de $3,2 \times 10^{-9}$. Valores de $\alpha > 30$ se salen de la ventana reportada para Δa_μ .

Con estos resultados se deduce: la ventana reportada en la literatura está dada por $\Delta a_\mu = a_\mu^{\text{exp}} - a_\mu^{ME}$, pero la contribución Δa_μ^{M2DH} corrige esta ventana, lo que indica que la forma de expresar la comparación entre la contribución del campo exótico Z' , del modelo 331 ($\beta = -1/\sqrt{3}$), al MMA del muón y la ventana de la nueva física es

$$\Delta a_\mu + \Delta a_\mu^{M2DH} \approx \Delta a_\mu^{Z'}$$

como la contribución Δa_μ^{M2DH} es negativa,

$$\Delta a_\mu^{Z'} \approx \Delta a_\mu - \Delta a_\mu^{M2DH}$$

De la gráfica 5.7 se ve que el ángulo de mezcla α de $M2DH$ que permite una contribución más cercana a la ventana de la nueva física reportada ($\Delta a_\mu = 22(10) \times 10^{-10}$) es $\alpha = 12$, con el que se obtiene un valor de $-\Delta a_\mu^{M2DH} = 2,19873 \times 10^{-9}$,

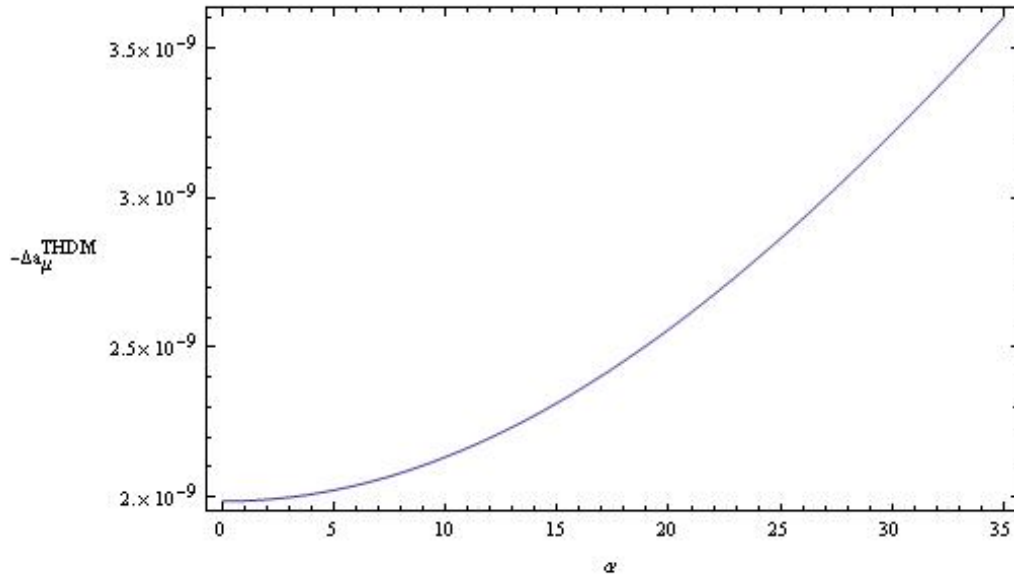


Figura 5.6: Contribución de $M2DH$ al MMA del muón. Por sencillez se ha graficado $-\Delta a_{\mu}^{M2DH}$ en función de α .

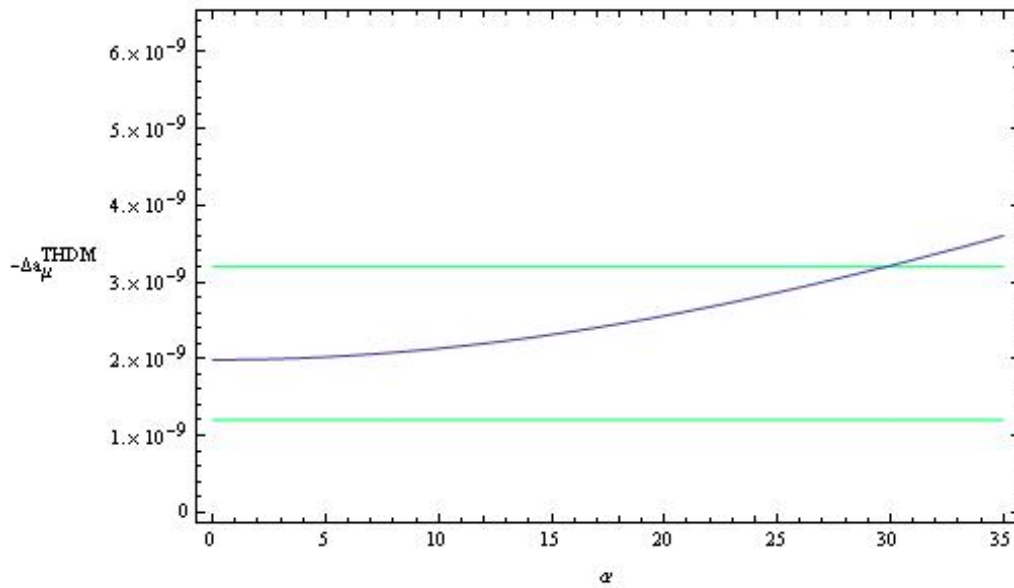


Figura 5.7: Comparación de la contribución de $M2DH$ al MMA del muón con el resultado $\Delta a_{\mu} = a_{\mu}^{\text{exp}} - a_{\mu}^{ME} = 22(10) \times 10^{-10}$. Por sencillez se ha graficado $-\Delta a_{\mu}^{M2DH}$ en función de α .

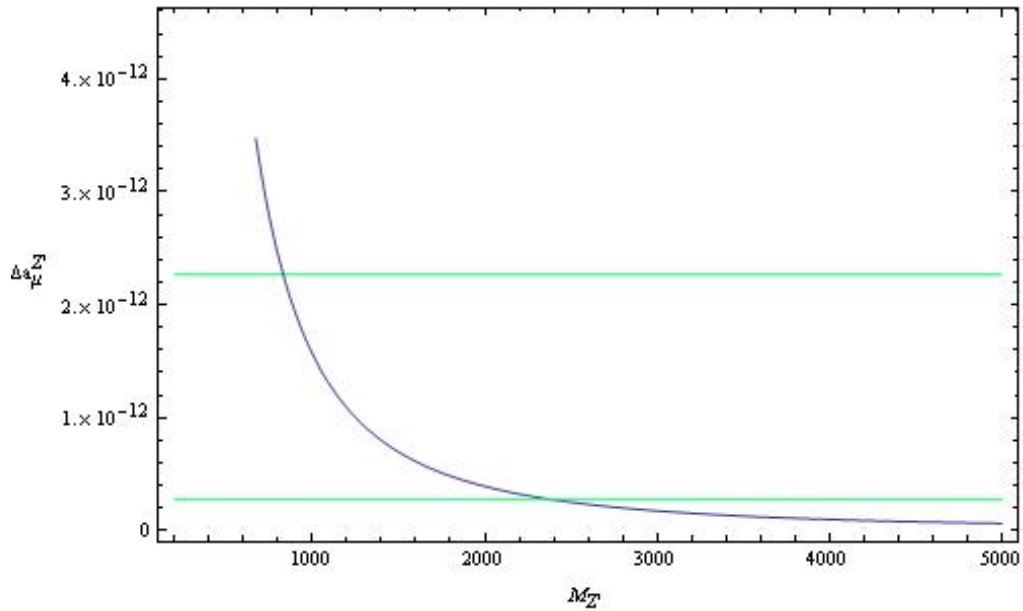


Figura 5.8: Comparación de la contribución del bosón exótico Z' al MMA del muón con el resultado $\Delta a_\mu - \Delta a_\mu^{THDM} = 12,7(10) \times 10^{-13}$. Rango de masa: $200 GeV \leq M_{Z'} \leq 5000 GeV$.

entonces la ventana de la nueva física, corregida con $M2DH$, estaría dada por $\Delta a_\mu - \Delta a_\mu^{M2DH} = 12,7(10) \times 10^{-13}$. Comparando esta ventana con los resultados obtenidos de la contribución del campo exótico Z' (gráfica 5.2) se obtiene la gráfica 5.8.

La gráfica 5.2 muestra que un campo exótico Z' con una masa por debajo de $850 GeV$ o por encima de $2300 GeV$, no contribuye al MMA del muón. Este hecho prueba la posible existencia de este bosón exótico, además de ser un resultado comparable con la escala obtenida en [17], $M_{Z'} \geq 1,5 TeV, 2 TeV$, en donde se fijaron valores particulares para β con el fin de obtener curvas de superficie, $\chi^2(M_{Z'}, s_\theta)$, de regiones permitidas en las variables $M_{Z'}$ y s_θ .

<i>Parámetros empleados en los cálculos</i>	
G_F	$= 1,16637(1) \times 10^{-5} \text{ GeV}^{-2}$
M_W	$= 80,403 \pm 0,029 \text{ GeV}$
$\frac{g^2}{8}$	$= \frac{G_F}{\sqrt{2}} M_W^2 = 0,0533170177$
s_w^2	$= 0,23122(15)$
c_w^2	$= 0,76878$
m_μ	$= m = 105,6583692 \pm 0,0000094 \text{ MeV} = 0,10565 \text{ GeV}$
$M_{Z'}$	$= M = 1740 \text{ GeV}$
\hat{m}^2	$= \frac{m^2}{M^2}$
AB	$= \frac{-2(1-2s_w^2)s_w^2}{3-4s_w^2} = -0,1197$
M_{H^0}	$= 300 \text{ GeV}$
M_{h^0}	$= 114 \text{ GeV}$

5.3. Teoría del $g - 2$ del muón vs. experimento

Se ha alcanzado una nueva etapa en la comprobación de teorías y de nuevos escenarios físicos con el advenimiento del experimento BNL $g - 2$ del muón, el cual fue capaz de reducir incertidumbres experimentales en un factor de 14 a 63×10^{-11} . Así, el valor experimental del MMA del muón, reportado mundialmente, lo domina el resultado del BNL,

$$a_\mu^{\text{exp}} = 1,16592080 (63) \times 10^{-3}, \quad (5.2)$$

(con una incertidumbre relativa de $0,54ppm$), resultado que se confronta con la predicción del ME

$$a_\mu^{\text{teo}} = 1,16591790 (64,6) \times 10^{-3}. \quad (5.3)$$

Como se mencionó anteriormente el MMA del muón brinda una de las pruebas más precisas de la teoría de campo cuántico como una estructura básica de la teoría de partículas elementales, de la QED y, en particular, del ME electrodébil. Además de esto el MMA del muón restringe drásticamente la física más allá del ME. El hecho de que aparezca una desviación de $3,2\sigma$ entre la teoría y el experimento

$$\delta a_\mu^{NF} = a_\mu^{\text{exp}} - a_\mu^{\text{teo}} = (290 \pm 90) \times 10^{-11}, \quad (5.4)$$

podría ser un indicador de nueva física. Se han discutido posibilidades para explicar esta desviación asumiendo este valor como un indicador de algún tipo de pérdida". El $g - 2$ del muón brinda una visión a posible nueva física en la escala por debajo de los TeV . Para la interpretación de la desviación entre los resultados experimentales y teóricos, cabe resaltar que encontrar una alto grado de precisión en los dos tipos de resultados es aún un desafío. Todavía es asunto de investigación.

Capítulo 6

Conclusiones

Se estudio en detalle el problema relacionado al Momento Magnético Anómalo del muón, en el marco de la QED y de las interacciones débiles. Se revisaron con detalle los experimentos y los resultados para este acople efectivo entre el fermión muón y el fotón.

Cuando se resta el valor experimental del valor teórico, para el observable estudiado, se encuentra que esta diferencia no es consistente con cero a nivel de una desviación estándar, σ , por lo que se debe considerar $1,6\sigma$ para halla dicha consistencia.

Al valor teórico se le han sumado diferentes contribuciones como las llamadas light-by-light, con el fin de diseminar dicha discrepancia. También se han considerado diferentes contribuciones no perturbativas de QCD pero dicha discrepancia permanece, lo que sugiere explícitamente la existencia de nueva física que explique dicha diferencia, a menos que se pueda demostrar que el modelo estándar tiene un sector no perturbativo que lo permita entender.

Por esta razón consideramos modelos más allá del ME como lo son los modelos 331, los cuales contienen una corriente neutra adicional además del sector escalar de M2DH. Para estudiar el $(g - 2)$ del muón en el contexto 331 consideramos ambos sectores, el escalar y la corriente neutra adicional. Primero consideramos la contribución del sector escalar y analizamos la contribución al $(g - 2)$ del muón de los bosones neutros h^0 , H^0 y A^0 . El Higgs cargado H^+ produce una contribución prácticamente igual a cero. En este caso suponemos masas del orden de 114GeV para h^0 y 300GeV para H^0 y A^0 , las cuales son consistentes con otros resultados teóricos. Para t_β se considera un valor grande del orden de 100 consistente con la teoría de perturbaciones y otras restricciones teóricas. Para α se toman diferentes valores.

El valor que contribuye el sector escalar de 331 mediante M2DH se resta y se escribe una ventana de nueva física corregida. Dicha ventana es justamente la que impondrá una restricción al otro sector del modelo 331 que estamos considerando, es decir, la corriente neutra adicional o Z' .

Con estos parámetros encontramos que la masa del Z' , $M_{Z'}$, debe ser mayor que 850 GeV y menor que 2300 GeV . Estas cotas son consistentes con 1σ de error. Si consideramos la ventana de nueva física a 2σ de error, el $(g - 2)$ para nueva física sería

consistente con cero y la contribución de la corriente neutra para la $M_{Z'} \rightarrow \infty$ sería cero y por tanto no habría cota superior para $M_{Z'}$. La cota inferior de dicha masa a 2σ de error sería 800 GeV .

Todo el análisis que hemos realizado para explicar el $(g - 2)$ a 2σ de desviación estándar sería consistente con lo que se espera observar en el LHC para nueva física.

En un próximo trabajo se esperan incluir otros modelos 331 dependiendo del valor de β , además de cambios de sabor con la presencia de partículas e interacciones exóticas, que por requerir de un análisis más detallado no fueron incluidos en esta investigación.

Es claro que los modelos 331 brindan una excelente descripción de la física más allá del ME, hecho comprobado en la determinación de la corrección cuántica del observable MMA del muón.

Debido a la acepción que tiene el ME, por sus grandes aportes a la física de partículas, y más que todo por su corroboración experimental, cabe mencionar que la determinación de las correcciones cuánticas a cualquier observable físico, parte de una expresión universal que relacionará las constantes de acoplamiento de los modelos teóricos en cuestión, pero que sin duda alguna tendrá como base los resultados predichos por el ME.

Bibliografía

- [1] S. L. Glashow, Nucl. Phys. **22**, 579 (1961); S. Weinberg, Phys. Rev. Lett. **19**, 1264 (1967); H. Georgi y S. Glashow, Phys. Rev. Lett. **32**, 438-441 (1974). A. Salam, Elementary Particle Theorie: Relativistic Groups and Analyticity (Proceedings of the 8th Nobel Symposium), editado por N. Svartholm, Almqvist & Wicksells, Stockholm, (1968) p. 367.
- [2] Roberto E. Martínez. Teoría Cuántica de Campos, 1r Ed, Unilibros, 2002.
- [3] L. G. Cabral-Rosetti, Revista Mexicana de Física. **48**, 155-181 (2002).
- [4] W-M Yao et al., J. Phys. G: Nucl. Part. Phys. **33**, 1-1232 (2006).
- [5] A. Salam and J.C. Ward, Nuovo Cim. **19**, 165 (1961).
- [6] H. Goldstein. Classical Mechanics, 2d Ed, Reading, MA: Addison-Wesley, 1980.
- [7] C. N. Yang y R. L. Mills. Phys. Rev. **96**, 191 (1954).
- [8] N. Poveda. Cotas a la masa del Higgs cargado. Tesis doctoral, Universidad Nacional de Colombia, 2007.
- [9] Novaes, S. Standar Model: An introduction. arXiv: hep-ph/0001283v1.
- [10] M. Gell-Mann. Phys. Rev. **92**, 833 (1953); K. Nishijima y T. Nakano. Prog. Theor. Phys. **10**, 581 (1953).
- [11] P. W. Higgs, Phys. Rev. Lett. **13**, 508 (1964); Phys. Rev. **145**, 1156 (1966); F. Englert y R. Brout, Phys. Rev. Lett. **13**, 321 (1964); G. S. Guralnik, C. R. Hagen y T. W. B. Kibble, Phys. Rev. Lett. **13**, 585 (1964); T. W. B. Kibble, Phys. Rev. **155**, 1554 (1967).
- [12] J. Goldstone. Nuovo Cimento **19**, 154 (1961).
- [13] E. Abers y B. W. Lee, Gauge theories. Physics Report **9**, 1 (1973).
- [14] P. W. Higgs, Phys. Rev. Lett. **13**, 321 (1964); H. B. Thacker, B. W. Lee y C. Quigg, Phys. Rev. **D16**, 1519 (1977); D. V. Nanopoulos, J. R. Ellis y M. K. Gaillard, Nucl. Phys. **B106**, 292 (1976).

- [15] J. Gunion, H. Haber, G. Kane y S. Dawson, The Higgs Hunter's Guide. Addison-Wesley, New York, 1990.
- [16] R. DIAZ. Phenomenological analysis of the Two Higgs Doublet Model. Tesis doctoral, Universidad Nacional de Colombia, 2003, arXiv:hep-ph/0212237v2.
- [17] F. Ochoa. Construcción y estudio fenomenológico de los modelos $SU(3)_C \otimes SU(3)_L \otimes U(1)_X$. Tesis doctoral, Universidad Nacional de Colombia, 2007.
- [18] F. Pisano and V. Pleitez, Phys. Rev. **D46**, 410 (1992); F. Pisano and V. Pleitez, Brasil, 1992, arXiv:hep-ph/9206242.
- [19] V. Pleitez and M.D. Tonasse, The electromagnetic gauge invariance in $SU(3)_L \otimes U(1)_N$ models of electroweak unification reexamined, Brasil, 1997, arXiv:hep-ph/9707298.
- [20] J.C. Montero, C.A. de S. Pires and V. Pleitez, Spontaneous breaking of a global symmetry in a 331 model, Brasil, 1999, arXiv:hep-ph/9903251.
- [21] Rodolfo A. Díaz, R. Martínez, F. Ochoa, Phys. Rev. **D72**, 035018 (2005).
- [22] R. Foot, H.N. Long and T.A. Tran, Phys. Rev. **D50**, R34 (1994); H.N. Long, *ibid.* **53**, 437 (1996); *ibid.*, 54, 4691 (1996); Mod. Phys. Lett. A **13**, 1865 (1998).
- [23] Alex G. Dias, J.C. Montero and V. Pleitez, 3 – 3 – 1 Models at Electroweak Scale, Brasil, 2006, arXiv:hep-ph/051108.
- [24] C. Itzykson, J.-B. Zuber, Quantum Field Theory. Mc Graw Hill, New York, 1980.
- [25] R. L. Garwin, D. P. Hutchinson, S. Penman, G. Shapiro, Phys. Rev. **118** (1960) 271.
- [26] Andrzej Czarnecki and William J. Marciano, Lepton anomalous magnetic moments - a theory update, EE UU, 1998, arXiv:hep-ph/9810512v1.
- [27] M. Passera, Electron, muon and tau magnetic moments: a theoretical update, Italy, 2007, arXiv:hep-ph/0702027v1.
- [28] G. Charpak, et al., Phys. Rev. Lett. **6** (1961) 128; G. Charpak, et al., Nuovo Cimento **37**(1965) 1241.
- [29] F. J. M. Farley, et al., Nuovo Cimento **45** (1966) 281; J. Bailey et al., Phys. Lett. B **28** (1968) 287.
- [30] J. Aldins, T. Kinoshita, S. J. Brodsky, A. J. Dufner, Phys. Rev. Lett. **23** (1969) 441; Phys. Rev. D **1** (1970) 2378.
- [31] J. Bailey et al. [CERN-Mainz-Daresbury Collaboration], Nucl. Phys. B **150** (1979) 1.

- [32] Fred Jegerlehner, Andreas Nyffeler, The muon $g - 2$, Germany, 2009, arXiv:0902.3360v1.
- [33] G. W. Bennett et al. [Muon $g-2$ Collaboration], Phys. Rev. D **73** (2006) 072003. G. W. Bennett et al., Final Report of the Muon $E821$ Anomalous Magnetic Moment Measurement at BNL, EE UU, 2006, arXiv:hep-ex/0602035v1.
- [34] V. Bargmann, L. Michel, V. A. Telegdi, Phys. Rev. Lett. **2** (1959) 435.
- [35] R. M. Carey et al., Phys. Rev. Lett. **82** (1999) 1632. H. N. Brown et al. [Muon ($g - 2$) Collaboration], Phys. Rev. D. **62** (2000) 091101. H. N. Brown et al. [Muon ($g - 2$) Collaboration], Phys. Rev. Lett. **86** (2001) 2227. G. W. Bennett et al. [Muon ($g - 2$) Collaboration], Phys. Rev. Lett. **89** (2002) 101804 [Erratum-ibid. **89** (2002) 129903]. G. W. Bennett et al. [Muon ($g - 2$) Collaboration], Phys. Rev. Lett. **92** (2004) 161802.
- [36] R. Prigl et al., Nucl. Instr. and Methods Phys. Res. **A374** (1996) 118; X. Fei, V. Hughes, R. Prigl, Nucl. Instr. and Methods Phys. Res. **A394** (1997) 349.
- [37] W. Liu et al., Phys. Rev. Lett. **82** (1999) 711.
- [38] T. Kinoshita, M. Nio, Phys. Rev. D **53** (1996) 4909; M. Nio, T. Kinoshita, Phys. Rev. D **55** (1997) 7267; T. Kinoshita, hep-ph/9808351.
- [39] A. Czarnecki, S. I. Eidelman, S. G. Karshenboim, Phys. Rev. D **65** (2002) 053004; S. G. karshenboim, V. A. Shelyuto, Phys. Lett. B **517** (2001) 32.
- [40] G.W. Bennett et al., Measurement of the Negative Muon Anomalous Magnetic Moment to 0,7 ppm , EE UU, 2004, arXiv: hep-ex/0401008v3.
- [41] G. Charpak et al., Phys. Rev. Lett. **6** (1961) 128; G. Charpak et al., Nuovo Cimento **22** (1961) 1043; J. Bailey et al., Phys. Lett. B **28** (1968) 287; Nuovo Cimento A **9** (1972) 369; J. Bailey et al. [CERN-Mainz-Dasesbury Collaboration], Nucl. Phys. B **150** (1979) 1; R. M. Carey et al., Phys. Rev. Lett. **82** (1999) 1632; H. N. Brown et al. [Muon ($g - 2$) Collaboration] Phys. Rev. D **62** (2000) 091101; H. N. Brown et al. [Muon ($g - 2$) Collaboration] Phys. Rev. Lett. **86** (2001) 2227; G. W. Bennett et al. [Muon ($g - 2$) Collaboration] Phys. Rev. Lett. **92** (2004) 161802; G. W. Bennett et al. [Muon ($g - 2$) Collaboration] Phys. Rev. Lett. **92** (2004) 161802; G. W. Bennett et al. [Muon ($g - 2$) Collaboration] Phys. Rev. Lett. **92** (2004) 161802; G. W. Bennett et al. [Muon $g - 2$ Collaboration], Phys. Rev. D **73** (2006) 072003;
- [42] Michel Davier, The hadronic contribution to $(g - 2)_\mu$, France, 2007, 1998, arXiv:hep-ph/0701163v2.
- [43] George Wei-Shu Hou, Fei-Fan Lee, and Chien-Yi Ma, Fourth Generation Leptons an Muon $g-2$, 34th International Conference on High Energy Physics, Philadelphia, 2008.

Apéndice A

Notación y relaciones empleadas

A.1. Matrices de Pauli

Las matrices de Pauli están dadas por

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (\text{A.1})$$

cuyas principales propiedades son:

$$\begin{aligned} \sigma_i &= \sigma^i, & \sigma_i \sigma_j &= i \varepsilon_{ijk} \sigma^k + \delta_{ij} \\ \sigma_i^\dagger &= \sigma_i, & \sigma_i^2 &= 1 \\ \text{Tr} \{ \sigma_i \} &= 0, & [\sigma_i, \sigma_j] &= 2i \varepsilon_{ijk} \sigma^k \\ \det(\sigma_i) &= 1, & \{ \sigma_i, \sigma_j \} &= 2 \delta_{ij}, \end{aligned}$$

con $\delta_{ij} = \delta^{ij} = \delta_i^j = \delta_j^i$, representando el delta de Kröneckner, y las combinaciones lineales definidas por

$$\sigma^\pm = \frac{\sigma^1 \pm \sigma^2}{2},$$

con

$$\sigma^+ = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^- = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (\text{A.2})$$

definiendo el tensor de Levi-Civita totalmente antisimétrico

$$\varepsilon_{ijk} = \begin{cases} +1 & \text{si } \{i, j, k\} \text{ es una permutación par de } \{1, 2, 3\} \\ -1 & \text{si } \{i, j, k\} \text{ es una permutación impar de } \{1, 2, 3\} \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} \quad (\text{A.3})$$

A.2. Matrices Gamma de Dirac

Matrices 4×4 construidas a partir de la matrices de Pauli y de la matriz identidad

$$\gamma_0 = \beta = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix}, \quad \gamma_i = \beta \alpha_i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ -\sigma_i & 0 \end{pmatrix}, \quad (\text{A.4})$$

con

$$\alpha_i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ \sigma_i & 0 \end{pmatrix}, \quad \beta = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix}. \quad (\text{A.5})$$

Sus principales propiedades son:

$$\begin{aligned} (\gamma^0)^2 &= I, \quad (\gamma^i)^2 = -I, \quad (\gamma^0)^\dagger = \gamma^0, \quad (\gamma^i)^\dagger = -\gamma^i \\ \{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} &= 2g^{\mu\nu} \\ [\gamma^\mu, \gamma^\nu] &= 2\sigma^{\mu\nu} \\ \sigma^{\mu\nu} &= -\sigma^{\nu\mu} \\ \gamma^\mu \gamma^\nu &= g^{\mu\nu} - i\sigma^{\nu\mu}, \end{aligned} \quad (\text{A.6})$$

con $g^{\mu\nu}$ representando el tensor de métrica pseudo-euclidiana, definido como:

$$g_{\mu\nu} = g_{\nu\mu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Con las matrices gamma se define

$$\gamma_5 = \gamma^5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 = \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix}. \quad (\text{A.7})$$

La matriz γ^5 tiene las siguientes propiedades:

$$(\gamma^5)^2 I, \quad (\gamma^5)^\dagger = \gamma^5, \quad \{\gamma^5, \gamma^\mu\} = 0, \quad [\gamma^5, \sigma^{\mu\nu}] = 0. \quad (\text{A.8})$$

Los conjugados hermíticos de estas matrices están dados por:

$$\gamma^0 \gamma^\mu \gamma^0 = \gamma^{\mu\dagger} \quad (\text{A.9})$$

$$\gamma^0 \gamma^5 \gamma^0 = -\gamma^{5\dagger} \quad (\text{A.10})$$

$$\gamma^0 (\gamma^\mu \gamma^5) \gamma^0 = (\gamma^5 \gamma^\mu)^\dagger \quad (\text{A.11})$$

$$\gamma^0 \sigma^{\mu\nu} \gamma^0 = (\sigma^{\mu\nu})^\dagger. \quad (\text{A.12})$$

Las trazas de estas matrices están dados por:

$$\begin{aligned} Tr \{I\} &= 4 \\ Tr \{\gamma^\mu\} &= 0 \\ Tr \{\gamma^5\} &= 0 \\ Tr \{\gamma^5 \gamma^\mu\} &= 0 \\ Tr \{\gamma^\mu \gamma^\nu\} &= 4g^{\mu\nu} \\ Tr \{\sigma^{\mu\nu}\} &= 0 \\ Tr \{\gamma^5 \gamma^\mu \gamma^\nu\} &= 0 \\ Tr \{\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma^\sigma\} &= 4(g^{\mu\nu} g^{\rho\sigma} - g^{\mu\rho} g^{\nu\sigma} - g^{\mu\sigma} g^{\nu\rho}) \\ Tr \{\gamma^5 \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma^\sigma\} &= -4i\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} = 4i\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \end{aligned} \quad (\text{A.13})$$

Las identidades de contracción de estas matrices están dados por:

$$\begin{aligned}
 \gamma^\rho \gamma_\rho &= 4 \\
 \gamma^\rho \gamma^\mu \gamma_\rho &= -2\gamma^\mu \\
 \gamma^\rho \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma_\rho &= 4g^{\mu\nu} \\
 \gamma^\rho \gamma^\alpha \gamma^\mu \gamma^\beta \gamma_\rho &= -2\gamma^\beta \gamma^\mu \gamma^\alpha \\
 \gamma^\rho \gamma^\alpha \gamma^\beta \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma_\rho &= 2(\gamma^\nu \gamma^\alpha \gamma^\beta \gamma^\mu + \gamma^\mu \gamma^\beta \gamma^\alpha \gamma^\nu) \\
 \gamma^\rho \sigma^{\mu\nu} \gamma_\rho &= 0 \\
 \gamma^\rho \sigma^{\mu\nu} \gamma^\alpha \gamma_\rho &= 2\gamma^\alpha \sigma^{\mu\nu}
 \end{aligned} \tag{A.14}$$

Las matrices de Dirac en n -dimensiones son:

$$\begin{aligned}
 g^{\mu\nu} g_{\mu\nu} &= n \\
 \gamma^\rho \gamma_\rho &= n \\
 \gamma^\rho \gamma^\mu \gamma_\rho &= (2-n)\gamma^\mu \\
 \gamma^\rho \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma_\rho &= 4g^{\mu\nu} + (n-4)\gamma^\mu \gamma^\nu \\
 \gamma^\rho \gamma^\alpha \gamma^\mu \gamma^\beta \gamma_\rho &= -2\gamma^\beta \gamma^\mu \gamma^\alpha + (4-n)\gamma^\alpha \gamma^\mu \gamma^\beta.
 \end{aligned} \tag{A.15}$$

Los proyectores, $P_L = (I - \gamma^5)/2$ y $P_R = (I + \gamma^5)/2$, que actúan sobre los estados de quiralidad de las partículas, representadas por Ψ : $P_L \Psi = \Psi_L$, $P_R \Psi = \Psi_R$, cumplen con las siguientes propiedades:

$$\begin{aligned}
 P_R^2 &= P_R, & P_L^2 &= P_L \\
 P_R P_L &= 0, & P_L P_R &= 0 \\
 P_R + P_L &= I, & P_R - P_L &= \gamma^5 \\
 \gamma^5 P_R &= P_R, & \gamma^5 P_L &= -P_L \\
 \gamma^\mu P_R &= P_L \gamma^\mu, & \gamma^\mu P_L &= P_R \gamma^\mu \\
 \overline{\Psi}_R &= P_L \overline{\Psi}, & \overline{\Psi}_L &= P_R \overline{\Psi}.
 \end{aligned} \tag{A.16}$$

A.3. Espinores de Dirac

Los espinores de Dirac, representados por u y v , son soluciones de la ecuación de Dirac, tienen dos estados de polarización y sus espinores conjugados, dados por $\bar{u} = u^\dagger \gamma^0$ y $\bar{v} = v^\dagger \gamma^0$, son soluciones de

$$\begin{aligned}
 \overline{u(p)} (\gamma^\mu p_\mu - m) &= 0, \\
 \overline{v(p)} (\gamma^\mu p_\mu + m) &= 0.
 \end{aligned} \tag{A.17}$$

Los espinores de Dirac también obedecen las identidades de Gordon:

$$\begin{aligned}
 \overline{u(p')} \gamma^\mu u(p) &= \frac{1}{2m} \overline{u(p')} [(p' + p)^\mu + i\sigma^{\mu\nu} (p' - p)_\nu] u(p), \\
 \overline{u(p')} \gamma^\mu \gamma^5 u(p) &= \frac{1}{2m} \overline{u(p')} [(p' - p)^\mu \gamma^5 + i\sigma^{\mu\nu} (p' + p)_\nu \gamma^5] u(p).
 \end{aligned} \tag{A.18}$$

Algunas de las identidades derivadas de los espinores conjugados y del algebra de Clifford, con los términos que dependen de γ^μ tendiendo a cero, son:

$$\begin{aligned}
 \not{p}\gamma^\mu\not{p}P_{L(R)} &= 2mp^\mu P_{R(L)} & \not{p}\gamma^\mu\not{p}'P_{L(R)} &= 2mp'^\mu P_{R(L)} + 2mp^\mu P_{L(R)} \\
 \not{p}'\gamma^\mu\not{p}P_{L(R)} &= 0 & \not{p}'\gamma^\mu\not{p}'P_{L(R)} &= 2mp'^\mu P_{L(R)} \\
 \gamma^\mu\not{p}\not{p}P_{L(R)} &= 0 & \gamma^\mu\not{p}\not{p}'P_{L(R)} &= -2mp'^\mu P_{R(L)} \\
 \gamma^\mu\not{p}'\not{p}P_{L(R)} &= 2mp'^\mu P_{R(L)} & \gamma^\mu\not{p}'\not{p}'P_{L(R)} &= 0 \\
 \gamma^\mu\not{p}P_{L(R)} &= 0 & \gamma^\mu\not{p}'P_{L(R)} &= 2p'^\mu P_{L(R)} \\
 \not{p}\gamma^\mu P_{L(R)} &= 2p^\mu P_{L(R)} & \not{p}'\gamma^\mu P_{L(R)} &= 0
 \end{aligned} \tag{A.19}$$

A.4. Grupo $SU(2)$

El algebra de Lie utilizada para el grupo $SU(2)$ es la siguiente

$$[\tau_i, \tau_j] = i\varepsilon_{ijk}\tau^k, \tag{A.20}$$

ésta es la más sencilla de las algebras de Lie a causa de que ε_{ijk} para $i, j, k = 1, 2, 3$ es el término antisimétrico, completamente posible, más sencillo con tres índices. La expresión (A.20) (en unidades $\hbar = 1$) es equivalente al algebra de momentum angular.

Analizando un espacio finito de N dimensiones y asumiendo que transforma bajo algunas representaciones irreducibles de algebra, se puede ver que se puede diagonalizar un elemento, que obedece el algebra de la representación, denominado T_3 . Llamando los valores de T_3 , j , se tiene un conjunto de estados

$$T_3 |j, \alpha\rangle = j |j, \alpha\rangle,$$

donde α se utiliza si se tiene más de un estado T_3 . Los estados se escogen de tal forma que

$$\langle j, \alpha | j, \beta\rangle = \delta_{\alpha\beta}.$$

El grupo $SU(2) \longrightarrow e^{i\theta^a\tau^a}$ corresponde a transformaciones unitarias, matrices (2×2) de determinante 1. La representación más sencilla del grupo $SU(2)$ es la de espín $1/2$ y es la responsable del nombre SU , el cual es un acrónimo de "Special Unitary" (unitario especial):

$$\begin{aligned}
 \tau^a &\longrightarrow \tau^1, \tau^2, \tau^3, \\
 \tau^1 &= \frac{1}{2}\sigma_1, \quad \tau^2 = \frac{1}{2}\sigma_2, \quad \tau^3 = \frac{1}{2}\sigma_3,
 \end{aligned}$$

en donde $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$, corresponden a las matrices de Pauli, (A.1).

A.5. Grupo $SU(3)$

Después del algebra de $SU(2)$, el algebra de $SU(3)$ es la más importante en física de partículas. $SU(3)$ es el grupo de matrices unitarias 3×3 con determinante 1.

$SU(3)$ es generado por matrices sin traza hermíticas de orde 3×3 :

$$U(\alpha) = e^{i\alpha_a T_a}, \quad (\text{A.21})$$

diagonalizando $\alpha_a T_a$

$$V\alpha_a T_a V^{-1} = D, \quad (\text{A.22})$$

donde D es la diagonal

$$\det(U(\alpha)) = \det(e^{iD}) = \prod_j e^{i[D]_{jj}} = e^{i\text{Tr}(D)} = e^{i\text{Tr}(\alpha_a T_a)}$$

si $\text{Tr}(\alpha_a T_a) = 0 \longrightarrow \det(U(\alpha)) = 1$.

El grupo $SU(3) \longrightarrow e^{i\alpha_a T_a}$ corresponde a transformaciones unitarias, matrices (3×3), 8 posibles generadores independientes que en términos de las matrices de Gell-Mann tienen la forma:

$$\begin{aligned} T_1 &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & T_2 &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & T_3 &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ T_4 &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & T_5 &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix}, & T_6 &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \\ T_7 &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}, & T_8 &= \frac{1}{2\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (\text{A.23})$$

$$T_a = \frac{1}{2} \lambda_a, \quad (\text{A.24})$$

$$\lambda_a = \begin{pmatrix} \sigma_a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{para } a = 1, 2, 3 \quad (\text{A.25})$$

$$\text{Tr}(T_a T_b) = \frac{1}{2} \delta_{ab}. \quad (\text{A.26})$$

A.6. Propiedades de la función Gamma

$$\begin{aligned} \Gamma(1) &= 1 \\ \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) &= \sqrt{\pi} \\ \Gamma(x+1) &= x\Gamma(x) \\ \Gamma(x) &= (n-1)! \\ \Gamma\left(\frac{\varepsilon}{2}\right) &= \frac{2}{\varepsilon} - \gamma + O(\varepsilon) \end{aligned}$$

A.7. Integrales para la regularización dimensional

La parametrización de Feynman consiste en hacer uso de las integrales:

Fórmula de Feynman con un-parámetros:

$$\frac{1}{ab} = \int_0^1 dx \frac{1}{[ax + b(1-x)]^2}. \quad (\text{A.27})$$

Fórmula de Feynman con dos-parámetros:

$$\frac{1}{abc} = 2 \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \frac{1}{[a(1-x-y) + bx + cy]^3}. \quad (\text{A.28})$$

Las cuales reducen N propagadores a un solo factor elevado a la $N - potencia$.

Algunas de las integrales de Feynman en el espacio N -dimensional son:

$$\int \frac{p}{(p^2 + 2pq - m^2)^\alpha} d^n p = (-1)^{1+\alpha} i\pi^{\frac{n}{2}} \frac{\Gamma(\alpha - \frac{n}{2})}{\Gamma(\alpha)} \frac{q}{(q^2 + m^2)^{\alpha - \frac{n}{2}}} \quad (\text{A.29})$$

$$\int \frac{p^\mu p^\nu}{(p^2 + 2pq - m^2)^\alpha} d^n p = (-1)^\alpha \frac{i\pi^{n/2}}{\Gamma(\alpha) (q^2 + m^2)^{\alpha - \frac{n}{2}}} \left[q^\mu q^\nu \Gamma\left(\alpha - \frac{n}{2}\right) - \frac{g^{\mu\nu}}{2} (q^2 + m^2) \Gamma\left(\alpha - 1 - \frac{n}{2}\right) \right] \quad (\text{A.30})$$

$$\int \frac{d^n p}{(p^2 + 2pq - m^2)^\alpha} = (-1)^\alpha i\pi^{n/2} \frac{\Gamma(\alpha - \frac{n}{2})}{\Gamma(\alpha)} \frac{1}{(q^2 + m^2)^{\alpha - \frac{n}{2}}} \quad (\text{A.31})$$

Apéndice B

Contribución del bosón Z' al MMA del muón

En la figura B.1 se muestra como se puede expandir la función del vértice de interacción del muón con el Z' , $\Gamma_a^\mu(p, q, p')$, construida a partir de todos los posibles invariantes de Lorentz.

A partir del diagrama de Feynman de la interacción de un muón con un fotón, utilizando teoría de perturbaciones, el vértice de interacción es igual a una serie de términos de la forma:

$$-ie\mu^{\varepsilon/2}\Gamma_\mu = -ie\mu^{\varepsilon/2}\gamma_\mu - ie\mu^{\varepsilon/2}\Lambda_\mu + \dots$$

A un loop la función del vértice Γ_μ es igual a:

$$\Gamma_\mu = \gamma_\mu + \Lambda_\mu$$

El diagrama de Feynman que se utiliza para calcular la contribución del Z' al MMA del muón se presenta en la figura B.2.

Para nuestro cálculo, específicamente, las constantes de acoplamiento vectorial y axial (tabla 3.4) están dadas por:

$$\tilde{g}_\nu - \tilde{g}_a\gamma_5 = \tilde{A}P_L + \tilde{B}P_R$$

empleando (A.16)

$$\tilde{g}_\nu - \tilde{g}_a\gamma_5 = \frac{\tilde{A} + \tilde{B}}{2} - \frac{\tilde{A} - \tilde{B}}{2}\gamma_5,$$

por lo que

$$\begin{aligned} \tilde{g}_\nu &= \frac{\tilde{A} + \tilde{B}}{2} & \tilde{g}_a &= \frac{\tilde{A} - \tilde{B}}{2}, \\ \tilde{A} &= \tilde{g}_\nu + \tilde{g}_a & \tilde{B} &= \tilde{g}_\nu - \tilde{g}_a. \end{aligned}$$

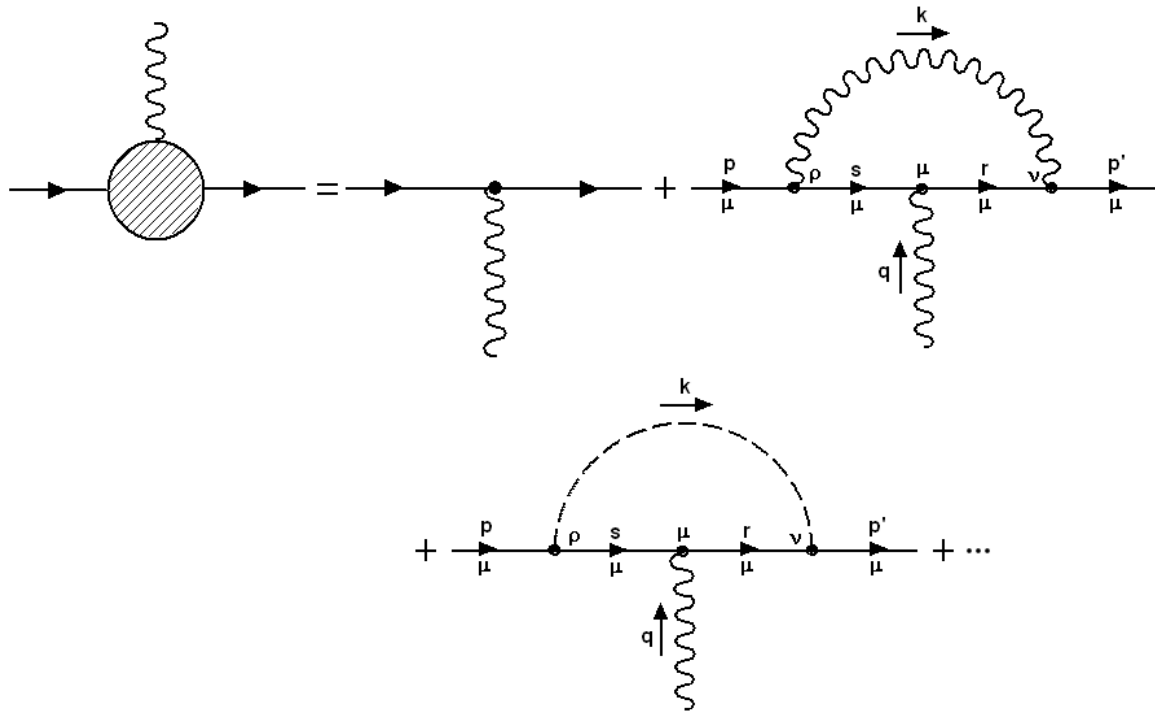


Figura B.1: Expansión en diagramas de Feynman de la función del vértice de interacción del muón con el bosón exótico Z' , $\Gamma_a^\mu(p, q, p')$.

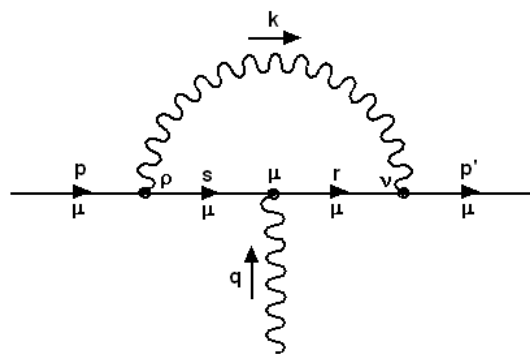


Figura B.2: Diagrama de Feynman empleado para calcular la contribución del Z' al MMA del muón.

El término de acoplamiento vectorial está dado por:

$$\tilde{g}_v = \frac{-1 + 4s_w^2}{2(3 - 4s_w^2)^{1/2}}.$$

El término de acoplamiento axial está dado por:

$$\tilde{g}_a = \frac{-1}{2(3 - 4s_w^2)^{1/2}}.$$

Así para los vértices de interacción se tiene:

$$\tilde{A} = \frac{-1 + 2s_w^2}{(3 - 4s_w^2)^{1/2}},$$

$$\tilde{B} = \frac{2s_w^2}{(3 - 4s_w^2)^{1/2}}.$$

Utilizando el hecho de que $\tilde{A}\tilde{B} = AB$

$$AB = \frac{-2(1 - 2s_w^2)s_w^2}{3 - 4s_w^2}.$$

Los propagadores entrantes deben ser iguales a los propagadores salientes. En el vértice ρ se tiene $p = s + k$, en el vértice ν se tiene $r + k = p'$, de donde se obtiene $r = p' - k$. En el vértice μ se tiene $q = p' - p$. Los términos correspondientes al diagrama de Feynman son los siguientes:

	Con Z'
Del vértice de interacción ν	$\frac{ig}{2c_W} (A'P_R + B'P_L) \gamma^\nu$
Del propagador r del muón	$\frac{i}{\eta' - m} = i \frac{(\eta' + m)}{\eta'^2 - m^2}$
Del vértice de interacción μ	$-ie\gamma^\mu$
Del propagador s del muón	$\frac{i}{\not{s} - m} = i \frac{(\not{s} + m)}{s^2 - m^2}$
Del vértice de interacción ρ	$\frac{ig}{2c_W} \gamma^\rho (AP_L + BP_R)$
Del propagador k del bosón Z'	$-\frac{i}{k^2 - M_{Z'}^2} g_{\rho\nu}$

Los propagadores de los bosones, k , se han evaluado en el gauge de Feynman, $\xi = 1$. Para simplificar los cálculos el vértice de interacción ρ se sustituirá por $\frac{ig}{2c_W} \gamma^\rho (AP_L + BP_R)$ y el vértice ν por $\frac{ig}{2c_W} (A'P_R + B'P_L) \gamma^\nu$, entonces las constantes de acoplamiento que se emplearan en el calculo son:

Interacción	A	B	A'	B'
$\mu\mu Z'$	$\frac{-1 + 2s_w^2}{(3 - 4s_w^2)^{1/2}}$	$\frac{2s_w^2}{(3 - 4s_w^2)^{1/2}}$	$\frac{-1 + 2s_w^2}{(3 - 4s_w^2)^{1/2}}$	$\frac{2s_w^2}{(3 - 4s_w^2)^{1/2}}$

El método que se utilizará para calcular las integrales sobre los momentos que aparecen en la amplitud de probabilidad, de que ocurra el proceso, es la regularización dimensional. Se realizarán las integrales en un espacio de dimensión arbitraria n , tomando la continuación analítica de las funciones que se van a integrar en dicho espacio n -dimensional. Después de realizar las integrales, se toma el límite cuando $n \rightarrow 4 + 2\varepsilon$ quedando la divergencia de la integral como un polo $1/\varepsilon$, y un factor finito. Así, la amplitud se reduce a la integral:

$$\begin{aligned}
 -i\mu^{n-4}\Lambda^\mu(p, q, p') &= \int \frac{d^n k}{(2\pi)^n} \frac{ig}{2c_W} (A'P_R + B'P_L) \gamma^\nu \frac{i(\not{p}' - \not{k} + m)}{(p' - k)^2 - m^2} (-ie\gamma^\mu) \\
 &\quad \frac{i(\not{p}' - \not{k} + m)}{(p - k)^2 - m^2} \frac{ig}{2c_W} \gamma^\rho (AP_L + BP_R) \left(-\frac{i}{k^2 - M^2} g_{\rho\nu} \right) \\
 \Lambda^\mu(p, q, p') &= -\frac{ig^2 e \mu^{4-n}}{(2\pi)^n 2c_W^2} \int d^n k \frac{(A'P_R + B'P_L) N^\mu (AP_L + BP_R)}{abc}
 \end{aligned}$$

donde se ha introducido la escala de energía μ con el fin de que la integración tenga las unidades de espacio-tiempo. Para el denominador se utiliza la fórmula de Feynman con dos-parámetros (A.28), con

$$N^\mu = \gamma^\nu (\not{p}' - \not{k} + m) \gamma^\mu (\not{p}' - \not{k} + m) \gamma^\rho g_{\rho\nu}$$

por lo que la amplitud toma la forma

$$\Lambda^\mu(p, q, p') = -\frac{ig^2 e \mu^{4-n}}{(2\pi)^n 2c_W^2} \int d^n k \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \frac{(A'P_R + B'P_L) N^\mu (AP_L + BP_R)}{[a(1-x-y) + bx + cy]^3}$$

El denominador se reduce a

$$a(1-x-y) + bx + cy = k'^2 - D^2$$

con

$$D^2 = p^2 x^2 + 2p \cdot p' xy + p'^2 y^2 - p^2 x - p'^2 y + M^2(1-x-y) + m^2(x+y)$$

quedando así la amplitud como

$$\Lambda^\mu(p, q, p') = -\frac{ig^2 e \mu^{4-n}}{(2\pi)^n 2c_W^2} \int d^n k \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \frac{(A'P_R + B'P_L) N^\mu (AP_L + BP_R)}{[k'^2 - D^2]^3}$$

Con el cambio de variable $k' = k - px - p'y$, $q = p' - p$ y en unidades naturales, $q^2 = (p' - p)^2 = p'^2 + p^2 - 2p' \cdot p = 0$, ahora bien ya que $p'^2 = p^2$, $p'^2 = p^2 = p' \cdot p$, permite evaluar D^2 en la capa de masa:

$$D^2 = m^2(x+y)^2 + M^2(1-x-y)$$

De la misma forma $k' = k' + p'x + p'y$ se sustituye en el numerador N_μ , que se puede dividir en tres partes: $N^\mu = N_1^\mu + N_2^\mu + N_3^\mu$, en consecuencia $\Lambda^\mu(p, q, p') = \Lambda_1^\mu + \Lambda_2^\mu + \Lambda_3^\mu$, con:

$$\begin{aligned} N_1^\mu &= -\gamma^\nu [p'(1-y) - p'x + m] \gamma^\mu k'_\nu - \gamma^\nu k'_\nu \gamma^\mu [p'(1-x) - p'y + m] \gamma_\nu \\ N_2^\mu &= \gamma^\nu k'_\nu \gamma^\mu k'_\nu \\ N_3^\mu &= \gamma^\nu [p'(1-y) - p'x + m] \gamma^\mu [p'(1-x) - p'y + m] \gamma_\nu \end{aligned}$$

Para Λ_1^μ se utiliza la ecuación (A.29)

$$\int \frac{k'_\rho}{(k'^2 - D^2)^3} d^n k'_\rho = 0$$

ésto quiere decir que los términos impares en k' dan origen a una integral que es cero. Por lo que los dos términos de Λ_1^μ se anulan, entonces $\Lambda_1^\mu = 0$.

Para Λ_2^μ se utiliza la integral (A.30)

$$\int \frac{k'_\alpha k'_\beta}{[k'^2 - D^2]^3} d^n k = \frac{i\pi^{n/2}}{4(D^2)^{2-\frac{n}{2}}} \Gamma\left(2 - \frac{n}{2}\right) g_{\alpha\beta}$$

reemplazando este resultado en Λ_2^μ

$$\begin{aligned} \Lambda_2^\mu(p, q, p') &= -\frac{ig^2 e\mu^{4-n}}{(2\pi)^n 2c_W^2} \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy (A'P_R + B'P_L) \gamma^\nu \gamma^\alpha \gamma^\mu \gamma_\alpha \gamma_\nu (AP_L + BP_R) \\ &\quad \frac{i\pi^{n/2}}{4(D^2)^{2-\frac{n}{2}}} \Gamma\left(2 - \frac{n}{2}\right) \end{aligned}$$

para el término $\gamma^\nu \gamma^\alpha \gamma^\mu \gamma^\beta \gamma_\nu g_{\alpha\beta} = \gamma^\nu \gamma^\alpha \gamma^\mu \gamma_\alpha \gamma_\nu$ se aplican identidades de contracción del algebra de Dirac (A.14)

$$\begin{aligned} \Lambda_2^\mu(p, q, p') &= \frac{g^2 e\mu^{4-n}}{8c_W^2} \frac{\pi^{n/2}}{(2\pi)^n} \Gamma\left(2 - \frac{n}{2}\right) (2-n)^2 \int_0^1 dx \\ &\quad \int_0^{1-x} dy \frac{(A'P_R + B'P_L) \gamma^\mu (AP_L + BP_R)}{(D^2)^{2-\frac{n}{2}}} \end{aligned}$$

Se toma $n \rightarrow 4$, entonces $n = 4 - \varepsilon$, $\varepsilon = 4 - n$, de tal forma que $(2 - n)^2 = 4(1 - \varepsilon)$; utilizando el hecho de que $\varepsilon^2 \rightarrow 0$. Reemplazando estos resultados en Λ_2^μ , se ve que éste término no contribuye al momento magnético anómalo de la partícula debido a que depende de γ^μ . Sólo contribuyen los términos que dependen de $\sigma^{\mu\nu} q^\mu$. Los términos que dependen de γ^μ contribuyen a la renormalización de la carga, los que dependen de q^μ contribuyen a otras corrientes y los que dependen de $\sigma^{\mu\nu} q^\mu \gamma^5$ contribuyen al momento dipolar eléctrico de la partícula.

Para la tercera parte de la corrección al vértice, Λ_3^μ , ya que N_3^μ no depende de k' , se utiliza (A.31)

$$\int \frac{d^n k'}{(k'^2 - D^2)^3} = -i\pi^{n/2} \frac{\Gamma(3 - \frac{n}{2})}{\Gamma(3)} \frac{1}{(D^2)^{3 - \frac{n}{2}}}$$

por sencillez se toma $n = 4$, lo cual equivale al número de dimensiones en nuestra integral

$$\Lambda_3^\mu(p, q, p') = -\frac{g^2 e}{32\pi^2 2c_W^2} \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \frac{(A'P_R + B'P_L) N_3^\mu (AP_L + BP_R)}{D^2}$$

Para el numerador:

$$N_3^\mu = \gamma^\nu [\not{p}'(1-y) - \not{p}x + m] \gamma^\mu [\not{p}'(1-x) - \not{p}'y + m] \gamma_\nu$$

se utiliza $\not{q} = \not{p}'(1-y) - \not{p}x$ y $\not{b} = \not{p}'(1-x) - \not{p}'y$

$$N_3^\mu = \gamma^\nu \not{q} \gamma^\mu \not{b} \gamma_\nu + m \gamma^\nu \not{q} \gamma^\mu \gamma_\nu + m \gamma^\nu \gamma^\mu \not{b} \gamma_\nu + m^2 \gamma^\nu \gamma^\mu \gamma_\nu$$

aplicando (A.14) el término $m^2 \gamma^\nu \gamma^\mu \gamma_\nu = -2m^2 \gamma^\mu$ se desprecia ya que depende de γ^μ

$$N_3^\mu = \gamma^\nu \not{q} \gamma^\mu \not{b} \gamma_\nu + m \gamma^\nu \not{q} \gamma^\mu \gamma_\nu + m \gamma^\nu \gamma^\mu \not{b} \gamma_\nu$$

separando en dos términos

$$N_{3a}^\mu = \gamma^\nu [\not{p}'(1-y) - \not{p}x] \gamma^\mu [\not{p}'(1-x) - \not{p}'y] \gamma_\nu$$

$$N_{3b}^\mu = m \gamma^\nu [\not{p}'(1-y) - \not{p}x] \gamma^\mu \gamma_\nu + m \gamma^\nu \gamma^\mu [\not{p}'(1-x) - \not{p}'y] \gamma_\nu$$

realizando los productos en N_{3a}^μ y empleando (A.14)

$$\begin{aligned} N_{3a}^\mu &= -2(1-x)(1-y) \not{p}' \gamma^\mu \not{p}' \\ &\quad + 2y(1-y) \not{p}' \gamma^\mu \not{p}' + 2x(1-x) \not{p}' \gamma^\mu \not{p}' \\ &\quad - 2xy \not{p}' \gamma^\mu \not{p}' \end{aligned}$$

En seguida se proyecta la corrección al vértice Λ_3^μ en los estados de momento p y p' , $u(p') \Lambda_3^\mu u(p)$, haciendoso de la ecuación de Dirac, se tiene. Posteriormente se utilizan las relaciones derivadas de algebra de Clifford (A.19), en la reducción de términos. El término $(A'P_R + B'P_L) N_{3a}^\mu (AP_L + BP_R)$ se desarrolla teniendo en cuenta las propiedades de los proyectores (A.16), recordando que los términos que dependen de $\gamma^5 \rightarrow 0$ no intervienen en el cálculo. Utilizando las identidades de Gordon (A.18), $2p^\mu = 2m\gamma^\mu - q^\mu - i\sigma^{\mu\nu} q_\nu$ y teniendo en cuenta que los términos que dependen de γ^μ no intervienen en el cálculo y que $q^\mu \rightarrow 0$:

$$p^\mu = -\frac{i\sigma^{\mu\nu} q_\nu}{2}$$

reemplazando estos resultados en la corrección al vértice, se obtiene:

$$\Lambda_{3a}^\mu(p, q, p') = \frac{e}{2m} \left[\frac{G_F m^2}{8\sqrt{2}\pi^2} \left(-\frac{2(A'B + B'A)}{c_W^2} J_1 \right) \right] i\sigma^{\mu\nu} q_\nu$$

con $\frac{g^2}{8} = \frac{G_F}{\sqrt{2}} M_W^2$ y la integral a solucionar dada por

$$J_1 = \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \frac{(x+y-2)(x+y-1)}{\frac{m^2}{M_W^2}(x+y)^2 + \frac{M^2}{M_W^2}(1-x-y)}$$

Se realiza la misma acción con el término $(A'P_R + B'P_L) N_{3b}^\mu (AP_L + BP_R)$, recordando que $q = p' - p$, se sustituye $p'^\mu = p^\mu + q^\mu = p^\mu$ con $q^\mu \rightarrow 0$ y haciendo uso de la identidad de Gordon $2p^\mu = 2m\gamma^\mu - q^\mu - i\sigma^{\mu\nu} q_\nu$, con la sustitución $p'^\mu = p^\mu$: $p^\mu \gamma^5 = m\gamma^\mu \gamma^5$, se obtiene con la integral a solucionar dada por

$$\Lambda_{3b}^\mu(p, q, p') = \frac{e}{2m} \left[\frac{G_F m^2}{8\sqrt{2}\pi^2} \left(-\frac{4(A'B + B'A)}{c_W^2} J_2 \right) \right] i\sigma^{\mu\nu} q_\nu$$

con la integral a solucionar dada por

$$J_2 = \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \frac{(x+y-1)}{\frac{m^2}{M_W^2}(x+y)^2 + \frac{M^2}{M_W^2}(1-x-y)}$$

Sumando los dos resultados se obtiene el resultado de la contribución de Z' al MMA del muón:

$$\Lambda^\mu(p, q, p') = \frac{e}{2m} \left[\frac{G_F m^2}{8\sqrt{2}\pi^2} \left(-\frac{2(A'B + B'A)}{c_W^2} J_1 - \frac{4(A'B + B'A)}{c_W^2} J_2 \right) \right] i\sigma^{\mu\nu} q_\nu \quad (\text{B.1})$$

Apéndice C

Contribución de THDM al MMA del muón

El diagrama de Feynman que se utiliza para determinar la contribución THDM al MMA del muón se presenta en la figura C.1.

Los propagadores entrantes deben ser iguales a los propagadores salientes. En el vértice ρ se tiene $p = s + k$, en el vértice ν se tiene $r + k = p'$, de donde se obtiene $r = p' - k$. En el vértice μ se tiene $q = p' - p$. Los términos correspondientes al diagrama de Feynman son los siguientes:

	Con H_0	Con h_0	Con A_0
Del vértice de interacción ν	$D'P_R + E'P_L$	$D'P_R + E'P_L$	$D'P_R + E'P_L$
Del propagador r del muón	$\frac{i}{\eta' - m} = i \frac{(\eta' + m)}{\eta'^2 - m^2}$	$\frac{i}{\eta' - m} = i \frac{(\eta' + m)}{\eta'^2 - m^2}$	$\frac{i}{\eta' - m} = i \frac{(\eta' + m)}{\eta'^2 - m^2}$
Del vértice de interacción μ	$-ie\gamma^\mu$	$-ie\gamma^\mu$	$-ie\gamma^\mu$
Del propagador s del muón	$\frac{i}{\not{s} - m} = i \frac{(\not{s} + m)}{\not{s}^2 - m^2}$	$\frac{i}{\not{s} - m} = i \frac{(\not{s} + m)}{\not{s}^2 - m^2}$	$\frac{i}{\not{s} - m} = i \frac{(\not{s} + m)}{\not{s}^2 - m^2}$
Del vértice de interacción ρ	$DP_L + EP_R$	$DP_L + EP_R$	$DP_L + EP_R$
Del propagador k del Goldstone del bosón Z'	$\frac{i}{k^2 - M_{H_0}^2}$	$\frac{i}{k^2 - M_{h_0}^2}$	$\frac{i}{k^2 - M_{A_0}^2}$

Los propagadores de los bosones, k , se han evaluado en el gauge de Feynman, $\xi = 1$. Para simplificar los cálculos el vértice de interacción ρ se sustituirá por $DP_L + EP_R$ y el vértice ν por $D'P_R + E'P_L$. Entonces las constantes de acoplamiento que se emplearán en el cálculo son:

Interacción	D	E	D'	E'
$\mu\mu H^0$	$-\frac{gmc_\alpha}{2M_W c_\beta}$	$-\frac{gmc_\alpha}{2M_W c_\beta}$	$-\frac{gmc_\alpha}{2M_W c_\beta}$	$-\frac{gmc_\alpha}{2M_W c_\beta}$
$\mu\mu h^0$	$\frac{gms_\alpha}{2M_W c_\beta}$	$\frac{gms_\alpha}{2M_W c_\beta}$	$\frac{gms_\alpha}{2M_W c_\beta}$	$\frac{gms_\alpha}{2M_W c_\beta}$
$\mu\mu A^0$	$\frac{igmt_\beta}{2M_W}$	$-\frac{igmt_\beta}{2M_W}$	$\frac{igmt_\beta}{2M_W}$	$-\frac{igmt_\beta}{2M_W}$

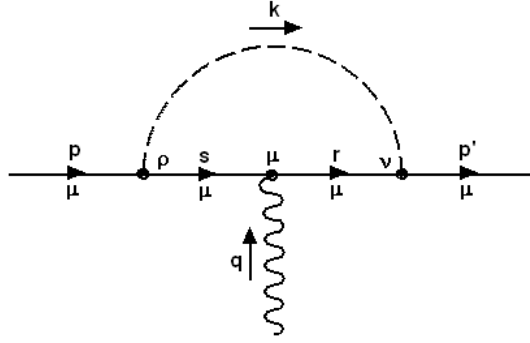


Figura C.1: Diagrama de Feynman empleado para calcular la contribución de THDM al MMA del muón.

en donde $c_\alpha = \cos \alpha$, $s_\alpha = \sin \alpha$, $c_\beta = \cos \beta$, $t_\beta = \tan \beta$.

La amplitud de probabilidad de que ocurra la interacción está dada por:

$$-i\mu^{n-4}\Lambda^\mu(p, q, p') = \int \frac{d^n k}{(2\pi)^n} (D'P_R + E'P_L) \frac{i(\not{p}' - \not{k} + m)}{(p' - k)^2 - m^2} (-ie\gamma^\mu) \frac{i(\not{p}' - \not{k} + m)}{(p - k)^2 - m^2} (DP_L + EP_R) \left(\frac{i}{k^2 - M_i^2} \right)$$

en donde $M_i^2 = (M_{H_0}^2, M_{h_0}^2, M_{A_0}^2)$ y $m = m_\mu$.

Para el denominador se utiliza la fórmula de Feynman con dos-parámetros (A.28)

$$\Lambda^\mu(p, q, p') = -\frac{2ie\mu^{4-n}}{(2\pi)^n} \int d^n k \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \frac{(D'P_R + E'P_L) N^\mu (DP_L + EP_R)}{[k'^2 - D^2]^3}$$

con

$$N^\mu = (\not{p}' - \not{k} + m) \gamma^\mu (\not{p}' - \not{k} + m)$$

y en el denominador:

$$a(1 - x - y) + bx + cy = k'^2 - D^2,$$

con

$$D^2 = p^2 x^2 + 2p \cdot p' xy + p'^2 y^2 - p^2 x - p'^2 y + M_i^2 (1 - x - y) + m^2 (x + y)$$

Definiendo $k' = k - px - p'y$ y ya que $q = p' - p$, en unidades naturales $q^2 = (p' - p)^2 = p'^2 + p^2 - 2p' \cdot p = 0$, y como $p'^2 = p^2$, se concluye que $p'^2 = p^2 = p' \cdot p$. Utilizando esta consideración y evaluando D^2 en la capa de masa se obtiene:

$$D^2 = m^2 (x + y)^2 + M_i^2 (1 - x - y)$$

De igual forma $k' = k' + p'x + p'y$ se sustituye en el numerador N_μ :

$$\begin{aligned} N^\mu &= [p'(1-y) - p'x + m] \gamma^\mu [p'(1-x) - p'y + m] \\ &\quad - [p'(1-y) - p'x + m] \gamma^\mu k' - k' \gamma^\mu [p'(1-x) - p'y + m] \\ &\quad + k' \gamma^\mu k' \end{aligned}$$

Así el numerador se puede dividir en tres partes: $N^\mu = N_1^\mu + N_2^\mu + N_3^\mu$, en consecuencia $\Lambda^\mu(p, q, p') = \Lambda_1^\mu + \Lambda_2^\mu + \Lambda_3^\mu$ con:

$$\begin{aligned} N_1^\mu &= -[p'(1-y) - p'x + m] \gamma^\mu k' - k' \gamma^\mu [p'(1-x) - p'y + m] \\ N_2^\mu &= k' \gamma^\mu k' \\ N_3^\mu &= [p'(1-y) - p'x + m] \gamma^\mu [p'(1-x) - p'y + m] \end{aligned}$$

Sustituyendo N_1^μ en Λ^μ se obtiene

$$\begin{aligned} \Lambda_1^\mu(p, q, p') &= \frac{2ie\mu^{4-n}}{(2\pi)^n} \int_0^1 dx \\ &\quad \int_0^{1-x} dy \left[(D'P_R + E'P_L) [p'(1-y) - p'x + m] \gamma^\mu \gamma^\rho (DP_L + EP_R) \right. \\ &\quad \left. + (D'P_R + E'P_L) \gamma^\rho \gamma^\mu [p'(1-x) - p'y + m] (DP_L + EP_R) \right] \\ &\quad \int d^n k'_\rho \frac{k'_\rho}{[k'^2_\rho - D^2]^3} \end{aligned}$$

Para solucionar esta integral se utiliza la ecuación (A.29)

$$\int \frac{k'_\rho}{(k'^2_\rho - D^2)^3} d^n k'_\rho = 0$$

ésto quiere decir que los términos impares en k' dan origen a una integral que es cero. Por lo que los dos términos de Λ_1^μ se anulan, entonces $\Lambda_1^\mu = 0$.

Sustituyendo N_2^μ en Λ_2^μ se obtiene

$$\begin{aligned} \Lambda_2^\mu(p, q, p') &= -\frac{2ie\mu^{4-n}}{(2\pi)^n} \int_0^1 dx \\ &\quad \int_0^{1-x} dy (D'P_R + E'P_L) \gamma^\alpha \gamma^\mu \gamma^\beta (DP_L + EP_R) \frac{i\pi^{n/2}}{4(D^2)^{2-\frac{n}{2}}} \Gamma\left(2 - \frac{n}{2}\right) g_{\alpha\beta} \end{aligned}$$

empleando la integral (A.30)

$$\int \frac{k'_\alpha k'_\beta}{[k'^2 - D^2]^3} d^n k = \frac{i\pi^{n/2}}{4(D^2)^{2-\frac{n}{2}}} \Gamma\left(2 - \frac{n}{2}\right) g_{\alpha\beta}$$

Para el término $\gamma^\alpha \gamma^\mu \gamma^\beta g_{\alpha\beta} = \gamma^\alpha \gamma^\mu \gamma_\alpha$ se aplican identidades de contracción del algebra de Dirac (A.14), obteniendo

$$\begin{aligned} \Lambda_2^\mu(p, q, p') &= \frac{2e\mu^{4-n}}{4} \frac{\pi^{n/2}}{(2\pi)^n} \Gamma\left(2 - \frac{n}{2}\right) (2-n) \int_0^1 dx \\ &\quad \int_0^{1-x} dy \frac{(D'P_R + E'P_L) \gamma^\mu (DP_L + EP_R)}{(D^2)^{2-\frac{n}{2}}} \end{aligned}$$

Tomando $n \rightarrow 4$, entonces $\varepsilon = 4 - n$, de tal forma que $2 - n = \varepsilon - 2$, utilizando el hecho de que $\varepsilon^2 \rightarrow 0$. Reemplazando estos resultados en Λ_2^μ

$$\Lambda_2^\mu(p, q, p') = \frac{2e\mu^\varepsilon}{4} \frac{1}{(4\pi)^{2-\frac{\varepsilon}{2}}} (\varepsilon - 2) \Gamma\left(\frac{\varepsilon}{2}\right) \gamma^\mu (D'EP_R + E'DP_L) \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy (D^2)^{-\frac{\varepsilon}{2}}$$

teniendo en cuenta las propiedades de los proyectores (A.16), es evidente que Λ_2^μ no contribuye al momento magnético anómalo de la partícula debido a que depende de γ^μ , sólo contribuyen los que dependen de $\sigma^{\mu\nu}q^\mu$.

La tercera parte de la corrección al vértice, Λ_3^μ , se puede escribir como

$$\Lambda_3^\mu(p, q, p') = -\frac{2ie\mu^{4-n}}{(2\pi)^n} \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy (D'P_R + E'P_L) N_3^\mu (DP_L + EP_R) \int \frac{d^n k'}{[k'^2 - D^2]^3}$$

ya que N_3^μ no depende de k' y se han empleado integrales para la regularización dimensional, ecuación (A.31)

$$\int \frac{d^n k'}{(k'^2 - D^2)^3} = -i\pi^{n/2} \frac{\Gamma(3 - \frac{n}{2})}{\Gamma(3)} \frac{1}{(D^2)^{3-\frac{n}{2}}}$$

Por sencillez se toma $n = 4$, lo cual equivale al número de dimensiones en nuestra integral y utilizando propiedades de la función gamma:

$$\int \frac{d^4 k'}{(k'^2 - D^2)^3} = -\frac{i\pi^2}{2D^2}$$

Reemplazando este resultado en Λ_3^μ , se obtiene

$$\Lambda_3^\mu(p, q, p') = -\frac{e}{16\pi^2} \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \frac{(D'P_R + E'P_L) N_3^\mu (DP_L + EP_R)}{D^2}$$

Para el numerador $N_3^\mu = [\not{p}'(1-y) - \not{p}x + m] \gamma^\mu [\not{p}'(1-x) - \not{p}'y + m]$, se utiliza $\not{q} = \not{p}'(1-y) - \not{p}x$ y $\not{q}' = \not{p}'(1-x) - \not{p}'y$. El término $m^2\gamma^\mu = 0$, ya que depende de γ^μ , por lo que

$$N_3^\mu = \not{q}\gamma^\mu\not{q}' + m\not{q}\gamma^\mu + m\gamma^\mu\not{q}'$$

separando en dos términos

$$N_3^\mu = N_{3a}^\mu + N_{3b}^\mu$$

$$N_{3a}^\mu = [\not{p}'(1-y) - \not{p}x] \gamma^\mu [\not{p}'(1-x) - \not{p}'y]$$

$$N_{3b}^\mu = m [\not{p}'(1-y) - \not{p}x] \gamma^\mu + m\gamma^\mu [\not{p}'(1-x) - \not{p}'y]$$

realizando los productos en N_{3a}^μ

$$\begin{aligned} N_{3a}^\mu &= (1-x)(1-y)\not{p}'\gamma^\mu\not{p}' \\ &\quad -y(1-y)\not{p}'\gamma^\mu\not{p}' - x(1-x)\not{p}'\gamma^\mu\not{p}' \\ &\quad +xy\not{p}'\gamma^\mu\not{p}' \end{aligned}$$

Ahora se proyecta la corrección al vértice Λ_3^μ en los estados de momento p y p' , $\overline{u(p')}\Lambda_3^\mu u(p)$ y se hace uso de la ecuación de Dirac. Posteriormente se utilizan las relaciones derivadas de algebra de Clifford (A.19) en la reducción de los términos $\not{p}'\gamma^\mu\not{p}'$, $\not{p}'\gamma^\mu\not{p}$ y $\not{p}\gamma^\mu\not{p}'$.

Analizando entonces el término $(D'P_R + E'P_L)N_{3a}^\mu(DP_L + EP_R)$: teniendo en cuenta las propiedades de los proyectores (A.16), el hecho de que los términos que dependen de γ^5 no contribuyen al cálculo y, las identidades de Gordon (A.18), se obtiene para la corrección al vértice:

$$\Lambda_{3a}^\mu(p, q, p') = \frac{e}{2m} \left(\frac{D'E + E'D}{16\pi^2} \frac{m^2}{M_i^2} I_a \right) i\sigma^{\mu\nu} q_\nu$$

con:

$$\hat{m}^2 = \frac{m^2}{M_i^2},$$

$$I_a = \int_0^1 \frac{(x^3 - 3x^2 + 2x)}{\hat{m}^2 x^2 - x + 1} dx.$$

Se realiza el mismo procedimiento para el término $(D'P_R + E'P_L)N_{3b}^\mu(DP_L + EP_R)$, y se obtiene

$$\Lambda_{3b}^\mu(p, q, p') = \frac{e}{2m} \left(-\frac{D'E + E'D}{16\pi^2} \frac{m^2}{M_i^2} I_b \right) i\sigma^{\mu\nu} q_\nu,$$

con:

$$\hat{m}^2 = \frac{m^2}{M_i^2},$$

$$I_b = \int_0^1 \frac{x^2}{\hat{m}^2 x^2 - x + 1} dx.$$

Sumando los resultados

$$\Lambda^\mu(p, q, p') = \frac{e}{2m} \left[\frac{D'E + E'D}{16\pi^2} \frac{m^2}{M_i^2} (I_a - I_b) \right] i\sigma^{\mu\nu} q_\nu.$$

Para el cálculo se va a utilizar el hecho de que $D' = D$ y $E' = E$. A continuación se calculan las contribuciones de los campos escalares y del campo pseudo-escalar, reemplazando las respectivas constantes de acoplamiento.

Contribución del H^0

$$\Lambda_{H^0}^\mu(p, q, p') = \frac{e}{2m} \left[\frac{G_F m^2}{8\sqrt{2}\pi^2} \left(\frac{2c_\alpha^2}{c_\beta^2} \frac{m^2}{M_{H^0}^2} (I_1 - I_2) \right) \right] i\sigma^{\mu\nu} q_\nu.$$

Contribución del h^0

$$\Lambda_{h^0}^\mu(p, q, p') = \frac{e}{2m} \left[\frac{G_F m^2}{8\sqrt{2}\pi^2} \left(\frac{2s_\alpha^2}{c_\beta^2} \frac{m^2}{M_{h^0}^2} (I_3 - I_4) \right) \right] i\sigma^{\mu\nu} q_\nu.$$

Contribución del A^0

$$\Lambda_{A^0}^\mu(p, q, p') = \frac{e}{2m} \left[\frac{G_F m^2}{8\sqrt{2}\pi^2} 2t_\beta^2 \frac{m^2}{M_{A^0}^2} (I_5 - I_6) \right] i\sigma^{\mu\nu} q_\nu.$$

Contribución escalar

$$\Lambda^\mu(p, q, p') = \frac{e}{2m} \left\{ \frac{G_F m^2}{8\sqrt{2}\pi^2} \left[\begin{aligned} & \left(\frac{2c_\alpha^2}{c_\beta^2} \frac{m^2}{M_{H^0}^2} (I_1 - I_2) \right) \\ & + \left(\frac{2s_\alpha^2}{c_\beta^2} \frac{m^2}{M_{h^0}^2} (I_3 - I_4) \right) + 2t_\beta^2 \frac{m^2}{M_{A^0}^2} (I_5 - I_6) \end{aligned} \right] \right\} i\sigma^{\mu\nu} q_\nu.$$

con:

$$I_1 = \int_0^1 \frac{(x^3 - 3x^2 + 2x)}{\frac{m^2}{M_{H^0}^2} x^2 - x + 1} dx,$$

$$I_2 = \int_0^1 \frac{x^2}{\frac{m^2}{M_{H^0}^2} x^2 - x + 1} dx,$$

$$I_3 = \int_0^1 \frac{(x^3 - 3x^2 + 2x)}{\frac{m^2}{M_{h^0}^2} x^2 - x + 1} dx,$$

$$I_4 = \int_0^1 \frac{x^2}{\frac{m^2}{M_{h^0}^2} x^2 - x + 1} dx,$$

$$I_5 = \int_0^1 \frac{(x^3 - 3x^2 + 2x)}{\frac{m^2}{M_{A^0}^2} x^2 - x + 1} dx,$$

$$I_6 = \int_0^1 \frac{x^2}{\frac{m^2}{M_{A^0}^2} x^2 - x + 1} dx,$$

utilizando el hecho de que:

$$t_\beta^2 = \frac{s_\beta^2}{c_\beta^2} = \frac{1 - c_\beta^2}{c_\beta^2} = \frac{1}{c_\beta^2} - 1,$$

$$\frac{1}{c_\beta^2} = t_\beta^2 + 1,$$

en el límite de t_β^2 muy grande

$$\frac{1}{c_\beta^2} \simeq t_\beta^2.$$

Reemplazando esto en la contribución escalar y teniendo en cuenta que las masas de los campos H^0 y A^0 se han tomado como iguales, $M_{H^0} = M_{A^0}$, $I_1 = I_5$ e $I_2 = I_6$ se obtiene la contribución de THDM al MMA del muón:

$$\Lambda^\mu(p, q, p') = \frac{e}{2m} \left\{ \frac{G_F m^2}{8\sqrt{2}\pi^2} \left[\begin{aligned} & \left(2(c_\alpha^2 + 1) t_\beta^2 \frac{m^2}{M_{H^0}^2} (I_1 - I_2) \right) \\ & + \left(2s_\alpha^2 t_\beta^2 \frac{m^2}{M_{h^0}^2} (I_3 - I_4) \right) \end{aligned} \right] \right\} i\sigma^{\mu\nu} q_\nu. \quad (\text{C.1})$$

Agradecimientos

Al Dr. Roberto Enrique Martínez Martínez (UN), por permitirme ser parte de este trabajo, por sus valiosas enseñanzas y grandes aportes.

Al Dr. Nicanor Poveda Tejada (UPTC), por su guía en el manejo de herramientas y métodos matemáticos necesarios en el desarrollo de este trabajo.

A mi compañera de estudio Paola Marcela Fonseca Alfonso, por compartir sus conocimientos del tema.

A los grupos de Física Teórica de Altas Energías (UN) y de Física Teórica y Computacional (UPTC) por brindarme los espacios y la logística necesarias para el desarrollo del trabajo.

Al Departamento de Física de la UN y a la Escuela de Física de la UPTC y a COLCIENCIAS, por brindarme apoyo económico para la divulgación del trabajo.