Actuaría de Contingencias de Vida.

Con aplicaciones en R

ACTUARIA DE CONTINGENCIAS DE VIDA
Con aplicaciones en R

NORMAN GIRALDO GÓMEZ
Profesor Asociado
Escuela de Estadística
Universidad Nacional de Colombia
Medellín

Universidad Nacional de Colombia
Medellín

Primera Edición

Escuela de Estadística, Universidad Nacional, sede Medellín

Actuaría de Contingencias de Vida / Norman Diego Giraldo Gómez.

p. cm.—(Colección Notas de Clase)

"Universidad Nacional de Colombia."

Incluye referencias bibliográficas e índice.

1. Probabilidades—Teoría. 2. Matemáticas

Ciencias—Investigación—Teoría. I. Giraldo, Norman D. II. Series.

519.2

G897c

Diagramación en LaTeX.

Índice general

Índice de figuras

Índice de cuadros

Prólogo

Estas Notas de Clase provienen de los cursos que se implementaron entre 1999 y 2002 en la línea de profundización en Cálculo Actuarial, ofrecida a las carreras de Ingeniería Administrativa, Industrial, Control, y a Estadística, Matemáticas y Economía de la Universidad Nacional de Colombia, sede Medellín. La línea de profundización tenía los cursos siguientes:

- Actuaría de Vida
- Actuaría de Seguros Generales
- Actuaría de Pensiones
- Derivados Financieros
- Procesos Estocásticos

CAPÍTULO 1

Introducción

Contents

1.1. Qué son las Contingencias de Vida?

Las Contingencias de Vida se refieren a eventos adversos en la vida de un ser humano:

$$\text{contingencias de vida} = \begin{cases} \text{enfermedades} \\ \text{accidentes} \\ \text{invalidez} \\ \text{invalidez parcial} \\ \text{incapacidad temporal} \\ \text{muerte.} \end{cases}$$

frente a los cuales la humanidad ha buscado alivio de muchas formas. En primer lugar, la religión y la medicina.

Pero también ha buscado mitigar los efectos económicos mediante una actividad muy antigua: los seguros. Para cada uno de los eventos anteriores existen hoy muchas variedades de seguros que pretenden compensar, disminuír ó cubrir, los efectos de tales contingencias, mediante un pago ó pagos, ó servicios.

Los productos de seguros para Contingencias de Vida son

1. **Seguros de Vida**. Hay varios tipos básicos: vida entera (dura toda la vida hasta fallecer el titular), vida temporal. Hay productos nuevos como seguros vinculados a la unidad de un fondo de inversión.

2. **Seguros de Salud**. Pagan una cantidad fija en caso de diagnóstico positivo de enfermedades de alto costo (medicamentos, exámenes, hospitalización, recuperación, atención médica).

3. **Seguros de cuidados de salud**. Paga una ayuda para cuidados de enfermería en caso de invalidez (discapacidad).

4. **Anualidades de vida**. Son las pensiones de jubilación.

5. **Seguros de Invalidez**. Son las pensiones de invalidez.

6. **Seguros de desempleo**.

Los seguros de vida y las anualidades de vida son productos financieros muy antiguos, que datan de principios del siglo XVIII.

Evolucionaron para convertirse hoy en día en grandes empresas del sector de servicios, que utilizan modelos sofisticados matemáticos y probabilísticos. Estos modelos se estudian en una disciplina denominada **Actuaría**.

En particular, la **Actuaría de Contingencias de Vida** combina hoy en día varias áreas de conocimiento (sin incluír la economía con sus varias especialidades)

$$\text{actuaría de Contingencias de Vida} = \begin{cases} \text{probabilidad} \\ \text{análisis de supervivencia} \\ \text{ingeniería financiera} \\ \text{simulación Monte Carlo} \\ \text{modelos multiestados y procesos estocásticos} \\ \text{epidemiología} \\ \text{riesgos competitivos} \\ \text{teoría de portafolios} \end{cases}$$

Estas áreas de conocimientos se aplican en las diferentes etapas de la producción de estos tipos de seguros

$$\text{etapas de producción seguros} = \begin{cases} \text{diseño} \\ \text{valoración} \\ \text{validación} \\ \text{solvencia} \\ \text{cálculo reservas} \\ \text{cálculo reaseguros} \end{cases}$$

1.2. Acerca del curso

1. **Texto guía:** Notas de clase del profesor. Provienen de los cursos que se implementaron entre 1999 y 2002 en la línea de profundización en cálculo actuarial, ofrecida a distintas carreras de la Universidad Nacional de Colombia, sede Medellín.

2. **Requisitos:** formación básica en cálculo, probabilidad y estadística a nivel de Estadística I. Con conocimiento para manipulaciones algebráicas, sumatorias, series, derivadas e integrales

$$\text{Límites, por ejemplo} : \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y)$$
$$\text{Sumatorias, por ejemplo} : \sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{n} a_j b_k e^{-jk}$$
$$\text{Integrales, por ejemplo} : \int_0^{\infty} e^{-\delta t}\,{}_tp_x dt.$$

3. **Programación en lenguajes como R, matlab, python, SAS**.

4. **Bibliografía:** en Dropbox varios textos similares a las notas de clase

5. **Metodología:** clase de exposición seguida de clase de práctica con R

6. **Evaluación:** 3 trabajos (como mínimo), de igual valor, en grupos de máximo 2 personas.

1.2.1. Contenido resumido del curso

1. Una introducción al **análisis de supervivencia actuarial**: estudiar modelos de duración de la vida humana, y las características como esperanza de vida, probabilidad de supervivencia, en dos tipos:

    a) Modelos paramétricos

    b) Tablas de vida (Modelo no-paramétrico)

    y los métodos de ajuste estadístico.

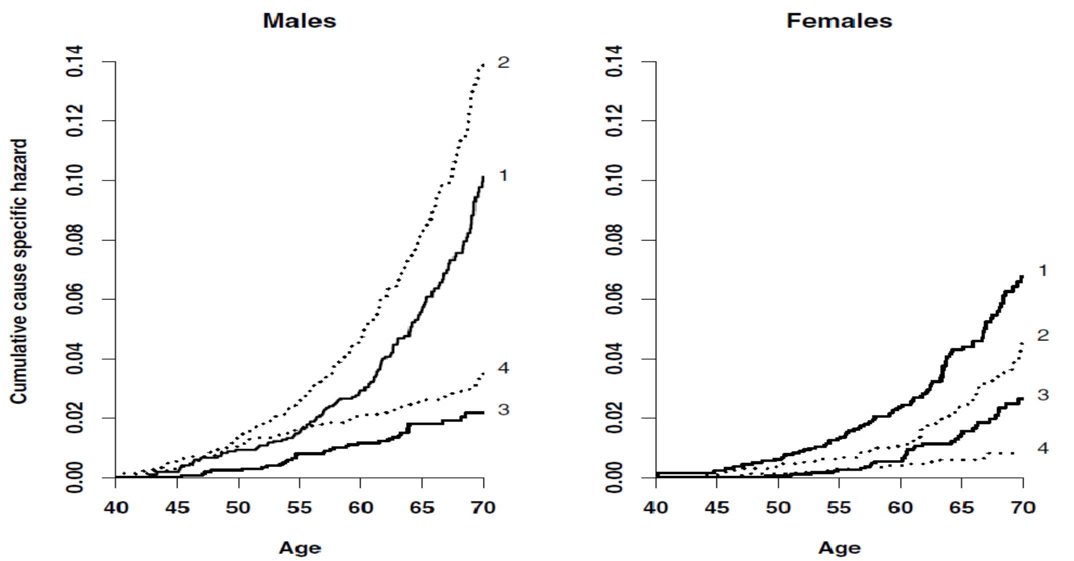


Fig. 3.6 *Nelson-Aalen estimates of the cumulative cause-specific hazard rates for four causes of death among middle-aged Norwegian males (left) and females (right). 1) Cancer; 2) cardiovascular disease including sudden death; 3) other medical causes; 4) alcohol abuse, chronic liver disease, and accidents and violence.*

(a) funciones hazard estimadas para 4 causas de mortalidad h y m

Figura 1.1: Tomada de: Aalen, O., Borgan, O., Gjessing, H. (2008). Survival and event history analysis: a process point of view, pag. 76

2. Introducción al tema de las **anualides ciertas**, que es de Ingeniería Financiera, y que trata del problema de modelar el saldo de una cuenta en un fondo de inversiones de la cual se hacen pagos periódicos

3. Introducir las **Anualidades de vida** que es un tipo de anualidad denominada contingente porque depende de la de la supervivencia durante un período de tiempo. Es

un tema relacionado con pensiones.

4. Introducción al tema de los **Seguros de vida** que son modelos con base en Ingeniería Financiera y Análisis de Supervivencia.

5. Introducir los **Seguros de salud** que tienen la misma estructura de los Seguros de Vida pero que en lugar de supervivencia consideran el caso de incidencia de alguna enfermedad

1.3. Dos ejemplos de modelos actuariales

1.3.1. Modelo para un Seguro de Vida

. El seguro vida entera paga al final del año de fallecimiento de la persona, un capital C. Cuál podría ser un modelo para este contrato?

- Una persona (vida) de edad x.
- $K(x)$ = la vida remanente de esta persona. Es una variable aleatoria discreta con valores en $\{0, 1, 2, \ldots\}$, que representa el número de años que alcanza a sobrevivir la persona. Es decir, si $K(x) = 10$, entonces la persona alcanza a sobrevivir $x+10$ años.
- Suponga que una tasa de interés efectiva anual $i \in (0, 1)$.
- El valor de este seguro $P(x)$, se calcula como

$$P(x) = C\mathbb{E}((1+i)^{-(K(x)+1)}). \tag{1.1}$$

donde $\mathbb{E}(X)$ es el valor esperado de X.

Preguntas

- Cómo se define distribución de $K(x)$?. Respuesta: con modelos paramétricos ("leyes de mortalidad") y no paramétricos ("tablas de vida") de la teoría de análisis de supervivencia. En Colombia: sólo tablas de vida.

- Cómo se estiman los parámetros de estas distribuciones?. Respuesta: con datos de mortalidad, usando por ejemplo, máxima verosimilitud.

- Cuál es la tasa i?. Es la parte financiera del seguro. Está sujeta a:

  1. decisiones internas de la Compañía: margen de ganancia, margen de solvencia, la competencia, etc.
  2. efectos como las disposiciones legales por parte de la Superintendencia Financiera,
  3. la disponibilidad del mercado de capitales de instrumentos de renta fija, es decir, bonos (por ejemplo, bonos, TES).

- Cómo se maneja P?. Respuesta: La compañía recibe P y se invierte en un portafolio de pólizas, por edades, géneros, clasificaciones de salud, regionales, por grupos... en activos de renta fija que se ofertan en el mercado financiero. De los rendimientos de este portafolio se pagan las indemnizaciones y los pagos a accionistas.

- Cómo se calcula la esperanza $\mathbb{E}((1+i)^{-(K(x)+1)})$?. Respuesta: la esperanza de una variable aleatoria discreta.

- Cómo se calculan las esperanzas en portafolios de muchas pólizas?. Usa software (Excel, pero ahora R, Phyton,...)

1.3.2. Modelo para una Póliza de medicina prepagada

Un seguro se salud (ó de enfermedad ó de medicina prepagada), para un afiliado a una póliza prepagada de edad x, en condición de salud sana, cubre

1. una cantidad fija C en dinero ó
2. una serie de servicios médicos con base en una lista (hotelería hospital, diagnósticos, droga, atención médica enfermera),

en caso de ocurrencia de algún tipo de enfermedad, en el contrato. Por ejemplo, las enfermedades de alto riesgo (cáncer, incidentes neurovasculares, cardio, falla renal, etc).

- Se define la variable aleatoria $K_A(x)$ = tiempo en meses para desarrollar un episodio de la enfermedad tipo A por el afiliado de edad x
- El valor de la prima tiene un precio básico, $P_A(x)$, dado por

  $$P_A(x) = \mathbb{E}[(1+i)^{-(K_A(x)+1)} I(K_A(x) \geq m)]. \tag{1.2}$$

  donde $I(X) \in \{0, 1\}$ es la función indicadora del evento X.
- Qué es m?. En los seguros de medicina prepagada se introduce un "período de carencia". La cobertura contra varios tipos de enfermedades se activa después de un período de tiempo de m meses, por ejemplo, $m = 6$ meses.

Preguntas

- Cómo se define distribución de $K_A(x)$?. Respuesta: con la teoría estadística de análisis de supervivencia. En Epidemiología se estudia la distribución del tiempo de incidencia de una enfermedad.
- Práctica comercial? $P_A(x)$ se incrementa un 200 $\%$ si $x \geq 60$...

1.4. Estadística y Actuaría de Contingencias

La Actuaría de Contingencias de Vida utiliza modelos que son aplicados en Análisis de Supervivencia y en Epidemiología.

El ejemplo básico es estimar modelos paramétricos para la duración de la vida humana. Es un tema muy desarrollado, con base en un elemento básico denominado Tabla de Vida. Hay librerías en R especializadas, por ejemplo, `MortalityLaws`. Los métodos de estimación son regresión no lineal, máxima verosimilitud, momentos.

Otros ejemplos incluyen el uso de probabilidad básica para encontrar probabilidades de eventos especiales.

La aplicación del cálculo de esperanzas y varianzas es fundamental. En el caso de variables discretas y continuas.

Un ejemplo de temas de estimación es la determinación de la tasa de discapacidad e invalidez en personas sanas, por edades. Y la determinación de Tablas de Vida para personas discapacitadas, incluyendo su esperanza de vida.

1.5. Contingencias de Vida en R y Python

Es evidente que Excel es el software preferido en las aplicaciones comerciales en los seguros de personas. Pero los lenguajes R y Python está ganando aceptación cada día. Algunas publicaciones de libros sobre aplicaciones de R en distintas área actuariales.

Por ejemplo, algunas librerías en R recientes

- actuar
- LifeContingencies
- demography
- eha

(a) Charpentier (b) Beyersmann et al

Figura 1.2: Textos relacionados con Contingencias de Vida en R

- MortalityLaws

Librería en Python ([1])

Pyliferisk es una librería escrita en Python para contingencias de vida y cálculo actuarial, basada en metodologías comúnmente utilizadas entre los actuarios (Notación Actuarial Internacional).

Esta librería puede cubrir todos los riesgos de contingencias de la vida (ya que las fórmulas actuariales siguen la Notación Actuarial Internacional), así como para respaldar los principales productos de seguros.

Esta biblioteca se distribuye como un único módulo de archivo y no tiene dependencias más que la Biblioteca estándar de Python, lo que lo hace increíblemente rápido. Es compatible con ambas versiones Python 3.x y 2.7.

Además, el paquete incluye varias tablas de mortalidad (pyliferisk.mortalitytables), principalmente extraídas de libros de texto académicos.

[1] https://github.com/franciscogarate/pyliferisk

1.6. Tendencias actuales

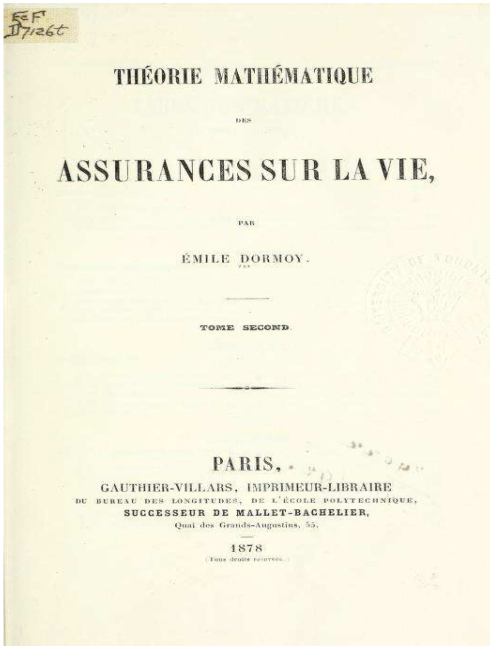
1. Actuaría inicial siglos XVIII y XIX: fórmulas determinísticas
2. Actuaría siglo XX: replanteamiento con Estadística y Probabilidades. Introducción de teoría financiera, medición de riesgos
3. Actuaría siglo XXI: aplicaciones de analítica, aprendizaje de máquinas, integración con el mercado de capitales.

Según [Macdonald, 1997, pag. 24]

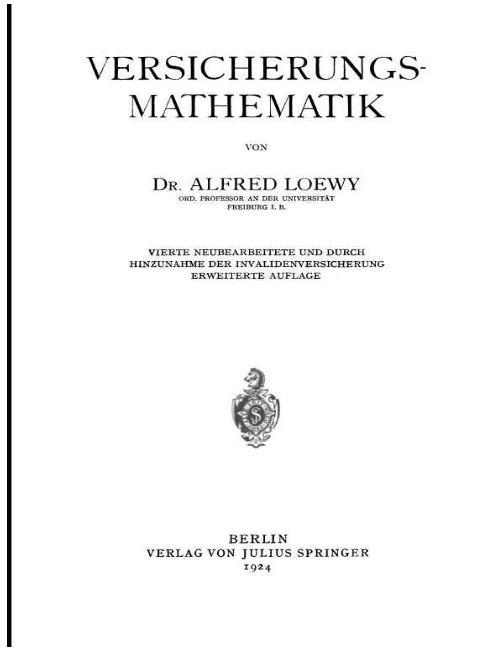
> "El futuro de la profesión actuarial es un asunto de modelos y de aplicarlos en la práctica. Un cambio que está ocurriendo en la profesión es la comprensión que todas las técnicas actuariales se basan en modelos y que son los modelos los que importan y no las técnicas."

La tendencia actual en la actuaría de contingencias de vida consiste en la medición de los riesgos de los portafolios de pólizas. Existen varios tipos de riesgos:

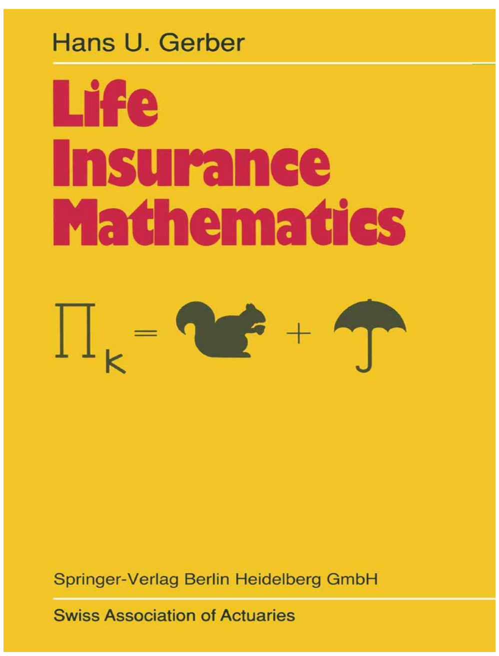
$$\text{tipos de riesgos} = \begin{cases} \text{de mercado: tasas de rendimientos del mercado muy bajas} \\ \text{de longevidad: esperanza de vida en aumento} \\ \text{de inflación: costo de vida en aumento} \\ \text{legales: cambios en la legislación} \\ \text{económicos: ingreso de nuevos actores} \end{cases}$$



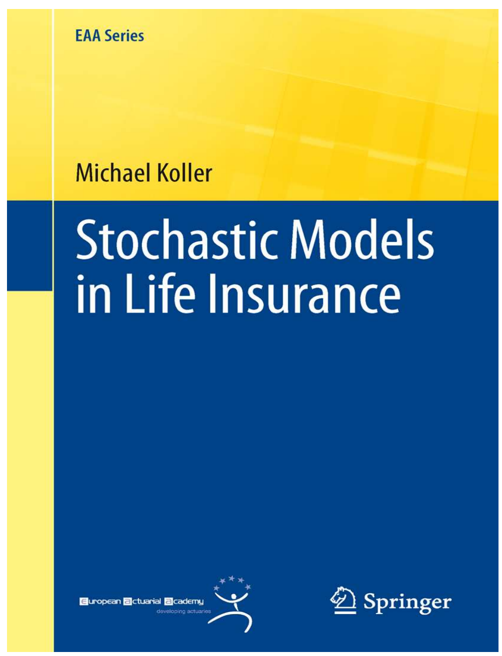
(a) texto Dormoy 1878



(b) texto Loewy 1932

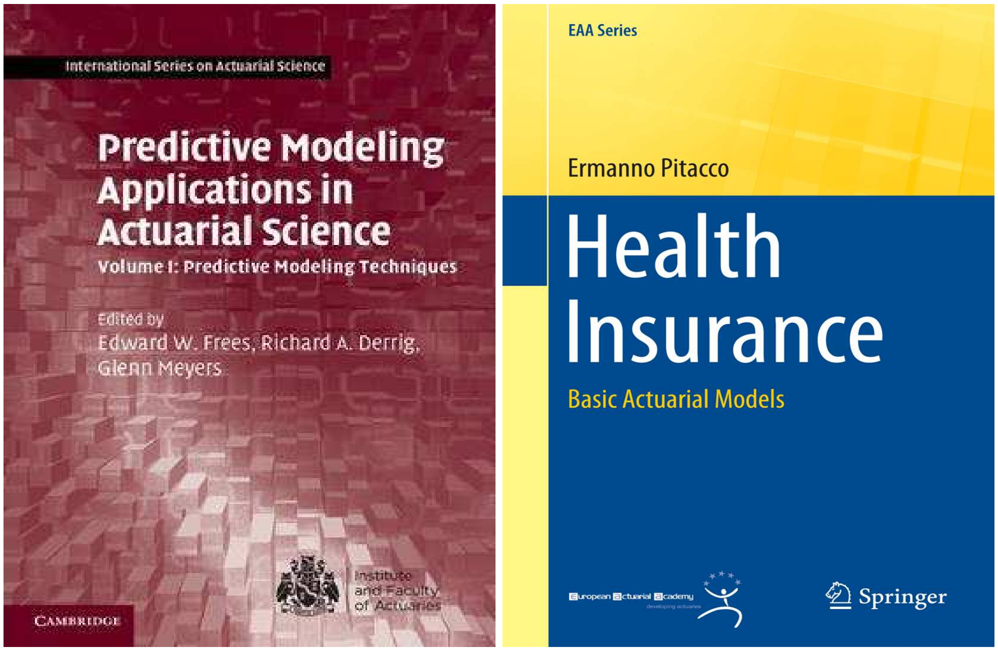


(c) texto Gerber 1990



(d) texto Koller 2012

Figura 1.3: Textos para enseñaza de Contingencias de Vida, diferencia de 138 años!



(a) Frees 1 (b) Pitacco

Figura 1.4: Técnicas de Analítica y Modelos de Salud

1.7. La actuaría en Colombia

En Colombia, como en muchos otros países, el desarrollo de la actuaría ha estado ligado al de la industria aseguradora.

> "A finales del siglo XIX y comienzos del siglo XX, la República aún se encontraba en una etapa de formación y consolidación.
>
> El siglo XIX, plagado de guerras y de modificaciones administrativas y territoriales, enmarcado en la proliferación de Constituciones (casi una por década) evitaron que se creara un marco normativo estable para las actividades financieras y monetarias, demorando el desarrollo de estas materias que para la época se encontraban en su furor en Alemania, Italia y Rusia, y logrando importantes desarrollos en Estados Unidos".

En Ortiz-Guzmán [2014] se comenta que don Julio Garavito Armero (1865-1920), un ingeniero, matemático y astrónomo colombiano, escribió un texto inédito sobre primas y reservas para seguros de vida en 1903, con base en el texto de É. Dormoy. Fué encomendado como un elemento básico para la fundación de la primera compañía de seguros del país.

Figura 1.5: don Julio Garavito Armero

1.8. Actividad profesional

Las empresas aseguradoras hacen parte del sector de servicios de la economía. Existen empresas aseguradoras con composición accionaria (con ánimo de lucro) y aseguradoras del sector solidario, estatales.

Ejemplos:

1. El sistema POS versus el sistema Medicina Prepagada,
2. El sistema de pensiones de prima media con prestación definida PMPD versus el sistema de ahorro individual con solidariad, RAI.

La actuaría require acreditación para el desempeño profesional.

En Colombia, las compañías de Seguros requieren que los actuarios certifiquen los primeros exámenes de cualificación de la Society of Actuaries of EUA.

En otros países, como algunos europeos, la cualificación se obtiene directamente de las Universidades mediante una carrera en Actuaría (como en México), ó una Maestría ó Doctorado.

$$\text{actividad profesional} = \begin{cases} \text{Compañías de Seguros de Vida} \\ \text{Fondos Adminstradores de Pensiones} \\ \text{Compañias Reaseguradoras} \\ \text{Cooperativas financieras} \\ \text{Banca de inversión} \\ \text{firmas consultoras.} \end{cases}$$

CAPÍTULO 2

Elementos de Teoría de Supervivencia Actuarial

2.1. Distribuciones de Supervivencia

Esta sección define supuestos sobre la duración de vida humana y modelos de supervivencia para la misma.

Suponga que X es una variable aleatoria continua que representa el tiempo en años que habrá de vivir una persona recién nacida.

Se asume definida en $[0, \omega)$ donde ω es la edad máxima que alcanza la vida humana, asumida aquí $\omega = 110$ años.

Denotamos la función de distribución acumulada (fda) por $F(x) = \mathbb{P}(X \leq x)$, y la función de densidad (fdp) por $f(x) = \frac{d}{dx}F(x)$. La función de supervivencia es $\overline{F}(x) = 1 - F(x) = \mathbb{P}(X > x)$.

Definición 2.1.1. *La vida remanente de una persona de edad $x, 0 \leq x < \omega$ se define como la variable condicionada*

$$T(x) := X - x | X > x, \tag{2.1}$$

donde $T(x) \in (0, \omega - x]$, y su función de distribución acumulada está dada por:

$$\begin{aligned} G_x(t) := P(T(x) \leq t) = P(X - x \leq t \,|\, X > x), \\ = \frac{F(x+t) - F(x)}{1 - F(x)}, \; 0 \leq t \leq \omega - x. \end{aligned} \tag{2.2}$$

Su función de densidad está dada por:

$$G'_x(t) := \frac{f(x+t)}{1 - F(x)}. \tag{2.3}$$

La probabilidad $G_x(t)$ se lee como: la probabilidad de que la vida (x) fallezca antes de t años ó antes de cumplir la edad $x + t$. La notación actuarial es

$${}_tq_x = G_x(t), \tag{2.4a}$$

$${}_tp_x = 1 - {}_tq_x = \mathbb{P}(T(x) \geq t), \tag{2.4b}$$

por tanto, ${}_tp_x$ es la probabilidad de que la vida (x) sobreviva t años. Con las convenciones: ${}_1q_x = q_x$, ${}_1p_x = p_x$. Además, de la definición se sigue: ${}_0q_x = G_x(0) = 0$ y ${}_0p_x = 1$.

Ejemplo 2.1.1.
${}_{10}p_{20} = 0.888$*, es la probabilidad que (20) sobreviva 10 años más, es decir, que alcance a vivir la edad de 30.*

${}_5p_{30} = 0.833$*, es la probabilidad que (30) sobreviva 5 años más.*

${}_{10}q_{23} = 0.115$*, es la probabilidad que (23) no sobreviva 10 años. O que fallezca antes de la edad $23 + 10 = 33$.*

Definición 2.1.2. *La probabilidad de que (x) sobreviva s años y fallezca antes de $s + t$, se define como ${}_{s|t}q_x = P(s \leq T(x) \leq s + t)$, y se tiene*

$${}_{s|t}q_x = G_x(s+t) - G_x(s) = {}_{s+t}q_x - {}_sq_x. \tag{2.5}$$

Para $t = 1$, ${}_{s|1}q_x = {}_{s|}q_x = {}_{s+1}q_x - {}_{s}q_x$.

Ejemplo 2.1.2.
La probabilidad de que (20) *sobreviva 10 y fallezca antes de 5 años más es* ${}_{10|5}q_{20}$*, con* $x = 20, s = 10, t = 5$ *en (2.5). Además, suponiendo que* ${}_{10}p_{20} = 0.888$ *y* ${}_{15}p_{20} = 0.833$*, desarrolle* ${}_{10|5}p_{20}$ *e interprételo.*

$$\begin{aligned} {}_{10|5}q_{20} &= {}_{15}q_{20} - {}_{10}q_{20} \\ &= 1 - {}_{15}p_{20} - {}_{10}q_{20} = {}_{10}p_{20} - {}_{15}p_{20} \\ &= 0.888 - 0.833 = 0.055. \end{aligned}$$

Luego ${}_{10|5}p_{20} = 1 - 0.055 = 0.945$*. Note que* ${}_{10|5}q_{20}$ *es una probabilidad de la forma* $\mathbb{P}(A \cap B)$*, y por tanto* ${}_{10|5}p_{20}$ *es de la forma* $\mathbb{P}(A^c \cup B^c)$ *([1]). Luego la interpretación de esta última probabilidad es: la probabilidad de que* (20) *no sobreviva 10 años o que sobreviva 15 como mínimo,*

Ejemplo 2.1.3. *La probabilidad condicional de que* (x) *sobreviva otros* t *años, dado que sobrevivió la edad* $x + s$*, definida por* ${}_{t}p_{x+s} = \mathbb{P}(T(x) > s + t | T(x) > s)$*, satisface:*

$$ {}_{s+t}p_x = {}_{t}p_{x+s}\,{}_{s}p_x. \tag{2.6}$$

La comprobación es

$$\begin{aligned} {}_{t}p_{x+s} &= P(T(x) > s + t | T(x) > s) \\ &= \frac{P((s < T(x)) \cap (s + t < T(x)))}{P(T(x) > s)} \\ &= \frac{P(s + t < T(x))}{P(T(x) > s)} = \frac{{}_{s+t}p_x}{{}_{s}p_x}. \end{aligned}$$

La probabilidad ${}_{t}p_{x+s}$ se indica también por ${}_{t}p_{[x]+s}$.

Ejemplo 2.1.4.
Si se definen $x = 40, s = 10, t = 5$ *entonces* ${}_{5}p_{40+10}$ *es la probabilidad de que, dado que* (40) *sobrevivió la edad 50, sobreviva 5 años más.*

[1] El símbolo A^c indica el complemento de A

Ejemplo 2.1.5. *Un ejemplo de una aplicación útil de (2.6) es utilizarla de manera iterada como sigue:*

$$
\begin{aligned}
{}_tp_x &= {}_{t-1}p_{x+1}\, p_x \\
&= {}_{t-2}p_{x+2}\, p_{x+1}\, p_x \\
&= {}_{t-3}p_{x+3}\, p_{x+2}\, p_{x+1}\, p_x \\
\cdots &= p_{x+t-1} \cdots p_{x+1}\, p_x.
\end{aligned}
$$

Para un caso concreto:

$$
{}_{15}p_{20} = p_{20}\, p_{21}\, p_{22} \cdots p_{34}.
$$

También ${}_{15}p_{20} = {}_5p_{30}\ {}_{10}p_{20}$

Ejemplo 2.1.6. *Compruebe la identidad:*

$$
{}_{s|t}q_x = {}_tq_{x+s}\, {}_sp_x = {}_{s+t}q_x - {}_sq_x, \tag{2.7}
$$

Solución.

$$
\begin{aligned}
{}_tq_{x+s} &= P(T(x) \leq s+t | T(x) > s) \\
&= \frac{G_x(s+t) - G_x(s)}{1 - G_x(s)} = \frac{{}_{t+s}q_x - {}_sq_x}{{}_sp_x}. \\
\therefore\ {}_tq_{x+s}\, {}_sp_x &= {}_{t+s}q_x - {}_sq_x = {}_{s|t}q_x.
\end{aligned}
$$

Ejemplo 2.1.7. *Suponga*

$$
{}_tp_x = \begin{cases} 1 - \frac{t}{110-x}, \text{ *para* } 0 \leq x < 110, \quad 0 \leq t \leq 110 - x \\ 0, \text{ *en otro caso*}. \end{cases} \tag{2.8}
$$

Se cumple:

a) ${}_tq_x = \frac{t}{110-x}, \quad 0 \leq t \leq 110 - x$

b) La función densidad de probabilidad de $T(x)$ *es*

$$
\begin{aligned}
G'_x(t) &= \frac{d}{dt} P(T(x) \leq t) = \frac{d}{dt}\, {}_tq_x \\
&= \frac{d}{dt} \frac{t}{110 - x} = \frac{1}{110 - x}, \quad 0 \leq t \leq 110 - x.
\end{aligned}
$$

Luego $T(x) \sim U(0, 110 - x)$*, es una variable aleatoria Uniforme.*

c) Calcular asumiendo $x = 20, \quad s = 10, \quad t = 5$*:*

$$\begin{aligned} {}_{s|t}q_x &= {}_{10|5}q_{20} \\ &= {}_{s+t}q_x - {}_{s}q_x = {}_{15}q_{20} - {}_{10}q_{20} \\ &= \frac{15}{90} - \frac{10}{90} = \frac{5}{90} = 0.055. \end{aligned}$$

d) Calcular $E(T(x))$ *y* $Var(T(x))$*. Solución:*

$$\begin{aligned} E(T(x)) &= \int_0^\infty t g(t) dt = \int_0^{110-x} t(\frac{1}{110-x}) dt \\ &= \frac{(110-x)^2}{2(110-x)} = \frac{1}{2(110-x)}. \end{aligned}$$

Igualmente, $Var(T(x)) = \frac{(110-x)^2}{12}$.

Ejercicio 2.1.1. *Suponga* ${}_tp_x = (\frac{1+x}{1+x+t})^2, \quad t \geq 0, \quad x \geq 0$ *Calcule los literales* $b)$ *-* $d)$ *del Ejemplo 2.1.7.*

Ejercicio 2.1.2. *Suponga* ${}_tp_x = (\frac{110-x-t}{110-x})^2$*. Calcule los literales* $b)$ *-* $d)$ *del Ejemplo 2.1.7.*

Ejercicio 2.1.3. *Suponga las variables* $T(40)$ *y* $T(30)$*, distribuídas Uniforme y asumidas independientes. Compruebe que*

$$\mathbb{P}(T(40) + 10 < T(30)) = \frac{1}{2}\, {}_{10}p_{30}. \tag{2.9}$$

Cómo se interpreta esta identidad?. Sugerencia: use: el teorema de probabilidad total (2.10) y la identidad (2.11) siguientes

Teorema 2.1.1. *Si* A *es un evento cualquiera y* T *es una variable aleatoria continua positiva con fdp* $f_T(t)$*, de tal forma que se puede calcular la probabilidad condicional* $\mathbb{P}(A|T = t)$*, entonces se cumplen*

$$\mathbb{P}(A) = \int_0^\infty \mathbb{P}(A|T = t) f_T(t) dt. \tag{2.10}$$

Se asume también la identidad siguiente, válida toda variable aleatoria $X > 0$ positiva continua.

$$\mathbb{E}(X) = \int_0^\infty \mathbb{P}(X > x)dx = \int_0^\infty \overline{F}(x)dx. \tag{2.11}$$

Solución. Defina $A = (T(40) + 10 < T(30))$ y como variable T tome $T(40)$, entonces

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}(T(40) + 10 < T(30)) \\
&= \int_0^{110-40} \mathbb{P}(T(40) + 10 < T(30)|T(40) = t) f_{T(40)}(t)dt \\
&= \int_0^{110-40} \mathbb{P}(t + 10 < T(30)) f_{T(40)}(t)dt \\
&= \int_0^{110-40} {}_{10}p_{30}\, {}_tp_{40} \frac{1}{110-40} dt \\
&= \frac{{}_{10}p_{30}}{110-40} \int_0^{110-40} {}_tp_{40} dt = \frac{{}_{10}p_{30}}{110-40} \int_0^{110-40} \mathbb{P}(T(40) > t)dt \\
&= \frac{{}_{10}p_{30}}{110-40} \frac{110-40}{2} = \frac{1}{2} {}_{10}p_{30}.
\end{aligned}$$

Como ${}_{10}p_{30} = 1 - 10/(110-30) = 0.875$, entonces $\mathbb{P}(T(40) + 10 < T(30)) = 0.4375$. La interpretación del resultado es: la probabilidad de que la vida (30) sobreviva la vida (40) por lo menos en 10 años es 0.4375.

Ejercicio 2.1.4. *Compruebe que para una variable X continua positiva con fda $F(x)$ y fdp $f(x) = F'(x)$ se cumplen las identidades*

$$\int_0^\infty \mathbb{P}(X > x) f(x)dx = 1/2, \tag{2.12}$$

$$\int_0^\infty \mathbb{P}(X > x)^2 f(x)dx = 1/3. \tag{2.13}$$

Ejercicio 2.1.5. *(ver Sans y de Llanos [1979]) Suponga las variables $T(40)$, $T(30)$ y $T(20)$ distribuídas Uniforme y asumidas independientes.*

1. *Interprete la probabilidad*

$$\mathbb{P}(T(40) + 20 < T(30) + 10 < T(20)) \tag{2.14}$$

2. *Desarrolle una expresión (fórmula) usando el teorema de probabilidad total (2.10), condicionando sobre $T(30)$.*

3. *Compruebe que (2.14) es igual a $\frac{1}{6}\,{}_{10}p_{30}\,{}_{20}p_{20}$ y evalúela.*

2.2. Vida residual abreviada

Definición 2.2.1. *La vida residual abreviada (curtated) para una vida (x) se define como*

$$K(x) = \lfloor T(x) \rfloor, \tag{2.15}$$

donde $\lfloor z \rfloor$ es la parte entera de z, que cumple $\lfloor z \rfloor \leq z < \lfloor z \rfloor + 1$. Además se define la variable parte fraccional, $S(x) \in [0, 1)$,

$$S(x) = T(x) - K(x), \tag{2.16}$$

Entonces $T(x) = K(x) + S(x)$.

La Tabla de Vida es un modelo no paramétrico de supervivencia que se calcula con base en $K(x)$, en el capítulo siguiente.

La variable aleatoria $K(x)$ toma valores en $\{0, 1, \ldots, \omega - x - 1\}$. Utilizando la identidad $\lfloor z \rfloor \leq z < \lfloor z \rfloor + 1$, su función de densidad de probabilidad está dada por

$$\mathbb{P}(K(x) = k) = \mathbb{P}(k \leq T(x) < k + 1) = {}_{k+1}q_x - {}_kq_x \tag{2.17}$$

$$= {}_{k|}q_x = {}_kp_x\, q_{x+k}. \tag{2.18}$$

En el último paso se aplicó la identidad (2.7).

Obsérvese que asumir $K(x)$ y $S(x)$ independientes equivale a afimar

$$\mathbb{P}(K(x) = k, S(x) \leq s) = \mathbb{P}(K(x) = k)\mathbb{P}(S(x) \leq s). \tag{2.19}$$

El tratamiento de las edades fraccionales en expresiones como ${}_tp_x$, con $0 < t < 1$, por ejemplo ${}_{\frac{2}{3}}p_x$, se hace mediante varios supuestos que han aparecido en la literatura.

En Willmot [1997] se introdujo el supuesto de independencia fraccional.

Definición 2.2.2. *Se dice que se asume independencia fraccional si se asume que existe una función $H(s)$, tal que*

$$\mathbb{P}(S(x) \leq s | K(x) = k) = H(s) \tag{2.20}$$

para $s \in [0, 1]$, $k = 0, 1, \ldots, \omega - x - 1$.

Proposición 2.2.1. *Si se asume independencia fraccional (2.20) entonces $K(x)$ y $S(x)$ son independientes.*

Demostración. Si se asume (2.20) entonces, por el Teorema de Probabilidad Total,

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(S(x) \leq s) &= \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}(S(x) \leq s | K(x) = k)\mathbb{P}(K(x) = k) \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} H(s)\mathbb{P}(K(x) = k) = H(s),
\end{aligned}$$

Para probar que $K(x)$ y $S(x)$ son independientes se comprueba la identidad

$$\mathbb{P}(K(x) = k, S(x) \leq s) = \mathbb{P}(S(x) \leq s)\mathbb{P}(K(x) = k).$$

Pero

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(K(x) = k, S(x) \leq s) &= \mathbb{P}(S(x) \leq s | K(x) = k)\mathbb{P}(K(x) = k) \\
&= H(s)\mathbb{P}(K(x) = k) \\
&= \mathbb{P}(S(x) \leq s)\mathbb{P}(K(x) = k).
\end{aligned}$$

□

Proposición 2.2.2. *Una condición equivalente a (2.20) está dada por: existe una función $H(s)$ tal que*

$$\forall s \in (0, 1], \; {}_sq_{x+k} = H(s)q_{x+k}. \tag{2.21}$$

Demostración. Veamos primero (2.21) $\Rightarrow$ (2.20). Nótese que se cumple la identidad

$$\mathbb{P}(S(x) \leq s | K(x) = k) = \frac{\mathbb{P}(T(x) \leq k + s)}{\mathbb{P}(K(x) = k)} = \frac{{}_{k+s}q_x - {}_kq_x}{{}_{k+1}q_x - {}_kq_x}.$$

Por tanto (2.20) equivale a

$$\frac{{}_{k+s}q_x - {}_kq_x}{{}_{k+1}q_x - {}_kq_x} = \frac{{}_kp_x - {}_{k+s}p_x}{{}_kp_x - {}_{k+1}p_x} = H(s). \tag{2.22}$$

Aplicando la hipótesis (2.21) en la identidad ${}_{k+s}p_x = {}_sp_{x+k}{}_kp_x$:

$$\begin{aligned} {}_{k+s}p_x &= {}_sp_{x+k}{}_kp_x \\ &= (1 - {}_sq_{x+k}){}_kp_x \\ &= (1 - H(s)q_{x+k}){}_kp_x \\ &= {}_kp_x - H(s)q_{x+k}{}_kp_x \end{aligned}$$

se concluye, reemplazando este resultado

$$\frac{{}_kp_x - {}_{k+s}p_x}{{}_kp_x - {}_{k+1}p_x} = \frac{{}_kp_x - ({}_kp_x - H(s)q_{x+k}\,{}_kp_x)}{q_{x+k}{}_kp_x} = H(s).$$

Para comprobar que (2.20) $\Rightarrow$ (2.21) notamos que si se asume (2.20) se tiene, partiendo de la identidad (2.7): ${}_{k+s}q_x - {}_kq_x = {}_sq_{x+k}\,{}_kp_x$

$${}_{k+s}q_x - {}_kq_x = {}_sq_{x+k}\,{}_kp_x = H(s)q_{x+k}\,{}_kp_x$$

de donde ${}_sq_{x+k} = H(s)q_{x+k}$. $\square$

Definición 2.2.3. *La Hipótesis de Linealidad consiste en asumir la hipótesis de independencia fraccional (2.20) con $H(s) = s$. Se puede expresar tomando (2.21), con $k = 0$, como*

$${}_tq_x = t(q_x),\ \forall t \in (0, 1). \tag{2.23}$$

Por tanto, (2.23) es equivalente a asumir que $K(x)$ y $S(x)$ son independientes y $S(x) \sim U(0, 1)$. Por esta razón, en [Bowers et al., 1997, pag. 68], se la denomina "supuesto de distribución uniforme".

En [Bowers et al., 1997, pag. 68] y en Gerber [1994] se incluye otro supuesto adicional denominado "Hipótesis de Baducci".

Definición 2.2.4. *La Hipótesis de Balducci consiste es suponer que*

$$_tq_x = \frac{t(q_x)}{1-(1-t)q_x},\ \forall t \in (0,1) \tag{2.24}$$

Ejemplo 2.2.1. *Asumiendo* $_{10}p_{30} = 0.9889$*,* $p_{40} = 0.9984$ *calcular la probabilidad* $_{10+\frac{1}{3}}p_{30}$ *asumiendo la hipótesis de linealidad y la hipótesis de Balducci.*

Solución.

Usando hipótesis de linealidad:

$$\begin{aligned}
_{10+\frac{1}{3}}p_{30} &= {}_{\frac{1}{3}}p_{40}\ {}_{10}p_{30} = (1 - {}_{\frac{1}{3}}q_{40})_{10}p_{30}\\
&= (1-\frac{1}{3}\,q_{40})_{10}p_{30}\\
&= (1-\frac{1}{3}\,(1-p_{40}))_{10}p_{30}\\
&= (1-\frac{1}{3}\,(1-0.9984))0.9889 = 0.9884.
\end{aligned}$$

Usando Balducci:

$$\begin{aligned}
_{10+\frac{1}{3}}p_{30} &= {}_{\frac{1}{3}}p_{40}\ {}_{10}p_{30} = (1 - {}_{\frac{1}{3}}q_{40})_{10}p_{30}\\
&= \left(1 - \frac{\frac{1}{3}\,q_{40}}{1-(1-\frac{1}{3})q_{40}}\right){}_{10}p_{30}\\
&= \left(1 - \frac{\frac{1}{3}\,0.9984}{1-(1-\frac{1}{3})0.9984}\right)0.9889 = 0.9874.
\end{aligned}$$

Ejercicio 2.2.1. *Calcule* $_{10|\frac{2}{3}}q_{30}$*, utilizando la ley Uniforme en (2.8), pag. 22.*

2.3. Fuerza de Mortalidad

Definición 2.3.1. *La fuerza de mortalidad para* (x) *después de* t *años se define como*

$$\mu_{x+t} = -\frac{\partial}{\partial t}\ln {}_tp_x. \tag{2.25}$$

Como ${}_tp_x = \mathbb{P}(T(x) > t)$, se cumple

$$\begin{aligned} \mu_{x+t} &= -\frac{\partial}{\partial t} \ln \mathbb{P}(T(x) > t) \\ &= \frac{f_{T(x)}(t)}{\mathbb{P}(T(x) > t)}, \quad t \geq 0, \end{aligned}$$

Nótese que $\mu_{x+t} \geq 0$. Además se tiene la identidad importante

$$f_{T(x)}(t) = {}_tp_x \mu_{x+t}, \quad t \geq 0. \tag{2.26}$$

Las denominaciones para μ_{x+t} dependen del área de la Estadística.

$$\mu_{x+t} = \begin{cases} \text{tasa instantánea de mortalidad, en actuaría (ver González Galé [1959])} \\ \text{tasa de fallo, en teoría de confiabilidad} \\ \text{función hazard, en análisis de supervivencia} \\ \text{función de intensidad, en modelos multi-estados} \end{cases}$$

La función μ_{x+t} mide el incremento en la probabilidad de fallecer (x) a medida que aumenta el tiempo t. Pero no es una probabilidad.

Se puede obtener una interpretación de μ_{x+t} con base en la identidad (2.7):

$$\mathbb{P}(t \leq T(x) < t + s) = {}_{s+t}q_x - {}_tq_x = {}_tp_x \, {}_sq_{x+t},$$

para $s > 0$; además, si s muy pequeño,

$$\mathbb{P}(t \leq T(x) < t + s) = \int_t^{t+s} {}_vp_x \mu_{x+v} dv \approx s \left({}_tp_x \, \mu_{x+t}\right),$$

igualando las dos expresiones anteriores y despejando $s\mu_{x+t}$

$${}_sq_{x+t} \approx s \, \mu_{x+t}. \tag{2.27}$$

La aproximación (2.27) dice que la probabilidad de (x) alcanzar la edad $x+t$ y fallecer en un intervalo $[x+t, x+t+s]$, es aproximadamente igual a la longitud de ese intervalo por la fuerza de mortalidad en $x+t$. Al incrementar la fuerza de mortalidad incrementa la probabilidad de fallecer en tal intervalo.

De (2.25) se sigue la identidad importante:

$${}_tp_x = e^{-\int_0^t \mu_{x+s} ds}, \quad t \geq 0, \tag{2.28}$$

Demostración. Integrando sobre $[0,t]$ en $\mu_{x+t} = -\frac{\partial}{\partial t}\ln {}_tp_x$ se obtiene inmediatamente:

$$\int_0^t \mu_{x+s}ds = -\ln {}_sp_x|_0^t = -\ln\left(\frac{{}_tp_x}{{}_0p_x}\right) = -\ln({}_tp_x),$$

ya que ${}_0p_x = 1$. Luego ${}_tp_x = e^{-\int_0^t \mu_{x+s}ds}$. □

Definición 2.3.2. *Los modelos para la función μ_{x+t} deben cumplir el supuesto que μ_{x+t} sea creciente en t y*

$$\mu_{x+t} \uparrow \infty, \quad t \to \omega - x. \tag{2.29}$$

La condición (2.29) implica que

$${}_tp_x = e^{-\int_0^t \mu_{x+s}ds} \downarrow 0, \quad t \to \omega - x$$

debe tender a cero “rápidamente”, a medida que (x) envejece. Algunos modelos utilizado por ejemplo, en confiabilidad, pueden no cumplir esta propiedad, porque asumen por ejemplo $\mu_{x+t} \equiv cte$, por lo que no pueden ser modelos adecuados para la supervivencia humana.

La mayoría de los modelos actuariales de supervivencia se definen asumiento una función paramétrica para μ_{x+t}, que permite pasar, con base en (2.28), a una expresión para ${}_tp_x$.

Ejemplo 2.3.1. *Dada ${}_tp_x = (\frac{\omega-x}{\omega-x-t})^{-3}, \quad 0 < t < \omega - x$, calcule μ_{x+t}. Es un modelo adecuado para la supervivencia humana?*

Solución. El cálculo es inmediato ya que

$$\begin{aligned}
-\frac{\partial}{\partial t}\ln {}_tp_x &= -\frac{\partial}{\partial t}\ln(\frac{\omega-x}{\omega-x-t})^{-3} \\
&= -3\frac{\partial}{\partial t}[\ln(\omega-x-t) - \ln(\omega-x)] \\
&= -3\frac{\partial}{\partial t}\ln(\omega-x-t) = \frac{3}{\omega-x-t}.
\end{aligned}$$

Como $\mu_{x+t} \uparrow \infty, \quad t \to \omega - x$, la función $(\frac{\omega-x}{\omega-x-t})^{-3}$ es un modelo adecuado.

Ejemplo 2.3.2. *Dados los parámetros $\lambda > 0$, $0 \leq \kappa < 1$, se define la función de supervivencia Weibull(λ, κ) como*

$$ {}_tp_x = e^{-\left(\frac{\omega-x-t}{\lambda}\right)^{\kappa}}, \tag{2.30}$$

para $0 \leq t < \omega - x$, entonces

$$\mu_{x+t} = -\frac{d}{dt}\ln {}_tp_x = \frac{\kappa}{\lambda}\left(\frac{\lambda}{\omega - x - t}\right)^{1-\kappa},$$

luego se cumple $\mu_{x+t} \uparrow \infty, \quad t \to \omega - x$, y por tanto la función $e^{-\left(\frac{\omega-x-t}{\lambda}\right)^{\kappa}}$ es un modelo adecuado para la supervivencia de una vida (x).

Ejercicio 2.3.1. *Investigar si la función ${}_tp_x = e^{-\frac{t}{\omega-x-t}} \quad 0 \leq t < \omega - x$ es un modelo adecuado para la supervivencia de una vida (x).*

Fuerza de mortalidad en edades fraccionales

Una forma equivalente de la hipótesis de linealidad es la siguiente, que se comprueba derivando con respecto a t en (2.23).

$$ {}_tp_x\mu_{x+t} = q_x, \ \forall t \in (0, 1). \tag{2.31}$$

Con relación a la fuerza de mortalidad en edades fraccionales, asumir el supuesto de independencia fraccional (2.20) implica para la fuerza de mortalidad en una edad fraccional $x + s$,

$$\begin{aligned}
\mu_{x+s} &= -\frac{\partial}{\partial s}\ln {}_sp_x, \\
&= -\frac{\partial}{\partial s}\ln(1 - {}_sq_x), \\
&= -\frac{\partial}{\partial s}\ln(1 - H(s)q_x), \\
&= \frac{H'(s)q_x}{1 - H(s)q_x}, \ 0 \leq s < 1.
\end{aligned}$$

En el caso de la hipótesis de linealidad (2.23) se reemplaza $H(s) = s$, luego

$$\mu_{x+s} = \frac{q_x}{1 - s\,q_x}, \ 0 \leq s < 1. \tag{2.32}$$

2.4. Fuerza de Mortalidad subestándar

Una fuerza de mortalidad "subestándar" se presenta en vidas que tienen una condición de enfermedad crónica que afecta su supervivencia, disminuyéndola. Por ejemplo, una afirmación médica como: " la aparición de un derrame cerebral (ictus, apoplejía) debido a una arritmia cardíaca, asumenta en un 20 $\%$ la probabilidad de muerte" se puede interpretar como que después de ese tipo de contingencia la fuerza de mortalidad aumenta. También se denomina "exceso de mortalidad" (mortality excess, en inglés). El témino en inglés para los asegurados en esta condición es "impaired lives", que puede traducirse como una vida con compromiso de salud.

$$\text{Enfermedades crónicas} = \begin{cases} \text{diabetes (tipo 1,2)} \\ \text{ictus ó derrame cerebral (apoplejía)} \\ \text{enfermedades coronarias,} \\ \text{hipertensión} \\ \text{insuficiencia renal} \\ \text{enfermedad de Huntington} \\ \text{arterio-esclerosis múltiple} \\ \text{cáncer (en órganos vitales)} \\ \text{úlcera péptica} \\ \text{invalidez y discapacidad (en varios grados).} \end{cases}$$

Se denotará por μ^s_{x+t} una fuerza de mortalidad subestándar. Entonces la relación con la fuerza de mortalidad de base (correspondiente a los asegurados en buena condición de salud), μ_{x+t}, es

$$\mu_{x+t} \leq \mu^s_{x+t},\ t \geq 0.$$

Aplicando (2.28): ${}_tp_x = e^{-\int_0^t \mu_{x+u}du}$, se tiene

$${}_tp_x \geq {}_tp^s_x, \quad t \geq 0, \tag{2.33}$$

donde ${}_tp^s_x$ es la probabilidad de sobrevivir una vida con compromiso de salud.

Existen al menos dos maneras de definir una fuerza de mortalidad subestándar.

Modelo aditivo

En algunas referencias, la fuerza de mortalidad subestándar se obtiene al añadir una constante $c > 0$ a la fuerza de mortalidad de base. Por ejemplo, en [Easton and Harris, 2007, pag. 107] se afirma

> " ...cuando existan exámenes médicos que justifiquen asumir una mortalidad mayor, las reservas mínimas son aquellas que se calculan añadiendo una constante a las tasas de mortalidad".

Según esta alternativa, si μ_{x+t} es la fuerza de mortalidad de base y las covariables , $\underline{X} = (X_1, \ldots, X_k)'$, representan las condiciones de salud de la vida (x); por ejemplo: edad, género, peso, altura, índice de masa corporal, nivel de colesterol, presión arterial (para citar algunas solamente), entonces la constante que se añade tiene la forma $\sum_{j=1}^{k} \beta_j X_j$, para ciertas constantes β_j, es decir

$$\mu^s_{x+t} = \mu_{x+t} + \underline{\beta}'\underline{X}. \tag{2.34}$$

Por tanto, la fuerza de mortalidad subestándar es individual, dependiente no sólo de la edad de (x) sino de sus condiciones de salud, contrario a la fuerza de mortalidad de base que es genérica, igual para todas las vidas de edad x. Se debe cumplir $\underline{\beta}'\underline{X} > 0$ para garantizar que se genera una extra mortalidad.

Sin embargo, todavía sería posible colocar una constante $c > 0$ en (2.34), en lugar de $\underline{\beta}'\underline{X}$.

$$\mu^s_{x+t} = \mu_{x+t} + c, \tag{2.35}$$

Por ejemplo, en caso de seguros para un colectivo de vidas sometidas a riesgos ó peligros similares, por ejemplo, el caso de seguros de vida y salud para personal militar, bomberos, mineros, entre otros. En los ejemplos y problemas del texto se asumirá esta opción.

Ejemplo 2.4.1. *Suponga que (x^s) sufre de insuficiencia cardíaca (IC) y su fuerza de mortalidad se modela como una sub-estándar, según el modelo aditivo (2.34). Encuentre una expresión para la correspondiente probabilidad de supervivencia sub-estándar ${}_tp^s_x$.*

Solución La expresión para la probabilidad de supervivencia de (x^s) es:

$$
{}_tp_x^s = \exp(-\int_0^t \mu_{x+s} + c\,ds) = e^{-ct}\exp(-\int_0^t \mu_{x+s}ds) = {}_tp_x e^{-ct}
$$

La conclusión es que la probabilidad de supervivencia de una persona con IC es igual a la probabilidad de una persona sana, de la misma edad y sexo, multiplicada por un factor exponencial negativo e^{-ct} que representa el efecto de IC.

Modelo multiplicativo

Una alternativa reciente consiste en multiplicar la fuerza de mortalidad de base, μ_{x+t}, por una constante positiva mayor de 1. Esta constante se denomina "razón de mortalidad". La estrategia de modelamiento introducida por varios autores consiste en modelar esta constante como una función $\theta(\underline{X})$ de las variables $\underline{X} = (X_1, \ldots, X_k)'$.

El modelo de mortalidad subestándar de riesgos proporcionales se define como ([ver England and Haberman, 1993, pag. 92])

$$
\mu_{x+t}^s = \theta(\underline{X})\mu_{x+t}, \tag{2.36}
$$

donde $\theta(.)$ es cierta función que hay que especificar. El modelo es individual nuevamente, no genérico. Define la fuerza de mortalidad a la edad $x + t$ con la condición que los factores $\underline{X}$ no cambien en el tiempo. El modelo (2.36) implica que, para dos vidas de edad x, el cociente de sus fuerzas de mortalidad no depende de t, y posiblemente de x si esta variable se incluye en $\underline{X}$,

$$
\frac{\mu_{x+t}^{s_1}}{\mu_{x+t}^{s_2}} = \frac{\theta(\underline{X}_1)}{\theta(\underline{X}_2)}.
$$

En Cox [1972] se propone utilizar $\theta(\underline{X}) = e^{\underline{\beta}'\underline{X}}$, de forma que

$$
\mu_{x+t}^s = e^{\underline{\beta}'\underline{X}}\mu_{x+t}. \tag{2.37}
$$

Este es el modelo de riesgos proporcionales de Cox. En los ejemplos se asumirá que se conoce el factor $c = e^{\underline{\beta}'\underline{X}}$, por lo que el modelo multiplicativo consistirá en multiplicar la fuerza de mortalidad de base por una constante $c > 1$.

$$
\mu_{x+t}^s = c\,\mu_{x+t}, \tag{2.38}
$$

Ejemplo 2.4.2. *Suponga que (x) y (x^s) son dos vidas de la misma edad, la primera en condición sana y la segunda con IC. Encuentre una expresión para $P(T(x) < T(x^s))$, asumiendo el modelo aditivo (2.35). Evalúela asumiendo $x = 56,\ c = 0.1$, y la fuerza de mortalidad base dada en el Ejemplo 2.3.1.*

Solución. Llamando $A = (T(x) < T(x^s))$, el teorema de probabilidad total (TPT), (2.10) en caso continuo permite desarrollar $\mathbb{P}(A)$. Nótese que se puede asumir que $T(x), T(x^s)$ son variables aleatorias independientes. Entonces, aplicando el TPT

$$
\begin{aligned}
\mathbb{P}(T_x < T_{x^s}) &= \int_0^{110-x} \mathbb{P}(T(x) < T(x^s))|T(x) = t)\, {}_tp_x \mu_{x+t} dt \\
&= \int_0^{110-x} \mathbb{P}(t < T(x^s))\, {}_tp_x \mu_{x+t} dt \\
&= \int_0^{110-x} e^{-ct} ({}_tp_x)^2\, \mu_{x+t} dt.
\end{aligned}
$$

Como ${}_tp_x = (\frac{\omega-x}{\omega-x-t})^{-3}$ y $\mu_{x+t} = \frac{3}{\omega-x-t}$, entonces con $\omega = 110$

$$
\begin{aligned}
\mathbb{P}(T(x) < T(x^s)) &= \int_0^{110-x} e^{-0.1t} \left(\frac{110-x}{110-x-t}\right)^{-6} \frac{3}{110-x-t} dt \\
&= \int_0^{54} e^{-0.1t} \left(\frac{54}{54-t}\right)^{-6} \frac{3}{54-t} dt \\
&= 3(54^{-6}) \int_0^{54} e^{-0.1t} (54-t)^5 dt = 0.2744.
\end{aligned}
$$

Nótese que la integral se puede calcular con Maxima o con R. En este caso usando los comandos:

```
#------uso de integracion numerica con R
f <- function(t) {exp(-0.1*t)*(54-t)^5}
(3*54^(-6)*integrate(f,lower=0,upper=54)$value)
```

Luego $\mathbb{P}(T_{56} < T^s_{56}) = 0.2744$ o también, $\mathbb{P}(T^s_{56} < T_{56}) = 0.7255$, es decir, una persona de 56 años, con IC tiene un $72.5\,\%$ de probabilidades de fallecer antes que otra de la misma edad, pero en condición sana, si la supervivencia estuviera descrita por la función dada en el enunciado.

Ejercicio 2.4.1. *Con los datos del Ejemplo 2.4.2 anterior evalúe* ${}_5q_x$ *y* ${}_5q_x^S$*. Además, asumiendo el supuesto de linealidad, evalúe* ${}_{\frac{2}{3}+5}q_x$ *y* ${}_{\frac{2}{3}+5}q_x^S$*.*

2.5. Modelos paramétricos de supervivencia

Por tradición, en actuaría los modelos para la distribución de la variable $T(x)$ se denominan "leyes de mortalidad". Para su definición se empieza por una expresión paramétrica para la fuerza de mortalidad μ_x.

El modelamiento estadístico de la la fuerza de mortalidad ha sido clave en el desarrollo de los cálculos actuariales de seguros de vida, pero también, actualmente, en los seguros médicos, que utilizan modelos multi-estados, y la teoría de riesgos competitivos.

Pero además, es un tema de la historia actuarial, ver [Cox, 1972, pag. 28]:

> "El uso de las intensidades (hazard) en las distribuciones de supervivencia tiene una larga historia en la literatura actuarial."

ya que a través de los años se han introducido muchos modelos para la fuerza de mortalidad. Ver las referencias: [Türler, 1977, Cap. 3], Richards [2012] y [Pitacco et al., 2009, Section 2.5]), en las cuales se mencionan los modelos en la Tabla2.1 siguiente. Una lista más completa de modelos está en Wunsch et al. [2002], pag.146

Definición 2.5.1. *La ley de mortalidad Uniforme ó de DeMoivre se definió en (2.8) para cada* $0 \leq x < 110$ *como*

$$ {}_tp_x = \begin{cases} \frac{110-x-t}{110-x} & \text{para } 0 \leq t \leq 110-x, \\ 0 & \text{para } t \geq 110-x. \end{cases} \tag{2.39}$$

La fuerza de mortalidad correspondiente es: $\mu_{x+t} = -\frac{\partial}{\partial t} \ln {}_tp_x = 1/(110-x-t)$. Lo anterior equivale a afirmar que $T(x) \sim U(0, 110-x)$, es decir, la variable aleatoria $T(x)$ se distribuye uniformemente en el intervalo $[0, 110-x]$.

Leyes de mortalidad	
DeMoivre(1725)	Babbage(1823)
Moser(1839)	Dormoy(1878)
Laurent(1912)	Gumbel(1928)
Gompertz(1825)	Makeham(1859)
Thiele(1871)	Insolera(1930)
Perks(1932)	Beard(1959)
Heligman-Pollard (1980)	Carriere(1992)

Cuadro 2.1: Algunas leyes de mortalidad en la historia

2.6. Ley de mortalidad Gompertz-Makeham

Definición 2.6.1. *La primera ley Gompertz-Makeham (GM) propone que la fuerza de mortalidad humana se puede expresar por*

$$\mu_x = a + bc^x, \tag{2.40}$$

para $c > 1, a > 0, a + b > 0$, donde a es la fuerza constante de mortalidad por riesgo de accidente y bc^x es la fuerza de mortalidad debida al envejecimiento (ó senectud).

La correspondiente función de supervivencia ${}_tp_x$ está por:

$$\begin{aligned}
{}_tp_x &= exp\left(-\int_0^t \mu_{x+s} ds\right) = exp\left(-\int_0^t a + bc^{x+s} ds\right) \\
&= exp\left(-at - bc^x \int_0^t c^s ds\right) = e^{-at} exp\left(\frac{-bc^x}{\ln c}(c^t - 1)\right) \\
&= e^{-at}(e^{\frac{-b}{\ln c}})^{c^x(c^t-1)}.
\end{aligned}$$

Luego es

$${}_tp_x = e^{-at - \frac{bc^x}{\ln(c)}(c^t - 1)}. \tag{2.41}$$

Con la reparametrización

$$s = e^{-a}, g = e^{-\frac{b}{\ln c}}, \tag{2.42}$$

se tienen lan expresiones alternas

$$_tp_x = s^t g^{c^x(c^t-1)}, \tag{2.43}$$

$$\mu_x = -\ln(s) - \frac{\ln(g)}{\ln(c)}c^x. \tag{2.44}$$

La programación de la fuerza de mortalidad y la función de supervivencia de la ley Gomperz-Makeham se puede hacer con las instrucciones en R siguientes.

```
#------programacion GM
# Ejemplo de parámetros GM: (a,b,C)
pars = c(0.0014440776, 0.0001815122, 1.0940478946)

muxt.gm = function(t,x,pars){
a = pars[1]
b = pars[2]
C = pars[3]
mx = a + b*C^(x+t)
return(mx)}

tpx.gm = function(t,x,pars){
a = pars[1]
b = pars[2]
C = pars[3]
s = exp(-a)
g = exp(-b/log(C))
p =  s^t*g^(C^x*(C^t-1))
return(p)}
```

Ejemplo 2.6.1. *Asuma* $\mu_x = 0.0005 + 10^{-4.12+0.038x}$ *(Base técnica G82M, hombres, Dinamarca 1982). Calcule:*

$$_{10|20}q_{40} = {}_{30}q_{40} - {}_{10}q_{40} = {}_{10}p_{40} - {}_{30}p_{40}. \tag{2.45}$$

Solución *Como* $\mu_x = a + bc^x$ *entonces* $a = 0.0005$, *y* $b = 10^{-4.12}$, $c = 10^{0.038}$. *Con base en (2.41), y las instrucciones en R se obtiene:* $_{10|20}q_{40} = 0.27374$.

```
#--- parametros mux  GM
a = 0.0005
b = 10^(-4.12)
C = 10^(0.038)

#--- funcion tpx
(p10.40 = tpx.gm(10,40,c(a,b,C)))
(p30.40 = tpx.gm(30,40,c(a,b,C)))
(p10.40-p30.40)
#---respuesta: 0.27374
```

Uso de la librería `eha`

Una re-parametrización de la ley G-M (2.40), utilizada en la librería `eha` de R, ver Broström [2016], es

$$\mu_x = a_2 + a_1 e^{x/\sigma}, \tag{2.46}$$

donde (a_1, a_2) son parámetros de forma y σ de escala. En función de los parámetros (a, b, c) en (2.40) son $a_1 = b, a_2 = a, \sigma = 1/\log(c)$.

La librería permite calcular:

```
fdp = dmakeham(x, shape = , scale = )
fda = pmakeham(q, shape = , scale = , lower.tail = TRUE)
fda inversa = qmakeham(p, shape = , scale = , lower.tail = TRUE)
hazard = hmakeham(x, shape = , scale = )
hazard integrada = Hmakeham(x, shape = , scale = )
valor aleatorio = rmakeham(n, shape = , scale = )
```

Nota: Para calcular la probabilidad ${}_tp_x$ se utiliza `fda`, con `lower.tail = FALSE`, pero hay que cambiar el parámetro a_1 por $a_1 e^{x/\sigma}$ ya que la función depende de t y x se asume como otro parámetro:

$$\begin{aligned}\mu_{x+t} &= a_2 + a_1 e^{(x+t)/\sigma} \\ &= a_2 + [a_1 e^{x/\sigma}] e^{t/\sigma}.\end{aligned}$$

Ejemplo 2.6.2. *Se calcula* ${}_{10}p_{40}$ *con los parámetros del Ejemplo 2.6.1 con las instucciones en R:*

```
#--- parametros GM
a = 0.0005
b = 10^(-4.12)
C = 10^(0.038)
x = 40
#--- parametros en eha
a2 = a
a1 = b
t = 10
x = 40
sigma = 1/log(C)
p10.40.eha =  pmakeham(t, shape = c(a1*exp(x/sigma), a2),
scale = sigma, lower.tail=FALSE)
```

La densidad de la variable aleatoria $T(40)$ según el modelo G-M con los parámetros dados se calcula con las instrucciones R:

```
#--- densidad de T(40)
x = 40
fx = dmakeham(seq(0,110-40,0.5),
shape = c(a1*exp(x/sigma),a2),
scale = sigma, log = FALSE)
plot(seq(40,110,0.5),fx,type='l',lwd=2,
xlab='edad',ylab='densidad')
```

Propiedad de las cabezas gemelas de la ley Gompertz-Makeham

Para enunciar esta propiedad se define primero esta probabilidad.

Definición 2.6.2. *Suponga dos vidas* $(x_1), (x_2)$*, la probabilidad de que ambas superen su edad en* t *años se define como*

$$ {}_tp_{x_1x_2} := \mathbb{P}(T(x_1) > t, T(x_2) > t) = {}_tp_{x_1}{}_tp_{x_2}. \tag{2.47} $$

Suponga la ley de mortalidad Gompertz-Makeham, ${}_tp_x = s^t g^{c^x(c^t-1)}$. Entonces

$$ {}_tp_{x_1x_2} = s^t g^{c^{x_1}(c^t-1)} . s^t g^{c^{x_2}(c^t-1)} $$

$$= s^{2t} g^{c^{x_1}(c^t-1)+c^{x_2}(c^t-1)}$$
$$= s^{2t} g^{(c^t-1)(c^{x_1}+c^{x_2})}.$$

suponga que x cumple que $\frac{c^{x_1}+c^{x_2}}{2} = c^x$

entonces ${}_tp_{x_1x_2} = s^{2t} g^{2(c^t-1)c^x} = \left(s^t g^{c^x(c^t-1)}\right)^2 = ({}_tp_x)^2$

En general, para n vidas, la propiedad de cabezas gemelas se expresa

$${}_tp_{x_1 \ldots x_n} := {}_tp_{x_1}{}_tp_{x_2} \ldots {}_tp_{x_n} = ({}_tp_x)^n \tag{2.48}$$

donde x cumple $c^x = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n c^{x_i}$

Ejemplo 2.6.3. *La ley de Gompertz-Makeham ajustada para la tabla colombiana de mortalidad de los Asegurados* $55/69$ *es:*

$$\mu_x = 0.0015 + 10^{-4.222+0.043^x}$$

de donde ${}_tp_x = s^t g^{c^x(c^t-1)}$ *con* $s = 0.998501, \quad g = 0.999394, \quad c = 1.10407.$

Calcular ${}_{15}p_{30,40}$*, la probabilidad de que (30) y (40) sobrevivan ambos 15 años, usando la propiedad de cabezas gemelas de la ley de Gompertz-Makeham.*

Solución

Defina x *tal que* $c^x = \frac{1}{2}(c^{30} + c^{40})$*. Entonces*

$$x = \frac{\ln[\frac{1}{2}(1.10407^{30} + 1.10407^{40})]}{\ln(1.10407)} = 36.19,$$

por tanto ${}_{15}p_{30,40} = ({}_{15}p_x)^2 = 0.9224.$

Definición 2.6.3. *Si se coloca* $a = 0$ *en (2.40) se obtiene la Ley de mortalidad de Gompertz. La función de supervivencia y la fuerza de mortalidad son*

$${}_tp_x = e^{-bc^x(c^t-1)/\log(c)} \tag{2.49}$$

$$\mu_x = bc^x \tag{2.50}$$

para $c > 1, b > 0$.

En las librerías `flexsurv` y `eha` se encuentran funciones para implementar esta distribución. En `flexsurv` las funciones se programan con base en los parémetros `shape=log(c)`, `rate=b`, con d=fdp, p=fda, q=fda inversa (cuantil), r=random, h=hazard, H=hazard integrada.

```
dgompertz(x, shape, rate = 1, log = FALSE)
pgompertz(q, shape, rate = 1, lower.tail = TRUE, log.p = FALSE)
qgompertz(p, shape, rate = 1, lower.tail = TRUE, log.p = FALSE)
rgompertz(n, shape = 1, rate = 1)
hgompertz(x, shape, rate = 1, log = FALSE)
Hgompertz(x, shape, rate = 1, log = FALSE)
```

2.7. Otras leyes de mortalidad

Definición 2.7.1. ***Ley de mortalidad de Siler***. *Propuesta en 1973, esta ley es una modificación de Gomperz-Makeham. Esta ley se define (utilizando una parametrización afín a la librería R* `MortalityLaws`.

$$\mu_x = a_1 e^{b_1 x} + a_2 + a_3 e^{-b_2 x}. \tag{2.51}$$

con $a_j > 0, j = 1, 2, 3$, $b_i > 0, i = 1, 2$.

Para calcular la probabilidad de supervivencia

$$_tp_x = e^{-\int_0^t \mu_{x+s} ds} \tag{2.52}$$

desarrollamos $e^{-\int_0^t \mu_{x+s} ds}$, mediante la instrucción del software MAPLE,

$$\mathrm{exp}(-(\mathrm{int}(a2 + a1 * \mathrm{exp}((x + s) * b1) + a3 * \mathrm{exp}(-(x + s) * b2), s = 0..t)));$$

para obtener

$$
{}_tp_x = e^{-a_1 e^{xb_1}(e^{tb_1}-1)/b_1 - a_2 t - a_3(1-e^{-tb_2})e^{-xb_2}/b_2}. \qquad (2.53)
$$

La programación en R de la fuerza de mortalidad y supervivencia de la ley Siler se puede hacer con el siguiente programa:

```
#-------fuerza mortalidad
mx.siler = function(t,x,pars){
a1*exp(b1*(x+t))+a2+a3*exp(-b2*(x+t))}
#-------supervivencia
tpx.siler = function(t,x,pars){
a1 =  pars[1]
b1 =  pars[2]
a2 =  pars[3]
a3 =  pars[4]
b2 =  pars[5]
exp((a1 * exp(b1 * x) * b2
- a3 * exp(-b2 * x) * b1
- a2 * t * b1 * b2 - a1 * exp((x + t) * b1) * b2
+ a3 * exp(-(x + t) * b2) * b1) / b1 / b2)
}
#--------ejemplo parametros
          a1           b1           a2           a3            b2
pars=c(0.0000990053, 0.0871775254, 0.0003376169,
 0.0292152503, 2.9848968334)
#--------ejemplo
tpx.siler(t=10,x=40,pars)
0.9464619
```

La probabilidad ${}_tp_x$ con la fuerza de mortalidad Siler (2.51) se puede expresar como el producto de las funciones de supervivencia Gompertz-Makeham y Gompertz, esta última con $c < 1$,

$$
{}_tp_x^{(siler)} = {}_tp_x^{(gm)}\, {}_tp_x^{(g)}. \qquad (2.54)
$$

En el miembro derecho de (2.51), los dos primeros sumandos corresponden a la fuerza de mortalidad de una ley Gompertz-Makeham.

Con la parametrización de la librería `eha`, $\mu_x^{(gm)}$, con los parámetros $shape = c(s_1, s_2), scale = \nu$, se escribe $\mu_x^{(gm)} = s_2 + s_1 e^{x/\nu}$.

Como en realidad se requiere $\mu_{x+t}^{(gm)} = a_2 + a_1 e^{b_1(x+t)}$, reemplazamos

$$s_2 = a_2,\ s_1 = a_1 e^{b_1 x},\ \nu = 1/b_1,$$

y para calcular ${}_tp_x^{(gm)}$ se coloca en R

```
tpx1 =  eha::pmakeham(t,
shape = c(a1*exp(x*b1), a2),
scale = 1/b1, lower.tail=FALSE)
```

El tercer sumando en el miembro derecho de (2.51) es la fuerza de mortalidad de una ley Gompertz (2.50), con la parametrización $\mu_x^{(g)} = a_3 e^{-b_2 x}$. Comparando con la parametrización en `flexsurv`, be^{ax}, como en realidad se requiere $\mu_{x+t}^{(g)}$, se reemplazan $a = -b_2, b = a_3 e^{-b_2 x}$, y se programa

```
tpx2 =  flexsurv::pgompertz(t,
shape = -b2,
rate = a3*exp(-b2*x),
lower.tail = FALSE)
```

Como conclusión, la probabilidad de supervivencia Siler se programa multiplicando las respectivas probabilidades Gompertz-Makeham y Gompertz. Se puede programar los comandos

```
#-------función alternativa para programar ley Siler
require(flexsurv)
require(eha)

tpx.s2 = function(t,x,pars){
a1 =  pars[1]
b1 =  pars[2]
```

```
a2 =  pars[3]
a3 =  pars[4]
b2 =  pars[5]

tpx1 =  eha::pmakeham(t,
shape = c(a1*exp(x*b1), a2),
scale = 1/b1, lower.tail=FALSE)

tpx2 =  flexsurv::pgompertz(t,
shape = -b2,
rate = a3*exp(-b2*x),
lower.tail = FALSE)

p = tpx1*tpx2
return(p)
}
pars=c(0.0000990053, 0.0871775254, 0.0003376169,
 0.0292152503, 2.9848968334)
t= 20; x = 50;
tpx.s2(t,x,pars)
```

Definición 2.7.2. ***Ley de mortalidad Makeham-Beard****. Propuesta en Beard [1971], esta ley se define (utilizando la parametrización de la librería R MortalityLaws (Pascariu [2018]))*

$$\mu_x^{(mg)} = c + \frac{a\exp(bx)}{1 + ka\exp(bx)}. \tag{2.55}$$

con $a > 0, b > 0, c > 0.$

Utilizando el software MAPLE se puede obtener una expresión para la función de supervivencia

$$\begin{aligned} {}_tp_x^{(mg)} &= \int_0^t \mu_{x+s}{}^{(mb)} ds \\ &= e^{-\int_0^t c + \frac{a\exp(b(x+s))}{1+ka\exp(b(x+s))} ds} \\ &= e^{-ct - \int_0^t \frac{\exp(bs)}{\frac{1}{a}\exp(-bx) + k\exp(bs)} ds} \end{aligned}$$

$$= e^{-ct - \frac{1}{kb}\ln\left(\frac{\exp(-bx)+ak\exp(bt)}{\exp(-bx)+ak}\right)}$$

$$= e^{-ct}\left(\frac{\exp(-bx)+ak}{\exp(-bx)+ak\exp(bt)}\right)^{\frac{1}{kb}}$$

Suponga que el vector de parámetros es `pars=(A,B,C,K)` entonces la fuerza de mortalidad $\mu_{x+t}^{(mb)}$ y la probabilidad de supervivencia ${}_tp_x$ se pueden programar en R mediante las funciones

```
muxt.mb = function(t,x,pars){
a = pars[1]; b = pars[2]; C=pars[3]; k =pars[4];
C+( a*exp(b*(x+t))  )/( 1 + k*a*exp(b*(x+t)) )
}

tpx.mb = function(t,x,pars){
a = pars[1]; b = pars[2]; C=pars[3]; k =pars[4];
exp(-C*t)*( (exp(-b*x)  + a*k )/( exp(-b*x)+ a*k*exp(b*t)))^(1/(k*b))
}
#------------- ejemplo parametros
pars = c(0.000010936, 0.105864876, 0.000227759, 0.327569880)
x = 30
t = 40
(tpx.mb(t,x,pars))
[1] 0.8378441
```

Ejercicio 2.7.1. *Retomando el Ejemplo 2.4.2 Suponga que* (x) *y* (x^s) *son dos vidas de la misma edad, la primera en condición sana y la segunda con IC. Encuentre una expresión para* $P(T(x) < T(x^s))$*, asumiendo el modelo aditivo (2.35). Evalúela asumiendo* $x = 56,\ c = 0.1$*, y la fuerza de mortalidad base Makeham-Beard (2.55).*

Definición 2.7.3. ***Primera Ley de mortalidad Perks***. *W. Perks propuso dos leyes de mortalidad en 1932, ver Perks [1932]. La primera ley se define, utilizando la parametrización de la librería R eha (2.46)), por*

$$\mu_x = \frac{a_1 e^{a_3 x} + a_2}{a_4 e^{a_3 x} + 1}. \tag{2.56}$$

para $x \in \{0, 1, \ldots, \omega\}$, con a_1, a_2, a_3, a_4 parámetros positivos.

Ejemplo 2.7.1. *Ejemplo de implementación de la primera Ley en R. Los parámetros están en el programa siguiente.*

```
#-------------Ley Perks 1
#             Definir la fuerza de mortalidad
muxt.p1 = function(t,x,pars){
a1 = pars[1]
a2 = pars[2]
a3 = pars[3]
a4 = pars[4]
m=(a1+a2*exp(a3*(x+t)))/(a4*exp(a3*(x+t))+1)
return(m)}
#---------construir tpx

tpx.p1 = function(t,x,pars){
a1 = pars[1]
a2 = pars[2]
a3 = pars[3]
a4 = pars[4]
g = (a1*a4-a2)/(a3*a4)
v = exp(-a1*t)*((a4*exp(a3*(x+t))+1)/(a4*exp(a3*x)+1))^g
return(v)}

#----------ejemplo de parametros
pars=c(7.130052e-07, 2.005330e-05, 1.123180e-01, 1.982141e-05)
#----------ejemplo de cálculo
t=10
x=40
(p.10.40 =tpx.p1(t,x,pars))
```

Definición 2.7.4. ***Segunda Ley de mortalidad Perks**.*

La segunda ley de Perks se define como

$$\mu_x = \frac{a_1 + a_2 e^{a_3 x}}{a_4 e^{-a_3 x} + 1 + a_5 e^{a_3 x}} \tag{2.57}$$

para $x \in \{0, 1, \ldots, \omega\}$, con a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 parámetros positivos.

Ejemplo 2.7.2. *Ejemplo de implementación de la segunda Ley en R. Los parámetros están en el programa siguiente.*

```
#-------------Ley Perks 2
#             Definir la fuerza de mortalidad
muxt.p = function(t,x,pars){
a1 = pars[1]
a2 = pars[2]
a3 = pars[3]
a4 = pars[4]
a5 = pars[5]
m=(a1+a2*exp(a3*(x+t)))/(a4*exp(-a3*(x+t))+a5*exp(a3*(x+t))+1)
return(m)}
#---------construir tpx
#---------Notese el uso de sapply y de integrate
tpx.p2 = function(t,x,pars){
fn = function(s){muxt.p2(s,x,pars)}
a = sapply(t,function(x) integrate(fn,0,x)$value)
v = exp(-a)
return(v)}
#---------ejemplo de parámetros

pars = c(0.0001001539,9.553877e-05,0.08916711,-0.9927444,3.016905e-05)


#----------ejemplo de cálculo
t=10
x=40
(p.10.40 =tpx.p2(t,x,pars))
```

Como señalan Pitacco et al. [2009], estas leyes tienen mayor capacidad para representar la fuerza de mortalidad en edades avanzadas, por ejemplo, mayores de 80 años. La mortalidad es el rango de edades superiores a 80 años tiene una tasa de crecimiento que es menor que la tasa exponencial de la distribución por ejemplo, Gompertz-Makeham. En las leyes de Perks (2.56), (2.57) el denominador hace disminuír la fuerza de mortalidad en edades avanzadas. Otras leyes que incorporan esta característica son las leyes Heligman-Pollard y Lindbergson.

Definición 2.7.5. ***Ley de mortalidad de Thiele***. *La ley de mortalidad de Thiele, propuesta* *en 1871, representa la fuerza de mortalidad con tres componentes de la vida humana, la primera corresponde a la mortalidad infantil, la segunda a la mortalidad en edad por accidentes en la edad adulta y el tercero, de tipo Gompertz, representa la mortalidad debida al envejecimiento (senectud), [Pitacco et al., 2009, eq. 2.73]*

$$\mu_x = Ae^{-Bx} + Ce^{-D(x-E)^2} + FG^x. \tag{2.58}$$

Definición 2.7.6. ***Leyes de Heligman-Pollard***. *La primera ley de mortalidad de Heligman-Pollard se define a través de la razón de disparidad (odds ratio) q_x/p_x (ver [Heligman and Pollard, 1980, pag. 49, eq.(1)],*

$$q_x/p_x = A^{(x+B)^C} + De^{-E(\ln(x/F))^2} + GH^x \tag{2.59}$$

La segunda ley de mortalidad de Heligman-Pollard se define como

$$q_x = A^{(x+B)^C} + De^{-E(\ln(x/F))^2} + \frac{GH^x}{1+GH^x}. \tag{2.60}$$

La tercera ley de mortalidad de Heligman-Pollard se define como

$$q_x = A^{(x+B)^C} + De^{-E(\ln(x/F))^2} + \frac{GH^x}{1+KGH^x}. \tag{2.61}$$

La cuarta ley de mortalidad de Heligman-Pollard se define como

$$q_x = A^{(x+B)^C} + De^{-E(\ln(x/F))^2} + \frac{GH^{x^k}}{1+GH^{x^k}}. \tag{2.62}$$

Los parámetros A,B,C,D,E,F,G,H,K,k se estiman mediante regresión nolineal, ó por métodos bayesianos, ver Sharrow [2012].

En edades avanzadas se cumple para la 1a y 2a leyes que $q_x \approx \frac{GH^x}{1+GH^x}$.

Utilizando la librería `HPbayes`, ver Sharrow [2012], se pueden calcular las probabilidades q_x, mediante la función `hp.nqx(H.out=theta,x)`, donde θ es un vector con los 8 parámetros. Dado el vector de parámetros θ en el siguiente código R, encuentre ${}_{31}p_{40}$.

```
library(HPbayes)
```

```
x = seq(40,70)
theta = cbind(0.06008, 0.31087, 0.34431, 0.00698,
1.98569, 26.71071, 0.00022, 1.08800)
qv = hp.nqx(H.out=theta,x)
# n = 31, x = 40
(npx = prod(1-qv))
```

Definición 2.7.7. ***Ley de mortalidad Lindbergson***. *Propuesta en 2001, ver Lindbergson [2001], esta ley establece un crecimiento lineal para edades avanzadas en lugar del crecimiento exponencial de Gompertz-Makeham*

$$\mu_x = \begin{cases} a + bc^x, \text{ si } x \leq x_\omega, \\ a + bc^{x_\omega} + d(x - x_\omega), \text{ si } x > x_\omega. \end{cases} \tag{2.63}$$

Definición 2.7.8. ***Ley de mortalidad Carriere***. *La ley de mortalidad de Carriere (ver Carriere [1992]) consiste en definir la distribución acumulada de la duración de la vida humana, X, como una mezcla de las distribuciones de valores extremos: Gompertz, Gompertz Inversa, Weibull, y Weibull Inversa, concretamente*

$$\mathbb{P}(X > x) = \sum_{j=1}^{4} \psi_j S_j(x), \tag{2.64}$$

donde $\psi_j > 0$ para $j = 1, 2, 3, 4$, son los coeficientes de la mezcla, que satisfacen $\sum_{j=1}^{4} \psi_j = 1$. Las funciones de supervivencia $S_j(x)$ de las distribuciones Gompertz, Gompertz Inversa, Weibull, y Weibull Inversa, dependen cada una de parámetros de localización y escala m_j y σ_j. Concretamente,

$$S_1(x) = \exp(e^{-m_1/\sigma_1} - e^{(x-m_1)/\sigma_1}) \tag{2.65}$$

$$S_2(x) = \frac{1 - e^{(x-m_2)/\sigma_2}}{1 - e^{-m_2/\sigma_2}} \tag{2.66}$$

$$S_3(x) = \exp(-(x/m_3)^{m_3/\sigma_3}) \tag{2.67}$$

$$S_4(x) = 1 - \exp(-(x/m_4)^{m_4/\sigma_4}). \tag{2.68}$$

2.8. Esperanza de Vida

Definición 2.8.1. *Para una vida (x) con vida remanente $T(x)$, la vida media remanente ó esperanza completa de vida a la edad x se define por*

$$\mathring{e}_x = \mathbb{E}(T(x)). \tag{2.69}$$

Como $E(T(x)) = \int_0^\infty tg(t)dt$, y $g(t) = G^{'}(t) = ({}_tq_x)^{'} = {}_tp_x\mu_{x+t}$ entonces

$$\mathring{e}_x = \int_0^\infty s\,{}_sp_x\mu_{x+s}ds. \tag{2.70}$$

Como también

$$\mathbb{E}(T(x)) = \int_0^{\omega-x} \mathbb{P}(T(x) > t)dt \tag{2.71}$$

entonces

$$\mathring{e}_x = \int_0^{\omega-x} {}_tp_x dt. \tag{2.72}$$

La regla de integración por partes se puede re-escribir de manera conveniente para cálculos de esperanzas en función de la función de supervivencia de $T(x)$.

Proposición 2.8.1. *Suponga que T es una variable aleatoria positiva y $h(x)$ una función no negativa, derivable y monótona tal que $E(h(T))$ exista, con $E(h(T)) = \int_0^\infty h(t)g(t)dt$, donde $g(t)$ es la función densidad de probabilidad de T, entonces*

$$\mathbb{E}(h(T)) = h(0) + \int_0^\infty h^{'}(t)(1 - G(t))dt, \tag{2.73}$$

donde $G(t) = \int_0^t g(x)dx = P(T \leq t)$.

Una aplicación directa de (2.73) permite calcular $Var(T(x)) = \mathbb{E}(T(x)^2) - \mathbb{E}(T(x))^2$:

$$\mathbb{E}(T(x)^2) = 2\int_0^{\omega-x} t(1 - G_x(t))dt$$

$$= 2\int_0^{\omega-x} t\,{}_tp_x dt$$

$$\therefore\ Var(T(x)) = 2\int_0^{\omega-x} t\,{}_tp_x dt - \left(\int_0^{\omega-x} {}_tp_x dt\right)^2.$$

Ejemplo 2.8.1. *ASuma que la población fumadores (F), caracterizada por una ó más cajetillas al día durante cinco ó más años, tienen una fuerza de mortalidad doble que la de los no fumadores (NF). Asuma que la fuerza de mortalidad de los NF es la de DeMoivre.*

Calcule $\mathring{e}_{56^F}$, $\mathring{e}_{56}$, donde x^F indica un fumador de edad x. En qué porcentaje se reduce la esperanza de vida?

Solución Utilizando las definiciones:

$${}_tp_{x^F} = \exp(-\int_0^t 2\mu_{x+s}ds) = \left(\exp(-\int_0^t \mu_{x+s}ds)\right)^2 = ({}_tp_x)^2.$$

Por tanto,

$$\mathring{e}_{x^F} = \int_0^{110-x} {}_tp_{x^F}dt = \int_0^{110-x} ({}_tp_x)^2 dt$$
$$= \int_0^{110-x} \left(\frac{110-x-t}{110-x}\right)^2 dt = \frac{1}{3}(110-x).$$

Además, como $T(x) \sim U(0, 110-x)$ entonces $\mathring{e}_x = E(T(x)) = (110-x)/2$. Luego

$$\mathring{e}_{x^F} = \frac{2}{3}\mathring{e}_x.$$

Por tanto, la esperanza de vida de los fumadores se reduce en 1/3 con respecto a la esperanza de vida de los no fumadores.

Ejemplo 2.8.2. *Suponga que (x) sufre de insuficiencia cardíaca (IC) y su fuerza de mortalidad se modela como una mortalidad multiplicativa sub-estándar, ${}_tp_{x^s} = e^{-kt}{}_tp_x$, con una mortalidad de base con la ley Uniforme (DeMoivre).*

1. *Utilice la identidad:*

$$\int_0^a (1-t/a)e^{-kt}dt = (e^{-ak} + ak - 1)/ak^2,$$

para encontrar una expresión para $\mathring{e}_{x^s}$, la esperanza de vida de (x) con IC.

2. *Suponga $x = 56,\ k = 0.1$, en qué porcentaje se reduce la esperanza de vida en este caso?*

Solución

1. La esperanza de vida es:

$$\begin{aligned}\overset{\circ}{e}_{x^S} &= \int_0^\infty {}_tp_x^s dt = \int_0^\infty {}_tp_x e^{-kt} dt \\ &= \int_0^{110-x} (1 - \frac{t}{110-x}) e^{-kt} dt\end{aligned}$$

Utilizando la identidad

$$\int_0^a (1 - t/a) e^{-kt} dt = (e^{-ak} + ak - 1)/ak^2$$

se obtiene:

$$\overset{\circ}{e}_{x^S} = \frac{1}{(110-x)k^2}(e^{-(110-x)\,k} + (110-x)k - 1). \tag{2.74}$$

2. Si $k = 0.1$ y $x = 56$, reemplazando en (2.74), tenemos: $\overset{\circ}{e}_{56^S} = 8.15$. Como $\overset{\circ}{e}_{56} = 27$ entonces

$$\overset{\circ}{e}_{56^S} = 0.30\ \overset{\circ}{e}_{56},$$

luego la disminución de la esperanza de vida para 56^s es del 70 $\%$ (!).

Esperanza de vida con la ley Gompertz-Makeham

Una expresión para la esperanza de vida de (x), utilizando la ley Gompertz-Makeham $\mathring{e}_x = \int_0^{\omega-x} {}_tp_x dt$, y la parametrización en (2.42), $s = e^{-a}, g = e^{-\frac{b}{\ln c}}$, está dada por

$$\mathring{e}_x = \int_0^{\omega-x} s^t g^{c^x(c^t-1)} dt.$$

La integral anterior se puede expresar mediante una fórmula cerrada, con base en la función Gamma Incompleta superior (upper incomplete Gamma) , definida como ([2])

$$\Gamma(x, a) = \int_x^\infty e^{-t} t^{a-1} dt. \tag{2.75}$$

Proposición 2.8.2. *(ver Scarpello et al. [2006]) La esperanza de vida de (x) con base en la ley de mortalidad Gompertz-Makeham está dada por la expresión siguiente, con base en la parametrización en (2.42)*

$$\mathring{e}_x = \frac{(-c^x \ln(g))^{-\frac{\ln(s)}{\ln(c)}}}{g^{c^x}\log(g)} \Gamma\left(-c^x \ln(g), -\frac{\ln(s)}{\ln(c)}\right). \tag{2.76}$$

La función $\Gamma(x, a)$ se calcula en R mediante la función `gammainc(x,a)[2]` de la librería `pracma`.

Ejemplo 2.8.3. *La ley de Gompertz-Makeham ajustada para la tabla colombiana de mortalidad de los Asegurados $55/69$ es:*

$$\mu_x = 0.0015 + 10^{-4.222+0.043^x}$$

de donde ${}_tp_x = s^t g^{c^x(c^t-1)}$ con $s = 0.998501$, $g = 0.999394$, $c = 1.10407$. Calcular $\mathring{e}_{40}$.

Solución

```
# calculo esperanza de vida con GM
# formula de Scarpello et al
# parametros

s=0.998501
g=0.999394
C=1.10407
x = 40
```

[2]https://es.wikipedia.org/wiki/Función_gamma_incompleta

```
require(pracma)
# funcion con gamma incompleta superior
ex.gm.sc = function(s,g,C,x){
f2 = -log(s)/log(C)
f1 = -C^x*log(g)
ex = f1^f2*gammainc(f1,f2)[2]/(g^(C^x)*log(C))
return(ex)
}
(e40 = ex.gm.sc(s,g,C,x))
#---respuesta
uppinc
27.97399
```

Ejemplo 2.8.4. *Considerando dos modelos para supervivencia, GM hombres, GM-mujeres, comparar la esperanza de vida para $x = 80$, y la desviación estándar de $T(x)$. Utilizar integración numérica con la función* `integrand` *de R.*

Modelo GM, mujeres:

$$ {}_tp_x^m = 0.993742^t\, 0.998559^{1.084033^x(1.084033^t-1)}, $$

se obtiene: $\mathring{e}_{80}^m = 7.55, \quad \sigma_{80}^m = 5.14,$

Modelo GM, hombres:

$$ {}_tp_x^h = 0.995893^t 0.998215^{1.082736^x(1.082736^t-1)}, $$

se obtiene: $\mathring{e}_{80}^h = 7.17, \quad \sigma_{80}^h = 5.35.$

Para los resultados anteriores se utilizaron las instrucciones en R:

```
# ejemplo esperanza de vida completa con GM, límite superior,
# con w = 110
# es  w-x = 110 - 80 = 30

tpx.m=function(t,x){
```

```
0.993742^t*0.998559^(1.084033^x*(1.084033^t-1))}
(e80.m = integrate(tpx.m,0,30,x=80)$value)
# R/ 7.55
tpx.h=function(t,x){
0.995893^t*0.998215^(1.082736^x*(1.082736^t-1))}
(e80.h = integrate(tpx.h,0,30,x=80)$value)
# R/ 7.17
#------calculo desviaciones estandar, usar fórmula
tpxt.m=function(t,x){t*tpx.m(t,x)}
(sigma80.m = sqrt(2*integrate(tpxt.m,0,30,x=80)$value-e80.m^2))
# R/ 5.349

tpxt.h=function(t,x){t*tpx.h(t,x)}
(sigma80.h = sqrt(2*integrate(tpxt.h,0,30,x=80)$value-e80.h^2))
# R/ 5.142
```

Ejercicio 2.8.1. *Con respecto al Ejemplo 2.8.2, resolver la parte ii) asumiendo:* $k = 0.01$ *y ley GM para la tabla colombiana de mortalidad de los Asegurados* $55/69$*:*

$$\mu_x = 0.0015 + 10^{-4.222+0.043^x}$$
$${}_tp_x = s^t g^{c^x(c^t-1)}$$

con $s = 0.998501, \quad g = 0.999394, \quad c = 1.10407$. *Utilice la fórmula (2.76)*

Definición 2.8.2. *Definición: Esperanza de vida abreviada (Curtated future lifetime of (x)) se define como el valor esperado de* $K(x) = \lfloor T(x) \rfloor$*,*

$$e_x = \mathbb{E}(K(x)) = \sum_{k=0}^{\omega-x-1} k\ {}_kp_x q_{x+k}. \tag{2.77}$$

La regla de integración por partes para sumatorias tiene esta versión.

Proposición 2.8.3. *Sea* K *una variable aleatoria discreta con valores en* $\{0, 1, 2...\}$*, con función de distribución acumulada* $G(k)$ *y función densidad de probabilidad* $G(k) - G(k-1) = g(k) = P(K = k), k = 1, 2...$ *y* $g(0) = G(0)$*. Si* $h(k)$ *es una* *función positiva y monótona tal que $\mathbb{E}(h(K))$ existe, entonces*

$$\mathbb{E}(h(K)) = \sum_{k=0}^{\infty} h(k)g(k) = h(0) + \sum_{k=0}^{\infty} (1 - G(k))(h(k+1) - h(k)). \tag{2.78}$$

Aplicación: se cumple la identidad

$$e_x = \sum_{k=0}^{\omega-x-1} {}_kp_x. \tag{2.79}$$

Demostración. Con $h(k) = k$, y $K = K(x)$, aplicando (2.78)

$$\begin{aligned} G_{K(x)}(k) &= \mathbb{P}(K(x) \leq k) = {}_{k+1}q_x \\ 1 - G_{K(x)}(k) &= 1 - {}_{k+1}q_x = {}_{k+1}p_x \\ e_x = \mathbb{E}(h(K(x))) &= \sum_{k=0}^{\omega-x-1} ({}_{k+1}p_x)(k+1-k) = \sum_{k=0}^{\omega-x-1} {}_{k+1}p_x \\ \therefore\ e_x &= \sum_{k=1}^{\omega-x} {}_kp_x \end{aligned}$$

□

Relación entre $\mathring{e}_x$ y e_x

Si se escribe $z = \lfloor z \rfloor + frac(z)$ donde $\lfloor z \rfloor \leq z < \lfloor z+1 \rfloor$ y $0 \leq frac(z) < 1$, entonces $T(x) = K(x) + S(x)$ donde $S(x) = frac(T(x)) \in [0, 1)$. Pero entonces, como $S(x)$ es una variable aleatoria continua entre 0 y 1, su valor medio se puede aproximar a $1/2$, con lo que se obtiene

$$\begin{aligned} E(T(x)) = \mathring{e}_x = E(K(x)) + E(S(x)) &\approx e_x + \frac{1}{2}, \\ \therefore\ \mathring{e}_x &\approx e_x + \frac{1}{2}. \end{aligned} \tag{2.80}$$

2.9. Problemas

1. Considere la fuerza de mortalidad estándar μ_{x+t} dada por una ley de mortalidad. Utilice los parámetros que aparecen en los Ejemplos para la Ley escogida (vea las secciones §2.7 y §2.6).

   Asuma una fuerza de mortalidad sub-estándar según el modelo multiplicativo en (2.38), para una vida (x) dada por

   $$\mu_{x^s+t} = \theta\mu_{x+t}, \tag{2.81}$$

   con $\theta > 1$ dada. Denote por $T(x^s)$ su vida media residual. Asuma $x_1 = 30$, $t = 20, \theta = 1.2$.

   a) Defina la probabilidad de fallecer dos vidas x_1, x_2 antes de t años como

   $$_tq_{\overline{x_1x_2}} := {}_tq_{x_1} \cdot {}_tq_{x_2}. \tag{2.82}$$

   Observe que $_tq_{\overline{x_1x_2}} \neq 1 - {}_tp_{x_1x_2}$. Encuentre $_tq_{\overline{x_1,x_1^s}}$.

   b) Encuentre $\mathbb{E}(T(x_1^s)) = \overset{\circ}{e}_{x_1^s}$. En qué porcentaje se reduce la esperanza de vida de (x_1^s) con respecto a otra vida (x_1) con la fuerza de mortalidad μ_{x+t}?.

   c) Encuentre $P(T(x_1) < T(x_1^s))$.

   d) Genere una Tabla de Vida con los valores de μ_x . Encuentre la probabilidad de (30) fallecer antes de cumplir 50 con esta Tabla.

2. Considere la fuerza de mortalidad estándar μ_{x+t} dada por una ley de mortalidad. Utilice los parámetros que aparecen en los Ejemplos para la Ley escogida (vea las secciones §2.7 y §2.6). Suponga las variables $T(40), T(30)$ y $T(20)$ distribuídas según la ley escogida y asumidas independientes.

   a) Usando el teorema de probabilidad total (2.10) condicionando sobre $T(30)$, y las identidades (2.12),(2.13), compruebe que

   $$\mathbb{P}(T(40) + 20 < T(30) + 10 < T(20)) = \frac{1}{6}\, {}_{20}p_{20}\, {}_{10}p_{30}. \tag{2.83}$$

   b) Evalúe (2.83) con la ley de mortalidad escogida.

c) Asuma una fuerza de mortalidad sub-estándar multiplicativa, tal que: $\mu^s_{x+t} = 1.3\,\mu_{x+t}$, para una vida (x). Denote por $T(x^s)$ su vida media residual. Calcule

$$\mathbb{P}(T(40) + 20 < T(30^s)). \tag{2.84}$$

d) Genere una Tabla de Vida con los valores de μ_x . Encuentre la probabilidad $\frac{1}{6}\ {}_{20}p_{20}\ {}_{10}p_{30}$ con esta Tabla.

3. Considere la fuerza de mortalidad estándar μ_{x+t} dada por una ley de mortalidad. Utilice los parámetros que aparecen en los Ejemplos para la Ley escogida (vea las secciones §2.7 y §2.6). Asuma una fuerza de mortalidad sub-estándar según el modelo multiplicativo para una vida (x),(2.38), dada por

$$\mu^s_{x+t} = \theta\mu_{x+t}, \tag{2.85}$$

donde la constante $\theta > 1$ está dada. Denote por $T(x^s)$ su vida media residual. Asuma $x_1 = 40, x_2 = 50, t = 20, \theta = 1.7.$

a) Defina la probabilidad de que al menos una de las dos vidas $(x_1), (x_2)$ esté con vida después de t años, como

$$\begin{aligned} {}_tp_{\overline{x_1,x_2}} &= \mathbb{P}((T(x_1) > t) \cup (T(x_2) > t)), &(2.86)\\ &= {}_tp_x + {}_tp_y - {}_tp_x {}_tp_y. &(2.87)\end{aligned}$$

Encuentre $1 - {}_tp_{\overline{x_1,x_1^s}}$. Interprete.

b) Encuentre $\mathbb{E}(T(x_1^s)) = \ \mathring{e}_{x^s}$. En qué porcentaje se reduce la esperanza de vida de (x_1^s) con respecto a otra vida (x_1) con la fuerza de mortalidad μ_{x+t}?.

c) Suponga que S es una variable aleatoria distribuída Exponencial con parámetro $\mathring{e}_x$ es decir, $\mathbb{P}(S > t) = e^{-t/\mathring{e}_x}$. Encuentre una expresión para

$$\mathbb{P}(T(x) > S).$$

Evalúela utilizando $x = x_1$.

d) Genere una Tabla de Vida con los valores de μ_x . Encuentre la probabilidad $1 - {}_tp_{\overline{x_1,x_1^s}}$ con esta Tabla.

4. Considere la fuerza de mortalidad estándar μ_{x+t} dada por una ley de mortalidad. Utilice los parámetros que aparecen en los Ejemplos para la Ley escogida (vea

las secciones §2.7 y §2.6). Asuma una fuerza de mortalidad sub-estándar aditiva, tal que: $\mu^s_{x+t} = k + \mu_{x+t}, k > 0$, para una vida (x) que se le diagnostica una insuficiencia renal. Denote por $T(x^s)$ su vida media residual. Suponga $x_1 = 56, x_2 = 40, t = 10,\ k = 0.01$.

a) Defina la probabilidad de que al menos una de las dos vidas $(x_1), (x_2)$ esté con vida después de t años, como

$$ {}_tp_{\overline{x_1,x_2}} = \mathbb{P}((T(x_1) > t) \cup (T(x_2) > t)), \tag{2.88} $$
$$ = {}_tp_x + {}_tp_y - {}_tp_x {}_tp_y. \tag{2.89} $$

Encuentre ${}_tp_{\overline{x_1,x_2}}$.

b) Encuentre $\mathbb{E}(T(x^s_1)) = \overset{\circ}{e}_{x^s_1}$. En qué porcentaje se reduce la esperanza de vida de (x^s_1) con respecto a otra vida (x_1) con la fuerza de mortalidad μ_{x+t}?.

c) Encuentre $P(T(x_1) < T(x^s_1))$.

d) Genere una Tabla de Vida con los valores de μ_x . Encuentre ${}_tp_{\overline{x_1,x_2}}$ con esta Tabla.

5. Considere la fuerza de mortalidad estándar μ_{x+t} dada por una ley de mortalidad. Utilice los parámetros que aparecen en los Ejemplos para la Ley escogida (vea las secciones §2.7 y §2.6). Asuma una fuerza de mortalidad sub-estándar aditiva, tal que: $\mu^s_{x+t} = 0.02 + \mu_{x+t}$, para una vida (x) que se le diagnostica una insuficiencia cardíaca. Denote por $T(x^S)$ su vida media residual. Utilice $x_1 = 40$, $x_2 = 50$, $x_3 = 60, t = 10$.

a) Defina las probabilidades de que al menos una de tes vidas $(x_1), (x_2), (x_3)$ esté con vida después de t años, como

$$ {}_tp_{\overline{x_1,x_2,x_3}} = \mathbb{P}((T(x_1) > t) \cup (T(x_2) > t) \cup (T(x_x) > t)). \tag{2.90} $$

Calcule ${}_tp_{\overline{x_1,x_2,x_3}}$.

b) Encuentre $\mathbb{E}(T(x_1)) = \overset{\circ}{e}_{x_1}$, $\mathbb{E}(T(x^s_1)) = \overset{\circ}{e}_{x^s_1}$. En qué porcentaje se reduce la esperanza de vida de (x^s_1) con respecto a (x_1)?.

c) Suponga que S es una variable aleatoria distribuída Exponencial con parámetro $\mathring{e}_x$ es decir, $\mathbb{P}(S > t) = e^{-t/\mathring{e}_x}$. Encuentre una expresión para

$$\mathbb{P}(T(x) > S).$$

Evalúela utilizando $x = x_1$.

d) Genere una Tabla de Vida con los valores de μ_x . Encuentre ${}_tp_{\overline{x_1,x_2,x_3}}$ con esta Tabla.

6. Asuma una fuerza de mortalidad sub-estándar según el modelo multiplicativo para una vida (x) a quien se le diagnostica cáncer de próstata.

$$\mu_{x^s+t} = \theta(x+t)\mu_{x+t} \tag{2.91}$$

donde la función $\theta(x) > 0$ está indeterminada inicialmente. Considere la fuerza de mortalidad estándar μ_{x+t} dada por la ley de mortalidad Makeham-Beard (MB).

a) Ajuste el modelo MB a la tabla sobrevivientes cáncer de próstata USA 1950-1975.

b) Ajuste el modelo MB a la tabla colombiana 00-05 hombres.

c) Encuentre una estimación no paramétrica para $\theta(x)$ con base en la tabla anterior y ajústele el modelo siguiente:

$$\theta(x) = \sum_{j=0}^{3} a_j x^j \tag{2.92}$$

d) Genere una tabla de sobrevivientes de cáncer de próstata para Colombia utilizando la fuerza de mortalidad estimada con la tabla colombiana 00-05 hombres, multiplicada por el estimador $\widehat{\theta}(x)$ de (2.92)

$$\mu_{x+t}^{co,s} = \widehat{\theta}^{usa}(x+t)\mu_{x+t}^{co} \tag{2.93}$$

Use la función que genera tablas de vida en la librería MortalityLaws a partir de la fuerza de mortalidad sub-estándar estimada.

e) Encuentre para $x = 60$, $\mathbb{E}(T(x^{co,s})) = e_{x^{co,s}}$, $\mathbb{E}(T(x^{usa,s})) = e_{x^{usa,s}}$, usando los modelos MB.

7. Asuma una fuerza de mortalidad sub-estándar según el modelo multiplicativo para una vida (x) que se le diagnostica cáncer de próstata

$$\mu_{x+t}^{s} = e^{\theta(x)}\mu_{x+t}, \tag{2.94}$$

donde la función $\theta(x)0$ está dada para cada edad x por la fórmula

$$\theta(x) = \sum_{j=0}^{3} a_j x^j, \tag{2.95}$$

$$a_0 = 81.67603376, \ a_1 = -2.55346589 \tag{2.96}$$

$$a_2 = 0.02687182, \ a_3 = -0.00009401 \tag{2.97}$$

Denote por $T(x^s)$ su vida media residual. Considere la fuerza de mortalidad estándar μ_{x+t} dada por una ley de mortalidad GM, Siler ó Makeham-Beard (MB).

a) Justifique por qué se cumple que ${}_tp_x^s < {}_tp_x$.

b) Encuentre una expresión para $\mathbb{E}(T(x^s)) = \overset{\circ}{e}_{x^s}$.

c) Suponga $x^s = 56, \ k = 0.1$, en qué porcentaje se reduce la esperanza de vida de (x^s) con respecto a otra vida (x) con la fuerza de mortalidad μ_{x+t}?.

d) Encuentre una expresión para $P(T(x) < T(x^s))$. Evalúela asumiendo $x = 56, \ k = 0.1$ y la Tabla ISS2010 hombres.

8. Suponga que (x) sufre de insuficiencia cardíaca (IC) y su fuerza de mortalidad se modela como una mortalidad multiplicativa sub-estándar, ${}_tp_{x^s} = e^{-kt}{}_tp_x$, con una mortalidad de base con la ley GM. Asuma: $k = 0.01$, $x = 56$ y ley GM para la tabla colombiana de mortalidad de los Asegurados $55/69$:

$$\mu_x = 0.0015 + 10^{-4.222+0.043^x}$$

$${}_tp_x = s^t g^{c^x(c^t-1)}$$

con $s = 0.998501$,$g = 0.999394$, $c = 1.10407$.

Utilice la fórmula (2.76) para encontrar $\mathring{e}_{56}$, $\mathring{e}_{56^s}$, la esperanza de vida de (x) con IC. Y calcule el porcentaje en que se reduce la esperanza de vida en este caso: $\frac{\mathring{e}_{56}-\mathring{e}_{56^s}}{\mathring{e}_{56}}$.

9. En una población los fumadores (F) (más de una cajetilla al día) tienen una fuerza de mortalidad doble que la de los no fumadores (NF). Asuma que la fuerza de mortalidad de los NF es la GM.

   Suponga que (x) y (x^F) son dos vidas independientes e idénticas, la primera NF y la segunda F. Calcule la probabilidad de que la vida residual de (x^F) sea menor que la de (x).

   Dado ${}_tp_x = \left(\frac{1+x}{1+x+t}\right)^3$, $t \geq 0$,

   a) Calcule $\mathring{e}_{41}$

   b) Asumiendo la hipótesis de linealidad (2.23), evalúe la probabilidad de que (41) sobreviva 6 meses.

10. Suponga m vidas todas de edad (x), con características vitales similares. Denote por ${}_tp\frac{[r]}{x(m)}$ la probabilidad de que exactamente r de las m sobrevivan t años. Es una probabilidad binomial. El número de ensayos es m. El "éxito" en cada ensayo es "sobrevivir t años", luego la probabilidad de éxito es ${}_tp_x$. La probabilidad de r éxitos en m ensayos es:

$$ {}_tp\frac{[r]}{x(m)} = \binom{m}{r}({}_tp_x)^r({}_tq_x)^{m-r} $$

   Se tiene un grupo de 30 personas de edad 25. Encuentre la probabilidad de que exactamente 26 sobrevivan 10 años utilizando una de las leyes de mortalidad.

11. En la Tabla siguiente 9.5 aparecen los parámetros Gompertz-Makeham de las Tablas de mortalidad y supervivencia para hombres y mujeres (1959-1965) Bélgica.

   Comparar las probabilidades siguientes con la base técnica Danesa en el Ejemplo2.6.1, utilizando las funciones en la librería R `eha`.

2.10. Notas

Riesgos competitivos

La teoría de riesgos competitivos introdujo una modificación al considerar que la intensidad de mortalidad se podía expresar como una suma de intensidades. Una intensidad para cada causa principal de mortalidad:

$$\mu(x) = \mu_1(x) + \cdots + \mu_k(x)$$

En Seal(1977a) se presenta un esbozo histórico, y en Cox y Oakles(1978), Elandt-Johnson y Johnson(1980) y en Birnbaum(1979) se presenta la teoría desde el punto de vista de la bioestadística, mientras que en Bowers et al. (1986) se presenta la teoría con las aplicaciones actuariales a seguros de vida y pensiones.

CAPÍTULO 3

Tablas de Vida

3.1. Introducción

Las tablas de vida, también denominadas tablas de mortalidad ó tablas de supervivencia, pueden considerarse como estimadores no paramétricos de las probabilidades de fallecimiento q_x, para el rango de edades $x = 1, 2, \ldots, \omega$, donde ω es la edad máxima alcanzable por un ser humano.

Estas probabilidades definen completamente la distribución de la variable $K(x)$, dada por $\mathbb{P}(K(x) = k) = {}_kp_x q_{x+k}$.

Son instrumentos estadísticos que se introdujeron casi un siglo antes de que se inventara la teoría de análisis de supervivencia y la teoría de distribuciones estadísticas, pues la teoría de probabilidades inició a comienzos del siglo XX.

Las tablas de vida se siguen utilizando en la industria del seguro en muchos países, incluída Colombia, en donde se revisan cada cierto número de años y son el instrumento legal para la valoración de pólizas y pensiones. En Ortiz et al. [2012] se hace un recuento de las tablas utilizadas en el país y su proceso de elaboración.

Las tablas de vida que se introducen en este capítulo se denominan tablas de un decremento, en comparación con las tablas de múltiple decremento que se tratarán en un capítulo posterior.

Un objetivo particular de este capítulo es el ajuste de las leyes de mortalidad del capítulo anterior, a varias tablas de vida. Este procedimiento se denomina graduación.

3.2. Funciones biométricas: las funciones que conforman la tabla de vida

Considere $\ell_0 > 0$ recién nacidos, por ejemplo $\ell_0 = 100000$. Defina X_i= duración de la vida del j-ésimo recién nacido y la función indicadora siguiente

$$I(X_i > x) = \begin{cases} 1 & \text{si } X_i > x, \\ 0 & \text{si } X_i \leq x. \end{cases}$$

Defina $L(x) := \sum_{i=1}^{\ell_0} I(X_i > x) = \#\{\text{sobrevivientes a la edad } x \text{ del grupo } \ell_0\}$.

La probabilidad de sobrevivir es $P(X > x) = 1 - P(X \leq x) = 1 - F(x) = \overline{F}(x)$, luego $L(x) \sim Bin(\ell_0, \overline{F}(x))$. Interesa el valor esperado de $L(x)$.

Definición 3.2.1. *Se define ℓ_x como el promedio de sobrevivientes a la edad x de un grupo inicial de ℓ_0 individuos.*

$$\ell_x = \mathbb{E}(L(x)) = \ell_0 \overline{F}(x), \quad x = 0, 1, ..., \omega - 1. \tag{3.1}$$

Con $\ell_\omega = 0$.

Definición 3.2.2. *Se define la variable ${}_nD_x$ como el número de fallecidos entre x y $x + n$, de los ℓ_0 iniciales.*

La probabilidad de fallecer entre estas edades es:

$$P(x < X \leq x+n) = F(x+n) - F(x) = \overline{F}(x) - \overline{F}(x+n),$$

luego ${}_nD_x \sim Bin(\ell_0, \overline{F}(x) - \overline{F}(x+n))$, y su valor esperado es

$${}_nd_x = \mathbb{E}({}_nD_x) = \ell_0(\overline{F}(x) - \overline{F}(x+n)) = \ell_x - \ell_{x+n}. \tag{3.2}$$

Definición 3.2.3. *El número esperado de fallecidos entre x y $x+n$, de un total inicial ℓ_0, se define como*

$${}_nd_x = \ell_x - \ell_{x+n}. \tag{3.3}$$

Para $n = 1, \quad {}_1d_x = d_x = \ell_x - \ell_{x+1}$.

La relación entre ${}_tp_x$, ${}_tq_x$ y con ℓ_{x+n} y ${}_nd_x$ se puede establecer mediante las identidades siguientes.

$${}_tq_x = \frac{{}_td_x}{\ell_x}. \tag{3.4}$$

La comprobación es:

$$\begin{aligned} {}_tq_x &= G(t) = \mathbb{P}(T(x) \leq t) = \mathbb{P}(X \leq x+t | X > x) \\ &= \mathbb{P}(x < X \leq x+t)/\mathbb{P}(X > x) = \frac{F(x+t) - F(x)}{1 - F(x)} \\ &= \frac{\overline{F}(x) - \overline{F}(x+t)}{\overline{F}(x)} = \frac{\ell_x - \ell_{x+t}}{\ell_x} = \frac{{}_td_x}{\ell_x}. \end{aligned}$$

Con tablas de vida las edades son siempre enteras, no fraccionales, luego, colocando $t = n$

$$\begin{aligned} {}_nq_x &= \frac{{}_nd_x}{\ell_x} = 1 - \frac{\ell_{x+n}}{\ell_x}, \\ {}_np_x &= \frac{\ell_{x+n}}{\ell_x}. \end{aligned}$$

Además, utilizando la identidad ${}_tp_x = e^{-\int_0^t \mu_{x+s} ds}$ (ver (2.28), pag.29)

$$\ell_{x+n} = \ell_x e^{-\int_0^n \mu_{x+s} ds}, \tag{3.5}$$

$$\ell_x = \ell_0 e^{-\int_0^x \mu_s ds}. \tag{3.6}$$

3.3. Funciones adicionales de la Tabla de Vida

Definición 3.3.1. *Si T es una variable aleatoria positiva con función densidad de probabilidad g, se define la probabilidad condicional:*

$$E(T|T \leq a) = \frac{\int_0^a tg(t)dt}{\mathbb{P}(T \leq a)} = \frac{\int_0^a tg(t)dt}{\int_0^a g(t)dt}. \tag{3.7}$$

Definición 3.3.2. *La fracción del último año de vida para (x) se define como*

$$a_x = E(T(x)|T(x) \leq 1). \tag{3.8}$$

Cada uno de los que fallecen entre x y $x+1$ viven una fracción de año. La media de esas fracciones es a_x.

Aplicando (3.7), con $g(t) = {}_tp_x\mu_{x+t}$ la función densidad de $T(x)$ y $P(T(x) \leq 1) = q_x$ entonces $q_x = \int_0^1 {}_sp_x\mu_{x+s}ds$, luego

$$a_x = \frac{\int_0^1 t_tp_x\mu_{x+t}dt}{\int_0^1 {}_tp_x\mu_{x+t}dt}, \tag{3.9}$$

(ver [Chiang, 1984, pag. 117]), y por tanto $0 < a_x \leq 1$. Si se asume la hipótesis de linealidad (2.31) ver pag.31: ${}_tp_x\mu_{x+t} \equiv q_x$ para $0 \leq t \leq 1$, entonces

$$a_x = \frac{\int_0^1 t\, q_x dx}{q_x} = \frac{1}{2}. \tag{3.10}$$

Ejemplo 3.3.1. *Suponga la ley de mortalidad de DeMoivre: ${}_tp_x = \frac{110-x-t}{110-x}$. Calcule a_x.*

Solución. *Se tiene por definición*

$${}_tp_x\mu_{x+t} = \left(1 - \frac{t}{110-x}\right)\left(\frac{1}{110-x-t}\right) = \frac{1}{110-x}$$

$$\therefore \int_0^1 t_tp_x\mu_{x+t}dt = \int_0^1 \frac{t}{110-x}dt = \frac{1}{2(110-x)}.$$

Como

$$\int_0^1 {}_tp_x q_{x+t} dt = \int_0^1 \left(1 - \frac{t}{110-x}\right)\left(\frac{1}{110-x-t}\right) dt = \frac{1}{110-x},$$

entonces

$$a_x = \frac{\int_0^1 t_tp_x\mu_{x+t}dt}{\int_0^1 {}_tp_x\mu_{x+t}dt} = \frac{1}{2}.$$

Ejercicio 3.3.1. *Suponga* ${}_tp_x = \left(\frac{x+1}{x+t+1}\right)^3, t \geq 0$. *Calcule* a_x.

Definición 3.3.3. *Se define la variable* L_x *como el total esperado de años vividos por todos los supervivientes del grupo* ℓ_0 *en el intervalo* $(x, x+1]$, *como*

$$L_x = d_x a_x + \ell_{x+1}, \tag{3.11}$$

ya que los supervivientes ℓ_{x+1} *contribuyen cada uno con 1 año a* L_x *y los que fallecen,* d_x, *contribuyen cada uno con un promedio* a_x. *Es claro que debe ser* $L_\omega = 0$.

La siguiente identidad, equivalente a (3.11), es útil para calcular esta función.

$$L_x = \int_0^1 \ell_{x+t} dt \tag{3.12}$$

Demostración. Primero se observa que

$$\begin{aligned}
L_x &= d_x a_x + \ell_{x+1} = \ell_x q_x a_x + \ell_{x+1} \\
&= \ell_x q_x \left(\frac{\int_0^1 t_tp_x\mu_{x+t}dt}{q_x}\right) + \ell_{x+1} \\
&= \ell_x \int_0^1 t_tp_x\mu_{x+t}dt + \ell_{x+1}
\end{aligned}$$

luego se desarrolla

$$\int_0^1 t_tp_x\mu_{x+t}dt = \int_0^1 td({}_tq_x)$$

$$= t.{}_tq_x|_0^1 - \int_0^1 {}_tq_x dt = q_x - \int_0^1 {}_tq_x dt =$$
$$q_x - 1 + \int_0^1 {}_tp_x dt = -p_x + \int_0^1 {}_tp_x dt,$$

reemplazando

$$= -\ell_x p_x + \ell_x \int_0^1 {}_tp_x dt + \ell_{x+1} = \int_0^1 \ell_{x+t} dt,$$

utilizando $\ell_{x+1} = p_x \ell_x$. $\square$

Otras identidades: de $L_x = d_x a_x + \ell_{x+1}$ se obtiene

$$a_x = \frac{L_x - \ell_{x+1}}{d_x} = \frac{L_x - \ell_{x+1}}{\ell_x - \ell_{x+1}}, \tag{3.13a}$$

$$L_x = a_x \ell_x + (1 - a_x)\ell_{x+1}, \tag{3.13b}$$

$$L_x = \frac{\ell_x + \ell_{x+1}}{2}, \quad \text{con la hipótesis de linealidad, usando } a_x = 1/2. \tag{3.13c}$$

Definición 3.3.4. *La variable T_x se define como el número total esperado de años que vivirán a partir de la edad x los sobrevivientes de esta edad, hasta fallecer todos.*

$$T_x = \ell_x \mathring{e}_x. \tag{3.14}$$

Nota: el símbolo T_x es diferente de $T(x)$. Como $\mathring{e}_x = \int_0^{\omega-x} {}_tp_x dt$, entonces

$$T_x = \int_0^{\omega-x} \ell_{x+t} dt. \tag{3.15}$$

Esta integral se puede descomponer de la forma siguiente:

$$T_x = \int_0^1 \ell_{x+t} dt + \int_1^2 \ell_{x+t} dt + \ldots + \int_{\omega-x-1}^{\omega-x} \ell_{x+t} dt$$
$$= \int_0^1 \ell_{x+t} dt + \int_0^1 \ell_{x+1+t}\, dt + \ldots + \int_0^1 \ell_{\omega-1+t}\, dt$$

de donde

$$T_x = L_x + L_{x+1} + ... + L_{\omega-1}. \tag{3.16}$$

Ejemplo 3.3.2. *Suponga que en una tabla se tiene* $\ell_{80} = 38153$*, y*

$$\begin{aligned} T_{80} &= L_{80} + L_{81} + ... + L_{85} \\ &= 36743 + ... + 1477111 = 301509, \end{aligned}$$

entonces $\mathring{e}_{80} = \frac{T_{80}}{\ell_{80}} = \frac{301509}{38153} = 7.90.$

Ejemplo 3.3.3. *El siguiente es un Ejemplo de cálculo de todas las funciones de la tabla de vida. Los valores de* ℓ_x *se asumen dados en el contexto del Ejemplo.*

1. Probabilidad de (30) sobreviva 10 años.

$$_{10}p_{30} = \frac{\ell_{30+10}}{\ell_{30}} = \frac{93703}{95529} = 0.9808.$$

2. Probabilidad de (30) fallecer antes de cumplir 50

$$_{20}q_{30} = 1 - {}_{20}p_{30} = 1 - \frac{\ell_{30+20}}{\ell_{30}} = 1 - \frac{89668}{95529} = 0.0613$$

3. Probabilidad de (30) fallecer entre las edades de 40 y 50

$$\begin{aligned} {}_{20}q_{30} - {}_{10}q_{30} = {}_{10|20}q_{30} = {}_{10}p_{30}\,{}_{10}q_{40} &= \frac{\ell_{40}}{\ell_{30}}\left(1 - \frac{\ell_{50}}{\ell_{40}}\right) \\ = \frac{\ell_{40}}{\ell_{30}} - \frac{\ell_{50}}{\ell_{30}} = \frac{\ell_{40} - \ell_{50}}{\ell_{30}} = \frac{93703 - 89668}{95529} &= 0.042238 \end{aligned}$$

4. Hipótesis de linealidad: $_tq_x = t(q_x)$, para todo $t \in (0,1) \Rightarrow L_x = \frac{\ell_x + \ell_{x+1}}{2}$

$$L_{30} = d_{30}a_{30} + \ell_{31} = \frac{\ell_{30} + \ell_{31}}{2} = \frac{95529 + 95385}{2}$$

5. $T(30) = L_{30} + L_{31} + ... + L_{85} = 4'274.287$

$$\therefore\ e_{30} = T(30)/\ell_{30} = \frac{4'274.287}{95529} = 44.74$$

6. Fórmulas para aproximar la fuerza de mortalidad con datos de la Tabla de Vida. Ejemplo con $x = 30$ y datos anteriores.

$$\mu_x \approx \frac{q_x}{1 - \frac{q_x}{2}} = 0.0015111 \tag{3.17a}$$

$$\mu_x \approx \frac{\ell_{x-1} - \ell_{x+1}}{2\ell_x} = \frac{95673 - 95385}{95529} = 0.001507 \tag{3.17b}$$

$$\mu_x \approx \frac{8(\ell_{x-1} - \ell_{x+1}) - (\ell_{x-2} - \ell_{x+2})}{12\ell_x} = 0.001507 \tag{3.17c}$$

3.4. Nota sobre la construcción de una tabla de vida

En resumen, las funciones biométricas (de la tabla de vida) son:

$x, \quad \ell_x, \quad d_x, \quad q_x, \quad L_x, \quad T_x, \quad e_x, \quad \mu_x, \quad a_x,$ para $x = 0, 1..., w.$

Las condiciones finales en $x = \omega$ son:

$\ell_{w+1} = 0, \quad d_w = \ell_w,$

si $a_x = \frac{1}{2}, \quad L_w = \ell_w/2, \quad T_w = L_w, \quad e_x = \frac{1}{2}.$

Construcción de una tabla de vida:

1. Se observa ℓ_x por ejemplo para $x = 15, \ldots, 100.$
2. se calcula usando $a_x = \frac{1}{2}, \quad L_x = \frac{\ell_x + \ell_{x+1}}{2},$
3. se calcular $m_x = \frac{2(\ell_x - \ell_{x+1})}{\ell_x + \ell_{x+1}},$
4. luego se calcula $q_x = \frac{2m_x}{2+m_x},$
5. luego T_x y
6. $\overset{\circ}{e}_x = \frac{T_x}{\ell_x}$

La terminación de la tabla de vida consiste en aplicar una regla para que se cumpla $q_\omega = 1.0$. Es importante que la última edad tenga ese valor porque los cálculos de anualidades y seguros requieren terminar los pagos en esa edad. En Hustead [2005] se presentan seis alternativas. Solamente presentamos dos.

1. Forzar la probabilidad $q_\omega = 1.0$ sin modificar las demás, generando una discontinuidad.
2. Escoger una edad avanzada anterior a ω y generar una tendencia suave desde esa edad hasta alcanzar el valor 1.0 en ω.

3.5. Tablas de vida con R

Bases de datos de Tablas de Vida

Un sitio que permite descargar tablas de vida de 38 países, para varios años, es el Human Mortality Database University of California, Berkeley (USA), y Max Planck Institute for Demographic Research (Germany). Dirección url: `www.mortality.org` ó `www.humanmortality.de`.

Hay datos sobre mortalidad por países en los sitios:
Human Fertility Database: `www.humanfertility.org`,
Latin American Human Mortality Database: `www.lamortalidad.org`
The Information System of the Federal Health Monitoring: `www.gbe-bund.de`.

Librería lifeContingencies

En esta sección se muestra un ejemplo con la librería `lifeContingencies`, ver Spedicato [2013], que permite calcular las funciones básicas de las tablas de vida. Además, contiene varias tablas de vida como las Tablas Reino Unido, hombres y mujeres asegurados permanentes, selectas a 2 años, 1992. Y la Tabla de la SOA del texto Bowers et al. [1997].

Ejemplo 3.5.1. *Considere la tabla ISS /80-89. Para los casos de las tabla de hombres TVH, y mujeres TVM, calcular las cantidades*

i) ℓ_{54}, ℓ_{66},

ii) ${}_{12}d_{54} = \ell_{54} - \ell_{66}$,

iii) ${}_{12}d_{54}/\ell_{54} = {}_{12}q_{54}$,

iv) e_{66}, e_{54}.

utilizando la librería `lifecontingencies`.

Solución El archivo se carga en R mediante las instrucciones

```
library("lifecontingencies")
archivo1 = "tablas.80.89.dat"
archivo2 = "tablas.05.08.dat"
D = read.table(archivo1,header=T)
head(D)
   y     ly dy        qy   ey  x     lx dx        qx   ex
1 15 100000 30 0.0003000 62.8 15 100000 30 0.0003000 61.3
2 16  99970 34 0.0003401 61.8 16  99970 35 0.0003501 60.3
3 17  99936 39 0.0003902 60.8 17  99935 40 0.0004003 59.3
```

La convención, para esta tabla, es que la letra “y” denota hombre, y la “x” mujer. Se utilizan las siguientes instrucciones en R para generar las tablas de hombres y las de mujeres.

```
TVH <- new("lifetable", x=D$y, lx=D$ly,
name="tablas.80.89,hombres")

TVM <- new("lifetable", x=D$x, lx=D$lx,
name="tablas.80.89,mujeres")
#--- las funciones x, lx  se calculan restando 14
```

```
TVM@x[54-14]

ly54 = TVH@lx[54-14]
lx54 = TVM@lx[54-14]

ly66 = TVH@lx[66-14]
lx66 = TVM@lx[66-14]

#------numero de fallecidos entre 54 y 66=54+12 años
(dy5412 = dxt(TVH, 54,12))
(ly54-ly66) #--comprobacion

(dx5412 = dxt(TVM, 54,12))

#------probabilidades de fallecer
(qy5412 = qxt(TVH,54,12))
(qx5412 = qxt(TVM,54,12))

#------esperanzas de vida abreviadas
(ey54 = exn(TVH, TVH@x[54-14],type="curtate"))
(ex54 = exn(TVM, 54,type="curtate"))

#------resumen
M=rbind(c(ly54,lx54),c(ly66,lx66),c(dy5412,dx5412),
c(py5412,px5412),c(ey54,ex54))
colnames(M)=c("hombres","mujeres")
rownames(M)=c("l_54","l_66","12_d_54","12_p_54","e_54")
print(M,scipen=0,digits=3)
      hombres   mujeres
l_54     93413   92844
l_66     82388   79187
12_d_54 11025    13657
12_p_54 0.882    0.853
e_54   25.238  23.783
```

Ejemplo 3.5.2. *Con la librería* `lifecontingencies` *se puede generar una tabla de vida a partir de los valores de q_x ó de p_x, contenidos en un vector. Este vector se puede generar con la función $_tp_x$ colocando $t = 1$, con los diferentes modelos para las leyes de mortalidad. A continuación se muestran instrucciones con la ley Makeham-Beard.*

```
#---------generar tablas de vida con base
#         en la fuerza de mortalidad estimada
require(lifecontingencies)

x = seq(0,109)
probs = tpx.mb(1,x,pars)

D = probs2lifetable(probs, radix = 100000,
type = "px", name = "TablaVida1")
head(D)
tail(D)
TVH <- new("lifetable", x=D@x, lx=D@lx,
name="tablas.MB")
#-------como empieza en 0
#       una edad x hay que colocarla x+1
ly54 = TVH@lx[55]
ly66 = TVH@lx[67]
#------numero de fallecidos entre 54 y 66=54+12 años
(dy5412 = dxt(TVH, 54,12))
(ly54-ly66)
#------probabilidades de fallecer
(qxt = qxt(TVH,x=54,t=12))
(pxt = pxt(TVH,x=30,t=10))
#------hipotesis lineal
pxt(TVH,90,.5,"linear")
#------esperanza de vida
exn(object=TVH, x=51,type="complete")
```

3.6. Ajuste de tablas de vida con modelos paramétricos

La estimación inicial de una Tabla de Vida se realiza mediante un ajuste de las tasas observadas (brutas), con base en datos de experiencias de mortalidad de asegurados en varias compañías de seguros ó con datos de experiencia de rentistas.

Un resumen de los procedimientos para la elaboración de las Tablas Colombianas de Vida está en Ortiz et al. [2012].

Este ajuste utiliza procedimientos de suavizamiento para obtener tasas monótonas ya que las tasa brutas pueden presentar variaciones de una edad a otra. Los métodos de ajuste de las tasas brutas de supervivencia se denominan métodos de graduación. Pero no se desarrollarán en este texto.

En cambio, se procederá a ajustar los modelos paramétricos de las secciones §2.6 y §2.7, a una tabla de vida; por ejemplo, ajustar los modelos Perks 1,2, Gompertz-Makeham, Siler, ó Makeham-Beard. Algunos de los métodos utilizados: método de momentos y método de mínimos cuadrados no lineales ó regresión no lineal, que se exponen a continuación.

3.7. Estimación por regresión no lineal

Suponga que $f(x, \underline{\theta})$ denota un modelo paramétrico para la función de fuerza de mortalidad μ_x, la tasa de mortalidad q_x ó la razón de disparidad q_x/p_x, según una de las distribuciones de supervivencia en las secciones §2.6, y §2.7, pag. 42.

En cada caso se busca estimar los parámetros $\underline{\theta} \in \mathbb{R}^k$ mediante mínimos cuadrados no lineales ponderados; lo que significa que se trata de encontrar el vector $\underline{\theta}$ que minimiza la función, para el caso de la fuerza de mortalidad,

$$G(\underline{\theta}) = \frac{1}{2}\sum_{x=1}^{\omega-1} \omega_x (f(x, \underline{\theta}) - \mu_{x+\frac{1}{2}})^2, \tag{3.18}$$

donde $\omega_x \geq 0$ son pesos predeterminados, que pueden ser $\omega_x \equiv 1$. El valor $\mu_{x+\frac{1}{2}}$ se toma como en (3.17c): $q_x/(1 - q_x/2)$, y las q_x se leen de la tabla de vida respectiva. El vector que minimiza (3.18) se representa como

$$\underline{\theta}^* = \underset{\underline{\theta} \in \mathbb{R}^k}{\operatorname{argmin}}\, G(\underline{\theta}) \tag{3.19}$$

El problema de minimizar (3.18) es equivalente a estimar la regresión no lineal

$$q_x/(1 - q_x/2) = f(x, \underline{\theta}) + \epsilon_x, \tag{3.20}$$

para $x = 15, \ldots, 110$, y ϵ_x es una variable aleatoria iid de media cero y varianza positiva. En el caso de mínimos cuadrados lineales, cuando $f(x, \underline{\theta}) = a + bx$, el mínimo siempre existe y se puede calcular mediante una fórmula. Pero en el caso de mínimos cuadrados no lineales es difícil asegurar la existencia del mínimo global. Hay casos en los que se puede mostrar que no existe.

Un método de optimización recomendado para el caso de mínimos cuadrados no lineales es Levenberg-Marquardt, implementado en R en la librería `minpack.lm`. Adicionalmente, en R existe la función `nls()`, que utiliza el algoritmo Gauss-Newton (y otros opcionales) y la librería `nls2`. Una referencia útil para regresión no lineal con R es Ritz and Streibig [2008].

Varios de los métodos de optimización que se utilizan para encontrar $\underline{\theta}^*$ requieren un valor inicial $\underline{\theta}_0$, que esté lo más próximo posible al mínimo global. El mensaje de error de `nls()`: "singular gradient matrix at initial parameter estimates", muestra que las soluciones son sensibles a la escogencia de estos valores.

Caso de la distribución Gompertz-Makeham

Se considera un modelo no lineal en la edad, para la fuerza de mortalidad

$$f(x_j, \underline{\theta}) = a + bc^{x_j},\ j = 1, \ldots, \omega - 1, \tag{3.21}$$

donde $\underline{\theta} = (a, b, c)'$, y en el cual la fuerza de mortalidad se estima con base en (3.17c), pag. 72:

$$\mu_{x+\frac{1}{2}} \approx \frac{q_x}{1 - \frac{1}{2}q_x},$$

de tal forma que se busca minimizar el funcional

$$G(a, b, c) = \frac{1}{2}\sum_{x=1}^{\omega-1} \omega_x (a + bc^x - \mu_{x+\frac{1}{2}})^2. \tag{3.22}$$

Los parámetros a, b, c se restringen a la región: $a > 0, a+b > 0, c > 1$. Unos rangos factibles para los parámetros son:

$$
\begin{aligned}
0.001 < a < 0.005, \\
10^{-6} < b < 10^{-3}, \\
1.08 < c < 1.12.
\end{aligned}
$$

Ejemplo 3.7.1. *Con base en la Tabla colombiana de mortalidad de Rentistas, Experiencia* $1980-1989$*, para hombres y mujeres (Tabla: Resolución* $N°058511/11$ *de abril 1994 de la Superintendencia Bancaria de Colombia).*

Se estimaron los parámetros de la distribución Gompertz-Makeham, para hombres utilizando el siguiente programa en R. La estimación, mediante el método Levenberg-Marquardt, se implementó en R mediante las instrucciones siguientes.

Los resultados están en la Tabla 3.1.

Lectura de datos, cálculo de la tasa central de mortalidad

```
#----------estimacion Gompertz-Makeham,
#          tablas ISS80-89, hombres
archivo1 = "tablas.80.89.dat"
D = read.table(archivo1,header=T,stringsAsFactors=FALSE)
attach(D)
#----------y = h  x = m
my = qy/(1-qy/2)
```

Definir la fuerza de mortalidad y la función de residuos

```
#--------------------mux para GM
mu.y <-function(theta,x)
with(as.list(theta),
ifelse(x==0, a+b,a+b*c^x))
#--------------------funcion residuos
G <- function(theta, my,x)
(mu.y(theta,x)/my-1)
```

Estimación con mínimos cuadrados no lineales

```
library(minpack.lm)
#--------------------valores iniciales
theta_0 = c(a=0.004115, b=0.0001419, c=1.0827)
#--------------------estimacion LM
nls.out <- nls.lm(par=theta_0,
fn = G,
Observed = my,
x = y,
control = nls.lm.control(nprint=0,
ftol = .Machine$double.eps,
ptol = .Machine$double.eps,
maxfev=10000, maxiter = 1000))
```

Tabla de parámetros estimados

```
## summary information on parameter estimates
B=as.matrix(summary(nls.out)$coefficients,3,4,byrow=TRUE)
require(xtable)
print(xtable(B,digits=6))
```

	Estimate	Std. Error	t value	Pr(>|t|)
a	0.000196	0.000014	14.421501	0.000000
b	0.000044	0.000002	27.939605	0.000000
c	1.095914	0.000501	2187.406766	0.000000

Cuadro 3.1: Parámetros Gompertz-Makeham para Tablas de Vida 89-90 Colombia hombres

Presentación gráfica del ajuste

```
#--------------------grafica
library(ggplot2)
d = data.frame(edad = y[61:96],qx=qy[61:96])
```

```
g1 = ggplot(d,aes(edad,qx))+geom_point()
dPred <- with(d,rbind(data.frame(
edad,qx=qy.e[61:96],w="nls")))
g1 + geom_line(data=dPred,aes(colour=w),lwd=2)
```

Caso de la distribución Heligman-Pollard

La estimación se hace utilizando la segunda ley de mortalidad de Heligman-Pollard, definida en (2.60) como

$$q_x = A^{(x+B)^C} + De^{-E(\ln(x/F))^2} + \frac{GH^x}{1+GH^x}.$$

Los siguientes pasos programan la estimación con mínimos cuadrados no lineales, utilizando el método LM, en R.

Definir la fuerza de mortalidad y la función de residuos

```
#--------------------qx por HP
HP8 <-function(theta,x)
with(as.list(theta),
ifelse(x==0, a^((x+b)^c) + g*h^x,
a^((x+b)^c) + d*exp(-e*(log(x/f))^2)
+ g*h^x/(1+g*h^x)))
#--------------------funcion residuos
G <- function(theta,qy,x)
(HP8(theta,x)/qy-1)
```

Estimación con mínimos cuadrados no lineales

```
library(minpack.lm)
#--------------------valores iniciales
theta_0 <- c(
a=0.0005893,b=0.0043836,c=0.0828424,
```

```
d=0.000706,e=9.927863,f=22.197312,
g=0.00004948,h=1.10003)

theta_0["a"] <- theta_0["a"]+3e-4

#--------------------estimacion LM
nls.out <- nls.lm(par=theta_0,
fn = G,
Observed = qy,
x = y,
control = nls.lm.control(nprint=0,
ftol = .Machine$double.eps,
ptol = .Machine$double.eps,
maxfev=10000, maxiter = 1000))

parNLS <- coef(nls.out)
```

Tabla de parámetros estimados

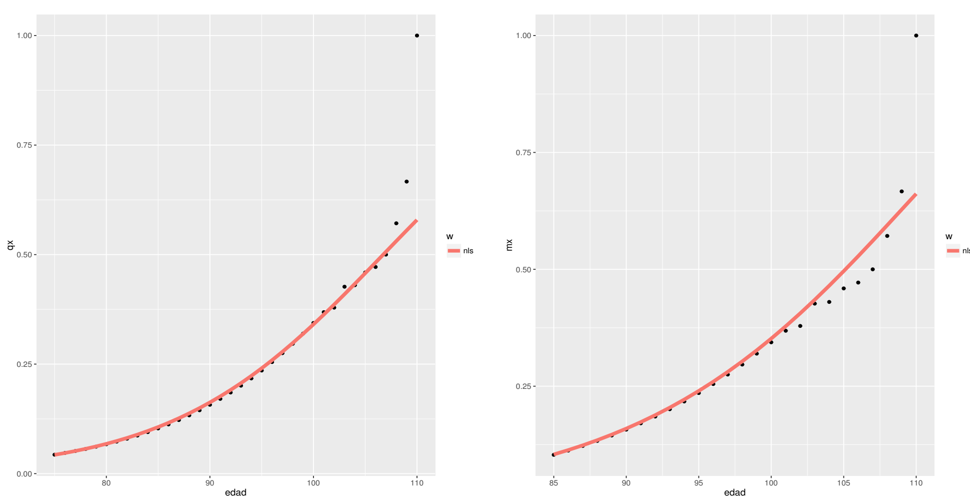
```
## summary information on parameter estimates
summary(nls.out)
Error in chol.default(object$hessian) :
  la submatriz de orden 1 no es definida positiva
```

La inversa de la matriz Hessiana se puede identificar como la matriz de varianzas y covarianzas de los parámetros estimados. En caso de no ser definida positiva (es decir, no ser invertible), no pueden calcularse los estadísticos t-Student para las pruebas de significación de los parámetros. Pero es posible todavía obtener un conjunto de parámetros estimados.

```
> parNLS
           a            b            c            d
4.010841e-11 4.213190e+01 7.497971e-02 3.992063e-04
           e            f            g            h
1.032058e+00 3.522647e+01 2.871201e-05 1.102935e+00
```

Presentación gráfica del ajuste

```
#--------------------grafica
library(ggplot2)
d = data.frame(edad = y[61:96],qx=qy[61:96])
g1 = ggplot(d,aes(edad,qx))+geom_point()
dPred <- with(d,rbind(data.frame(
edad,qx=qy.e[61:96],w="nls")))
g1 + geom_line(data=dPred,aes(colour=w),lwd=2)
```



(a) Heligman-Pollard-2 (b) Gompertz-Makeham

Figura 3.1: Ajustes versus q_x y x, Tabla Colombiana de Mortalidad 1980-1989

Utilizando la librería `HPbayes`, ver Sharrow [2012], se puede realizar una estimación Bayesiana del modelo HP.

3.8. Estimación con la librería MortalityLaws

La librería `MortalityLaws` tiene implementada la regresión no lineal de manera más eficiente para el usuario. Los criterios de optimización no son solamente mínimos cuadrados ponderados sino 8 opciones.

```
require(MortalityLaws)
availableLF()

Loss functions available in the package:
 LOSS FUNCTION                                  CODE
 L = -[Dx * log(mu) - mu*Ex]                    poissonL
 L = -[Dx * log(1 - exp(-mu)) - (Ex - Dx)*mu]   binomialL
 L =  [1 - mu/ov]^2                             LF1
 L =  log[mu/ov]^2                              LF2
 L =  [(ov - mu)^2]/ov                          LF3
 L =  [ov - mu]^2                               LF4
 L =  [ov - mu] * log[ov/mu]                    LF5
 L =  abs(ov - mu)                              LF6

Leyes disponibles...
availableLaws()
```

Un ejemplo concreto de ajuste de Tablas de Vida

```
#-----------cargar la tabla de vida
archivo1 = "tablas.80.89.dat"
D = read.table(archivo4,header=T,stringsAsFactors=FALSE)
attach(D) #y = h  x = m

#------------------------------
my = qy/(1-qy/2)

#-------parametros utilizados para la GM
# mu[x] = A exp[Bx] + C

#----------opcional: se puede usar la GM original
my_gm <- function(x, par = c(
a1=3.527834e-04 ,
a2= 9.757761e-05 ,
a3= 1.091264e+00)){
```

```
  hx  <- with(as.list(par), a1+a2*a3^x )
  return(as.list(environment()))
}
#------------------------------
Mgm = MortalityLaw(x   = y,
                   mx  = my,
#                  custom.law = my_gm,
                   law = 'makeham',
                   opt.method = 'LF6')

pars =  Mgm$coefficients
my.e = Mgm$fitted.values
#--------------------resumen de la estimacion
sobj = summary(Mgm)
print(sobj, digits = max(3L,
getOption("digits")),
signif.stars = getOption("show.signif.stars"))
#--------------------grafica
require(ggplot2)

D1 <- data.frame(edad = y[31:95],mx=my[31:95])
D2 <- with(D1,rbind(data.frame(
edad,mx=my.e[31:95],w="nls")))

ggplot(D1,aes(edad,mx))+geom_point()+
geom_line(data=D2,aes(colour=w),lwd=2)

#--------------------Tabla Vida con la estimacion Makeham-Beard

require(lifecontingencies)
tabla.perks = LifeTable(y, mx = my.e)$lt
head(tabla.perks)
tail(tabla.perks)
plot(tabla.perks$x,tabla.perks$qx,type='b')
```

3.9. Método King-Hardy

El método de King-Hardy (por G. King y G.F. Hardy) para la estimación de la distribución Gompertz-Makeham fué introducido en 1887 ([1]). Consiste en tomar una edad x_0 arbitraria y $k \geq 1$ un período de años arbitrario, tal que $x_0 + 3k \leq \omega$. Los valores $\mu_{x+\frac{1}{2}}$ se estiman usando (3.17a) con los valores de la tabla de Vida q_x:

$$m_x := \widehat{\mu}_{x+\frac{1}{2}} = \frac{q_x}{1 - \frac{1}{2}q_x}. \tag{3.23}$$

Note que también se cumple

$$p_x = e^{-\int_0^1 \mu_{x+s} ds} \approx e^{-\mu_{x+\frac{1}{2}}},$$

luego se puede definir otro estimador $m_x^* := \widehat{\mu}_{x+\frac{1}{2}} = -\log(p_x)$. Resultan idénticos $m_x = m_x^*$. Calculando las cantidades

$$G_1 = -\log({}_k\widehat{p}_{x_0}) = \sum_{x=x_0}^{x_0+k-1} m_x$$

$$G_2 = -\log({}_k\widehat{p}_{x_0+k}) = \sum_{x=x_0+k}^{x_0+2k-1} m_x$$

$$G_3 = -\log({}_k\widehat{p}_{x_0+2k}) = \sum_{x=x_0+2k}^{x_0+3k-1} m_x$$

se resuelve el sistema no lineal 3x3

$$\sum_{x=x_0}^{x_0+k-1} a + bc^x = -\log({}_kp_{x_0}) = G_1$$

[1] King, G.: Institute of Actuaries Text Book. Part II. Life Contingencies. Layton, London 1887

$$\sum_{x=x_0+k}^{x_0+2k-1} a + bc^x = -\log({}_kp_{x_0+k}) = G_2$$
$$\sum_{x=x_0+2k}^{x_0+3k-1} a + bc^x = -\log({}_kp_{x_0+2k}) = G_3$$

la solución está dada por

$$c = \left(\frac{G_3 - G_2}{G_2 - G_1}\right)^{1/k} \tag{3.24a}$$
$$b = \frac{(c-1)(G_2 - G_1)}{c^{x_0}(c^k - 1)^2} \tag{3.24b}$$
$$a = \frac{1}{k}\left(G_1 - \frac{G_2 - G_1}{c^k - 1}\right). \tag{3.24c}$$

Los estimadores de KH se pueden utilizar como valores iniciales en la estimación por mínimos cuadrados no lineales. El siguiente programa implementa el método KH en R.

```
#-------------metodo King-Hardy
# escoger tres edades: 40 70 90
my = qy/(1-qy/2)
xi = c(40,70,90)
b0 = double(3)
fi = double(3)
fi[1] = my[which(y==40)]
fi[2] = my[which(y==60)]
fi[3] = my[which(y==80)]
b0[1] = fi[1]+(fi[1]-fi[2])^2/(fi[3]+2*fi[2]+fi[1])
b0[2] = ((fi[2]-fi[1])/(fi[3]-fi[2]))^(2*xi[1]/(xi[3]-xi[1]))*
(fi[1]-fi[2])^2/(fi[3]+2*fi[2]+fi[1])
b0[3] = 2*log((fi[3]-fi[2])/(fi[2]-fi[1]))/(fi[3]-fi[1])
names(b0) = c("a1","b1","c1")
(b0)
```

3.10. Problemas

1. Calcule las siguientes cantidades, asumiendo la hipótesis de linealidad (2.23):

    a) $P(T(35) \leq 15|T(35) \geq 5)$

    b) $P(K(35) > 17|K(35) > 5)$

    c) $E(T(35)|K(35) = 3)$

2. Con base en las tablas de vida calcule lo siguiente y compare.

    a) La probabilidad de que (18) sobreviva la edad 65.

    b) La probabilidad de que (25) fallezca entre las edades 40 y 45.

    c) La probabilidad de que (30) fallezca antes de la edad 60.

    d) ${}_{\frac{3}{4}}p_{30}$.

3.11. Soluciones

1. *a*)

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}(T(35) \leq 15|T(35) > 5) = \mathbb{P}(5 < T(35) \leq 15)/\mathbb{P}(T(35) > 5) \\
&= ({}_{15}q_{35} - {}_{5}q_{35})/{}_{5}p_{35} = {}_{15}q_{40}\,{}_{5}p_{35}/{}_{5}p_{35} \\
&= {}_{15}q_{40}.
\end{aligned}$$

   b)

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}(K(35) \geq 17|K(35) \geq 3) = \mathbb{P}(K(35) \geq 17)/\mathbb{P}(K(35) \geq 3) \\
&= {}_{17}p_{35}/{}_{3}p_{35}
\end{aligned}$$

   c)

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}(T(35)|K(35) = 3) = \mathbb{E}(K(35) + S(35)|K(35) = 3) \\
&= \mathbb{E}(3 + S(35)|K(35) = 3) = 3 + \mathbb{E}(S(35)|K(35) = 3) \\
&= 3 + \mathbb{E}(S(35)) = 3 + 0.5 = 3.5
\end{aligned}$$

2. *a*) ${}_{47}p_{18} = l_{18+47}/l_{18} = l_{65}/l_{18}$.

   b) ${}_{15}p_{25}\,{}_{5}q_{40} = (l_{40}/l_{25})(1 - l_{45}/l_{40}) = (l_{40} - l_{45})/l_{25}$.

   c) ${}_{30}q_{30} = 1 - l_{60}/l_{30}$.

   d) Utilizando la hipótesis de linealidad ${}_{\frac{3}{4}}p_{30} = 1 - (\frac{3}{4})q_{30}$.

CAPÍTULO 4

Anualidades Ciertas

4.1. Definiciones básicas de matemática financiera

Este capítulo introduce conceptos básicos de matemática financiera. Una referencia utilizada es el libro de Gomez Ceballos [1985], en el cual se exponen los sistemas de amortización de créditos hipotecarios vigentes hasta 1985 en el país, utilizados por las principales entidades de crédito de vivienda. También se consultaron los libros de Moore [1945] y Lobez Urquia [1959], que se desarrollan con mucho detalle las fórmulas de la matemática financiera.

Flujo de caja

Un concepto de flujo de caja permite cuantificar la evolución de una inversión en el tiempo. Muestra también que una inversión es un contrato entre dos partes. Una de éstas es quién ofrece la tasa de inversión a través del sistema financiero (denominado también "vehículo"). Y la otra es el inversionista.

El flujo de caja es permite introducir los riesgos asociados a las inversiones, según sea el emisor ó el inversionista.

Una inversión de capital se realiza a través de algún intermediario del mercado financiero: un CDT (Certificado de depósito a término), una cuenta de ahorros, un fondo de inversión, una fiducia, un bono, ó incluso, un crédito bancario.

Las variables que definen un flujo de caja son:

- i: la tasa de rendimiento que ofrece el sistema
- m: la frecuencia de la capitalización
- $[0, T]$: el intervalo de tiempo de la inversión
- C: el capital inicial invertido
- r: la tasa de ahorro
- $-r$: la tasa de consumo

La tasa de rendimiento

Las tasas de rendimiento son cantidades que permiten cuantificar la apreciación del capital en un período de tiempo. Se pueden dividir en dos tipos: tasas constantes y tasas variables.

Tasa constante: se asume $i \in (0, 1)$, durante el intervalo de tiempo de la inversión. En este caso se denominan tasas de interés.

A su vez se dividen en: tasas activas (de colocación) y pasivas (de captación). Las tasas activas corresponden a créditos y las pasivas a ahorros. Las tasas constantes pueden cambiar su valor por efecto de las disposiciones del Banco de la República. Un indicador que muestra la evolución en el tiempo de las tasas de captación es la DTF.

Ejemplo 4.1.1. *Los datos a continuación están tomados de la página web de la Superfinanciera de Colombia, ([1]), en la sección de Informes y Cifras, para Establecimientos de Crédito, y para las Tasas de captación por plazos y monto, a 90 días, para diciembre de 2017.*

BANCO DE BOGOTA S.A.	5,18708308
BANCO POPULAR S.A.	5,38472456
ITAÚ CORPBANCA COLOMBIA S.A.	5,63296354
BANCO BANCOLOMBIA S.A.	4,70790833
BANCO CITIBANK COLOMBIA S.A.	5,45959472
BANCO GNB SUDAMERIS S.A.	5,71408713
BANCO BBVA COLOMBIA S.A.	5,11254750
BANCO DE OCCIDENTE S.A.	5,46645231
BANCO CAJA SOCIAL BCSC S.A.	5,02996559
BANCO DAVIVIENDA S.A.	5,38531436
BANCO RED MULTIBANCA COLPATRIA S.A.	5,59685245
BANCO AGRARIO DE COLOMBIA S.A.	5,11477911
BANCO AV VILLAS S.A.	4,99680031
BANCO PROCREDIT COLOMBIA S.A.	6,68661294
BANCO DE LAS MICROFINANZAS BANCAMIA S.A.	5,78925152
BANCO W COLOMBIA S.A.	6,40027658
BANCO COOMEVA - BANCOOMEVA S.A.	5,63097023
BANCO FINANDINA S.A.	5,65749704
BANCO FALABELLA S.A.	5,83387628
BANCO PICHINCHA S.A.	5,95203215
BANCO COOPERATIVO COOPCENTRAL S.A.	6,61367461
BANCO MUNDO MUJER S.A	6,62370711
BANCO MULTIBANK S.A.	6,19241642

El supuesto de tasas variables asume que son sucesiones de variables aleatorias en tiempo discreto, $\{i(n), n \in \mathbb{N}\}$, donde $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$. O en tiempo continuo $\{i(t), t \in [0, \infty)\}$.

[1] https://www.superfinanciera.gov.co/jsp/60954

Las tasas variables se utilizarán para modelar rendimientos de fondos, portafolios, etc. En este caso se asume que pueden tomar valores negativos, $i(n) \in (-1, 1), \forall n$.

Ejemplo 4.1.2. *Un fondo de fiducia presentó rendimientos diarios $i(n)$ (n es día), durante el período 2015-2015 con $i(n) \sim i.i.d.N(0.0003, 0.000067)$. La desviación estándar $\sqrt{0.000067} = 0.0081$ se denomina volatilidad (diaria). Por ejemplo, los rendimientos diarios del fondo de pensiones voluntarias, Fidupensión, entre 01/01/2010 y 31/12/2013, aparecen en la Figura 4.1.*

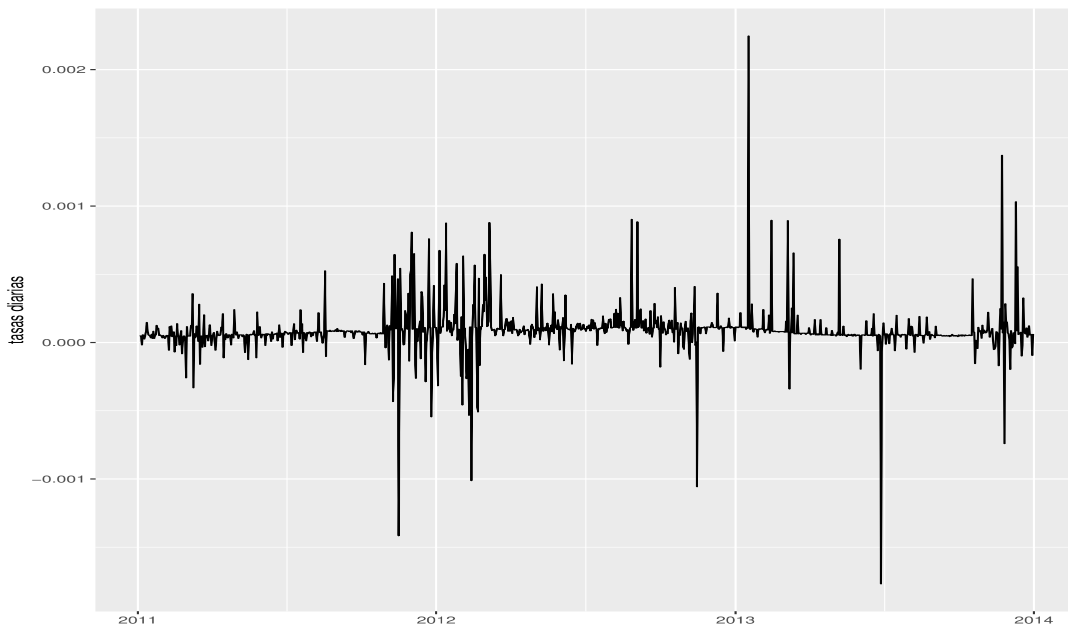


Figura 4.1: Tasas de rendimiento diarias fondo Fidupensiones 2011-2014

La frecuencia de la capitalización

En el caso de tasas constantes se consideran varios períodos de capitalización en el año: diario, semanal, mensual, trimestral, semestral, anual, indicados por:

$$m = 360, 52, 12, 4, 2, 1.$$

Definición 4.1.1. *La tasa i se dice efectiva para cada período de capitalización en el año, si el capital acumulado durante este período es $C(1 + i)$, donde C es el capital invertido al inicio del período.*

Por ejemplo, si $i = 0.12$ es efectiva anual entonces un capital de $C = 100$ acumula a $C(1.12) = 120$ al final del año.

Una tasa i_m se denomina tasa de interés nominal con capitalización a m períodos cuando i_m/m es una tasa efectiva para cada período m. Es este caso se cumple

$$(1 + i_m/m)^m = 1 + i(m),$$

donde $i(m)$ es una tasa efectiva anual que debe depender de m. Por ejemplo, con la librería R `FinCal`

```
#---calcular tasa i con im fija, m varía
require(FinCal)
im = 0.0425
m=4
ear(im, m)
[1] 0.04318215

m=12
ear(im, m)
[1] 0.04333772

m=365
ear(im, m)
[1] 0.04341347

m=8760
ear(im, m)
[1] 0.04341595
```

De la identidad anterior se cumple la relación inversa:

$$i_m = m((1 + i(m))^{1/m} - 1).$$

Ejemplo 4.1.3. *Se hace un depósito de 1 mill en una cuenta de ahorros que reconoce interés sobre saldos mínimos trimestrales a una tasa nominal de $4.2\,\%$. Simultáneamente se colocan en préstamo 1 mill a la misma tasa nominal pero con capitalización anual. Cuál es el capital acumulado al final del primer año en cada caso?.*

Solución En el primer caso la tasa efectiva trimestral es $i^{(4)}/4 = 0.042/4$ y el capital final es `(1.0e06)*(1+0.042/4)^4=1.227100e06`.

En el segundo caso la tasa efectiva anual es igual a la nominal, $i_a = 0.042$. Por tanto, el capital final es `1.0e06(1+0.042) = 1.210000e06`.

Definición 4.1.2. ***Flujo de Caja.*** *Si el capital inicial se denota por $F(0)$ y $F(t)$ denota el valor del capital acumulado al final de cada período $t \in \{0, 1, 2, \ldots, T\}$, y se asume que los intereses se pagan período vencido, a una tasa efectiva de interés i para la frecuencia de capitalización m, entonces $F(t)$ satisface una ecuación recursiva lineal denominada flujo de caja, dada por*

$$F(t) = (1 + i)F(t - 1),\ t = 1, 2, \ldots, T. \tag{4.1}$$

En la ecuación (4.1) $F(t)$ representa lo que el responsable de pagar los intereses asentaría en su contabilidad (contabilidad de caja).

De (4.1) se obtiene, iterando desde $t = 0$ hasta $t = T$,

$$F(T) = (1 + i)^T F(0).$$

El valor $F(T)$ se define como el capital obtenido por interés compuesto durante T períodos, a la frecuencia m y a la tasa efectiva i.

El calificativo "compuesto" se debe a que en cada período se re-invierten el capital y los intereses. El valor de T es un múltiplo de la frecuencia de capitalización m. Por ejemplo, una inversión a $T = 4$ años, con capitalización mensual $m = 12$, implica un total de períodos de capitalización de $T = 4(12) = 48$ meses.

Ejemplo 4.1.4. *El Banco ABC tiene cuentas de ahorro que reconocen una tasa de interés efectiva mensual de $i = 0.003274$, mes vencido. Un capital de $F(0) = \$100000$ se colocó en una de esta cuentas en 01/02/2010 y se retira $T = 30$ meses después, en 01/08/2012. Qué capital se retira?. Es inmediato que*
`F(30) = (100000)1.003274^(30) = 110302.8`.
Por tanto, el total de intereses generados fué $\$10.302, 80$.

Con la librería `FinCal`, se programa:

El caso del flujo de caja con aportes

Si se añade capital por un valor $r(t) \geq 0$, al final de cada período, entonces el saldo al final del período $F(t)$ satisface la ecuación recursiva

$$F(t) = (1+i)F(t-1) + r(t), \tag{4.2}$$

para $t = 1, 2, \ldots, T$, $F(0) \geq 0$. Si $r(t) > 0$ se interpreta como una adición al capital, un aporte ó un ahorro. Si se retira la cantidad $r(t)$ al final de cada período la ecuación cambia a:

$$F(t) = (1+i)F(t-1) - r(t), \tag{4.3}$$

y se interpreta como pago de un crédito. En este caso la función $r(t)$ se denomina "sistema de pago".

Proposición 4.1.1. *La solución de la ecuación (4.2) es*

$$F(t) = (1+i)^t \left(F(0) + \sum_{k=1}^{t} (1+i)^{-k} r(k) \right), \tag{4.4}$$

para $t = 0, 1, \ldots, T$.

Los factores $(1 + i)$ y $v = (1 + i)^{-1}$ se denominan factores de capitalización y de descuento, respectivamente. Al multiplicar $F(t)$ en (4.4) por v^t se obtiene el valor presente de las inversiones. Entonces

$$v^t F(t) = F(0) + \sum_{k=1}^{t} v^k r(k), \tag{4.5}$$

y la interpretación de este resultado es inmediata: el valor presente es igual al capital inicial $F(0)$ más el valor presente de las inversiones realizadas hasta el tiempo t.

En el caso, por ejemplo, de $F(0) = C$ y $r(t) \equiv r > 0$ la ecuación (4.2) describe un flujo de caja de una cuenta de ahorros, empezando con un capital de $\$C$, con cuota y tasa constantes, durante T períodos. El saldo de la cuenta de ahorro al final del período t está dada por (4.4)

$$F(t) = (1+i)^t \left(F(0) + \sum_{k=1}^{t} (1+i)^{-k} r(k) \right)$$

$$
\begin{aligned}
&= (1+i)^t\left(C + r\sum_{k=1}^{t}(1+i)^{-k}\right)\\
&= (1+i)^t C + r\sum_{k=1}^{t}(1+i)^{t-k}\\
&= (1+i)^t C + \frac{r}{i}((1+i)^t - 1)\\
&= (C+\frac{r}{i})(1+i)^t - \frac{r}{i}.
\end{aligned}
$$

Luego,

$$F(t) = (C+\frac{r}{i})(1+i)^t - \frac{r}{i}. \tag{4.6}$$

Ejemplo 4.1.5. *Un Banco tiene cuentas de ahorro que reconocen una tasa de interés efectiva mensual de* 0.003274*, mes vencido. Un capital de* $\$100000$ *se colocó en una de esta cuentas en 01/02/2010 y se retira 30 meses después, en 01/08/2012. Al final de cada mes se consigna* $\$30000$ *en esa cuenta. Qué capital se obtendrá?.*

```
#--------Solución.
i12 = 0.003274
T = 30
C = 1.0e+05
r = 3.0e+04
# ---- programar F(t)
Ft = function(t,C,i,r){
(C+r/i)*(1+i)^t - r/i}
(VF = Ft(t=T,C=C,i=i12,r=r))
# ---- Respuesta: 1054363
```

Es decir, el valor $F(30)$ es $\$1'054.363$. Nótese que si se calcula el valor futuro con $r = 0$ se obtiene el capital inicial más los intereses que éste genera. Y si se calcula con $C = 0$ se genera el valor futuro de las consignaciones más los intereses que generan:

```
(VF1 = Ft(t=T,C=C,i=i12,r=0)))
```

```
# ---- Respuesta: 110302.8
(VF2 = Ft(t=T,C=0,i=i12,r=r)))
# ---- Respuesta: 944060.6
(VF1+VF2)
# ---- Respuesta: 1054363
```

El caso de flujo de caja en un crédito

La solución de la ecuación (4.3) es

$$F(t) = (1+i)^t \left(F(0) - \sum_{k=1}^{t} (1+i)^{-k} r(k) \right), \tag{4.7}$$

para $t = 0, 1, \ldots, T$. Hay distintas fórmulas para $r(t)$, denominadas sistemas de pagos. Algunas se desarrollan en una sección posterior.

Retomando la ecuación de flujo de caja para un crédito (4.3), se puede descomponer los pagos $r(t)$ de la forma

$$\begin{aligned} F(t) &= (1+i)F(t-1) - r(t), \\ \Leftrightarrow\ r(t) &= iF(t-1) + (F(t-1) - F(t)). \end{aligned}$$

En palabras: Pago = (Abono a interés) + (Abono a Capital).

Ejemplo 4.1.6. *Algunos sistemas de crédito de vivienda utilizados hace unas décadas por el BCH están en el texto de [Gomez Ceballos, 1985, pag. 45]. El BCH, Banco de Crédito Hipotecario, se creó en 1932 para financiar la construcción de vivienda mediante créditos hipotecarios. Se liquidó en el año 2000. Algunos de sus sistemas de crédito fueron:*

$$\textit{sistema de pago } r(t) = \begin{cases} \textit{Cuotas constantes: BCH sistema VI} \\ \textit{Lineales crecientes: BCH sistema VIII} \\ \textit{Lineales decrecientes: BCH sistemas I,II,III,IV} \\ \textit{Decreciente geométrico: BCH sistema 2} \end{cases}$$

Ejemplo 4.1.7. *Un Banco ofrece créditos comerciales ordinarios a 5 ó más años con una tasa de interés efectiva anual de 0.1432 ([2]). Se aprueba un préstamo por $\$1000000$ a 15 años. Cuál es la cuota a pagar año vencido?*

[2] https://www.superfinanciera.gov.co/Superfinanciera-Tasas/generic/activeInterestRates.seam

Solución. En la ecuación (4.6) se reemplaza r por $-r$, y se obtiene

$$F(t) = (C - \frac{r}{i})(1+i)^t + \frac{r}{i}.$$

Reemplazamos `C=1.0e06`, `i=0.1432`. Además, `t=1,2,...,15`. La variable r es la incógnita. Para despejarla se coloca el valor del saldo del crédito al final del período como $F(15) = 0$, luego,

$$\begin{aligned}
F(15) = (C - \frac{r}{i})(1+i)^{15} + \frac{r}{i} = 0,\\
\therefore\ (1+i)^{15}(Ci - r) + r = 0,\\
\Leftrightarrow\ (1+i)^{15}Ci - (1+i)^{15}r + r = 0,\\
\Leftrightarrow\ r = \frac{(1+i)^{15}Ci}{(1+i)^{15} - 1} = 165420.6.
\end{aligned}$$

Luego, la cuota anual vencida es de $\$165.420, 60$.

Ejercicio 4.1.1. *Con el enunciado del Ejemplo anterior, si se asume una cuota de* $\$200.000$*, cuál debería ser la tasa* i*?.*

4.2. Definición de Anualidades

Definición 4.2.1. *Una anualidad es un contrato entre dos partes denominadas A y B. Una de ellas, A, recibe una serie de pagos, con valores pre-establecidos, en fechas definidas, hasta una fecha determinada. La otra B, se compromete a proveer estos pagos a cambio de un pago, ó desembolso, de parte de A.*

Ejemplo 4.2.1. *Un primer caso es un Banco que ofrece créditos y recibe pagos por parte de quienes los toman. Entonces el Banco es A, y quien toma el crédito es B. En este caso el Banco se denomina prestatario y quien toma el crédito prestamista.*

Ejemplo 4.2.2. *Otro caso en un Fondo de Pensiones. Es la parte B porque se compromete a realizar una serie de pagos, las mesadas pensionales, a la otra parte A, que realiza un desembolso como forma de pago, al entregar un capital para financiar la pensión.*

Ejemplo 4.2.3. *Otro ejmplo en un fondo de inversiones inmobiliarias. Es la parte B porque se compromete a realizar una serie de pagos de rendimientos, a la otra parte A, que realiza un desembolso como forma de pago, al entregar un capital como inversión en el fondo. Los rendimientos pactados son variables, por ejemplo,* $5.0\,\%$ *efectiva anual, mas inflación, cada 3 meses.*

Algunos tipos comerciales de anualidades son

$$\text{ejemplos de anualidades} = \begin{cases} \text{rentas vitalicias} \\ \text{pensiones} \\ \text{cuentas de ahorro} \\ \text{fiducias} \\ \text{fondos de inversión} \\ \text{crédito de estudios} \\ \text{crédito de vivienda} \\ \text{bonos} \end{cases}$$

Todos los casos anteriores tienen la ecuación para los flujos de caja para el caso de un crédito, (4.3)

$$F(t) = (1+i)F(t-1) - r(t),\ t = 1, \ldots, T,$$

En algunos casos $r(t) \geq 0$ está dada y $C = F(0)$ es el valor inicial que se toma como una incógnita, definida como el precio de la anualidad. En este caso se añade una condición final ó de cierre, de la forma $F(T) = 0$. Es decir, el saldo al final del contrato debe ser nulo.

4.3. Anualidades con pagos anuales uniformes

En esta sección se presentan varios casos de anualidades con pagos constantes $r(t) \equiv r$, de varios tipos: vencidas, anticipadas, con m pagos en el año, etc. Suponga que la Entidad con la cual se contrata la anualidad ofrece:

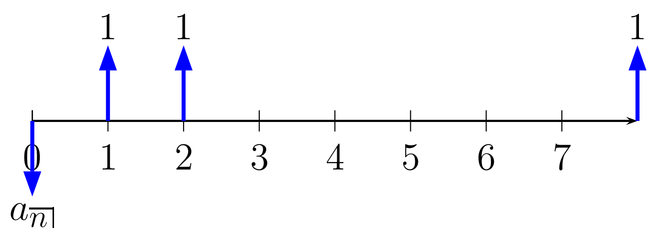


Figura 4.2: pagos en anualidad vencida

- una tasa fija efectiva anual i,
- con capitalización anual,
- pagos año vencido, por valor de una unidad monetaria,
- durante $T = n$ años.
- Quien compra la anualidad paga la cantidad $C = F(0)$, denominada prima.

En la ecuación (4.3) de flujo de caja se reemplaza $r(k) \equiv 1$,

$$\begin{aligned} F(t) &= (1+i)F(t-1) - 1, \; t = 1, \dots, n, \\ C &= F(0), \end{aligned}$$

donde C es la prima a pagar, que se debe determinar. Para esto utilizamos la condición adicional siguiente:

Definición 4.3.1. *La condición de cierre de la anualidad se expresa como que el saldo de la deuda $F(t)$ al final del contrato en $t = n$, debe ser cero:*

$$F(n) = 0. \tag{4.8}$$

Retomamos la solución de (4.3), dada en (4.4), colocando $t = n$

$$F(n) = (1+i)^n \left(F(0) - \sum_{k=1}^{n} (1+i)^{-k} \right),$$

aplicando la condición de cierre $F(n) = 0$ se despeja $C = F(0)$, y denotando $C := a_{\overline{n}|i}$, se obtiene

$$a_{\overline{n}|i} = \sum_{k=1}^{n} v^k. \tag{4.9}$$

donde $v = (1+i)^{-1}$ es el factor de descuento. Para pagos (cuotas) por un valor constante $A \neq 1$, el valor de la anualidad es simplemente $Aa_{\overline{n}|i}$. Es inmediato comprobar lo siguiente.

Proposición 4.3.1. *Con $v = (1+i)^{-1}$, y n, k enteros positivos, se cumple*

$$a_{\overline{n}|i} = \frac{1-v^n}{i}, \tag{4.10a}$$

$$a_{\overline{n+k}|i} = a_{\overline{n}|i} + v^k a_{\overline{k}|i}, \tag{4.10b}$$

$$\frac{d\,a_{\overline{n}|i}}{di} < 0 \tag{4.10c}$$

En ocasiones, cuando se considere evidente, no se colocará el sub-índice i en $a_{\overline{n}|i}$.

Una consecuencia de (4.10c) es que el precio de la anualidad decrece cuando aumenta la tasa i. Cuando del Banco de la República sube las tasas, las tasas de los créditos (tasas de captación) y las tasas de la cuentas de ahorro, de los CDT (tasas de colocación) también suben. Las tasas de captación son más altas que las de colocación. Para un mismo crédito, por valor de $F(0)$, las cuotas para las tasas i, i' serían r, r', donde

$$A = F(0)/a_{\overline{n}|i}$$
$$A' = F(0)/a_{\overline{n}|i'},$$

Utilizando (4.10c), si $i < i'$ entonces

$$a_{\overline{n}|i} > a_{\overline{n}|i'} \Rightarrow 1/a_{\overline{n}|i} < 1/a_{\overline{n}|i'} \tag{4.11}$$

luego, $A' > A$. Al elevar las tasas, obviamente se encarecen los créditos.

El valor acumulado de las cuotas de 1, se define como

$$s_{\overline{n}|i} = (1+i)^n a_{\overline{n}|i}. \tag{4.12}$$

Un indicador del pago total en un crédito por valor de $F(0)$, con pagos de A, es

$$\frac{As_{\overline{n|}i}}{F(0)}. \tag{4.13}$$

En algunos sistemas de crédito hipotecario, durante la crisis del UPAC, este indicador estaba en niveles demasiado altos, para algunos sistemas.

Ejemplo 4.3.1. *Suponga que una persona natural solicita un crédito de libre inversión para iniciar una microempresa.*

Una Cooperativa de Crédito financia microempresas con préstamos a una tasa nominal de $i = 0.17$, para pagos mes vencido. Si el préstamo es por un valor de $\$20$ mill, a 5 años, cuál es el valor de las cuotas?.

Una ONG financia microempresas con préstamos a una tasa nominal de $i = 0.12$, para pagos mes vencido. Cómo cambia la cuota del crédito en este caso?.

Solución Si la tasa efectiva mensual es $i_{12} = 0.17/12$, y el número de meses es $12(5) = 60$, y la cuota se indica por A, habría que despejar A de la ecuación

$$\begin{aligned} Aa_{\overline{60|}i_{12}} &= 20.000.000 \\ \therefore\ \ A &= \frac{20.000.000}{a_{\overline{60|}i_{12}}}. \end{aligned}$$

Con el programa en R siguiente se obtiene $A = \$497.051,50$. La opción con la ONG se deja como ejercicio.

```
#--------Solucion con R
i = 0.17
i12 = 0.17/12
m = 12
nm = 5*12
F0 = 20.0e+06
avn = function(n,i){
v = 1/(1+i)
p = (1-v^n)/i
```

```
return(p)}
(A = F0/avn(nm,i12))
```

El caso de pagos año anticipado se modela modificando la ecuación del flujo de caja (4.3) de manera que cada pago se descuente del saldo que viene del año anterior, antes de causar los intereses.

$$F(t) = (1+i)(F(t-1)-1) = (1+i)F(t-1)-(1+i), \tag{4.14}$$

para $t = 1, 2, \ldots, n$, tal que $F(n) = 0$. Luego, la solución se obtiene de la fórmula (4.3) reemplazando $r(k) = 1 + i$.

$$\begin{aligned}
F(n) &= (1+i)^n \left(F(0) + \sum_{k=1}^{n} (1+i)^{-k} r(k) \right) \\
&= (1+i)^n \left(F(0) - (1+i) \sum_{k=1}^{n} (1+i)^{-k} \right) \\
&= (1+i)^n \left(F(0) - (1+i) a_{\overline{n|}i} \right)
\end{aligned}$$

Si el valor de la anualidad se indica en este caso de pagos anticipados por $\ddot{a}_{\overline{n|}i} = F(0)$ entonces de la condición $F(n) = 0$ se obtiene

$$\ddot{a}_{\overline{n|}i} = (1+i) a_{\overline{n|}i}. \tag{4.15}$$

Proposición 4.3.2. *Con $v = (1+i)^{-1}$, $d = 1 - v$, utilizando la identidad $i = (1-v)/v$ se obtiene:*

$$\ddot{a}_{\overline{n|}i} = \sum_{k=0}^{n-1} v^k = \frac{1-v^n}{d}, \tag{4.16a}$$

$$\ddot{a}_{\overline{n|}i} = a_{\overline{n|}i} + 1 - v^n \tag{4.16b}$$

$$\frac{d}{di}\ddot{a}_{\overline{n|}i} < 0. \tag{4.16c}$$

Demostración. Las demostraciones son directas y se dejan como ejercicios. $\square$

Ejemplo 4.3.2. *Suponga que se quiere establecer un programa de beca estudiantil, asignada cada año, que pague cierta cantidad A, mes anticipado, con una duración del programa de 20 años, con base en una donación hecha por familiares de un docente, por valor de $\$300$ mill. Si una entidad financiera ofrece una tasa de $4.3\,\%$ efectiva anual, durante ese período de 20 años, cuál es el valor de la beca A?.*

Solución. La tasa efectiva mensual es $i_{12} = (1 + 0.043)^{1/12} - 1$. El valor inicial es `F(0)=300e+06`. El número de períodos es $n = 20(12) = 240$. La ecuación que relaciona la beca A con el valor inicial $F(0)$ es

$$300000000 = A\,\ddot{a}_{\overline{240}|i_{12}}$$

El resultado es $A = \$1'846.021$. Sin embargo, este resultado no toma en cuenta un factor: la inflación. En 20 años el poder adquisitivo se habrá disminuído considerablemente. Por lo que hay que considerar el caso de anualidades con incrementos en los pagos a una tasa determinada.

```
#---------anualidad anticipada con R
im = (1+0.043)^(1/12)-1
nm = 20*12
F0 = 300.0e+06
aan = function(n,i){
v = 1/(1+i)
p = (1-v^n)/(1-v)
return(p)}
(A=F0/aan(nm,im))
```

4.4. Anualidades con m pagos uniformes en el año

Suponga que la Entidad con la cual se contrata la anualidad ofrece:

- una tasa fija efectiva anual i, convertible a efectiva para el período m: $i_m = (1+i)^{1/m} - 1$,
- con capitalización cada m períodos, $m = 360, 52, 12, 4, 2$,
- m pagos año vencido, por valor de $1/m$,
- durante $T = n$ años.
- Quien compra la anualidad paga la cantidad $C = F(0)$, denominada prima.

Ejemplo 4.4.1. *El caso de las mesadas pensionales son anualidades con pagos vencidos mensuales,* $m = 12$.

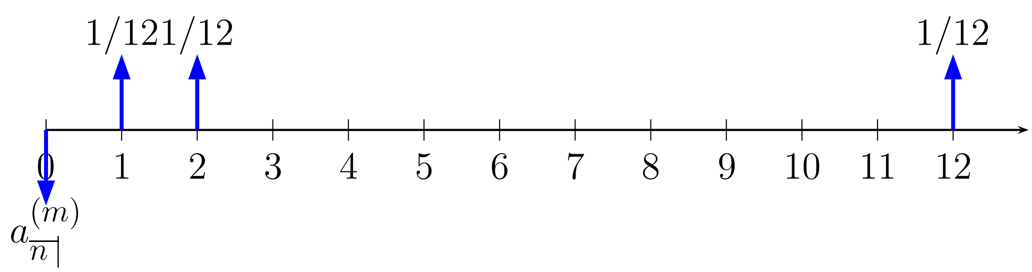


Figura 4.3: Pagos en anualidad vencida con $m = 12$ pagos al años

La ecuación del flujo de caja en este caso es una modificación de (4.3), reemplazando i por i_m, dada por

$$F(t) = (1 + i_m)F(t-1) - 1/m, \tag{4.17}$$

para $t = 1, 2, \ldots, nm$. Con la condición de cierre

$$F(nm) = 0. \tag{4.18}$$

La solución de (4.17) es

$$F(t) = (1 + i_m)^t (F(0) - (1/m) \sum_{k=1}^{t} (1 + i_m)^{-k}), \tag{4.19}$$

y reemplazando

$$1 + i_m = (1+i)^{1/m} = v^{-1/m},$$
$$(1+i_m)^{-k} = v^{k/m},$$

se obtiene el valor de la anualidad $a^{(m)}_{\overline{n}|i} := F(0)$

$$a^{(m)}_{\overline{n}|i} = (1/m)\sum_{k=1}^{nm} v^{k/m}. \tag{4.20}$$

Proposición 4.4.1. *Con las definiciones anteriores, se tienen las identidades*

$$a^{(m)}_{\overline{n}|i} = \frac{1-v^n}{i^{(m)}} = \frac{i}{i^{(m)}} a_{\overline{n}|i}, \tag{4.21a}$$

$$a^{(m)}_{\overline{n}|i} \approx (1 + \frac{m-1}{2m} i) a_{\overline{n}|i}, \tag{4.21b}$$

$$\frac{\partial}{\partial i} a^{(m)}_{\overline{n}|i} < 0. \tag{4.21c}$$

Demostración. **Para (4.21a)**. A partir de

$$\sum_{j=1}^{n} r^j = \frac{r - r^{n+1}}{1-r}$$

se sigue que

$$\begin{aligned}
\frac{1}{m}\sum_{k=1}^{nm} v^{k/m} &= \frac{v^{1/m} - v^{(nm+1)/m}}{m(1-v^{1/m})} \\
&= v^{1/m}\frac{1 - v^{(nm)/m}}{m(1-v^{1/m})} \\
&= \frac{1-v^n}{i^{(m)}} = \frac{i}{i^{(m)}} a_{\overline{n}|i}.
\end{aligned}$$

en la última linea su utiliza la identidad $i^{(m)} = m(v^{-1/m} - 1)$.

Para (4.21b). Se utiliza $a^{(m)}_{\overline{n}|i} = \frac{i}{i^{(m)}} a_{\overline{n}|i}$. A partir de $i^{(m)} = m((1+i)^{1/m} - 1)$, usando el Teorema generalizado del binomio (Newton) ([3]) se obtiene el desarrollo de $(a+b)^r$ para r fraccional positivo como

$$(a+b)^r = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{r}{k} a^{r-k} b^k,$$
$$\binom{r}{k} = \frac{r(r-1)\ldots(r-k+1)}{k} (= 1, r, r(r-1)/2, \ldots)$$

se obtiene reemplazando $a = 1, b = i, r = 1/m$:

$$(1+i)^{1/m} = 1 + \frac{i}{m} + \frac{1}{2}\frac{1}{m}\left(\frac{1}{m} - 1\right) i^2 + \ldots,$$

de donde

$$i^{(m)} = m((1+i)^{1/m} - 1) \approx i + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{m} - 1\right) i^2$$

Por tanto,

$$a^{(m)}_{\overline{n}|i} = \frac{i}{i^{(m)}} a_{\overline{n}|i} \approx \frac{i a_{\overline{n}|i}}{i + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{m} - 1\right) i^2} = \frac{a_{\overline{n}|i}}{1 - \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{m}\right) i}$$

Utilizando el resultado de cálculo

$$\frac{1}{1 - bz} = 1 + bz + b^2 z^2 + \ldots$$

válido para $|z| < 1/b$. Por tanto

$$\frac{1}{1 - \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{m}\right) i} \approx 1 + \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{m}\right) i$$

Por tanto

$$a^{(m)}_{\overline{n}|i} \approx \left[1 + \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{m}\right) i\right] a_{\overline{n}|i}$$

Para (??). Se deja como ejercicio. □

[3]https://es.wikipedia.org/wiki/Teorema_del_binomio

Ejemplo 4.4.2. *La oficina de Rentas Vitalicias de una Aseguradora vende anualidades. Se contrata una anualidad por 3 años, con pagos trimestrales vencidos, por valor de* $\$2.0$ *mill cada uno. La tasa efectiva anual ofrecida por la Aseguradora es de* $i = 0.06$*. Calcule el costo actuarial de esta anualidad.*

Solución. Utilizando la identidad (4.21a) con $m = 4$, $i = 0.06$, $n = 3$. El costo actuarial es

$$a^{(4)}_{\overline{3}|i=0.06} = \frac{0.06}{i^{(4)}} a_{\overline{3}|i=0.06}$$

Pero, por definición de tasa nominal, $(1 + i^{(4)}/4)^4 = 1 + i = 1.06$. Luego $i^{(4)} = 0.05869$. Además, $a_{\overline{3}|i=0.06} = (1 - v^n)/i = (1 - 1.06^{-3})/0.06 = 2.6730$. Por tanto,

$$a^{(4)}_{\overline{3}|i=0.06} = \frac{0.06(2.6730)}{0.05869} = 2.7326.$$

Finalmente, recordando que este costo es para 4 pagos iguales de $1/4$ cada año, el valor de 4 pagos por 2 mill cada uno, será

$$Costo = 2(4)a^{(4)}_{\overline{3}|i=0.06} = 2(4)(2.7324) = 21.8594.$$

Por tanto, la anualidad tiene un costo actuarial de $\$21'859.400$.

```
#-----solucion con R
source("anualidades.formulas.r")
#--------datos
m = 4; i = 0.06; n = 3; A=2;
(costo = 2*4*avmn(i,m,n))
[1] 21.8594
```

Ejemplo 4.4.3. *La oficina de Rentas Vitalicias de una Aseguradora vende una renta a una persona por 15 años, con pagos mensuales vencidos, por valor de 2 mill cada uno. Y además, incluye un pago al final de cada año por el mismo valor ("prima de navidad"). Si la Aseguradora asume una tasa efectiva anual* $i = 0.05$*, calcule el costo de esta anualidad. Utilice la aproximación (4.21b) para calcular la anualidad.*

Solución El costo de esta anualidad se puede expresar como

$$Costo = 2(12)a^{(12)}_{\overline{15}|i=0.05} + 2a_{\overline{15}|i=0.05}$$

Utilizando la aproximación (4.21b)

$$\begin{aligned} a^{(12)}_{\overline{15}|i=0.05} &\approx \left[1 + \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{m}\right) i\right] a_{\overline{n}|i} \\ &= \left[1 + \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{12}\right) 0.05\right] a_{\overline{15}|i=0.05} \end{aligned}$$

Por tanto,

$$\begin{aligned} Costo &= 2(12)\left[1 + \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{12}\right) 0.05\right] a_{\overline{15}|i=0.05} + 2a_{\overline{15}|i=0.05} \\ a_{\overline{15}|i=0.05} &= (1 - 1.05^{-15})/0.05 = 10.3796, \\ \therefore\ Costo &= \left(2(12)\left[1 + \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{12}\right) 0.05\right] + 2\right) 10.3796 \\ &= 275.5799206. \end{aligned}$$

El costo es $\$275'579.920$.

```
#-----solucion con R
source("anualidades.formulas.r")
#--------datos
m = 12; i = 0.05; n = 15; A=2;
(costo = A*m*avmn(i,m,n)+A*avn(i,n))
[1] 275.5296
```

Ejercicio 4.4.1. *Compruebe que para $m > 1$, se cumple*

$$a^{(m)}_{\overline{n}|i} > a_{\overline{n}|i}. \tag{4.22}$$

Qué interpretación tiene esta desigualdad?

Demostración. Utilizando (4.21a), $a^{(m)}_{\overline{n}|i} = \frac{1-v^n}{i^{(m)}} = \frac{i}{i^{(m)}} a_{\overline{n}|i}$. Por tanto

$$a^{(m)}_{\overline{n}|i} > a_{\overline{n}|i} \Leftrightarrow \frac{i}{i^{(m)}} > 1 \Leftrightarrow i > i^{(m)}.$$

Pero

$$i > i^{(m)} \Leftrightarrow (1 + i/m)^m > 1 + i.$$

Por el Teorema del binomio de Newton

$$(1 + i/m)^m = \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} (i/m)^k = 1 + i + \sum_{k=2}^{m} \binom{m}{k} (i/m)^k > 1 + i$$

La interpretación es que es más costosa la anualidad con $m > 1$ pagos en el año que la correspondiente anualidad con 1 pago al años. $\square$

Caso anualidades con m pagos período anticipado

El tipo de anualidad que se considera a continuación ofrece $m > 1$ pagos anticipados en el año, iguales a $1/m$, durante n años. Los saldos sucesivos de esta cuenta se indican por $F(t),\ t = 1, \ldots, nm$. La ecuación del flujo de caja es una modificación de (4.17), dada por

$$\begin{aligned} F(t) &= (1 + i_m)(F(t-1) - 1/m) \\ &= (1 + i_m)F(t-1) - (1 + i_m)/m. \end{aligned} \tag{4.23}$$

El costo de la anualidad es $F(0) = \ddot{a}^{(m)}_{\overline{n}|}$. Y la condición de cierre es $F(nm) = 0$. La solución de (4.23) en $t = nm$ es

$$F(nm) = (1 + i_m)^{nm}(F(0) - \frac{1}{m}\sum_{s=1}^{nm}(1 + i_m)^{-s+1}). \tag{4.24}$$

Aplicando la condición de cierre, se obtiene

$$F(0) = \ddot{a}^{(m)}_{\overline{n}|} = \frac{1}{m}\sum_{s=1}^{nm}(1 + i_m)^{-s+1}.$$

Desarrollamos la suma de la derecha para obtener

$$\frac{1}{m}\sum_{s=1}^{nm}(1 + i_m)^{-s+1} = \frac{1}{m}\sum_{s=1}^{nm} v^{(s-1)/m}$$

$$= \frac{1}{m} \sum_{s=0}^{nm-1} v^{s/m} = \frac{1 - v^n}{m(1 - v^{1/m})}.$$

en estas operaciones se utilizó la identidad

$$(1 + i_m)^{-s+1} = (1 + i^{(m)}/m)^{-s+1} = v^{(s-1)/m}.$$

Definición 4.4.1. *Se define la tasas nominal de descuento con m capitalizaciones en el año*

$$d^{(m)} = m(1 - v^{1/m}) = v^{1/m} i^{(m)}. \tag{4.25}$$

Luego, la expresión final del valor actuarial de esta anualidad queda

$$\ddot{a}_{\overline{n}|}^{(m)} = \frac{1 - v^n}{d^{(m)}} \tag{4.26}$$

Proposición 4.4.2. *Con $v = (1 + i)^{-1}$, $d = d^{(1)}$, se tiene*

$$\ddot{a}_{\overline{n}|}^{(m)} = v^{-1/m} a_{\overline{n}|}^{(m)}, \tag{4.27a}$$

$$\ddot{a}_{\overline{n}|}^{(m)} = \frac{d}{d^{(m)}} \ddot{a}_{\overline{n}|} \tag{4.27b}$$

$$\ddot{a}_{\overline{n}|}^{(m)} \approx (1 + \frac{m-1}{2m} d) \ddot{a}_{\overline{n}|}, \tag{4.27c}$$

$$\frac{d}{di} \ddot{a}_{\overline{n}|}^{(m)} < 0. \tag{4.27d}$$

Demostración. **Para (4.27a).** Se tiene, utilizando $i^{(m)} = m(v^{-1/m} - 1)$,

$$\begin{aligned}
\ddot{a}_{\overline{n}|}^{(m)} &= \frac{1 - v^n}{m(1 - v^{1/m})} \\
&= \frac{1 - v^n}{m(v^{-1/m} - 1)} \frac{m(v^{-1/m} - 1)}{m(1 - v^{1/m})} \\
&= v^{-1/m} a_{\overline{n}|}^{(m)}.
\end{aligned}$$

□

Ejemplo 4.4.4. *Encuentre el valor actuarial de una anualidad durante 3 años, que paga 2 mill trimestre anticipado, si se contrata a una tasa de $6\,\%$ efectiva anual.*

Solución. Se trata de calcular

$$\begin{aligned} C &= 2(4)\ddot{a}^{(4)}_{\overline{3}|i=0.06} = 2(4)\frac{1-v^3}{d^{(4)}} \\ d^{(4)} &= 4(1-v^{1/4}) \\ v &= 1/1.06 \end{aligned}$$

La respuesta es 22.180 mill.

```
#----programa en R
aamn = function(i,m,n){
v = 1/(1+i)
dm = m * (1 - v ^ (1 / m))
p = (1-v^n)/dm
return(p)}
n = 3; i = 0.06; m = 4;
(C = 2*4*aamn(i,m,n))
#----respuesta: 22.18016
```

Ejercicio 4.4.2. *Calcule el Ejemplo anterior con la fórmula de aproximación*

$$\ddot{a}^{(m)}_{\overline{n}|i} = \left(1 + \frac{m+1}{2m}i - \frac{m^2-1}{12m^2}i^2\right) a_{\overline{n}|i} \tag{4.28}$$

Nota

Cuando los pagos ocurren en tiempos diferentes a los de capitalización, para determinarlos es útil la noción de congruencia.

Definición 4.4.2. *Sean $a > b$ dos enteros cualesquiera. La división entera a/b es el entero $\lfloor a/b \rfloor$. El residuo de la división entera de a sobre b se denomina módulo y se define por $a\,\%b := a - \lfloor a/b \rfloor b$, donde $\lfloor z \rfloor$ es la parte entera de z (función piso).*

Por ejemplo, en el lenguaje R la división entera se denota `7%/%3 = 2`, y el módulo `7%%3 = 1`. Una aplicación simple es determinar cuáles valores de la sucesión $k = 1, 2, \ldots$ son múltiplos de un entero $r > 0$. Utilizando la función indicadora $I(A) \in \{0, 1\}$, con $I(A) = 1$ si A es cierto, se obtiene `I(k%%r = 0) = 1` si $k = 2, 2r, 3r, \ldots$.

Tablas de resumen

Símbolo	Descripción	Fórmula
i	tasa efectiva anual	
v	factor de descuento anual	$(1+i)^{-1}$
$i^{(m)}$	tasa nominal con m capitalizaciones en el año	$m(v^{-1/m}-1)$
i_m	tasa efectiva período m	$i^{(m)}/m$
d	tasa anticipada	$v\,i$
$d^{(m)}$	tasa nominal de descuento con m capitalizaciones en el año	$v^{1/m} i^{(m)}$

Cuadro 4.1: Tasas

Símbolo	Descripción	Pago $r(k)$	Fórmula	Pag.	Programa R
$a_{\overline{n}\rceil i}$	Anualidad pagos año vencido	1	$(1-v^n)/i$	103	avn.r
$\ddot{a}_{\overline{n}\rceil i}$	Anualidad pagos año anticipado	1	$(1-v^n)/d$	105	aan.r
$a^{(m)}_{\overline{n}\rceil i}$	Anualidad m pagos vencidos	$1/m$	$(i/i^{(m)})\, a_{\overline{n}\rceil i}$	108	avmn.r
$\ddot{a}^{(m)}_{\overline{n}\rceil}$	Anualidad m pagos anticipados	$1/m$	$v^{-\frac{1}{m}} a^{(m)}_{\overline{n}\rceil}$	113	aamn.r

Cuadro 4.2: Anualidades Simples

4.5. Anualidades con pagos en progresión geométrica

Un problema asociado con las anualidades es cómo diseñar sistemas que actualicen los pagos según el costo de vida ó inflación. Se considerarán tres posibilidades para modelar la corrección por inflación:

1. Anualidades con pagos en progresión geométrica, denominadas anualidades geométricas ó anualidades con gradiente geométrico.
2. Anualidades con pagos en unidades de valor constante convertibles a pesos corrientes.
3. Anualidades con crecimiento lineal de acuerdo a una tasa dada.

Anualidades Geométricas

En esta sección se introduce el caso de anualidades con pagos que se incrementan a una tasa fija, que corresponde, aproximadamente, al caso de incrementos por inflación.

La definición de esta anualidad es:

- La anualidad consiste de m pagos en el año, durante n años.
- Se asume que hay q incrementos de los pagos, en el año, donde q es un entero positivo tal que $m = rq$, para r entero positivo. Estos valores se interpretan como que hay q períodos en un año, de r períodos m, cada uno.
  1. $m = 12$ y $q = 1$ significa que se realizan 12 pagos al año y los incrementos en los pagos ocurren anualmente.
  2. $m = 12$ y $q = 4$ significa 12 pagos al año; los pagos se incrementan trimestralmente.
  3. $m = 12$ y $q = 2$, significa 12 pagos al año, con incrementos cada semestre.

- Adicionalmente, se asume una tasa de inflación i_q, efectiva anual, que debe cumplir la condición

$$i_q < i. \tag{4.29}$$

tal que los pagos se incrementan cada q períodos a la tasa $(1+i_q)^{1/q}-1$.

- El pago en el período k está dado por $r(k)$

$$r(k) = (1+i_q)^{\frac{1}{q}\lfloor\frac{k-1}{r}\rfloor}. \tag{4.30}$$

En la fórmula (4.30) la función $\lfloor z \rfloor$ es la parte entera de z. A continuación un ejemplo.

Si es una anualidad mensual, entonces $m = 12$. Si los pagos se incrementan semestralmente, entonces $q = 2$ y $r = 6$. El incremento por inflación aplica dos veces en el año. Supongamos $i_q = 0.02$ (e.a). En este ejemplo

$$r(k) = (1+0.02)^{\frac{1}{2}\lfloor\frac{k-1}{6}\rfloor}.$$

En (4.30) si $k = 1, 2, \ldots, 6$, entonces $\lfloor\frac{k-1}{6}\rfloor \equiv 0$, luego

$$r(k) = 1.02^{\frac{1}{2}\lfloor\frac{k-1}{6}\rfloor} \equiv 1,$$

es decir, en los primero 6 meses no hay incremento.

Para los siguientes 6 meses, $k = 7, 2, \ldots, 12$, entonces $\lfloor\frac{k-1}{6}\rfloor \equiv 1$. Luego

$$r(k) = 1.02^{\frac{1}{2}\lfloor\frac{k-1}{6}\rfloor} \equiv 1.02^{\frac{1}{2}} = 1.00995,$$

y por tanto los pagos se incrementan en un 9×1000. Y así sucesivamente hasta que la anualidad termina.

La ecuación de flujo de caja

La ecuación de flujo de caja en el caso de pagos vencidos tiene la forma

$$F(k) = (1+i)^{\frac{1}{m}}F(k-1) - (1+i_q)^{\frac{1}{q}\lfloor\frac{k-1}{r}\rfloor},\ k = 1, 2, \ldots, nm, \tag{4.31}$$

donde i es la tasa efectiva anual de capitalización. La condición de cierre es $F(nm) = 0$.

La solución de la ecuación (4.31) es,

$$F(k) = (1+i)^{\frac{k}{m}} \left(F(0) - \sum_{s=1}^{k} (1+i)^{-\frac{s}{m}} (1+i_q)^{\frac{1}{q}\lfloor \frac{s-1}{r} \rfloor} \right), \tag{4.32}$$

Aplicando la condición de cierre se obtiene que el valor de la anualidad, $F(0)$, que se denota con el símbolo

$$(G^{(q)}a)_{\overline{n}|}^{(m)} := \sum_{k=1}^{nm} (1+i)^{-\frac{k}{m}} (1+i_q)^{\frac{1}{q}\lfloor \frac{k-1}{r} \rfloor}. \tag{4.33}$$

La correspondiente anualidad anticipada tiene un precio definido por:

$$(G^{(q)}\ddot{a})_{\overline{n}|}^{(m)} := \sum_{k=0}^{nm-1} (1+i)^{-\frac{k}{m}} (1+i_q)^{\frac{1}{q}\lfloor \frac{k}{r} \rfloor} \tag{4.34}$$

$$= v^{-1/m} (G^{(q)}a)_{\overline{n}|}^{(m)}. \tag{4.35}$$

Una fórmula alterna a (4.33) está dada por el siguiente resultado.

Proposición 4.5.1. *Defina las tasas*

$$i_h := \left(\frac{1+i}{1+i_q} \right)^{1/q} - 1, \tag{4.36}$$

$$i_m = (1+i)^{1/m} - 1. \tag{4.37}$$

Entonces una expresión equivalente a (4.33) es

$$(G^{(q)}a)_{\overline{n}|}^{(m)} := \ddot{a}_{\overline{nq}|i_h} a_{\overline{r}|i_m}. \tag{4.38}$$

También

$$(G^{(q)}\ddot{a})_{\overline{n}|}^{(m)} = \ddot{a}_{\overline{nq}|i_h} \ddot{a}_{\overline{r}|i_m}. \tag{4.39}$$

Nótese que en las fórmulas (4.38) y (4.39) el primer pago es 1. Al multiplicarlas por una cantidad $C > 0$, representan el costo de anualidades con primer pago C.

Ejemplo 4.5.1. *Un crédito de vivienda, a quince años, por $F_0 = 200$ mill, con pagos mes anticipado e incrementos anuales en las cuotas a una tasa $i_q = 0.06$ efectiva anual, que representa el incremento del salario mínimo anual legal vigente. Cuál es el valor de la cuota mensual C durante el primer año, utilizando (4.39)?. El Banco ofrece $i = 0.10$, $i_q = 0.06$, con $n = 15$, $m = 12$, $q = 1$. Con el programa R siguiente se obtiene $C = \$1'484.658.00$.*

Solución. La solución consiste en despejar C de la ecuación:

$$F_0 = C(G^{(q)}\ddot{a})^{(m)}_{\overline{n|}i} = C(G^{(1)}\ddot{a})^{(12)}_{\overline{15|}i=0.1}.$$

El siguiente programa en R contiene las instrucciones para calcular el valor de la anualidad, y utiliza funciones de anualidad $\ddot{a}_{\overline{nq|}i_h}, \ddot{a}_{\overline{r|}i_m}$.

```
#-------anualidad anticipada pago anual
aan = function(n,i){
v = 1/(1+i)
p = (1-v^n)/(1-v)
return(p)}

#---------funcion para la anualidad geometrica anticipada
Gaaqmn = function(m,q,n,i,iq){
try(if(iq > i) stop("tasa inflacion invalida"))
try(if(m%%q != 0) stop("m no es divisible por q"))
ih = (1+i)/(1+iq)-1
im = (1+i)^(1/m)-1
r = m/q
res = aan(n*q,ih)*aan(r,im)
return(res)}
#-----datos
n=15; m=12; q=1; i=0.1; iq=0.06;
```

```
F0 = 200.0e+06
(C=F0/Gaaqmn(m,q,n,i,iq))
#---respuesta: C = 1'484.658.00
```

Ejemplo 4.5.2. *Una mujer de 55 años quiere comprar una pensión mensual vencida. Averigüó que, actuarialmente, la expectativa de vida de las mujeres en Colombia, a la edad 55, es de 30 años.*

Una oficina de rentas vitalicias le ofrece una renta mes vencido, con incrementos anuales de $4.0\,\%$, y una tasa de $8.0\,\%$ efectiva anual. Si esta persona desea una pensión de un salario mínimo mensual $\$737.717$, cuánto tendría que invertir en este contrato, sin incluír los posibles recargos de la oficina?. La respuesta con el siguiente programa R es $F0 = \$155'403.660$.

Solución La solución consiste en calcular F_0, dado $C = \$737.717$, y los parámetros dados en el enunciado.

$$F_0 = C(G^{(q)}a)^{(m)}_{\overline{n|}i} = C(G^{(1)}a)^{(12)}_{\overline{30|}i=0.08}.$$

```
#-----datos
n=30; m=12; q=1; i=0.08; iq=0.04;
C = 0.737717e+06
#---------funcion para la anualidad geometrica vencida
Gavq.mn = function(m,q,n,i,iq){
try(if((1+iq)^q > 1+i) stop("tasa inflacion invalida"))
try(if(m%%q != 0) stop("m no es divisible por q"))
v = (1+i)^(-1)
res = v^(1/m)*Gaaq.mn(m,q,n,i,iq)
return(res)}
(F0=C*Gavq.mn(m,q,n,i,iq))
#---respuesta: F0 = 155'403.660
```

Anualidades decrecientes geometricamente

Para definir anualidades con cuotas que decrecen geométricamente se modifica la expresión para las cuotas en (4.30) colocando

$$r(k) = (1+i_q)^{-\frac{1}{q}\lfloor\frac{k-1}{r}\rfloor}.$$

Si se define la tasa anticipada $d_q = 1-(1+i_q)^{-1}$ se obtiene

$$r(k) = (1-d_q)^{\frac{1}{q}\lfloor\frac{k-1}{r}\rfloor}, \tag{4.40}$$

por lo que, para utilizar pagos geométricos decrecientes se cambia la tasa i_q por la tasa $-d_q$ (Nótese el signo menos!).

Demostración de la Proposición 4.5.1

Demostración. La idea es encontrar una expresión equivalente a (4.33) como el producto de dos sumatorias: una con un índice $s = 1, \ldots, nq$, que recorre los períodos en que se incrementan los pagos, y otra con índice $t = 1, 2, \ldots, r$, que recorre los períodos durante los cuales éstos permanecen constantes.

Los tiempos de los pagos $\frac{k}{m}$ se pueden expresar como:

$$\frac{k}{m} = \frac{t+r(s-1)}{m},\ s = 1, \ldots, nq,\ t = 1, 2, \ldots, r.$$

Y la sumatoria $\sum_{k=1}^{nm}$ en (4.33) se puede reemplazar por $\sum_{s=1}^{nq}\sum_{t=1}^{r}$, colocando

$$\begin{aligned} F(0) &= \sum_{k=1}^{nm}(1+i)^{-\frac{k}{m}}(1+i_q)^{\frac{1}{q}\lfloor\frac{k-1}{r}\rfloor} \\ &= \sum_{s=1}^{nq}\sum_{t=1}^{r}(1+i_q)^{\frac{s-1}{q}}v^{\frac{t+r(s-1)}{m}} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{s=1}^{nq}(1+i_q)^{\frac{s-1}{q}} v^{\frac{s-1}{q}} \sum_{t=1}^{r} v^{\frac{t}{m}} \\
&= \sum_{s=1}^{nq}\left(\frac{1+i_q}{1+i}\right)^{\frac{s-1}{q}} \sum_{t=1}^{r} v^{\frac{t}{m}}.
\end{aligned}
$$

Utilizamos:

$$
\begin{aligned}
v_h &= (1+i_h)^{-1} = \left(\frac{1+i_q}{1+i}\right)^{1/q}, \\
v_m &= (1+i)^{-1/m}
\end{aligned}
$$

para obtener

$$
\begin{aligned}
(G^{(q)}a)^{(m)}_{\overline{n|}} &:= \sum_{s=1}^{nq}\left(\frac{1+i_q}{1+i}\right)^{\frac{s-1}{q}} \sum_{t=1}^{r} v^{\frac{t}{m}} \\
&= \sum_{s=1}^{nq} v_h^{s-1} \sum_{t=1}^{r} v_m^{t} = \ddot{a}_{\overline{nq|}i_h} a_{\overline{r|}i_m}.
\end{aligned}
$$

$\square$

4.6. Créditos en UVR

Definición 4.6.1. *La definición de la UVR en la página del Banco de la República:*

> *La unidad de valor real (UVR) es certificada por el Banco de la República y refleja el poder adquisitivo con base en la variación del índice de precios al consumidor (IPC) durante el mes calendario inmediatamente anterior al mes del inicio del período de cálculo. La UVR es una unidad de cuenta usada para calcular el costo de los créditos de vivienda que le permite a las entidades financieras mantener el poder adquisitivo del dinero prestado.*

Para definir un crédito en UVR se requiere especificar este índice como una sucesión de variables aleatorias $\{U(t), t = 1, 2, \ldots\}$. Entonces $U(t)$ dá el valor en pesos de una UVR en la fecha t. En la Figura **??** aparece la trayectoria de la UVR entre 2001/01 y 2018/02. La serie presenta períodos largos en los que no es decreciente:

$$U(t-1) \leq U(t).$$

Se define el saldo de un crédito en UVR como $H(t)$. Si $F(t)$ indica el valor en pesos corrientes del crédito en UVR entonces

$$F(t) = H(t)U(t). \tag{4.41}$$

Entonces, si el crédito en UVR se ofrece a una tasa efectiva mensual i_m, a n años, y las cuotas son constantes, pero en unidades de UVR, de valor C, el saldo satisface la ecuación

$$H(t) = (1 + i_m)(H(t-1) - C) \tag{4.42}$$

para $t = 1, 2, \ldots, n$, con condición de cierre $H(n) = 0$. La correspondiente ecuación de flujo de caja para $F(t)$ se obtiene a partir de (4.42)

$$H(t) = (1 + i_m)(H(t-1) - C) \tag{4.43}$$

$$\Leftrightarrow \frac{F(t)}{U(t)} = (1 + i_m)\left(\frac{F(t-1)}{U(t-1)} - C\right) \tag{4.44}$$

$$\therefore \; F(t) = (1+i_m)\left(\frac{U(t)}{U(t-1)}F(t-1) - CU(t)\right) \tag{4.45}$$

Si se define la tasa de variación mensual de la UVR en el tiempo t como

$$i_u(t) = \frac{U(t)}{U(t-1)} - 1, \tag{4.46}$$

entonces la ecuación de flujo de caja del crédito en pesos es

$$F(t) = (1+i_m)[(1+i_u(t))F(t-1) - CU(t)]. \tag{4.47}$$

Además, se cumple, para $t \geq 0$,

$$U(t) = U(0)\prod_{j=1}^{t}(1+i_u(j)) \tag{4.48}$$

donde $U(0)$ es el valor de la UVR en la fecha de inicio del crédito. La conclusión de (4.47) es que un crédito en UVR es equivalente a un crédito en pesos corrientes con tasa aleatoria dada por $i(t) = (1+i_m)(1+i_u(t)) - 1$, y un pago que crece geométricamente en el valor $U(t)$, (4.48), aleatorio.

Ejemplo 4.6.1. *Calcule las cuotas mensuales anticipadas de crédito de vivienda en UVR, para 15 años, financiable a una tasa efectiva anual de 12 $\%$ sobre la UVR, por valor de* $\$250$ *mill. La UVR a la fecha tiene valor en pesos,* $\$243.5991$.

Solución El costo en UVR del crédito es
`Cap.uvr = 250.0e+06/243.5991`.

El valor de la anualidad es $\ddot{a}^{(12)}_{\overline{15}|i=0.12}$ para 12 cuotas uvr al año, mes anticipado, de $1/12$ cada una. Luego, si las cuotas en uvr se indican por `Cuota.uvr`, se debe tener la ecuación

$$\text{Cap.uvr} = 12\,(\texttt{Cuota.uvr})\,\ddot{a}^{(12)}_{\overline{15}|i=0.12}$$

Hay que despejar `Cuota.uvr`. Con el programa siguiente se obtiene que la cuota en UVR es `9442.354`, que, convertida en pesos, para la primera cuota es `2'300.149`.

```
# anualidad m pagos  anticipada
# formula de la anualidad
aamn = function(m,n,i){
v = 1/(1+i)
dm = m * (1 - v ^ (1 / m))
p = (1-v^n)/dm
return(p)}
# datos del problema
n=15
i=0.12
m=12
uvr = 243.5991
Cap.pesos = 200.0e+06
Cap.uvr = Cap.pesos/uvr
# calculo de la cuota
(cuota.uvr = Cap.uvr/(12*aamn(m=m,n=n,i=i)))
(cuota.pesos = cuota.uvr*uvr)
```

Ejemplo 4.6.2. *A continuación se colocan instrucciones en R para los flujos de caja de la anualidad del Ejemplo 4.6.1 anterior.*

```
# Ejemplo 1  Flujo de caja de anualidad pagos uniformes
# vencidos

source("anualidades.formulas.r")
m = 12
ia = 0.12
F0 = 250*1.0e+06
n = 15
im = (1+ia)^(1/12)-1
(Cm = F0/(m*aamn(m=m,n=n,i=ia)))

#------flujo de caja
N = n*m
F = double(N)
F[1] = (1+im)*(F0 - Cm)
```

```
for(j in 2:N){
F[j] = (1+im)*(F[j-1]-Cm)}
tail(F)
tn = seq(1,N)
plot(tn,F,type='l',lwd=2)
```

Ejemplo 4.6.3. *A continuación se colocan instrucciones en R para los flujos de caja de la anualidad del Ejemplo 4.6.1 anterior, pero con incrementos mensuales a una tasa equivalente a la tasa promedio de incremento de la UVR.*

```
# Ejemplo 2  Anualidad geometrica

D = read.table("UVR2.prn",header=TRUE,stringsAsFactors=FALSE)
attach(D)
uvr=rev(pesos)
fechar = rev(fecha)

np = length(uvr)
r2 = diff(uvr,1,1)/uvr[1:(np-1)]

t = seq(1,length(r2))
m1 = lm(r2 ~t)
summary(m1)

iqt = m1$coef[1]+m1$coef[2]*t
plot(t,r2,type='l')
lines(t,iqt,col='red',lwd=2)
abline(h=mean(r2),col='blue',lwd=2)

#------parametros
(iq = (1+mean(r2))^(365)-1)
[1] 0.04855237

q=12;r=1;
#------primera cuota
```

```
(Cg = F0/Gaaqmn(i=ia,m=m,q=q,n=n,iq=iq))
[1] 2180895
#------funcion de pagos
pago = function(k){Cg*(1+iq)^(floor((k-1)/r)/q)}
#------flujo de caja
N = n*m
Fg = double(N)
Fg[1] = (1+im)*(F0 - Cg)

for(j in 2:N){
Fg[j] = (1+im)*(Fg[j-1]-pago(j))}
tail(Fg)
#------graficas
P = pago(tn)
par(mfrow=c(2,1))
plot(tn,Fg,type='l',lwd=2)
lines(tn,F,col='red',lwd=2)
plot(tn,P,type='l')
```

4.7. Anualidades con pagos en progresión aritmética

Se denominará una anualidad con pagos en progresión aritmética a una anualidad a n años, con m pagos en el año, que aumentan en una cantidad fija $\frac{1}{mq}$, q veces en el año. El entero m debe ser divisible por q, y se coloca $m = qr$, para r entero. Los primero r pagos son iguales a $\frac{1}{mq}$. Los valores para m son $m = 1, 2, 4, 12, 52, 360.$

Ejemplos

1. $m = 12$ y $q = 2$ significa que se realizan 12 pagos al año y éstos se incrementan 2 veces al año. Los primero 6 pagos son iguales a $1/mq = 1/24$. Cada $r = 6$ meses hay un incremento en los pagos igual a $1/24$. Luego los siguientes 6 pagos son iguales a $2/mq = 1/12$.

2. $m = 4$ y $q = 1$ significa 4 pagos al año y éstos se incrementan 1 vez al año cada

$r = 4$ trimestres.

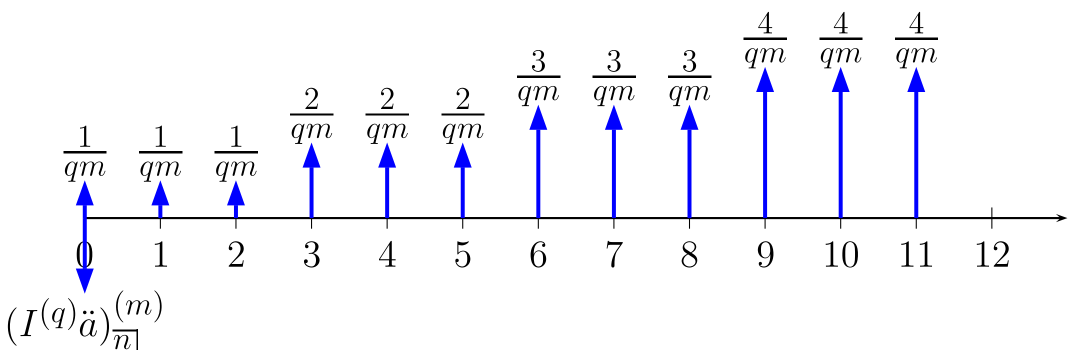


Figura 4.4: Pagos $r(k)$ con $m = 12$ pagos, $q = 4$ incrementos al año, $r = 3$

La expresión para el pago anticipado en el tiempo $k = 0, 1, \ldots, mn - 1$ es

$$r(k) = \frac{1}{mq}\left(1 + \left\lfloor \frac{k}{r} \right\rfloor\right) = \frac{1}{mq}\left(1 + \left\lfloor \frac{qk}{m} \right\rfloor\right) = \frac{1}{mq}\left\lceil \frac{qk}{m} \right\rceil, \tag{4.49}$$

donde $\lfloor z \rfloor$ es la función parte entera de z ó función piso, y $\lceil z \rceil$ es la función techo, tales que $\lceil z \rceil = 1 + \lfloor z \rfloor$. En lo que sigue, se utilizará cualquiera de las expresiones en (4.49) para $r(k)$. La manera como cambian los pagos se puede deducir observando que

si $0 \leq k \leq r - 1$ entonces $1 + \lfloor \frac{k}{r} \rfloor = 1$, por lo que el pago es $\frac{1}{qm}$.

si $r \leq k \leq 2r - 1$ entonces $1 + \lfloor \frac{k}{r} \rfloor = 2$, por lo que el pago es $\frac{2}{qm}$,

y así sucesivamente hasta completar q pagos en el año, por lo que en el último período el pago es $\frac{1}{m}$.

Los pagos se van incrementando en $\frac{1}{qm}$ en cada bloque de r tiempos. La Figura 4.4, muestra la gráfica de $r(k)$ en un caso particular.

La fórmula para el flujo de caja correspondiente a esta anualidad con pagos anticipados es

$$F(k) = (1 + i)^{\frac{1}{m}}(F(k - 1) - r(k - 1)), \tag{4.50}$$

para $k = 1, \ldots, nm$. Desarrollando:

$$F(k) = (1+i)^{\frac{1}{m}} F(k-1) - \frac{1}{mq}(1+i)^{\frac{1}{m}} \left(1 + \left\lfloor \frac{k-1}{r} \right\rfloor\right). \tag{4.51}$$

La solución de (4.51) es, aplicando la fórmula general (4.4),

$$F(k) = (1+i)^{\frac{k}{m}} \left(F(0) - \frac{1}{mq} \sum_{s=1}^{k} (1+i)^{\frac{-(s-1)}{m}} \left(1 + \left\lfloor \frac{s-1}{r} \right\rfloor\right) \right). \tag{4.52}$$

Y la condición de cierre es que el saldo de la cuenta al final del período debe ser cero, $F(nm) = 0$. Si el costo actuarial se denota por

$$(I^{(q)}\ddot{a})^{(m)}_{\overline{n|}} := F(0).$$

entonces, reemplazando $k = nm$ en (4.52) y aplicando la condición de cierre, se obtiene

$$(I^{(q)}\ddot{a})^{(m)}_{\overline{n|}} = \frac{1}{mq} \sum_{k=0}^{nm-1} (1+i)^{-\frac{k}{m}} \left(1 + \left\lfloor \frac{k}{r} \right\rfloor\right). \tag{4.53}$$

Proposición 4.7.1. *Una expresión alterna a (4.53) es*

$$(I^{(q)}\ddot{a})^{(m)}_{\overline{n|}} = \frac{\ddot{a}^{(q)}_{\overline{n|}} - nv^n}{d^{(m)}}. \tag{4.54}$$

Ver la demostración más adelante. La correspondiente anualidad con pagos vencidos tiene costo actuarial dado por

$$\begin{aligned}(I^{(q)}a)^{(m)}_{\overline{n|}} &= \frac{1}{mq} \sum_{k=1}^{nm} (1+i)^{-\frac{k}{m}} \left(1 + \left\lfloor \frac{k-1}{r} \right\rfloor\right) \\ &= v^{\frac{1}{m}} (I^{(q)}\ddot{a})^{(m)}_{\overline{n|}} = \frac{\ddot{a}^{(q)}_{\overline{n|}} - nv^n}{i^{(m)}}. \end{aligned} \tag{4.55}$$

Ejemplo 4.7.1. *Calcule el costo actuarial de una anualidad a 10 años, con pagos mes anticipado. El valor de los pagos el primer trimestre es de* $C = \$100.000.00$*, con incrementos trimestrales en esta cantidad. Una entidad ofrece financiarla a una tasa* $i = 0.05$ *efectiva anual.*

Solución Utilizamos R para la programación de la fórmula (4.54) como sigue. En la función `aamn(m,n,i)` está $\ddot{a}_{\overline{n}|}^{(q)}$ y en `Iaaq.mn` está $\left(I^{(q)}\ddot{a}\right)_{\overline{n}|}^{(m)}$. Los parámetros son `n=10, q=4, m=12, i=0.05`.

```
#--------funcion para aamn
aamn = function(i,m,n){
v = 1/(1+i)
dm = m * (1 - v ^ (1 / m))
p = (1-v^n)/dm
return(p)}
#--------funcion para (Iaaq)mn
Iaaqmn = function(i,m,q,n){
aaqn = aamn(q,n,i)
v = (1+i)^(-1)
dm = m*(1-v^(1/m))
res = (aaqn - n*v^n)/dm
return(res)}
```

Luego se ingresan los parámetros y se calcula el valor

```
#------datos
n = 10
m = 12
q = 4
i = 0.05
(R = 1.0e+05*m*q*Iaaqmn(i,m,q,n))
```

El resultado es $R = \$79'165.945$. Se interpresta como el precio que se pagaría a una entidad que ofrece el $5\,\%$ efectivo anual, a cambio de que ésta provea pagos mes anticipado, por valor de $\$100.000.00$ los 3 primeros meses, con incrementos de $\$100.000.00$ en el segundo trimestre, con otro incremento por la misma cantidad el siguiente trimestre, y así sucesivamente, hasta completar 10 años.

Ejercicio 4.7.1. *Una identidad útil para expresar* $\left(I^{(q)}\ddot{a}\right)_{\overline{n}|}^{(m)}$ *en términos de* $(I\ddot{a})_{\overline{n}|}$ *es* *la siguiente (la comprobación se deja como ejercicio).*

$$(I^{(q)}\ddot{a})_{\overline{n}|}^{(m)} = \frac{d^{(q)}}{q^2 d^{(m)}}(I\ddot{a})_{\overline{qn}|i_q}. \tag{4.56}$$

El programa en R siguiente muestra una comprobación numérica de esta identidad.

```
# identidad en pag. 34 2.34
source("anualidades.formulas.r")
#--------parametros
n = 10; m = 12; i = 0.08;
v = 1/(1+i)
q = 4; r = 3;
(Iaaqmn(i,m,q,n))

dq = q*(1-v^(1/q))
dm = m*(1-v^(1/m))
iq = (1+i)^(1/q)-1
im = (1+i)^(1/m)-1
(dq*Iaaqmn(i=iq,m=1,q=1,n=q*n)/(q^2*dm))
```

Anualidades con pagos decrecientes en progresión aritmética

Un tipo de anualidad con pagos decrecientes se define reversando en el tiempo los pagos de la anualidad anterior dada en (4.49). Concretamente, el pago es de la forma

$$r_D(k) = \frac{1}{mq}\left(nq - \left\lfloor \frac{qk}{m} \right\rfloor\right). \tag{4.57}$$

Si se denota el costo de la anualidad con pagos anticipados por $(D^{(q)}\ddot{a})_{\overline{n}|}^{(m)}$ entonces se puede obtener su expresión observando que la suma de los pagos crecientes y decrecientes es constante:

$$r(k) + r_D(k) = \frac{1}{mq}\left(1 + \left\lfloor \frac{qk}{m} \right\rfloor\right) + \frac{1}{mq}\left(nq - \left\lfloor \frac{qk}{m} \right\rfloor\right) = \frac{1}{mq}(1 + nq).$$

Por tanto, se debe cumplir que los valores presentes de los pagos satisfacen

$$(I^{(q)}\ddot{a})_{\overline{n|}}^{(m)} + (D^{(q)}\ddot{a})_{\overline{n|}}^{(m)} = \left(\frac{1}{q} + n\right)\ddot{a}_{\overline{n|}}^{(m)}$$

de donde

$$(D^{(q)}\ddot{a})_{\overline{n|}}^{(m)} = \left(\frac{1}{q} + n\right)\ddot{a}_{\overline{n|}}^{(m)} - (I^{(q)}\ddot{a})_{\overline{n|}}^{(m)}. \tag{4.58}$$

El costo (valor presente) de la correspondiente anualidad vencida es

$$(D^{(q)}a)_{\overline{n|}}^{(m)} = v^{\frac{1}{m}}(D^{(q)}\ddot{a})_{\overline{n|}}^{(m)}. \tag{4.59}$$

Ejemplo 4.7.2. *Una anualidad a $n = 15$ años, financiado a una tasa efectiva anual de $i = 0.07$, con $m = 12$ pagos al año, anticipados, se contrata por una inversión de $C_p = \$250$ mill. Cuál es el valor de las primeras 12 cuotas?. La respuesta se puede obtener con el siguiente programa en R, como el valor $\$3'578,331$.*

```
#-----------------------------------
# anualidad decreciente progresión aritmética
# datos de la anualidad
n = 15; i = 0.07; m = 12; r = 1; q = 1;
Cp = 250*1.0e+06

Daaqmn = function(i,q,m,n){
p = (1/q+n)*aamn(i,m,n) - Iaaqmn(i,m,q,n)
return(p)}
(C=Cp/(m*q*Daaqmn(i,q,m,n)))
k = seq(1,n*m)
rD = C*(n*q-floor(q*(k-1)/m))
rD[1]
3578331
```

4.8. Anualidades con pagos lineales

Algunos sistemas de crédito utilizan cuotas que son funciones lineales, más generales que (4.49) y (4.57).

Definición 4.8.1. *Una anualidad lineal se define como un flujo $r(k)$ de m pagos al año, que se incrementan en una tasa fija $\rho \in (0,1)$, cada q períodos, a partir de un pago inicial de 1, dados por*

$$r(k) = 1 + \rho \left\lfloor \frac{k-1}{r} \right\rfloor, \; k = 1, 2, \ldots, nm, \; r = m/q. \tag{4.60}$$

La tasa ρ se asume dada.

Como el pago en (4.60) se puede escribir

$$r(k) = (1-\rho) + \rho \left(1 + \left\lfloor \frac{k-1}{r} \right\rfloor \right),$$

entonces el costo de esta anualidad corresponde a la suma de los valores presentes de dos anualidades: una uniforme y otra con pagos en progresión aritmética. En el caso de pagos anticipados, su valor actuarial está dado por:

$$(L^{(q)}\ddot{a})^{(m)}_{\overline{n}|} = (1-\rho)m\ddot{a}^{(m)}_{\overline{n}|} + \rho\, m\, q (I^{(q)}\ddot{a})^{(m)}_{\overline{n}|}. \tag{4.61}$$

Y en el caso de pagos vencidos, por

$$(L^{(q)}a)^{(m)}_{\overline{n}|} = m(1-\rho)a^{(m)}_{\overline{n}|} + \rho\, m\, q (I^{(q)}a)^{(m)}_{\overline{n}|}. \tag{4.62}$$

La tasa ρ reflejaría el incremento en el costo de vida. Si el primer pago es C, entonces el costo de la anualidad anticipada es

$$C_p = C(L^{(q)}\ddot{a})^{(m)}_{\overline{n}|}. \tag{4.63}$$

Según [Gomez Ceballos, 1985, pag. 229], el sistema (4.61) fué un sistema de crédito de vivienda utilizado por el Banco Colpatria en su plan C, por la antigua Conavi en sus planes A,B,C,D, y por la entonces Corporación de Ahorro y Vivienda Las Villas, en su plan 06.

La programación en lenguaje R de estas anualidades es como sigue

```
#-------anualidad lineal anticipada m pagos anuales
#        que crecen cada q periodos a una tasa rho
Laaqmn = function(i,m,q,n,rho){
try(if(m%%q != 0) stop("m no es divisible por q"))
A1 = aamn(i,m,n)
A2 = Iaaqmn(i,m,q,n)
res = m*(1-rho)*A1+m*q*rho*A2
return(res)}
#-------anualidad lineal anticipada m pagos anuales
#        que crecen cada q periodos a una tasa alfa
Lavqmn = function(i,m,q,n,rho){
try(if(m%%q != 0) stop("m no es divisible por q"))
v = 1/(1+i)
res = v^(1/m)*Laaqmn(i,m,q,n,rho)
return(res)}
```

Anualidades lineales decrecientes

Se puede colocar

$$-\rho < 0, \tag{4.64}$$

en (4.60), (4.61) y (4.62), con $\rho > 0$, lo que se interpreta como una anualidades con pagos decrecientes en una tasa ρ. Sin embargo, dado que en este caso los pagos son

$$r(k) = 1 - \rho \left\lfloor \frac{k-1}{r} \right\rfloor,\ k = 1, 2, \ldots, nm,\ r = m/q,$$

hay que colocar la condición sobre ρ tal que cuando $k = nm$ se tenga $r(nm) \geq 0$. Es decir $1 - \rho(nq) \geq 0$. Por tanto, la restricción sobre el valor de ρ, es

$$\rho \leq \frac{1}{nq}. \tag{4.65}$$

Ejemplo 4.8.1. *Suponga que el crédito por 100 mill, pagos mes anticipado, por 15 años, financiado a una tasa de $11.5\,\%$ efectiva anual y las cuotas aumentan en un $6.50\,\%$ cada año. Encuentre el valor de la cuota C durante el primer año.*

Solución. Los parámetros son $m = 12$, $n = 10$, $q = 1$, $i = 0.115$, $\rho = 0.065$.

$$C_p = Cm[(1-\rho)\ddot{a}^{(m)}_{\overline{n|}} + \rho\, q\, (I^{(q)}\ddot{a})^{(m)}_{\overline{n|}}]$$

$$\therefore\ C = \frac{C_p}{m[(1-\rho)\ddot{a}^{(m)}_{\overline{n|}} + \rho\, q\, (I^{(q)}\ddot{a})^{(m)}_{\overline{n|}}]}.$$

En el programa R siguiente se programa esta última expresión para calcular C.

```
#-------calculo primera cuota
#-------parametros del credito:
n = 15; m = 12; q = 1; i = 0.115; rho = 0.065;
A1 = aamn(i,m,n)
A2 = Iaaqmn(i,m,q,n)
Cp = 100.0e+06
(C=Cp/((1-rho)*A1+rho*q*A2)/m)
#----respuesta: $844.800.00 por mes el primer año.
```

Es posible visualizar la evolución de las cuotas y los saldos. El programa R siguiente los calcula y grafica. La gráfica de los saldos debe terminar en cero, lo que permite comprobar que el cálculo del costo efectivamente corresponde al diseño del sistema.

```
#--------grafico de las cuotas
r = m/q
k = seq(1,n*m)
rk = C*(1+rho*floor((k-1)/r))
plot(k,rk,type='h')
#--------grafico del flujo de caja
F = double(n*m)
i12 = (1+i)^(1/12)-1
F0 = Cp
F[1] = (1+i12)*F0-rk[1]
for(j in 2:(n*m)){
F[j] = (1+i12)*F[j-1]-rk[j]}
plot(k,F,type='l',lwd=2,ylim=c(-1,1.5e+08))
abline(h=0)
```

4.9. Sistemas agregados

Debido a que el valor presente en el miembro derecho de (4.5),

$$F(t) = v^{-t}F(0) + \sum_{k=1}^{t} v^{k-t}r(k),$$

es un operador lineal con respecto a $r(k), k = 1, \ldots, t$, se pueden combinar sistemas de pagos colocando en general,

$$r(k) = r_1(k) + r_2(k) + \ldots + r_p(k),$$

donde cada r_j puede corresponder a un sistema diferente: cuotas geométricas, lineales, crecientes, decrecientes, con diferentes valores de la frecuencia de pago m, etc. Estos sistemas se denominan en Gomez Ceballos [1985], sistemas agregados.

Ejemplo 4.9.1. *Considere el siguiente diseño de una anualidad a $n = 10$ años, que consiste es un agregado de dos sistemas.*

1. *Una anualidad lineal, con $m = 12$ pagos al año, vencidos, financiada a una tasa $i = 0.07$ efectiva anual. Con crecimiento de pagos cada semestre, a una tasa de $10.0\,\%$.*
2. *Una anualidad geométrica, con $m = 1$, pagos al año, vencida, financiada a la tasa $i = 0.07$, efectiva anual. Con crecimiento de pagos cada año, a una tasa $i_q = 0.03$. Los pagos son de la forma $r(k) = (1 + i_q)^{k-1}$, para $k = 1, 2, \ldots, 10$*

Si la primera mesada es $C = 1$ mill, qué valor tiene esta anualidad?. La solución es el valor C_p dado por

$$C_p = C[(L^{(q_1)}a)_{\overline{n|}}^{(m_1)} + (G^{(q_2)}a)_{\overline{n|}}^{(m_2)}]$$

utilizando (4.62)

$$(L^{(q)}a)_{\overline{n|}}^{(m_1)} = m_1(1-\rho)a_{\overline{n|}}^{(m_1)} + \rho\, m_1\, q_2 (I^{(q_2)}a)_{\overline{n|}}^{(m_1)}.$$

con $\rho = 0.1$, $m_1 = 12$, $q_1 = 2$.

Usando (4.33)

$$(G^{(q_2)}a)^{(m_2)}_{\overline{n}|} = \ddot{a}_{\overline{nq_2}|i_h} a_{\overline{r_2}|i_m}.$$

con $m_2 = 1$, $q_2 = 1$, $r_2 = 1$, $1+i_h = (1+i)/(1+i_{q_2})$, $i_{q_2} = 0.03$, $i = 0.07$.
El programa en R produce el costo $\$167'774.100$.

```
source("anualidades.formulas.r")
#-------------Ejemplo sistema agregado
m1 = 12; i1 = 0.07; q1 = 2; rho = 0.1;
n = 10
A1=Lavqmn(i1,m1,q1,n,rho)

m2 = 1; q2 = 1; i2 = 0.07; iq2 = 0.03;
A2=Gavqmn(i2,m2,q2,n,iq2)
(Cp = A1+A2)
[1] 167.7741
```

Demostraciones de Proposiciones

Demostración. (Prop 4.7.1) Se puede expresar el miembro derecho de (4.53) como el producto de dos sumatorias:

$$\begin{aligned}(I^{(q)}\ddot{a})^{(m)}_{\overline{n}|} &= \frac{1}{mq}\sum_{j=0}^{nm-1} v^{\frac{j}{m}}(1+\lfloor\frac{j}{r}\rfloor) \\ &= \frac{1}{mq}\sum_{s=1}^{nq} s \sum_{t=0}^{r-1} v^{\frac{t+r(s-1)}{m}} \\ &= \frac{1}{mq}\sum_{s=1}^{nq} s v^{\frac{s-1}{q}} \sum_{t=0}^{r-1} v^{\frac{t}{m}},\end{aligned}$$

y utilizando las identidades

$$\sum_{s=1}^{n} s\, v^{s-1} = \frac{1-v^n - nv^n(1-v)}{(1-v)^2},$$

$$\sum_{t=0}^{r-1} v^t = \frac{1-v^r}{1-v},$$

se obtiene, con $d^{(m)} = m(1-v^{1/m})$, definida en (4.25),

$$\begin{aligned}
(I^{(q)}\ddot{a})^{(m)}_{\overline{n}|} &= \frac{(1-v^{\frac{1}{q}})(1-v^n - nqv^n(1-v^{\frac{1}{q}}))}{mq(1-v^{\frac{1}{m}})(1-v^{\frac{1}{q}})^2} \\
&= \frac{1}{d^{(m)}} \frac{1-v^n - nqv^n(1-v^{\frac{1}{q}}))}{q(1-v^{\frac{1}{q}})} \\
&= \frac{1}{d^{(m)}} \left(\frac{1-v^n}{q(1-v^{\frac{1}{q}})} - \frac{nqv^n(1-v^{\frac{1}{q}}))}{q(1-v^{\frac{1}{q}})} \right) \\
&= \frac{\ddot{a}^{(q)}_{\overline{n}|} - nv^n}{d^{(m)}},
\end{aligned}$$

donde $\ddot{a}^{(q)}_{\overline{n}|}$ se definió en (4.26). □

4.10. Ejercicios

1. Encuentre el valor futuro de 6 mill a 10 años, si la tasa efectiva anual es de 2.7 % en los primeros 4 años y de 3.0 % los restantes 6 años.

```
VF = 6*(1+0.027)^4*(1+0.03)^6
#-------respuesta
7.969964
```

2. Se colocan 1’200 a 7 años con tasas así: durante los dos primeros años el 3.0 % semestre vencido; los 3 años siguientes, el 2.5 % anual efectivo, y los dos años finales el 3.4 % trimestre vencido. Encuentre el valor futuro.

```
C = 1.7 # capital
#------tasas nominales
i2 = 0.03/2 # 2 años
i = 0.025   # 3 años
i4 = 0.034/4 # 2 años
(VF = C*(1+i2)^4*(1+i)^3*(1+i4)^8)
#------respuesta
2.079179
```

3. Si $i^{(12)} = 0.15$ encuentre $i^{(2)}$ de tal forma que sean equivalentes.

$$(1+i^{(12)}/12)^{12} = 1+i = (1+i^{(2)}/2)^2,$$
$$\therefore\ i^{(2)} = 2(\sqrt{(1+i^{(12)}/12)^{12}} - 1) = 0.1547664.$$

4. Una propiedad se compró en 36'000 y se vendió a los dos años en 66'000. Cuál fué la tasa de valorización efectiva mensual y la tasa nominal convertible mensualmente?

5. El UPAC tenía un valor de 527.54 en 03/abril/82. Cuál es el valor que tenía 82 días depués, si la corrección monetaria diaria efectiva se hubiera mantenido constante e igual a 0.000522384?

6. Una empresa contabilizó excesos de liquidez por 35 mill. Los colocó inicialmente en un certificado de depósito a término fijo, a una tasa nominal del 3.2 $\%$ convertible trimestralmente, por término de un año. A los dos meses la empresa vende el certificado a una entidad financiera que lo recibe al 3.4 $\%$ anual, convertible trimestralmente. Por cuanto fué la transacción?

7. Encuentre $(1+\frac{i^{(6)}}{6})^{20}$ si se tiene que $\delta = \ln(1+i)$ y:

$$(1-d)^{10}(1-\frac{d^{(3)}}{3})^{-20}e^{-10\delta} = 1.1^{-12}$$

8. El saldo al final del año k, $F(k)$, de un fondo colocado a interés compuesto con inversiones, satisface la ecuación:

$$F(k) = (1+i)F(k-1) + r(k),\ k = 1, 2, \ldots, n$$

donde i es la tasa efectiva anual y $F(0)$ es el valor inicial de fondo. Suponga que $(r(k))_{k=1,2,\ldots}$ son variable aleatorias que representan la inversión (ahorro) al final del mes k. Además suponga que todas son copias independientes de la variable r que tiene la siguiente distribución:

w	0	35	50
$P(r = w)$	$2/9$	$4/9$	$2/9$

(4.66)

a) Encuentre la expresión para $F(n)$, el saldo al final del año n.

b) Encuentre expresiones generales para $E(F(n))$ y $Var(F(n))$.

c) Suponga que $i = 0.02$, $F(0) = 10$, $n = 12$. Evalúe $E(F(n))$ y $\sigma_{F(n)}$

9. Con el mismo enunciado del problema anterior, suponga que al final de cada mes se hace un depósito de $c > 0$, y gastos iguales a $X(k)$, donde $(X(k))_{k=1,2,\ldots}$ es una sucesión de variables aleatorias, independientes, con la misma distribución, dada en la tabla (1) del problema anterior. Luego, las inversiones al final del mes k están dadas por: $r(k) = c - X(k),\ k = 1, 2, \ldots, n$, (ahorro-gasto).

   a) Encuentre la expresión para el saldo al final del año n.

   b) Encuentre la expresión para $E(F(n)),\ Var(F(n))$, colocando $F(0) = b$

   c) Suponga que c representa el ingreso mensual depositado en la cuenta, y que el promedio de gastos mensuales representa el $30\,\%$ del ingreso. Asuma que el saldo inicial es 2/3 del ingreso mensual. Encuentre $c,\ b,\ E(F(36)),\ \sigma_{F(36)}$.

   d) Suponga (se puede probar que es válido) que $F(n) \sim N(E(F(n)), Var(F(n)))$, para $n > 30$. Encuentre un intervalo alrededor de la media que contenga el valor de $F(36)$ con una probabilidad del $90\,\%$

4.11. Problemas

1. Un crédito para vivienda a $n = 15$ años, por valor de 200 mill, financiado a una tasa efectiva anual $i = 0.113$, se paga mediante un sistema agregado de dos anualidades:

a) Una anualidad lineal con $m = 12$ pagos anticipados al año, que crecen semestralmente, a partir del segundo semestre, en un porcentaje fijo de $\alpha = 0.2$ de la cuota C que se paga durante el primer semestre.

b) Una anualidad geométrica con un pago año vencido, con crecimiento anual, a una tasa $i_q = 0.05$.

Puntos a resolver:

a) Plantee la ecuación que debe cumplir la cuota C, y explíquela.

b) Reporte el valor de C. Reporte las instrucciones en R.

c) Grafique las cuotas. Reporte la gráfica.

Sugerencias: Use la definición de anualidad lineal, caso vencido que aparece en la Tabla 4.3, pag. 148, caso 3.b.

2. Un departamento de estructuración de un Banco diseña una anualidad a $n = 20$ años, financiada a una tasa efectiva anual de $i = 0.087$. La anualidad es de tipo agregado y consiste de dos anualidades:

   a) Una anualidad geométrica, con pagos C_1, mes vencido, que aumentan anualmente, a partir del segundo año, a una tasa $i_{q1} = 0.04$. El pago en el primer año se indica por C_1.

   b) Una anualidad geométrica, con dos pagos vencidos en el año, que aumenta anualmente, a partir del segundo año, en una tasa $i_{q2} = 0.03$. El pago en el primer año se indica por C_2.

   c) Los valores de los pagos cumplen: $C_2 = 0.6C_1, C1 = 2.5$ mill.

   Encuentre:

   a) El valor de esta anualidad (explique la fórmula que utilizó para la solución)..

   b) La gráfica de los pagos.

   c) En qué porcentaje cambia el valor de la anualidad si la segunda cuota i_{q2} se incrementa a $i_{q2} = 0.04$?.

3. Un departamento rentas vitalicias en una Aseguradora diseña una anualidad a $n = 15$ años, financiada a una tasa efectiva anual de $i = 0.095$. La anualidad es de tipo agregado y consiste de dos anualidades:

a) Una anualidad creciente lineal, con pagos C_1, mes vencido, que aumentan anualmente, a partir del segundo año, a una tasa $\alpha = 0.04$. El pago en el primer año se indica por C_1.

b) Una anualidad geométrica, con dos pagos vencidos en el año, que aumenta anualmente, a partir del segundo año, en una tasa $i_q = 0.04$. El pago en el primer año se indica por C_2.

c) El valor de las cuotas cumplen: $C_2 = C_1 = 2.5$ mill.

Encuentre:

a) El valor de esta anualidad (explique la fórmula que utilizó para la solución)..

b) La gráfica de los pagos.

c) En qué porcentaje cambia el valor de la anualidad si la tasa α de la primera cuota se incrementa a $\alpha = 0.06$?.

4. Un departamento de rentas vitalicias en una Aseguradora diseña una anualidad a $n = 25$ años, financiada a una tasa efectiva anual de $i = 0.075$. La anualidad es de tipo agregado y consiste de dos anualidades:

a) Una anualidad creciente lineal, con pagos C_1, trimestre vencido, que aumentan anualmente, a partir del segundo año, a una tasa $\alpha = 0.05$. El pago en el primer año se indica por C_1.

b) Una anualidad geométrica decreciente (ver definición en (4.40), pag. 121), con dos pagos vencidos en el año, que decrece anualmente, a partir del segundo año, en una tasa $i_q = 0.04$. El pago en el primer año se indica por C_2.

c) El valor de las cuotas cumplen: $C_2 = C_1 = 2.5$ mill.

Encuentre:

a) El valor de esta anualidad (explique la fórmula que utilizó para la solución)..

b) La gráfica de los pagos.

c) La gráfica de los saldos $F(k)$. (Importante!: recordar que el flujo de caja se hace con una tasa efectiva para cada período. En este caso es una tasa trimestral efectiva)

5. (ver Gomez Ceballos [1985, pag. 166]) El departamento de créditos en una Cooperativa Financiera diseña un crédito a $n = 5$ años, financiado a una tasa efectiva anual de $i = 0.1275$. La anualidad es de tipo agregado y consiste de dos anualidades:

   a) Una anualidad lineal decreciente (ver la definición en pag. 134), con pagos C_1, mes vencido, que disminuyen anualmente, a partir del segundo año, a una tasa $\alpha = 0.15$. El pago en el primer año se indica por C_1.

   b) Una anualidad geométrica decreciente (ver definición en (4.40), pag. 121), con dos pagos vencidos en el año, que decrecen anualmente, a partir del segundo año, en una tasa $i_q = 0.1$. El pago en el primer año se indica por C_2.

   c) El valor del crédito es por 20 mill. El valor de las cuotas cumplen: $C_2 = C_1 = C$ mill.

   Encuentre:

   a) El valor de la cuota común C (explique la fórmula que utilizó para la solución)..

   b) La gráfica de los pagos.

   c) La gráfica de los saldos $F(k)$. (Importante!: recordar que el flujo de caja se hace con una tasa efectiva para cada período)

6. (ver Gomez Ceballos [1985, pag. 170]) El departamento de créditos en una Cooperativa Financiera diseña un crédito a $n = 6$ años, financiado a una tasa efectiva anual de $i = 0.15$. El crédito es de tipo agregado y consiste de dos anualidades:

   a) Una anualidad uniforme, con pagos C_1, mes vencido.

   b) Una anualidad lineal decreciente (ver definición en pag. 134), con dos pagos vencidos en el año, que decrecen anualmente, a partir del segundo año, en una tasa $i_q = 0.1$. El pago en el primer año se indica por C_2.

   c) El valor del crédito es por 20 mill. El valor de las cuotas cumplen: $C_2 = C_1 = C$ mill.

   Encuentre:

   a) El valor de la cuota común C (explique la fórmula que utilizó para la solución)..

   b) La gráfica de los pagos.

c) La gráfica de los saldos $F(k)$. (Importante!: recordar que el flujo de caja se hace con una tasa efectiva para cada período)

7. Un departamento de estructuración de un Banco diseña una anualidad a $n = 20$ años, financiada a una tasa efectiva anual de $i = 0.087$. La anualidad es de tipo agregado y consiste de dos anualidades:

   a) Una anualidad lineal creciente, con pagos C_1, mes vencido, que aumentan anualmente, a partir del segundo año, a una tasa $\rho = 0.04$. El pago en el primer año se indica por C_1.

   b) Una anualidad geométrica, con dos pagos vencidos en el año, que aumenta anualmente, a partir del segundo año, en una tasa $i_{q2} = 0.03$. El pago en el primer año se indica por C_2.

   c) Los valores de los pagos cumplen: $C_2 = 0.6C_1, C1 = 2.5$ mill.

   Encuentre:

   a) El valor de esta anualidad (explique la fórmula que utilizó para la solución).

   b) La gráfica de los pagos.

   c) En qué porcentaje cambia el valor de la anualidad si la segunda cuota i_{q2} se incrementa a $i_{q2} = 0.04$?.

8. El departamento de créditos en una Cooperativa Financiera diseña un crédito a $n = 15$ años, financiado a una tasa efectiva anual de $i = 0.125$. El crédito es de tipo agregado, por valor de $\$200$ mill y consiste de tres anualidades:

   a) Una anualidad uniforme, con pagos C_1, mes vencido.

   b) Una anualidad decreciente con dos pagos vencidos al año (ver definición en caso 2.b Tabla4.4). Los dos primeros pagos se indican por C_2.

   c) Una anualidad geométrica, con un pago vencido en el año, que decrece anualmente, a partir del segundo año, en una tasa $i_{q2} = 0.03$ (ver definición en (4.40), pag. 121). El pago en el primer año se indica por C_3.

   d) Los valores de los pagos cumplen: $C_2 = C_1 = C_3 = C$ mill.

   Encuentre:

   a) El valor de C (explique la fórmula que utilizó para la solución)..

b) La gráfica de los pagos.

c) En qué porcentaje cambia el valor de C si en la tercera cuota i_{q2} se incrementa a $i_{q2} = 0.04$?.

9. (ver Gomez Ceballos [1985, pag. 180]) El departamento de créditos en una Cooperativa Financiera diseña un crédito a $n = 6$ años, financiado a una tasa efectiva anual de $i = 0.15$. El valor es por $\$200$ mill. El crédito es de tipo agregado y consiste de tres anualidades:

   a) Una anualidad uniforme, con pagos C_1, mes anticipado.

   b) Una anualidad geométrica con dos pagos vencidos al año, que crece anualmente a una tasa $i_{q1} = 0.04$.

   c) Una anualidad lineal creciente, con un pago vencido en el año, que aumenta anualmente, a partir del segundo año, en una tasa $\rho = 0.03$. El pago en el primer año se indica por C_2.

   d) Los valores de los pagos cumplen: $C_2 = C_1 = C_3 = C$ mill.

   Encuentre:

   a) El valor de C (explique la fórmula que utilizó para la solución)..

   b) La gráfica de los pagos.

   c) La gráfica del flujo de caja.

10. (ver Gomez Ceballos [1985, pag. 170]) El departamento de créditos en una Cooperativa Financiera diseña un crédito a $n = 8$ años, financiado a una tasa efectiva anual de $i = 0.13$. El crédito es de tipo agregado y consiste de dos anualidades:

   a) Una anualidad lineal decreciente (ver definición en pag. 134), con pagos mes vencido, que decrecen anualmente, a partir del segundo año, en una tasa $\rho_1 = 0.1$. El pago en el primer año se indica por C_1.

   b) Una anualidad lineal decreciente (ver definición en pag. 134), con dos pagos vencidos en el año, que decrecen anualmente, a partir del segundo año, en una tasa $\rho_2 = 0.2$. El pago en el primer año se indica por C_2.

   c) El valor del crédito es por 20 mill. El valor de las cuotas cumplen: $C_2 = C_1 = C$ mill.

Encuentre:

a) El valor de la cuota común C (explique la fórmula que utilizó para la solución)..

b) La gráfica de los pagos.

c) La gráfica de los saldos $F(k)$. (Importante!: recordar que el flujo de caja se hace con una tasa efectiva para cada período)

11. Un departamento de rentas vitalicias en una Aseguradora diseña una anualidad a $n = 20$ años, financiada a una tasa efectiva anual de $i = 0.065$. La anualidad es de tipo agregado y consiste de dos anualidades:

a) Una anualidad creciente lineal, con pagos C_1, trimestre vencido, que aumentan anualmente, a partir del segundo año, a una tasa $\alpha = 0.05$. El pago en el primer año se indica por C_1.

b) Una anualidad geométrica creciente, con dos pagos vencidos en el año, que crecen anualmente, a partir del segundo año, en una tasa $i_q = 0.04$. El pago en el primer año se indica por C_2.

c) El valor de las cuotas cumplen: $C_2 = C_1 = 2.5$ mill.

Encuentre:

a) El valor de esta anualidad (explique la fórmula que utilizó para la solución).

b) La gráfica de los pagos.

c) La gráfica de los saldos $F(k)$. (Importante!: recordar que el flujo de caja se hace con una tasa efectiva para cada período. En este caso es una tasa trimestral efectiva)

12. Un crédito para vivienda a $n = 20$ años, por valor de 200 mill, financiado a una tasa efectiva anual $i = 0.11$, se paga mediante un sistema agregado de dos anualidades:

a) Una anualidad lineal con $m = 12$ pagos anticipados al año, que crecen trimestralmente, a partir del segundo año, en un porcentaje fijo de $\alpha = 0.2$ de la cuota C que se paga durante el primer semestre.

b) Una anualidad geométrica con un pago año vencido, con crecimiento anual, a una tasa $i_q = 0.05$.

Puntos a resolver:

a) Plantee la ecuación que debe cumplir la cuota C, y explíquela.

b) Reporte el valor de C. Reporte las instrucciones en R.

c) Grafique las cuotas. Reporte la gráfica.

Sugerencias: Use la definición de anualidad lineal, caso vencido que aparece en la Tabla 4.3, pag. 148, caso 3.b.

13. Un departamento de estructuración de un Banco diseña una anualidad a $n = 15$ años, financiada a una tasa efectiva anual de $i = 0.097$. La anualidad es de tipo agregado y consiste de dos anualidades:

    a) Una anualidad geométrica, con pagos, C_1, mes vencido, que aumentan anualmente, a partir del segundo año, a una tasa $i_{q1} = 0.03$. El pago en el primer año se indica por C_1.

    b) Una anualidad geométrica, con dos pagos vencidos en el año, que aumenta anualmente, a partir del segundo año, en una tasa $i_{q2} = 0.04$. El pago en el primer año se indica por C_2.

    c) Los valores de los pagos cumplen: $C_2 = 0.7C_1, C_1 = 3.5$ mill.

    Encuentre:

    a) El valor de esta anualidad (explique la fórmula que utilizó para la solución).

    b) La gráfica de los pagos.

    c) En qué porcentaje cambia el valor de la anualidad si en la primera cuota la tasa se incrementa a de $i_{q1} = 0.03$ a $i_{q1} = 0.04$.

4.12. Tabla resumen de tipos de anualidades

	Símbolo	Descripción
1.a	$(I^{(q)}\ddot{a})^{(m)}_{\overline{n}\vert}$	Anualidad creciente m pagos anticipados, que aumentan cada q períodos en una cantidad fija $1/mq$
1.b	$(I^{(q)}a)^{(m)}_{\overline{n}\vert}$	La anterior con pagos vencidos
2.a	$(D^{(q)}\ddot{a})^{(m)}_{\overline{n}\vert}$	Anualidad decreciente m pagos vencidos, que disminuyen cada q períodos en una cantidad fija $1/mq$
2.b	$(D^{(q)}a)^{(m)}_{\overline{n}\vert}$	La anterior con pagos vencidos
3.a	$(L^{(q)}\ddot{a})^{(m)}_{\overline{n}\vert}$	Anualidad lineal m pagos anticipados,
3.b	$(L^{(q)}a)^{(m)}_{\overline{n}\vert}$	La anterior con pagos vencidos
4.a	$(G^{(q)}\ddot{a})^{(m)}_{\overline{n}\vert}$	Anualidad geométrica con m pagos anticipados, que aumentan cada q períodos en una tasa i_q
4.b	$(G^{(q)}a)^{(m)}_{\overline{n}\vert}$	La anterior con pagos vencidos

Cuadro 4.3: Anualidades Integradas - Definiciones

	Símbolo	Pago $r(k)$	Fórmula	Ecuación No
1.a	$(I^{(q)}\ddot{a})^{(m)}_{\overline{n}\vert}$	$\frac{1}{mq}(1+\lfloor\frac{qk}{m}\rfloor)$	$(\ddot{a}^{(q)}_{\overline{n}\vert} - nv^n)/d^{(m)}$	(4.54)
		$\frac{1}{mq}(1+\lfloor\frac{qk}{m}\rfloor)$	$\frac{1}{mq}\sum_{k=1}^{nm}(1+i)^{\frac{-(k-1)}{m}}\left(1+\left\lfloor\frac{k-1}{r}\right\rfloor\right)$	(4.53)
1.b	$(I^{(q)}a)^{(m)}_{\overline{n}\vert}$	$\frac{1}{mq}(1+\lfloor\frac{qk}{m}\rfloor)$	$v^{1/m}(I^{(q)}\ddot{a})^{(m)}_{\overline{n}\vert}$	(4.55)
2.a	$(D^{(q)}\ddot{a})^{(m)}_{\overline{n}\vert}$	$\frac{1}{mq}\left(nq-\left\lfloor\frac{qk}{m}\right\rfloor\right)$	$\left(\frac{1}{q}+n\right)\ddot{a}^{(m)}_{\overline{n}\vert} - (I^{(q)}\ddot{a})^{(m)}_{\overline{n}\vert}$	(4.58)
2.b	$(D^{(q)}a)^{(m)}_{\overline{n}\vert}$	$\frac{1}{mq}\left(nq-\left\lfloor\frac{qk}{m}\right\rfloor\right)$	$v^{1/m}(D^{(q)}\ddot{a})^{(m)}_{\overline{n}\vert}$	(4.59)
3.a	$(L^{(q)}\ddot{a})^{(m)}_{\overline{n}\vert}$	$C+\rho\left\lfloor\frac{qk}{m}\right\rfloor$	$m(1-\rho)\ddot{a}^{(m)}_{\overline{n}\vert} + \rho\, m\, q\,(I^{(q)}\ddot{a})^{(m)}_{\overline{n}\vert}$	(4.61)
3.b	$(L^{(q)}a)^{(m)}_{\overline{n}\vert}$	$C+\rho\left\lfloor\frac{qk}{m}\right\rfloor$	$v^{1/m}(L^{(q)}\ddot{a})^{(m)}_{\overline{n}\vert}$	(4.62)
4.a	$(G^{(q)}\ddot{a})^{(m)}_{\overline{n}\vert}$	$(1+i_q)^{\frac{1}{q}\lfloor\frac{k}{r}\rfloor}$	$\frac{1}{m}\sum_{k=0}^{nm-1}(1+i)^{-\frac{k}{m}}(1+i_q)^{\frac{1}{q}\lfloor\frac{k}{r}\rfloor}$	(4.34)
			$\ddot{a}_{\overline{nq}\vert i_h}\ddot{a}_{\overline{r}\vert i_m}$	(4.39)
4.b	$(G^{(q)}a)^{(m)}_{\overline{n}\vert}$	$(1+i_q)^{\frac{1}{q}\lfloor\frac{k}{r}\rfloor}$	$\frac{1}{m}\sum_{k=1}^{nm}(1+i)^{-\frac{k}{m}}(1+i_q)^{\frac{1}{q}\lfloor\frac{k-1}{r}\rfloor}$	(4.33)
			$\ddot{a}_{\overline{nq}\vert i_h}a_{\overline{r}\vert i_m}$	(4.38)

Cuadro 4.4: Anualidades Integradas - Fórmulas

CAPÍTULO 5

Anualidades de Vida

5.1. Introducción a la Simulación Monte-Carlo

Se introduce a continuación la técnica de simulación Monte Carlo, la cual se utilizará para calcular precios de anualidades de vida, incluyendo los casos de tasas variables de interés.

Definición 5.1.1. *Una sucesión de números* $(u_k, k = 1, 2, \ldots)$ *se denomina pseudo-aleatoria si cumple:*

1. $u_k \in (0, 1)$, $\forall k$,
2. *Si se toma un sub-intervalo* I_ℓ *en* $(0, 1)$ *de longitud* ℓ*, y se calcula la proporción* U_k *de los números* $u_j, j = 1, 2, \ldots, k$*, que están en* I_ℓ*, entonces*
$$U_k \to \ell,\ k \to \infty.$$
3. *Si se toma una subconjunto de* k *números* u_j*, y se aplica una prueba para la hipótesis nula de independencia estadística, ésta no se rechaza.*

Los números pseudo-aleatorios de denominan también números aleatorios uniformes. Se generan a partir de ecuaciones recursivas de la forma

$$x_{i+1} = ax_i - m\lfloor\frac{ax_i}{m}\rfloor \in \{0, 1, \ldots, m-1\}, \tag{5.1}$$

$$u_{i+1} = \frac{x_{i+1}}{m} \in (0, 1),\ i = 1, 2, \ldots. \tag{5.2}$$

Ejemplo 5.1.1. *Colocando $x_0 = 1$, $a = 6$, $m = 11$ se obtienen los números x_i*

$$1, 6, 3, 7, 9, 10, 5, 8, 4, 2, 1, 6, 3, 7, 9, ...$$

en los cuales se observa que después de los 10 primeros se empieza a repetir la secuencia nuevamente.

El Ejemplo anterior muestra que las ecuaciones recursivas que generan números aleatorios pueden presentar ciclos de longitud $m-1$. Entonces se debe tomar m grande. En los procesadores de 32 bits, se toma $m = 2^{31} - 1$, $a = 16807$.

En el lenguaje R el generador de números aleatorios uniforme se implementa en la función `u=runif(n,0,1)`. Se asume que los valores así generados corresponden a valores de una variable Uniforme(0,1).

Una sucesión de números aleatorios uniformes $(u_k, k = 1, 2, \ldots)$ se puede utilizar para generar una sucesión de valores x_k correspondientes a una variable aleatoria X con fda $F_X(x) = \mathbb{P}(X \leq x)$, denominados valores simulados de X, aplicando el método de simulación con la fda inversa. Éste se basa en el resultado siguiente.

Proposición 5.1.1. *Sean $U \sim U(0,1)$ y la variable aleatoria continua X con fda $F_X(x) = \mathbb{P}(X \leq x)$, tal que existe la inversa $F_X^{-1}(q), q \in (0,1)$. Entonces se cumple que*

$$X = F_X^{-1}(U). \tag{5.3}$$

La manera de aplicar el método consiste en generar una sucesión de números uniformes, $u_j, j = 1, 2, \ldots, k$ y calcular la correspondiente muestra simulada de X: $x_j = F_X^{-1}(u_j)$.

Ejemplo 5.1.2. *El método de simulación con la fda inversa se puede aplicar al caso de la ley Gompertz, ver (2.49), pag. 41. En este caso la fda está dada por la función de supervivencia para una vida (x),*

$$ {}_tp_x = \exp(-bc^x(c^t-1)/\log(c)), $$

para $t \in [0, 110-x]$, $b > 0$, $c > 1$. *Por tanto, para aplicar el método de la fda inversa se toma* $u \in (0,1)$ *y se resuelve la siguiente ecuación para* t*:*

$$ \begin{aligned} {}_tp_x &= \exp(-bc^x(c^t-1)/\log(c)) = u \\ \Leftrightarrow &- bc^x(c^t-1)/\log(c) = \ln(u), \\ \Leftrightarrow c^t &= 1 - \ln(c)\ln(u)/bc^x, \\ \therefore t &= \ln[1-\ln(c)\ln(u)/bc^x]/\ln(c). \end{aligned} $$

El código R siguiente calcula muestras simuladas de la distribución Gompertz

```
# Ejemplos con Gompertz
x = 40; n = 3000;
pars = c(0.0014440776, 0.0001815122, 1.0940478946)
C = pars[3]; b = pars[2];
U = runif(300,0,1)
Tx = log(1 - log(C)*log(U)/(b*C^x))/log(C)
plot(density(Tx))
#--------con librería VGAM
Tx = VGAM::rgompertz(n,scale=log(C),shape=b*C^x)
plot(density(Tx))
```

Pero no siempre es posible resolver para la variable t la ecuación

$$ {}_tp_x = u, \; u \in (0,1), $$

por lo que se hace necesario aplicar un método numérico de solución de ecuaciones.

El problema de calcular numéricamente la inversa de una fda $F^{-1}(u)$ es importante, pero aquí solamente se proponen algunos procedimientos numéricos con base en algunas librerías de R.

Un ejemplo es utilizando la librería `GoFKernel`. En la ayuda se lee que la función `inverse()` está diseñada para calcular la inversa de una fda absolutamente continua, como una función por sí misma.

Ejemplo 5.1.3. *Ejemplo de simulación de la ley Makeham-Beard con la librería* `GoFKernel`.

```
#-------------calcular la inversa de tpx con Makeham Beard
tpx = function(t,x,pars){
a = pars[1]; b = pars[2]; C=pars[3]; k =pars[4];
exp(-C*t)*((exp(-b*x)+a*k)/(exp(-b*x)+a*k*exp(b*t)))^(1/(k*b))}
#-------------parametros MB
pars = c(0.000010936, 0.105864876, 0.000227759, 0.327569880)
#-------------
require(GoFKernel)
x = 40; n = 3000;
f = function(t) 1-tpx(t,x,pars)
f.inv <- inverse(f,lower=0,upper=110-x)
Tx=sapply(runif(n,0,1),function(x)f.inv(x))
```

La función `inverse()` se puede reemplazar por `random.function()` cuando el propósito sea simular muestras de la variable $T(x)$. El siguiente programa muestra cómo hacerlo, utilizando las definiciones del programa anterior.

Ejemplo 5.1.4. *Ejemplo de simulación de la ley Makeham-Beard con la librería* `GoFKernel` *y la función* `random.function()`. *Incluyendo el caso de mortalidad sub-estándar. Nótese que ${}_tp_x$ puede se cualquier ley continua de mortalidad.*

```
#--------uso de random.function con la ley Makeham-Beard anterior
require(GoFKernel)
x = 40; n = 3000;
f <- function(t) 1-tpx(t,x,pars)
Tx = random.function(n, f, lower = 0, upper = 110-x,
kind = "cumulative")
plot(density(Tx),lwd=2,ylim=c(0,0.05))
#-------------------------
```

```
ddx = 1.7
tpxs = function(t,x,pars){
tpx(t,x,pars)^ddx}
fs = function(t) 1-tpxs(t,x,pars)
Txs=random.function(n = 3000, fs, lower = 0, upper = 110-x,
kind = "cumulative")
lines(density(Txs),col='red')
```

Algunas leyes de mortalidad se pueden simular aplicando alguna propiedad especial. Por ejemplo, para el caso Gompertz-Makeham.

Proposición 5.1.2. *Suponga que $S \sim Exp(a)$, con $a > 0$, tal que $\mathbb{P}(S > t) = e^{-at}$. Y suponga que $T^{(g)}(x)$ es la vida remanente de una vida (x), distribuída según una ley Gompertz con parámetros $b > 0, C > 1$, ver (2.49), pag. 41, asumida independiente de S. Entonces la variable aleatoria*

$$T(x) = min(S, T^{(g)}(x)) \tag{5.4}$$

se distribuye según una ley Gompertz-Makeham con parámetros a, b, C, es decir

$$\mathbb{P}(T(x) > t) = e^{-at-bC^x(C^t-1)/\log(C)}$$

La prueba es inmediata observando que si T_1 y T_2 son dos variables independientes, positivas, entonces, para $t > 0$ se tiene

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(min(T_1, T_2) > t) &= \mathbb{P}(T_1 > t, T_2 > t)\\ &= \mathbb{P}(T_1 > t)\mathbb{P}(T_2 > t).\end{aligned}$$

Ejemplo 5.1.5. *Un ejemplo de código en R para simulación directa de la ley Gompertz-Makeham, y de simulación con la librería* `VGAM`.

```
#----------Gompertz-Makeham, simulacion directa
x = 40; n = 3000;
pars = c(0.0014440776, 0.0001815122, 1.0940478946)
a= pars[1];C = pars[3];b = pars[2];
U = runif(n,0,1)
```

```
Tx.g = log(1 - log(C)*log(U)/(b*C^x))/log(C)
S = rexp(n,rate=a)
Tx = pmin(S, Tx.g)
plot( density(Tx))
lines(density(Tx.g),col='red')
#----------Gompertz-Makeham, simulacion con VGAM
Tx = VGAM::rmakeham(n,scale=log(C),shape=b*C^x,epsilon=a)
lines(density(Tx),col='blue')
```

5.2. Anualidades de Vida

Una anualidad de vida es un producto financiero que puede ser adquirido por una persona a cambio de una prima, pagable inmediata ó diferida, el cual le garantiza una serie de pagos futuros, durante un período de tiempo determinado ó hasta fallecer.

El vendedor es usualmente una Compañía de Seguros.

La finalidad de una anualidad puede ser proveer una pensión ó renta vitalicia, que es una forma de seguro de vejez (incapacidad laboral por senectud), ó también una renta por invalidez (temporal o permanente), una renta como compensación por incapacidad temporal (caso de maternidad, accidente), o por desempleo (nótese que en la legislación laboral colombiana las cesantías cumplen un papel similar a un seguro de desempleo). Los términos anualidad y renta se utilizarán como sinónimos.

En este capítulo se examinan diferentes tipos de anualidades de vida.

Definición 5.2.1. *Una anualidad vitalicia, anual anticipada, es un contrato que le garantiza al tomador, de edad x, el pago año anticipado, de una unidad monetaria, hasta su último año de vida.*

Los pagos se hacen en los tiempos $0, 1, \ldots, K(x)$, *y el valor presente de los mismos está dado por la variable aleatoria* $\ddot{a}_{\overline{K(x)+1}|}$, *dada por*

$$\ddot{a}_{\overline{K(x)+1}|} := \sum_{k=0}^{K(x)} v^k = \frac{1 - v^{K(x)+1}}{d}, \tag{5.5}$$

donde $v = (1+i)^{-1}$ es el factor de descuento correpondiente a la tasa efectiva anual i, y $d = 1 - v$. La especificación del valor de la tasa i es parte del contrato. Nótese que el valor presente (5.7) se basa en la fórmula de anualidades ciertas (4.16a), pag. 105.

El precio de esta anualidad, sin recargos, se denomina prima neta ó costo actuarial.

Proposición 5.2.1. *El costo actuarial de una anualidad vitalicia se define como el valor esperado de la variable $\ddot{a}_{\overline{K(x)+1}|}$, denotado por $\ddot{a}_x$.*

$$\ddot{a}_x = \mathbb{E}(\ddot{a}_{\overline{K(x)+1}|}) = \sum_{k=0}^{\omega-x-1} v^k \, {}_kp_x. \tag{5.6}$$

La demostración está al final de esta sección. La correspondiente anualidad año vencido tiene valor presente (ver (4.10a), pag. 103)

$$a_{\overline{K(x)+1}|} := \sum_{k=1}^{K(x)+1} v^k = \frac{1 - v^{K(x)+1}}{i}, \tag{5.7}$$

y su costo actuarial está dado por

$$a_x = \mathbb{E}(a_{\overline{K(x)+1}|}) = \ddot{a}_x - 1. \tag{5.8}$$

Note las identidades siguientes:

$$\ddot{a}_{\overline{K(x)+1}|} = \sum_{k=0}^{\omega-x-1} v^k I(K(x) \geq k). \tag{5.9}$$

$$\ddot{a}_{x|i=0} = e_x. \tag{5.10}$$

Ejemplo 5.2.1. *Suponga una vida de edad $x = 57$ años, mujer, que compra una anualidad de vida a una Compañía de Seguros, con pagos año anticipado por valor de 12 mill de pesos cada una. Calcule el costo neto de esta anualidad si la Compañía la ofrece a una tasa de $7.0\,\%$ efectiva anual, y utiliza la ley de mortalidad Gompertz-Makeham, con los parámetros especificados a continuación.*

```
# ejemplos de anualidad de vida anticipada
# comparando el costo neto con fórmula actuarial
# y con base en simulación Monte-Carlo
#---------datos de la anualidad de vida
x = 57
w = 110
i = 0.07
v = 1/(1+i)
d = 1-v
#---------programar la fórmula (5.6) Notas de Clase
tx = seq(0,w-x-1)
tpx = VGAM::pmakeham(tx,scale=log(C),shape=b*C^x,epsilon=a,
lower.tail = FALSE)
aax = sum(v^(tx)*tpx)
(aax)
[1] 8.208458
#---------simulacion Monte Carlo
n = 13000
Tx = VGAM::rmakeham(n,scale=log(C),shape=b*C^x,epsilon=a)
Kx = floor(Tx)
aaKx = (1-v^(Kx+1))/d
plot(density(aaKx))
(aax = mean(aaKx))
[1] 8.198365
#--------qué significa costo neto? R/ que existe
#--------el riesgo de extra-mortalidad en el titular,
#--------representado por la probabilidad
(Prob = sum(Tx > aax)/n)
[1] 0.6812308
```

Para la demostración de (5.6) se utiliza la siguiente identidad, que se conoce como la fórmula de sumatoria por partes ó Lema de Abel ([1]).

Lema 5.2.1. *Suponga que* $(f_k), (g_k), k = 0, 1, 2, \ldots$ *son dos sucesiones de reales,*

[1] similar a la fórmula de integración por partes: $\int_a^b f(t)g(t)dt = F(t)G(t)\,|_a^t - \int_a^b F(t)g(t)dt$ para $G(g) = \int_a^t g(x)dx$ y $F(t) = \int_a^t f(x)dx$.

con sumas acumuladas $F_n = \sum_{k=0}^{n} f_k$*,* $G_n = \sum_{k=0}^{n} g_k$*. Entonces, dados* $0 \leq m < n$*,*

$$\sum_{k=m}^{n} g_k F_k = F_n G_n - F_{m-1} G_{m-1} - \sum_{k=m}^{n} f_k G_{k-1} \tag{5.11}$$

En el caso $m = 0$ *se coloca* $G_{-1} = F_{-1} = 0$*.*

Demostración. Para aplicar (5.11) a la demostración de (5.6) se definen:

$$\begin{aligned}
f_k &= v^k, \\
g_k &= {}_k p_x q_{x+k} = \mathbb{P}(K(x) = k), \\
F_k &= \sum_{j=0}^{k} v^j, \\
G_k &= \mathbb{P}(K(x) \leq k) = {}_{k+1}p_x.
\end{aligned}$$

con $m = 0, n = \omega - x - 1$. Entonces el valor esperado de $\sum_{k=0}^{K(x)} v^k$ se desarrolla así:

$$\begin{aligned}
\ddot{a}_x &= \mathbb{E}\left(\sum_{k=0}^{K(x)} v^k\right) = \sum_{k=0}^{\omega-x-1} \left(\sum_{j=0}^{k} v^j\right) {}_k p_x q_{x+k} \\
&= \sum_{k=0}^{\omega-x-1} g_k F_k = F_k G_k \Big|_{-1}^{\omega-x-1} - \sum_{k=0}^{\omega-x-1} v^k G_{k-1} \\
&= F_{\omega-x-1} G_{\omega-x-1} - \sum_{k=0}^{\omega-x-1} v^k G_{k-1} \\
&= F_{\omega-x-1} G_{\omega-x-1} - \sum_{k=0}^{\omega-x-1} v^k \left(1 - {}_k p_x\right) \\
&= F_{\omega-x-1} G_{\omega-x-1} - F_{\omega-x-1} + \sum_{k=0}^{\omega-x-1} v^k {}_k p_x
\end{aligned}$$

$$= -F_{\omega-x-1}(1 - G_{\omega-x-1}) + \sum_{k=0}^{\omega-x-1} v^k{}_kp_x$$

$$= -F_{\omega-x-1}\mathbb{P}(K(x) \geq \omega - x) + \sum_{k=0}^{\omega-x-1} v^k{}_kp_x$$

$$= \sum_{k=0}^{\omega-x-1} v^k{}_kp_x.$$

En la penúltima línea se aplicó $\mathbb{P}(K(x) \geq \omega - x) = {}_{\omega-x}p_x = 0$. □

Anualidades con Tablas de Vida

Si se estima la probabilidad de supervivencia mediante la Tabla de Vida se reemplaza en (5.6)

$$_kp_x = l_{x+k}/l_x, \tag{5.12}$$

para $k = 0, \dots, \omega - x - 1$, ya que en la Tabla de Vida $l_\omega = 0$, con ω la edad a la que termina el ciclo vital de una vida. Luego

$$\ddot{a}_x = \sum_{k=0}^{\omega-x-1} v^k \frac{l_{x+k}}{l_x}. \tag{5.13}$$

La librería `lifecontingencies` tiene funciones para calcular esta anualidad y otras con base en Tablas de Vida. Por ejemplo, la función `axn()`

> This function calculates actuarial value of annuities, given an actuarial table. Fractional and deferred annuities can be evaluated. Moreover it can be used to simulate the stochastic distribution of the annuity value.

```
Usage
axn(actuarialtable, x, n,
i = actuarialtable@interest, m,  k = 1, type = c("EV","ST"),
power=1,payment = c("advance","immediate"))
```

Reservas para Anualidades de Vida

5.2.1. Flujo de caja

Si el valor de los pagos anuales es P_a entonces el valor actuarial de la renta es $C = P_a \ddot{a}_x$. Este valor lo cancela (x) a una Compañía de Seguros, quien a cambio garantiza los pagos P y la tasa i, utilizada para descontar los pagos (además de la estructura necesaria para financiar este producto).

Al invertir C en un fondo que garantice una tasa efectiva anual i se establece una cuenta de la cual se descuentan los pagos P. El saldo de esta cuenta al final del año k-ésimo se denota por $F(k)$. Entonces $F(k)$ cumple la siguiente ecuación recursiva.

$$F(k) = (1+i)[F(k-1) - PI(K(x) \geq k-1)], \tag{5.14}$$

tal que $k = 0, 1, 2, \ldots, K(x)$, $F(0) = C$, $I(A) \in \{0, 1\}$ es la indicadora de A, y la condición de cierre se establece como

$$\mathbb{E}(v^{K(x)} F(K(x)) = 0. \tag{5.15}$$

La solución de (5.14) está dada por

$$F(k) = v^{-k}[C - P \sum\nolimits_{j=0}^{k} v^j I(K(x) \geq k-1)]. \tag{5.16}$$

En $k = K(x)$ es

$$F(K(x)) = v^{-K(x)} \left(C - P \sum\nolimits_{j=0}^{K(x)} v^j \right).$$

y, aplicando (5.6) y la condición de cierre (5.15) se obtiene

$$\mathbb{E}(v^{K(x)} F(K(x))) = C - P\mathbb{E}(\sum\nolimits_{j=0}^{K(x)} v^j) = C - P\ddot{a}_x =$$
$$\therefore \; C = P\ddot{a}_x.$$

Definición 5.2.2. *El riesgo de extra mortalidad se define como el evento*

$$F(K(x)) < 0 \Leftrightarrow \ddot{a}_x < \ddot{a}_{\overline{(K(x)+1)}|} = \sum\nolimits_{j=0}^{K(x)} v^j = \frac{1 - v^{K(x)+1}}{d}$$

Cuantificarlo significa calcular la probabilidad

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}\left(\ddot{a}_x < \frac{1 - v^{K(x)+1}}{d}\right) = \alpha \\ \Leftrightarrow \; & \mathbb{P}(\log(1 - d\ddot{a}_x) > \log(v)(K(x)+1) = \alpha \\ \Leftrightarrow \; & \mathbb{P}\left(\frac{\log(1 - d\ddot{a}_x)}{\log(v)} - 1 < K(x)\right) = \alpha. \end{aligned} \tag{5.17}$$

5.3. Anualidades de Vida Temporales

Anualidad de Vida Temporal Anticipada a n años

Definición 5.3.1. *Se define como un contrato por el cual la vida (x) recibirá pagos anuales anticipados de una unidad, mientras sobreviva, máximo hasta n años, inclusive.*

El valor presente de los pagos es la variable aleatoria dada por

$$Y = \ddot{a}_{\overline{(K(x)+1)\wedge n}|} \tag{5.18}$$

donde $\ddot{a}_{\overline{k+1}|} = \frac{1-v^{k+1}}{d}$, (ver (4.16a), pag. 105). Usando las identidades

$$\begin{aligned} a \wedge b &:= min(a, b), \\ a &= a \wedge b + (a - b)_+, \\ f(x \wedge a) &= f(x)I(x \leq a) + f(a)I(x > a). \end{aligned}$$

se puede escribir

$$Y = \ddot{a}_{\overline{K(x)+1}|} I(K(x) \leq n - 1) + \ddot{a}_{\overline{n}|} I(K(x) \geq n) \tag{5.19}$$

El costo actuarial ó prima neta es el valor esperado de Y dado por

$$\ddot{a}_{x:\overline{n}|} := \mathbb{E}(Y) = \sum_{k=0}^{n-1} \ddot{a}_{\overline{k+1}|}\,{}_kp_x q_{x+k} + \ddot{a}_{\overline{n}|}\,{}_np_x, \tag{5.20}$$

Pero se tiene un resultado más directo

Proposición 5.3.1. *Si la tasa de interés para descontar los pagos es i, con $v = 1/(1+i)$, entonces*

$$\ddot{a}_{x:\overline{n}|} = \sum_{k=0}^{n-1} v^k\,{}_kp_x. \tag{5.21}$$

Demostración. Para demostrar (5.21) se calcula, a partir de (5.18):

$$\mathbb{E}(Y) = \mathbb{E}(\ddot{a}_{\overline{K(x)+1}|} I(K(x) \leq n-1)) + \ddot{a}_{\overline{n}|}\mathbb{P}(K(x) \geq n),$$

pero

$$\mathbb{E}(\ddot{a}_{\overline{K(x)+1}|} I(K(x) \leq n-1)) = \sum_{k=0}^{n-1} \ddot{a}_{\overline{k+1}|}\mathbb{P}(K(x) = k)$$

En este punto se aplica el Lema 5.11, como se hizo en la demostración de (5.6), definiendo:

$$\begin{aligned} f_k &= v^k,\ F_k = \sum_{j=0}^{k} v^j = \ddot{a}_{\overline{k+1}|}, \\ g_k &= {}_kp_x q_{x+k} = \mathbb{P}(K(x) = k), \\ {}_kp_x &= \mathbb{P}(K(x) \geq k). \end{aligned}$$

y cambiando $\omega - x - 1$ por $n - 1$, los pasos son iguales. $\square$

Ejemplo 5.3.1. *Suponga que una vida (57), mujer, compra una anualidad de vida, anual anticipada, por $n = 15$ años, como estrategia para complementar su pensión de jubilación, con una Aseguradora. Esta le ofrece el producto a una tasa efectiva anual de $i = 0.08$. Los pagos anuales son de COP 12.5 mill. Encuentre el costo actuarial de esta anualidad, utilizando la ley Gompertz-Makeham ISS 00-05 y utilizando la Tabla de Vida ISS 00-05. Los siguientes comandos en R implementan una función para calcular*

```
#-------Ejemplo anualidad de vida temporal
x = 57
i = 0.08
n = 15
#-------parametros ley GM
m.par = matrix(c(
0.9984022, 0.9995144, 1.0968159,
0.9980725, 0.9997376, 1.1026006,
0.9975497, 0.9999949, 1.1412894,
0.9953583, 0.9999905, 1.1395016),4,3,byrow=TRUE)
colnames(m.par)=c("s","g","c")
rownames(m.par)=c("m80-89","h80-89","m00-05","h00-05")
#-------mujeres experiencia ISS 2005-2008
s3 = m.par[3,1]
g3 = m.par[3,2]
c3 = m.par[3,3]

pars = c(log(1/s3),log(1/g3)*log(c3),c3)

tpx = function(t,x,pars){
a = pars[1]
b = pars[2]
C = pars[3]
s = exp(-a)
g = exp(-b/log(C))
p = s^t*g^(C^x*(C^t-1))
return(p)}

aax = function(x,i,pars){
v = 1/(1+i)
if(110-x-1 >= 0){
t = seq(0,110-x-1,1)
px = sapply(t,function(t)tpx(t,x,pars))
p = sum(v^t*px)
return(p)}
else{p=0
```

```
return(p)}
}

aax.57m = aax(x,i,pars)
(costo = 12.5*aax.57m)
#-------respuesta
116.0172
```

Varianza del valor presente

Proposición 5.3.2. *Se define la variable valor presente Y como*

$$Y = \ddot{a}_{\overline{(K(x)+1)\wedge n}|} = \ddot{a}_{\overline{K(x)+1}|} I(K(x) \leq n-1) + \ddot{a}_{\overline{n}|} I(K(x) \geq n)$$

Entonces se cumple

$$Var(\ddot{a}_{\overline{(K(x)+1)\wedge n}|}) = \sum_{k=0}^{n-1} (\ddot{a}_{\overline{k+1}|})^2 \, {}_kp_x q_{x+k} + (\ddot{a}_{\overline{n}|})^2 \, {}_np_x - (\ddot{a}_{x:\overline{n}|})^2. \tag{5.22}$$

Demostración. Para calcular la varianza $Var(Y) = \mathbb{E}(Y^2) - \mathbb{E}(Y)^2$, se calcula

$$Y^2 = \left(\ddot{a}_{\overline{K(x)+1}|}\right)^2 I(K(x) \leq n-1) + (\ddot{a}_{\overline{n}|})^2 I(K(x) \geq n)$$

Entonces

$$\mathbb{E}(Y^2) = \mathbb{E}\left[\left(\ddot{a}_{\overline{K(x)+1}|}\right)^2 I(K(x) \leq n-1)\right] + (\ddot{a}_{\overline{n}|})^2 \mathbb{P}(K(x) \geq n)$$

En este caso

$$\mathbb{E}\left[\left(\ddot{a}_{\overline{K(x)+1}|}\right)^2 I(K(x) \leq n-1)\right] = \sum_{k=0}^{n-1} (\ddot{a}_{\overline{k+1}|})^2 \, {}_kp_x q_{x+k}$$

por tanto

$$Var(\ddot{a}_{\overline{(K(x)+1)\wedge n}|}) = \sum_{k=0}^{n-1} (\ddot{a}_{\overline{k+1}|})^2 \, {}_kp_x q_{x+k} + (\ddot{a}_{\overline{n}|})^2 {}_np_x - (\ddot{a}_{x:\overline{n}|})^2.$$

□

Ejemplo 5.3.2. *Con los datos del Ejemplo anterior 5.3.1, calcule la varianza*

$$Var(\ddot{a}_{\overline{(K(x)+1)\wedge n}|}).$$

Anualidad de Vida Temporal Vencida

En el caso de una renta ó anualidad temporal a n años para una vida (x), el valor presente se define como la variable

$$a_{\overline{K(x)\wedge n}|} = a_{\overline{K(x)}|} I(K(x) \leq n-1) + a_{\overline{n}|} I(K(x) \geq n). \tag{5.23}$$

donde $a_{\overline{K(x)}|} = \frac{1-v^{K(x)}}{i}$, ver (4.10a). El costo actuarial o prima media es la media $\mathbb{E}(a_{\overline{K(x)\wedge n}|})$, indicada por $a_{x:\overline{n}|}$.

La identidad siguiente permite calcular este valor, con base en $\ddot{a}_{x:\overline{n}|}$ dada en (5.21):

$$a_{x:\overline{n}|} = \ddot{a}_{x:\overline{n}|} - 1 + v^n {}_np_x. \tag{5.24}$$

Ejercicio 5.3.1. *Use (4.15)*

$$\ddot{a}_{\overline{n}|i} = (1+i)a_{\overline{n}|i}.$$

para comprobar (5.24)

Anualidad de Vida diferida n años

Una anualidad de vida que paga año anticipado una unidad monetaria a (x) después de transcurridos n años, y en caso de sobrevivir (x) este lapso de tiempo, tiene una prima neta dada por

$$_{n|}\ddot{a}_x = \ddot{a}_x - \ddot{a}_{x:\overline{n}|} \tag{5.25}$$

El caso vencido es similar

$$ {}_{n|}a_x = a_x - a_{x:\overline{n}|} \tag{5.26}$$

Se puede comprobar la fórmula alterna

$$ {}_{n|}\ddot{a}_x = v^n {}_n p_x \, \ddot{a}_{x+n}. \tag{5.27}$$

con lo que una fórmula alterna a (5.21) para una anualidad temporal se puede obtener con base en (5.25) y (5.27)

$$\ddot{a}_{x:\overline{n}|} = \ddot{a}_x - v^n {}_n p_x \, \ddot{a}_{x+n}. \tag{5.28}$$

Ejemplo 5.3.3. *Una anualidad diferida a n años, que sea temporal por m años más, tiene una prima neta dada por*

$$ {}_{n|}\ddot{a}_{x:\overline{m}|} = v^n {}_n p_x \, \ddot{a}_{x+n:\overline{m}|}. \tag{5.29}$$

Ejemplo 5.3.4. *Fórmulas para anualidades en el caso de la ley DeMoivre. Para el caso en el que la probabilidad de supervivencia está dada por: ${}_k p_x = \frac{110-x-t}{110-x}$ para $0 \leq x < 110$ y $0 \leq t \leq 110 - x$, se cumplen las fórmulas:*

$$\ddot{a}_x = \frac{1}{d}\left(1 - \frac{1 - v^{110-x}}{i(110-x)}\right) \tag{5.30}$$

$$\ddot{a}_{x:\overline{n}|} = \frac{1}{d}\left(1 - \frac{1 - v^n}{i(110-x)} - v^n \, {}_n p_x\right) \tag{5.31}$$

$$a_{x:\overline{n}|} = \ddot{a}_{x:\overline{n}|} - (1 - v^n \, {}_n p_x) \tag{5.32}$$

5.4. Anualidades de Vida con m pagos anuales

En esta sección se tratan las anualidades de vida con m pagos al año, de $1/m$ cada uno, para $m = 2, 4, 12$. Por ejemplo, el pago de las mesadas pensionales es mensual con $m = 12$. Existen casos de anualidades agregadas: las mesadas pensionales con $m = 12$ y las mesadas que corresponden a primas adicionales, por ejemplo, con $m = 2$.

Para definir el valor presente de los pagos se definen las variable aleatorias siguientes. El símbolo $\lfloor z \rfloor$ denota la parte entera de z, definido como el mayor entero menor ó igual a z, es decir,

$$\lfloor z \rfloor \leq z < \lfloor z \rfloor + 1.$$

Definición 5.4.1. *La vida remanente de (x), medida en períodos m se define como*

$$K_m(x) = \frac{1}{m}\lfloor mT(x)\rfloor \in \left\{0, \frac{1}{m}, \frac{2}{m}, \ldots, \frac{m(\omega - x) - 1}{m}\right\}, \tag{5.33}$$

Un ejemplo. Para $m = 12$, $K_{12}(x)$ indica el total de meses que sobrevive la vida (x). Si fuera $x = 58$ y $K_{12}(58) = 21 + 8/12$, entonces la vida de edad 58, sobrevivió 21 años y 8 meses.

La densidad de probabilidad de $K_m(x)$

La densidad de probabilidad de $K_m(x)$ está dada por

$$\mathbb{P}(K_m(x) = \frac{k}{m}) = {}_{\frac{k}{m}}p_x \; {}_{\frac{1}{m}}q_{x+\frac{k}{m}}, \tag{5.34}$$

$$k = 0, 1, \ldots, m(\omega - x) - 1. \tag{5.35}$$

Demostración. Se cumplen las equivalencias

$$\begin{aligned}
K_m(x) = \frac{k}{m} &\Leftrightarrow \lfloor mT(x)\rfloor = k \\
&\Leftrightarrow k \leq mT(x) < k+1 \\
&\Leftrightarrow \frac{k}{m} \leq T(x) < \frac{k+1}{m}. \\
\therefore \;\; \mathbb{P}(K_m(x) = \frac{k}{m}) &= \mathbb{P}(\frac{k}{m} \leq T(x) < \frac{k+1}{m}) \\
&= {}_{\frac{k+1}{m}}q_x - {}_{\frac{k}{m}}q_x = {}_{\frac{k}{m}}p_x - {}_{\frac{k+1}{m}}p_x \\
&= {}_{\frac{k}{m}}p_x - {}_{\frac{k}{m}}p_x \; {}_{\frac{1}{m}}p_{x+\frac{k}{m}} \\
&= {}_{\frac{k}{m}}p_x(1 - {}_{\frac{1}{m}}p_{x+\frac{k}{m}}) = {}_{\frac{k}{m}}p_x \; {}_{\frac{1}{m}}q_{x+\frac{k}{m}}.
\end{aligned}$$

□

Ejemplo 5.4.1. *Calcular* $\mathbb{P}(K_{12}(58) = 21 + 8/12)$.

$$\mathbb{P}(K_{12}(58) = 21 + 8/12) = \mathbb{P}(K_{12}(58) = (12(21) + 8)/12)$$

$$= {}_{\frac{12(21)+8}{12}}p_{58}\ {}_{\frac{1}{12}}q_{58+\frac{12(21)+8}{12}}$$

Identidades

Considerando $T(x) = K(x) + S(x)$, se define la variable aleatoria

$$S_m(x) = \frac{1}{m}\lfloor mS(x) + 1\rfloor \in \{1/m, 2/m, \ldots, 1\}, \tag{5.36}$$

entonces se cumple la identidad,

$$K_m(x) + \frac{1}{m} = K(x) + S_m(x), \tag{5.37}$$

además, utilizando $\lfloor z\rfloor + 1 = \lceil z\rceil$

$$K_m(x) = \frac{1}{m}\lceil mT(x)\rceil - \frac{1}{m}, \tag{5.38}$$

Demostración.

$$\begin{aligned}
K(x) + S_m(x) - \frac{1}{m} &= \frac{1}{m}mK(x) + \frac{1}{m}\lfloor mS(x) + 1\rfloor - \frac{1}{m} \\
&= \frac{1}{m}\lfloor m(K(x) + S(x)) + 1 - 1\rfloor \\
&= \frac{1}{m}\lfloor mT(x)\rfloor = K_m(x).
\end{aligned}$$

□

Simular valores de $K_m(x)$ es inmediato. Por ejemplo, con $m = 12$

```
#---------simular Km(x)
require(GoFKernel)
x = 40; N = 3000; m = 12;
f <- function(t) 1-tpx(t,x,pars)
Tx = random.function(N, f, lower = 0, upper = 110-x,
kind = "cumulative")
f.inv <- inverse(f,lower=0,upper=110-x)
Tx=sapply(runif(n,0,1),function(x)f.inv(x))
Kmx = m*floor(Tx/m)
```

Anualidad de Vida con m pagos anticipados en el año

Definición 5.4.2. *Esta anualidad de vida es un contrato por el cual una vida (x) recibe m pagos anticipados de $1/m$ en el año, en los tiempos*

$$0, \frac{1}{m}, \frac{2}{m} \ldots, K_m(x).$$

Ejemplo 5.4.2. *Si fuera $x = 58$ y $K_{12}(58) = 21 + 8/12$, entonces la vida de edad 58, sobrevivió 21 años y 8 meses, y recibió un total de 21x12+8 = 260 pagos.*

Para encontrar el valor actuarial de esta anualidad, se retoma la anualidad cierta anticipada con m pagos de $1/m$ en el año, durante n años, ver pag.113, la ecuación (4.27a):

$$\ddot{a}^{(m)}_{\overline{n}|} = \frac{1}{m} \sum_{k=0}^{nm-1} v^{k/m} = \frac{1 - v^n}{m(1 - v^{1/m})} = \frac{1 - v^n}{d^{(m)}}.$$

Se reemplaza el total de pagos mn por $mK_m(x) + 1$ en la expresión anterior, y se escribe

$$\ddot{a}^{(m)}_{\overline{K_m(x)+1/m}|} = \frac{1}{m} \sum_{k=0}^{mK_m(x)} v^{k/m} = \frac{1 - v^{K_m(x)+1/m}}{d^{(m)}}. \tag{5.39}$$

El valor actuarial de esta anualidad es el valor esperado de (5.39)

$$\ddot{a}^{(m)}_x = \mathbb{E}\left(\ddot{a}^{(m)}_{\overline{K_m(x)+1/m}|}\right) = \frac{1 - \mathbb{E}(v^{K_m(x)+1/m})}{d^{(m)}}. \tag{5.40}$$

Hay dos maneras de calcular esta esperanza. Una consiste en desarrollar el valor esperado directamente. Otra consiste en utilizar la hipotesis de independencia lineal, ver (2.23), pag. 27. Esta opción se desarrolla en la sección §5.8. Con las capacidades de cálculo con el lenguaje R esta opción resulta algo obsoleta y se puede omitir.

Proposición 5.4.1.

$$\ddot{a}^{(m)}_x = \frac{1}{m} \sum_{k=0}^{m(\omega-x)-1} v^{\frac{k}{m}} {}_{\frac{k}{m}}p_x. \tag{5.41}$$

Demostración.

$$
\begin{aligned}
\ddot{a}_x^{(m)} &= \mathbb{E}(\ddot{a}^{(m)}_{\overline{K_m(x)+1/m|}}) = \sum_{k=0}^{m(\omega-x)-1} \ddot{a}^{(m)}_{\overline{(k+1)/m|}} \, {}_{\frac{k}{m}}p_x \, {}_{\frac{1}{m}}q_{x+\frac{k}{m}} \\
&= \frac{1}{m} \sum_{k=0}^{m(\omega-x)-1} \left(\sum_{s=0}^{k} v^{\frac{s}{m}} \right) {}_{\frac{k}{m}}p_x \, {}_{\frac{1}{m}}q_{x+\frac{k}{m}},
\end{aligned} \tag{5.42}
$$

se aplica el Lema 5.11, como se hizo en la demostración de (5.6) y (5.21), y se obtiene

$$
\sum_{k=0}^{m(\omega-x)-1} \left(\sum_{s=0}^{k} v^{\frac{s}{m}} \right) {}_{\frac{k}{m}}p_x \, {}_{\frac{1}{m}}q_{x+\frac{k}{m}} = \sum_{k=0}^{m(\omega-x)-1} v^{\frac{k}{m}} \, {}_{\frac{k}{m}}p_x,
$$

□

Para el caso de una anualidad de vida con pagos vencidos la correspondiente prima neta es

$$
a_x^{(m)} = \ddot{a}_x^{(m)} - \frac{1}{m} \tag{5.43}
$$

Ejemplo 5.4.3. *El siguiente programa R calcula la prima para un renta mensual vitalicia, por valor de 1 mill mes anticipado, utilizando la ley GM, para el caso de* $x = 40$, $i = 0.07$, $m = 12$.

```
#------------- Gompertz-Makeham
tpx = function(t,x,pars){
a = pars[1];b = pars[2];C = pars[3];s = exp(-a)
g = exp(-b/log(C))
p = s^t*g^(C^x*(C^t-1))
return(p)}
#-------------parametros GM
pars = c(0.0014440776, 0.0001815122, 1.0940478946)
#-----------
aaxm = function(x,m,i,pars){
v = 1/(1+i)
```

```
k = seq(0,m*(110-x)-1)
kmpx = sapply(k,function(k)tpx(k/m,x,pars))
vkm = v^(k/m)
a = sum(vkm*kmpx)/m
return(a)}
#-----------
x = 40; i = 0.07; m = 12;
#----------respuesta
(12*aaxm(x,m,i,pars))
# --- $163'707.900
```

5.5. Anualidad de Vida con m pagos temporal a n años

Proposición 5.5.1. *El caso de una anualidad de vida con m pagos al año, anticipados, de $1/m$ cada uno, durante máximo n años tiene un valor presente Y, dado por la siguiente expresión.*

$$\begin{aligned} Y &= \ddot{a}^{(m)}_{\overline{K_m(x)+1/m}|} I(K(x) \leq n-1) + \ddot{a}^{(m)}_{\overline{n}|} I(K(x) \geq n) \\ &= \ddot{a}^{(m)}_{\overline{(K_m(x)+1/m)\wedge n}|} \end{aligned} \tag{5.44}$$

Y la prima neta, como el valor esperado de Y, está dada por

$$\ddot{a}^{(m)}_{x:\overline{n}|} := \mathbb{E}(Y) = \frac{1}{m} \sum_{k=0}^{mn-1} v^{\frac{k}{m}} {}_{\frac{k}{m}}p_x. \tag{5.45}$$

Nótese que para obtener la anualidad vencida se elimina el primer pago en 0 y se añade un pago en n

$$a^{(m)}_{x:\overline{n}|} = \ddot{a}^{(m)}_{x:\overline{n}|} - \frac{1}{m}(1 - v^n \, {}_np_x) \tag{5.46}$$

El siguiente programa R calcula la prima $\ddot{a}^{(m)}_{x:\overline{n}|}$ utilizando directamente (5.45).

```
#---------
aaxmn = function(x,m,n,i,pars){
v = 1/(1+i)
k = seq(0,m*n-1)
kmpx = sapply(k,function(k)tpx(k/m,x,pars))
vkm = v^(k/m)
a = sum(vkm*kmpx)/m
return(a)}
```

Ejemplo 5.5.1. *, con base en los datos del Ejemplo 5.4.3, asumiendo $n = 30$. Es decir, el valor de una anualidad de vida por 30 años.*

```
#---------
n = 30
(12*aaxmn(x,m,n,i,pars))
#-------respuesta $149'810.600
```

Diferidas n años con m pagos

Una anualidad de vida que empieza a pagar m pagos anticipados de $1/m$ al año, después de transcurridos n años, y sólo en el caso de que la vida (x) sobreviva este lapso de tiempo tiene una prima neta definida por

$$ {}_{n|}\ddot{a}_x^{(m)} = \ddot{a}_x^{(m)} - \ddot{a}_{x:\overline{n}|}^{(m)}. \tag{5.47} $$

El caso de pagos vencidos es similar

$$ {}_{n|}a_x^{(m)} = a_x^{(m)} - a_{x:\overline{n}|}^{(m)}. \tag{5.48} $$

Se puede comprobar la fórmula alterna

$$ {}_{n|}\ddot{a}_x^{(m)} = v^n {}_n p_x \, \ddot{a}_{x+n}^{(m)}. \tag{5.49} $$

con lo que una fórmula alterna adicional para una anualidad temporal se puede obtener con base en (5.47) y (5.49)

$$ \ddot{a}_{x:\overline{n}|}^{(m)} = \ddot{a}_x^{(m)} - v^n {}_n p_x \, \ddot{a}_{x+n}^{(m)}. \tag{5.50} $$

5.6. Anualidades de Vida con pagos variables

5.6.1. Pagos en progresión geométrica

En este caso la anualidad consiste de m pagos en el año, durante n años, con m capitalizaciones al año, tales que los pagos se incrementan en un porcentaje i_q cada q períodos. Se asume que m es divisible por q, de forma que $m = rq$. La tasa i_q es efectiva anual, y debe cumplir la condición

$$i_q < i. \tag{5.51}$$

La correspondiente anualidad cierta anticipada tiene un precio $(G^{(q)}\ddot{a})^{(m)}_{\overline{n}|}$, definida en (4.34), pag. 118

$$(G^{(q)}\ddot{a})^{(m)}_{\overline{n}|} := \sum_{k=0}^{nm-1} (1+i)^{-\frac{k}{m}}(1+i_q)^{\frac{1}{q}\lfloor\frac{k}{r}\rfloor},$$

y el caso pagos vencidos

$$(G^{(q)}a)^{(m)}_{\overline{n}|} = v^{1/m}(G^{(q)}\ddot{a})^{(m)}_{\overline{n}|}. \tag{5.52}$$

El valor presente de una anualidad de vida creciente geométricamente a una tasa i_q, efectiva anual, cada q períodos en el año, con m pagos anticipados en el año, para una vida (x), es la variable aleatoria que se obtiene reemplazando el total de pagos mn por $mK_m(x)+1$ en la expresión anterior, y se escribe

$$Y = (G^{(q)}\ddot{a})^{(m)}_{\overline{K_m(x)+1/m}|} = \sum_{k=0}^{mK_m(x)} (1+i)^{-\frac{k}{m}}(1+i_q)^{\frac{1}{q}\lfloor\frac{qk}{m}\rfloor}. \tag{5.53}$$

Proposición 5.6.1. *El valor esperado $\mathbb{E}(Y)$ que define el costo actuarial, está dado por*

$$(G^{(q)}\ddot{a})^{(m)}_{x} := \sum_{k=0}^{m(\omega-x)-1} (1+i)^{-\frac{k}{m}}(1+i_q)^{\frac{1}{q}\lfloor\frac{qk}{m}\rfloor}\,{}_{\frac{k}{m}}p_x. \tag{5.54}$$

El programa siguiente implementa en el lenguaje R esta fórmula.

```
#---------anualidad geometrica anticipada
Gaaqmx = function(x,i,iq,m,q,tpx,pars){
try(if(iq > i) stop("tasa inflacion invalida"))
try(if(m%%q != 0) stop("m no es divisible por q"))
v = 1/(1+i)
k = seq(0,m*(110-x)-1)
kmpx = sapply(k,function(k)tpx(k/m,x,pars))
vkm = v^(k/m)
vqm = (1+iq)^(floor(k*q/m)/q)
a = sum(vkm*vqm*kmpx)
return(a)}
```

Ejemplo 5.6.1. *El caso $q = 1$, $m = 12$ corresponde a una anualidad de vida entera, ó renta vitalicia, que paga 12 mesadas anticipadas, con incrementos anuales a la tasa i_q. Su prima neta es*

$$(G\ddot{a})_x^{(12)} := \sum_{k=0}^{12(\omega-x)-1} (1+i)^{-\frac{k}{12}}(1+i_q)^{\lfloor \frac{k}{12} \rfloor}\, {}_{\frac{k}{12}}p_x.$$

El costo actuarial para, por ejemplo, mesadas de $\$C$ mensuales, el primer año, estaría dado por $C_p = C(G\ddot{a})_x^{(12)}$.

Ejercicio 5.6.1. *Calcular la prima $(G^{(q)}\ddot{a})_x^{(m)}$ utilizando directamente (5.54), con base en los datos del Ejemplo 5.4.3, asumiendo $q = 1, i_q = 0.04$. Es decir, el valor de una renta vitalicia que reconoce incrementos anuales en las mesadas de $4\,\%$, empezando por mesadas de $C = 1$ mill.*

```
iq = 0.04; q = 1; x = 40; i = 0.07; m= 12;
Gaaqmx(x,i,iq,m,q,tpx,pars)
#------respuesta: $280'029.700
```

El valor presente de una anualidad de vida creciente geométricamente a una tasa i_q, efectiva anual, cada q períodos en el año, con m pagos anticipados en el año, para una vida (x), temporal a n años, es la variable aleatoria

$$Y = (G^{(q)}\ddot{a})^{(m)}_{\overline{K_m(x)+1/m}|} I(K(x) \leq n-1) + (G^{(q)}\ddot{a})^{(m)}_{\overline{n}|} I(K(x) \geq n). \tag{5.55}$$

Entonces el valor esperado $\mathbb{E}(Y)$ que define la prima neta está dado por

$$(G^{(q)}\ddot{a})^{(m)}_{x:\overline{n}|} := \sum_{k=0}^{nm-1} (1+i)^{-\frac{k}{m}} (1+i_q)^{\frac{1}{q}\lfloor \frac{qk}{m} \rfloor} {}_{\frac{k}{m}}p_x. \tag{5.56}$$

Ejercicio 5.6.2. *El siguiente programa R calcula la prima* $(G^{(q)}\ddot{a})^{(m)}_{x:\overline{n}|}$ *utilizando directamente (5.56), con base en los datos del Ejemplo 5.4.3, asumiendo* $n = 30$*. Es decir, el valor de una anualidad de vida por 30 años, pagos mes anticipado, con incrementos por costo de vida.*

```
#---------anualidad geometrica temporal
Gaaqmnx = function(x,i,iq,m,n,q,tpx,pars){
try(if(iq > i) stop("tasa inflacion invalida"))
try(if(m%%q != 0) stop("m no es divisible por q"))
v = 1/(1+i)
k = seq(0,m*n-1)
kmpx = sapply(k,function(k)tpx(k/m,x,pars))
vkm = v^(k/m)
vqm = (1+iq)^(floor(k*q/m)/q)
a = sum(vkm*vqm*kmpx)
return(a)}
```

Las correspondientes anualidades con pagos vencidos tienen las cantidades correspondientes

$$\begin{aligned} Y &= (G^{(q)}a)^{(m)}_{\overline{K_m(x)+1/m}|} I(K(x) \leq n-1) + (G^{(q)}a)^{(m)}_{\overline{n}|} I(K(x) \geq n) \\ &= (G^{(q)}a)^{(m)}_{\overline{(K_m(x)+1/m)\wedge n}|}. \end{aligned} \tag{5.57}$$

Entonces el valor esperado $\mathbb{E}(Y)$ que define la prima neta está dado por

$$(G^{(q)}a)^{(m)}_{x:\overline{n}|} := \frac{1}{m}\sum_{k=1}^{nm}(1+i)^{-\frac{k}{m}}(1+i_q)^{\frac{1}{q}\lfloor\frac{qk}{m}\rfloor}\,{}_{\frac{k}{m}}p_x. \tag{5.58}$$

5.6.2. Pagos en progresión aritmética

Las anualidades ciertas con m pagos de $1/m$ al año, que se incrementan q veces al año en $1/m$, durante n años, anticipadas y vencidas, se definieron en (4.53) y (4.54), ver pag. 129:

$$(I^{(q)}\ddot{a})^{(m)}_{\overline{n}|} = \frac{1}{mq}\sum_{k=0}^{nm-1} v^{\frac{k}{m}}\left(1+\left\lfloor\frac{qk}{m}\right\rfloor\right) = \frac{\ddot{a}^{(q)}_{\overline{n}|} - nv^n}{d^{(m)}}, \tag{5.59}$$

con $d^{(m)} = m(1-v^{1/m})$, definida en (4.25), pag. 113. Para el caso de una anualidad de vida anticipada, ésta empieza con m pagos en el año, el primero de $1/qm$, incrementando en $1/qm$, q veces en el año, donde $m = qr$. Se reemplaza $n = K_m(x) + 1/m$ en (5.59) y se obtiene el valor presente

$$\begin{aligned}&(I^{(q)}\ddot{a})^{(m)}_{\overline{K_m(x)+1/m}|}\\ &= \frac{1}{d^{(m)}}\left(\ddot{a}^{(q)}_{\overline{K_m(x)+1/m}|} - (K_m(x)+1/m)v^{K_m(x)+1/m}\right).\end{aligned} \tag{5.60}$$

La prima neta es el valor esperado de esta variable

$$(I^{(q)}\ddot{a})^{(m)}_{x} = \mathbb{E}((I^{(q)}\ddot{a})^{(m)}_{\overline{K_m(x)+1/m}|}).$$

Desarrollando este valor esperado, se llega a la siguiente expresión para la prima neta.

$$(I^{(q)}\ddot{a})^{(m)}_{x} = \frac{1}{mq}\sum_{k=0}^{m(\omega-x)-1}(1+\lfloor\frac{qk}{m}\rfloor)v^{\frac{k}{m}}\,{}_{\frac{k}{m}}p_x. \tag{5.61}$$

El siguiente programa en R calcular esta prima.

```
#-------------anualidad creciente lineal
Iaaxqm = function(x,m,q,i,pars){
v = 1/(1+i)
k = seq(0,m*(110-x)-1)
kmpx = kmpx = sapply(k,function(k)tpx(k/m,x,pars))
vkm = v^(k/m)
pkm = 1+floor(k*q/m)
a = sum(pkm*vkm*kmpx)/(q*m)
return(a)}
```

Nótese el caso más simple $m = q = 1$

$$(I\ddot{a})_x = \sum_{k=0}^{\omega-x-1} (1+k)v^k {}_kp_x. \tag{5.62}$$

Nota 5.6.1. *Una identidad útil para expresar $(I^{(q)}\ddot{a})_{\overline{n}|}^{(m)}$ en términos de $(I\ddot{a})_{\overline{n}|}$ se introdujo en (4.56), pag. 131*

$$(I^{(q)}\ddot{a})_{\overline{n}|}^{(m)} = \frac{d^{(q)}}{q^2 d^{(m)}}(I\ddot{a})_{\overline{qn}|i_q}.$$

Sería muy útil poder aproximar (5.61) en términos de $(I\ddot{a})_x$ ya que ésta puede evaluarse directamente con Tablas de Vida, colocando ${}_kp_x = \ell_{x+k}/\ell_x$, mientras que (5.61) debe evaluarse con una ley tipo Gompertz-Makeham.

Temporal a n años

La anualidad (5.61) temporal a n años tiene prima neta

$$(I^{(q)}\ddot{a})_{x:\overline{n}|}^{(m)} = \frac{1}{mq}\sum_{k=0}^{mn-1}(1+\lfloor\frac{qk}{m}\rfloor)v^{\frac{k}{m}} {}_{\frac{k}{m}}p_x. \tag{5.63}$$

El siguiente programa en R calcular esta prima.

```
#-------------anualidad creciente lineal temporal
```

```
Iaaxqmn = function(x,i,m,q,n,tpx,pars){
v = 1/(1+i)
k = seq(0,m*n-1)
kmpx = sapply(k,function(k)tpx(k/m,x,pars))
vkm = v^(k/m)
pkm = 1+floor(k*q/m)
a = sum(pkm*vkm*kmpx)/(q*m)
return(a)}
```

Ejemplo 5.6.2. *Para $q = 1$, $m = 1$, los pagos son año anticipado con incrementos de 1 cada año, mientras (x) viva. La prima neta es*

$$(I\ddot{a})_x = \sum_{k=0}^{\omega-x-1} (k+1)v^k {}_kp_x. \tag{5.64}$$

Ejemplo 5.6.3. *Para $q = 1$, con m pagos en el año, anticipados, empieza con m pagos de $1/m$, el primer año, incrementando en $1/m$ cada año. La prima neta es*

$$(I\ddot{a})_x^{(m)} = \frac{1}{m} \sum_{k=0}^{m(\omega-x)-1} \left(1 + \left\lfloor \frac{k}{m} \right\rfloor\right) v^{\frac{k}{m}} {}_{\frac{k}{m}}p_x. \tag{5.65}$$

Nótese que, de la definición también se tiene, usando las anualidades diferidas a n años (5.47),(5.49), que el valor presente es la superposición en el tiempo de varias anualidades diferidas:

$$(I\ddot{a})_x^{(m)} = \sum_{k=0}^{\omega-x-1} {}_{k|}\ddot{a}_x^{(m)}. \tag{5.66}$$

La correspondiente anualidad temporal a n años tiene prima neta

$$(I\ddot{a})_{x:\overline{n}|}^{(m)} = \frac{1}{m} \sum_{k=0}^{mn-1} \left(1 + \left\lfloor \frac{k}{m} \right\rfloor\right) v^{\frac{k}{m}} {}_{\frac{k}{m}}p_x. \tag{5.67}$$

5.6.3. Pagos lineales

Las anualidades lineales se definen como combinaciones lineales de las anualidades $\ddot{a}_x$ y $(I\ddot{a})_x$, y de sus variantes.

Para el caso de las anualidades ciertas, con m pagos anticipados en el año, con q incrementos en el año en una tasa $\rho \in (0,1)$, de tal forma que en el primer período de duración q, en el primer año, paga 1, en el seguno período paga $1+\rho$, etc., se definió la prima neta

$$(L^{(q)}\ddot{a})^{(m)}_{\overline{n}|} = (1-\rho)m\ddot{a}^{(m)}_{\overline{n}|} + \rho\, m\, q(I^{(q)}\ddot{a})^{(m)}_{\overline{n}|}.$$

Esta anualidad tiene función de pagos dada por (ver (4.60), pag.133)

$$1+\rho\left\lfloor\frac{q(k-1)}{m}\right\rfloor, k=1,2,\ldots,mn. \tag{5.68}$$

La variable aleatoria valor presente para esta anualidad es

$$\begin{aligned} Y &= (L^{(q)}\ddot{a})^{(m)}_{\overline{K_m(x)+1/m}|} \\ &= (1-\rho)m\ddot{a}^{(m)}_{\overline{K_m(x)+1/m}|} + \rho\, m\,(I^{(q)}\ddot{a})^{(m)}_{\overline{K_m(x)+1/m}|} \end{aligned} \tag{5.69}$$

La prima neta para la correspondiente anualidad de vida, anticipada, para una vida (x), es

$$\begin{aligned} (L^{(q)}\ddot{a})^{(m)}_x &= \sum_{k=0}^{nm-1} v^{\frac{k}{m}}\left(1+\rho\left\lfloor\frac{qk}{m}\right\rfloor\right)\, {}_{\frac{k}{m}}p_x. \\ &= (1-\rho)m\ddot{a}^{(m)}_x + \rho\, m\, q(I^{(q)}\ddot{a})^{(m)}_x. \end{aligned} \tag{5.70}$$

Y el caso temporal a n años es

$$(L^{(q)}\ddot{a})^{(m)}_{x:\overline{n}|} = (1-\rho)\ddot{a}^{(m)}_{x:\overline{n}|} + \rho(I^{(q)}\ddot{a})^{(m)}_{x:\overline{n}|}, \tag{5.71}$$

La variable aleatoria valor presente para esta anualidad es

$$Y = (L^{(q)}\ddot{a})^{(m)}_{\overline{(K_m(x)+1/m)\wedge n}|}$$

$$= (1-\rho) m \ddot{a}^{(m)}_{\overline{(K_m(x)+1/m)\wedge n}|} + \rho\, m\, (I^{(q)}\ddot{a})^{(m)}_{\overline{(K_m(x)+1/m)\wedge n}|} \tag{5.72}$$

La prima neta para la correspondiente anualidad de vida, temporal, vencida, para una vida (x), es

$$\begin{aligned}(L^{(q)}a)^{(m)}_x &= \sum_{k=1}^{nm} v^{\frac{k}{m}} \left(1+\rho\left\lfloor \frac{qk}{m} \right\rfloor\right) {}_{\frac{k}{m}}p_x. \\ &= (1-\rho) m a^{(m)}_x + \rho\, m\, q (I^{(q)}a)^{(m)}_x. \end{aligned} \tag{5.73}$$

Y el caso temporal a n años es

$$(L^{(q)}a)^{(m)}_{x:\overline{n}|} = (1-\rho) a^{(m)}_{x:\overline{n}|} + \rho (I^{(q)}a)^{(m)}_{x:\overline{n}|}, \tag{5.74}$$

La variable aleatoria valor presente para esta anualidad es

$$\begin{aligned} Y &= (L^{(q)}a)^{(m)}_{\overline{(K_m(x)+1/m)\wedge n}|} \\ &= (1-\rho) m a^{(m)}_{\overline{(K_m(x)+1/m)\wedge n}|} + \rho\, m\, (I^{(q)}a)^{(m)}_{\overline{(K_m(x)+1/m)\wedge n}|} \end{aligned} \tag{5.75}$$

Ejemplo 5.6.4. *Para una vida (x), el costo de una anualidad de vida con pagos mensuales anticipados, que empieza pagando una cantidad C, con 2 incrementos en el año a una tasa ρ, está dado por $C(L^{(2)}\ddot{a})^{(12)}_x$*

$$(L^{(2)}\ddot{a})^{(12)}_x = (1-\rho)(12)\ddot{a}^{(12)}_x + \rho(12)(2)(I^{(2)}\ddot{a})^{(12)}_x.$$

Si se toma, por ejemplo, $C = 2$ mill, y $\rho = 0.025C$, habrían dos incrementos de $2.5\,\%$ en el año (semestrales).

El caso de una anualidad de vida temporal a n años tiene prima neta

$$(L^{(q)}\ddot{a})^{(m)}_{x:\overline{n}|} = (1-\rho) m \ddot{a}^{(m)}_{x:\overline{n}|} + \rho\, m\, q (I^{(q)}\ddot{a})^{(m)}_{x:\overline{n}|}. \tag{5.76}$$

Los casos siguientes se interpretan fácilmente.

Ejemplo 5.6.5. *Para $q = m = 1$, la prima neta está dada por:*

$$(L\ddot{a})_x = (1-\rho)\ddot{a}_x + \rho(I\ddot{a})_x, \tag{5.77}$$

con pagos año anticipado iguales a: $C(1-\rho+\rho k)$, en los años $k = 1, 2, \ldots$. Para un temporal a n años. Es una anualidad de vida temporal.

$$(L\ddot{a})_{x:\overline{n}|} = (1-\rho)\ddot{a}_{x:\overline{n}|} + \rho(I\ddot{a})_{x:\overline{n}|} \tag{5.78}$$

paga año anticipado $C(1-\rho+\rho k)$, en los años $k = 1, 2, \ldots$, por máximo n años.

Ejemplo 5.6.6. *El caso $q = 1$, con m pagos anticipados en el año,*

$$(L\ddot{a})_x^{(m)} = (1-\rho)\ddot{a}_x^{(m)} + \rho(I\ddot{a})_x^{(m)}, \tag{5.79}$$

paga período anticipado $\left(1+\rho\left\lfloor\frac{k}{m}\right\rfloor\right)$.

	Símbolo	Pago	Fórmula	Ecuación No
1.a	$\ddot{a}_x^{(m)}$	$1/m$	$\frac{1}{m}\sum_{k=0}^{m(\omega-x)-1} v^{\frac{k}{m}}\,{}_{\frac{k}{m}}p_x$	5.41
1.b	$\ddot{a}_{x:\overline{n}\mid}^{(m)}$	$1/m$	$\frac{1}{m}\sum_{k=0}^{mn-1} v^{\frac{k}{m}}\,{}_{\frac{k}{m}}p_x$	5.45
2.a	$(G^{(q)}\ddot{a})_x^{(m)}$	$(1+i_q)^{\frac{1}{q}\lfloor\frac{qk}{m}\rfloor}$	$\sum_{k=0}^{m(\omega-x)-1}(1+i)^{-\frac{k}{m}}(1+i_q)^{\frac{1}{q}\lfloor\frac{qk}{m}\rfloor}$	5.54
2.b	$(G^{(q)}\ddot{a})_{x:\overline{n}\mid}^{(m)}$	$(1+i_q)^{\frac{1}{q}\lfloor\frac{qk}{m}\rfloor}$	$\sum_{k=0}^{mn-1}(1+i)^{-\frac{k}{m}}(1+i_q)^{\frac{1}{q}\lfloor\frac{qk}{m}\rfloor}$	5.56
3.a	$(I^{(q)}\ddot{a})_x^{(m)}$	$\left(1+\lfloor\frac{k}{m}\rfloor\right)$	$\sum_{k=0}^{m(\omega-x)-1}\left(1+\lfloor\frac{k}{m}\rfloor\right)v^{\frac{k}{m}}\,{}_{\frac{k}{m}}p_x$	5.65
3.b	$(I^{(q)}\ddot{a})_{x:\overline{n}\mid}^{(m)}$	$\left(1+\lfloor\frac{k}{m}\rfloor\right)$	$\sum_{k=0}^{mn-1}\left(1+\lfloor\frac{k}{m}\rfloor\right)v^{\frac{k}{m}}\,{}_{\frac{k}{m}}p_x$	5.67
4.a	$(L^{(q)}\ddot{a})_x^{(m)}$	$1+\rho\left\lfloor\frac{qk}{m}\right\rfloor$	$m(1-\rho)\ddot{a}_x^{(m)} + qm\rho(I^{(q)}\ddot{a})_x^{(m)}$	5.79
4.b	$(L^{(q)}\ddot{a})_{x:\overline{n}\mid}^{(m)}$	$1+\rho\left\lfloor\frac{qk}{m}\right\rfloor$	$m(1-\rho)\ddot{a}_{x:\overline{n}\mid}^{(m)} + qm\rho(I^{(q)}\ddot{a})_{x:\overline{n}\mid}^{(m)}$	5.74

Cuadro 5.1: Anualidades de Vida Integradas - Fórmulas

5.6.4. Ejemplos de anualidad de vida con pagos variables

Ejemplo 5.6.7. *Retomamos el Ejemplo 4.9.1, en la sección §4.9, pag. 136, con el objetivo de replantear la anualidad cierta como una anualidad de vida. El enunciado inicial era:*

Considere el siguiente diseño de una anualidad a $n = 10$ años, que consiste en dos anualidades integradas.

1. Una anualidad lineal, con $m = 12$ pagos al año, vencidos, financiada a una tasa $i = 0.07$ efectiva anual. Con crecimiento de pagos cada semestre ($q = 2$), en una cantidad igual a $10.0\,\%$ de la primera cuota C.
2. Una anualidad geométrica, con $m = 1$ pago al año, vencido, financiada a la tasa $i = 0.07$ efectiva anual. Con crecimiento de pagos cada año ($q = 1$), a una tasa $i_q = 0.03$. Los pagos son de la forma $r(k) = C\,(1 + i_q)^{k-1}$, para $k = 1, 2, \ldots, 10$

Cuál es el valor actuarial de esta anualidad agregada, asumiendo un valor de $C = 2$ mill. Además, se asume que el contrato es para una vida (48). Y la ley de mortalidad asumida es la Gompertz-Makeham .

1. Consideramos primero el caso de la anualidad lineal. Con la fórmula para anualidades lineales con pagos anticipados, creciente al final de cada año, temporal, en (5.76), reemplazando los parámetros:

$$(L^{(2)}\ddot{a})^{(12)}_{48:\overline{10}|} = (1-0.1)(12)\ddot{a}^{(12)}_{48:\overline{10}|} + 0.1(12)(2)(I^{(2)}\ddot{a})^{(12)}_{48:\overline{10}|}.$$

   Hay que evaluar $\ddot{a}^{(12)}_{48:\overline{10}|}$ y $\left(I^{(2)}\ddot{a}\right)^{(12)}_{48:\overline{10}|}$. Usando (5.45), con $i = 0.07$, hay que evaluar (ver el programa en R en pag. 170)

$$\ddot{a}^{(12)}_{48:\overline{10}|} = 7.189906.$$

   Para la segunda anualidad se utiliza la fórmula (5.63), pag. 176, reemplazando (utilizando el programa R en , pag. 176)

$$(I^{(2)}\ddot{a})^{(12)}_{48:\overline{10}|} = 33.54736.$$

   Por lo que, finalmente, la renta lineal vale:

$$\begin{aligned}(L^{(2)}\ddot{a})^{(12)}_{48:\overline{10}|} &= 2[0.9(12)(7.189906) + 0.1(12)(2)(33.54736)]\\ &= \$316'329.300.\end{aligned}$$

2. Para el caso 2, es una anualidad geométrica con $q = 1$ incrementos en el año. Entonces la anualidad geométrica tiene prima neta dada en (5.56), que se calcula con los programas R en la pag. 174

$$
\begin{aligned}
(G\ddot{a})^{(12)}_{48:\overline{10}|} &:= \sum_{k=0}^{(10)(12)-1} (1+i)^{-\frac{k}{12}}(1+i_q)^{\lfloor \frac{k}{12} \rfloor} {}_{\frac{k}{12}}p_{48} \\
&= (12)8.645777.
\end{aligned}
$$

Por tanto, la respuesta final es que esta anualidad agregada (lineal + geométrica) tiene un costo dado por

$$
\begin{aligned}
C_p &= (L^{(2)}\ddot{a})^{(12)}_{48:\overline{10}|} + 2(G\ddot{a})^{(12)}_{48:\overline{10}|} \\
&= \$316'329.300 + \$34'583.110 = \$350'912.400.
\end{aligned}
$$

5.7. Algunas propiedades de la anualidades

5.7.1. Desigualdad de Jensen

Una función $f(x)$ se dice convexa en $[a, b]$ si la línea que une los puntos $(a, f(a))$, $(b, f(b))$ está siempre por encima de la gráfica $(x, f(x))$. Una condición suficiente para que f sea convexa es que exista $f''(x)$ y cumpla $f''(x) > 0$ en ese intervalo. En este caso, si X es una variable aleatoria, f es convexa en el rango de X, y $\mathbb{E}(f(X))$ existe, entonces se cumple:

$$f(\mathbb{E}(X)) \leq \mathbb{E}(f(X)).$$

Una función $f(x)$ se dice cóncava en $[a, b]$ si la línea que une los puntos $(a, f(a))$, $(b, f(b))$ está siempre por debajo de la gráfica $(x, f(x))$. Una condición suficiente para que f sea cóncava es que exista $f''(x)$ y cumpla $f''(x) < 0$ en un intervalo. En este caso, si X es una variable aleatoria, f es cóncava y $\mathbb{E}(f(X))$ existe, entonces se cumple:

$$\mathbb{E}(f(X)) \leq f(\mathbb{E}(X)).$$

Ejemplo 5.7.1. *1. Si $f(x) = 1/x,\ x > 0$, entonces $f''(x) = 2/x^3 > 0$. Por tanto, f es convexa en $(0, \infty)$. Si X es una variable aleatoria con valores en $(0, \infty)$ aplicando la desigualdad obtenemos $1/\mathbb{E}(X) \leq \mathbb{E}(1/X)$.*

2. Si $f(x) = ln(x)$ entonces $f''(x) < 0, x > 0$. Por tanto, f es cóncava. Si X es una variable aleatoria con valores en $(0, \infty)$ entonces se cumple $\mathbb{E}(ln(X)) \leq ln(\mathbb{E}(X))$.

Una aplicación de la desigualdad de Jensen consiste en tomar $f(y) = \ddot{a}_{\overline{y+1}|}$ y como variable aleatoria $X = K(x)$. Entonce se cumple $f''(y) > 0$. Por tanto, $f(y)$ es cóncava y se cumple la desigualdad

$$\mathbb{E}(f(X)) \leq f(\mathbb{E}(X)) \tag{5.80}$$

$$\Leftrightarrow \ \mathbb{E}(\ddot{a}_{\overline{K(x)+1}|}) \leq \ddot{a}_{\overline{\mathbb{E}(K(x))+1}|} = \ddot{a}_{\overline{e_x+1}|} \tag{5.81}$$

Pero en (2.80) se estableció

$$E(T(x)) = \mathring{e}_x \approx e_x + \frac{1}{2},$$

entonces

$$\ddot{a}_x \leq \ddot{a}_{\overline{e_x+1}|} \approx \ddot{a}_{\overline{\mathring{e}_x+1/2}|}. \tag{5.82}$$

Ejemplo 5.7.2. *Con base en el Ejemplo 5.2.1 anterior. Suponga una vida de edad $x = 57$ años, mujer, que compra una anualidad de vida a una Compañía de Seguros, a una tasa de $7.0\,\%$ efectiva anual, y utiliza la ley de mortalidad Gompertz-Makeham, con los parámetros especificados a continuación. Calcule su esperanza de vida y compare el valor de la anualidad cierta con duración $\mathring{e}_x + 1/2$ versus a_x.*

```
E = double(4)
E[1]=floor(aax(s1,g1,C1,x,i=0))
E[2]=floor(aax(s2,g2,C2,x,i=0))
E[3]=floor(aax(s3,g3,C3,x,i=0))
E[4]=floor(aax(s4,g4,C4,x,i=0))
names(E) = c("H-80-89","M-80-89","H-00-05","M-00-05")
(E)
```

```
#-----resultados
H-80-89 M-80-89 H-00-05 M-00-05
     23      22      25      23
#-----desigualdad Jensen
M1 = double(4)
for(j in 1:4)M1[j] = 12*aan(i,E[j])
pr=(M1-M)/M
A=cbind(M,M1,pr)
colnames(A)=c("E(a(K(x))","a(E(K(x))","%incremento")
(A)
#-----resultados
 E(a(K(x)) a(E(K(x)) %incremento
H-80-89  130.5975  144.7349  0.10825139
M-80-89  129.2846  142.0263  0.09855567
H-00-05  132.9347  149.6320  0.12560543
M-00-05  134.4366  144.7349  0.07660310
```

5.7.2. Varianza del valor presente

Si se define la variable Y como el valor presente

$$Y = \ddot{a}_{\overline{(K(x)+1)}|}$$

Para calcular la varianza $Var(Y) = \mathbb{E}(Y^2) - \mathbb{E}(Y)^2$, se calcula

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(Y^2) &= \mathbb{E}\left[\left(\ddot{a}_{\overline{K(x)+1}|}\right)^2\right] \\
&= \sum_{k=0}^{\omega-x-1} (\ddot{a}_{\overline{k+1}|})^2 \, {}_kp_x q_{x+k} \\
&= \sum_{k=0}^{\omega-x-1} \left(\frac{1-v^{k+1}}{d}\right)^2 \, {}_kp_x q_{x+k}
\end{aligned}$$

por tanto

$$Var(\ddot{a}_{\overline{K(x)+1}|}) = \sum_{k=0}^{\omega-x-1} (\ddot{a}_{\overline{k+1}|})^2 \,{}_kp_x q_{x+k} - (\ddot{a}_x)^2. \tag{5.83}$$

Ejemplo 5.7.3. *Con los datos del Ejemplo anterior 5.2.1, escriba un programa R para calcular la varianza*

$$Var(\ddot{a}_{\overline{K(x)+1}|}).$$

```
#---calcular varianza
var.aax = function(s,g,C,x,i){
v = 1/(1+i)
if(110-x-1 >= 0){
k = seq(0,110-x-1,1)
kpx.gm = tpx(s,g,C,x,k)
qxk.gm = 1-tpx(s,g,C,x+k,1)
aax2 = aan(i,k+1)^2
p = sum(aax2*kpx.gm*qxk.gm)-aax(s,g,C,x,i)^2
return(p)}
else{p=0
return(p)}
}
E[1]=var.aax(s1,g1,C1,x,i)
E[2]=var.aax(s2,g2,C2,x,i))
E[3]=var.aax(s3,g3,C3,x,i))
E[4]=var.aax(s4,g4,C4,x,i))
(E)
#----resultados
H-80-89  M-80-89  H-00-05  M-00-05
14.04844 13.52297 14.51402 11.29663
```

5.7.3. Cartera de pólizas de anualidades de vida

Si se asumen que una Aseguradora tiene N anualidades de vida con costos

$$C_j = F_j \ddot{a}_{x_j},\ j = 1, 2, \dots, N, \tag{5.84}$$

donde las edades son x_j. Una cuestión es si el valor adecuado de la prima global

$$C = \sum_{j=1}^{N} C_j \tag{5.85}$$

es suficiente para cubrir el valor presente de los costos, que es la variable

$$L = \sum_{j=1}^{N} F_j \ddot{a}_{\overline{(K(x_j)+1)|}} = \sum_{j=1}^{N} F_j Y_j. \tag{5.86}$$

Asumiendo las variables aleatorias $F_j Y_j$ independientes, aunque no idénticamente distribuídas, se puede aplicar el Teorema del Límite Central, para varianzas desiguales:

Teorema 5.7.1. *Sean* $\{X_k, k = 1, 2, \dots\}$ *una sucesión de variables aleatorias independientes con*

$$\mathbb{E}(X_k) = \mu_k$$
$$Var(X_k) = \sigma_k^2$$

Si se define

$$s_n^2 = \sum_{k=1}^{n} \sigma_k^2$$

y se cumple la condición ([2])

$$\max_{k=1,\dots,n} \left\{ \frac{\sigma_k^2}{s_n^2} \right\} \to 0,\ n \to \infty \tag{5.87}$$

[2] Condición de Lindeberg

entonces se cumple que

$$\frac{\sum_{k=1}^{n}(X_k-\mu_k)}{s_n} \overset{a}{\sim} Z,\; n\to\infty \tag{5.88}$$

donde $Z\sim N(0,1)$.

La aplicación del TLC se hace colocando $X_k = F_k Y_k$. Entonces

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X_k) &= \mu_k = F_k \ddot{a}_x,\\ Var(X_k) &= \sigma_k^2 = F_k^2 Var(\ddot{a}_{\overline{(K(x_k)+1)}|})\end{aligned}$$

se puede calcular la probabilidad

$$\mathbb{P}(L\leq C) = \mathbb{P}\left(Z\leq \frac{C-\mathbb{E}(L)}{\sqrt{Var(L)}}\right), \tag{5.89}$$

$$\mathbb{E}(L) = \sum_{k=1}^{n} F_k\, \ddot{a}_{x_k}, \tag{5.90}$$

$$Var(L) = \sum_{k=1}^{n} F_k^2\, Var(\ddot{a}_{\overline{(K(x_k)+1)}|}) \tag{5.91}$$

Si $C = \mathbb{E}(L)$, esta probabilidad es simplemente 0.5, indicando que las primas netas requieren un recargo adicional para evitar un riesgo de insolvencia. Es decir, recargar la prima neta $\ddot{a}_{x_k}$ a $(1+\theta)\ddot{a}_{x_k}, \theta>0$.

5.7.4. Aplicación: la tasa de aportes en el régimen de Prima Media

Una aplicación de las anualidades diferidas es el planteamiento de las pensiones de jubilación en el régimen de prima media. Se asumen las siguientes variables:

1) Se tienen n vidas de edades $x_j, j=1,\ldots,n$, con edad de jubilación r
2) con salarios S_{x_j},

3) que esperan obtener una pensión mensual R_j,
4) la tasa θ_j como porcentaje del salario para definir el aporte mensual.

Entonces la tasa óptima θ_j está determinada por las ecuaciones

$$\theta_j S_{x_j} \ddot{a}^{(12)}_{x_j:\overline{r-x_j}|} = R_{j\, r-x_j|}\ddot{a}^{(12)}_{x_j},\; j = 1, \ldots, n. \tag{5.92}$$

La prima media en el sistema de pensiones de Prima Media con Prestación Definida se define como un solo valor θ que cumple la ecuación de equilibrio

$$\theta \sum_{j=1}^{n} S_{x_j} \ddot{a}^{(12)}_{x_j:\overline{r-x_j}|} = \sum_{j=1}^{n} R_{j\, r-x_j|}\ddot{a}^{(12)}_{x_j}$$

es decir

$$\theta = \frac{\sum_{j=1}^{n} R_{j\, r-x_j|}\ddot{a}^{(12)}_{x_j}}{\sum_{j=1}^{n} S_{x_j} \ddot{a}^{(12)}_{x_j:\overline{r-x_j}|}} \tag{5.93}$$

Un problema estadístico asociado consiste en estimar los valores S_x para un rango de edades $e \leq x \leq r$, donde e es la edad de ingreso al sistema y r la edad de jubilación. Estos valores se denominan “sendas salariales” y hay varias metodologías para su estimación, con base en regresión no lineal, regresión cuantil y regresión no paramétrica.

Más general, consiste en determinar un modelo para explicar el nivel de los salarios a partir de características del trabajador como educación, experiencia, tipo de empresa, edad, género, etc. Este es un problema clásico de econometría y economía laboral.

Un modelo alterno se basa en la escala salarial, ES_x, una función de la edad x del trabajador. La escala salarial ES_x permite estimar el salario futuro del trabajador de edad inicial x, S_{x+t}, t años adelante, mediante la ecuación recursiva siguiente.

$$S_{x+t} = \frac{ES_{x+t}}{ES_x} S_x,\; t = 1, 2, ..., r - x. \tag{5.94}$$

Es decir, la función salarial permite proyectar los salarios futuros de un empleado a partir del salario en una edad inicial. Los salarios así proyectados se denominan una senda ó carrera salarial.

Definición 5.7.1. *La senda salarial para un empleado con edad inicial* e *y edad de jubilación* r *se define como la sucesión* $S_x, x = e, e+1, \ldots, r-1$ *calculada a partir de (5.94) .*

Se asume que ES_x cambia debido al incremento del salario mínimo anual (que no siempre será igual a la inflación) y al incremento por mejoramiento profesional, debido a cualificación por estudios, experiencia, etc.

Utilizar los cocientes (incrementos salariales)

$$Y_{x_k} = \frac{S_{x_k+1}}{S_{x_k}}, k = 1, 2, \ldots, N$$

donde N es el total de edades, y realizar una regresión Y_{x_k} versus x_k (lineal, polinómica, cuantil, no lineal, no paramétrica, cuantil no paramétrica, etc), para producir incrementos salariales por edad, de la forma

$$\widehat{S}_x = \prod_{y=e}^{x-1} \widehat{Y}_y S_e. \tag{5.95}$$

donde $\widehat{Y}_y$ es el valor estimado a la edad y, de $\frac{ES_y}{ES_e}$. Para cada edad x_j se calcularían $\widehat{R}_j$ y $\widehat{S}_{x_j}$ y finalmente se reemplazarían para obtener la tasa

$$\widehat{\theta} = \frac{\sum_{j=1}^{n} \widehat{R}_{j\,r-x_j|}\ddot{a}_{x_j}^{(12)}}{\sum_{j=1}^{n} \widehat{S}_{x_j}\ddot{a}_{x_j:\overline{r-x_j}|}^{(12)}} \tag{5.96}$$

que podría revisarse periódicamente para tomar en cuenta las variaciones demográficas y salariales.

5.8. Cálculos utilizando la hipótesis de linealidad

El cálculo de la esperanza (5.40) utilizando hipótesis de linealidad es un desarrollo de interés porque muestra cómo utilizar esta hipótesis en un caso importante.

En varios texto, por ejemplo, Bowers et al. [1997], ejercicio 5.44, pp. 158, 601) se demuestra que, si se asume la hipótesis de linealidad, dada por (ver (2.23), pag. 27)

$$ {}_{\frac{k}{m}}q_x = \left(\frac{k}{m}\right) q_x, $$

equivale a asumir $K(x)$ y $S_m(x)$ son variables independientes, y $S_m(x)$ distribuye como una discreta uniforme en el conjunto $\{j/m : j = 1, 2, \ldots, m\}$. Entonces

$$ \begin{aligned} \mathbb{E}(\ddot{a}^{(m)}_{\overline{K(x)+S_m(x)}|}) &= \mathbb{E}\left(\frac{1 - v^{K(x)+S_m(x)}}{d^{(m)}}\right) \\ &= \frac{1}{d^{(m)}} - \frac{1}{d^{(m)}}\mathbb{E}\left(v^{K(x)+S_m(x)}\right) \\ &= \frac{1}{d^{(m)}} - \frac{1}{d^{(m)}}\mathbb{E}\left(v^{K(x)}\right)\mathbb{E}\left(v^{S_m(x)}\right) \end{aligned} \tag{5.97} $$

Utilizando la definición en (5.7):

$$ \ddot{a}_{\overline{K(x)+1}|} := \sum_{k=0}^{K(x)} v^k = \frac{1 - v^{K(x)+1}}{d}, $$

se puede obtener $\mathbb{E}\left(v^{K(x)}\right)$ en función de $\ddot{a}_x = \mathbb{E}(\ddot{a}_{\overline{K(x)+1}|})$.

Además como $S_m(x) \sim DU\{j/m : j = 1, 2, \ldots, m\}$, se tiene que

$$ \mathbb{E}\left(v^{S_m(x)}\right) = \frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m} v^{j/m} = \frac{d}{i^{(m)}}. \tag{5.98} $$

donde $i^{(m)} = m(v^{-1/m} - 1)$. Entonces, después de reemplazar en (5.97) y simplificar se llega a

Proposición 5.8.1.

$$ \ddot{a}_x^{(m)} = \alpha(m)\ddot{a}_x - \beta(m), \tag{5.99} $$

$$ \alpha(m) = \frac{di}{i^{(m)}d^{(m)}}, \tag{5.100} $$

$$ \beta(m) = \frac{i - i^{(m)}}{i^{(m)}d^{(m)}}. \tag{5.101} $$

Si la tasa i es pequeña (como es casi siempre el caso) se pueden utilizar las aproximaciones siguientes:

$$\alpha(m) \approx 1,$$
$$\beta(m) \approx \frac{m-1}{2m}$$

Por ejemplo, para $m = 12$, los valores de $\alpha(12)$ y $\beta(12)$ para dos valores de la tasa i son:

$$i = 0.03,\ \alpha(12) = 1.0001, \beta(12) = 0.46333$$
$$i = 0.10,\ \alpha(12) = 1.0008, \beta(12) = 0.4745.$$

Utilizando estas aproximaciones

$$\ddot{a}_x^{(m)} \approx \ddot{a}_x - \frac{m-1}{2m}, \tag{5.102}$$
$$a_x^{(m)} = \ddot{a}_x^{(m)} - \frac{1}{m} \approx \ddot{a}_x - \frac{m+1}{2m}. \tag{5.103}$$

Los programas en R siguientes implementan esta aproximación

```
aax = function(s,g,C,x,i){
v = 1/(1+i)
if(110-x-1 >= 0){
t = seq(0,110-x-1,1)
px = tpx(s,g,C,x,t)
p = sum(v^t*px)
return(p)}
else{p=0
return(p)}
}

aaxm.a = function(s,g,C,x,i,m){
v = 1/(1+i)
d = 1 - v
dm = m * (1 - v ^ (1 / m))
```

```
im = m * (v ^ (-1 / m) - 1)
am = d*i/(dm*im)
bm = (i - im)/(dm*im)
a = am*aax(s,g,C,x,i)-bm
return(a)
}
```

Utilizando la hipótesis de linealidad se obtiene un resultado adicional a la prima (5.45) en pag.170

Proposición 5.8.2. *La prima (5.45) aplicando la hipótesis de linealidad está dada por*

$$\ddot{a}^{(m)}_{x:\overline{n}|} = \alpha(m)\ddot{a}_{x:\overline{n}|} - \beta(m)(1 - v^n\, {}_np_x) \tag{5.104}$$

utilizando $\alpha(m)$ y $\beta(m)$ definidas en (5.100),(5.101).

Demostración. La hipótesis de linealidad equivale a asumir $K(x)$ y $S_m(x)$ son variables independientes, y $S_m(x)$ distribuye como una discreta uniforme en el conjunto $\{j/m : j = 1, 2, \ldots, m\}$. Para desarrollar $\mathbb{E}(Y)$ se empieza con la esperanza de la variable aleatoria:

$$\ddot{a}^{(m)}_{\overline{K(x)+S_m(x)}|} I(K(x) \leq n-1) = \frac{1 - v^{K(x)+S_m(x)}}{d^{(m)}} I(K(x) \leq n-1)$$

entonces

$$\mathbb{E}(\ddot{a}^{(m)}_{\overline{K(x)+S_m(x)}|} I(K(x) \leq n-1)) = \mathbb{E}\left(\frac{1 - v^{K(x)+S_m(x)}}{d^{(m)}} I(K(x) \leq n-1)\right)$$
$$= \frac{1}{d^{(m)}}\mathbb{E}\left(I(K(x) \leq n-1)\right) - \frac{1}{d^{(m)}}\mathbb{E}\left(v^{K(x)+S_m(x)} I(K(x) \leq n-1)\right)$$
$$= \frac{1}{d^{(m)}}(1 - {}_np_x) - \frac{1}{d^{(m)}}\mathbb{E}\left(v^{K(x)+S_m(x)} I(K(x) \leq n-1)\right)$$

aplicando la independencia entre $K(x)$ y $S_m(x)$

$$\mathbb{E}\left(v^{K(x)+S_m(x)} I(K(x) \leq n-1)\right)$$

$$= \mathbb{E}\left(v^{K(x)} I(K(x) \leq n-1)\right) \mathbb{E}\left(v^{S_m(x)}\right)$$

Como $S_m(x) \sim DU\{j/m : j = 1, 2, \ldots, m\}$, se puede usar el resultado anterior en (5.98): $\mathbb{E}(v^{S_m(x)}) = d/i^{(m)}$. Además se puede obtener una expresión para $\mathbb{E}(v^{K(x)} I(K(x) \leq n-1))$ de la fórmula (5.19):

$$\begin{aligned}
\ddot{a}_{x:\overline{n|}} &= \mathbb{E}(\ddot{a}_{\overline{K(x)+1|}} I(K(x) \leq n-1) + \ddot{a}_{\overline{n|}} I(K(x) \geq n)) \\
&= \mathbb{E}\left(\frac{1 - v^{K(x)+1}}{d} I(K(x) \leq n-1) + \ddot{a}_{\overline{n|}} I(K(x) \geq n)\right)
\end{aligned}$$

para obtener

$$\mathbb{E}\left(v^{K(x)} I(K(x) \leq n-1)\right) = \frac{d}{v}(\ddot{a}_{\overline{n|}}\, {}_n p_x + \frac{1}{d}(1 - {}_n p_x) - \ddot{a}_{x:\overline{n|}}) \tag{5.105}$$

Finalmente, reemplazando los resultados en (5.98) y (5.105) en la expresión para la esperanza de Y en (**??**), se llega a través de simplificaciones algebráicas a:

$$\ddot{a}^{(m)}_{x:\overline{n|}} = \frac{di}{i^{(m)} d^{(m)}} \ddot{a}_{x:\overline{n|}} - \frac{i - i^{(m)}}{i^{(m)} d^{(m)}} (1 - v^n \, {}_n p_x) \tag{5.106}$$

Utilizando las notaciones α y β (definidas en (5.100),(5.101))

$$\ddot{a}^{(m)}_{x:\overline{n|}} = \alpha(m) \ddot{a}_{x:\overline{n|}} - \beta(m)(1 - v^n \, {}_n p_x) \tag{5.107}$$

□

Ejemplo 5.8.1. *Calcular el valor actuarial de una renta vitalicia, con 12 pagos mensuales vencidos al año, de 2 mill cada uno, para una vida (57) hombre, utilizando una tasa de descuento de la anualidad de $i = 0.09$ efectiva anual, utilizando una ley de supervivencia Gompertz-Makeham para la Tabla de Vida Colombiana 80-89.*

Se calcula

$$\ddot{a}^{(12)}_{57|i=0.09} \approx \ddot{a}_{57|i=0.09} - \frac{12 - 1}{2(12)} = 8.886745.$$

Por tanto, la prima neta es

$$Prima = 2(12)(8.886745) = \$213'282.000.$$

Ejemplo 5.8.2. *Asumiendo la ley de mortalidad DeMoivre, para un $m > 1$, comprobar que la distribución de $K_m(x)$ debe ser Uniforme Discreta en*

$$\left\{0, \frac{1}{m}, \ldots, \frac{m(\omega - x) - 1}{m}\right\}.$$

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(K_m(x) = k) &= {}_{\frac{k}{m}}p_x \; {}_{\frac{1}{m}}q_{x+\frac{k}{m}} \\
&= \left(1 - \frac{k}{m(\omega - x)}\right)\left(\frac{1}{m(\omega - x) - k}\right) \\
&= \frac{1}{m(\omega - x)}.
\end{aligned}$$

Ejemplo 5.8.3. *Asumiendo la ley de mortalidad DeMoivre, para un $m > 1$, calcular $\ddot{a}_x^{(m)}$.*

$$\begin{aligned}
\ddot{a}_x^{(m)} &= \frac{1}{m} \sum_{k=0}^{m(\omega-x)-1} \left(\sum_{s=0}^{k} v^{\frac{s}{m}}\right) {}_{\frac{k}{m}}p_x \; {}_{\frac{1}{m}}q_{x+\frac{k}{m}} \\
&= \frac{1}{m^2(\omega - x)} \sum_{k=0}^{m(\omega-x)-1} \left(\sum_{s=0}^{k} v^{\frac{s}{m}}\right)
\end{aligned}$$

La expresión anterior (doble sumatoria) se puede simplificar, por ejemplo, con Maxima; la sumatoria interna se calcula con la instrucción

```
sum(v^(s/m),s,0,k),simpsum;
```

produce

$$\sum_{s=0}^{k} v^{\frac{s}{m}} = \frac{v^{(k+1)/m} - 1}{v^{1/m} - 1}$$

y luego (colocando w por el momento en lugar de w-x)

```
sum((v^((k+1)/m)-1)/(v^(1/m)-1),k,0,m*w-1),simpsum;
```

produce la expresión final

$$\sum_{k=0}^{m(\omega-x)-1}\left(\sum_{s=0}^{k} v^{\frac{s}{m}}\right) = \frac{m(\omega-x)(1-v^{1/m}) - v^{1/m}(1-v^{\omega-x})}{(1-v^{1/m})^2}$$

Finalmente

$$\ddot{a}_x^{(m)} = \frac{m(\omega-x)(1-v^{1/m}) - v^{1/m}(1-v^{\omega-x})}{m^2(\omega-x)(1-v^{1/m})^2}$$

Ejemplo 5.8.4. *Un ejemplo concreto. Si se asume $\omega = 110$, $x = 57$, $i = 0.09$, $m = 12$, se tiene el caso de una vida (57), que adquiere una anualidad vitalicia con pagos mes anticipado, a una tasa efectiva anual de $9.0\,\%$. Calcule $\ddot{a}_x^{(m)}$. El siguiente programa en R calcula este valor*

```
# ejemplo anualidad anticipada con 12 pagos
# utilizando ley DeMoivre
x = 57
w = 110
i = 0.09
m = 12
aax.u = function(i,x,w,m){
v = 1/(1+i)
f1 = m*(w-x)*(1-v^(1/m))-v^(1/m)*(1-v^(w-x))
f2 = m^2*(w-x)*(1-v^(1/m))^2
a = f1/f2
return(a)
}
(aa57.12 = aax.u(i,x,w,m))
#------respuesta
 9.131452
```

Utilizando la hipótesis de linealidad se obtiene la expresión equivalente para (5.65)

$$(I\ddot{a})_x^{(m)} = \alpha(m)(I\ddot{a})_x - \beta(m). \tag{5.108}$$

Ejemplo 5.8.5. *Retomamos el Ejemplo 5.6.7 anterior para mostrar cómo pueden realizarse los cálculos utilizando Tablas de Vida solamente. Sin embargo, se puede usar la alternativa usando (5.107), pag. 193:*

$$\ddot{a}^{(m)}_{x:\overline{n}|} = \alpha(m)\ddot{a}_{x:\overline{n}|} - \beta(m)(1 - v^n\, {}_np_x),$$

y se obtiene

$$0.9(2)(12)\ddot{a}^{(12)}_{48:\overline{10}|} = 155'302.000.$$

Esta alternativa permite también evaluar esta anualidad con Tablas de Vida, mientras que con la anterior no se podría ya que ${}_{\frac{k}{12}}p_{48}$ no pueden calcularse con éstas, porque no contienen edades fraccionales.

5.9. Problemas

1. Considere la fuerza de mortalidad estándar μ_{x+t} dada por una ley de mortalidad. Utilice los parámetros que aparecen en los Ejemplos para la Ley escogida (vea las secciones §2.7 y §2.6).

   Asuma una fuerza de mortalidad sub-estándar según el modelo multiplicativo en (2.38), para una vida (x) dada por

   $$\mu_{x^s+t} = \theta\mu_{x+t}, \tag{5.109}$$

   con $\theta = 1.7$. Denote por $T(x^s)$ su vida media residual.

   Puntos:

   a) Un departamento rentas vitalicias en una Aseguradora diseña dos **anualidades ciertas**, para un vida (x), con $x_1 = 45$, a $n = \lfloor \mathring{e}_x \rfloor$ años, financiadas a una tasa efectiva anual de $i = 0.095$.

   - Una anualidad creciente lineal, con pagos mes anticipado, que aumentan anualmente, a partir del segundo año, a una tasa $\rho = 0.04$. El pago en el primer año es $C_1 = 2.5$ mill.
   - Una anualidad geométrica, con pagos mes anticipado, que aumenta anualmente, a partir del segundo año, en una tasa $i_q = 0.04$. El pago en el primer es $C_2 = 2.5$ mill.

Encuentre el valor de estas anualidades. Describa la fórmula que utilizó para la solución. A qué puede deberse la diferencia entre los costos?.

b) Adicionalmente, este departamento ofrece dos **anualidades de vida** con el mismo diseño y parámetros de las anualidades ciertas anteriores. Si la toma una vida de edad x_1, encuentre el costo actuarial de las mismas. Por qué los costos son menores con respecto a los de las anualidades ciertas anteriores?.

c) Simule el valor presente de las dos anualidades de vida anteriores. Reporte las densidades suavizadas (se refiere a la gráfica con la función de R `density()`. Cómo se explican las diferencias entre las densidades?

d) Calcule el valor de las anualidades de vida anteriores para una vida con fuerza de mortalidad sub-estándar con la misma edad x_1.

2. Considere la fuerza de mortalidad estándar μ_{x+t} dada por una ley de mortalidad. Utilice los parámetros que aparecen en los Ejemplos para la Ley escogida (vea las secciones §2.7 y §2.6).

   Asuma una fuerza de mortalidad sub-estándar multiplicativa, tal que: $\mu^s_{x+t} = 1.3\,\mu_{x+t}$, para una vida (x). Denote por $T(x^s)$ su vida media residual.

   Puntos a resolver:

   a) Una Cooperativa de Crédito ofrece un crédito para vivienda a $n = 15$ años, por valor de 200 mill, financiado a una tasa efectiva anual $i = 0.113$, que se paga mediante un sistema agregado de dos anualidades:

   - Una anualidad lineal con pagos mensuales anticipados, que crecen semestralmente, a partir del segundo semestre inclusive, en un porcentaje fijo de $\rho = 0.025$.
   - Una anualidad geométrica con un pago año anticipado, con crecimiento anual, a una tasa $i_q = 0.05$.

   Asuma que la cuota es C para ambas anualidades. Encuentre su valor. Explique las instrucciones en R utilizadas.

   b) Asuma que esta Cooperativa está autorizada para ofrecer anualidades de vida. Ofrece una **anualidad de vida entera** con el mismo diseño y parámetros de la anualidad cierta agregada del punto a). Si la toma una vida de edad $x_1 = 45$, y los pagos de ambas anualidades inician en el mismo valor C, encuentre el costo actuarial de la misma.

c) Simule $N = 15000$ valores de las variables aleatorias que proveen el valor presente de las tres anualidades de vida anteriores (la lineal, la geométrica y la agregada). Reporte las densidades suavizadas (se refiere a la gráfica con la función de R `density()`, en un mismo gráfico. Cómo se explican las diferencias entre las densidades?

d) Calcule el valor de la anualidad de vida anterior agregada para una vida con fuerza de mortalidad sub-estándar con la misma edad x_1. En qué porcentaje aumenta el costo de ésta con respecto a la calculada en el punto b)?.

3. Considere la fuerza de mortalidad estándar μ_{x+t} dada por una ley de mortalidad. Utilice los parámetros que aparecen en los Ejemplos para la Ley escogida (vea las secciones §2.7 y §2.6). Asuma una fuerza de mortalidad sub-estándar según el modelo multiplicativo para una vida (x),(2.38), dada por

$$\mu^s_{x+t} = \theta\mu_{x+t}, \tag{5.110}$$

donde la constante $\theta > 1$ está dada. Denote por $T(x^s)$ su vida media residual. Asuma $\theta = 1.7$.

a) Un departamento de estructuración de un Banco diseña una anualidad cierta geométrica a $n = 20$ años, financiada a una tasa efectiva anual de $i = 0.087$, con pagos mes anticipado, que aumentan anualmente, a partir del segundo año, a una tasa $i_q = 0.04$. El pago en el primer año es $C = 2.5$ mill. Encuentre el valor de esta anualidad. Describa la fórmula que utilizó para la solución.

b) Adicionalmente, este departamento ofrece una **anualidad de vida** geométrica temporal anticipada, ver (5.56), pag. 174, con el mismo diseño y parámetros de la anualidad cierta anterior. Si la toma una vida de edad $x_1 = 55$, encuentre el valor actuarial de la misma: $G^{(q)}\ddot{a})^{(m)}_{x_1:\overline{n}|}$.

c) Simule N=10000 valores de la variable aleatoria Y valor presente de la anualidad de vida geométrica temporal con pagos anticipados, con los datos de la punto b). La variable Y está definida en (5.55), pag. 174. Reporte el histograma. Calcule la probabilidad

$$\mathbb{P}\left(Y > (G^{(q)}\ddot{a})^{(m)}_{x_1:\overline{n}|}\right).$$

Es la probabilidad de un riesgo, cuál?.

d) Defina la probabilidad de que al menos una de las dos vidas $(x_1), (x_2)$ esté con vida después de t años, como

$$\begin{aligned} {}_tp_{x_1} &= \mathbb{P}((T(x_1) > t) \cup (T(x_2) > t)), \\ &= {}_tp_x + {}_tp_y - {}_tp_x{}_tp_y. \end{aligned}$$

Defina, calcule e interprete la anualidad

$$(G^{(q)}\ddot{a})^{(m)}_{\overline{x_1,x_1^s}:\overline{n}|},$$

con los mismos parámetros de la parte b).

4. Considere la fuerza de mortalidad estándar μ_{x+t} dada por una ley de mortalidad. Utilice los parámetros que aparecen en los Ejemplos para la Ley escogida (vea las secciones §2.7 y §2.6). Asuma una fuerza de mortalidad sub-estándar aditiva, tal que: $\mu^s_{x+t} = k + \mu_{x+t}, k > 0$, para una vida (x) que se le diagnostica una insuficiencia renal. Denote por $T(x^s)$ su vida media residual. Suponga $k = 0.06$.

a) Un departamento de rentas vitalicias en una Aseguradora diseña una **anualidad cierta lineal**, para una vida de edad $x_1 = 45$, a $n = \lfloor \mathring{e}_{x_1} \rfloor$ años, financiada a una tasa efectiva anual de $i = 0.075$. Con pagos trimestre vencido, que aumentan anualmente, a partir del segundo año, a una tasa $\rho = 0.025$. El pago durante el primer año es $C = 6.5$ mill. Encuentre el valor de esta anualidad. Coloque el procedimiento, código. Ver definiciones en (4.61), (4.62), pag. 133.

b) Adicionalmente, este departamento ofrece una **anualidad de vida entera** lineal, con el mismo diseño y parámetros de la anualidad cierta anterior. Los pagos trimestrales en el primer años tienen el mismo valor $C = 6.5$ mill que en caso anterior y la edad x_1 es la misma. Encuentre el valor actuarial de esta anualidad de vida. Cómo puede explicarse la diferencia entre los costos de esta anualidad y la del punto a)?.

c) Simule N=10000 valores de la variable aleatoria Y valor presente de una anualidad de vida entera lineal, definida en (5.69), pag. 178. Reporte el histograma ó la densidad suavizada. Calcule la probabilidad

$$\mathbb{P}\left(Y > (L^{(q)}\ddot{a})^{(m)}_{x_1}\right).$$

Es la probabilidad de un riesgo, cuál?.

d) Defina la probabilidad de que al menos una de las dos vidas $(x_1), (x_2)$ esté con vida después de t años, como

$$
\begin{aligned}
{}_tp_{\overline{x_1,x_2}} &= \mathbb{P}((T(x_1) > t) \cup (T(x_2) > t)), && (5.111)\\
&= {}_tp_x + {}_tp_y - {}_tp_x {}_tp_y. && (5.112)
\end{aligned}
$$

Interprete y calcule la anualidad

$$(L^{(q)}\ddot{a})^{(m)}_{\overline{x_1,x_1^s}}$$

con los mismos parámetros de la parte b).

5. Considere la fuerza de mortalidad estándar μ_{x+t} dada por una ley de mortalidad. Utilice los parámetros que aparecen en los Ejemplos para la Ley escogida (vea las secciones §2.7 y §2.6). Asuma una fuerza de mortalidad sub-estándar aditiva, tal que: $\mu^s_{x+t} = 0.02 + \mu_{x+t}$. Denote por $T(x^s)$ su vida media residual.

   a) Una Cooperativa de Crédito ofrece un crédito para vivienda a $n = 15$ años, por valor de 200 mill, financiado a una tasa efectiva anual $i = 0.113$, que se paga mediante un sistema agregado de dos anualidades:

   - Una anualidad lineal con pagos mensuales anticipados, que crecen semestralmente, a partir del segundo semestre inclusive, en un porcentaje fijo de $\rho = 0.025$.
   - Una anualidad geométrica con un pago año anticipado, con crecimiento anual, a una tasa $i_q = 0.05$.

   Asuma que para ambas anualidades la cuota es C. Encuentre su valor. Explique las instrucciones en R utilizadas.

   b) Asuma que esta Cooperativa está autorizada para ofrecer anualidades de vida. Ofrece una **anualidad de vida entera** con el mismo diseño y parámetros de la anualidad cierta agregada del punto a). Si la toma una vida de edad $x_1 = 45$, y los pagos de ambas anualidades inician en el mismo valor C, encuentre el costo actuarial de la misma.

   c) Simule $N = 15000$ valores de la variable aleatoria Y que provee el valor presente de la anualidad de vida agregada para la vida (x_1). Y luego simule N valores de la variable aleatoria Y^s que provee el mismo valor presente pero para una vida con mortalidad sub-estándar x_1^s. Reporte las densidades de estos casos en una misma gráfica. Comente, explique las diferencias que encuentre entre ambas densidades.

d) Calcule e interprete y la anualidad

$$\mathbb{P}(Y > Ys).$$

6. (ver Gomez Ceballos [1985, pag. 170]) El departamento de créditos en una Cooperativa Financiera diseña un crédito a $n = 6$ años, financiado a una tasa efectiva anual de $i = 0.15$. El crédito es de tipo agregado y consiste de dos anualidades:

   a) Una anualidad uniforme, con pagos C_1, mes vencido.

   b) Una anualidad lineal decreciente (ver definición en pag. 134), con dos pagos vencidos en el año, que decrecen anualmente, a partir del segundo año, en una tasa $i_q = 0.1$. El pago en el primer año se indica por C_2.

   c) El valor del crédito es por 20 mill. El valor de las cuotas cumplen: $C_2 = C_1 = C$ mill.

   Encuentre:

   a) El valor de la cuota común C (explique la fórmula que utilizó para la solución)..

   b) La gráfica de los pagos.

   c) La gráfica de los saldos $F(k)$. (Importante!: recordar que el flujo de caja se hace con una tasa efectiva para cada período)

7. Un departamento de estructuración de un Banco diseña una anualidad a $n = 20$ años, financiada a una tasa efectiva anual de $i = 0.087$. La anualidad es de tipo agregado y consiste de dos anualidades:

   a) Una anualidad lineal creciente, con pagos C_1, mes vencido, que aumentan anualmente, a partir del segundo año, a una tasa $\rho = 0.04$. El pago en el primer año se indica por C_1.

   b) Una anualidad geométrica, con dos pagos vencidos en el año, que aumenta anualmente, a partir del segundo año, en una tasa $i_{q2} = 0.03$. El pago en el primer año se indica por C_2.

   c) Los valores de los pagos cumplen: $C_2 = 0.6C_1, C1 = 2.5$ mill.

   Encuentre:

a) El valor de esta anualidad (explique la fórmula que utilizó para la solución).

b) La gráfica de los pagos.

c) En qué porcentaje cambia el valor de la anualidad si la segunda cuota i_{q2} se incrementa a $i_{q2} = 0.04$?.

8. El departamento de créditos en una Cooperativa Financiera diseña un crédito a $n = 15$ años, financiado a una tasa efectiva anual de $i = 0.125$. El crédito es de tipo agregado, por valor de $\$200$ mill y consiste de tres anualidades:

   a) Una anualidad uniforme, con pagos C_1, mes vencido.

   b) Una anualidad decreciente con dos pagos vencidos al año (ver definición en caso 2.b Tabla4.4). Los dos primeros pagos se indican por C_2.

   c) Una anualidad geométrica, con un pago vencido en el año, que decrece anualmente, a partir del segundo año, en una tasa $i_{q2} = 0.03$ (ver definición en (4.40), pag. 121). El pago en el primer año se indica por C_3.

   d) Los valores de los pagos cumplen: $C_2 = C_1 = C_3 = C$ mill.

   Encuentre:

   a) El valor de C (explique la fórmula que utilizó para la solución)..

   b) La gráfica de los pagos.

   c) En qué porcentaje cambia el valor de C si en la tercera cuota i_{q2} se incrementa a $i_{q2} = 0.04$?.

9. (ver Gomez Ceballos [1985, pag. 180]) El departamento de créditos en una Cooperativa Financiera diseña un crédito a $n = 6$ años, financiado a una tasa efectiva anual de $i = 0.15$. El valor es por $\$200$ mill. El crédito es de tipo agregado y consiste de tres anualidades:

   a) Una anualidad uniforme, con pagos C_1, mes anticipado.

   b) Una anualidad geométrica con dos pagos vencidos al año, que crece anualmente a una tasa $i_{q1} = 0.04$.

   c) Una anualidad lineal creciente, con un pago vencido en el año, que aumenta anualmente, a partir del segundo año, en una tasa $\rho = 0.03$. El pago en el primer año se indica por C_2.

d) Los valores de los pagos cumplen: $C_2 = C_1 = C_3 = C$ mill.

Encuentre:

a) El valor de C (explique la fórmula que utilizó para la solución)..

b) La gráfica de los pagos.

c) La gráfica del flujo de caja.

10. (ver Gomez Ceballos [1985, pag. 170]) El departamento de créditos en una Cooperativa Financiera diseña un crédito a $n = 8$ años, financiado a una tasa efectiva anual de $i = 0.13$. El crédito es de tipo agregado y consiste de dos anualidades:

a) Una anualidad lineal decreciente (ver definición en pag. 134), con pagos mes vencido, que decrecen anualmente, a partir del segundo año, en una tasa $\rho_1 = 0.1$. El pago en el primer año se indica por C_1.

b) Una anualidad lineal decreciente (ver definición en pag. 134), con dos pagos vencidos en el año, que decrecen anualmente, a partir del segundo año, en una tasa $\rho_2 = 0.2$. El pago en el primer año se indica por C_2.

c) El valor del crédito es por 20 mill. El valor de las cuotas cumplen: $C_2 = C_1 = C$ mill.

Encuentre:

a) El valor de la cuota común C (explique la fórmula que utilizó para la solución)..

b) La gráfica de los pagos.

c) La gráfica de los saldos $F(k)$. (Importante!: recordar que el flujo de caja se hace con una tasa efectiva para cada período)

11. Un departamento de rentas vitalicias en una Aseguradora diseña una anualidad a $n = 20$ años, financiada a una tasa efectiva anual de $i = 0.065$. La anualidad es de tipo agregado y consiste de dos anualidades:

a) Una anualidad creciente lineal, con pagos C_1, trimestre vencido, que aumentan anualmente, a partir del segundo año, a una tasa $\alpha = 0.05$. El pago en el primer año se indica por C_1.

b) Una anualidad geométrica creciente, con dos pagos vencidos en el año, que crecen anualmente, a partir del segundo año, en una tasa $i_q = 0.04$. El pago en el primer año se indica por C_2.

c) El valor de las cuotas cumplen: $C_2 = C_1 = 2.5$ mill.

Encuentre:

a) El valor de esta anualidad (explique la fórmula que utilizó para la solución).

b) La gráfica de los pagos.

c) La gráfica de los saldos $F(k)$. (Importante!: recordar que el flujo de caja se hace con una tasa efectiva para cada período. En este caso es una tasa trimestral efectiva)

12. Un crédito para vivienda a $n = 20$ años, por valor de 200 mill, financiado a una tasa efectiva anual $i = 0.11$, se paga mediante un sistema agregado de dos anualidades:

a) Una anualidad lineal con $m = 12$ pagos anticipados al año, que crecen trimestralmente, a partir del segundo año, en un porcentaje fijo de $\alpha = 0.2$ de la cuota C que se paga durante el primer semestre.

b) Una anualidad geométrica con un pago año vencido, con crecimiento anual, a una tasa $i_q = 0.05$.

Puntos a resolver:

a) Plantee la ecuación que debe cumplir la cuota C, y explíquela.

b) Reporte el valor de C. Reporte las instrucciones en R.

c) Grafique las cuotas. Reporte la gráfica.

Sugerencias: Use la definición de anualidad lineal, caso vencido que aparece en la Tabla 4.3, pag. 148, caso 3.b.

13. Un departamento de estructuración de un Banco diseña una anualidad a $n = 15$ años, financiada a una tasa efectiva anual de $i = 0.097$. La anualidad es de tipo agregado y consiste de dos anualidades:

a) Una anualidad geométrica, con pagos, C_1, mes vencido, que aumentan anualmente, a partir del segundo año, a una tasa $i_{q_1} = 0.03$. El pago en el primer año se indica por C_1.

b) Una anualidad geométrica, con dos pagos vencidos en el año, que aumenta anualmente, a partir del segundo año, en una tasa $i_{q_2} = 0.04$. El pago en el primer año se indica por C_2.

c) Los valores de los pagos cumplen: $C_2 = 0.7C_1, C_1 = 3.5$ mill.

Encuentre:

a) El valor de esta anualidad (explique la fórmula que utilizó para la solución).

b) La gráfica de los pagos.

c) En qué porcentaje cambia el valor de la anualidad si en la primera cuota la tasa se incrementa a de $i_{q_1} = 0.03$ a $i_{q_1} = 0.04$.

CAPÍTULO 6

Seguros de Vida

6.1. Seguros de Vida

La definición de seguro de vida siguiente está tomada de [Türler, 1977, pag. 77]:

> "Es el contrato mediante el cual una persona llamada **asegurador** promete a otra, a quien llama **tomador**, a cambio de una prestación que se designa como **prima**, procurar a una persona, que recibe el nombre de **beneficiario** cierto **beneficio** bajo una condición o término que depende de la vida de una persona, a la que se dá el nombre de **asegurado.** En la práctica **el asegurado** y **el tomador** forman una sola persona."

Algunos tipos de seguros de vida son:

1. Seguros en caso de fallecimiento.
2. Seguros mixtos o dotales, en caso de fallecimiento y/o supervivencia.
3. Seguros de vida con pago dependiente de un índice financiero (unit linked).
4. Seguros de salud (medicina prepagada).
5. Seguros para enfermedad crítica (dread illness).
6. Seguros de asistencia médica de larga duración (long term care insurance).

En este capítulo se tratan los dos primero tipos, los restantes en el capítulo siguiente.

6.2. Tipos básicos de seguros de vida

1. Vida entera: cobertura hasta fallecimiento.
2. Temporal: cobertura máximo n años.
3. Dotal puro: cobertura si se sobrevive n años.
4. Dotal ó mixto: cobertura temporal y dotal puro.
5. Diferido: cobertura se activa después de n años.

Seguro de vida entera. Es un contrato que provee el pago de una unidad monetaria al final del año de fallecimiento de una vida (x). Sea $K(x)$ la vida remanente abreviada de (x). El tiempo en el que se paga este seguro es al final de año de fallecimiento, es decir, $K(x) + 1$.

El valor presente del pago es la variable aleatoria

$$Z = v^{K(x)+1}, \tag{6.1}$$

donde $v = (1+i)^{-1}$ con $i =$ la tasa de descuento del seguro. La prima neta es el valor esperado de Z,

$$A_x := \mathbb{E}(Z) = \mathbb{E}(v^{K(x)+1}) = \sum_{k=0}^{\omega-x-1} v^{k+1}{}_k p_x q_{x+k} \tag{6.2}$$

Note que:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(Z^2) &= \mathbb{E}((v^2)^{K(x)+1}) \\ &= \sum_{k=0}^{\omega-x-1} v^{2(k+1)}{}_k p_x q_{x+k}\end{aligned}$$

También, como la prima neta de un Seguro de Vida Total es $A_x = \mathbb{E}(v^{K(x)+1})$, se tiene, con $d = 1 - v$,

$$\begin{aligned}\ddot{a}_x &= \mathbb{E}(a_{\overline{K(x)}|}) \qquad (6.3)\\ &= \mathbb{E}\left(\frac{1-v^{K(x)+1}}{d}\right) = \frac{1-\mathbb{E}(v^{K(x)+1})}{d} \qquad (6.4)\\ &= \frac{1-A_x}{d}, \qquad (6.5)\end{aligned}$$

de donde se tiene la relación dual entre primas de seguros y anualidades

$$A_x = 1 - d\ddot{a}_x. \tag{6.6}$$

Ejemplo 6.2.1. *Calcular para (38) la prima neta de un seguro vida entera, por un valor asegurado de 1 mill, usando $i = 0.13$ y la ley de DeMoivre ${}_k p_x = \frac{110-x-k}{110-x}$, $0 \leq k \leq 110 - x - 1$,*

$$
\begin{aligned}
A_{(38)} &= \sum_{k=0}^{\omega-x-1} v^{k+1}{}_{k}p_{38}\, q_{38+k} \\
&= \sum_{k=0}^{110-37} v^{k+1}\left(\frac{110-38-k}{110-38}\right)\left(\frac{1}{110-38-k}\right) \\
&= \sum_{k=0}^{71} \frac{v^{k+1}}{72} = \frac{1}{72}\sum_{k=1}^{72} v^{k} \\
&= \frac{1}{72}\, a_{\overline{72|}0.13} = \frac{1}{72}\left(\frac{1-1.13^{-72}}{0.13}\right) \\
&= 0.1068215
\end{aligned}
$$

$\therefore\ P = 1'000.000(A_{38}) = \$106.821$

Ejemplo 6.2.2. *Un seguro de vida que empieza a pagar (a un beneficiario) una anualidad anticipada con pagos de 1, temporal por m años, tiene prima neta*

$$P = A_x \ddot{a}_{\overline{m|}}$$

Ejercicio 6.2.1. *Nota sobre el uso de la ley de Gompertz-Makeham. Si se asume una ley de Gompertz-Makeham se tiene*

$$A_x = v - da_x.$$

Demostración. En los cálculos de las primas netas interviene el factor ${}_kp_xq_{x+k}$.

$$
\begin{aligned}
{}_kp_xq_{x+k} &= {}_kp_x(1-p_{x+k}) \\
&= {}_kp_x - {}_kp_xp_{x+k} \\
&= {}_kp_x - {}_{k+1}p_x \\
&= s^kg^{c^x(c^k-1)} - s^{k+1}g^{c^x(c^{k+1}-1)}
\end{aligned}
$$

luego,

$$A_x = \sum_{k=0}^{\omega-x-1} v^{k+1}{}_kp_xq_{x+k}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{k=0}^{\omega-x-1} v^{k+1} s^k g^{c^x(c^k-1)} - \sum_{k=0}^{\omega-x-1} v^{k+1} s^{k+1} g^{c^x(c^{k+1}-1)} \\
&= v \sum_{k=0}^{\omega-x-1} v^k s^k g^{c^x(c^k-1)} - \sum_{k=1}^{\omega-x} v^k s^k g^{c^x(c^k-1)} \\
&= v(1+U) - U = v - dU
\end{aligned}
$$

donde

$$
U = \sum_{k=1}^{\omega-x} (vs)^k g^{c^x(c^k-1)} = \sum_{k=1}^{\omega-x} v^k {}_kp_x = a_x
$$

Por tanto

$$
A_x = v - da_x.
$$

□

Seguro Temporal. Es un seguro pagable solamente si ocurre el fallecimiento de (x) dentro de un intervalo de n años. El pago se hace al final del último año de de vida.

Suponemos $n \geq 1$. Si el asegurado (x) fallece entre x y $x+n$ los beneficiarios reciben 1. Pero si sobrevive, el seguro vence sin pagarse. El valor presente es la variable aleatoria

$$
Z = v^{K(x)+1} I(K(x) \leq n-1)
$$

donde $I(A) \in \{0,1\}$ es la función indicadora del evento A. La prima neta ó valor actuarial es

$$
\begin{aligned}
A^1_{x:\overline{n}|} &= \mathbb{E}(Z) \\
&= \sum_{k=0}^{\omega-x-1} v^{k+1} I(k \leq n-1) {}_kp_x q_{x+k} \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} v^{k+1} {}_kp_k q_{x+k}
\end{aligned}
$$

Por definición se toma $A^1_{x:\overline{0}|} = 0$.

Ejemplo 6.2.3. *Calcular para (38) la prima neta de un seguro vida temporal a 15 años, por un valor asegurado de 1 mill, usando $i = 0.13$ y la ley de DeMoivre ${}_kp_x = \frac{110-x-k}{110-x}$, $0 \leq k \leq 110-x-1$,*

$$
\begin{aligned}
A^{\;1}_{38:\overline{15|}} &= \sum_{k=0}^{14} v^{k+1}{}_kp_x q_{x+k} \\
&= \sum_{k=0}^{14} 1.13^{-(k+1)} \left(\frac{110-38-k}{110-38}\right)\left(\frac{1}{110-38-k}\right) \\
&= \frac{1}{72}\sum_{k=0}^{14} 1.13^{-(k+1)} = \frac{1}{72}\sum_{1}^{15} 1.13^{-k} \\
&= \frac{1}{72} a_{\overline{15|}0.13} = \frac{1}{72}\left(\frac{1-1.13^{-15}}{0.13}\right) \\
&= 0.08975526
\end{aligned}
$$

$\therefore P = 1'000.000(A^{\;1}_{38:\overline{15|}}) = \$89.755$

Seguro Dotal Puro de Duración n años (Pure Endowment) Es un contrato que provee el pago de una suma asegurada sólo si el asegurado (x) sobrevive al menos n años.

Para el pago de 1, en este caso el valor presente es la variable aleatoria

$$Z = v^n I(K(x) \geq n). \tag{6.7}$$

Como $I(K(x) \geq n)$ es una variable aleatoria Bernoulli, $Bin(1, \mathbb{P}(K(x) \geq n))$ se tiene que la prima neta está dada por

$$A_{x:\overline{n|}}^{\;\;\,1} = v^n \mathbb{P}(K(x) \geq n) = v^n {}_np_x. \tag{6.8}$$

En muchos textos aparece la notación alterna

$$A_{x:\overline{n|}}^{\;\;\,1} = {}_nE_x. \tag{6.9}$$

Además, como $v^k{}_kp_x = A_{x:\overset{1}{\overline{k|}}}$, se tiene la identidad siguiente con relación a la prima neta de una anualidad de vida entera

$$\ddot{a}_x = \sum_{k=0}^{\omega-x-1} A_{x:\overset{1}{\overline{k|}}}. \tag{6.10}$$

Ejemplo 6.2.4. *Calcular para (38) la prima neta de un seguro vida dotal puro a 15 años, por un valor asegurado de 1 mill, usando $i = 0.13$ y la ley de DeMoivre ${}_kp_x = \frac{110-x-k}{110-x}$, $0 \leq k \leq 110 - x - 1$,*

$$\begin{aligned} A_{38:\overset{1}{\overline{15|}}} &= {}_{15}p_{38}(1.13^{-15}) \\ &= \frac{110-38-15}{110-38}(1.13^{-15}) \\ &= (0.791666)(1.13^{-15}) = 0.1265802 \end{aligned}$$

$\therefore P = 1'000.000(A_{38:\overset{1}{\overline{15|}}}) = \$126.580$

Ejemplo 6.2.5. *Una anualidad diferida a n años, temporal a m años, definida en (5.29) pag. 165, se puede ver como un seguro dotal que paga una anualidad anticipada con pagos de 1, temporal por m años, para la vida (x+n),*

$$\begin{aligned} {}_{n|}\ddot{a}_{x:\overline{m|}} &= v^n{}_np_x\,\ddot{a}_{x+n:\overline{m|}} \\ &= A_{x:\overset{1}{\overline{n|}}}\ddot{a}_{x+n:\overline{m|}} \end{aligned}$$

Seguro Dotal o Mixto (Endowment) Se compone de un seguro temporal por n años más un Dotal Puro a n años. Es un seguro para realizar un plan de capitalización con protección contra fallecimiento prematuro.

En este caso la variable valor presente es $Z = Z_1 + Z_2$, donde Z_1 es el valor presente de un seguro temporal a n años y Z_2 es el valor presente de un dotal puro a n años.

$$Z = Z_1 + Z_2 = v^{K(x)+1}I(K(x) \leq n-1) + v^nI(K(x) \geq n) \tag{6.11}$$

La prima neta en este caso se denota por

$$A_{x:\overline{n|}} := \mathbb{E}(Z) = A^1_{x:\overline{n|}} + A_{x:\overset{1}{\overline{n|}}}. \tag{6.12}$$

La varianza de Z se calcula como sigue

$$Var(Z) = Var(Z_1) + Var(Z_2) + 2Cov(Z_1, Z_2)$$

pero $Z_1Z_2 = 0$, luego

$$\begin{aligned} Var(Z) &= Var(Z_1) + Var(Z_2) - 2A^1_{x:\overline{n}|}A_{x:\overset{1}{\overline{n}|}} \\ Var(Z_2) &= Var(v^n I(K(x) \geq n)) = v^{2n}{}_np_{x\,n}q_x \\ Var(Z_1) &= \sum_{k=0}^{n-1} v^{2(k+1)}{}_kp_xq_{x+k} - (A^1_{x:\overline{n}|})^2 \end{aligned}$$

luego

$$\begin{aligned} Var(Z) = \sum_{k=0}^{n-1} v^{2(k+1)}{}_kp_xq_{x+k} - (A^1_{x:\overline{n}|})^2 \\ + v^{2n}{}_np_{x\,n}q_x - 2A^1_{x:\overline{n}|}A_{x:\overset{1}{\overline{n}|}} \end{aligned} \tag{6.13}$$

Ejercicio 6.2.2. *Se cumple una relación de dualidad entre la prima de este seguro y la de una anualidad de vida anticipada temporal a n años.*

$$A_{x:\overline{n}|} = 1 - d\ddot{a}_{x:\overline{n}|}. \tag{6.14}$$

Comprobar (6.14) escribiendo primero la relación que debe existir entre las variables valor presente.

Seguro de vida total diferido a n años. Este seguro se usa p.ej. para proteger al asegurador de un contrato con un asegurado que padezca una enfermedad no declarada. El período de n años se denomina período de carencia.

La variable valor presente se define como

$$Z = v^{K(x)+1}I(K(x) \geq n)$$

luego la prima neta es

$$_{n|}A_x := \mathbb{E}(Z) = \sum_{k=n}^{\omega-x-1} v^{k+1}{}_kp_xq_{x+k} = A_x - A^1_{x:\overline{n}|}$$

Se cumple la identidad

$$ {}_{n|}A_x = v^n {}_np_x A_{x+n} \tag{6.15} $$

Demostración. Utilizando un cambio de variable en el índice de la sumatoria

$$
\begin{aligned}
{}_{n|}A_x &= \sum_{k=n}^{\omega-x-1} v^{k+1} {}_kp_x q_{x+k} \\
&= \sum_{k=0}^{\omega-x-n-1} v^{k+n+1} {}_{k+n}p_x q_{x+n+k} \\
&= v^n {}_np_x \sum_{k=0}^{\omega-x-n-1} v^{k+1} {}_kp_{x+n} q_{x+n+k} = v^n {}_np_x A_{x+n}
\end{aligned}
$$

□

Si se considera la diferencia de valores presentes de un seguro vida entera y uno diferido a n años se obtiene el valor presente de un temporal

$$
\begin{aligned}
Z &= v^{K(x)+1} - v^{K(x)+1} I(K(x) \geq n) \\
&= v^{K(x)+1} I(K(x) \leq n-1)
\end{aligned}
$$

luego

$$ A^1_{x:\overline{n}|} = A_x - {}_{n|}A_x = A_x - v^n {}_np_x A_{x+n} $$

Ejemplo 6.2.6. *Calcular para* (38) *la prima neta por un valor asegurado de 1 mill, para un diferido a 15 años, usando* $i = 0.13$ *y la ley de DeMoivre* ${}_kp_x = \frac{110-x-k}{110-x}$, $0 \leq k \leq 110 - x - 1$,

$$
\begin{aligned}
{}_{15|}A_{38} &= A_{38} - A^1_{38:\overline{15}|} \\
&= \$106.821 - \$89.755 = \$17066
\end{aligned}
$$

Ejemplo 6.2.7. *Se puede definir un seguro temporal a n años, diferido a m. La prima neta es*

$$ {}_{m|}A^1_{x:\overline{n}|} = A^1_{x:\overline{n+m}|} - A^1_{x:\overline{m}|} $$

Por ejemplo, con n=10, m=15

$$_{15|}A^{1}_{38:\overline{10|}} = A^{1}_{38:\overline{25|}} - A^{1}_{38:\overline{15|}}$$

Ejemplo 6.2.8. *Resumen de los ejemplos de tipos básicos de seguros de vida, para una vida x=38,* $i = 0.13$*, ley DeMoivre.*

a) *Seguro de Vida Entero* $P = 1'000.000(A_{38}) = \$106.821$

b) *Dotal Puro a 15 años* $P = 1'000.000(A_{38:\overline{15|}}^{\ \ 1}) = \$126.580$

c) *Temporal a 15 años* $P = 1'000.000(A^{1}_{38:\overline{15|}}) = \$89.755$

d) *Dotal a 15 años* $P = 1'000.000(A_{38:\overline{15|}}) = \$216.335$

e) *Diferido a 15 años*

$$\begin{aligned} _{15|}A_{38} &= A_{38} - A^{1}_{38:\overline{15|}} \\ &= \$106.821 - \$89.755 = \$17066 \end{aligned}$$

f) *Diferido a 15 años, temporal a 10,*

$$_{15|}A^{1}_{38:\overline{10|}} = A^{1}_{38:\overline{25|}} - A^{1}_{38:\overline{15|}}$$

Ejemplo 6.2.9. *Utilizando la librería* `lifecontingencies` *se pueden calcular primas de seguros básicos con base en tablas de vida*

```
archivo1 = "tablas.80.89.dat"

D = read.table(archivo1,header=T)
attach(D) #y = h  x = m
head(D)

TVH <- new("lifetable", x=D$y, lx=D$ly,
name="tablas.05.08,hombres")

TVHAct=with(TVH, new("actuarialtable",interest=0.13,
```

```
x=x,lx=lx,name="TVH8089"))

# vida entera x = 38 , i = 0.13
Ax = Axn(actuarialtable=TVHAct, x=38)

# temporal a 15 años
A1xn = Axn(actuarialtable=TVHAct, x=38, n=15)

# dotal puro (pure endowment)
Axn = Exn(TVHAct, x=38, n=15)

     Ax     A1x:n      Ax:n
 32466.49  16900.99 152234.24
```

6.3. Seguros con funciones de pago generales

Suponga que c_j es la suma asegurada durante el j-esimo año, en un seguro pagable al final del año de fallecimiento. El valor presente es

$$Z = C_{K(x)+1} v^{K(x)+1} \tag{6.16}$$

Y la prima neta es

$$A_x^{(g)} := \mathbb{E}(Z) = \sum_{k=0}^{\omega-x-1} C_{k+1} v^{k+1} {}_k p_x q_{x+k} \tag{6.17}$$

Proposición 6.3.1. *Se cumple la identidad siguiente*

$$A_x^{(g)} = C_1 A_x + \sum_{k=1}^{\omega-x} (C_{k+1} - C_k)_{k|} A_x. \tag{6.18}$$

Los casos siguientes son similares a las anualidades con pagos en progresión aritmética y geométricas, con el fin de incorporar incrementos por costo de vida en los pagos de las indemnizaciones.

6.3.1. Seguros crecientes en progresión aritmética

Para este caso se reemplaza $C_k = k$ en (6.16), queda

$$Z = (K(x)+1)v^{K(x)+1} \tag{6.19}$$

Y la prima neta es

$$(IA)_x := \mathbb{E}(Z) = \sum_{k=0}^{\omega-x-1} (k+1)v^{k+1}{}_kp_x q_{x+k} \tag{6.20}$$

Utilizando (6.18)

$$\begin{aligned}(IA)_x &:= A_x + \sum_{k=1}^{\omega-x} {}_{k|}A_x \\ &= A_x + \sum_{k=1}^{\omega-x} v^k {}_kp_x A_{x+k} \\ &= \sum_{k=0}^{\omega-x} v^k {}_kp_x A_{x+k} \end{aligned} \tag{6.21}$$

Las versiones de este tipo de seguro para los casos temporal a n años y dotal a n años se definen de manera inmediata.

Para el temporal a n años la variable valor presente es

$$Z_1 = (K(x)+1)v^{K(x)+1} I(K(x) \leq n-1). \tag{6.22}$$

Para el dotal a n años es

$$Z_2 = Z_1 + nv^n I(K(x) \geq n). \tag{6.23}$$

Los costos actuariales netos se pueden deducir también de manera directa. La comprobación de las fórmulas es un ejercicio. Para el caso de Z_1 es

$$(IA)^1_{x:\overline{n}|} = \mathbb{E}(Z_1) = nA^1_{x:\overline{n}|} - \sum_{j=1}^{n-1} A^1_{x:\overline{j}|}. \tag{6.24}$$

Para el caso de Z_2 es

$$(IA)_{x:\overline{n}|} = (IA)^{1}_{x:\overline{n}|} + nA_{x:\overline{n}|}^{\;\;1}. \tag{6.25}$$

Ejemplo 6.3.1. *Calcule $(IA)^{1}_{x:\overline{n}|}$, para $x = 38$, $n = 15$, $i = 0.04$ y utilizando la Ley DeMoivre (Uniforme).*

Solución. Se trata de

$$\begin{aligned}(IA)^{1}_{38:\overline{15}|} &= \sum_{k=0}^{14}(k+1)v^{k+1}{}_kp_{38}\, q_{38+k} \\ &= \sum_{k=0}^{14}(k+1)v^{k+1}\left(\frac{110-38-k}{110-38}\right)\left(\frac{1}{110-38-k}\right) \\ &= \frac{1}{80}\sum_{k=0}^{14}(k+1)v^{k+1} = \frac{1}{72}\sum_{k=1}^{15}kv^k\end{aligned}$$

Utilizando la identidad de anualidades ciertas

$$\sum_{k=1}^{n}kv^k = \frac{\ddot{a}_{\overline{n}|} - nv^n}{i}$$

$$\begin{aligned}(IA)^{1}_{38:\overline{15}|} &= \frac{1}{72}\frac{\ddot{a}_{\overline{15}|} - 15v^{15}}{0.13} = \frac{1}{72(0.13)}\left[\left(\frac{1-1.13^{-15}}{1-1.13^{-1}}\right) - 15(1.3)^{-15}\right] \\ &= 0.5249.\end{aligned}$$

6.3.2. Seguros crecientes linealmente

En este caso $C_k = 1 + \rho k,\ k = 0, 1, \ldots$, por tanto, el valor asegurado aumenta cada año en una tasa lineal $\rho \in (0, 1)$. La variable valor presente es

$$Z = (1 + \rho K(x))v^{K(x)+1} \tag{6.26}$$

$$= (1-\rho+\rho(K(x)+1))v^{K(x)+1} \tag{6.27}$$
$$= (1-\rho)v^{K(x)+1} + \rho(K(x)+1)v^{K(x)+1}. \tag{6.28}$$

por tanto, el costo actuarial es

$$(LA)_x := (1-\rho)A_x + \rho(IA)_x. \tag{6.29}$$

El caso de un seguro temporal a n años es inmediato. El costo actuarial es

$$(LA)^1_{x:\overline{n}|} := (1-\rho)A^1_{x:\overline{n}|} + \rho(IA)^1_{x:\overline{n}|}. \tag{6.30}$$

Ejemplo 6.3.2. *Calcule $(LA)^1_{x:\overline{n}|}$, para $x = 38$, $n = 15$, $i = 0.13$, $\rho = 0.05$, utilizando la Ley DeMoivre (Uniforme).*

Solución. Con base en los resultados de los Ejemplos 6.2.3 y 6.3.1

$$\begin{aligned}(LA)^1_{30:\overline{10}|} &:= (1-0.05)A^1_{38:\overline{15}|} + 0.05(IA)^1_{38:\overline{15}|} \\ &= (1-0.05)0.08975526 + 0.05(0.5249)\end{aligned}$$

6.3.3. Seguros crecientes geométricamente

En este caso el pago en el mes k-ésimo es $C_k = (1+i_q)^k,\ k = 0, 1, 2, \ldots$, donde $i_q \in (0, 1)$ es una tasa efectiva anual que representa la inflación anual, y que cumple $i_q < i$, donde i es la tasa a la que se contrata el seguro. Por tanto, la variable valor presente es

$$Z = (1+i_q)^{K(x)}v^{K(x)+1}. \tag{6.31}$$

Y el costo actuarial es

$$(GA)_x := \mathbb{E}(Z) = \sum_{k=0}^{\omega-x-1}(1+i_q)^k v^{k+1}\,{}_kp_x\,q_{x+k}. \tag{6.32}$$

Una simplificación de (6.32) se puede hacer definiendo la tasa real $i_s = (1+i)/(1+i_q) - 1$. Entonces, con las definiciones de v_q, v_s como factores de descuento de las tasas respectivas,

$$(1+i_q)^k v^{k+1} = (1+i_q)^{-1}[(1+i_q)/(1+i)]^{k+1} = v_q v_s^{k+1},$$

por tanto, se puede reemplazar en la expresión (6.32) y obtener

$$(GA)_x = v_q \sum_{k=0}^{\omega-x-1} v_s^{k+1}\, {}_kp_x\, q_{x+k} = v_q A_{x|i_s}. \tag{6.33}$$

El caso de un seguro temporal a n años es inmediato. El costo actuarial es

$$(GA)^1_{x:\overline{n}|} := v_q A^1_{x:\overline{n}|}|i_s \tag{6.34}$$

donde la notación $A^1_{x:\overline{n}|}|i_s$ significa que se calcula $A^1_{x:\overline{n}|}$ con la tasa i_s.

Ejemplo 6.3.3. *Calcule $(LA)^1_{x:\overline{n}|}$, para $x = 38$, $n = 15$, $i = 0.13$, $\rho = 0.05$, utilizando la Ley DeMoivre (Uniforme).*

Solución. Con base en los resultados de los Ejemplos 6.2.3 y 6.3.1

$$\begin{aligned}(LA)^1_{30:\overline{10}|} &:= (1-0.05)A^1_{38:\overline{15}|} + 0.05(IA)^1_{38:\overline{15}|}\\ &= (1-0.05)0.08975526 + 0.05(0.5249)\end{aligned}$$

Demostración de la Proposición 6.3.1

Demostración. Usando ${}_{k|}A_x = \sum_{j=k}^{\omega-x-1} v^{j+1}\, {}_jp_x q_{x+j}$ se tiene

$${}_{k|}A_x - {}_{k+1|}A_x = v^{k+1}\, {}_kp_x q_{x+k},$$

luego

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(Z) &= \sum_{k=0}^{\omega-x-1} c_{k+1}({}_{k|}A_x - {}_{k+1|}A_x)\\ &= \sum_{k=0}^{\omega-x-1} c_{k+1}\, {}_{k|}A_x - c_{k+1}\, {}_{k+1|}A_x\\ &= c_1 A_x + \sum_{k=1}^{\omega-x-1} c_{k+1}\, {}_{k|}A_x - \sum_{k=1}^{\omega-x-1} c_k\, {}_{k|}A_x\end{aligned}$$

$$= c_1 A_x + \sum_{k=1}^{\omega-x-1} (c_{k+1} - c_k)_{k|}A_x$$

□

6.4. Seguros pagables en edades fraccionales

La vida remanente de (x), medida en períodos m, $K_m(x)$ se definió en (5.33), pag. 166,

$$K_m(x) = \frac{1}{m}\lfloor mT(x)\rfloor \in \left\{0, \frac{1}{m}, \frac{2}{m}, \ldots, \frac{m(\omega-x)-1}{m}\right\},$$

además, utilizando $\lfloor z\rfloor + 1 = \lceil z\rceil$, se dió la identidad (5.38)

$$K_m(x) + \frac{1}{m} = \frac{1}{m}\lceil mT(x)\rceil,$$

Considerando $T(x) = K(x) + S(x)$, se definió la variable aleatoria

$$S_m(x) = \frac{1}{m}\lfloor mS(x) + 1\rfloor \in \{1/m, 2/m, \ldots, 1\},$$

y se dieron las identidades, (5.37),

$$K_m(x) + \frac{1}{m} = K(x) + S_m(x),$$

Los seguros pagables en la m-ésima fracción del año se definen de manera inmediata con base en estas variables aleatorias.

Seguro de vida entera. La variable valor presente de un seguro que paga una unidad al final del m-ésimo período de vida es

$$Z = v^{K_m(x)+1/m} = v^{K(x)+S_m(x)}, \tag{6.35}$$

Y la prima neta es el valor esperado

$$A_x^{(m)} = \mathbb{E}(v^{K_m(x)+1/m}) = \sum_{k=0}^{m(\omega-x)-1} v^{\frac{k+1}{m}} {}_{\frac{k}{m}}p_x \, {}_{\frac{1}{m}}q_{x+\frac{k}{m}} \tag{6.36}$$

Ejercicio 6.4.1. *En Gerber [1994] se propone un desarrollo alterno para encontrar $A_x^{(m)}$. Con la identidad (5.37) se cumple*

$$A_x^{(m)} = \mathbb{E}(v^{K(x)+S_m(x)}).$$

Asumir la hipótesis de linealidad consiste en asumir que $K(x)$ y $S(x)$ son independientes y además $S(x) \sim U(0,1)$. Por tanto, $S_m(x)$ se distribuye Uniforme discreta en el conjunto $\{1/m, 2/m, \ldots, 1\}$. Es decir $\mathbb{P}(S_m(x) = j/m) = 1/m)$. Por tanto

$$\begin{aligned} A_x^{(m)} &= \mathbb{E}(v^{K(x)+S_m(x)}) = \mathbb{E}(v^{K(x)+1})\mathbb{E}(v^{S_m(x)-1}) \\ &= A_x \mathbb{E}(v^{S_m(x)-1}). \end{aligned}$$

Compruebe que $\mathbb{E}(v^{S_m(x)-1}) = \frac{i}{i^{(m)}}$, donde $i^{(m)} = m((1+i)^{1/m} - 1)$, Y por tanto,

$$A_x^{(m)} = \frac{i}{i^{(m)}} A_x. \tag{6.37}$$

Si además se aplica la identidad $A_x = 1 - d\ddot{a}_x$, se tiene otra fórmula de cálculo

$$A_x^{(m)} = \frac{i}{i^{(m)}}(1 - d\ddot{a}_x). \tag{6.38}$$

Se tiene la identidad de dualidad, con las correspondientes rentas vitalicias, reportada en varios textos, ver [Bowers et al., 1997, Ej. 5.14, pag. 152] y [Gerber, 1994, Eq. 4.3.2, pag. 38],

$$A_x^{(m)} = 1 - d^{(m)} \ddot{a}_x^{(m)}. \tag{6.39}$$

6.5. Primas de Seguros de Vida

Un seguro de vida en sus distintas variantes puede pagarse mediante un prima única ó mediante una serie de pagos iguales, denominados prima nivelada. Estos pagos iguales son la manera en la que el costo del seguro se difiere, sin intereses. Las fórmulas son las siguientes.

Prima nivelada para seguro vida entera

$$P_x := \frac{A_x}{\ddot{a}_x} \tag{6.40}$$

La idea de diferir el costo se expresa en la identidad $P_x \ddot{a}_x = A_x$.

Si se difiere a n años, pagos año anticipado, la prima es

$$_nP_x := \frac{A_x}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}} \tag{6.41}$$

Si se difiere a n años con m pagos en el año, anticipados, la prima es

$$_nP_x^{(m)} := \frac{A_x}{\ddot{a}^{(m)}_{x:\overline{n}|}} \tag{6.42}$$

Prima nivelada para seguro vida temporal

$$P^1_{x:\overline{n}|} := \frac{A^1_{x:\overline{n}|}}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}} \tag{6.43}$$

Si se difiere a n años con m pagos en el año, anticipados, la prima es

$$P^1_{x:\overline{n}|}{}^{(m)} := \frac{A^1_{x:\overline{n}|}}{\ddot{a}^{(m)}_{x:\overline{n}|}} \tag{6.44}$$

Prima nivelada para seguro vida dotal puro

$$P_{x:\overset{1}{\overline{n}|}}{}^{(m)} := \frac{A_{x:\overset{1}{\overline{n}|}}}{\ddot{a}^{(m)}_{x:\overline{n}|}} \tag{6.45}$$

Las primas para los seguros con pagos variables, con incrementos lineales y geométricos, se definen de manera similar.

Prima nivelada para seguro vida dotal

$$P_{x:\overline{n}|}{}^{(m)} := \frac{A_{x:\overline{n}|}}{\ddot{a}^{(m)}_{x:\overline{n}|}} = P^{1}_{x:\overline{n}|}{}^{(m)} + P_{x:\overline{n}|}^{\;1}{}^{(m)}. \tag{6.46}$$

Prima variable para seguros generales

Considerando el costo actuarial de un seguro con pago general C_k, dado en (6.17), si se definen primas generales variables, $P^{pg}_{x,k}, k = 0, 1, \ldots$, pagables período anticipado, éstas deben cumplir la ecuación de equivalencia

$$\mathbb{E}(C_{K(x)+1}v^{K(x)+1} - \sum_{k=0}^{K(x)} P^{pg}_{x,k}v^k) = 0.$$

En caso de primas niveladas P^{pg}_x, usando $A^{(g)}_x$ dada en (6.17)

$$P^{pg}_x = \frac{A^{(g)}_x}{\ddot{a}_x}. \tag{6.47}$$

Ejemplo 6.5.1. *Considerando el caso de un seguro con pago que aumenta en progresión Geométrica con prima neta ó costo actuarial*

$$(GA)_x = v_q \sum_{k=0}^{\omega-x-1} v_s^{k+1}\,{}_kp_x\, q_{x+k} = v_q A_{x|i_s},$$

donde $i_s = (1 + i)/(1 + i_q) - 1$*, es la tasa real. Y primas niveladas* P^{pg}_x*. Entonces éstas están dadas por*

$$P^{pg}_x = \frac{v_q A_{x|i_s}}{\ddot{a}_x}. \tag{6.48}$$

6.6. Reservas

En sentido general, el término “reserva"se refiere al pasivo que el Asegurador ha establecido para el pago de las obligaciones que aún debe. Siendo un pasivo se contabiliza sin embargo como parte de los activos de una Compañía. La reserva es un concepto importante en los seguros de contingencias de vida. En la práctica se presentan varias clases de reservas, para distintas contingencias, por lo que no se pretende una descripción exhaustiva.

La clasificación de las reservas para los seguros de vida depende del tipo de prima que se haya pactado. Hay dos tipos:

- Reserva con Prima Nivelada. El modelo actuarial clásico establece una reserva con primas niveladas, de valor constante durante la vigencia del contrato, basadas en la tabla de mortalidad con tasas de mortalidad constantes y tasa de interés constante.

- Reservas con Prima Variable. En el caso en el cual el valor asegurado es variable, la prima también lo es, como se ha establecido en los capítulos anteriores. Los supuestos sobre la tasa de interés son los mismos. Se utiliza una tasa técnica baja con relación a la tasa de mercado.

Las reservas se clasifican también como:

- Reserva Prospectiva: Resta el valor presente de los primas futuras del valor presente de los beneficios futuros.

- Reserva Restropectiva: Resta el costo acumulado de los beneficios pasados, de la acumulación de las primas e intereses pasados.

6.7. Reservas prospectivas y retrospectivas

$$
{}_tV_x^{pros} = \text{VPA}\left(\left\{\begin{array}{l}\text{de beneficios}\\ \text{futuros a la}\\ \text{edad } x+t\end{array}\right\} - \left\{\begin{array}{l}\text{de los pagos primas}\\ \text{futuros a la}\\ \text{edad } x+t\end{array}\right\}\right)
$$

$$
{}_tV_x^{retro} = \text{VFA}\left(\left\{\begin{array}{l}\text{VPA de primas}\\ \text{primeros } t \text{ años}\end{array}\right\} - \left\{\begin{array}{l}\text{VPA de beneficios}\\ \text{primeros } t \text{ años}\end{array}\right\}\right)
$$

El factor VFA es el Valor Presente Actuarial y corresponde al inverso de la prima neta de un dotal puro,

$$
\text{VFA} = \frac{1}{v^k{}_kp_x}, \text{VPA} = v^k{}_kp_x.
$$

Las reservas son equivalentes

$$
V_t^{retro} \equiv V_t^{pros}
$$

para cada uno de los tipos de seguros ya que se cumple la ecuación de balance general:

$$
\begin{aligned}
&\text{VFA}\left\{\begin{array}{l}\text{VPA de beneficios}\\ \text{primeros } t \text{ años}\end{array}\right\} + \text{VPA}\left\{\begin{array}{l}\text{de beneficios}\\ \text{futuros a la}\\ \text{edad } x+t\end{array}\right\}\\
&= \text{VFA}\left\{\begin{array}{l}\text{VPA de primas}\\ \text{primeros } t \text{ años}\end{array}\right\} + \text{VPA}\left\{\begin{array}{l}\text{de los pagos primas}\\ \text{futuros a la}\\ \text{edad } x+t\end{array}\right\}
\end{aligned}
$$

La reserva prospectiva es la que corresponde propiamente a la idea de reserva para gastos futuros. La prospectiva se indicará con el símbolo general V_t. En algunos casos se discutirán por separado.

6.8. Reservas Seguro vida entera

6.8.1. Reserva prospectiva

Una referencia para esta sección es Gerber et al. [2003]. Ver también Gerber [1994, §5.5]

Suponga que las primas P_x de un seguro de vida entera para (x) se invierten en un fondo que ofrece una tasa de rendimiento efectiva anual i. Entonces el saldo de esta inversión al final del año k, ${}_kL_x$, cumple

$$\begin{aligned} {}_kL_x &= (1+i)({}_{k-1}L_x + P_x I(K(x) \geq k-1)) - I(K(x) = k-1) \\ &= v^{-1}({}_{k-1}L_x + P_x I(K(x) \geq k-1)) - I(K(x) = k-1) \\ &= v^{-1}{}_{k-1}L_x + v^{-1} P_x I(K(x) \geq k-1) - I(K(x) = k-1) \end{aligned} \tag{6.49}$$

donde ${}_0L_x = 0, k = 1, \ldots$.

La solución prospectiva de (6.49) es:

$${}_kL_x = v^{-k} \sum_{j=k}^{K(x)} v^j (vI(K(x) = j) - P_x I(K(x) \geq j)) \tag{6.50}$$

Demostración. Veamos que (6.50) satisface (6.49). Con (6.50) se forma:

$$\begin{aligned} v{}_kL_x - {}_{k-1}L_x &= v^{1-k} \sum_{j=k}^{K(x)} v^j (vI(K(x) = j) - P_x I(K(x) \geq j)) \\ &\quad - v^{1-k} \sum_{j=k-1}^{K(x)} v^j (vI(K(x) = j) - P_x I(K(x) \geq j)) \\ &= -v^{1-k} v^{k-1} (vI(K(x) = k-1) - P_x I(K(x) \geq k-1)) \\ &= -vI(K(x) = k-1) + P_x I(K(x) \geq k-1) \end{aligned}$$

$$\therefore {}_kL_x = v^{-1} L_{k-1} + v^{-1} P_x I(K(x) \geq k-1) - I(K(x) = k-1)$$

□

La variable aleatoria ${}_kL_x$ se define como la **pérdida prospectiva** a la edad $x + k$. Se puede expresar también por la fórmula:

$${}_kL_x = v^{K(x)-k+1} - P_x \ddot{a}_{\overline{K(x)-k+1}|}, \ k = 0, 1, \ldots. \tag{6.51}$$

ya que

$$
\begin{aligned}
{}_kL_x &= v^{-k}\sum_{j=k}^{K(x)} v^j(vI(K(x)=j)-P_xI(K(x)\geq j))\\
&= v^{K(x)-k+1}-P_x\sum_{j=k}^{K(x)} v^{j-k}\\
&= v^{K(x)-k+1}-P_x\sum_{j=0}^{K(x)-k} v^{j+k-k}\\
&= v^{K(x)-k+1}-P_x\ddot{a}_{\overline{K(x)-k+1|}},\ k=0,1,\ldots.
\end{aligned}
$$

Entonces la **reserva prospectiva** a la edad $x+k$, se define, ver Gerber et al. [2003, eq. (28), pag. 41], como

$$
{}_kV_x = \mathbb{E}({}_kL_x|K(x)\geq k),\ k=0,1,\ldots. \tag{6.52}
$$

Desarrollando los valores esperados, utilizando ${}_jp_x = {}_{j-k}p_{x+k}\,{}_kp_x, j\geq k$,

$$
\begin{aligned}
&= \mathbb{E}(v^{K(x)-k+1}I(K(x)\geq k))\\
&= \sum_{j=k}^{\omega-x} v^{j-k+1}{}_jp_xq_{x+j} = {}_kp_x\sum_{j=k}^{\omega-x} v^{j-k+1}{}_{j-k}p_{x+k}\,q_{x+j}\\
&= {}_kp_x\sum_{m=0}^{\omega-x-k} v^{m+1}{}_mp_{x+k}q_{x+k+m} = {}_kp_xA_{x+k}\\
\therefore\ A_{x+k} &= \mathbb{E}(v^{K(x)-k+1}I(K(x)\geq k))/\mathbb{P}(K(x)\geq k)\\
&= \mathbb{E}(v^{K(x)-k+1}|K(x)\geq k).
\end{aligned}
$$

De manera similar se tiene

$$
\ddot{a}_{x+k} = \mathbb{E}(\ddot{a}_{\overline{K(x)-k+1|}}|K(x)\geq k).
$$

Entonces se obtiene la expresión para la reserva prospectiva:

$$
{}_kV_x = A_{x+k} - P_x\,\ddot{a}_{x+k},\ k=0,1,\ldots,\omega-x. \tag{6.53}
$$

que es la fórmula:

$$
{}_kV_x = \left\{ \begin{array}{l} \text{VPA de beneficios} \\ \text{futuros a la} \\ \text{edad } x+k \end{array} \right\} - \left\{ \begin{array}{l} \text{VPA de los pagos primas} \\ \text{futuros a la} \\ \text{edad } x+k \end{array} \right\}
$$

Nótese que, por la definición de P_x, se tiene

$$
{}_0V_x = A_x - P_x\,\ddot{a}_x = 0 \tag{6.54}
$$

$$
{}_{\omega-x}V_x = A_\omega - P_x\,\ddot{a}_\omega = 1. \tag{6.55}
$$

Por tanto, la reserva inicial es cero.

6.8.2. Fórmula alterna para la prospectiva

Se comprueba la siguiente fórmula alterna para la reserva prospectiva:

$$
{}_kV_x = 1 - \frac{\ddot{a}_{x+k}}{\ddot{a}_x},\ k = 0, 1, \ldots, \omega - x. \tag{6.56}
$$

Nótese que entonces ${}_{\omega-x}V_x = 1 - \frac{\ddot{a}_\omega}{\ddot{a}_x} = 1 - 0 = 1$. El valor terminal de la reserva vida entera es 1, y el inicial es 0.

Demostración. Reemplazando la relación dual (6.6), $A_x = 1 - d\ddot{a}_x$, en (6.53), se obtiene

$$
\begin{aligned}
{}_kV_x &= A_{x+k} - P_x\,\ddot{a}_{x+k} \\
&= 1 - d\ddot{a}_{x+k} - \frac{1 - d\ddot{a}_x}{\ddot{a}_x}\,\ddot{a}_{x+k} \\
&= 1 - \frac{\ddot{a}_{x+k}}{\ddot{a}_x}.
\end{aligned}
$$

□

Ejemplo 6.8.1. *Utilizando la ley DeMoivre ó Uniforme se puede comprobar que*

$$
A_x = \frac{a_{\overline{110-x}|}}{110-x}
$$

luego con $A_x = 1 - d\ddot{a}_x$ *se tiene*

$$\ddot{a}_x = \frac{1}{d} - \frac{a_{\overline{110-x}|}}{d(110-x)}$$

y por tanto

$$\begin{aligned} {}_kV_x &= 1 - \frac{\ddot{a}_{x+k}}{\ddot{a}_x} \\ &= 1 - \frac{(110 - x - k - a_{\overline{110-x-k}|})(110-x)}{(110 - x - a_{\overline{110-x}|})(110-x-k)} \end{aligned}$$

solamente definida para $k = 0, 1, \ldots, 110 - x - 1$.

6.8.3. Fórmula recursiva para la reserva prospectiva

Con la fórmula anterior se puede deducir la siguiente ecuación recursiva lineal, con condiciones de frontera, para la reserva ${}_kV_x$.

$$\begin{aligned} {}_kV_x &= {}_{k+1}V_x v\, p_{x+k} - P_x + v\, q_{x+k}, \\ k &= 0, 1, \ldots, \omega - x - 1 \\ {}_{\omega-x}V_x &= 1, \\ {}_0V_x &= 0. \end{aligned} \tag{6.57}$$

Nótese que es una ecuación recursiva hacia-atrás (backward), es decir, se resuelve a partir del valor final iterando hacia atras hasta llegar al valor en $k = 0$. La expresión recursiva (6.57) se conoce como fórmula de acumulación de Fackler.

Demostración. Utilizando (6.56), se reemplaza en el lado derecho de (6.57) para obtener

$$\frac{{}_kV_x + P_x - vq_{x+k}}{vp_{x+k}} = \frac{1 - \frac{\ddot{a}_{x+k}}{\ddot{a}_x} + P_x - vq_{x+k}}{vp_{x+k}}$$

Además, de $P_x = A_x/\ddot{a}_x$ y $A_x = 1 - d\ddot{a}_x$ se tiene, reemplazando y simplificando

$$\frac{1 - \frac{\ddot{a}_{x+k}}{\ddot{a}_x} + P_x - vq_{x+k}}{vp_{x+k}} = \frac{1 - \frac{\ddot{a}_{x+k}}{\ddot{a}_x} + \frac{1}{\ddot{a}_x} - d - vq_{x+k}}{vp_{x+k}}$$

$$= 1 - \frac{1}{\ddot{a}_x}\left(\frac{\ddot{a}_{x+k} - 1}{vp_{x+k}}\right).$$

Finalmente, usando la identidad

$$\ddot{a}_{x+k+1} = \frac{\ddot{a}_{x+k} - 1}{vp_{x+k}}$$

se obtiene

$$1 - \frac{\ddot{a}_{x+k+1}}{\ddot{a}_x} = {}_{k+1}V_x$$

□

6.8.4. Fórmula de Hattendorf

La fórmula de Hattendorf es una ecuación recursiva para la varianza de la pérdida en la edad $x + t$. Para el seguro de vida entera está dada por.

$$Var({}_kL_x) = v^2 q_{x+k}\, p_{x+k}(1 - {}_{k+1}V_x)^2 + v^2 p_{x+k} Var({}_{k+1}V_x). \quad (6.58)$$

La fórmula la introdujo K. Hattendorf en 1868, ver Gerber et al. [2003].

6.8.5. Reserva retrospectiva

La solución retrospectiva de (6.49),

$${}_kL_x = v^{-1}{}_{k-1}L_x + v^{-1}P_x I(K(x) \geq k-1) - I(K(x) = k-1)$$

asumiendo ${}_0L_x = 0$, es la variable pérdida retrospectiva ${}_kL_x^{retro}$

$${}_kL_x^{retro} = v^{-k}\left(P_x \sum_{j=1}^{k} v^{j-1} I(K(x) \geq j-1) - \sum_{j=1}^{k} v^j I(K(x) = j-1)\right)$$

Y la reserva retrospectiva ${}_kV_x^{retro}$ se define como

$${}_kV_x^{retro} := \mathbb{E}({}_kL_x^{retro} | K(x) \geq k).$$

Siguiendo un razonamiento similar al expuesto en (Vadiveloo et al. [2016]),

$$\mathbb{E}({}_kL_x^{retro}) = \mathbb{E}({}_kL_x^{retro}|K(x) \geq k)_k p_x + \mathbb{E}({}_kL_x^{retro}|K(x) \leq k-1)_{k-1}q_x.$$

Pero se debe asumir que $\mathbb{E}({}_kL_x^{retro}|K(x) \leq k-1) = 0$, por lo que la reserva retrospectiva para el año $k = 0, 1, \ldots, \omega - x$ es

$$\begin{aligned}
{}_kV_x^{retro} &:= \mathbb{E}({}_kL_x^{retro}|K(x) \geq k) = \mathbb{E}({}_kL_x^{retro})/{}_kp_x \\
&= \frac{\mathbb{E}\left(P_x \sum_{j=1}^{k} v^{j-1} I(K(x) \geq j-1) - \sum_{j=1}^{k} v^j I(K(x) = j-1)\right)}{{}_kp_x v^k} \\
&= \frac{P_x \mathbb{E}(\sum_{j=0}^{k-1} v^j I(K(x) \geq j)) - \mathbb{E}(\sum_{j=0}^{k-1} v^{j+1} I(K(x) = j))}{{}_kp_x v^k} \\
&= \frac{P_x \sum_{j=0}^{k-1} v^j {}_jp_x - \sum_{j=0}^{k-1} v^{j+1} {}_jp_x q_{x+j}}{{}_kp_x v^k} \\
&= \frac{P_x \ddot{a}_{x:\overline{k}|} - A^1_{x:\overline{k}|}}{{}_kp_x v^k}
\end{aligned}$$

En conclusión,

$$\begin{aligned}
{}_kV_x^{retro} &= \frac{P_x \ddot{a}_{x:\overline{k}|} - A^1_{x:\overline{k}|}}{{}_kp_x v^k}, \\
{}_0V_x^{retro} &= 0, \\
{}_{\omega-x}V_x^{retro} &= 1.
\end{aligned} \tag{6.59}$$

Es inmediata la interpretación de la expresión anterior como una reserva retrospectiva, de acuerdo con la definición dada:

$${}_kV_x^{retro} = \text{VFA}\left(\left\{\begin{array}{l}\text{VPA de primas} \\ \text{primeros } k \text{ años}\end{array}\right\} - \left\{\begin{array}{l}\text{VPA de beneficios} \\ \text{primeros } k \text{ años}\end{array}\right\}\right)$$

6.9. Reservas seguro temporal

6.9.1. Reserva prospectiva

Para un seguro de vida temporal a n años, con prima nivelada $P^{1}_{x:\overline{n}|}$, se define primero la pérdida prospectiva a la edad $x+k$ como la variable aleatoria condicionada

$$
\begin{aligned}
{}_kL^{1}_{x:\overline{n}|} = &\left(v^{K(x)-k+1} - P^{1}_{x:\overline{n}|}\ddot{a}_{\overline{K(x)-k+1}|}\right) | k \le K(x) \le n-1, \\
&k = 0, 1, \ldots, n-1.
\end{aligned} \tag{6.60}
$$

Entonces la reserva prospectiva a la edad $x+k$ se define como

$$
\begin{aligned}
{}_kV^{1}_{x:\overline{n}|} &:= \mathbb{E}({}_kL^{1}_{x:\overline{n}|}),\ k = 0, 1, \ldots, n-1, \\
&= A^{\ \ 1}_{x+k:\overline{n-k}|} - P^{1}_{x:\overline{n}|}\,\ddot{a}_{x+k:\overline{n-k}|},
\end{aligned} \tag{6.61}
$$

con

$$
P^{1}_{x:\overline{n}|} = A^{1}_{x:\overline{n}|}/\ddot{a}_{x:\overline{n}|},\ k = 0, 1, \ldots, n-1, \tag{6.62}
$$

Como el seguro temporal se vence en el tiempo $k = n$ se debe colocar ${}_nV^{1}_{x:\overline{n}|} = 0$

6.9.2. Reserva retrospectiva

Desglosando la defición: VFA $= \dfrac{1}{v^k\,{}_kp_x}$, y

$$
\left\{\begin{array}{l}\text{VPA de primas}\\ \text{primeros } k \text{ años}\end{array}\right\} = P^{1}_{x:\overline{n}|}\,\ddot{a}_{x:\overline{k}|}
$$

$$
\left\{\begin{array}{l}\text{VPA de beneficios}\\ \text{primeros } k \text{ años}\end{array}\right\} = A^{1}_{x:\overline{k}|}
$$

La reserva retrospectiva para el año $k = 0, 1, \ldots, n-1$ es

$$
{}_kV^{1}_{x:\overline{n}|} = \frac{P^{1}_{x:\overline{n}|}\,\ddot{a}_{x:\overline{k}|} - A^{1}_{x:\overline{k}|}}{v^k\,{}_kp_x} \tag{6.63}
$$

6.10. Reservas seguro dotal

6.10.1. Reserva prospectiva

La reserva prospectiva para un seguro de vida dotal puro a n años, que reconoce un pago de una unidad monetaria si (x) sobrevive ese período, está dada por

$$
\begin{aligned}
{}_kV_{x:\overline{n|}}^{\;\;\,1} &= A_{x+k:\overline{n-k|}}^{\qquad\;\;\,1} - P_{x:\overline{n|}}^{\;\;\,1}\,\ddot{a}_{x+k:\overline{n-k|}},\ k \leq n, \qquad (6.64)\\
{}_0V_{x:\overline{n|}}^{\;\;\,1} &= 0,\\
{}_nV_{x:\overline{n|}}^{\;\;\,1} &= 1.
\end{aligned}
$$

donde $P_{x:\overline{n|}}^{\;\;\,1} = A_{x:\overline{n|}}^{\;\;\,1}/\ddot{a}_{x:\overline{n|}}$ es la prima nivelada.

La reserva prospectiva para un seguro de vida dotal a n años, que reconoce un pago de una unidad monetaria si (x) sobrevive ese período ó si fallece en el mismo, está dada por

$$
\begin{aligned}
{}_kV_{x:\overline{n|}} &= A_{x+k:\overline{n-k|}} - P_{x:\overline{n|}}\,\ddot{a}_{x+k:\overline{n-k|}},\ k \leq n, \qquad (6.65)\\
{}_0V_{x:\overline{n|}} &= 0,\\
{}_nV_{x:\overline{n|}} &= 1.
\end{aligned}
$$

donde $P_{x:\overline{n|}} = A_{x:\overline{n|}}/\ddot{a}_{x:\overline{n|}}$ es la prima nivelada.

6.10.2. Reserva retrospectiva

La reserva retrospectiva de un dotal puro es

$$
{}_kV^{retro}{}_{x:\overline{n|}}^{\;\;\,1} = \frac{P_{x:\overline{n|}}^{\;\;\,1}\,\ddot{a}_{x:\overline{k|}} - A_{x:\overline{k|}}^{\;\;\,1}}{v^k\,{}_kp_x} \qquad (6.66)
$$

La reserva retrospectiva de un dotal es

$$
{}_kV_{x:\overline{n|}}^{retro} = \frac{P_{x:\overline{n|}}\,\ddot{a}_{x:\overline{k|}} - A_{x:\overline{k|}}}{v^k\,{}_kp_x} \qquad (6.67)
$$

Nótese que se cumple

$$ {}_kV^{retro}_{x:\overline{n}|} = {}_kV^{retro}{}^{\,1}_{x:\overline{n}|} + {}_kV^{retro}{}_{x:\overline{n}|}^{\;\;\,1} \tag{6.68}$$

6.11. Reservas seguros con pagos generales

Retomando un seguro con pago general (6.16) según la expresión $C_{K(x)+1}$, se trata de definir la reserva prospectiva. Para esto se requiere definir la prima periódica, pagable año anticipado. Si se indica por $P^{pg}_{x,j}$, entonces la variable de pérdida prospectiva a la edad x es:

$$ {}_kL_x = C_{K(x)-k+1}v^{K(x)-k+1} - \sum_{j=0}^{K(x)-k} P^{pg}_j v^j. \tag{6.69}$$

En caso de primas niveladas $P^{pg}_{x,j} \equiv P^{pg}_x$, queda

$$ {}_kL_x = C_{K(x)-k+1}v^{K(x)-k+1} - P^{pg}_x \ddot{a}_{\overline{K(x)-k+1}|},\ k = 0, 1, \ldots. \tag{6.70}$$

6.11.1. Reserva prospectiva

La reserva prospectiva a la edad $x + k$ se define como la esperanza condicional de la pérdida prospectiva

$$ {}_kV^{pg}_x = \mathbb{E}(C_{K(x)+1}v^{K(x)+1-k} - \sum_{j=0}^{K(x)-k} P^{pg}_{j+k}v^j\,|K(x) \geq k) \tag{6.71}$$

El desarrollo de la esperanza condicional se hace por partes. Primero

$$\begin{aligned} &\mathbb{E}(C_{K(x)+1}v^{K(x)+1-k}|K(x) \geq k) \\ &= \sum_{j=k}^{\omega-x-k} C_{j+1}v^{j+1-k}\,\mathbb{P}(K(x) = j\,|K(x) \geq k) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{j=0}^{\omega-x-k} C_{j+k+1} v^{j+1}\, \mathbb{P}(K(x) = j+k\,|K(x) \geq k) \\
&= \sum_{j=0}^{\omega-x-k} C_{j+k+1} v^{j+1}\, \mathbb{P}(K(x+k) = j) \\
&= \mathbb{E}(C_{K(x+k)+1} v^{K(x+k)+1}).
\end{aligned}
$$

En el paso de la 3a a la 4ta líneas se utilizó la identidad

$$
\mathbb{P}(K(x) = j+k\,|K(x) \geq k) = \mathbb{P}(K(x+k) = j),
$$

que es fácil de comprobar. Adicionalmente, se puede comprobar la identidad

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}(C_{K(x+k)+1} v^{K(x+k)+1}) &= C_{k+1} A_{x+k} \\
+ \sum_{j=1}^{\omega-x-k} & (C_{j+k+1} - C_{j+k}) v^j\, {}_j p_{x+k} A_{x+k+j}.
\end{aligned} \tag{6.72}
$$

La segunda parte en (6.71) es:

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left(\sum_{j=0}^{K(x)-k} P^{pg}_{j+k} v^j\,|K(x) \geq k \right) \\
&= \sum_{j=k}^{\omega-x-k} (\sum_{s=0}^{j-k} P^{pg}_{s+k} v^s) \mathbb{P}(K(x) = j\,|K(x) \geq k) \\
&= \sum_{j=0}^{\omega-x-k} (\sum_{s=0}^{j} P^{pg}_{s+k} v^s) \mathbb{P}(K(x+k) = j) \\
&= \mathbb{E}\left(\sum_{j=0}^{K(x+k)} P^{pg}_{j+k} v^j \right)
\end{aligned}
$$

Adicionalmente, se puede comprobar la identidad

$$\mathbb{E}\left(\sum_{j=0}^{K(x+k)} P_{j+k}^{pg} v^j\right) = P_k^{pg} + \sum_{j=1}^{\omega-x-k} P_{j+k}^{pg} v^j \, {}_j p_{x+k}. \tag{6.73}$$

En conclusión, la reserva es

$$_kV_x^{pg} = \mathbb{E}\left(C_{K(x+k)+1} v^{K(x+k)+1} - \sum_{j=0}^{K(x+k)} P_{j+k}^{pg} v^j\right) \tag{6.74}$$

6.11.2. Reserva prospectiva con primas niveladas

En el caso de primas niveladas P_x^{pg}, la reserva prospectiva a la edad $x+k$, usando $A_x^{(g)}$ dada en (6.17), es:

$$\begin{aligned}
_kV_x^{pg} &= \mathbb{E}\left(C_{K(x+k)+1} v^{K(x+k)+1} - P_x^{pg} \ddot{a}_{\overline{K(x+k)+1}|}\right) \\
&= \mathbb{E}\left(C_{K(x+k)+1} v^{K(x+k)+1}\right) - P_x^{pg} \ddot{a}_{x+k} \\
&= A_{x+k}^{(g)} - P_x^{pg} \ddot{a}_{x+k}
\end{aligned}$$

Reemplazando la expresión en (6.47) para la prima nivelada

$$P_x^{pg} = \frac{A_x^{(g)}}{\ddot{a}_x},$$

se obtiene

$$_kV_x^{pg} = A_{x+k}^{(g)} - \frac{A_x^{(g)}}{\ddot{a}_x} \ddot{a}_{x+k} \tag{6.75}$$

El caso temporal es una extensión de la fórmula anterior, que se puede desarrollar directamente.

$$_kV^{(pg)}{}^{1}_{x:\overline{n}|} = A^{(g)}{}^{\;1}_{x+k:\overline{n-k}|} - P^{(g)}{}^{1}_{x:\overline{n}|} \ddot{a}_{x+k:\overline{n-k}|}, \tag{6.76}$$

para $k = 0, 1, 2, \ldots, n$, donde la reserva en $k = 0$ y en $k = n$ debe ser cero, ya que es un temporal y en $k = n$ termina el contrato.

6.11.3. Ecuación recursiva para la reserva prospectiva

La reserva prospectiva en (6.74) cumple una relación recursiva, dada por

$$_kV_x^{pg} = {}_{k+1}V_x^{pg} v\, p_{x+k} - P_{x+k}^{pg} + v\, q_{x+k} C_{k+1} \tag{6.77}$$

con $_0V_x^{pg} = 0$. Para el caso de primas niveladas, la ecuación es

$$_kV_x^{pg} = {}_{k+1}V_x^{pg} v\, p_{x+k} - P_x^{pg} + v\, q_{x+k} C_{k+1}, \tag{6.78}$$

6.11.4. Caso de pago en progresión geométrica

Considerando el caso de un seguro con pago que aumenta en progresión Geométrica con prima neta ó costo actuarial

$$(GA)_x = v_q \sum_{k=0}^{\omega-x-1} v_s^{k+1}\, {}_kp_x\, q_{x+k} = v_q A_{x|i_s},$$

donde $i_s = (1+i)/(1+i_q) - 1$, es la tasa real. Las primas niveladas se indican por $P_x^{pg} = P_x^G$ y están dadas por

$$P_x^G = \frac{v_q A_{x|i_s}}{\ddot{a}_x}. \tag{6.79}$$

Entonces la reserva prospectiva a la edad $x+k$, indicada por $_k(V^G)_x$, de acuerdo con (6.75), es

$$_k(V^G)_x = v_q A_{x+k|i_s} - \frac{v_q A_{x|i_s}}{\ddot{a}_x} \ddot{a}_{x+k}, \tag{6.80}$$

para $k = 0, 1, \ldots, \omega - x$, con $_{\omega-x}(V^G)_x = v_q A_{\omega|i_s} = v_q$, el valor terminal de la reserva.

Reemplazando la relación dual (6.6), $A_{x|i_s} = 1 - d_s \ddot{a}_{x|i_s}$, con $d_s = 1 - v_s$, $v_s = 1/(1+i_s)$, en (6.80), se obtiene una expresión equivalente para la reserva.

$$_k(V^G)_x = v_q \left(A_{x+k|i_s} - \frac{A_{x|i_s}}{\ddot{a}_x} \ddot{a}_{x+k} \right)$$

$$= v_q \left(1 - d_s \ddot{a}_{x+k|i_s} - \frac{1 - d_s \ddot{a}_{x|i_s}}{\ddot{a}_x} \ddot{a}_{x+k}\right).$$

La ecuación recursiva (6.78) con primas niveladas es

$${}_k(V^G)_x = {}_{k+1}(V^G)_x v\, p_{x+k} - P_x^G + v\, q_{x+k}(1+i_q)^k, \tag{6.81}$$

para $k = 0, 1, \ldots, \omega - x - 1$.

6.11.5. Caso de pago en progresión aritmética

En el caso de un seguro de vida entera con pagos creciendo en progresión aritmética (p.ej. 1,2,3. . .), el costo actuarial se dió en (6.21):

$$(IA)_x = \mathbb{E}((K(x)+1)v^{K(x)+1}) = \sum_{j=0}^{\omega-x} v^j\, {}_jp_x A_{x+j}$$

Las primas niveladas se indican por $P_x^{pg} = IAP_x$ y están dadas por

$$IAP_x = \frac{(IA)_x}{\ddot{a}_x}$$

donde se tiene en (6.21)

$$(IA)_x = \mathbb{E}((K(x)+1)v^{K(x)+1}) = \sum_{k=0}^{\omega-x} v^k\, {}_kp_x A_{x+k}$$

La reserva prospectiva, de acuerdo con (6.75), reemplazando $C_{K(x+k)+1} = K(x+k)+1$, está dada por

$${}_k(IAV)_x = \mathbb{E}\left((K(x+k)+1)v^{K(x+k)+1}\right) - \frac{\mathbb{E}((K(x)+1)v^{K(x)+1})}{\ddot{a}_x}\ddot{a}_{x+k}$$

6.11.6. Caso de pago lineal

En el caso de un seguro de vida entera con pagos creciendo linealmente a una tasa ρ, el costo actuarial se dió en (6.29):

$$(LA)_x := (1-\rho)A_x + \rho(IA)_x.$$

Las primas niveladas se indican por $P_x^{pg} = LP_x$ y están dadas por

$$\begin{aligned} LP_x &= (1-\rho)\frac{A_x}{\ddot{a}_x} + \rho\frac{(IA)_x}{\ddot{a}_x} \\ &= (1-\rho)P_x + \rho\, IAP_x \end{aligned} \tag{6.82}$$

Entonces la reserva prospectiva a la edad $x+k$, indicada por ${}_k(LV)_x$, de acuerdo con la expresión anterior, es una suma ponderada de las reservas de un seguro vida entera, ${}_kV_x$ y la de un seguro con pagos con incrementos aritméticos, ${}_k(IV)_x$.

$${}_k(LV)_x = (1-\rho){}_kV_x + \rho{}_k(IV)_x,$$

para $k = 0, 1, \ldots, \omega - x$, con ${}_{\omega-x}(LV)_x^{pg} = v_q A_{\omega|i_s} = v_q$, el valor terminal de la reserva.

El caso de un seguro temporal a n años tiene costo actuarial dado en (6.30):

$$(LA)^1_{x:\overline{n}|} := (1-\rho)A^1_{x:\overline{n}|} + \rho(IA)^1_{x:\overline{n}|}.$$

6.12. Problemas

Nota

De acuerdo con lo previsto en la Resolución 3974 del 2009, proferida por el Minsalud, se consideran enfermedades de alto costo las siguientes:([1])

[1]https://www.ambitojuridico.com/noticias/general/administrativo-y-contratacion/enfermedades-catastroficas-y-de-alto-costo-estan

a) Cáncer de cérvix.

a) Cáncer de mama.

b) Cáncer de estómago.

c) Cáncer de colon y recto.

d) Cáncer de próstata.

e) Leucemia linfoide aguda.

f) Leucemia mieloide aguda.

g) Linfoma hodgkin.

h) Linfoma no hodgkin.

i) Epilepsia.

j) Artritis reumatoidea.

k) Infección por el Virus de Inmunodeficiencia Humana (VIH) y Síndrome de Inmunodeficiencia Adquirida (SIDA).

1. Considere la fuerza de mortalidad estándar μ_{x+t} dada por una ley de mortalidad. Utilice los parámetros que aparecen en los Ejemplos para la Ley escogida (vea las secciones §2.7 y §2.6).

   Asuma una fuerza de mortalidad sub-estándar según el modelo multiplicativo en (2.38), para una vida (x) dada por

   $$\mu_{x^s+t} = \theta\mu_{x+t}, \tag{6.83}$$

   con $\theta = 1.7$. Denote por $T(x^s)$ su vida media residual.

   Puntos:

   a) Un departamento de seguros de vida ofrece un **Seguro vida temporal** para vidas con mortalidad estándar y sub-estándar $A^{1}_{x:\overline{n}|}$, $A^{1}_{x^s:\overline{n}|}$, respectivamente. Encuentre el costo actuarial de estos seguros, para un valor asegurado de 500 mill, si lo toma una vida de edad $x = 45$, con una tasa $i = 0.08$, periódo $n = 20$ años y la ley de mortalidad asignada. Explique por qué la diferencia entre estos costos.

b) Defina la variable aleatoria $Y = min(K(x), K(y))$ para $K(x), K(y)$ independientes. Defina la probabilidad

$$ {}_kp_{x,y} = \mathbb{P}(Y > k) = \mathbb{P}((K(x) > k) \cap \ (K(y) > k)) = {}_kp_x \, {}_kp_y, $$

entonces $\mathbb{P}(Y = k) = {}_kp_{x,y} - {}_{k+1}p_{x,y}$. El seguro de vida conjunto para (x),(y), que paga una unidad monetaria, al final del año de fallecimiento de (x) ó de (y), tiene costo actuarial por asegurada

$$ A_{\overset{1}{x,y}:\overline{n}|} = \mathbb{E}(v^{Y+1}) = \sum_{k=0}^{n-1} v^{k+1}\mathbb{P}(Y = k). $$

Calcule $A_{\overset{1}{x,y^s}:\overline{n}|}$, para $y = 30$, con los mismos parámetros de la parte a).

c) Calcule el costo del siguiente seguro.

$$ A_{\overset{1}{x,y^s}:\overline{n}|} - A^1_{y^s:\overline{n}|} $$

Cómo podría interpretarse la cobertura del mismo si la vida (y^s) dependiera económicamente de la vida (x)?. Qué diferencia tiene con $A^1_{x:\overline{n}|}$?.

2. Considere la fuerza de mortalidad estándar μ_{x+t} dada por una ley de mortalidad. Utilice los parámetros que aparecen en los Ejemplos para la Ley escogida (vea las secciones §2.7 y §2.6).

   Asuma una fuerza de mortalidad sub-estándar multiplicativa, tal que: $\mu^s_{x+t} = 1.3\,\mu_{x+t}$, para una vida (x). Denote por $T(x^s)$ su vida media residual.

   a) Un departamento de seguros de vida ofrece un **Seguro vida temporal** para vidas con mortalidad estándar y sub-estándar $A^1_{x:\overline{n}|}$, $A^{\;1}_{x^s:\overline{n}|}$, respectivamente. Encuentre el costo actuarial de estos seguros, para un valor asegurado de 1 unidad monetaria, si lo toma una vida de edad $x = 35$, con una tasa $i = 0.09$, periódo $n = 40$ años y la ley de mortalidad asignada. Explique por qué la diferencia entre estos costos.

   b) Considere un temporal, a n años, que paga una anualidad cierta, con pagos de 1, con valor $\ddot{a}_{\overline{n-\lfloor \mathring{e}_x \rfloor}|}$, si $n > \lfloor \mathring{e}_x \rfloor$. Compruebe que se cumple esta condición con los datos de la parte a) para la vida (x^s), calcule el costo actuarial del seguro

$$ \ddot{a}_{\overline{n-\lfloor \mathring{e}_{x^s} \rfloor}|} A^{\;1}_{x^s:\overline{n}|} \tag{6.84} $$

y compare con $A^{\,1}_{x^s:\overline{n}|}$. Comente, explique la diferencia.

c) Calcule el valor de las reservas prospectivas utilizando la fórmula (6.61), pag. 234 para los dos seguros de vida de la parte a). Reporte las primas niveladas y las gráficas superpuestas de ambas reservas. Explique por qué la diferencia entre estas gráficas.

3. Considere la fuerza de mortalidad estándar μ_{x+t} dada por una ley de mortalidad. Utilice los parámetros que aparecen en los Ejemplos para la Ley escogida (vea las secciones §2.7 y §2.6).

Asuma una fuerza de mortalidad sub-estándar multiplicativa, tal que: $\mu^s_{x+t} = 1.3\,\mu_{x+t}$, para una vida (x). Denote por $T(x^s)$ su vida media residual.

Puntos a resolver:

a) El departamento de estructuración de productos de una Aseguradora diseña un Seguro de Ingreso Familiar para una vida (x), como un temporal a n años, tal que el pago del seguro en caso de fallecer (x) no es una suma fija sino una anualidad anticipada vigente en el período $[K(x)+1, n]$, en caso de ocurrir $K(x)+1 \leq n$. En caso contrario el seguro se vence sin pago. La variable valor presente de este seguro se define como

$$Z = \ddot{a}_{\overline{n-K(x)}|} v^{K(x)+1} I(K(x) \leq n-1). \tag{6.85}$$

Encuentre una expresión para el costo actuarial, indicado por $A^{(if)\,1}_{x:\overline{n}|} = \mathbb{E}(Z)$. Evalúelo para el caso $x = 45, i = 0.07, n = 30$.

b) Considere un temporal, a n años, que paga una anualidad cierta, con pagos de 1, con valor $\ddot{a}_{\overline{n-\lfloor \mathring{e}_x \rfloor}|}$, si $n > \lfloor \mathring{e}_x \rfloor$. Compruebe que se cumple esta condición con los datos de la parte a) para la vida (x^s), calcule el costo actuarial del seguro

$$\ddot{a}_{\overline{n-\lfloor \mathring{e}_x \rfloor}|} A^{\,1}_{x:\overline{n}|} \tag{6.86}$$

y compárelo con $A^{(if)\,1}_{x:\overline{n}|}$. Comente, explique la diferencia.

c) Calcule la prima nivelada para el seguro en la parte a). Y el valor de las reservas prospectivas. Para esto use la extensión de la fórmula prospectiva para los seguros de vida con pago general (6.76) pag. 238, al caso del temporal ingreso familiar. Note que $C_{K(x)+1} = \ddot{a}_{\overline{n-K(x)}|}$. Reporte la gráfica.

4. Considere la fuerza de mortalidad estándar μ_{x+t} dada por una ley de mortalidad. Utilice los parámetros que aparecen en los Ejemplos para la Ley escogida (vea las secciones §2.7 y §2.6). Asuma una fuerza de mortalidad sub-estándar aditiva, tal que: $\mu^s_{x+t} = k + \mu_{x+t}, k > 0$, para una vida (x) a la cual se le diagnostica una enfermedad catastrófica (ver la lista de estas enfermedades al inicio de la sección de problemas). Denote por $T(x^s)$ su vida media residual.

   Una Aseguradora de medicina prepagada diseña un **seguro temporal para enfermedad catastrófica**, para una vida (x), que paga una unidad monetaria al momento de diagnóstico positivo de una de las enfermedades que aparecen en la lista al inicio de esta sección. Se asume que (x) está sana al momento del contrato, y que, en caso de diagnóstico positivo, pasa a una mortalidad sub-estándar (x^s).

   El costo actuarial del seguro EC temporal a n años, por unidad monetaria, se define como

$$A^{(ec)}{}^{1}_{x:\overline{n}|} := \sum_{j=1}^{n} v^j \, {}_{j-1}p_x \, p^{(e)}_{x+j-1} \tag{6.87}$$

   donde

$$p^{(e)}_x = p\,(1 - e^{-20/\lfloor \mathring{e}_x \rfloor})(1 + p_{x^s})/2,$$

   se define como la probabilidad de tener una enfermedad catastrófica, a la edad x, en un período de 1 año.

   a) Evalúe el costo del seguro, por un valor asegurado de $C = \$800.000$ USD, con los parámetros $x = 45$, $i = 0.07$, $n = 20$, $k = 0.12$, $p = 16.2/10000$.

   b) Adicionalmente, este departamento ofrece un **seguro de vida temporal**, con los mismos parámetros y el mismo valor asegurado del seguro anterior. Encuentre el valor actuarial de este seguro $CA^1_{x:\overline{n}|}$. Si se tienen ambos seguros, evalúe: $C(A^{(ec)}{}^{1}_{x:\overline{n}|} + A^1_{x:\overline{n}|})$. Cuál es la protección que garantiza estos seguros conjuntamente?.

   c) Calcule la prima nivelada para el seguro en la parte a). Y el valor de las reservas prospectivas. Para esto use la extensión de la fórmula prospectiva para los seguros de vida con pago general (6.76) pag. 238, al caso del temporal de enfermedad catastrófica. Reporte la gráfica.

5. Considere la fuerza de mortalidad estándar μ_{x+t} dada por una ley de mortalidad. Utilice los parámetros que aparecen en los Ejemplos para la Ley escogida (vea las secciones §2.7 y §2.6). Asuma una fuerza de mortalidad sub-estándar aditiva, tal que: $\mu^s_{x+t} = k + \mu_{x+t}, k > 0$. Denote por $T(x^s)$ su vida media residual.

   Una Aseguradora de medicina prepagada diseña un **seguro de asistencia para enfermedad catastrófica** AE, para una vida (x), el cual paga una anualidad de vida temporal, por unidad monetaria, al momento de diagnóstico positivo una enfermedad catastrófica según la lista de estas enfermedades al inicio de la sección de problemas. Se asume que (x) está sana al momento del contrato, y que, en caso de diagnóstico positivo, pasa a una mortalidad sub-estándar (x^s).

   El costo actuarial del seguro AE por unidad monetaria se define como

$$A^{(ae)}{}^{1}_{x:\overline{n}|} := \sum_{j=1}^{n} v^j \, {}_{j-1}p_x \, p^{(e)}_{x+j-1} \, \ddot{a}_{x^s+j:\overline{n-j+1}|} \tag{6.88}$$

   donde

$$p^{(e)}_x = p\,(1 - e^{-20/\lfloor \mathring{e}_x \rfloor})(1 + p_{x^s}),$$

   a) Evalúe el costo del seguro, por un valor asegurado de $C = \$800.000$ USD, con los parámetros $x = 45$, $i = 0.07$, $n = 20$, $k = 0.12$, $p = 0.16/1000$.

   b) Adicionalmente, este departamento ofrece un **seguro de vida temporal**, con los mismos parámetros y el mismo valor asegurado del seguro anterior. Encuentre el valor actuarial de este seguro $CA^1_{x:\overline{n}|}$. Si se tiene el seguro $C(A^{(ae)}{}^{1}_{x:\overline{n}|} + A^1_{x:\overline{n}|})$, cuál es la protección que se obtiene?.

   c) Considere un temporal, a n años, que paga una anualidad cierta, con pagos de 1, con valor $\ddot{a}_{\overline{n-\lfloor \mathring{e}_x \rfloor}|}$, si $n > \lfloor \mathring{e}_x \rfloor$. Compruebe que se cumple esta condición con los datos de la parte a) para la vida (x^s). Calcule el costo actuarial del seguro

$$B\ddot{a}_{\overline{n-\lfloor \mathring{e}_{x^s} \rfloor}|} A^1_{x:\overline{n}|} \tag{6.89}$$

   donde $B = C/\ddot{a}_{\overline{n-\lfloor \mathring{e}_{x^s} \rfloor}|}$, y compárelo con $A^{(ae)}{}^{1}_{x:\overline{n}|}$. Comente, explique la diferencia.

6. Considere la fuerza de mortalidad estándar μ_{x+t} dada por una ley de mortalidad. Utilice los parámetros que aparecen en los Ejemplos para la Ley escogida (vea las secciones §2.7 y §2.6). Asuma una fuerza de mortalidad sub-estándar aditiva, tal que: $\mu^s_{x+t} = 0.02 + \mu_{x+t}$. Denote por $T(x^s)$ su vida media residual.

   a) Una empresa de medicina prepagadas ofrece un seguro médico para enfermedades catastróficas de alto costo , a $n = 10$ años, por valor de 800 mill, financiado a una tasa efectiva anual $i = 0.083$, para una vida de edad $x = 45$. El costo actuarial está dado por

$$A_x^{(cat)} \tag{6.90}$$

   Encuentre su valor. Explique las instrucciones en R utilizadas.

   b) Asuma que esta Cooperativa está autorizada para ofrecer anualidades de vida. Ofrece una **anualidad de vida entera** con el mismo diseño y parámetros de la anualidad cierta agregada del punto a). Si la toma una vida de edad $x_1 = 45$, y los pagos de ambas anualidades inician en el mismo valor C, encuentre el costo actuarial de la misma. Encuentre este costo para una vida con mortalidad sub-estándar.

   c) Simule $N = 15000$ valores de la variable aleatoria Y que provee el valor presente de la anualidad de vida agregada para la vida (x_1). Y luego simule N valores de la variable aleatoria Y^s que provee el mismo valor presente pero para una vida con mortalidad sub-estándar x_1^s. Reporte las densidades de estos casos en una misma gráfica. Incluya las gráficas de los costos como puntos en el eje X. Comente, explique las diferencias que encuentre entre ambas densidades.

   d) Calcule e interprete la probabilidad.

$$\mathbb{P}(Y > Ys).$$

7. En los problemas siguientes use la distribución GM-00-08 para hombres y mujeres. En lo que sigue (y) representa hombre y (x) mujer. Se usan los valores $x, y = 25$, $m = 35$, $i = 0.07$. Este problema trata sobre una anualidad de vida diferida.

   a) Evalúe las primas netas para rentas vitalicias a las edades $x + m, y + m$ (edad de jubilación de (x), (y)), $\ddot{a}_{x+m}$, $\ddot{a}_{y+m}$.

b) Compare $\ddot{a}_{x+m}$ con $\ddot{a}_{x+m:\overline{n}|}$, donde $n = \overset{\circ}{e}_{x+m}$. Qué diferencia hay?. Cómo se explica esta diferencia?. Calcule para (x), (y).

c) Calcule la prima nivelada de una anualidad diferida a m años, $P({}_{m|}\ddot{a}_x) = {}_{m|}\ddot{a}_x/\ddot{a}_{x:\overline{n}|}$, para (x) y (y). Reporte el resultado y comente sobre la diferencia.

d) Calcule la reserva prospectiva para una anualidad diferida a m años, ${}_kV({}_{m|}\ddot{a}_x)$, para (x) y (y). Grafíquela e interprete el resultado.

$$
{}_kV({}_{m|}\ddot{a}_x) = \begin{cases} \ddot{a}_{x+k} - \ddot{a}_x \ddot{a}_{x+k:\overline{m-k}|}/\ddot{a}_{x:\overline{m}|} & k = 0, 1, \ldots, m-1 \\ \ddot{a}_{x+k} & k = m, m+1, \ldots, 110 - x - 1. \end{cases}
$$

8. Suponga que una vida (x^S) tiene discapacidad severa, y se asume que su fuerza de mortalidad es el doble de la fuerza de mortalidad GM para hombres-00-08. En el Trabajo 2 se comprobó que ${}_tp_{x^s} = ({}_tp_x)^2$, y que la distribución de $T(x^S)$ es GM con parámetros $2a, 2b, C$. Este problema trata sobre un seguro de vida entera para (x).

   a) En el Trabajo 2 se comprobó ${}_tp_{x^s} < {}_tp_x$. Por qué se puede concluír que $\ddot{a}_x > \ddot{a}_{x^s}$?. Por qué $A_{x^s} > A_x$?. Por qué $P_{x^s} > P_x$?. Sugerencia: Use $A_x = 1 - d\ddot{a}_x, d = 1 - v, v = 1/(1+i)$.

   b) En lo que sigue asuma x=48, i=0.07. En el Trabajo 2 se encontraron los valores A_{x^s} y A_x. Calcule ahora $\ddot{a}_x$ y $\ddot{a}_{x^s}$, y las primas niveladas P_{x^s} y P_x. Asuma que el valor asegurado es 1 millón. Comente sobre los valores de las primas niveladas. Qué significa que una sea menor que la otra?.

   c) Calcule las reservas ${}_kV_x$ para $k = 1, \ldots, 110 - x$, usando ${}_kV_x = 1 - \ddot{a}_{x+k}/\ddot{a}_x$. Igual para el caso (x^S), ${}_kV_{x^s}$. Note que $\ddot{a}_{110} = 0$.

   d) En Gerber, Gerber [1994], pag.62, se divide la prima nivelada P_x en dos primas, $P_x = P_x^r(k) + P_x^s(k)$, donde $P_x^r(k) = (1 - {}_{k+1}V_x)vq_{x+k}$, para $k = 1, \ldots, 110 - x$. Se interpreta como "la prima neta para un seguro de un año". Se denomina la prima de riesgo. Calcúlela, grafíquela e interprete el resultado.

9. Suponga que una vida (x^S) ejerce una actividad de alto riesgo. Se asume que su fuerza de mortalidad se obtiene al añadir una constante $k > 0$ a la fuerza de

mortalidad de una vida (x). Con símbolos: $\mu^s_{x+t} = \mu_{x+t} + k$. Por tanto, la fuerza de mortalidad sub-estándar es mayor, en cualquier edad, que la fuerza de mortalidad estándar.

En el trabajo 2 se encontró que ${}_tp_{x^s} = e^{-kt}{}_tp_x$. Defina la tasa $i_k = e^{\delta+k}-1$, y denote por $A_x@i_k$ la prima neta de un seguro vida entera para la vida (x) calculada con la tasa i_k. Igualmente $\ddot{a}_x@i_k$, es la prima neta de una anualidad vitalicia calculada con la tasa i_k. En las primas A_x y $\ddot{a}_x$ se asume la tasa $i = e^{\delta} - 1$. Asuma la fuerza de mortalidad uniforme (DeMoivre), ${}_tq_x = t/(110-x)$, $0 \leq t \leq 110 - x$. Asuma los siguientes valores $x = 60, i = 0.07, k = 0.035$. Este problema trata sobre un seguro de vida entera para (x).

a) Compruebe que $\ddot{a}_{x^s} = \ddot{a}_x@i_k$ y $A_{x^s} = 1-(1-e^{-\delta})(1-A_x@i_k)/(1-e^{\delta+k})$. Sugerencia: utilice la relación $A_x = 1 - d\,\ddot{a}_x$, $d = 1-v$, $v = 1/(1+i)$.

b) Evalúe $A_x, A_{x^s}, \ddot{a}_x, \ddot{a}_{x^s}$ y las primas niveladas anuales P_x, P_{x^s}, para seguros de vida entera, por cada millón asegurado. Comente sobre los resultados.

c) Calcule las reservas prospectivas anuales ${}_kV_{x^s}, {}_kV_x$, para $k = 0, 1, \ldots, 110-x$, utilizando la fórmula ${}_kV_x = 1-\ddot{a}_{x+k}/\ddot{a}_x$. Reporte las gráficas. Comente sobre el resultado.

d) Calcule $Var(Z) = \mathbb{E}(Z^2) - \mathbb{E}(Z)^2$ con $Z = v^{K(x)+1}$,para los casos $(x), (x^s)$. Si $\sqrt{Var(Z)}$ es una medida del riesgo de extralongevidad, qué efecto tiene la actividad de alto riesgo sobre éste?.

10. Suponga que una vida (x^s) ejerce una actividad de alto riesgo. Se asume que su fuerza de mortalidad se obtiene al añadir una constante $k > 0$ a la fuerza de mortalidad de una vida (x). Con símbolos: $\mu^s_{x+t} = \mu_{x+t} + k$. Por tanto, la fuerza de mortalidad sub-estándar es mayor, en cualquier edad, que la fuerza de mortalidad estándar. Asuma la distribución GM 00-08 mujeres. Este problema trata sobre un seguro de vida entera para (x).

a) Compruebe que $\ddot{a}_{x^s} = \ddot{a}_x@i_k$ y $A_{x^s} = 1-(1-e^{-\delta})(1-A_x@i_k)/(1-e^{\delta+k})$. Sugerencia: utilice la relación $A_x = 1 - d\,\ddot{a}_x$, $d = 1-v$, $v = 1/(1+i)$.

b) En los puntos que siguen asuma $x = 57$, $i = 0.08$, $k = 0.026$. Evalúe $A_x, A_{x^s}, \ddot{a}_x, \ddot{a}_{x^s}$ y las primas niveladas anuales P_x, P_{x^s}, para seguros de vida entera, por cada millón asegurado. Comente sobre los resultados.

c) Calcule las reservas prospectivas anuales ${}_kV_{x^s}, {}_kV_x$, para $k = 0, 1, \ldots, 110-x$, para seguros de vida entera, por cada millón asegurado. Utilice la fórmula ${}_kV_x = 1 - \ddot{a}_{x+k}/\ddot{a}_x$. Reporte las gráficas. Comente sobre el resultado.

d) Calcule $Var(Z) = \mathbb{E}(Z^2) - \mathbb{E}(Z)^2$ con $Z = v^{K(x)+1}$,para los casos $(x), (x^s)$. Si $\sqrt{Var(Z)}$ es una medida del riesgo de extralongevidad, qué efecto tiene la actividad de alto riesgo sobre éste?.

11. Una fuerza de mortalidad "sub-estándar"se obtiene al añadir una constante $k > 0$ a la fuerza de mortalidad. Con símbolos: $\mu^s_{x+t} = \mu_{x+t} + k$. Por tanto, la fuerza de mortalidad sub-estándar es mayor, en cualquier edad. Este procedimiento se utiliza para modelar la fuerza de mortalidad de personas inválidas o con problemas de salud que incidan en su supervivencia (arterioesclerosis,diabetes, VIH, cáncer). En los puntos siguientes se asumirá $x = 50, i = 0.07, k = 0.04$, y la distribución GM para hombres-80-89. Denote por $T(x^s)$ la vida media residual de una vida (x) con fuerza de mortalidad sub-estándar. Este problema es sobre rentas vitalicias diferidas para una vida (x).

    En el trabajo 2 se encontró que ${}_tp_{x^s} = e^{-kt}{}_tp_x$. Defina la tasa $i_k = e^{\delta+k} - 1$,$\delta = \ln(1+i)$. y denote por $A_x@i_k$ la prima neta de un seguro vida entera para la vida (x) calculada con la tasa i_k. Igualmente $\ddot{a}_x@i_k$, es la prima neta de una anualidad vitalicia calculada con la tasa i_k. En las primas A_x y $\ddot{a}_x$ se asume la tasa $i = e^\delta - 1$.

    a) Evalúe las primas netas para rentas vitalicias a la edad $x + m$ (edad de jubilación de (x)), $\ddot{a}_{x+m}, \ddot{a}_{x^s+m}$.

    b) En el Trabajo 2 se calcularon $\overset{\circ}{e}_{x^s+m}, \overset{\circ}{e}_{x+m}$. Compare $\ddot{a}_{x+m}$ con $\ddot{a}_{x+m:\overline{n}|}$, donde $n = \overset{\circ}{e}_{x+m}$. Qué diferencia hay?. Cómo se explica esta diferencia?.

    c) Calcule la prima nivelada de una anualidad diferida a $m = 30$ años, $P({}_{m|}\ddot{a}_x) = {}_{m|}\ddot{a}_x/\ddot{a}_{x:\overline{n}|}$, para (x) y (x^s). Reporte el resultado y comente sobre la diferencia.

    d) Calcule la reserva prospectiva para una anualidad diferida a $m = 30$ años, ${}_kV({}_{m|}\ddot{a}_x)$, para (x) y (x^s). Grafíquela e interprete el resultado.

$$
{}_kV({}_{m|}\ddot{a}_x) = \begin{cases} \ddot{a}_{x+k} - \ddot{a}_x\, \ddot{a}_{x+k:\overline{m-k}|}/\ddot{a}_{x:\overline{m}|} & k = 0, 1, \ldots, m-1 \\ \ddot{a}_{x+k} & k = m, m+1, \ldots, 110 - x - 1. \end{cases}
$$

CAPÍTULO 7

Capitalización en tiempo continuo

7.1. Capitalización en tiempo continuo

La capitalización en tiempo continuo es una abstracción. Lo más parecido sería algún sistema que adjudicara intereses por ejemplo, cada hora. Existe el caso de capitalización diaria y se puede mostrar que el caso continuo se puede aproximar por esta frecuencia diaria.

La capitalización en tiempo continuo es muy útil porque permite aplicar herramientas como cálculo diferencial e integral para definir flujos de caja por medio de ecuaciones diferenciales.

Además, permite incorporar tasas variables como procesos estocásticos en tiempo continuo, que es una de las herramientas fundamentales del análisis financiero actual.

Se introduce la tasa continua de interés, δ, mediante un procedimiento de límite.

Proposición 7.1.1. *Dada la tasa nominal $i^{(m)}$ para capitalización en un período de duración m, entonces existe el límite siguiente.*

$$\lim_{m\to\infty} i^{(m)} = \log(1+i).$$

Demostración. De la definición de $i^{(m)}$ se tiene

$$(1+i^{(m)}/m)^m = 1+i,$$
$$\therefore\ i^{(m)} = \frac{(1+i)^{1/m}-1}{1/m}.$$

Si se reemplaza $1/m$ por h, en la expresión anterior y se toma el límite cuando $h \to 0$ entonces

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0}\frac{(1+i)^h-1}{h} &= \frac{d}{dx}(1+i)^x|_{x=0}\\ &= (1+i)^x\ln(1+i)|_{x=0}\\ &= \ln(1+i).\end{aligned}$$

□

Definición 7.1.1. *Se define la tasa continua de interés ó fuerza de interés como*

$$\delta = \ln(1+i) = \lim_{m\to\infty} i^{(m)}. \tag{7.1}$$

Luego $1+i = e^{\delta}$.

Capitalización continua con inversiones

Puede definirse la capitalización continua a la tasa δ como un proceso en el cual un capital $F(t)$ crece a la tasa $F'(t) = \delta F(t)$, asumiendo que $F(t)$ es diferenciable para todo t. Es inmediato que $F(t) = F(0)e^{\delta t}$.

A continuación se define la capitalización en tiempo continuo, con inversiones, mediante una ecuación diferencial.

Se define por $r(t)$ la tasa de inversión ó de retiro (en este caso se llama tasa de consumo). Es una función continua por secciones definida para $t \in [0, \infty)$.

Cuando se trata de un ahorro ó una inversión, se coloca $r(t) > 0$. Cuando se trata de un crédito, una anualidad, una pensión, etc. se coloca $-r(t)$ con $r(t) > 0$. En un crédito, la función $r(t)$ define el sistema de pagos.

La integral definida

$$R(t) = \int_0^t r(s)ds \tag{7.2}$$

representa el capital invertido ó retirado en el intervalo de tiempo $[0, t]$. La interpretación de t es año ó fracción de año. Por ejemplo,

$$R(1) = \int_0^1 r(s)ds \tag{7.3}$$

es el total invertido ó retirado **hasta** el final del primer año y $R(3/12)$ es el capital invertido **hasta** el final del primer trimestre.

Definición 7.1.2. *El flujo de caja con inversiones, en tiempo continuo, durante un intervalo de tiempo de T años, se define por la siguiente ecuación diferencial lineal*

$$F'(t) = \delta F(t) + r(t),\ 0 \le t \le T, \tag{7.4}$$

con $F(0) \ge 0$, el capital inicial.

La condición de cierre (de borde) en $t = T$ especifica $F(T)$, por ejemplo, $F(T) = 0$. La solución de (7.4) es

$$F(t) = e^{\delta t}\left(F(0) + \int_0^t e^{-\delta s} r(s)ds\right). \tag{7.5}$$

Las expresiones (7.4) y (7.5) permitirán definir anualidades para diferentes sistemas de pago $r(t)$, siendo el valor inicial $F(0)$ el valor actuarial ó costo de las mismas.

Ejemplo 7.1.1. *Suponga el modelo de flujo de caja en tiempo continuo (7.4), con tasa continua* $\delta = 0.131$, $T = 3$, $F(0) = 0$, *y la tasa de inversión es*

$$r(t) = I(0 \leq t \leq 2) + 2I(2 \leq t \leq 3), \tag{7.6}$$

que se interpreta como: durante los dos primeros años se invierte una unidad de manera continua, y a partir de segundo año hasta del final se invierten dos unidades. Calcular $F(3)$ *con base en (7.5). Solución. Se obtiene el saldo final como*

$$\begin{aligned}
F(T) &= e^{\delta T}\left(F(0) + \int_0^T e^{-\delta t} r(t)dt\right) \\
&= e^{0.131(3)}\left(0 + \int_0^2 e^{-0.131t}dt + 2\int_2^3 e^{-0.131t}dt\right) \\
&= e^{0.131(3)}(1 - e^{-0.131(2)} + 2e^{-0.131(2)} - 2e^{-0.131(3)})/0.131 \\
&= e^{0.131(3)}(1 + e^{-0.131(2)} - 2e^{-0.131(3)})/0.131 = 4.7434.
\end{aligned}$$

Ejemplo 7.1.2. *Otra alternativa de solución para el problema anterior puede ser utilizando la función parte entera "piso",* $\lfloor t \rfloor$, *con integración numérica, notando que*

$$r(t) = 1 + \lfloor t/2 \rfloor = I(0 \leq t \leq 2) + 2I(2 \leq t \leq 3).$$

de manera que

$$F(T) = e^{\delta T}\left(F(0) + \int_0^T e^{-\delta t}(1 + \lfloor t/2 \rfloor)ds\right)$$

```
#----ejemplo anualidad continua
delta = 0.131

ft = function(t,delta){
a = exp( -delta*t)*(1+floor(t/2))
return(a)}

(B = integrate(ft,0,3, delta=delta)$value)
(B*exp(delta*3))
#----respuesta: 4.743406
```

Ejercicio 7.1.1. *Con respecto al Ejemplo anterior, cuál es el capital total invertido en los 3 años?*

Ejemplo 7.1.3. *Calcular el saldo $F(3)$ anterior con capitalización diaria.*
Solución. Utilizando la fórmula (4.21a), pag. 108,

$$a_{\overline{n}|i}^{(m)} = \frac{i}{i^{(m)}} a_{\overline{n}|i},$$

la solución es, con $m = 360$, $i = e^{\delta} - 1$,

$$\begin{aligned} F(0) &= (1+i)^3 (2a_{\overline{3}|i}^{(m)} - a_{\overline{2}|i}^{(m)}) \\ &= (1+i)^3 \frac{i}{i^{(m)}} (2a_{\overline{3}|i} - a_{\overline{2}|i}) \end{aligned}$$

se calcula con R con los comandos

```
#-------anualidad vencida pago anual
avn = function(i,n){
v = 1/(1+i)
p = (1-v^n)/i
return(p)}

i = exp(delta)-1
m = 360; n1 = 3; n2 = 2;
inom.m = m*((1+i)^{1/m}-1)
(F0 = (1+i)^3*(i/inom.m)*(2*avn(i,n1)-avn(i,n2)))
#----respuesta: 4.742543
```

La diferencia entre los resultados de capitalización continua, 4.743406, y capitalización diaria 4.742543 es 0.000863.

Ejercicio 7.1.2. *Realizar el cálculo anterior utilizando la aproximación en (4.21b), pag. 108,*

$$a_{\overline{n}|i}^{(m)} \approx (1 + \frac{m-1}{2m} i) a_{\overline{n}|i},$$

7.2. Anualidades con capitalización continua

El saldo de una anualidad en el tiempo t, $F(t)$, con pagos a una tasa continua constante

$$r(t) = I(0 \leq t < T) = 1 + \lfloor t/T \rfloor = \lceil t/T \rceil$$

durante el período $[0, T]$ cumple

$$F'(t) = \delta F(t) - r(t).$$

El valor presente de los pagos es $F(0)$. Con la condición de cierre $F(T) = 0$ se obtiene de (7.5)

$$\bar{a}_{\overline{T}|\delta} := F(0) = \int_0^T e^{-\delta s} ds = \frac{1 - e^{-\delta T}}{\delta}. \tag{7.7}$$

Las anualidades pueden tener un sistema de pagos $r(t)$ en $[0, T]$, diferente de $\lfloor t/T \rfloor$. En tal caso, de la solución en (7.5) y de la condición de cierre $F(T) = 0$ se obtiene el valor actuarial

$$F(0) = \int_0^T e^{-\delta s} r(s) ds. \tag{7.8}$$

Se puede observar, con base en la definición de $a^{(m)}_{\overline{n}|i}$ en (4.21a), y (7.7), que se cumple

$$\lim_{m \to \infty} a^{(m)}_{\overline{T}|i} = \lim_{m \to \infty} \frac{1 - v^T}{i^{(m)}} = \bar{a}_{\overline{T}|\delta}. \tag{7.9}$$

Con las anualidades integradas en la Tabla 4.4 se pueden definir las correspondientes anualidades en tiempo continuo tomando el mismo límite anterior. En particular,

$$\lim_{m \to \infty} \ddot{a}^{(m)}_{\overline{T}|i} = \lim_{m \to \infty} = \frac{1 - v^T}{d^{(m)}} = \bar{a}_{\overline{T}|\delta}. \tag{7.10}$$

Anualidades diferidas

Una anualidad continua que empieza a pagar en el tiempo T y tiene una duración de S años tiene valor presente dado por

$$ {}_{T|}\bar{a}_{\overline{S}|} = v^T \bar{a}_{\overline{S}|}. \tag{7.11} $$

Sistemas de cuotas crecientes geométricamente

En este sistema las cuotas aumentan anualmente por el incremento legal para el salario mínimo. Aunque en la realidad este porcentaje varía (aletoriamente) en el tiempo, se tomará un valor fijo que representa el valor medio, y se indica por una tasa continua δ_q, asumida menor que la tasa δ. La expresión para la tasa de pagos en este caso es

$$ r(t) = Ce^{\delta_q \lfloor t \rfloor} \tag{7.12} $$

donde $\lfloor t \rfloor$ es la función parte entera. El total pagado por cuotas durante el crédito es $\int_0^T r(s)ds$. La solución del flujo de caja en tiempo continuo con cuotas crecientes geométricamente,

$$ F'(t) = \delta F(t) - Ce^{\delta_q \lfloor t \rfloor}, \tag{7.13} $$

se obtiene a partir de la condición de cierre $F(T) = 0$, y es

$$ F(0) = C \int_0^T e^{-\delta s} e^{\delta_q \lfloor s \rfloor} ds. \tag{7.14} $$

Proposición 7.2.1. *El valor presente*

$$ (G\bar{a})_{\overline{T}|} := \int_0^T e^{-\delta s + \delta_q \lfloor s \rfloor} ds \tag{7.15} $$

asumiendo $T > 0$ *entero cumple*

$$ (G\bar{a})_{\overline{T}|} = \bar{a}_{\overline{1}|\delta} \ddot{a}_{\overline{T}|i_r}, \tag{7.16} $$

donde $i_r = e^{\delta - \delta_q} - 1$.

Demostración. Para desarrollar la integral del miembro derecho. Entonces se puede descomponer la integral en subintervalos como sigue.

$$\int_0^1 e^{-\delta s+\delta_q\lfloor s\rfloor}ds = \int_0^1 e^{-\delta s}ds = \frac{1-e^{-\delta}}{\delta}$$
$$\int_1^2 e^{-\delta s+\delta_q\lfloor s\rfloor}ds = \int_0^1 e^{-\delta s+\delta_q}ds = e^{-\delta+\delta_q}\,\frac{1-e^{-\delta}}{\delta}$$
$$\int_2^3 e^{-\delta s+\delta_q\lfloor s\rfloor}ds = \int_2^3 e^{-\delta s+2\delta_q}ds = e^{-2\delta+2\delta_q}\,\frac{1-e^{-\delta}}{\delta}$$
$$\vdots$$
$$\int_{T-1}^T e^{-\delta s+\delta_q\lfloor s\rfloor}ds = \int_{T-1}^T e^{-\delta s+(T-1)\delta_q}ds = e^{-(T-1)\delta+(T-1)\delta_q}\,\frac{1-e^{-\delta}}{\delta}$$

$$\begin{aligned}\therefore\ \int_0^T e^{-\delta s}e^{\delta_q\lfloor s\rfloor}ds &= \frac{1-e^{-\delta}}{\delta}\sum_{j=0}^{T-1} e^{-j(\delta-\delta_q)}\\ &= \bar{a}_{\overline{1}|\delta}\sum_{j=0}^{T-1} e^{-j(\delta-\delta_q)}\end{aligned}$$

Con tasa auxiliar, efectiva anual, $i_r = e^{\delta-\delta_q} - 1$ entonces

$$\sum_{j=0}^{T-1} e^{-j(\delta-\delta_q)} = \sum_{j=0}^{T-1} v_r^j = \ddot{a}_{\overline{T}|i_r}$$

Por tanto, el resultado final es

$$\int_0^T e^{-\delta s+\delta_q\lfloor s\rfloor}ds = \bar{a}_{\overline{1}|\delta}\ddot{a}_{\overline{T}|i_r}.$$

La tasa de pagos (ó de consumo) se puede escribir

$$r(t) = Ce^{\delta_q\lfloor t\rfloor} = \frac{F(0)e^{\delta_q\lfloor t\rfloor}}{\bar{a}_{\overline{1}|\delta}\ddot{a}_{\overline{T}|i_r}} \tag{7.17}$$

□

Ejercicio 7.2.1. *Encontrar una fórmula para el siguiente indicador del costo de un crédito con cuotas crecientes geométricamente*

$$\frac{1}{F(0)}\int_0^T r(s)ds = \frac{\textit{total pagos}}{\textit{valor del crédito}} \tag{7.18}$$

Ejemplo 7.2.1. *Suponga una anualidad con pagos continuos, crecientes geométricamente a la tasa* $\delta_q = \ln(1+0.04)$*, durante un período de* $T = 10$ *años, financiada a una tasa* $\delta = \ln(1+0.08)$*. Encuentre el valor (costo) de esta anualidad si al final del primer año ha pagado* $C = 1$ *mill.*

Solución De la ecuación (7.14)

$$F(0) = C\bar{a}_{\overline{1}|\delta}\ddot{a}_{\overline{T}|i_r}.$$

La tasa i_r es

$$\begin{aligned} i_r &= e^{\delta-\delta_q} - 1 \\ &= \frac{1+0.08}{1+0.04} - 1 \\ &= 0.038462. \end{aligned}$$

Luego, $\ddot{a}_{\overline{10}|i_r} = 8.487733$. Además,

$$\begin{aligned} \bar{a}_{\overline{1}|\delta} &= (1-(1+0.08)^{-1})/\delta \\ &= 0.9624879. \end{aligned}$$

Por tanto,

$$\begin{aligned} F(0) &= \bar{a}_{\overline{1}|\delta}\ddot{a}_{\overline{T}|i_r} \\ &= 8.487733(0.9624879) = 8.169341. \end{aligned}$$

La respuesta es: $\$8'169.341$.

Una función $f(x)$ se dice cóncava en $[a, b]$ si la línea que une los puntos $(a, f(a)),\ (b, f(b))$ está siempre por debajo de la gráfica $(x, f(x))$. Una condición suficiente para que f sea cóncava es que exista $f''(x)$ y cumpla $f''(x) < 0$ en un intervalo. En este caso, si X es una variable aleatoria, f es cóncava y $\mathbb{E}(f(X))$ existe, entonces se cumple la desigualdad de Jensen

$$\mathbb{E}(f(X)) \leq f(\mathbb{E}(X)) \tag{7.19}$$

Proposición 7.2.2.

$$\frac{\partial^2}{\partial T^2} G\bar{a}_{\overline{T|}\delta} < 0. \tag{7.20}$$

Luego, aplicando la desigualdad de Jensen con $X = T(x)$ la vida residual de una vida (x), con esperanza de vida $\mathbb{E}(T(x))$ se tiene

$$\mathbb{E}(G\bar{a}_{\overline{T(x)|}\delta}) < G\bar{a}_{\overline{\mathbb{E}(T(x))|}\delta}. \tag{7.21}$$

Sistemas de cuotas crecientes linealmente

Para la anualidad creciente linealmente con m pagos anticipados en el año, con prima neta (4.53) y (4.54), pag. 129,

$$(I^{(q)}\ddot{a})^{(m)}_{\overline{n|}} = \frac{\ddot{a}^{(q)}_{\overline{n|}} - nv^n}{d^{(m)}},$$

se puede usar el hecho de que la suma que la define es, de hecho, la suma de Riemann que aproxima una integral, de tal forma que se tiene el límite siguiente

$$\lim_{m\to\infty}(I^{(q)}\ddot{a})^{(m)}_{\overline{n|}} = \frac{1}{q}\int_0^n v^t(1 + \lfloor qt \rfloor)dt,$$

por lo que se puede definir la prima neta de una anualidad continua que paga a una tasa inicial de $1/q$, y aumenta q veces al año en esta cantidad, como

$$(I^{(q)}\bar{a})_{\overline{n|}} := \frac{1}{q}\int_0^n v^t(1 + \lfloor qt \rfloor)dt. \tag{7.22}$$

7.3. Notas

En el artículo de Norberg [2005] se exponen resultados básicos del modelo de inversiones en tiempo continuo.

CAPÍTULO 8

Anualidades y Seguros de Vida en tiempo continuo

8.1. Introducción

La metodología de tiempo continuo es una abstracción ya que no ocurre en la realidad, pero es una herramienta muy útil porque permite utilizar todos los recursos del cálculo integral y diferencial.

El concepto básico es la tasa de pago.

Definición 8.1.1. *Una función $b(t)$, positiva, continua por secciones en cualquier intervalo $[a, b]$, se denomina la "tasa de pagos" si el total pagado en el intervalo de tiempo $[0, t]$ está dado por $\int_0^t b(s)ds$.*

Por ejemplo, si la tasa de pago es constante, $b(t) \equiv C$, donde $C > 0$, como se tiene $\int_0^1 b(s)ds = C$, entonces el total pagado en 1 año es C. De manera similar, como

$\int_{1/12}^{2/12} b(s)da = C/12$, entonces el total pagado entre el mes 1 y el mes 2, es $C/12$.

El valor presente del total de pagos en $[0, t]$, utilizando una tasa continua δ, está dado por

$$B(t) = \int_0^t e^{\delta s} b(s) ds. \tag{8.1}$$

El objetivo de este capítulo es desarrollar las anualidades de vida que pagan a una tasa $b(t)$, a una vida (x), durante un intervalo $[0, t]$ ó vitalicia.

A continuación se desarrolla el caso general y se presentan varios casos concretos de anualidades, equivalentes a las anualidades del Capítulo 7.

8.2. Anualidades continuas con pagos variables

Suponga una renta vitalicia para la vida (x), que paga a una tasa continua $b(t)$, y se calcula con base en una tasa de interés continua δ. Para obtener el costo actuarial se define el flujo de caja para los saldos $F(t)$ de una cuenta de la cual se realizan los pagos. Asumiendo $F(0) > 0$ el capital inicial, igual al costo de la renta, y $F(t)$ función derivable, se asume la siguiente ecuación diferencial

$$F'(t) = \delta F(t) - b(t) I(T(x) > t), \tag{8.2}$$

con condición de cierre en $t = T(x)$

$$\mathbb{E}(e^{-T(x)} F(T(x)) = 0. \tag{8.3}$$

La solución de (8.2) es

$$F(t) = e^{\delta t} \left(F(0) - \int_0^t e^{-\delta s} b(s) I(T(x) > s) ds \right). \tag{8.4}$$

Aplicando la condición de cierre (8.3) se obtiene

$$F(0) = \mathbb{E} \left(\int_0^{T(x)} e^{-\delta s} b(s) ds \right)$$

Nótese que el valor esperado anterior es $F(0) = \mathbb{E}(B(T(x)))$. Esta esperanza se desarrolla como

Proposición 8.2.1. *La prima neta de una anualidad de vida con pagos a la tasa* $b(t)$ *está dada por* $F(0) = \mathbb{E}(B(T(x)))$ *con*

$$F(0) = \int_0^{\omega-x} b(s)e^{-\delta s}{}_s p_x ds. \tag{8.5}$$

Demostración. El valor presente de los pagos es la variable aleatoria $B(T(x))$, y la prima neta es

$$\mathbb{E}(B(T(x))) = \int_0^{\omega-x} B(t)_t p_x \mu_{x+t} dt \tag{8.6}$$

Utilizando herramientas de cálculo integral se puede desarrollar esta prima neta

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(B(T(x))) &= \int_0^{\omega-x} B(t)_t p_x \mu_{x+t} dt \\
&= \int_0^{\omega-x} \left(\int_0^t b(s)e^{-\delta s} ds \right) {}_t p_x \mu_{x+t} dt \\
&= \int_0^{\omega-x} \int_s^{\omega-x} b(s)e^{-\delta s}{}_t p_x \mu_{x+t} dt ds \\
&= \int_0^{\omega-x} b(s)e^{-\delta s} \left(\int_s^{\omega-x} {}_t p_x \mu_{x+t} dt \right) ds \\
&= \int_0^{\omega-x} b(s)e^{-\delta s} \left(\int_s^{\omega-x} -\frac{d}{dt}{}_t p_x dt \right) ds \\
&= \int_0^{\omega-x} b(s)e^{-\delta s}{}_s p_x ds
\end{aligned}$$

□

Ejercicio 8.2.1. *Utilizar la regla de la cadena* $\int u dv = uv - \int v du$ *para obtener otro desarrollo de* $\int_0^{\omega-x} B(s)_s p_x \mu_{x+s} ds$.

8.3. Renta vitalicia continua

Definición 8.3.1. *Una renta vitalicia en tiempo continuo que paga a una tasa* $b(t) \equiv 1$*, a una vida (x) mientras sobreviva, financiada a una tasa continua* δ*, tiene un valor presente dado por la variable aleatoria*

$$B(T(x)) = \bar{a}_{\overline{T(x)|}} = \int_0^{T(x)} e^{-\delta t} dt = \frac{1 - e^{-\delta T(x)}}{\delta}. \tag{8.7}$$

Y prima neta dada por

$$\bar{a}_x = \int_0^{\omega - x} e^{-\delta s} {}_s p_x ds. \tag{8.8}$$

El siguiente programa en R calcula esta prima neta.

```
#------calculo anualidad de vida entera continua
cax = function(s,g,C,x,delta){
integrand <- function(u) {exp(-u*delta)*tpx(s,g,C,x,u)}
a=integrate(integrand, lower = 0, upper = 110-x)$value
return(a)}
```

Ejercicio 8.3.1. *Calcular la prima neta para una renta vitalicia con pago continuo de tal forma que al final del primer año se haya recibido un total equivalente a 12 mesadas de 2 mill cada una, para una vida de edad x=57, mujer, utilizando el modelo Gompertz-Makeham ajustado para la Tabla de Mortalidad Bégica 1995 mujeres, y utilizando una tasa de financiación* $i = 0.08$.

```
#------solucion
(c(s1,g1,c1))
[1] 0.9998778 0.9998235 1.1053084
delta = log(1+0.08)
(costo = 12*2*cax(s1,g1,c1,57,delta))
[1] 250.7694
```

Ejercicio 8.3.2. *Compare el resultado para la misma vida, pero utilizando una mortalidad sub estándar, multiplicativa, dada en (2.36), pag. 34, con factor $\kappa = \theta(x)$, donde la función $\theta(x) > 1$ está dada para cada edad $x \geq 20$ por la fórmula*

$$\theta(x) = \left(1 + \frac{11.68784}{x - 17.58258}\right)^{1.2}, \tag{8.9}$$

$$\mu^s_{x+t} = \theta(x)\mu_{x+t}, \kappa > 0, \tag{8.10}$$

```
#------solucion
ddx = function(x){(1+11.68784/(x-17.58258))^(1.2)}

caxs = function(s,g,C,x,delta){
integrand <- function(u) {exp(-u*delta)*tpx(s,g,C,x,u)^ddx(x)}
a=integrate(integrand, lower = 0, upper = 110-x)$value
return(a)}
(costo = 12*2*caxs(s1,g1,c1,57,delta))
[1] 239.6051
```

Aproximaciones

La anualidad de vida $\bar{a}_x$ tiene relación con la anualidad $\ddot{a}_x^{(m)}$. Para esta última el valor presente y prima neta están dadas por (ver (5.41) y (5.40) en pag. 168):

$$\ddot{a}_x^{(m)} = \mathbb{E}(\ddot{a}^{(m)}_{\overline{K_m(x)+1/m}|}) = \mathbb{E}\left(\frac{1 - v^{K_m(x)+1/m}}{d^{(m)}}\right).$$

donde $K_m(x) = \frac{1}{m}\lfloor mT(x)\rfloor$ y $d^{(m)} = m(1 - v^{1/m})$. Se tienen los siguientes límites.

Proposición 8.3.1.

$$\lim_{m\to\infty} d^{(m)} = \delta, \tag{8.11a}$$

$$\lim_{m\to\infty} K_m(x) = T(x), \tag{8.11b}$$

$$\lim_{m\to\infty} \ddot{a}_x^{(m)} = \bar{a}_x. \tag{8.11c}$$

con $\delta = \log(1+i)$, $v = 1/(1+i)$.

Demostración. Asumiendo que se permite el intercambio entre límite y esperanza, se tiene

$$\begin{aligned}\lim_{m\to\infty} \ddot{a}_x^{(m)} &= \lim_{m\to\infty} \mathbb{E}\left(\frac{1-v^{K_m(x)+1/m}}{d^{(m)}}\right)\\ &= \mathbb{E}\left(\lim_{m\to\infty} \frac{1-v^{K_m(x)+1/m}}{d^{(m)}}\right)\\ &= \mathbb{E}\left(\frac{1-v^{T(x)}}{\delta}\right) = \mathbb{E}\left(\int_0^{T(x)} v^t dt\right) = \bar{a}_x.\end{aligned}$$

□

Una consecuencia de este resultado es que se pueden utilizar las anualidades en tiempo continuo para aproximar las anualidades con m pagos en el año, colocando $\ddot{a}_x^{(m)} \approx \bar{a}_x$. Se obtiene una mejor aproximación con la fórmula

$$\ddot{a}_x^{(m)} \approx \frac{\delta}{d^{(m)}}\bar{a}_x \tag{8.12}$$

8.4. Anualidad continua temporal a n años

El caso de una anualidad continua temporal a n años tiene valor presente

$$Y = \bar{a}_{\overline{T(x)\wedge n}|} = \bar{a}_{\overline{T(x)}|} I(T(x) \leq n) + \bar{a}_{\overline{n}|} I(T(x) > n), \tag{8.13}$$

y la prima neta, su valor esperado

$$\bar{a}_{x:\overline{n}|} = \mathbb{E}(\bar{a}_{\overline{T(x)\wedge n}|}) = \int_0^n \bar{a}_{\overline{t}|}\, {}_tp_x \mu_{x+t} dt + \bar{a}_{\overline{n}|}\, {}_np_x \tag{8.14}$$

$$= \int_0^n e^{-\delta t}\, {}_tp_x dt \tag{8.15}$$

Ejercicio 8.4.1. *Establecer la igualdad entre (8.14) y (8.15) utilizando integración por partes.*

El cálculo de $\bar{a}_{x:\overline{n}|}$ con base en la ley Gompertz-Makeham se puede realizar con R con las instrucciones siguientes.

```
# anualidad de vida  continua temporal
caxn = function(s,g,C,x,n,delta){
integrand <- function(u) {exp(-delta*u)*tpx(s,g,C,x,u)}
a=integrate(integrand, lower = 0, upper = n)$value
return(a)}
```

La relación entre $\bar{a}_{x:\overline{n}|}$ y $\ddot{a}^{(m)}_{x:\overline{n}|}$, la correspondiente anualidad anticipada temporal con m pagos al año, que es la esperanza del valor esperado en (**??**):

$$\begin{aligned}
Y &= \ddot{a}^{(m)}_{\overline{K(x)+S_m(x)}|} I(K(x) \leq n-1) + \ddot{a}^{(m)}_{\overline{n}|} I(K(x) \geq n) \\
&= \ddot{a}^{(m)}_{\overline{(K(x)+S_m(x))\wedge n}|}
\end{aligned}$$

se establece a partir de $\lim_{m\to\infty} K(x) + S_m(x) = T(x)$

$$\begin{aligned}
\lim_{m\to\infty} \ddot{a}^{(m)}_{x:\overline{n}|} &= \lim_{m\to\infty} \mathbb{E}\left(\ddot{a}^{(m)}_{\overline{(K(x)+S_m(x))\wedge n}|}\right) \\
&= \mathbb{E}\left(\lim_{m\to\infty} \ddot{a}^{(m)}_{\overline{(K(x)+S_m(x))\wedge n}|}\right) \\
&= \mathbb{E}\left(\bar{a}_{\overline{T(x)\wedge n}|}\right) = \bar{a}_{x:\overline{n}|}.
\end{aligned}$$

Entonces se puede usar la aproximación

$$\ddot{a}^{(m)}_{x:\overline{n}|} \approx \frac{\delta}{d^{(m)}} \bar{a}_{x:\overline{n}|}. \tag{8.16}$$

8.5. Anualidad de vida continua geométrica

Retomando la anualidad de vida con m pagos anticipados al año, con q incrementos en el año a la tasa i_q, efectiva anual, con pagos iniciales de $1/m$, con prima neta dada por (5.54), pag. 172,

$$(G^{(q)}\ddot{a})_x^{(m)} := \frac{1}{m} \sum_{k=0}^{m(\omega-x)-1} (1+i)^{-\frac{k}{m}} (1+i_q)^{\frac{1}{q}\lfloor \frac{qk}{m} \rfloor} {}_{\frac{k}{m}}p_x,$$

se define la anualidad continua correspondiente tomando límite cuando $m \to \infty$ en la expresión anterior. El límite existe porque esta expresión es una suma de Riemann de la siguiente integral.

$$\lim_{m\to\infty} (G^{(q)}\ddot{a})_x^{(m)} = \int_0^{\omega-x} v^t (1+i_q)^{\frac{1}{q}\lfloor qt \rfloor} {}_tp_x dt. \tag{8.17}$$

Con este resultado se hace la siguiente definición.

Definición 8.5.1. *Una anualidad de vida continua para la vida (x), creciente geométricamente, a una tasa i_q, q veces en el año, tiene una tasa de pago*

$$b(t) = (1+i_q)^{\frac{1}{q}\lfloor qt \rfloor}, \tag{8.18}$$

tiene valor presente

$$B(t) = \int_0^{T(x)} v^t (1+i_q)^{\frac{1}{q}\lfloor qt \rfloor} dt, \tag{8.19}$$

tiene prima neta dada por

$$(G^{(q)}\bar{a})_x = \int_0^{\omega-x} v^t (1+i_q)^{\frac{1}{q}\lfloor qt \rfloor} {}_tp_x dt. \tag{8.20}$$

La versión temporal a n años tiene una prima neta

$$(G^{(q)}\bar{a})_{x:\overline{n}|} = \int_0^{n} v^t (1+i_q)^{\frac{1}{q}\lfloor qt \rfloor} {}_tp_x dt. \tag{8.21}$$

Ejemplo 8.5.1. *Una versión de la anualidad $(G^{(q)}\bar{a})_x$ es con $q = 1$, lo que significa que los incrementos ocurren cada año a la tasa i_q. Los pagos incian el primer año con una tasa de 1, de tal forma que la tasa de pago es*

$$b(t) = (1 + i_q)^{\lfloor t \rfloor},$$

tiene prima neta dada por

$$(G\bar{a})_x = \int_0^{\omega - x} (1 + i_q)^{\lfloor t \rfloor} v^t {}_tp_x dt. \tag{8.22}$$

Ejemplo 8.5.2. *Una anualidad de vida continua geométrica para la vida (x), con tasa de pago $b(t) = (1 + i_q)^t$, donde $i_q < i$ es una tasa efectiva anual, representativa del costo de vida, tiene valor presente de pagos en $[0, t]$ dado por*

$$B(t) = (\bar{G}\bar{a})_{\overline{t}|} = \int_0^t (1 + i_q)^s v^s ds \tag{8.23}$$

y valor presente dado por

$$B(T(x)) = (\bar{G}\bar{a})_{\overline{T(x)}|}. \tag{8.24}$$

Nótese que si se define $i_h = (1 + i)/(1 + i_q) - 1$, entonces

$$(1 + i_q)^s v^s = v_h^s,$$

con $v_h = 1/(1+i_h)$. La correspondiente prima neta el es valor esperado $\mathbb{E}(B(T(x)))$, que, aplicando la técnica de integración por partes, tiene expresión

$$(\bar{G}\bar{a})_x = \int_0^{\omega - x} v_h^t {}_tp_x dt = \bar{a}_{x|i_h}. \tag{8.25}$$

Nótese también que se cumple el siguiente límite.

$$\lim_{q \to \infty} (G^{(q)}\bar{a})_x := (\bar{G}\bar{a})_x$$

8.6. Anualidades de vida con pagos crecientes linealmente

Retomando la anualidad de vida con m pagos anticipados al año, con q incrementos en el año de $1/mq$ cada uno, con pagos iniciales de $1/m$, con prima neta dada por (5.61), pag. 175,

$$(I^{(q)}\ddot{a})_x^{(m)} = \frac{1}{mq}\sum_{k=0}^{m(\omega-x)-1}(1+\lfloor\frac{qk}{m}\rfloor)v^{\frac{k}{m}}\,{}_{\frac{k}{m}}p_x,$$

se define la anualidad continua correspondiente tomando límite cuando $m\to\infty$ en la expresión anterior. El límite existe porque esta expresión es una suma de Riemman de la siguiente integral.

$$\lim_{m\to\infty}(I^{(q)}\ddot{a})_x^{(m)} = \frac{1}{q}\int_0^{\omega-x} v^t(1+\lfloor qt\rfloor)\,{}_tp_x dt. \tag{8.26}$$

Con base en este resultado se hace la siguiente definición.

Definición 8.6.1. *Una anualidad de vida continua para la vida (x), creciente linealmente, con tasa de pago $b(t) = (1+\lfloor qt\rfloor)$, tiene valor presente de pagos en $[0,t]$ dado por*

$$B(t) = (I^{(q)}\bar{a})_{\overline{t|}} = \frac{1}{q}\int_0^t(1+\lfloor qs\rfloor)v^s ds \tag{8.27}$$

y prima neta dada por el valor esperado $\mathbb{E}(B(T(x)))$, igual a

$$(I^{(q)}\bar{a})_x = \frac{1}{q}\int_0^{\omega-x} v^t(1+\lfloor qt\rfloor)\,{}_tp_x dt \tag{8.28}$$

Nótese que $1+\lfloor qt\rfloor = \lceil qt\rceil$. Un programa R para evaluar esta prima neta es

```
Iqabcx = function(s1,g1,c1,q,x,i){
integrand <- function(u){
ceiling(q*u)*(1+i)^(-u)*tpx(s1,g1,c1,x,u)}
aax=integrate(integrand, lower = 0,
upper = 110-x, subdivisions = 200)
return(aax$value)}
```

Se puede establecer una aproximación por $(I^{(q)}\bar{a})_x$ de la correspondiente anualidad anticipada temporal con m pagos al año, $(I^{(q)}\ddot{a})_x^{(m)}$, dada por

$$(I^{(q)}\ddot{a})_x^{(m)} \approx \frac{\delta}{d^{(m)}}(I^{(q)}\bar{a})_x. \tag{8.29}$$

La correspondiente anualidad temporal a n años tiene prima neta dada por

$$(I^{(q)}\bar{a})_{x:\overline{n}|} = \frac{1}{q}\int_0^n v^t(1+\lfloor qt\rfloor)_t p_x dt \tag{8.30}$$

Y se puede evaluar con el programa R siguiente

```
Iqabcx = function(s1,g1,c1,q,,x,i){
integrand <- function(u){
ceiling(q*u)*(1+i)^(-u)*tpx(s1,g1,c1,x,u)}
aax=integrate(integrand, lower = 0,
upper = n, subdivisions = 200)
return(aax$value)}
```

Ejemplo 8.6.1. *Una versión de (8.28) es con $q = 1$, lo cual implica que los pagos se incrementan pero solamente al final de cada año, en una unidad, de tal forma que la tasa de pago es $b(t) = 1 + \lfloor t\rfloor = \lceil t\rceil$, y tiene valor prima neta dada por*

$$(I\bar{a})_x = \int_0^{\omega-x} \lceil t\rceil v^t {}_t p_x dt. \tag{8.31}$$

La anualidad temporal a n años correspondiente se define como

$$(I\bar{a})_{x:\overline{n}|} = \int_0^{n} \lceil t\rceil v^t {}_t p_x dt. \tag{8.32}$$

Ejemplo 8.6.2. *Otra versión de (8.28) se obtiene tomando $q \to \infty$. Usando*

$$\lim_{q\to\infty}\frac{1+\lfloor qt\rfloor}{q} = t$$

se obtiene el límite

$$(\bar{I}\bar{a})_x := \lim_{q\to\infty}\frac{1}{q}\int_0^{\omega-x} v^t(1+\lfloor qt\rfloor)_t p_x dt$$

$$= \int_0^{\omega-x} tv^t {}_tp_x dt \tag{8.33}$$

Nótese la convergencia siguiente:

$$(I^{(m)}\ddot{a})_x^{(m)} = \frac{1}{m} \sum_{k=0}^{m(\omega-x)-1} \frac{1+k}{m} v^{\frac{k}{m}} {}_{\frac{k}{m}}p_x \to (\bar{I}\bar{a})_x$$

cuando $m \to \infty$. También se tiene la aproximación

$$(I^{(m)}\ddot{a})_x^{(m)} \approx \frac{\delta}{d^{(m)}} (\bar{I}\bar{a})_x. \tag{8.34}$$

La anualidad temporal a n años correspondiente se define como

$$(\bar{I}\bar{a})_{x:\overline{n}|} = \int_0^n tv^t {}_tp_x dt. \tag{8.35}$$

Ejemplo 8.6.3. *Las anualidades decrecientes linealmente, temporales a n años, correspondientes a los dos Ejemplos anteriores se definen como*

$$(\bar{D}\bar{a})_{x:\overline{n}|} = \int_0^n (n-t) v^t {}_tp_x dt. \tag{8.36}$$

$$(D\bar{a})_{x:\overline{n}|} = \int_0^n (n-\lceil t \rceil) v^t {}_tp_x dt. \tag{8.37}$$

8.6.1. Anualidad de vida continua lineal

Definición 8.6.2. *Una anualidad de vida continua lineal para la vida (x), con tasa de pago $b(t) = C + \rho\lfloor qt \rfloor$, tiene una prima neta dada por*

$$(L^{(q)}\bar{a})_x = (C-\rho)\bar{a}_{x:\overline{n}|} + \rho q (I^{(q)}\bar{a})_x \tag{8.38}$$

Esta anualidad empieza pagando a la tasa C durante el período $[0, 1/q]$. Después incrementa en la tasa ρ, en el siguiente período, y así sucesivamente, para completar q

incrementos en el año. La correspondiente anualidad temporal a n años tiene prima dada por

$$(L^{(q)}\bar{a})_{x:\overline{n}|} = (C-\rho)\bar{a}_{x:\overline{n}|} + \rho q(I^{(q)}\bar{a})_{x:\overline{n}|} \tag{8.39}$$

Ejemplo 8.6.4. *Para una vida (48), utilizando la ley Gompertz-Makeham con base en la experiencia ISS 05-08, una anualidad de vida continua, que paga inicialmente a una tasa $C = 2$ mill, y se incrementa en un $5\,\%$ cada semestre, financiada a una tasa efectiva anual de $7.0\,\%$, tiene prima neta por valor de $\$320'500.000$, calculada con las instrucciones en R siguientes.*

```
#----- vida entera lineal q períodos
pago = 2
q=2
rho = 0.05*pago
(ac48 = cax(s3,g3,c3,x,i))
(Iqabc48 =Iqabcx(s3,g3,c3,q,x,i))
(Lqabc48 = (pago-rho)*ac48+rho*q*Iqabc48)
320.4998
```

Ejemplo 8.6.5. *Una anualidad de vida continua lineal para la vida (x), con tasa de pago $b(t) = C + \rho t$, tiene prima neta*

$$(\bar{L}\bar{a})_x = \int_0^{\omega-x} (C+\rho t)v^t{}_tp_x dt. \tag{8.40}$$

Desarrollando, se obtiene

$$(\bar{L}\bar{a})_x = C\bar{a}_x + \rho(\bar{I}\bar{a})_x. \tag{8.41}$$

Ejemplo 8.6.6. *Otra versión de una anualidad continua lineal, con incrementos solamente al final de cada año, en una tasa ρ, se define reemplazando $q = 1$ en (8.38), de tal forma que la tasa de pago es $b(t) = C + \rho\lfloor t\rfloor$, tiene prima neta dada por*

$$(L\bar{a})_x = \int_0^{\omega-x} (C+\rho\lfloor t\rfloor)v^t{}_tp_x dt. \tag{8.42}$$

que se puede desarrollar de manera inmediata como

$$(L\bar{a})_x = (C-\rho)\bar{a}_x + \rho(I\bar{a})_x, \tag{8.43}$$

el pago durante el primer año sería a la tasa $C - \rho + \rho = C$.

8.6.2. Ejemplos de anualidad de vida continua con pagos variables

Ejemplo 8.6.7. *Retomando el Ejemplo 4.9.1, en la sección §4.9, pag. 136, con el objetivo de replantear la anualidad cierta como una anualidad de vida continua. El enunciado inicial era:*

Considere el siguiente diseño de una anualidad a $n = 10$ años, que consiste en dos sistemas agregados.

1. *Una anualidad lineal, con $m = 12$ pagos al año, vencidos, financiada a una tasa $i = 0.07$ efectiva anual. Con crecimiento de pagos cada semestre ($q = 2$), en una cantidad igual a $10.0\,\%$ de la primera cuota C.*
2. *Una anualidad geométrica, con $m = 1$ pago al año, vencido, financiada a la tasa $i = 0.07$ efectiva anual. Con crecimiento de pagos cada año ($q = 1$), a una tasa $i_q = 0.03$.*

El ejemplo consiste en replantear esta anualidad utilizando anualidades de vida continuas, asumiendo un valor de $C = 2$. Lo primero que se toma en cuenta es que el contrato se para una vida (x), y debe ser temporal a $n = 10$ años.

1. *Consideremos primero el caso 1 de la anualidad lineal. Con la fórmula para anualidades lineales con pagos creciente $q = 2$ veces en cada año, en (8.38), modificada para incluír la restricción a n años, la prima neta es*

$$(L^{(2)}\bar{a})_{x:\overline{n}|} = (C - \rho)\bar{a}_{x:\overline{n}|} + \rho(I^{(2)}\bar{a})_{x:\overline{n}|}$$

donde, usando (8.15)

$$\bar{a}_{x:\overline{n}|} = \int_0^n v^t\,{}_tp_x dt$$

y (8.32)

$$(I\bar{a})_{x:\overline{n}|} = \int_0^n \lceil t \rceil v^t\,{}_tp_x dt.$$

$$(L^{(2)}\bar{a})_{x:\overline{n}|} = C(\bar{a}_{x:\overline{n}|} + 0.1(I^{(2)}\bar{a})_{x:\overline{n}|})$$

En el archivo (Drpbox) `ejemplo.anualidades.continuas.r` *están los programas en R para evaluar esta anualidad con base en la ley de mortalidad de Gompertz-Makeham. (Solamente se requieren cambios mínimos!).*

2. *Para el caso 2, es una anualidad geométrica con* $q = 1$ *incrementos en el año. Se utiliza la anualidad geométrica con prima neta dada en (8.22)*

$$(G\bar{a})_{x:\overline{n}|} = \int_0^n (1+i_q)^{\lfloor t \rfloor} v^t {}_t p_x dt.$$

Por tanto, la respuesta final es que esta anualidad agregada (lineal + geométrica) tiene un costo dado por

$$\begin{aligned} C_p &= (L^{(2)}\bar{a})_{x:\overline{n}|} + C(G\bar{a})_{x:\overline{n}|} \\ &= C[\bar{a}_{x:\overline{10}|} + 0.1(I^{(2)}\bar{a})_{x:\overline{10}|} + (G\bar{a})_{x:\overline{10}|}]. \end{aligned}$$

Tabla resumen

	Símbolo	Tasa de Pago $b(t)$	Fórmula	Pag.
0.a	$\bar{a}_x$	1	$\int_0^{\omega-x} v^t {}_tp_x dt$	8.7
0.b	$\bar{a}_{x:\overline{n}\rceil}$	1	$\int_0^{n} v^t {}_tp_x dt$	8.15
1.a	$(I^{(q)}\bar{a})_x$	$(1+\lfloor qt \rfloor)$	$\frac{1}{q}\int_0^{\omega-x} v^t (1+\lfloor qt \rfloor) {}_tp_x dt$	8.28
1.b	$(I^{(q)}\bar{a})_{x:\overline{n}\rceil}$	$(1+\lfloor qt \rfloor)$	$\frac{1}{q}\int_0^{n} v^t (1+\lfloor qt \rfloor) {}_tp_x dt$	8.30
2.a	$(\bar{D}\bar{a})_{x:\overline{n}\rceil}$	$n-t$	$\int_0^{n} (n-t) v^t {}_tp_x dt$	8.36
2.b	$(D\bar{a})_{x:\overline{n}\rceil}$	$n-\lceil t \rceil$	$\int_0^{n} (n-\lceil t \rceil) v^t {}_tp_x dt$	8.37
3.a	$(L^{(q)}\bar{a})_x$	$C+\rho\lfloor qt \rfloor$	$(C-\rho)\bar{a}_x + \rho q (I^{(q)}\bar{a})_x$	8.38
3.b	$(L^{(q)}\bar{a})_{x:\overline{n}\rceil}$	$C+\rho\lfloor qt \rfloor$	$(C-\rho)\bar{a}_{x:\overline{n}\rceil} + \rho q (I^{(q)}\bar{a})_{x:\overline{n}\rceil}$	8.39
4.a	$(G^{(q)}\bar{a})_x$	$(1+i_q)^{\frac{1}{q}\lfloor qt \rfloor}$	$\int_0^{\omega-x} v^t (1+i_q)^{\frac{1}{q}\lfloor qt \rfloor} {}_tp_x dt$	8.20
4.b	$(G^{(q)}\bar{a})_{x:\overline{n}\rceil}$	$(1+i_q)^{\frac{1}{q}\lfloor qt \rfloor}$	$\int_0^{n} v^t (1+i_q)^{\frac{1}{q}\lfloor qt \rfloor} {}_tp_x dt$	8.21

Cuadro 8.1: Anualidades Continuas Integradas - Fórmulas

8.7. Reservas para anualidades de vida

La ecuación de flujo de caja para los saldos $F(t)$ para una renta vitalicia con tasa de pago $b(t)$ dada en (8.2)

$$F'(t) = \delta F(t) - b(t) I(T(x) > t),$$

no puede utilizarse con fines contables ya que son saldos contingentes, es decir, dependen de la duración de la vida de (x). En su lugar, se introduce otra cantidad denominada reserva retrospectiva

Definición 8.7.1. *Para la renta vitalicia con tasa de pago $b(t)$ se define la reserva retrospectiva en el tiempo t como la función V_t dada por*

$$V_t = \mathbb{E}(F(t) | T(x) > t). \tag{8.44}$$

Nótese que por Teorema de Probabilidad Total

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(F(t)) &= \mathbb{E}(F(t)|T(x) > t)_t p_x + \mathbb{E}(F(t)|T(x) \leq t)_t q_x \\ &= \mathbb{E}(F(t)|T(x) > t)_t p_x.\end{aligned}$$

Proposición 8.7.1. *Una expresión para la reserva V_t con las definiciones del inicio del capítulo, para una renta vitalicia para (x) con pagos a la tasa $b(t)$, y con una tasa continua δ, es*

$$V_t = \frac{\int_t^{\omega-x} e^{-\delta s} b(s)\ {}_s p_x ds}{e^{-\delta t}\ {}_t p_x}. \tag{8.45}$$

Y se cumple el siguiente resultado

Proposición 8.7.2. *La reserva V_t en (8.45) satisface la ecuación diferencial (de Thiele)*

$$V_t' = (\delta + \mu_{x+t}) V_t - b(t), \tag{8.46}$$

para $0 \leq t \leq \omega - x$.

Nótese que se debe cumplir la condición de cierre $V_{\omega-x} = 0$. Además $V_0 = F(0)$.

8.8. Seguros en tiempo continuo

El supuesto de la sección anterior fue el de pagar la indemnizaciónal final del año de fallecimiento, $K(x) + 1$. Se asume ahora que el seguro se paga en el instante de fallecer, o sea, en $T(x)$. Si el pago es 1 entonces el valor presente para un seguro de vida completo es $Z = v^{T(x)}$. La prima neta se denota por

$$\bar{A}_x = \int_0^{\omega-x} v^t\ {}_t p_x \mu_{x+t} dt \tag{8.47}$$

Si se asume el supuesto de linealidad, i.e, ${}_t q_x = t q_x, 0 \leq t \leq 1$, se probó que $T(x) = K(x) + S(x)$ con $S(x)$ y $K(x)$ independientes y $S(x) \sim U(0, 1)$. Luego, como $T(x) = K(x) + S(x) = K(x) + 1 - (1 - S(x))$ entonces

$$
\begin{aligned}
\bar{A}_x &= \mathbb{E}(v^{T(x)}) = \mathbb{E}(v^{K(x)+1}v^{-(1-S(x))}) \\
&= A_x \mathbb{E}((1+i)^{1-S(x)}) = A_x \int_0^1 (1+i)^{1-u} du \\
&= A_x \int_0^1 v^{u-1} du = A_x \frac{1-v^{-1}}{\ln v} \\
&= \frac{i}{\delta} A_x
\end{aligned}
$$

luego

$$
\bar{A}_x = \frac{i}{\delta} A_x. \tag{8.48}
$$

Nota: Como $i > \delta = \log(1+i)$ entonces $\frac{i}{\delta} > 1$ por lo tanto $\bar{A}_x > A_x$. Como también $A_x^{(m)} \approx \frac{i}{i^{(m)}} A_x$ entonces $A_x^{(m)} \approx \frac{\delta}{i^{(m)}} \bar{A}_x$.

8.9. Seguro en tiempo continuo temporal y dotal a n años

El caso de un seguro temporal a n años es inmediato. Su prima neta es

$$
\bar{A}^1_{x:\overline{n}|} = \mathbb{E}(v^{T(x)} I(T(x) \leq n)) = \int_0^n v^t {}_tp_x \mu_{x+t} dt \tag{8.49}
$$

Utilizando la hipótesis de linealidad se puede obtener una relación con el temporal a n años

$$
A^1_{x:\overline{n}|} = \mathbb{E}(v^{K(x)+1} I(k(x) \leq n-1)) = \sum_{k=0}^{n-1} v^{k+1} {}_tp_x q_{x+k}
$$

Concretamente

$$
\begin{aligned}
\bar{A}^1_{x:\overline{n}|} &= \mathbb{E}(v^{T(x)} I(T(x) \leq n)) \\
&= \int_0^n v^t {}_tp_x \mu_{x+t} dt
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \mathbb{E}(v^{K(x)+1} I(K(x) \le n-1) v^{S(x)-1}) \\
&= \mathbb{E}(v^{K(x)+1} I(K(x) \le n-1)) \mathbb{E}(v^{S(x)-1}) \\
&= \frac{i}{\delta} A^1_{x:\overline{n}|}.
\end{aligned}
$$

$$\therefore \bar{A}^1_{x:\overline{n}|} = \frac{i}{\delta} A^1_{x:\overline{n}|}.$$

El dotal a n años, por definición, tiene prima

$$\bar{A}_{x:\overline{n}|} := \bar{A}^1_{x:\overline{n}|} + A_{x:\overline{n}|}^{\ \ 1} \tag{8.50}$$

luego, aplicando la fórmula de conversión

$$
\begin{aligned}
\bar{A}_{x:\overline{n}|} := \bar{A}^1_{x:\overline{n}|} + A_{x:\overline{n}|}^{\ \ 1} &= \frac{i}{\delta} A^1_{x:\overline{n}|} + A_{x:\overline{n}|}^{\ \ 1} \\
&= A_{x:\overline{n}|} + \left(\frac{i}{\delta} - 1\right) A^1_{x:\overline{n}|}.
\end{aligned}
$$

Ejemplo 8.9.1. *Calcule la prima neta para un seguro de vida entero, para (38), y un temporal a 15 años, por valor de 100 mill con $i = 0.04$, pagable al momento de fallecer, con ley De Moivre.*

Solución. Podemos usar $\bar{A}_{38} = \int_0^\infty v^t {}_tp_x \mu_{x+t} dt$, con ${}_tp_x = \frac{110-x-t}{110-x}$ y $\mu_{x+t} = -\frac{d}{dt} \ln\left({}_tp_x\right) = \frac{1}{110-x-t}$, ambas para $0 \le t \le 110-x = 72$. Entonces, utilizando $\int a^{-x} dx = \frac{-a^{-x}}{\ln a}$, $a > 1$,

$$
\begin{aligned}
\bar{A}_{38} &= \frac{1}{72} \int_0^{72} 1.04^{-t} dt \\
&= \frac{1}{72} \left. \frac{-1.04^{-t}}{\ln(1.04)} \right|_0^{72} \\
&= \frac{1}{72} \left(\frac{1 - 1.04^{-72}}{\ln(1.04)} \right) = 0.333,
\end{aligned}
$$

Indicando por DM = Ley DeMoivre, y GM = Ley Gompertz-Makeham, se tiene

$$P_{DM} = 100\, mill \times \bar{A}_{38} = 333'000.000$$

$$P_{GM} = 100\, mill \times \bar{A}_{38} = 100 \times 10^6 \times 0.3856235 = 385'632.350$$

Si se trata de un temporal a 15 años, se tiene

$$\begin{aligned}
\bar{A}^{\,1}_{38:\overline{15}|} &= \int_0^1 5v^t{}_tp_{38}\mu_{38+t}dt \\
&= \frac{1}{72}\int_0^{15} 1.3^{-t}dt = \frac{1}{72}\frac{1-1.3^{-15}}{\ln 1.3} = 0.0519032 \\
\therefore\;\; P &= 100 \times 10^6 \times 0.0519032 = \$519'032.000.
\end{aligned}$$

Es inmediato comprobar que $\bar{A}^{\,1}_{38:\overline{15}|} = \frac{i}{\delta}A^{\,1}_{38:\overline{15}|}$ con $A^{\,1}_{38:\overline{15}|} = 0.04539182$

8.10. Seguro en tiempo continuo con pago general

Si $c(t)$ de el valor a pagar en caso de fallecimiento al tiempo t, entonces el valor presente de el seguro con valor augurado variable es

$$Z = c(T(x))v^{T(x)} \tag{8.51}$$

y su prima neta es

$$\mathbb{E}(Z) = \int_0^{\infty} c(t)v^t{}_tp_x\mu_{x+t}dt \tag{8.52}$$

Algunos ejemplos de funciones $c(t)$ son los siguientes.

Definición 8.10.1. *El seguro creciente en una unidad cada año, pagable al momento de fallecer. Tal que el pago es 1 si fallece en el primer año, 2 si fallece en el segundo, etc, el modelo es entonces*

$$c(T(x)) = \lfloor T(x)\rfloor + 1 = \lceil T(x)\rceil. \tag{8.53}$$

Se pueden usar ambas al integrar funciones continuas. El valor presente es

$$Z = (\lfloor T(x)\rfloor + 1)v^{T(x)} = (K(x)+1)v^{T(x)} \tag{8.54}$$

y la prima neta es

$$(I\bar{A})_x = \mathbb{E}(Z) = \mathbb{E}((K(x)+1)v^{T(x)}) \tag{8.55}$$
$$= \mathbb{E}((K(x)+1)v^{K(x)+1})\mathbb{E}(v^{S(x)-1}) \tag{8.56}$$

Definición 8.10.2. *El seguro temporal a n años creciente anualmente en una unidad, pagable al momento de fallecer, tiene valor presente*

$$\begin{aligned} Z &= (\lfloor T(x) \rfloor + 1)v^{T(x)} I(T(x) \leq n) \\ &= (K(x)+1)v^{T(x)} I(K(x) \leq n-1), \end{aligned} \tag{8.57}$$

y prima neta

$$\begin{aligned} (I\bar{A})^1_{x:\overline{n}|} &= \mathbb{E}((K(x)+1)v^{T(x)} I(T(x) \leq n)) \\ &= \int_0^n (\lfloor t \rfloor + 1)v^t {}_tp_x \mu_{x+t} dt. \end{aligned} \tag{8.58}$$

Cálculo aproximado. Utilizando la hipótesis de linealidad tenemos que $T(x) = K(x) + S(x)$ con $K(x)$ y $S(x)$ independientes, $S(x) \sim U(0,1), v^{T(x)} = v^{K(x)+1}v^{S(x)-1}$

$$\begin{aligned} &(I\bar{A})^1_{x:\overline{n}|} = \mathbb{E}((K(x)+1)v^{T(x)} I(K(x) \leq n-1) \\ &= \mathbb{E}((K(x)+1)v^{K(x)+1} I(K(x) \leq n-1)v^{s-1}) \\ &= (IA)^1_{x:\overline{n}|}\mathbb{E}(v^{s-1}) \\ &\mathbb{E}(v^{s-1}) = \int_0^1 v^{t-1} dt = \frac{1}{v}\int_0^1 v^t dt \\ &= \frac{1}{v} \left.\frac{v^t}{\ln v}\right|_0^1 = \frac{1}{v}\left(\frac{v-1}{\ln v}\right) \\ &= \frac{i}{\ln(1+i)} = \frac{i}{\delta} \\ &\therefore (I\bar{A})^1_{x:\overline{n}|} = \frac{i}{\delta}(IA)^1_{x:\overline{n}|} \end{aligned}$$

Ejemplo 8.10.1. *Calcule* $(I\bar{A})^{\,1}_{38:\overline{15}|}$*, con* $i = 0.13$*.*

$$
\begin{aligned}
(I\bar{A})^{\,1}_{38:\overline{15|}} &= \int_0^{15} (\lfloor t \rfloor + 1) v^t{}_tp_{38}\mu_{38+t} dt \\
&= \frac{1}{72}\int_0^{15} (\lfloor t \rfloor + 1) 1.13^{-t} dt \\
&= \frac{1}{72}\sum_{j=1}^{15} j \int_{j-1}^{j} 1.13^{-t} dt \\
&= \frac{1}{72}\sum_{j=1}^{15} j \left(\frac{1.3^{-(j-1)} - 1.13^{-j}}{\ln{(1.13)}} \right) \\
&= \frac{1}{72\ln{(1.13)}}\sum_{j=1}^{15} j 1.13^{-j}(1.13-1) \\
&= \frac{0.13}{72\ln{(1.13)}}\sum_{j=1}^{15} j v^j
\end{aligned}
$$

Identidad:

$$
\sum_{j=1}^{n} j v^j = \frac{a_{\overline{n|}} - n v^n}{i} \tag{8.59}
$$

luego

$$
\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{15} j v^j &= \frac{a_{\overline{15|}} - 15 v^{15}}{i} \\
&= \frac{1}{0.13}\left(\frac{1 - 1.13^{-15}}{0.13} - 15(1.13^{-15}) \right) \\
&= \frac{3.95562}{0.13}
\end{aligned}
$$

Luego

$$
(I\bar{A})^{\,1}_{38:\overline{15|}} = \frac{3.95562(0.13)}{\ln{(1.3)}72} = 0.2094
$$

Utilizando:

$$(I\bar{A})^{1}_{38:\overline{15|}} = \frac{i}{\delta}(IA)^{1}_{38:\overline{15|}}$$

pero

$$(IA)^{1}_{38:\overline{15|}} = \frac{1}{72}\sum_{k=0}^{14}(k+1)1.13^{-(k+1)} = \frac{1}{72}\sum_{k=1}^{15}kv^{-k} = \frac{1}{72}\left(\frac{3.95562}{0.13}\right)$$

$$\therefore \frac{i}{\delta}(IA)^{1}_{38:\overline{15|}} = \frac{0.13(3.95562)}{0.13(72)\ln(1.13)} = 0.2094$$

Ejercicio 8.10.1. *Encuentre la expresión para la prima neta de un seguro de vida temporal a n años, con pago el primer año de 1, el segundo $(1+i_q)$, el tercero $(1+i_q)^2$, etc, donde $i_q < i$,*

$$Z = (1+i_q)^{\lfloor T(x)\rfloor+1}v^{T(x)} = (1+i_q)^{K(x)+1}(+1)v^{T(x)} \tag{8.60}$$

y la prima neta es

$$(G\bar{A})_x = \mathbb{E}(Z) = \mathbb{E}((1+i_q)^{\lfloor T(x)\rfloor+1}v^{T(x)}) \tag{8.61}$$

Evalúe el seguro anterior con $i = 0.3, i_q = 0.1,\ x = 38,\ n = 15$, utilizando la ley de Moivre

Ejercicio 8.10.2. *Suponga que (x^a) es una vida a quien se le diagnostica arterioesclerosis. El riesgo de fallecer debido a una enfermedad del corazón es mayor que en una persona sana. Denote por $T(x^a)$ su vida residual y por $T(x)$ la de una persona de la misma edad cuyo estado es normal. Asuma que la fuerza de mortalidad de (x^a) se modela añadiendo a la fuerza de mortalidad una constante $k > 0$, es decir, $\forall t \geq 0$, $\mu^a_{x+t} = k + \mu_{x+t}$.*

1. *Encuentre ${}_tp^a_x$ si k=0.01.*
2. *Encuentre A^a_x y A_x si x=38, i=0.3 y c=0.01. En qué porcentaje se recarga la prima de una persona con arterioesclerosis [1] con respecto a la de una persona declarada normal?*

[1] La hipótesis expresada en este problema sobre una posible asociación entre la arterioesclerosis y la mortalidad no se basa en evidencia de estudios médicos

8.11. Problemas

1. Asuma una de las leyes de mortalidad: GM, Siler ó Makeham-Beard (MB) para los cálculos que siguen. Asuma una fuerza de mortalidad sub-estándar según el modelo multiplicativo para una vida (x) dada por

$$\mu^s_{x+t} = \theta(x)\mu_{x+t}, \tag{8.62}$$

donde la función $\theta(x) > 0$ está dada para cada edad $x \geq 20$ por la fórmula

$$\theta(x) = \left(1 + \frac{11.68784}{x - 17.58258}\right)^{1.2}. \tag{8.63}$$

Denote por $T(x^s)$ su vida media residual. Considere la fuerza de mortalidad estándar μ_{x+t} dada por una ley de mortalidad GM, Siler ó Makeham-Beard (MB). Asuma $x_1 = 30$, $x_2 = 40$ (el género según la ley escogida). Las tasas efectivas anuales son: la tasa técnica para anualidades: $i = 0.07$ y la tasa de inflación proyectada $i_q = 0.04$.

a) Considere la prima neta $(G^{(q)}\bar{a})_x$, dada en (8.20), pag. 268, asumiendo $q = 1$, para el pago de una renta vitalicia de 1 mill en el primer año, con incrementos anuales por inflación, dada por

$$(G^{(q)}\bar{a})_x = \int_0^{\omega-x} v^t(1+i_q)^{\frac{1}{q}\lfloor qt\rfloor} {}_tp_x dt.$$

En qué porcentaje se incrementa $(G^{(q)}\bar{a})_x$ si la tasa de inflación i_q pasa de 0.04 a 0.05?. Concretamente, calcule

$$\frac{(G^{(q)}\bar{a})_{x|0.05} - (G^{(q)}\bar{a})_{x|0.04}}{(G^{(q)}\bar{a})_{x|0.04}} \tag{8.64}$$

b) Calcule $(G^{(q)}\bar{a})_{x_1^s}$. Compruebe que es menor que $(G^{(q)}\bar{a})_{x_1}$.

c) Calcule $12\,\ddot{a}^{(12)}_{x_1}$, definida en (5.40), pag. 168, con alguna de las fórmulas dadas en esa sección. En qué porcentaje se incrementa $(G^{(q)}\bar{a})_{x_1}$ con respecto a ese valor? Es decir, qué recargo se requiere para garantizar la corrección por inflación en una renta vitalicia?.

2. Asuma una de las leyes de mortalidad: GM, Siler ó Makeham-Beard (MB) para los cálculos que siguen. Defina las probabilidades de que al menos una de tres vidas $(x_1), (x_2), (x_3)$ esté con vida después de t años, como

$$ {}_tp_{\overline{x_1,x_2,x_3}} = \mathbb{P}((T(x_1) > t) \cup (T(x_2) > t) \cup (T(x_3) > t)). \quad (8.65) $$

Las variables $T(x_1), T(x_2), T(x_3)$ se asumen independientes. Utilice la tasa técnica para anualidades $i = 0.06$. Asuma $x_1 = 20$, $x_2 = 50$, $x_3 = 60$, $n = 30$.

a) Defina una anualidad continua con valor presente

$$ \bar{a}_{\overline{x_1,x_2,x_3}} = \int_0 v^t {}_tp_{\overline{x_1,x_2,x_3}} dt \quad (8.66) $$

Calcule esta anualidad con la ley de mortalidad asumida. Interprete.

b) La anualidad con valor presente siguiente se conoce como "ingreso familiar" (family income), porque al fallecimiento de x_1 provee un ingreso en la forma de una anualidad continua de una unidad, por un período hasta n años, contados desde el inicio del contrato. Tiene valor presente dado por la variable aleatoria

$$ Z = v^{T(x_1)} \bar{a}_{\overline{n-T(x_1)}|} I(T(x_1) \leq n) \quad (8.67) $$

Encuentre la prima neta $\mathbb{E}(Z)$.

c) Calcule la prima neta $\bar{a}_{x_1}$. Compárela con la anterior y explique la diferencia en valores.

3. Defina las probabilidades de que al menos una de las dos vidas $(x_1), (x_2)$ esté con vida después de t años, como

$$ \begin{aligned} {}_tp_{\overline{x_1,x_2}} &= \mathbb{P}((T(x_1) > t) \cup (T(x_2) > t)), & (8.68) \\ &= {}_tp_{x_1} + {}_tp_{x_2} - {}_tp_{x_1} {}_tp_{x_2}. & (8.69) \end{aligned} $$

Asuma una fuerza de mortalidad sub-estándar según el modelo multiplicativo para una vida (x) dada por

$$ \mu^s_{x+t} = \theta(x+t)\mu_{x+t}, \quad (8.70) $$

donde la función $\theta(x) > 0$ está dada para cada edad $x \geq 20$ por la fórmula

$$\theta(x) = \left(1 + \frac{11.68784}{x - 17.58258}\right)^{1.2}. \quad (8.71)$$

Denote por $T(x^s)$ su vida media residual. Considere la fuerza de mortalidad estándar μ_{x+t} dada por una ley de mortalidad GM, Siler ó Makeham-Beard (MB). Asuma $x_1 = 40$, $x_2 = 50$, $n = 20$. Utilice una tasa técnica para anualidades de $i = 0.06$.

a) Defina una anualidad continua con valor presente

$$\bar{a}_{\overline{x_1,x_2}} = \int_0 v^t {}_tp_{\overline{x_1,x_2}} dt \quad (8.72)$$

Interprete este valor. Evalúe esta anualidad con la ley de mortalidad asumida.

b) Encuentre $\bar{a}_{\overline{x_1,x_2^s}}$. Interprete y compare con la anterior.

c) Calcule el valor presente $\ddot{a}^{(m)}_{\overline{n}|} = \frac{1-v^n}{d^{(m)}}$, con $m = 12$, definido en (4.26), pag. 113. Se propone otra fórmula para calcularlo, ver Shiu [1982], utilizando integración

$$\ddot{a}^{(m)}_{\overline{n}|} = \int_0^n v^{n-\frac{1}{m}\lceil mt \rceil} dt \quad (8.73)$$

Compruebe si es válida esta alternativa.

4. Considere una fuerza de mortalidad estándar μ_{x+t} dada por una de las leyes de mortalidad: GM, Siler ó Makeham-Beard (MB). Asuma una fuerza de mortalidad sub-estándar aditiva, tal que: $\mu^s_{x+t} = 0.02 + \mu_{x+t}$, para una vida (x) que se le diagnostica una insuficiencia renal. Denote por $T(x^s)$ su vida media residual.

   Defina las probabilidades de que al menos una de tres vidas $(x_1), (x_2), (x_3)$ esté con vida después de t años, como

$$ {}_tp_{\overline{x_1,x_2,x_3}} = \mathbb{P}((T(x_1) > t) \cup (T(x_2) > t) \cup (T(x_x) > t)). \quad (8.74)$$

   para $x_1 = 40$, $x_2 = 50$, $x_3 = 60$, $t = 10$, utilizando una de las leyes de mortalidad. Utilice una tasa técnica para anualidades de $i = 0.07$.

Defina una anualidad continua con valor presente

$$\bar{a}_{\overline{x_1,x_2,x_3}} = \int_0 v^t {}_tp_{\overline{x_1,x_2,x_3}} dt \tag{8.75}$$

a) Calcule $\bar{a}_{\overline{x_1,x_2,x_3}}$. Interprete.

b) Calcule $\bar{a}_{\overline{x_1^s,x_2,x_3}}$. Interprete.

c) Calcule el riesgo de extra mortalidad definido en (5.17), pag. 160, como la probabilidad $\mathbb{P}(\ddot{a}_{x_1} < \ddot{a}_{\overline{(K(x_1)+1)}|})$.

5. Asuma una fuerza de mortalidad sub-estándar aditiva, tal que: $\mu^s_{x+t} = k + \mu_{x+t}, k > 0$, para una vida (x) que se le diagnostica una insuficiencia renal. Denote por $T(x^s)$ su vida media residual.

   Considere la fuerza de mortalidad estándar μ_{x+t} dada por una de las leyes de mortalidad: GM, Siler ó Makeham-Beard (MB).

   Defina las probabilidades de que al menos una de las dos vidas (x_1), (x_2) esté con vida después de t años, como

$$\begin{aligned} {}_tp_{\overline{x_1,x_2}} &= \mathbb{P}((T(x_1) > t) \cup (T(x_2) > t)), \qquad (8.76) \\ &= {}_tp_x + {}_tp_y - {}_tp_x {}_tp_y. \qquad (8.77) \end{aligned}$$

   Suponga $x_1 = 56, x_2 = 40, t = 10,\ k = 0.01$. Utilice una tasa técnica para anualidades de $i = 0.06$.

   a) Defina una anualidad continua con valor presente

$$\bar{a}_{\overline{x_1,x_2}} = \int_0 v^t {}_tp_{\overline{x_1,x_2}} dt \tag{8.78}$$

   Interprete este valor. Evalúe esta anualidad con la ley de mortalidad asumida.

   b) Encuentre $\bar{a}_{\overline{x_1,x_2^s}}$. Interprete y compare con la anterior.

   c) Calcule el valor presente $\ddot{a}^{(m)}_{x_1}$, con $m = 12$, definido en (5.41), pag. 168. Se propone otra fórmula para calcularlo, ver Shiu [1982], utilizando integración

$$\ddot{a}^{(m)}_{x_1} = \int_0^{\omega - x_1} v^{\frac{1}{m}\lfloor mt \rfloor} {}_{\frac{1}{m}\lfloor mt \rfloor}p_{x_1} dt \tag{8.79}$$

   Compruebe si es válida esta alternativa.

6. Asuma una fuerza de mortalidad sub-estándar según el modelo multiplicativo para una vida (x) que se le diagnostica cáncer de próstata

$$\mu^s_{x+t} = \theta(x+t)\mu_{x+t}, \tag{8.80}$$

donde la función $\theta(x) > 0$ está dada para cada edad $x \geq 60$ por la función R

```
theta = function(x){
a0 = 81.67603376; a1 = -2.55346589 ;
a2 = 0.02687182; a3 =  -0.00009401;
a0+a1*x+a2*x^2+a3*x^3}
```

Denote por $T(x^s)$ su vida media residual. Considere la fuerza de mortalidad estándar μ_{x+t} dada por una ley de mortalidad GM, Siler ó Makeham-Beard (MB). Utilice una tasa técnica para anualidades de $i = 0.07$, y una tasa de inflación $i_q = 0.04$. Use $x_1 = 65$.

a) Calcule el valor presente $\bar{a}_{x_1^s}$

b) Calcule $\left(G^{(q)}\bar{a}\right)_{x_1^s}$. En qué porcentaje se incrementa esta anualidad con relación a $\bar{a}_{x_1}$?. Es decir, que recargo representa incluír el costo de inflación en las anualidades?.

c) Calcule el valor presente $m\ddot{a}^{(m)}_{x_1}$, con $m = 12$, definido en (5.41), pag. 168. Se propone otra fórmula para calcularlo, ver Shiu [1982], utilizando integración

$$\ddot{a}^{(m)}_{x_1} = \int_0^{\omega - x_1} v^{\frac{1}{m}\lfloor mt \rfloor} {}_{\frac{1}{m}\lfloor mt \rfloor}p_{x_1} dt \tag{8.81}$$

Compruebe si es válida esta alternativa. Nota: en ${}_{\frac{1}{m}\lfloor mt \rfloor}p_{x_1}$ el término $\frac{1}{m}\lfloor mt \rfloor$ están en el sub-índice.

7. Suponga que (x) sufre de insuficiencia cardíaca (IC) y su fuerza de mortalidad se modela como una mortalidad multiplicativa sub-estándar, ${}_tp_{x^s} = e^{-kt}{}_tp_x$, con una mortalidad de base con la ley GM. Asuma: $k = 0.01$, $x = 56$ y ley GM para la tabla colombiana de mortalidad de los Asegurados $55/69$:

$$\mu_x = 0.0015 + 10^{-4.222 + 0.043^x}$$

$$_tp_x = s^t g^{c^x(c^t-1)}$$

con $s = 0.998501$,$g = 0.999394$, $c = 1.10407$.

Utilice la fórmula (2.76) para encontrar $\mathring{e}_{56}$, $\mathring{e}_{56^s}$, la esperanza de vida de (x) con IC. Y calcule el porcentaje en que se reduce la esperanza de vida en este caso: $\frac{\mathring{e}_{56}-\mathring{e}_{56^s}}{\mathring{e}_{56}}$.

8. En una población los fumadores (F) (más de una cajetilla al día) tienen una fuerza de mortalidad doble que la de los no fumadores (NF). Asuma que la fuerza de mortalidad de los NF es la GM.

   Suponga que (x) y (x^F) son dos vidas independientes e idénticas, la primera NF y la segunda F. Calcule la probabilidad de que la vida residual de (x^F) sea menor que la de (x).

9. Dado $_tp_x = \left(\frac{1+x}{1+x+t}\right)^3$, $t \geq 0$,

   a) Calcule $\mathring{e}_{41}$

   b) Asumiendo la hipótesis de linealidad (2.23), evalúe la probabilidad de que (41) sobreviva 6 meses.

10. Suponga m vidas todas de edad (x), con características vitales similares. Denote por $_tp\frac{[r]}{x(m)}$ la probabilidad de que exactamente r de las m sobrevivan t años. Es una probabilidad binomial. El número de ensayos es m. El “éxito” en cada ensayo es “sobrevivir t años”, luego la probabilidad de éxito es $_tp_x$. La probabilidad de r éxitos en m ensayos es:

$$_tp\frac{[r]}{x(m)} = \binom{m}{r}(\,_tp_x)^r(\,_tq_x)^{m-r}$$

   Se tiene un grupo de 30 personas de edad 25. Encuentre la probabilidad de que exactamente 26 sobrevivan 10 años utilizando una de las leyes de mortalidad.

11. En la Tabla siguiente 9.5 aparecen los parámetros Gompertz-Makeham de las Tablas de mortalidad y supervivencia para hombres y mujeres (1959-1965) Bélgica. Comparar las probabilidades siguientes con la base técnica Danesa en el Ejemplo2.6.1, utilizando las funciones en la librería R `eha`.

	1959-1965-H	1959-1965-M
s	0.9992580	0.9997898
g	0.9991090	0.0992390
c	1.0955560	1.0992390

Cuadro 8.2: Parámetros Gompertz-Makeham para Tablas de Vida 59-63 Bélgica, hombres y mujeres

12. Suponga que (x) es una vida con vida residual $T(x)$ y fuerza de mortalidad μ_{x+t}, dada por la Ley de DeMoivre. Considere un seguro de vida temporal a n años, **en tiempo continuo**. Encuentre una expresión para las siguientes cantidades.

    a) $\bar{A}\,^{1}_{x+t:\overline{n-t}|}$, $0 \leq t \leq n$.

    b) $\bar{a}_{x+t:\overline{n-t}|}$, $0 \leq t \leq n$.

    c) $\Pi = \bar{A}^{1}_{x:\overline{n}|}/\bar{a}_{x:\overline{n}|}$.

    d) Suponga $x = 35,\ k = 0.01,\ n = 30$, y una tasa continua $\delta = \log(1.06)$. Evalúe Π.

    e) Haga una gráfica de la reserva retrospectiva ${}_t\bar{V} = \bar{A}\,^{1}_{x+t:\overline{n-t}|} - \Pi\,\bar{a}_{x+t:\overline{n-t}|}$, $0 \leq t \leq n$. Comente sobre la forma de la misma.

CAPÍTULO 9

Seguros de Salud e Invalidez

9.1. Introducción

En este capítulo se consideran vidas (x) con mortalidad de acuerdo a una Tabla de Vida ó la ley de mortalidad, identificadas como válidas (como opuesto a inválidas), ó estados de vida saludable, sin enfermedades. El interés es considerar la contingencia de sufrir una enfermedad, con posibilidad de recuperación ó de caracter crónico ó permanente. Los seguros en estos casos garantizan el pago de una suma determinada, ó pagos de asistencia médica (enfermería y médico) durante un período temporal ó permanente.

En la literatura internacional se encuentran varias divisiones pero, al parecer, no habría una clasificación definitiva y las definiciones no son estándar.

Adicionalmente, el caso colombiano es más complejo, al estar divididos los servicios en públicos (POS, ARS) y privado (Medicina Prepagada).

Los seguros de salud se pueden dividir en

1. **Seguros de enfermedad**. Cubre consulta externa, diagnósticos, medicamentos, cirujías, hotelería hospitalaria.

2. **Seguros de discapacidad** por accidentes ó enfermedad, temporales ó permanentes. Cubre el ingreso que deja de percibir el asegurado. No aplicaría a personas jubiladas. En Colombia, el seguro de discapacidad temporal está cubierto por las Administradoras de riesgos laborales ARL. En el caso de discapacidad permanente se trata de una pensión de invalidez. En el caso de una persona jubilada que pierda su capacidad de movimientos y requiera asistencia de enfermería en su hogar, se trata de un seguro de cuidados de larga duración. En la literatura en inglés se denomina "income protection insurance", y también "'permanent health insurance".

3. **Seguros para enfermedades críticas** (dread illness), también denominadas ruinosas ó catastróficas (ERC), ó patologías de alto costo.

   Un seguro de enfermedad ruinosa ERC, provee un solo pago (indemnización) en el caso de que al asegurado de edad x se le diagnostique una enfermedad de alto costo (medicamentos, médicos, exámenes, etc.). Las enfermedades ERC se definen como aquellas que representan una alta complejidad técnica en su manejo, alto costo, baja ocurrencia y bajo "costo - efectividad" en su tratamiento (ver Nieto-Enciso [2005]). Los casos comprenden:

   - Enfermedad de Alzheimer.
   - Enfermedad de Parkinson.
   - Diálisis para insuficiencia renal crónica.
   - Transplante de un órgano vital (e.g. corazón, pulmón, hígado, córnea, médula)
   - Esclerosis múltiple.
   - HIV/AIDS contraída durante una transfusión de sangre o durante una operación.
   - Ataque al corazón.
   - Cirujía de by-pass en arteria coronaria.
   - Tratamiento con radio y quimio terapias para cáncer.
   - Derrame cerebral o isquemia.

El pago puede ser parte del valor asegurado por un seguro de vida, que se anticipa en caso de efermedad crítica. Pero también algunas compañías han incluído seguros de vida para personas que sufren algún tipo de enfermedad crítica.

La definición anterior aplica a prácticas aseguradoras en EUA, UK, Alemania, Suiza, Austria.

4. **Seguros para cuidados de larga duración**. Un seguro de cuidados de larga duración (LTCI) provee un pago que cubre la asistencia de enfermería y médico para el caso de enfermedades crónicas que generan en la persona un alto grado de dependencia (incapacidad para labores de autocuidado, alimentación, etc.). El tipo de beneficio consiste en una anualidad (es decir, pagos periódicos). También se denomina en inglés “nursing home insurance”.

9.2. Modelos Multiestados

La formulación del modelo básico de Seguros de Vida se puede generalizar a un Seguro de Personas que incluye Vida, Enfermedad, Invalidez, Accidentes, mediante un proceso multiestados, ó Cadena de Markov en tiempo continuo, no homogénea. Este modelo fué introducido por Hoem [1969], y Amsler(1968) y luego desarrollado en textos, como, por ejemplo, Koller [2012], Norberg [1977] y Woltuis (1994).

El modelo multiestados se define mediante una Cadena de Markov en tiempo continuo $\{S_t, t \geq 0\}$, no homogénea. En cada t, la variable aleatoria S_t muestra el estado en que se encuentra una póliza para una vida de edad inicial (x), que puede ser uno de cada $k \geq 2$ estados, $S_t \in S = \{s_1, \ldots, s_k\}$. Tales estados indican cuáles indemnizaciones se pagan, según las condiciones de la póliza.

Definición 9.2.1. *Una Cadena de Markov en tiempo continuo no homogénea, con k estados, $S_t \in \{1, 2, \ldots, k\}$, es un tipo de proceso estocástico que se define mediante las funciones:*

$$\mu_s^{ij} : \textit{Las intensidades de transición entre estados } i \longrightarrow j.$$

$${}_h p_s^{ij} : \textit{Las probabilidades de transición entre estados } i \longrightarrow j.$$

Las trayectorias de S_t son funciones constantes por intervalos, continuas a derecha.

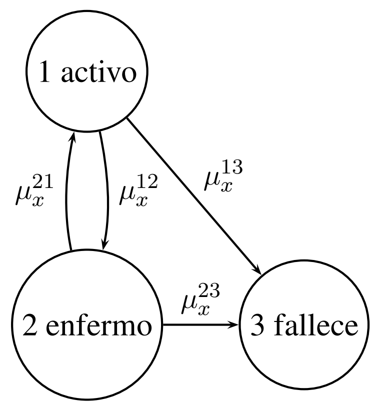


Figura 9.1: Estados de salud como sistema multiestados

Ejemplo 9.2.1. *En un seguro de salud para una enfermedad reversible, con la inclusión de seguro de vida (rider), se tiene* $k = 3$*,* $S = \{0, 1, 2\}$*, donde 0=activo, 1=enfermo, 2=fallecido. En la Figura 9.1 se muestra un diagrama para las transiciones entre los estados de la póliza.*

Ejemplo 9.2.2. *Un modelo multiestados para el estado civil de una persona tiene un diagrama de transiciones entre los estados* $S = \{1, 2, 3, 4, 5\}$*, donde 1 = soltero, 2 = casado, 3 = viudo, 4 = divorciado, 5 = fallecido, que se muestra en la Figura 9.2. Puede utilizarse para modelo de pensiones.*

Ejemplo 9.2.3. *En el seguro de vida entera* $k = 2$ *y los estados se pueden indicar por* $S = \{0, 1\}$*, con 0=vivo, y 1=fallecido. Por ejemplo,* $S_t = 1$ *significa que la vida (x) falleció en una edad anterior ó igual a* $x + t$*. En el caso de dos estados* $S = \{0, 1\}$*, la intensidad de transición del estado 0 (vivo) al estado 1 (fallecido) es la fuerza de mortalidad* μ_{x+t}*.En el caso de dos estados* $S = \{0, 1\}$*, la probabilidad de transición del estado 0 (vivo) al estado 1 (fallecido) es la probabilidad de fallecer* ${}_tp_s^{01} = {}_tq_s$*.*

Ejemplo 9.2.4. *En un seguro médico para enfermedades de alto costo, se pueden tener k estados,* $S = \{0, 1, 2, ..., k\}$ *correspondientes a las enfermedades cubiertas en la póliza, con 0=sano, 1=ataque al corazón, 2=hepatitis A, 3=isquemia, ...etc.*

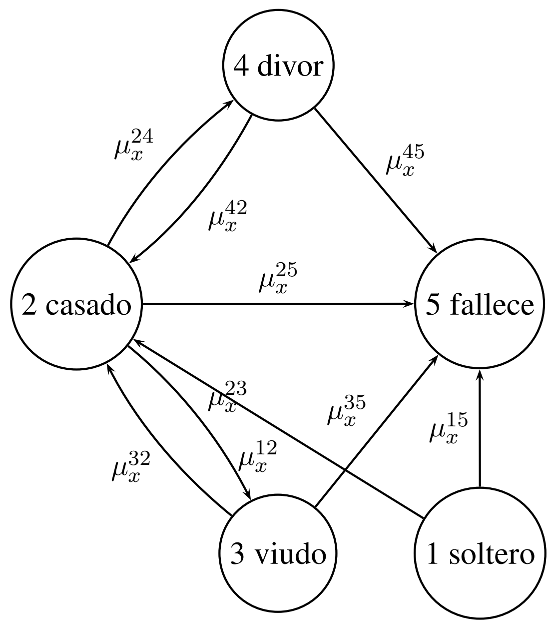


Figura 9.2: Estado civil como sistema multiestados

9.2.1. Probabilidades de transición

Como la principal aplicación de los modelos multiestados es para pólizas de salud y vida para una vida (x), el tiempo inicial s en el estado i se tomará como la edad, es decir, s = x.

Definición 9.2.2. *Para $i, j = 1, 2, \ldots, k$, $t \geq 0$, se define la probabilidad de transición $i \longrightarrow j$ en un lapso de tiempo t, cuando la póliza está en i en el tiempo x, como*

$$ {}_tp_x^{ij} = \mathbb{P}(S_{x+t} = j | S_x = i). \tag{9.1}$$

Ejemplo 9.2.5. *En el caso de dos estados $S = \{0, 1\}$, con 0=activo, 1=fallecido, para una vida (x), la probabilidad ${}_tp_x^{01} = \mathbb{P}(S_{x+t} = 1|S_x = 0)$ se interpreta como la probabilidad de que en la edad $x + t$ se encuentra fallecido, cuando estaba inicialmente con vida, a la edad x.*

Por ejemplo, ${}_{14}p_x^{01} = \mathbb{P}(S_{x+14} = 1|S_x = 0)$ significa la probabilidad que una persona viva de edad x años, fallezca después de 14 años. Note que no se trata del evento "fallece a los x+14 años".

Adicionalmente, para una Cadena de Markov no homogénea, se debe cumplir para cada estado i

$$\sum_{j\in S} {}_tp_x^{ij} = 1,\ t > 0. \tag{9.2}$$

Un estado con ${}_tp_x^{ii} = 1, \forall t \geq 0$ se dice absorbente. Por tanto, ${}_tp_x^{ij} \equiv 0, \forall j \neq i$. La matrix de probabilidades de transición es

$$P_{t,x} = [{}_tp_x^{ij}]. \tag{9.3}$$

Ejemplo 9.2.6. *Para el Ejemplo9.2.1, de enfermedad reversible para una vida (x), con estados $S = \{1, 2, 3\}$, donde 1 = activo, 2 = enfermo, 3 = fallecido. La matriz de probabilidades de transición es 3×3, dada por*

$$P_{t,x} = \begin{bmatrix} {}_tp_x^{11} & {}_tp_x^{12} & {}_tp_x^{13} \\ {}_tp_x^{21} & {}_tp_x^{22} & {}_tp_x^{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Ejemplo 9.2.7. *Para el Ejemplo9.2.2, de estado civil de una vida (x), con estados $S = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, donde 1 = soltero, 2 = casado, 3 = viudo, 4 = divorciado, 5 = fallecido. La matriz de probabilidades de transición es 5×5 dada por*

$$P_{t,x} = \begin{bmatrix} {}_tp_x^{11} & {}_tp_x^{12} & 0 & 0 & {}_tp_x^{15} \\ 0 & {}_tp_x^{22} & {}_tp_x^{23} & {}_tp_x^{24} & {}_tp_x^{25} \\ 0 & {}_tp_x^{32} & {}_tp_x^{33} & & {}_tp_x^{35} \\ 0 & {}_tp_x^{42} & 0 & {}_tp_x^{44} & {}_tp_x^{45} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

9.2.2. Funciones de intensidad

Estas funciones expresan la intensidad ó fuerza de transición entre dos estados diferentes o la fuerza de permanencia en uno cualquiera. La fuerza de mortalidad, vista anteriormente, es un tipo de intensidad de transición. La intensidad de transición de i a j, en el tiempo x, es una función μ_x^{ij}, que se define como

$$\mu_x^{ij} = \begin{cases} \lim_{t\to 0+} \frac{{}_tp_x^{ij}}{t} & \text{si } i \neq j \\ \\ \lim_{t\to 0+} \frac{{}_tp_x^{ii}-1}{t} & \text{si } i = j \end{cases} \tag{9.4}$$

Modelos para la intensidad de transición pueden ser, (ver por ejemplo, [Baione and Levantesi, 2018, pag. 5, Table 2])

$$\mu_x^{ij} \equiv a \text{ constante} \tag{9.5a}$$
$$\mu_x^{ij} = b_0 + b_1 e^{b_2 x}, \text{ Gompertz-Makeham} \tag{9.5b}$$
$$\mu_x^{ij} = b_1 e^{b_2 x}, \text{ Gompertz} \tag{9.5c}$$
$$\mu_x^{ij} = \beta_1 x^{\beta_2}, \text{ Weibull.} \tag{9.5d}$$

Una manera equivalente de escribir (9.4) es utilizando las funciones “o pequeña de t”.

Definición 9.2.3. *La función $o(t)$ (se lee “o pequeña de t”) es una función de t que cumple $\lim_{t \to 0+} \frac{o(t)}{t} = 0$. Esta propiedad se interpreta como que $o(t)$ es una función que tiende a cero más rápidamente de t.*

Por ejemplo, $t^2 = o(t)$, $t^3 = o(t)$. Pero, por ejemplo, e^t, $sen(t)$ no son $o(t)$. Las funciones o pequeña de t cumplen las propiedades:

$$\begin{aligned} o(t) + o(t) &= o(t), \\ co(t) &= o(t), \; \forall c \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Identidad. Las funciones de intensidad no son probabilidades. Pero se las puede asimilar a “probabilidades infinitesimales”. En el caso $i \neq j$ se escribe

$${}_tp_x^{ij} = t\mu_x^{ij} + o(t), \tag{9.6}$$

para $t > 0$. En el caso $i = j$ es ${}_tp_x^{ii} - 1 = t\mu_x^{ii} + o(t)$.

Supuesto. La probabilidad de que S_t visite 2 ó mas estados en un intervalo de tiempo $[x, x+h]$, dado que está en el estado i en el tiempo x, es $o(h)$.

Definición 9.2.4. *La intensidad de transición del estado i hacia cualquier otro diferente se define como*

$$\mu_x^i = \sum_{j \neq i} \mu_x^{ij}. \tag{9.7}$$

Definición 9.2.5. *La probabilidad de transición del estado i hacia cualquier otro diferente j, en el tiempo x, se define como*

$$Q_x^{ij} = \frac{\mu_x^{ij}}{\mu_x^i},\ j \neq i. \tag{9.8}$$

Proposición 9.2.1. *Se cumple la siguiente identidad*

$${}_hp_x^{ii} = 1 - h\mu_x^i + o(h), \tag{9.9}$$

Demostración. Por (9.2) se tiene

$$\begin{aligned} {}_hp_x^{ii} &= 1 - \sum_{j\neq i} {}_hp_x^{ij} \\ &= 1 - \sum_{j\neq i} h\mu_x^{ij} + o^{ij}(h) \\ &= 1 - h\mu_x^i + \sum_{j\neq i} o^{ij}(h) \\ &= 1 - h\mu_x^i + o(h). \end{aligned}$$

En la última igualdad se aplica el hecho que una suma de funciones que son $o(h)$ es nuevamente una función $o(h)$. □

La probabilidad de permanecer en un estado por un cierto período de tiempo es básica para definir pagos en seguros de enfermedades no crónicas, con posibilidad de recuperación. El pago del seguro puede ser una anualidades temporal para el período de incapacidad ó enfermedad.

Definición 9.2.6. *La probabilidad que una vida (x) en el estado i permanezca en éste durante el intervalo $(x, x+t]$ se define como*

$${}_t\overline{p_x^{ii}} = \mathbb{P}(\bigcap_{0<\tau\leq t} (S(x+\tau) = i)|S(x) = i). \tag{9.10}$$

Se cumple una relación similar a (9.9).

Proposición 9.2.2. *Se cumple la siguiente identidad*

$$_hp_x^{ii} = {_hp_x^{ii}} + o(h), \tag{9.11}$$

Demostración. Si el sistema en x está en el estado i hay dos posibilidades para que en el tiempo $x + h$ esté en i:

- que no abandone este estado en todo el intervalo $[x, x + h]$, lo cual ocurre con probabilidad $_hp_x^{ii}$
- que abandone el estado i y vuelva a éste, permaneciendo en él al tiempo $x + h$, con lo cual en el intervalo $[x, x + h]$ ocurren visitas a 2 ó mas estados, lo cual ocurre con probabilidad $o(h)$.

Por el Teorema de Probabilidad Total

$$_hp_x^{ii} = {_hp_x^{ii}} + o(h),$$

lo que equivale a

$$_hp_x^{ii} = {_hp_x^{ii}} + o(h),$$

□

Proposición 9.2.3. *Con base en las definiciones anteriores, y asumiendo* $\mathbb{P}(S(x) = i) > 0$*, se cumple*

$$_tp_x^{ii} = e^{-\int_0^t \mu_{x+s}^i ds} \tag{9.12}$$

Ver demostraciones en [Norberg, 1977, eq. (7.24), pag. 64] y [Koller, 2012, Theo. 2.3.7, pag. 17]. La demostración siguiente está tomada de las notas de clase de B. Hartman ([1]).

Demostración.

$$_{t+h}p_x^{ii} = {_tp_x^{ii}}\,{_hp_{x+t}^{ii}} = {_tp_x^{ii}}({_hp_{x+t}^{ii}} + o(h))$$

[1] https://hartman.byu.edu/stat475.html

$$
\begin{aligned}
&= {}_tp_x^{ii}(1 - \sum_{j\neq i} {}_hp_{x+t}^{ij} + o(h)) \\
&= {}_tp_x^{ii}(1 - \sum_{j\neq i} {}_h\mu_{x+t}^{ij} + o(h) + o(h)) \\
&\therefore\ \frac{{}_{t+h}p_x^{ii} - {}_tp_x^{ii}}{h} = {}_tp_x^{ii}\mu_{x+t}^{i} + \frac{o(h)}{h} \\
&\therefore\ \frac{d}{dt}\ln({}_tp_x^{ii}) = \mu_{x+t}^{i}
\end{aligned}
$$

El resultado se sigue al integrar entre 0 y t, y aplicar ${}_0p_x^{ii} = 1$ □

Note que para cualquier estado i

$$
{}_tp_x^{ii} <_t p_x^{ii}. \tag{9.13}
$$

9.2.3. Ecuación prospectiva

La siguiente ecuación, en realidad, un sistema de ecuaciones diferenciales, se denomina "ecuación prospectiva (de Kolmogorov)", y permite, al resolverla, determinar las probabilidades de transición ${}_tp_x^{ij}$, de acuerdo a la especificación del modelo (vida, enfermedad, invalidez, etc.). Las funciones ${}_tp_s^{ij}$ son funciones de (s,t), y por tanto, se utiliza la notación $\frac{\partial}{\partial t}\,{}_tp_s^{ij}$ para la derivada con respecto a "t" (el subíndice a la izquierda).

Definición 9.2.7. *La ecuación prospectiva de Kolmogorov (forward equation) es*

$$
\frac{\partial}{\partial t}\,{}_tp_x^{ij} = \sum_{k\neq j}\left[{}_tp_x^{ik}\,\mu_{x+t}^{kj} - {}_tp_x^{ij}\,\mu_{x+t}^{jk}\right],\ t \geq 0, \tag{9.14}
$$

para $i, j = 1, \ldots, k$, con condiciones iniciales dadas por los k^2 valores ${}_0p_x^{ij}$, dados por

$$
\begin{aligned}
{}_0p_x^{ij} &= \delta_{ij}, \\
\delta_{ii} &= 1 \\
\delta_{ij} &= 0, i \neq j.
\end{aligned}
$$

Nótese que el sistema (9.14) también se puede escribir

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}\,{}_tp_x^{ij} &= \sum_{k\neq j} {}_tp_x^{ik}\mu_{x+t}^{kj} - {}_tp_x^{ij}\sum_{k\neq j}\mu_{x+t}^{jk},\ t\geq 0,\\ &= \sum_{k\neq j} {}_tp_x^{ik}\mu_{x+t}^{kj} - {}_tp_x^{ij}\mu_{x+t}^{j},\ t\geq 0,\end{aligned}$$

Hay que anotar que la ecuación para cada pareja (i,j) en (9.14) es una ecuación diferencial lineal de primer orden, no homogénea, con coeficientes variables, de la forma

$$y_t' = -p_t y_t + q_t,\ t\geq 0, \tag{9.15}$$

con $y_0 = \delta_{ij}$, y con

$$y_t = {}_tp_x^{ij},\ p_t = \mu_{x+t}^{j},\ q_t = \sum_{k\neq j} {}_tp_x^{ik}\mu_{x+t}^{kj}$$

cuya solución es

$$y_t = e^{-\int_0^t p_s ds}\left(y_0 + \int_0^t e^{\int_0^s p_v dv} q_s ds\right). \tag{9.16}$$

Por tanto permite encontrar $y_t = {}_tp_x^{ij}$ a partir de las intensidades μ_x^{ij}, para las cuales se pueden utilizar los modelos vistos tales como Gompertz-Makeham, Siler, Makeham-Beard, incluyendo otros como Weibull.

Ejemplo 9.2.8. *Un ejemplo de multiestados para discapacidad permanente para una vida (x), con estados $S = \{1, 2, 3\}$, donde 1 = activo, 2 = inválido, 3 = fallecido, la gráfica de transiciones está en la Figura 9.3. La matriz de intensidades es*

$$\mu_x = \begin{bmatrix}\mu_x^{11} & \mu_x^{12} & \mu_x^{13}\\ 0 & \mu_x^{22} & \mu_x^{23}\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

El sistema de ecuaciones prospectivas es

$$\frac{\partial}{\partial t}\,{}_tp_x^{ij} = \sum_{k\neq j} {}_tp_x^{ik}\mu_{x+t}^{kj} - {}_tp_x^{ij}\mu_{x+t}^{j},\ t\geq 0,$$

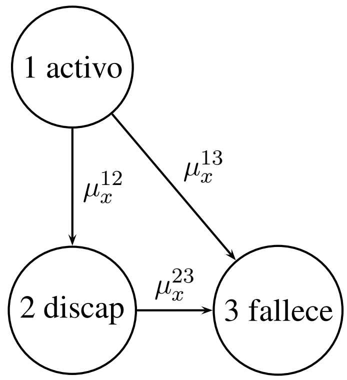


Figura 9.3: Estados de salud con discapacidad permamente como sistema multiestados

Para el caso $i = j = 1$ *se tiene*

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t}\, {}_tp_x^{11} &= \sum_{k\neq 1} {}_tp_x^{1k}\mu_{x+t}^{k1} - {}_tp_x^{11}\mu_{x+t}^{1},\\
&= \sum_{k=2,3} {}_tp_x^{1k}\mu_{x+t}^{k1} - {}_tp_x^{11}\mu_{x+t}^{1}\\
&= {}_tp_x^{1k}(\mu_{x+t}^{21} + \mu_{x+t}^{31}) - {}_tp_x^{11}\mu_{x+t}^{1}\\
&= {}_tp_x^{1k}(0+0) - {}_tp_x^{11}\mu_{x+t}^{1}\\
&= -{}_tp_x^{11}(\mu_{x+t}^{12} + \mu_{x+t}^{13})\\
\therefore\ \ {}_tp_x^{11} &= e^{-\int_0^t \mu_{x+s}^{12} + \mu_{x+s}^{13} ds}.
\end{aligned}$$

Si se asume modelos para $\mu_{x+s}^{12}, \mu_{x+s}^{13}$*, por ejemplo, Gompertz-Makeham, la probabilidad anterior se puede calcular utilizando la función* `integrate()` *de R.*

9.2.4. Diferencia entre Cadenas homogéneas y no homogéneas

La cadena de Markov S_t con probabilidades de transición ${}_tp_s^{ij} = \mathbb{P}(S_{s+t} = j|S_s = i)$ se llama no homogénea porque estas probabilides dependen de los estados i,j, del lapso t, y del tiempo s del estado inicial.

Una Cadena de Markov en tiempo continuo, homogénea, tiene probabilidades de transición que dependen de los estados i, j, del lapso de tiempo de la transición t, pero no del tiempo inicial s. En esta caso (9.1) está dada por ${}_tp^{ij}$. La teoría y aplicaciones de las cadena de Markov homogéneas está mucho más desarrollada que la de las no homogéneas.

9.3. Modelo salud-enfermedad

Es un modelo con $k = 3$ estados, indicados por $S = \{a, i, d\}$, donde el estado "a" significa un afiliado sano, "i" significa enfermo, "d" significa fallecido. De manera similar, para seguros de invalidez ó discapacidad, el estado "a" significa un afiliado válido, mientras que "i" significa inválido, ó discapacitado temporal.

Se tienen las siguientes condiciones sobre las funciones de transición.

- El estado "d" se debe asumir absorbente, es decir, no se pueden tener transiciones $d \to a$ ó $d \to i$. Una vez se llega a este estado no se puede salir de él.

$$ {}_tp_x^{da} = {}_tp_x^{di} = 0, \tag{9.17} $$
$$ {}_tp_x^{dd} = 1, \; \forall t \geq 0. \tag{9.18} $$

- En los casos de discapacidad permanente ó invalidez, ó en enfermedad crónica:

$$ {}_tp_x^{ia} = 0. \tag{9.19} $$

9.3.1. Las funciones de intensidad

En este modelo se tienen definidas las siguientes funciones de intensidad. En todos los casos se definen para un asegurado de edad x.

μ_x^{ai} : La intensidad de pasar al estado "enfermo" desde el estado "sano".
μ_x^{ia} : La intensidad de pasar al estado "sano" desde el estado "enfermo",
μ_x^{ad} : La intensidad de pasar al estado "fallecido" desde el estado "sano",

μ_x^{id} : La intensidad de pasar al estado “fallecido” desde el estado “enfermo”.

A continuación se resolverán varios casos de la ecuación prospectiva (9.14), asumiendo que se conocen la funciones de intensidad.

9.3.2. Caso de enfermedades crónicas ó de invalidez total

Se va a asumir que las enfermedades son crónicas, es decir, no hay recuperación, lo que equivale a asumir $\mu_x^{ia} = 0$, para todas las edades x.

Proposición 9.3.1. *Para los valores* $(i, j) \in \{(a, a), (a, i), (a, d), (i, i), (i, d)\}$, *con* $\sigma_x = 0$*, con las condiciones iniciales*

$$
\begin{aligned}
{}_0p_x^{aa} &= {}_0p_x^{ii} = 1, \\
{}_0p_x^{ai} &= {}_0p_x^{id} = 0,
\end{aligned}
$$

la ecuación (9.14) tiene solución

$$
{}_tp_x^{aa} = e^{-\int_0^t \mu_{x+s}^{ai} + \mu_{x+s}^{ad} ds}, \tag{9.20a}
$$

$$
{}_tp_x^{ii} = e^{-\int_0^t \mu_{x+s}^{id} + \mu_{x+s}^{idc} ds} = {}_tp_{\overline{x}}^{\underline{ii}}, \tag{9.20b}
$$

$$
{}_tp_x^{ai} = \int_0^t {}_sp_x^{aa} \mu_{x+s}^{ai} \, {}_{t-s}p_{x+s}^{ii} ds, \tag{9.20c}
$$

$$
{}_tp_x^{id} = \int_0^t {}_sp_x^{ii} \mu_{x+s}^{id} ds, \tag{9.20d}
$$

$$
{}_tp_x^{ad} = \int_0^t {}_sp_x^{aa} \mu_{x+s}^{ad} + {}_sp_x^{ai} \mu_{x+s}^{id} ds. \tag{9.20e}
$$

Demostración. El caso (9.20a) se desarrolló en el Ejemplo 9.2.8 anterior. El caso (9.20b) se deja como ejercicio.

Veamos el caso (9.20c). La ecuación prospectiva de Kolmogorov es

$$
\frac{\partial}{\partial t} {}_tp_x^{ij} = \sum_{k \neq j} {}_tp_x^{ik} \mu_{x+t}^{kj} - {}_tp_x^{ij} \sum_{k \neq j} \mu_{x+t}^{jk}, \; t \geq 0,
$$

con $i = a, j = i$, pasar de sano a enfermo. Entonces $\{k \neq i\} = \{k = a, d\}$, luego

$$\frac{\partial}{\partial t}\, {}_tp_x^{ai} = \sum_{k=a,d} {}_tp_x^{ak}\mu_{x+t}^{ki} - {}_tp_x^{ai} \sum_{k=a,d} \mu_{x+t}^{ik}.$$

Pero $\mu_{x+t}^{di} = \mu_{x+t}^{ia} = 0$, luego

$$\frac{\partial}{\partial t}\, {}_tp_x^{ai} = {}_tp_x^{aa}\mu_{x+t}^{ai} - {}_tp_x^{ai}\mu_{x+t}^{id}.$$

Aplicando la fórmula para la solución de una ecuación diferencial lineal en (9.16) obtenemos

$$\begin{aligned}
{}_tp_x^{ai} &= e^{-\int_0^t \mu_{x+s}^{id} ds} \int_0^t {}_sp_x^{aa}\mu_{x+s}^{ai} e^{\int_0^s \mu_{x+u}^{id} du} ds \\
&= \int_0^t {}_sp_x^{aa}\mu_{x+s}^{ai} e^{-\int_s^t \mu_{x+u}^{id} du} ds \\
&= \int_0^t {}_sp_x^{aa}\mu_{x+s}^{ai} e^{-\int_0^{t-s} \mu_{x+s+u}^{id} du} ds
\end{aligned}$$

Reemplazando (9.20b), se obtiene

$${}_tp_x^{ai} = \int_0^t {}_sp_x^{aa}\mu_{x+s}^{ai}\, {}_{t-s}p_{x+s}^{ii} ds.$$

Los casos (9.20d), (9.20e) se dejan como ejercicio. $\square$

Ejercicio 9.3.1. *Compruebe que en el caso de enfermedades con recuperación, es decir con $\mu_x^{ia} \neq 0$ se debe tener la expresión para (9.20c)*

$${}_tp_x^{ai} = \int_0^t {}_sp_x^{aa}\mu_{x+s}^{ai}\, {}_{t-s}\overline{p}_{x+s}^{ii} du ds \tag{9.21}$$

Ejemplo 9.3.1. *Asuma las intesidades siguientes para cierto tipo de enfermedad no transmisible (A):*

$$\begin{aligned}
\mu_x^{ai} &= 0.0005. \\
\mu_x^{ad} &= 10^{-4.12+0.038x}. \\
\mu_x^{id} &= 2.0\mu_x^{ad}.
\end{aligned}$$

Observe que la transición $i \to d$ tiene una fuerza de mortalidad doble que la de una persona sana. Calcule las probabilidades en (9.20a), para $x = 50$, $t = 10$.

Solución. Para (9.20a)

$$
\begin{aligned}
{}_{10}p_{50}^{aa} &= e^{-\int_0^{10} \mu_{x+s}^{ai} + \mu_{x+s}^{ad} ds} \\
&= \exp\left(-\int_0^{10} 0.0005 + 10^{-4.12+0.038(50+s)} ds\right) \\
&= \exp\left(-10(0.0005) - 10^{-4.12+0.038(50)} \int_0^{10} 10^{0.038\,s} ds\right) \\
&= \exp\left(-0.005 - 10^{-4.12+0.038(50)} \frac{10^{0.038\,s} - 1}{0.038\ln(10)}\Big|_0^{10}\right) = 0.90363.
\end{aligned}
$$

Lo que se interpreta como que para un afiliado (50), sano (sin la enfermedad A), llegar en este estado dentro de 10 años, es decir, cuando tenga 60 años, tiene una probabilidad de $90.36\,\%$ de no contraer la enfermedad A.

9.3.3. Probabilidades de transición a un año

Colocando $t = 1$ en las probabilidades en (9.3.1) son las probabilidades de transición a un año:

$$
\begin{aligned}
p_x^{aa} &: \text{probabilidad de (x) sobreviva como sano en (x,x+1),} \\
p_x^{ai} &: \text{probabilidad de (x) enferme y sobreviva en (x,x+1),} \\
p_x^{ii} &: \text{probabilidad de (x) enfermo sobreviva como enfermo en (x,x+1),} \\
p_x^{id} &: \text{probabilidad de (x) enfermo fallezca en (x,x+1),} \\
p_x^{ad} &: \text{probabilidad de (x) sano fallezca en (x,x+1)}
\end{aligned}
$$

Pero, en la literatura actuarial se han introducido probabilidades adicionales. Se reescriben:

$$q_x^i := p_x^{id},\; q_x^a := p_x^{ad}. \tag{9.22}$$

En resumen, las probabilidades se pueden presentar en una matriz de Markov.

estado	a	i	d	suma
a	p_x^{aa}	p_x^{ai}	q_x^a	1
i	0	p_x^{ii}	q_x^i	1
d	0	0	1	1

Cuadro 9.1: Probabilidades de transición a 1 año en un modelo de enfermedad crónica como cadena de Markov

Se define la probabilidad p_x^a como

$$p_x^a := p_x^{aa} + p_x^{ai}, \tag{9.23}$$

y por tanto, $p_x^a + q_x^a = 1$. Además se definen las probabilidades (ver [Pitacco, 2014, eqs. 6.3.1-6.3.4])

$$q_x^{aa} : \text{probabilidad de (x) sano fallezca como sano en (x,x+1)}, \tag{9.24a}$$

$$q_x^{ai} : \text{probabilidad de (x) sano fallezca como enfermo en (x,x+1)}, \tag{9.24b}$$

entonces

$$q_x^a = q_x^{aa} + q_x^{ai}. \tag{9.25}$$

Nótese que ambas q_x^{aa}, q_x^{ai} no son calculables directamente a partir de las funciones de intensidad. Para calcularlas se define la probabilidad w_x de que (x) se enferme en (x,x+1), la probabilidad de inserción, como

$$w_x = q_x^{ai} + p_x^{ai}. \tag{9.26}$$

El siguiente supuesto es de uso aceptado en la literatura actuarial, ver [Türler, 1977, ec 9.1.2, pag. 117], [Pitacco, 2014, ec. 6.3.10, pag. 101]

$$w_x = \frac{2q_x^{ai}}{q_x^i}. \tag{9.27}$$

Por tanto, como p_x^{ai} es calculable con base en intensidades, se puede calcular

$$q_x^{ai} = \left(\frac{2}{q_x^i} - 1\right)^{-1} p_x^{ai}. \tag{9.28}$$

Además, de (9.25), $q_x^a = q_x^{aa} + q_x^{ai} = 1 - p_x^a$ se puede obtener q_x^{aa}.

$$q_x^{aa} = 1 - p_x^a - q_x^{ai}. \tag{9.29}$$

Ejemplo 9.3.2. *En Haberman [1983] se presenta una Tabla con las probabilidades de transición de Markov, a cinco años, en el modelo para enfermedad cerebro-vascular*

Cuadro 9.2: Probabilidades

edad x	${}_5p_x^{aa}$	${}_5p_x^{ai}$	${}_5p_x^{ad}$	${}_5p_x^{ii}$	${}_5p_x^{ia}$	${}_5p_x^{id}$
0	0.9722	0.0002	0.0276	0.7699	0.0873	0.1428
5	0.9972	0.0002	0.0026	0.7544	0.0876	0.1580
10	0.9978	0.0002	0.0020	0.7391	0.0869	0.1740
15	0.9952	0.0002	0.0046	0.7241	0.0860	0.1899
20	0.9942	0.0002	0.0056	0.7094	0.0845	0.2106
25	0.9947	0.0002	0.0051	0.6949	0.0845	0.2206
30	0.9934	0.0002	0.0064	0.6736	0.0834	0.2430
35	0.9901	0.0007	0.0092	0.6495	0.0821	0.2684
40	0.9842	0.0012	0.0146	0.6228	0.0805	0.2967
45	0.9721	0.0020	0.0259	0.5969	0.0787	0.3243
50	0.9494	0.0036	0.0470	0.5688	0.0764	0.3548
55	0.9303	0.0061	0.0636	0.5211	0.0735	0.4054
60	0.8551	0.0099	0.1350	0.4289	0.0663	0.5048
65	0.7787	0.0157	0.2056	0.3185	0.0586	0.6229
70	0.6743	0.0244	0.3013	0.2129	0.0507	0.7364
75	0.5311	0.0371	0.4318	0.1278	0.0431	0.8291
80	0.3497	0.0544	0.5959	0.0472	0.0353	0.9175
85	0.1512	0.0795	0.7693	0.0020	0.0288	0.9692

9.3.4. Anualidades para servicios médicos

Definición 9.3.1. *El seguro de cuidados de larga duración CLD (en inglés: long term care insurance ó LTC) provee asistencia de enfermería y médica a personas que presentan una discapacidad permanente producto de un accidente, una enfermedad ó por senectud, ó combinaciones de éstas. El seguro CLD provee un pago periódico temporal o permanente para cubrir esta contingencia, en forma de una anualidad de vida.*

Por ejemplo, un pensionado que sufre una caída que le produce invalidez, requiere cuidados adicionales de enfermería, que tal vez no puede pagar con su mesada. También es posible reembolso de pagos por este tipo de cuidados ó garantizar el derecho a la asistencia, sin pago al asegurado.

El seguro CLD también se denomina una pensión de cuidados médicos, y se ofrece como un pago adicional a la pensión, en caso de una contingencia de discapacidad. Es decir, está incluída en una renta vitalicia pero no paga sino cuando se presenta la contingencia, ver Pla-Porcel et al. [2016], Pitacco [2016].

En varios países europeos, este seguro viene incorporado en el sistema de seguridad social, por ejemplo en Alemania, desde 1996, y en EUA. La Ley 100/93 en Colombia no cubre esta contingencia.

9.3.5. Modelos para el valor actuarial de Cuidados de Larga Duración

De acuerdo con Pitacco [2014], los modelos utilizados para definir el valor actuarial de una anualidad para discapacidad, mediante el principio de equivalencia, es decir, el valor de un seguro de cuidados de larga duración, se dividen en al menos tres tipos.

1. Los modelos utilizados en EUA, Alemania, Austria y Suiza se basan en las probabilidades de quedar discapacitado. Estas probabilidades se denominan probabilidades de incidencia (inception). En EUA se utilizan tablas para las probabilidades de discapacidad temporal denominadas tablas continuadas (continuance table). En Alemania, Austria y Suiza se basa en tablas de decrementos que tiene tablas de mortalidad y de recuperación. Los modelos para discapacidad temporal son diferentes a los de discapacidad permanente.

   Estas anualidades no deben confundirse con una pensión de invalidez, ya que pagan cuando a una persona no discapacitada (sea cotizante ó jubilada) la afecta una enfermedad ó accidente que puede afectar su capacidad de desempeño en las labores diarias, por ejemplo su movilidad, como el caso de una isquemia ó un accidente de tráfico.

2. Otro método se basan en la probabilidad de estar discapacitado. Se denominan tasas de prevalencia. Es el sistema que se aplica en Noruega.

9.3.6. Modelos con base en probabilidad de incidencia

En esta sección se basa en [Pitacco, 2014, sec. 6.4, pag. 105].

Definición 9.3.2. *Se define el valor de una anualidad que paga una unidad monetaria, año vencido, siempre y cuando (x), un afiliado de edad x, sin discapacidad, desarrolle una enfermedad ó patología que le produzca incapacidad para valerse en las tareas diarias, es decir, que requiera una asistencia en enfermería y médicos. Y hasta un período de n años. La prima neta en tiempo continuo es*

$$\bar{a}^{ai}_{x:\overline{n}|} = \int_0^n v^t \, {}_tp^{ai}_x dt. \tag{9.30}$$

El caso vitalicio se tiene colocando $n = \omega - x$ y en este caso se escribe $\bar{a}^{ai}_x$. La expresión (9.30) se evalúa utilizando (9.20c) ó (9.21).

$$ {}_tp^{ai}_x = \int_0^t {}_sp^{aa}_x \mu^{ai}_{x+s} \, {}_{t-s}p^{ii}_{\overline{x+s}} ds$$

Más adelante se muestra una versión en tiempo discreto.

Ejercicio 9.3.2. *Evaluar (9.30), para una vida (50), hombre, asumiendo las intensidades siguientes para el caso de una incapacidad permanente, tal que el pago sea 1.5x12 mill al final de primer año. Para el caso de la intensidad de fallecimiento se asume una ley Gompertz-Makeham ajustada a la Tabla Colombiana de Vida 80-89, hombres,*

$$\begin{aligned}&\mu^{ad}_x = Ae^{Bx} + C,\\ &\quad A = 0.00005822631, \; B = 0.08840912138, C = 0.00005720806.\end{aligned}$$

La intensidad de fallecimiento para incapacitados se asume que es de la forma

$$\mu^{id}_x = (1+\gamma)\mu^{ad}_x \tag{9.31}$$

con $\gamma = 0.7$ (este valor es solamente por vía de ejemplo). Para la intensidad de inserción en la incapacidad se utilizará una función cuadrática ajustada a los datos de intensidades μ^{ai}_x, por edades, en [Baione and Levantesi, 2014, pag. 182, Table 6.5, col 7], de la forma

$$\mu^{ai}_x = 0.0098498490 - 0.0008284281x + 0.0000186779x^2. \tag{9.32}$$

Solución. Conformar primero la expresión

$$ {}_tp_x^{ai} = \int_0^t {}_sp_x^{aa} \mu_{x+s}^{ai} \, {}_{t-s}p_{\overline{x+s}}^{ii} ds $$

empezando con

$$ \begin{aligned} {}_tp_x^{aa} &= e^{-\int_0^t \mu_{x+s}^{ai} + \mu_{x+s}^{ad} ds} \\ &= e^{-\int_0^t Ae^{B(x+s)} + C ds - \int_0^t \mu_{x+s}^{ai} ds} \\ &= {}_tp_x \, e^{-\int_0^t \mu_{x+s}^{ai} ds} \end{aligned} $$

donde ${}_tp_x$ es la función de supervivencia en un modelo Gomperz-Makeham. Además

$$ \begin{aligned} {}_tp_x^{ii} = {}_tp_{\overline{x}}^{ii} &= e^{-\int_0^t \mu_{x+s}^{id} ds} \\ &= e^{-\int_0^t (1+\gamma) \mu_{x+s}^{ad} ds} \\ &= e^{-(1+\gamma) \int_0^t Ae^{B(x+s)} + C ds} \\ &= {}_tp_x^{1+\gamma} \end{aligned} $$

Luego

$$ \begin{aligned} {}_tp_x^{ai} &= \int_0^t {}_sp_x^{aa} \mu_{x+s}^{ai} \cdot {}_{t-s}p_{\overline{x+s}}^{ii} ds \\ &= \int_0^t {}_sp_x \, e^{-\int_0^s \mu_{x+u}^{ai} du} \mu_{x+s}^{ai} \cdot {}_{t-s}p_{x+s}^{1+\gamma} ds \\ &= {}_tp_x^{1+\gamma} \int_0^t {}_sp_x^{-\gamma} e^{-\int_0^s \mu_{x+u}^{ai} du} \mu_{x+s}^{ai} ds \end{aligned} $$

Finalmente, reemplazando la expresión anterior en la anualidad (9.30)

$$ \begin{aligned} \bar{a}_{x:\overline{n}|}^{ai} &= \int_0^n v^t \, {}_tp_x^{ai} dt \\ &= \int_0^n v^t \, {}_tp_x^{1+\gamma} \int_0^t {}_sp_x^{-\gamma} e^{-\int_0^s \mu_{x+u}^{ai} du} \mu_{x+s}^{ai} ds dt \end{aligned} $$

Con base en el programa R siguiente se obtiene como prima neta (tasa por cada mill) $673, 565.7$. El valor para una anualidad por 1.5x12 mill al final del primer año es $\$12'124.180$. ◀

```
#programa para anualidad asistencia
#médica para invalidez permanente
# construir tpx
tpx.gm = function(t,x,pars){
fn = function(s){makeham(s,pars)$hx}
a = ifelse(t==0,0,
integrate(Vectorize(fn),x,x+t)$value)
v = exp(-a)
return(v)}

#    intensidad de transicion a -> i
muxai = function(x){
0.0098498490 -0.0008284281*x +0.0000186779*x^2}

#   función auxiliar
Imuxai = function(t,x){
fn <- function(u) {muxai(x+u)}
aax=integrate(Vectorize(fn), lower = 0, upper = t,
subdivisions = 200)
p = muxai(x+t)*aax$value
return(p)}

#    funcion tpxai
tpxai.gm = function(t,x,pars,gamma){
fn <- function(u) {tpx.gm(u,x,pars)^(-gamma)*Imuxai(u,x)}
aax=integrate(Vectorize(fn), lower = 0, upper = t, subdivisions = 200)
p = tpx.gm(t,x,pars)^(1+gamma)*aax$value
return(p)}

#    funcion calcula anualidad
acxai = function(x,t,i,gamma,pars){
v = 1/(1+i)
fn <- function(u) {v^u*tpxai.gm(u,x,pars,gamma)}
aax=integrate(Vectorize(fn), lower = 0, upper = t, subdivisions = 200)
return(aax$value)}

#-----datos
x2 = 50
i = 0.06
gamma = 0.7
```

```
n = 30
(pr= acxai(x2,n,i,gamma,pars))
[1] 0.6735657
 (pr*1.5*12)
[1] 12.12418
```

La prima neta en tiempo discreto está dada por

$$a^{ai}_{x:\overline{n}|} = \sum_{j=1}^{n} v^j \, {}_jp^{ai}_x. \tag{9.33}$$

En [Pitacco, 2014, sec. 6.4] se desarrolla ${}_jp^{ai}_x$ mediante la ecuación de Chapman-Kolmogorov, como

$${}_jp^{ai}_x = \sum_{k=1}^{j} {}_{j-k}p^{aa}_x \, p^{ai}_{x+j-k} \, {}_{k-1}p^{ii}_{x+j-k+1}, \tag{9.34}$$

que se interpreta de manera inmediata: es la suma de todas las probabilidades de las diferentes posibilidades para la transición $a \longrightarrow i$ en j años. Reemplazando en (9.33) se obtiene

$$a^{ai}_{x:\overline{n}|} = \sum_{j=1}^{n} v^j \left(\sum_{k=1}^{j} {}_{j-k}p^{aa}_x \, p^{ai}_{x+j-k} \, {}_{k-1}p^{ii}_{x+j-k+1} \right).$$

Con el cambio de variable $r = j - k + 1$ se obtiene

$$a^{ai}_{x:\overline{n}|} = \sum_{r=1}^{n} {}_{r-1}p^{aa}_x \, p^{ai}_{x+r-1} \sum_{j=r}^{n} v^j \, {}_{j-r}p^{ii}_{x+r}.$$

Se define la anualidad

$$\ddot{a}^{ii}_{x+r:\overline{n-r+1}|} = \sum_{j=r}^{n} v^j \, {}_{j-r}p^{ii}_{x+r}. \tag{9.35}$$

y se reemplaza en la expresión anterior para obtener

$$a^{ai}_{x:\overline{n}|} = \sum_{r=1}^{n} {}_{r-1}p^{aa}_x \, p^{ai}_{x+r-1} \, \ddot{a}^{ii}_{x+r:\overline{n-r+1}|}. \tag{9.36}$$

Ejercicio 9.3.3. *Retomando el Ejercicio anterior 9.3.2, el objetivo de este ejercicio es evaluar (9.36), para una vida (50), hombre, asumiendo las mismas hipótesis y datos del Ejercicio anterior.*

Solución. Hay que desarrollar las expresiones para cada término de (9.36) utilizando la ley GM y los parámetros dados. Utilizando los resultados obtenidos

$$\begin{aligned}
{}_{r-1}p_x^{aa} &= {}_{r-1}p_x^{2+\gamma}, \\
p_{x+r-1}^{ai} &= p_{x+r-1}^{1+\gamma} \int_0^1 {}_sp_{x+r-1}\mu_{x+r+s-1}^{ai} ds \\
{}_{j-r}p_{x+r}^{ii} &= ?
\end{aligned}$$

Para esta última probabilidad se retoma (9.12)

$${}_tp_{\overline{x}}^{ii} = e^{-\int_0^t \mu_{x+s}^i ds}$$

donde

$$\mu_{x+s}^i = \sum_{j \neq i} \mu_{x+s}^{ij} = \mu_{x+s}^{id} = (1+\gamma)\mu_{x+s}^{ad} = (1+\gamma)\mu_{x+s}.$$

donde la última función de intensidad es la GM. Por tanto,

$${}_tp_{\overline{x}}^{ii} = {}_tp_x^{(1+\gamma)}.$$

Y se desarrolla la anualidad

$$\ddot{a}_{x+r:\overline{n-r+1}|}^{ii} = \sum_{j=r}^{n} v^j \, {}_{j-r}p_{x+r}^{(1+\gamma)}.$$

La solución numérica se realiza mediante un código en R en el cual se implementan estas funciones. Se deja como ejercicio. ◀

9.3.7. Seguros para enfermedades terminales

En esta parte la literatura denomina las enfermedades de alto costo (EAC) como “dread illness insurance” ó “critical illness”. Esta sección es con base en Baione and Levantesi [2018].

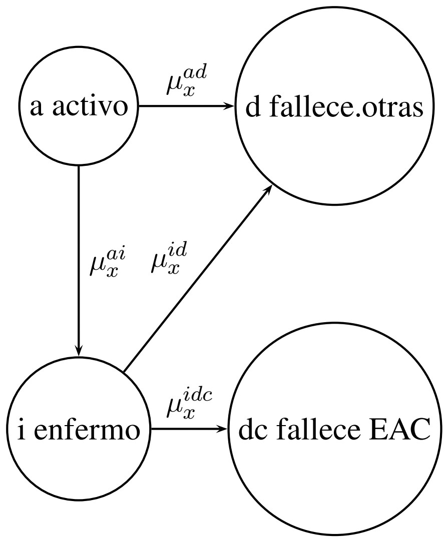


Figura 9.4: Modelo multiestados para enfermedad de alto costo

Los autores consideran un modelo de 4 estados $S = \{a, i, d, dc\}$, donde (ver Figura 9.4)

$$
\begin{aligned}
a &= \text{libre enfermedades}\\
i &= \text{enfermo}\\
dc &= \text{fallecimiento por EAC}\\
d &= \text{fallecimiento por otras causas no EAC}
\end{aligned}
$$

El proceso S_t indice el progreso de una póliza de salud para un afiliado de edad inicial (x). Las soluciones de las ecuaciones diferenciales prospectivas son

$$ {}_tp_x^{aa} = \exp\left\{-\int_0^t \mu_{x+u}^{ai} + \mu_{x+u}^{ad} du\right\}, \tag{9.37a} $$

$$ {}_tp_x^{ad} = \int_0^t {}_up_x^{aa}\, \mu_{x+u}^{ad} + {}_up_x^{ai}\, \mu_{x+u}^{id} du, \tag{9.37b} $$

$$ {}_tp_x^{ii} = \exp\left\{-\int_0^t \mu_{x+u}^{idc} + \mu_{x+u}^{id} du\right\} = {}_tp_{\overline{x}}^{\overline{ii}}, \tag{9.37c} $$

$$ {}_tp_x^{ai} = \int_0^t {}_up_x^{aa} \mu_{x+u}^{ai} \cdot {}_{t-u}p_{x+u}^{ii} du, \tag{9.37d} $$

$$ {}_tp_x^{id} = \int_0^t {}_up_x^{ii} \mu_{x+u}^{id} du, \tag{9.37e} $$

$$ {}_tp_x^{idc} = \int_0^t {}_up_x^{ii}\mu_{x+u}^{idc}du, \tag{9.37f}$$

Se definen dos tipos de seguros médicos.

1. Seguro temporal a n años, para enfermedades críticas, que paga una suma determinada a partir del diagnóstico de una de las enfermedades especificadas en la póliza, tiene prime neta

$$ {}_1\bar{A}_{x:\overline{n}|}^{ai} = \int_0^n v^t {}_tp_x^{aa}.\mu_{x+t}^{ai}dt. \tag{9.38}$$

2. Seguro temporal a n años, para enfermedades críticas (CI), que paga una suma determinada a partir del diagnóstico de una de las enfermedades especificadas en la póliza, incluyendo seguro de vida, tiene prime neta

$$ {}_2\bar{A}_{x:\overline{n}|}^{ai} = {}_1\bar{A}_{x:\overline{n}|}^{ai} + \int_0^n v^t {}_tp_x^{aa}.\mu_{x+t}^{ad}dt \tag{9.39}$$

Ejercicio 9.3.4. *Con las definiciones del Ejercicio 9.3.2. Evaluar (9.38), para una vida (50), hombre, tal que el pago sea 1 mill, en caso de diagnóstico positivo de una efermedad de alto costo. Utilizando una tasa $i = 0.06$ efectia anual y asumiendo las intensidades siguientes*

$$\begin{aligned} \mu_x^{ad} &= Ae^{Bx} + C,\ A = 0.00005822631, \\ B &= 0.08840912138, C = 0.00005720806. \end{aligned} \tag{9.40a}$$

$$ \mu_x^{id} = (1+\gamma)\mu_x^{ad} \tag{9.40b}$$

$$ \mu_x^{idc} = (1+\gamma_c)\mu_x^{ad} \tag{9.40c}$$

$$ \mu_x^{ai} = 0.0098498490 - 0.0008284281x + 0.0000186779x^2 \tag{9.40d}$$

con $\gamma = 0.7$, $\gamma_c = 2.7$(valores solamente por vía de ejemplo).

Solución. Utilizando (9.37a)

$$ {}_1\bar{A}_{x:\overline{n}|}^{ai} = \int_0^n v^t {}_tp_x^{aa}.\mu_{x+t}^{ai}dt $$

$$= \int_0^n v^t \exp\left\{-\int_0^t \mu_{x+u}^{ai} + \mu_{x+u}^{ad} du\right\} \mu_{x+t}^{ai} dt$$
$$= \int_0^n v^t {}_tp_x \exp\left\{-\int_0^t \mu_{x+u}^{ai} du\right\} \mu_{x+t}^{ai} dt$$

donde ${}_tp_x$ es la función de supervivencia con la ley Gomperz-Makeham. La prima neta es de $\$120,273.00$.El código R siguiente calcula la prima neta. ◀

```
#programa para seguro enfermedad alto costo

#          construir tpx
tpx.gm = function(t,x,pars){
fn = function(s){makeham(s,pars)$hx}
a = ifelse(t==0,0,
integrate(Vectorize(fn),x,x+t)$value)
v = exp(-a)
return(v)}

#            muxai
muxai = function(x){
0.0098498490 -0.0008284281*x +0.0000186779*x^2}

#             exp(int-muxai)*muxai
Imuxai = function(t,x){
fn <- function(u) {muxai(x+u)}
aax=integrate(Vectorize(fn), lower = 0, upper = t,
subdivisions = 200)
p = muxai(x+t)*aax$value
return(p)}

#             seguro de enfermedad
Acxnai = function(x,i,n,pars){
v = 1/(1+i)
fn <- function(u) {v^u*tpx.gm(u,x,pars)*Imuxai(u,x)}
aax=integrate(Vectorize(fn), lower = 0, upper = n, subdivisions = 200)
return(aax$value)}

#            parametros
x2 = 50
```

```
i = 0.06
n = 30
(Acx2ai = Acxnai(x2,i,n,pars))
0.1202731
```

Ejercicio 9.3.5. *Con las definiciones del Ejercicio enterior, evaluar el segundo sumando en (9.39). Este término corresponde a un seguro de vida en caso de fallecer de una enfermedad de alto costo. Este seguro paga como compensación por la vida en caso de sugir una enfermedad de alto costo. La prima* ${}_1\bar{A}^{ai}_{x:\overline{n}|}$ *compensa por la ocurrencia de esta enfermedad.*

$$
{}_2\bar{A}^{ai}_{x:\overline{n}|} = {}_1\bar{A}^{ai}_{x:\overline{n}|} + \int_0^n v^t {}_tp^{aa}_x . \mu^{ad}_{x+t} dt
$$

Solución.

$$
\begin{aligned}
\int_0^n v^t {}_tp^{aa}_x . \mu^{ad}_{x+t} dt &= \int_0^n v^t \exp\left\{-\int_0^t \mu^{ai}_{x+u} + \mu^{ad}_{x+u} du\right\} \mu^{ad}_{x+t} dt \\
&= \int_0^n v^t \exp\left\{-\int_0^t \mu^{ai}_{x+u} du\right\} {}_tp_x \mu_{x+t} dt
\end{aligned}
$$

donde ${}_tp_x\mu_{x+t}$ es la función de densidad de $T(x)$ con la ley Gomperz-Makeham. La prima neta es de $\$124, 365.00$. El código R siguiente calcula esta prima neta. ◀

```
#    programa para prima seguro vida
#    en caso de enfermedad alto costo

Imuxai2 = function(t,x){
fn <- function(u) {muxai(x+u)}
aax=integrate(Vectorize(fn), lower = 0, upper =t, subdivisions = 200)
return(exp(-aax$value))
}

Acxnai2 = function(x,i,n,pars){
v = 1/(1+i)
fn <- function(u) {v^u*Imuxai2(u,x)*tpx.gm(u,x,pars)*
makeham(x+u,pars)$hx}
aax=integrate(Vectorize(fn), lower = 0, upper = n, subdivisions = 200)
```

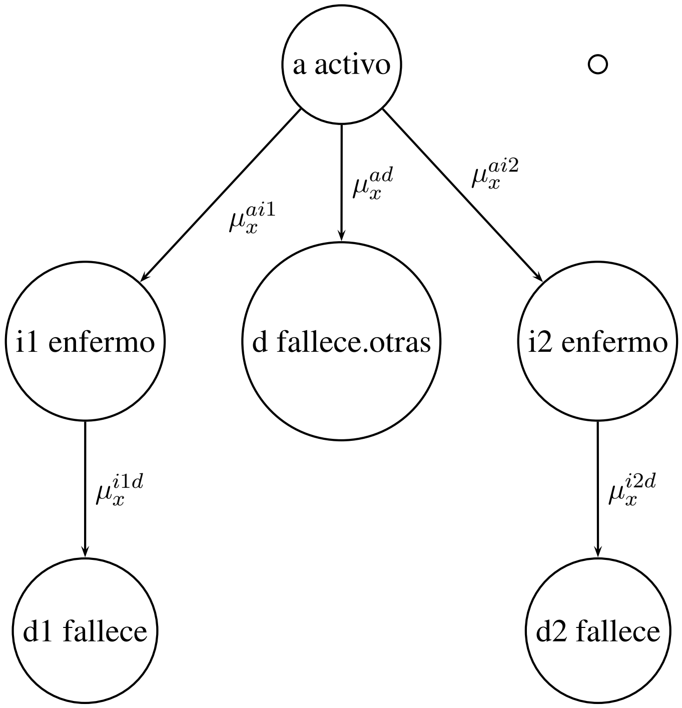


Figura 9.5: Modelo multiestados para dos enfermedades de alto costo

```
return(aax$value)
}

(Acx2ai2 = Acxnai2(x2,i,n,pars))
0.124365
```

Ejercicio 9.3.6. *El diagrama en el Figura 9.5, muestra un modelo multiestados para dos enfermedades de alto costo, con espacio de estados* $S = \{a, d, i_1, i_2, d_1, d_2\}$*, con* $d_j, j = 1, 2$ *el efecto fallecer de la enfermedad* i_j*, y* d *fallecer de otra causa. Asuma independencia para los eventos de ocurrencia de estas enfermedades para una vida (x). Asuma hipótesis similares a las dadas en el Ejercicio 9.3.5, en particular, asuma que las intensidades de transición de activo a cada tipo de enfermedad* $\mu_x^{ai_j}, j = 1, 2$*, son las dadas por la expresión en (9.32). Plantear y resolver las ecuaciones prospectivas para las probabilidades de transición de activo a enfermo en* t *años, para las enfermedades tipo 1 y 2:* ${}_tp_x^{ai_1}$*,* ${}_tp_x^{ai_2}$*.*

9.4. Notas

Medicina prepagada

La medicina prepagada es un contrato de prestación de servicios, con algunas coincidencias pero no comparable ni asimilable con el contrato de seguro regulado por el Código de Comercio. En algunas legislaciones internacionales los contratos se denominan como seguros médicos.

La medicina prepagada en Colombia está regulada por los Decretos 1570 de 1993 y 1486 de 1994. Los servicios son seguros de salud pero se contratan sobre uno ó más de los amparos de:

1. Consulta externa especializada en diagnósticos y terapias.
2. Exámenes de diagnóstico.
3. Hospitalización.
4. Urgencias.
5. Cirugías.
6. Odontología.

Estos servicios se prestan a cambio de una prima mensual. Y se proveen en forma directa ó a través de instituciones y profesionales externos, ó a elección del afiliado. La medicina prepagada es una actividad privada pero está clasificada como un servicio público y por tanto, sujeto a vigilancia por parte del Estado.

Los modelos actuariales

Los modelos que se presentan aquí están tomados de literatura académica en Pitacco [2014], entre otros, de manera que no se relacionan directamente con el modelo POS y ARS, ni con la medicina prepagada.

Sin embargo, los modelos actuariales considerados pueden ser útiles como alternativas de comparación para cálculo de primas. Por ejemplo, en el caso de que una persona jubilada sufra una enfermedad que le produzca parálisis total o parcial, no hay ninguna cobertura en la ley 100/93 para esta contingencia. El sistema de salud alemán introdujo en 1995 un seguro obligatorio para coberturas de LTCI, para el cual los métodos de cálculo de primas en Pitacco [2014] son adecuados.

El resultado de la introducción de la medicina prepagada resultó en una duplicidad de servicios con respecto al POS. Otros aspectos de tipo económico como la diferencia de tarifas para pagos a las IPS entre la medicina prepagada y las EPS es asunto de estudios que no se consideran aquí.

Primas actuariales

Las primas en el sistema público se denominan aportes. En el sistema privado son primas mensuales. En el sistema público las primas deben enviar a un fondo común del cual se hacen giros a cada EPS de acuerdo a su número de afiliados multiplicado por el valor de la UPC (unidad por capitación). Es un sistema redistributivo. En el caso de medicina prepagada, incluyendo planes complementarios, se podría utilizar fórmulas actuariales.

Margen de solvencia

El artículo 24 del Decreto 800 de 1992 establece cómo se calcula el margen de solvencia de una entidad de medicina prepagada. Debe ser un patrimonio técnico igual al mínimo entre la suma de las primas de los contratos nuevos en el último mes y los costos operacionales de servicios pagados en el mismo período. El reporte de este valor se debe hacer trimestralmente ante la SuperIntendencia de Salud.

Cobertura de seguro de enfermedad ruinosa ERC

En Colombia, el planteamiento de la cobertura de ERC en la Ley 100/93 se basa en que las EPS cubren completamente estas contingencias, mediante contratos de reaseguros, sin excluír los casos de pre-existencias y sin copagos en el sistema subsidiado y con copagos no excesivos en el contributivo. En éste último aplica un período de exclusión de 100 semanas, en el subsidiado no. Esta figura ha sido objeto de críticas por cuanto las Reaseguradoras aparentemente han buscado la manera de que las EPS y ARS ejerzan una selección de los afililados que no presenten riesgos de ERC. El problema es que el procedimiento no resulta claro y la atención de las ERC debe forzarla el paciente mediante tutelas. Como se señala en los medios, muchas veces la tutela se falla a favor del paciente cuando ya ha fallecido.

Resúmenes de artículos

En Ieva et al. [2015]

> In general HF is a chronic disease (Chronic Heart Failure - CHF), caused by many conditions that damage the heart muscle, including coronary artery disease, heart attack, cardiomyopathy and conditions that overwork the heart (high blood pressure, valve disease, thyroid disease, kidney disease, diabetes, or heart defects present at birth). In addition, HF can occur in the presence of a combination of these diseases. It is the leading cause of hospitalisation in people older than 65 years. A 2010 update from the American Heart Association (AHA) estimated that there were 5.8 million people with HF in the United States in 2006 (see McMurray et al.6 and Lloyd-Jones et al.,7 among others). There are an estimated 23 million people with HF worldwide. In the Lombardia district of Italy, which provides our motivating example, the HF incidence over the last decade ranged between 25, 000 and 30, 000 cases per year in a population of 9.7 million inhabitants

En Hajihosseini et al. [2016]

Noncommunicable diseases (NCD) are a major cause of death worldwide. About 63 % of the 57 million global deaths in 2008 were due to NCD, which are also on the rise every year.1 Four important NCD include cardiovascular diseases, chronic pulmonary diseases, cancers, and diabetes. The World Health Organization has focused on 4 main serious contributors to NCD: an unhealthy diet, cigarette smoking, excessive alcohol consumption, and physical inactivity. Ischemic heart diseases and cerebrovascular diseases were and are predicted to be the 2 leading causes of death in 2002 and 2030. With an aging population and advances in the diagnosis of cardiovascular diseases in Iran, we are seeing a considerable increase in the incidence of cardiovascular diseases. However, despite good progress in the treatment of these diseases, the mortality rate from cardiovascular diseases remains high.

Seguros de invalidez articulo en la enciclopedia pag. 3615 por Pitacco

9.5. Problemas

1. Para este problema asuma lo siguiente:

   - una fuerza de mortalidad estándar μ_{x+t} dada por una de las leyes de mortalidad: GM, Siler ó Makeham-Beard (MB).
   - una fuerza de mortalidad sub-estándar según el modelo multiplicativo para una vida (x), en caso de diagnóstico de insuficiencia renal, dada por

   $$\mu^s_{x+t} = \theta(x+t)\mu_{x+t}, \tag{9.41}$$

   donde la función $\theta(x) > 0$ está dada para cada edad $x \geq 20$ por la fórmula

   $$\theta(x) = \left(1 + \frac{11.68784}{x - 17.58258}\right)^{1.2}. \tag{9.42}$$

   - el modelo de multiestados $S = \{a, i, d\}$, sin recuperación, es decir, sin transición $i \not\to a$. Ver la Proposición 9.3.1, pag. 304 para las fórmulas de este modelo.
   - la intensidad de transición μ^{ai}_x dada en (9.32), pag. 310.
   - Suponga $x = 40$. Utilice una tasa técnica para anualidades de $i = 0.06$ y la tasa de inflación proyectada $i_q = 0.04$.

   Puntos:

   a) Considere la prima neta $(G^{(q)}\bar{a})_x$, dada en (8.20), pag. 268, asumiendo $q = 1$, para el pago de una renta vitalicia de 1 mill en el primer año, con incrementos anuales por inflación.

   Generalize la prima neta (es decir, escriba la fórmula) de una anualidad de asistencia médica $\bar{a}^{ai}_x$, a una fórmula similar a $(G^{(q)}\bar{a})_x$, que incluya el incremento por inflación i_q. Denote esta prima neta por $(G^{(q)}\bar{a})^{ai}_x$. Calcule e interprete el cociente (use el resultado del 2do trabajo para $(G^{(q)}\bar{a})_x$.)

   $$\frac{(G^{(q)}\bar{a})^{ai}_x}{(G^{(q)}\bar{a})_x} \tag{9.43}$$

b) Encuentre la expresión para ${}_tp_x^{ii}\mu_{x+t}^i$. Cómo se interpreta esta función?. Grafíquela para $t = 0, \ldots, 110 - x$.

c) Calcule las entradas de la Tabla (9.3) con los datos de este problema. Interprete el resultado de cada celda.

Cuadro 9.3: Tabla probabilidades de trasición

estado	a	i	d	suma
a	p_x^{aa}	p_x^{ai}	q_x^a	1
i	0	p_x^{ii}	q_x^i	1
d	0	0	1	1

2. Para este problema asuma lo siguiente:

- el modelo multiestados para dos enfermedades de alto costo, con espacio de estados $S = \{a, d, i_1, i_2, d_1, d_2\}$, propuesto en el Ejercicio 9.3.6
- una fuerza de mortalidad estándar μ_{x+t} dada por una de las leyes de mortalidad: GM, Siler ó Makeham-Beard (MB).
- una fuerza de mortalidad sub-estándar según el modelo multiplicativo para una vida (x), en caso de diagnóstico de insuficiencia renal, dada por

$$\mu_{x+t}^s = \theta(x+t)\mu_{x+t},$$

  donde la función $\theta(x) > 0$ está dada para cada edad $x \geq 20$ por la fórmula

$$\theta(x) = \left(1 + \frac{11.68784}{x - 17.58258}\right)^{1.2}.$$

- la intensidad de transición μ_x^{ai} dada en (9.32), pag. 310.
- Suponga $x = 50$. Utilice una tasa técnica para anualidades de $i = 0.07$. Utilice $n = 30$.

Puntos:

a) Encuentre las fórmulas para las probabilidades de transición en t años, de activo (es decir, libre de enfermedades) a enfermo con enfermedad tipo: 1, 2: ${}_tp_x^{ai_k}, k = 1, 2$.

b) Calcule la prima neta para un seguro médico continuo que paga 1 mill al momento del primer episodio de la enfermedad tipo 1 ó tipo 2, o de ambas, con base en la fórmula (9.38), pag. 316, dada por (ver [Deshmukh, 2012, pag. 55]).

$$\bar{A}^{\overline{ai_1,ai_2}}_{x:\overline{n}|} = \bar{A}^{ai_1}_{x:\overline{n}|} + \bar{A}^{ai_2}_{x:\overline{n}|} \tag{9.44}$$

c) Encuentre:

1) La probabilidad de que ambas enfermedades le ocurran a (x) dentro del intervalo de n años.
2) La probabilidad de que al menos una de estas enfermedades le ocurran a (x) dentro del intervalo de n años.

3. Para este problema asuma lo siguiente:

- una fuerza de mortalidad estándar μ_{x+t} dada por una de las leyes de mortalidad: GM, Siler ó Makeham-Beard (MB).
- una fuerza de mortalidad sub-estándar según el modelo multiplicativo para una vida (x), en caso de diagnóstico de insuficiencia renal, dada por

$$\mu^s_{x+t} = \theta(x+t)\mu_{x+t},$$

donde la función $\theta(x) > 0$ está dada para cada edad $x \geq 20$ por la fórmula

$$\theta(x) = \left(1 + \frac{11.68784}{x - 17.58258}\right)^{1.2}.$$

- el modelo de multiestados $S = \{a, i, d\}$, sin recuperación, es decir, sin transición $i \not\to a$. Ver la Proposición 9.3.1, pag. 304 para las fórmulas de este modelo.
- la intensidad de transición μ^{ai}_x dada en (9.32), pag. 310.
- Suponga $x = 40$. Utilice una tasa técnica para anualidades de $i = 0.06$ y la tasa de inflación proyectada $i_q = 0.04$.

Puntos:

a) Calcule la prima neta para una anualidad para la contingencia de invalidez total dada en (9.30), pag. 310, $\bar{a}^{ai}_x$, con pagos de 1 mill al final de cada año.

estado	a	i	d	suma
a	p_x^{aa}	p_x^{ai}	q_x^{a}	1
i	0	p_x^{ii}	q_x^{i}	1
d	0	0	1	1

b) Calcule las entradas de la Tabla (9.3.3) con los datos de este problema. Interprete el resultado de cada celda.

c) Calcule $\bar{A}_{x_1}$, la prima de un seguro de vida entera, definida en (8.47), pag. 277. Si se considera un seguro con valor $\bar{A}_{x_1} + \bar{a}_x^{ai}$, qué contingencias está cubriendo y cómo son los posibles pagos?. Explique.

4. Para este problema asuma lo siguiente:

- el modelo multiestados para dos enfermedades de alto costo, con espacio de estados $S = \{a, d, i_1, i_2, d_1, d_2\}$, propuesto en el Ejercicio 9.3.6
- una fuerza de mortalidad estándar μ_{x+t} dada por una de las leyes de mortalidad: GM, Siler ó Makeham-Beard (MB).
- una fuerza de mortalidad sub-estándar aditiva, tal que: $\mu_{x+t}^{s} = 0.02 + \mu_{x+t}$, para una vida (x) que se le diagnostica una insuficiencia renal.
- la intensidad de transición μ_x^{ai} dada en (9.32), pag. 310.
- Suponga $x = 40$. Utilice una tasa técnica para anualidades de $i = 0.06$ y la tasa de inflación proyectada $i_q = 0.04$.

Puntos:

a) Encuentre las fórmulas para las probabilidades de transición en t años, de activo (es decir, libre de enfermedades) a enfermo con enfermedad tipo: 1, 2: ${}_tp_x^{a,i_k}, k = 1, 2$.

b) Calcule la prima neta para un seguro médico continuo que paga 1 mill al momento del primer episodio de la enfermedad tipo 1 ó tipo 2, o de ambas, con base en la fórmula (9.38), pag. 316, dada por (ver [Deshmukh, 2012, pag. 55]).

$$\bar{A}_{x:\overline{n}|}^{\overline{ai_1, ai_2}} = \bar{A}_{x:\overline{n}|}^{ai_1} + \bar{A}_{x:\overline{n}|}^{ai_2} \tag{9.45}$$

c) Encuentre:

1) La probabilidad de que ambas enfermedades le ocurran a (x) dentro del intervalo de n años.
2) La probabilidad de que al menos una de estas enfermedades le ocurran a (x) dentro del intervalo de n años.

5. Para este problema asuma lo siguiente:

- una fuerza de mortalidad sub-estándar aditiva, tal que: $\mu^s_{x+t} = k+\mu_{x+t}, k > 0$, para una vida (x) en caso de diagnóstico de insuficiencia renal.
- una fuerza de mortalidad estándar μ_{x+t} dada por una de las leyes de mortalidad: GM, Siler ó Makeham-Beard (MB).
- el modelo de multiestados $S = \{a, i, d\}$, sin recuperación, es decir, sin transición $i \not\to a$. Ver la Proposición 9.3.1, pag. 304 para las fórmulas de este modelo.
- Utilice la intensidad de transición μ^{ai}_x dada en (9.32).
- Suponga $x = 40, t = 20,\ k = 0.01$. Utilice una tasa técnica para anualidades de $i = 0.06$.

Puntos:

a) Evalúe la prima neta para una anualidad médica dada en (9.30), pag. 310, $\bar{a}^{ai}_x$, con pagos de 1 mill al final de cada año, para cubrir las gastos que generan el cuidado de una posible insuficiencia renal.

b) Calcule la prima neta ${}_2\bar{A}^{ai}_{x:\overline{n}|}$ para un seguro médico continuo que paga 1 mill al momento del primer episodio de insuficiencia renal, incluyendo el seguro de vida (como anexo a la póliza), con base en la fórmula (9.39), pag. 316. Use $n = 110 - x$ en (9.39) de manera que es un seguro vida entera.

$${}_2\bar{A}^{ai}_{x:\overline{n}|} = {}_1\bar{A}^{ai}_{x:\overline{n}|} + \int_0^n v^t {}_tp^{aa}_x .\mu^{ad}_{x+t} dt$$

c) Calcule la prima neta de un seguro vida entera $\bar{A}_{x^s}$, definida en (8.47), pag. 277, para una vida a la que ya se le diagnosticó insuficiencia renal. Compare con el valor del anexo de seguro de vida con valor $\int_0^n v^t {}_tp^{aa}_x .\mu^{ad}_{x+t} dt$. Cuál es la diferencia?. Explique.

6. Para este problema asuma lo siguiente:

- una fuerza de mortalidad estándar μ_{x+t} dada por una de las leyes de mortalidad: GM, Siler ó Makeham-Beard (MB).
- una fuerza de mortalidad sub-estándar según el modelo multiplicativo para una vida (x) que se le diagnostica cáncer de próstata

$$\mu^s_{x+t} = \theta(x+t)\mu_{x+t}, \tag{9.46}$$

donde la función $\theta(x) > 0$ está dada para cada edad $x \geq 60$ por la fórmula

```
theta = function(x){
a0 = 81.67603376; a1 = -2.55346589 ;
a2 = 0.02687182; a3 =  -0.00009401;
a0+a1*x+a2*x^2+a3*x^3}
```

- el modelo de multiestados $S = \{a, i, d\}$, sin recuperación, es decir, sin transición $i \not\to a$. Ver la Proposición 9.3.1, pag. 304 para las fórmulas de este modelo.
- la intensidad de transición μ^{ai}_x dada en (9.32), pag. 310.
- Suponga $x = 65$. Utilice una tasa técnica para anualidades de $i = 0.07$ y la tasa de inflación proyectada $i_q = 0.04$.

Puntos:

a) Considere la prima neta $(G^{(q)}\bar{a})_x$, dada en (8.20), pag. 268, asumiendo $q = 1$, para el pago de una renta vitalicia de 1 mill en el primer año, con incrementos anuales por inflación.

Generalize la prima neta (es decir, escriba la fórmula) de una anualidad de asistencia médica $\bar{a}^{ai}_x$, a una fórmula similar a $(G^{(q)}\bar{a})_x$, que incluya el incremento por inflación i_q. Denote esta prima neta por $(G^{(q)}\bar{a})^{ai}_x$. Calcule e interprete el cociente (use el resultado del 2do trabajo para $(G^{(q)}\bar{a})_x$.)

$$\frac{(G^{(q)}\bar{a})^{ai}_x}{(G^{(q)}\bar{a})_x} \tag{9.47}$$

b) Encuentre la expresión para ${}_tp^{ii}_x\mu^i_{x+t}$. Cómo se interpreta esta función?. Grafíquela para $t = 0, \ldots, 110 - x$.

Cuadro 9.4: Tabla probabilidades de trasición

estado	a	i	d	suma
a	p_x^{aa}	p_x^{ai}	q_x^a	1
i	0	p_x^{ii}	q_x^i	1
d	0	0	1	1

c) Calcule las entradas de la Tabla (9.4) con los datos de este problema. Interprete el resultado de cada celda.

7. Suponga que (x) sufre de insuficiencia cardíaca (IC) y su fuerza de mortalidad se modela como una mortalidad multiplicativa sub-estándar, ${}_tp_{x^s} = e^{-kt}{}_tp_x$, con una mortalidad de base con la ley GM. Asuma: $k = 0.01$, $x = 56$ y ley GM para la tabla colombiana de mortalidad de los Asegurados $55/69$:

$$\mu_x = 0.0015 + 10^{-4.222+0.043^x}$$
$${}_tp_x = s^t g^{c^x(c^t-1)}$$

con $s = 0.998501$,$g = 0.999394$, $c = 1.10407$.

Utilice la fórmula (2.76) para encontrar $\mathring{e}_{56}$, $\mathring{e}_{56^s}$, la esperanza de vida de (x) con IC. Y calcule el porcentaje en que se reduce la esperanza de vida en este caso: $\frac{\mathring{e}_{56}-\mathring{e}_{56^s}}{\mathring{e}_{56}}$.

8. En una población los fumadores (F) (más de una cajetilla al día) tienen una fuerza de mortalidad doble que la de los no fumadores (NF). Asuma que la fuerza de mortalidad de los NF es la GM.

Suponga que (x) y (x^F) son dos vidas independientes e idénticas, la primera NF y la segunda F. Calcule la probabilidad de que la vida residual de (x^F) sea menor que la de (x).

9. Dado ${}_tp_x = \left(\frac{1+x}{1+x+t}\right)^3$, $t \geq 0$,

a) Calcule $\mathring{e}_{41}$

b) Asumiendo la hipótesis de linealidad (2.23), evalúe la probabilidad de que (41) sobreviva 6 meses.

10. Suponga m vidas todas de edad (x), con características vitales similares. Denote por ${}_tp\frac{[r]}{x(m)}$ la probabilidad de que exactamente r de las m sobrevivan t años. Es una probabilidad binomial. El número de ensayos es m. El "éxito" en cada ensayo es "sobrevivir t años", luego la probabilidad de éxito es ${}_tp_x$. La probabilidad de r éxitos en m ensayos es:

$$ {}_tp\frac{[r]}{x(m)} = \binom{m}{r} \left({}_tp_x \right)^r \left({}_tq_x \right)^{m-r} $$

Se tiene un grupo de 30 personas de edad 25. Encuentre la probabilidad de que exactamente 26 sobrevivan 10 años utilizando una de las leyes de mortalidad.

11. En la Tabla siguiente 9.5 aparecen los parámetros Gompertz-Makeham de las Tablas de mortalidad y supervivencia para hombres y mujeres (1959-1965) Bélgica. Comparar las probabilidades siguientes con la base técnica Danesa en el Ejemplo2.6.1,

	1959-1965-H	1959-1965-M
s	0.9992580	0.9997898
g	0.9991090	0.0992390
c	1.0955560	1.0992390

Cuadro 9.5: Parámetros Gompertz-Makeham para Tablas de Vida 59-63 Bélgica, hombres y mujeres

utilizando las funciones en la librería R `eha`.

CAPÍTULO 10

Capitalización con Tasas Aleatorias

10.1. Introducción

Un tema actual en la Matemática Financiera es el uso de instrumentos que involucran tasas de interés aleatorias. Algunos ejemplos son:

- Créditos con tasas variables: DTF, IPC
- Bonos con tasas de cupón variables (ej. = DTF+$3\,\%$).
- Rendimientos variables de Fondos de Inversión: Fondos de Fiducia, Fondos de Pensiones Voluntarias.

Una característica de estos instrumentos es que, dado que dependen de una cantidad aleatoria, sus resultados no pueden predecirse con anticipación. Una estrategia común es considerar tres escenarios: pesimista, normal, optimista, y con base en una asignación de un valor específico de las tasas para cada uno, utilizar técnicas de valoración con tasas fijas, y comparar los resultados.

Un enfoque alterno consiste en desarrollar modelos probabilísticos para estos instrumentos y plantear los resultados en términos de las distribuciones de probabilidad de variables aleatorias.

Interesa analizar en particular el caso de la financiación de una anualidad cuando el emisor debe utilizar un fondo de inversiones, por ejemplo, una fiducia, con lo cual debe utilizar tasas de rendimiento aleatorias.

10.2. Flujo de caja con tasas de rendimiento aleatorias

El modelo de flujo de caja para los saldos $F(k)$, con tasas de rendimiento $i_m(k)$ aleatorias, efectivas en cada período m, con pagos $r(k)$ vencidos durante n años, donde $(i_m(k) \in (-1,1), k = 0,1,\ldots)$ es un proceso aleatorio, está dado por

$$F(k) = (1 + i_m(k))F(k-1) - r(k),\ k = 1,2,\ldots,nm. \tag{10.1}$$

El valor $F(0)$ está dado y se cumple una condición de cierre en el tiempo $t = mn$ que se explica a continuación.

Proposición 10.2.1. *La solución de la ecuación (10.1) está dada por*

$$F(k) = \prod_{s=1}^{k}(1 + i_m(s)) \left(F(0) - \sum_{j=1}^{k} \frac{r(j)}{\prod_{s=1}^{j}(1 + i_m(s))} \right). \tag{10.2}$$

Demostración. La comprobación consiste en comprobar que la expresión para $F(k)$ en (10.2) satisface (10.1), para lo cual se empieza descomponiendo el miembro derecho de (10.2) en un término para $s = k$ y otro para $s \leq k-1$:

$$F(k) = (1 + i_m(k)) \prod_{s=1}^{k-1}(1 + i_m(s)) \left(F(0) - \sum_{j=1}^{k} \frac{r(j)}{\prod_{s=1}^{j}(1 + i_m(s))} \right)$$

$$
\begin{aligned}
&= (1 + i_m(k)) \prod_{s=1}^{k-1}(1 + i_m(s)) \left(F(0) - \frac{r(k)}{\prod_{s=1}^{k}(1 + i_m(s))} \right. \\
&\left. - \sum_{j=1}^{k-1} \frac{r(j)}{\prod_{s=1}^{j}(1 + i_m(s))} \right) \\
&= (1 + i_m(k)) \left[\prod_{s=1}^{k-1}(1 + i_m(s)) \left(F(0) - \sum_{j=1}^{k-1} \frac{r(j)}{\prod_{s=1}^{j}(1 + i_m(s))} \right) \right. \\
&\left. - \frac{r(k)}{(1 + i_m(k))} \right] \\
&= (1 + i_m(k))F(k-1) - r(k).
\end{aligned}
$$

$\square$

Definimos el valor presente de $F(k)$, $VP(k)$, como:

$$
VP(k) := F(k) \left(\prod_{s=1}^{k}(1 + i_m(s)) \right)^{-1}. \tag{10.3}
$$

O, de manera equivalente,

$$
VP(k) = F(0) - \sum_{j=1}^{k} \frac{r(j)}{\prod_{s=1}^{j}(1 + i_m(s))}. \tag{10.4}
$$

Una posible condición de cierre para (10.1) es: $\mathbb{E}(VP(nm)) = 0$. Aplicándola en la ecuación (10.4) con $k = nm$ se obtiene:

$$
F(0) = \sum_{j=1}^{k} \mathbb{E} \left(\frac{r(j)}{\prod_{s=1}^{j}(1 + i_m(s))} \right). \tag{10.5}
$$

El valor $F(0)$ así determinado se denomina el valor actuarial de la anualidad.

10.3. Transformación usando tasas continuas

El valor presente aleatorio en (10.4) también se puede escribir, mediante la transformación

$$1 + i_m(j) = e^{\delta_m(j)}$$

como:

$$VP(k) = F(0) - \sum_{j=1}^{k} r(j) e^{-\sum_{s=1}^{j} \delta_m(s)}. \tag{10.6}$$

Si se define la variable: $\Lambda(j) := \sum_{s=1}^{j} \delta_m(s)$ entonces (10.6) se expresa como

$$VP(k) = F(0) - \sum_{j=1}^{k} r(j) e^{-\Lambda(j)}. \tag{10.7}$$

El valor actuarial de la anualidad utilizando esta transformación queda

$$F(0) = \sum_{j=1}^{mn} r(j) \mathbb{E}\left(e^{-\Lambda(j)}\right). \tag{10.8}$$

La expresión (10.7) es una manera más directa para utilizar modelos estocásticos para las tasas, a partir de $\delta_m(j)$, como se hace en la sección siguiente en donde se desarrollan tres de estos modelos.

10.4. Modelos para las tasas de rendimiento aleatorias

En las secciones siguientes se desarrolla el cálculo del valor presente de anualidades con tasas aleatorias, (10.8), asumiendo tres modelos diferentes para $\delta_m(j)$.

$$\text{Modelos para } \delta_m(j) = \begin{cases} \text{iid Normales} = iid\, N(\delta_m, \sigma_m^2) \\ \text{Medias Móviles de orden 1 = MA(1)} \\ \text{Autoregresivo de orden 1 = AR(1)} \end{cases}$$

Primero se asume que las tasas conforman una sucesión de variables independientes e idénticamente distribuídas Normal, $\delta_m(j) \sim iid\, N(\delta_m, \sigma_m^2)$. Entonces los factores $e^{\delta_m(j)} = 1 + i_m(j)$ se distribuyen LogNormal independientes.

Luego las tasas se asume que siguen un modelo de medias móviles de orden uno, $\delta_m(s) \sim MA(1)$.

Finalmente se asume que las tasas siguen un proceso autoregresivo de orden uno $\delta_m(s) \sim AR(1)$.

El objetivo es calcular en cada caso el valor esperado (10.8)

$$F(0) = \sum_{j=1}^{mn} r(j)\mathbb{E}\left(e^{-\sum_{s=1}^{j} \delta_m(s)}\right).$$

10.5. Anualidades con tasas i.i.d. Log-Normales

En este caso se asume $\delta_m(k) \sim iid\, N(\delta_m, \sigma_m^2)$, por tanto

$$1 + i_m(k) = e^{\delta_m(k)} \sim LogNor(\delta_m, \sigma_m^2), \tag{10.9}$$

las variables $\left(e^{\delta_m(k)}, k = 1, 2 \ldots\right)$ se distribuyen iid LogNormal. Las fórmulas para la esperanza y la varianza de la LogNormal se aplican para obtener

$$\mathbb{E}(e^{\delta_m(k)}) = e^{\delta_m + \sigma_m^2}, \tag{10.10}$$

$$Var(e^{\delta_m(k)}) = e^{2\delta_m + \sigma_m^2}(e^{\delta_m^2} - 1). \tag{10.11}$$

Además, la suma $\Lambda(j) = \sum_{s=1}^{j} \delta_m(s)$ se distribuye Normal con media $j\delta_m$ y varianza $j\sigma_m^2$,

$$\Lambda(j) \sim N(j\delta_m, j\sigma_m^2). \tag{10.12}$$

Por tanto, $\mathbb{E}(e^{-\Lambda(j)})$ se calcula usando la función generadora de momentos de una Normal $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, dada por

$$\mathbb{E}(e^{\theta X}) = e^{\theta\mu + \frac{1}{2}\theta^2\sigma^2}.$$

Por tanto,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left(\sum_{j=1}^{nm} r(j) e^{-\sum_{s=1}^{j} \delta_m(s)}\right) &= \sum_{j=1}^{nm} r(j)\mathbb{E}(e^{-\sum_{s=1}^{j}\delta_m(s)}) = \\ \sum_{j=1}^{nm} r(j) e^{-j\delta_m + \frac{1}{2} j \sigma_m^2} &= \sum_{j=1}^{nm} r(j) e^{-j(\delta_m - \frac{1}{2}\sigma_m^2)}. \end{aligned}$$

En conclusión, si se introduce una tasa de interés auxiliar, i_m^*, formada con los parámetros δ_m y σ_m, dada por

$$i_m^* = e^{\delta_m - \frac{1}{2}\sigma_m^2} - 1,$$

el costo actuarial de una anualidad a n años financiada mediante tasas aleatorias según (10.9), con pagos vencidos $r(k)$, cada m períodos, está dado por

$$F(0) = \sum_{j=1}^{nm} v_m^{*j} r(j). \tag{10.13}$$

donde $v_m^* = 1/(1 + i_m^*)$.

Ejemplo 10.5.1. *Considere el caso de un fondo de pensiones voluntarias, Fidupensión, con datos del valor diario de la unidad entre 01/01/2010 y 31/12/2013, como aparecen en la Figura 10.1. En el programa R se muestra un análisis para implementar el modelo de tasas Log-Normal.*

El problema consiste en calcular cuánto costaría una anualidad a 15 años, financiada con este fondo, si los pagos mes vencido inician en 2.5 mill. Cuál es la tasa que podría ofrecer el fondo?.

De los resultados se concluye que la tasa efectiva promedio que puede ofrecer el fondo es $i = 3.190036\,\%$*, y si el incremento que podría ofrecer anualmente es de* $2.0\,\%$ *entonces el costo es de* $\$408'437.100$ *mill.*

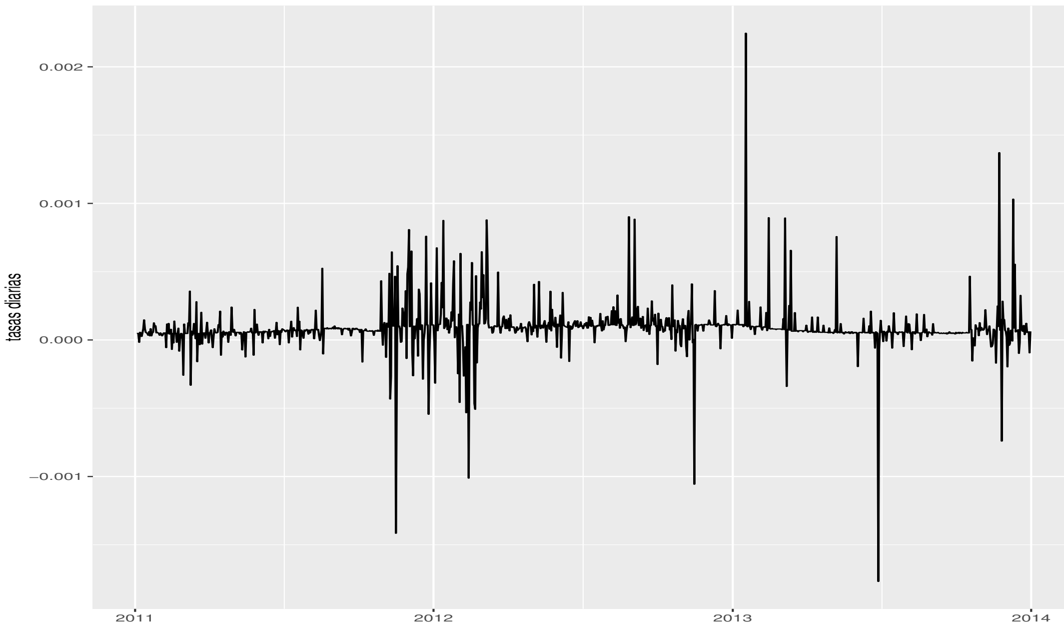


Figura 10.1: Tasas de rendimiento diarias fondo Fidupensiones 2011-2014

```
#------valor diario de la unidad: u
#------tasa efectiva diaria: iv
iv = diff(log(u),1,1)
liv = log(1+iv)
#------------examinar la normalidad de liv
require(moments)
jarque.test(liv)
(skewness(liv))
(kurtosis(liv))
#------------calcular media y de
(dm = mean(liv))
(sm = sd(liv))
#-----------tasa diaria
(im = exp(dm-sm^2/2)-1)
#-----------tasa anual
(ia = (1+im)^(360)-1)
# respuesta:0.03190036
```

```
#------------calcular costo anualidad
source("anualidades.formulas.r")
#--------parametros
m = 12
n = 15
q = 1
i = ia
iq = 0.02
C = 2.5
(Cp = C*Gavqmn(i,m,q,n,iq))
#--------respuesta: 408.4371
```

10.6. Anualidades con tasas MA(1)

Este modelo se desarrolla en Bowers et al. [1997, sec. 21.4.1, pag. 649], y esta sección se basa en esa referencia. En este caso el supuesto es $\delta_m(k) \sim MA(1)$. La definición de un proceso MA(1) gaussiano es la siguiente.

Definición 10.6.1. *Una sucesión de variables aleatorias* $(\delta_m(k), k = 1, 2, \ldots)$ *sigue un modelo MA(1) gaussiano, denominado media móvil de orden 1 gaussiana, si cumple la relación siguiente*

$$\delta_m(k) = \delta + \epsilon(k) - \theta\epsilon(k-1), k = 1, 2, \ldots, \tag{10.14}$$

donde $\epsilon(k) \sim iidN(0, \sigma^2)$ *es una sucesión de variables aleatorias iid Normales, y* $\theta \in (-1, 1)$ *es un parámetro.*

En lo que sigue siempre se asumirá que se trata de media móvil gaussiana y se referirá como media móvil simplemente. Algunas propiedades de un proceso MA(1) son

Proposición 10.6.1. *Si* $\delta_m(k) \sim MA(1)$ *entonces se cumple*

$$\begin{aligned} \delta_m(k) &\sim N(\delta, (1+\theta^2)\sigma^2), \\ Cov(\delta_m(k), \delta_m(k+1)) &= -\theta\sigma^2, \\ Cov(\delta_m(k), \delta_m(k+m)) &= 0, \; \forall m \geq 2. \end{aligned}$$

De estas propiedades se concluye que un MA(1) es una sucesión de variables idénticamente distribuídas Normal, pero no independientes, aunque como las correlaciones son nulas para los rezagos $m \geq 2$ se dice que es un proceso "débilmente autocorrelacionado". Se procede ahora a evaluar la esperanza $\mathbb{E}\left(e^{-\sum_{s=1}^{j}\delta_m(s)}\right)$. Primero se encuentra la distribución de la variable $\Lambda(j) := -\sum_{s=1}^{j}\delta_m(s)$.

$$
\begin{aligned}
\sum_{s=1}^{j}\delta_m(s) &= \sum_{s=1}^{j}\delta + \epsilon(s) - \theta\epsilon(s-1) = j\delta + \sum_{s=1}^{j}\epsilon(s) - \theta\epsilon(s-1) \\
&= j\delta + \epsilon(j) - \theta\epsilon(0) + (1-\theta)\sum_{s=1}^{j-1}\epsilon(s).
\end{aligned}
$$

Como $\epsilon(s) \sim iidN(0, \sigma^2)$ entonces, por propiedades de la distribución Normal,

$$
(1-\theta)\sum_{s=1}^{j-1}\epsilon(s) \sim N(0, (j-1)(1-\theta)^2\sigma^2).
$$

Además, $\epsilon(j) - \theta\epsilon(0)$ es independiente de $\sum_{s=1}^{j-1}\epsilon(s)$, y se distribuye $N(0, (1+\theta^2)\sigma^2)$. Por tanto

$$
\epsilon(j) - \theta\epsilon(0) + (1-\theta)\sum_{s=1}^{j-1}\epsilon(s) \sim N(0, (1+\theta^2)\sigma^2 + (j-1)(1-\theta)^2\sigma^2).
$$

Finalmente, se tiene

$$
\Lambda(j) = -\sum_{s=1}^{j}\delta_m(s) \sim N(-j\delta, (1+\theta^2)\sigma^2 + (j-1)(1-\theta)^2\sigma^2).
$$

Utilizando la función generadora de momentos de la Normal obtenemos

$$
\mathbb{E}\left(e^{-\sum_{s=1}^{j}\delta_m(s)}\right) = e^{-j\delta + \frac{\sigma^2}{2}((1+\theta^2)+(j-1)(1-\theta)^2)}. \tag{10.15}
$$

Re-organizando el exponente en el último término $-j\delta + \frac{\sigma^2}{2}((1+\theta^2) + (j-1)(1-\theta)^2) = -j(\delta - \frac{\sigma^2}{2}(1-\theta)^2) + \theta\sigma^2$, y reemplázando de nuevo en la misma expresión se obtiene el valor actuarial de la anualidad, según (**??**)

$$F(0) = e^{\theta\sigma^2} \sum_{j=1}^{mn} r(j) e^{-j(\delta - \frac{\sigma^2}{2}(1-\theta)^2)}. \tag{10.16}$$

Se manera similar al caso iid Normal, si se define una tasa efectiva para cada período $1/m$, como $i_m = \exp(\delta - \frac{\sigma^2}{2}(1-\theta)^2)) - 1$, el valor presente actuarial de la anualidad con tasas aleatorias MA(1) se reduce a descontar los pagos $r(j)$ con el factor de descuento $v_m = 1/(1+i_m)$, y ajustar un factor adicional que multiplica la sumatoria, obteniéndose: $F(0) = e^{\theta\sigma^2} \sum_{j=1}^{nm} v_m^j r(j)$.

10.7. Anualidades con tasas AR(1)

En esta sección se utiliza un modelo autorregresivo de orden 1, AR(1) para la tasas $\delta_m(k)$, definido a partir de una ecuación recursiva:

Definición 10.7.1. *Una sucesión de variables aleatorias* $(\delta_m(k), k = 1, 2, \ldots)$ *sigue un modelo AR(1) gaussiano, denominado proceso autoregresivo de orden 1 gaussiano, si cumple la relación siguiente*

$$\delta_m(k) = \theta + \varphi(\delta_m(k-1) - \theta) + z(k),\ k = 1, 2, \ldots \tag{10.17}$$

donde las variables $(z(k), k = 1, 2, \ldots)$ *se asumen* $iid\, N(0, \sigma^2)$*,* $\theta \in (-1, 1)$ *y* $\delta_m(0) \sim N(\theta, \sigma^2/(1-\varphi^2))$ *e independiente de las* $z(k)$*.*

En lo que sigue se asume que un AR(1) indica autoregresivo gaussiano. Las propiedades del modelo (10.17) se resumen en el siguiente resultado

Proposición 10.7.1. *Si* $\delta_m(k) \sim AR(1)$ *entonces se cumple*

$$\begin{aligned} \delta_m(k) &\sim N(\theta, \sigma^2/(1-\varphi^2)), \\ Cov(\delta_m(k), \delta_m(j+k)) &= \frac{\sigma^2 \varphi^{|j|}}{1-\varphi^2},\ j = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots. \end{aligned}$$

La variable de interés, en vista de la ecuación (**??**), es nuevamente, $\Lambda(j) = \sum_{s=1}^{j} \delta_m(s)$. A partir de la definición del modelo AR(1) (10.17), se puede probar:

Proposición 10.7.2. *Si* $\delta_m(k) \sim AR(1)$ *y* $\Lambda(j) = \sum_{s=1}^{j} \delta_m(s)$ *entonces se cumple*

$$\begin{aligned} \Lambda(j) &\sim N(m_j, S_j^2),\ j = 1, 2, \ldots, \\ m_j &= j\theta, \\ S_j^2 &= \frac{\sigma^2(j(1-\varphi^2) - 2\varphi(1-\varphi^j))}{(1-\varphi^2)(1-\varphi)^2}. \end{aligned}$$

de donde obtenemos, con base en la función generadora de momentos de una normal:

$$E(e^{-\Lambda_j}) = e^{-m_j + \frac{1}{2}S_j^2},$$

y por tanto el valor actuarial de la anualidad, según (**??**)

$$F(0) = \sum_{j=1}^{mn} r(j) e^{-m_j + \frac{1}{2}S_j^2}. \tag{10.18}$$

El poder describir la evolución aleatoria del valor presente del saldo $e^{-\Lambda(k)}F(k)$ permite plantear problemas de interés.

1. Por ejemplo, el riesgo de no cumplir la condición de cierre, definido como la probabilidad
$$\mathbb{P}(F(0) < \sum_{j=1}^{mn} r(j) e^{-\Lambda(j)}). \tag{10.19}$$
Aunque difícil de evaluar analíticamente, es fácil calcularla mediante simulación.

2. Tiempo de primer arribo a cero. El caso en el cual el valor presente llega a ser cero. Para el caso de un Emisor que paga una anualidad este evento consistiría en llegar a una situación de insolvencia. Se define el tiempo de primer arribo a cero como
$$T = \text{mín}\{k : e^{-\Lambda(k)}F(k) < 0\} \tag{10.20}$$
Entonces se trata de calcular $\mathbb{P}(T < nm)$.

3. La probabilidad de que el saldo no supere un valor dado S

$$P(\text{máx}\{F(k) : 1 \leq k \leq mn\} < S)$$

4. Nótese que (10.4) se puede escribir también de esta manera:

$$VP(k) = F(0) - \sum_{j=1}^{k} r(j) Z_1 Z_2 \ldots Z_j, \tag{10.21}$$

donde $Z_j = (1 + i_m(j))^{-1}$. La expresión (10.21) sirve para definir un tipo especial de variables aleatorias, denominadas perpetuidades.

10.8. Capitalización en tiempo continuo con tasas aleatorias

Un modelo de capitalización en tiempo continuo con tasas aleatorias $\delta(t)$ y con retiros a una tasa lineal se puede definir así:

$$dS(t) = S(t)\delta(t)dt - (c + \rho\lfloor t \rfloor)dt,\ t > 0. \tag{10.22}$$

donde $\delta(t)dt$ está dada por:

$$\delta(t)dt = \delta dt + \sigma dW(t), \tag{10.23}$$

donde δ y σ son constantes positivas y $W(t), t \geq 0$ es el proceso Wiener estándar. La tasa $\delta(t)$ es la que ofrece un fondo de inversiones en donde se financian los pagos de esta anualidad. El supuesto equivale a suponer que el fondo tiene rendimientos según un Movimiento Browniano Geométrico. Al reemplazar y simplificar se obtiene la ecuación diferencial estocástica para el saldo $S(t)$:

$$dS(t) = (\delta S(t) - (c + \rho\lfloor t \rfloor))dt + \sigma S(t)dW(t), \tag{10.24}$$

Con $S(0) = S$. Esta ecuación es una ecuación diferencial estocástica de tipo lineal no homogénea. Desarrolle y/o compruebe

1. Encuentre la solución general de la ec (10.24).
2. Coloque como condición de cierre $E(S(T)) = 0$. Encuentre S.

10.9. Seguros con valores atados a un índice (unit linked insurance)

Un seguro vida entera para (x), con pagos al final del año de fallecimiento que aumentan anualmente a una tasa i_q, efectiva anual (el costo de vida anual), tiene valor presente

$$Z_1 = C(1+i_q)^{K(x)+1} v^{K(x)+1} = C v_s^{K(x)+1}, \tag{10.25}$$

donde C es el pago en el primer años, $v = 1/(1+i)$ es el factor de descuento, i es la tasa técnica; se asume $i > i_q$, y $v_s = 1/(1+i_s)$, con $i_s = (1+i)/(1+i_q) - 1$ una tasa auxiliar, de tal forma que la prima neta de este seguro es

$$A_{x|i_s} = \mathbb{E}(Z_1).$$

Un producto relacionado, también con el objetivo de proveer un valor asegurado actualizado por costo de vida, es el seguro atado a un índice, en inglés "unit-linked insurance".

Consiste en definir un pago con base en el valor de la unidad de un fondo de inversiones, pero manteniendo una garantía mínima. El pago se puede describir como: "el máximo entre un seguro temporal a n años, que se actualiza por costo de vida (la garantía mínima) y uno que paga de acuerdo al valor de la unidad de un fondo de inversiones (la oportunidad)".

Defina S_k como el valor la unidad en un fondo de inversiones en el tiempo k. Utilizando la notación: $a \vee b := max(a, b)$, la variable valor presente de un seguro ULK es

$$Z = v^{K(x)+1} \left[S_0(1+i_q)^{K(x)} \vee S_{K(x)+1} \right] I(K(x) \leq n-1), \tag{10.26}$$

donde S_0 es el valor de la unidad en el tiempo $k = 0$ de referencia. El pago del seguro se contrata proporcional al valor S_0 inicial. Por ejemplo, $C = 1000 \times S_0$.

Una alternativa para la valoración es utilizar un modelo en tiempo continuo y aplicar la valoración financiera con base en la fórmula Black-Scholes, que se expone a continuación. Se asume un seguro temporal a n años para (x). El valor presente para el seguro ULK es

$$Z = v^{T(x)} \left[S_{T(x)} \vee S_0(1 + i_q)^{T(x)} \right] I(T(x) \le n) \tag{10.27}$$

El modelo probabilístico para $S_t, t \ge 0$, se denomina el modelo LogNormal Black-Scholes. Asume que (la definición se basa en el proceso de Wiener pero para la compresión del procedimiento se coloca como sigue)

$$S_t = S_0 e^{X_t}, \tag{10.28}$$

$$X_t \sim N(\mu t, \sigma^2 t). \tag{10.29}$$

Entonces, para calcular $\mathbb{E}(Z)$ utiliza la identidad: $b \vee a = a + (b - a)_+$:

$$\begin{aligned}
Z &= v^{T(x)} \left[S_{T(x)} \vee S_0(1 + i_q)^{T(x)} \right] I(T(x) \le n) \\
&= v^{T(x)} \left[S_0(1 + i_q)^{T(x)} + \left(S_{T(x)} - S_0(1 + i_q)^{T(x)} \right)_+ \right] I(T(x) \le n) \\
&= S_0 v^{T(x)} (1 + i_q)^{T(x)} I(T(x) \le n) \\
&+ v^{T(x)} \left(S_{T(x)} - S_0(1 + i_q)^{T(x)} \right)_+ I(T(x) \le n).
\end{aligned}$$

Al tomar esperanza se obtiene

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(Z) = {} & S_0 \mathbb{E}(v^{T(x)} (1 + i_q)^{T(x)} I(T(x) \le n)) \\
& + \mathbb{E} \left(v^{T(x)} \left(S_{T(x)} - S_0(1 + i_q)^{T(x)} \right)_+ I(T(x) \le n) \right).
\end{aligned}$$

El primer término de la esperanza es conocido: es la prima de un temporal en tiempo continuo a n años. Por tanto,

$$\begin{aligned}
& S_0 \mathbb{E}(v^{T(x)} (1 + i_q)^{T(x)} I(T(x) \le n)) = S_0 \bar{A}^{1}_{x:\overline{n|}i_s} \\
& i_s = (1 + i)/(1 + i_q) - 1.
\end{aligned}$$

El segundo término se puede desarrollar mediante el teorema de probabilidad total para esperanzas, condicionando sobre $T(x) = t$,

$$\mathbb{E}\left[v^{T(x)}\left(S_{T(x)} - S_0(1+i_q)^{T(x)}\right)_+ I(T(x) \leq n)\right]$$
$$= \int_0^{\omega-x} \mathbb{E}\left[v^{T(x)}\left(S_{T(x)} - S_0(1+i_q)^{T(x)}\right)_+ I(T(x) \leq n)|T(x) = t)\right] f_{T(x)}(t)dt$$
$$= C \int_0^{n} v^t \mathbb{E}\left[\left(S_t - S_0(1+i_q)^t\right)_+\right] {}_tp_x \mu_{x+t} dt$$

La evaluación financiera se basa en el cálculo de una esperanza de la forma

$$v^t \mathbb{E}\left[(S_t - K)_+\right], \; K > 0.$$

En el caso actual, $K = S_0(1+i_q)^t$. Por la hipótesis sobre S_t

$$S_t = S_0 e^{\mu t + \sigma\sqrt{t}Z}, \; Z \sim N(0,1)$$

se tiene, colocando $v^t = e^{-\delta t}$

$$e^{-\delta t}\mathbb{E}\left[(S_t - K)_+\right] = \frac{e^{-\delta t}}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^{\infty} (S_0 e^{\mu t + \sigma\sqrt{t}y} - K)_+ e^{-y^2/2} ds$$

La evaluación financiera require cambiar $\mu = \delta - \sigma^2/2$ en la expresión anterior

$$e^{-\delta t}\mathbb{E}\left[(S_t - K)_+\right] = \frac{e^{-\delta t}}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^{\infty} (S_0 e^{(\delta-\sigma^2/2)t + \sigma\sqrt{t}y} - K)_+ e^{-y^2/2} ds$$
$$= \frac{e^{-\delta t}}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^{\infty} (S_0 e^{(\delta-\sigma^2/2)t - \sigma\sqrt{t}y} - K)_+ e^{-y^2/2} ds$$

pero

$$S_0 e^{(\delta-\sigma^2/2)t - \sigma\sqrt{t}y} - K \geq 0$$
$$\Leftrightarrow \; (\delta - \sigma^2/2)t - \sigma\sqrt{t}y \geq \log(K/S_0)$$
$$\Leftrightarrow \; (\delta - \sigma^2/2)t + \log(S_0/K) \geq \sigma\sqrt{t}y$$

$$\Leftrightarrow\ B(t) = \frac{(\delta - \sigma^2/2)t + \log(S_0/K)}{\sigma\sqrt{t}} \geq y$$

luego

$$e^{-\delta t}\mathbb{E}\left[(S_t - K)_+\right] = \frac{e^{-\delta t}}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{B(t)} (S_0 e^{(\delta-\sigma^2/2)t+\sigma\sqrt{t}y} - K)e^{-y^2/2}ds$$
$$= \frac{S_0 e^{-\delta t}}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{B(t)} e^{(\delta-\sigma^2/2)t+\sigma\sqrt{t}y}\, e^{-y^2/2}ds - \frac{Ke^{-\delta t}}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{B(t)} e^{-y^2/2}ds$$
$$= S_0\Phi(B(t) + \sigma\sqrt{t}) - Ke^{-\delta t}\Phi(B(t)).$$

La expresión última

$$P(t, S_0, K) = S_0\Phi(B(t) + \sigma\sqrt{t}) - Ke^{-\delta t}\Phi(B(t)) \tag{10.30}$$

es la fórmula de Black-Scholes para el precio de una opción de compra europea, un tipo básico de derivado financiero, que es un contrato para la compra a un precio preferente K, en un tiempo t, de una acción con precio inicial S_0, en el caso de ocurrir $S_t > K$.

Finalmente, colocando de nuevo $K = S_0(1 + i_q)^t$ y reemplazando en la esperanza

$$\mathbb{E}\left[v^{T(x)}\left(S_{T(x)} - S_0(1+i_q)^{T(x)}\right)_+ I(T(x) \leq n)\right]$$
$$= \int_0^n v^t\mathbb{E}\left[\left(S_t - S_0(1+i_q)^t\right)_+\right] {}_tp_x\mu_{x+t}dt$$
$$= S_0\int_0^n \left[\Phi(B(t) + \sigma\sqrt{t}) - (1+i_q)^t e^{-\delta t}\Phi(B(t))\right] {}_tp_x\mu_{x+t}dt$$

En resumen, la prima neta de un seguro de vida ULK temporal a n años para una vida (x), con pago inicial C, a la tasa técnica i, con una garantía de rendimiento mínimo de $i_q < i$ efectivo anual, y atado a un índice financiero con valor de la unidad S_t, está dada por

$$\mathbb{E}(Z) = S_0\bar{A}^1_{x:\overline{n}|i_s}$$

$$+ S_0 \int_0^n \left[\Phi(B(t) + \sigma\sqrt{t}) - (1+i_q)^t e^{-\delta t}\Phi(B(t))\right] {}_tp_x\mu_{x+t}dt.$$

donde

$$B(t) = \frac{(\delta - \sigma^2/2)t + \log((1+i_q)^{-t})}{\sigma\sqrt{t}}$$
$$i_s = (1+i)/(1+i_q) - 1,$$
$$\bar{A}^1_{x:\overline{n}|i_s} = \int_0^n v^t(1+i_q)^t {}_tp_x\mu_{x+t}dt.$$

También se puede escribir la prima como

$$\mathbb{E}(Z) = S_0\left[\bar{A}^1_{x:\overline{n}|i_s} + \int_0^n P(t, 1, (1+i_q)^t){}_tp_x\mu_{x+t}dt\right].$$

Ejemplo 10.9.1. *Utilizando R con la función* `Black_Scholes` *en la librería* `qrmtools`*, el precio de una opción de compra europea sobre una acción que vale hoy 60, y se quiere garantizar que se puede comprar por un precio superior o igual a 65, asumiendo una tasa libre de riesgo de interés de* $8\,\%$ *ea y una volatilidad de* $30\,\%$ *anual, para un período de tiempo de 3 meses, tiene un valor de 2.1.*

```
#---Ejemplo: opcion compra europea a 90 días
#---tasa continua delta 0.08, precio inicial 60,
#---precio preferencial 65, volatilidad 30% anual
require(qrmtools)
t = 0
S = 60
r = 0.08
sigma = 0.3
K = 65
T = 1/4
P1 = Black_Scholes(t, S, r,
sigma, K, T, type="call")
#------resultado 2.133368
```

Ejemplo 10.9.2. *Suponga una vida (50) mujer, de acuerdo a la tabla de vida colombiana 80-89, y utilizando la ley GM. Suponga que compra un seguro de vida temporal ULK,* *atado al valor de la unidad del fondo de inversiones Fiducor. Las especificaciones del seguro ULK son*

$$
\begin{aligned}
x &= 50\\
n &= 10\\
i &= 0.07\\
i_q &= 0.04
\end{aligned}
$$

Las especificaciones del fondo son: $\mu = 0.08893586$, $\sigma = 0.05611153$.

$$
\begin{aligned}
\bar{A}^{1}_{x:\overline{n}|i_s} &= 0.04495102\\
\overline{A.ulk}^{1}_{x:\overline{n}|} &= 0.008072806
\end{aligned}
$$

Las instrucciones en R, resumidas, son

```
#-------------funcion prima BS
bscall.value <- function(S, K, tau, r, sigma) {
  d1 <- (log(S/K) + (r + 0.5*sigma^2)*tau)/(sigma*sqrt(tau))
  d2 <- d1 - sigma*sqrt(tau)
 EPS <- 1./365.
  if (tau < EPS) { # Small time to expiry
    return(max(S-K,0))
  } else {
    return(S*pnorm(d1) - K*exp(-r*(tau))*pnorm(d2))
  }}
#------------funcion prima seguro temp ULK
fn = function(t){
bscall.value(1, (1+iq)^t, t, r, sigma)*tfx.siler(t,x1,pars)}
(Aulk.n = integrate(Vectorize(fn), 0, n)$value)

#------------funcion prima temporal con inflacion
is = (1+ia)/(1+iq)-1
fn1 = function(t){
(1+is)^(-t)*tfx.siler(t,x1,pars)}
(Ax.is.n = integrate(Vectorize(fn1), 0, n)$value)
```

10.9.1. Valoración Monte Carlo

Nótese que si se denota la tasa de rendimiento del fondo al final del día k por $i_m(k)$, entonces

$$i_m(k) = S_k/S_{k-1} - 1$$
$$S_k = S_0 \prod_{s=1}^{k}(1 + i_m(s)),$$

donde S_0 es un valor de referencia en un tiempo $k = 0$ y las tasas $i_m(s), s = 1, 2, \ldots$ son efectivas (por ejemplo, diarias) y aleatorias. Como en la sección § 10.4 se pueden plantear tres modelos para las tasas: iid LogNor , MA(1) y AR(1). En cada caso las tasas $i_m(t)$ cumplen

$$1 + i_m(t) = e^{\delta_m(t)} \sim LogNorm(\delta_m, \sigma_m^2), \tag{10.31}$$

donde δ_m y σ_m^2 se definen con base en el modelo escogido.

$$(\delta_m, \sigma_m^2) = \begin{cases} (\delta, \sigma^2), & \text{caso: iidN} \\ (\delta, \sigma^2(1+\theta^2)), & \text{caso: MA(1)} \\ (\theta, \frac{\sigma^2}{(1-\varphi^2)}), & \text{caso: AR(1)} \end{cases} \tag{10.32}$$

Del supuesto de cada modelo se obtiene

$$S(k) = \prod_{s=1}^{k}(1 + i_m(s)) \sim LogNorm(\delta_{m,k}, \sigma_{m,k}^2). \tag{10.33}$$

donde

$$(\delta_{m,k}, \sigma_{m,k}^2) = \begin{cases} (k\delta, k\sigma^2), & \text{caso: iidN} \\ (k\delta, \sigma^2(k(1-\theta)^2 + 2\theta), & \text{caso: MA(1)} \\ (k\theta, \frac{\sigma^2(k(1-\varphi^2)-2\varphi(1-\varphi^k))}{(1-\varphi^2)(1-\varphi)^2}), & \text{caso: AR(1)} \end{cases} \tag{10.34}$$

Cálculo de la prima neta actuarial del seguro ULK mediante simulación Monte Carlo. Asumiendo que $K(x)$ y las tasas $(i_m(k), k = 1, 2, \ldots)$ son independientes, se puede simular valores Z_ν y calcular la prima neta como su promedio. Los pasos para simular valores Z_ν son

1. Simule un valor $K(x)$.
2. Para cada $k = K(x) + 1$, simule $S_k \sim LogNormal(\delta_{m,k}, \sigma^2_{m,k})$, de acuerdo con (10.34).
3. Calcule $A_k = (1 + i_q)^k$
4. Calcule $Z = Cmax(A_k, S_k)v^k$
5. Repita 1-4 N veces.
6. Calcule la media de los valores Z.

10.10. Notas

El supuesto de tasas i.i.d. se justifica básicamente por la facilidad de manejo de los modelos y obtención de resultados. Este modelo se utilizó en Waters [1978], Dufresne (1990), Papachristou y Waters (1991), Parker (1993, 1994d), entre otros. Pero resulta cuestionable a la vista de algunos resultados, por ejemplo, en Panjer y Bellhouse (1980), los autores muestran que modelos AR(1) y AR(2) proveen buen ajuste a tasas de varios tipos.

El modelo AR(1), así como modelos más generales tipo ARMA(p,q), los se utilizan en Panjer and Bellhouse [1980], Bellhouse and Panjer [1981], Lai and Frees [1991], Dhaene (1989, 1992), Parker (1993, 1994 a,b,c,d). Asumir que $\delta(t)$ sigue un proceso AR(1) ó AR(2). En este caso el valor presente es una suma de variables dependientes distribuídas Lognormal. Es posible encontrar una distribución aproximada mediante ciertas técnicas desarrolladas en Mehta et. al. (2006) para la aproximación de una suma de variables lognomales dependientes. Modelos Autorregresivos condicionalmente heterocedásticos ARCH, como en Lai y Frees (1995) y Wikie (1995). Modelos AR(1) modulados por una Cadena de Markov finita (Markov switching processes). Estos modelos permiten que el proceso evolucione entre K posibles niveles, de manera aleatoria, de tal forma que los saltos de un nivel a otro están descritos mediante una cadena de Markov finita, y, mientras el proceso permanece en un nivel dado, se comporta como un AR(1). Introducidos por Hamilton(1989). Ver Hardy(1999).

Sin embargo, los modelos autoregresivos también tienen una crítica, por ejemplo, en Ramsay (1986), pag. 268, en donde se afirma que el problema con estos modelos es que son filtros de ruidos blancos gaussianos i.i.d. y esto no concuerda con el comportamiento observado de tasas de interés mostrando alta volatilidad y persistencia por encima de su valor esperado.

Con relación al problema de determinar la distribución de una anualidad de vida, y, en particular, la distribución del valor presente de un flujo de pagos con tasas aleatorias, la mayor parte de los artículos se enfocan hacia el cálculo de los momentos de la anualidad o del valor presente, para utilizarlos en la reconstrucción ó en la aproximación de la distribución de los mismos.

Modelos con base en la estructura temporal de tasas de interés, como en Boyle (1980), Brennan y Schwarz (1979), Beekman y Shiu (1988) y Longstaff y Schwarz (1992).

Otros modelos para tasas aleatorias que no se consideraron aquí pero que es útil mencionar son Modelos Ornstein-Uhlenbeck en tiempo continuo, Norberg y Moller (1994). Modelos de difusión con saltos, incluyendo la aproximación en tiempo discreto de Ball y Torous (1983), como en Das (1998).

10.11. Ejercicios

1. Si $i = 0.08$ es la tasa efectiva anual, calcule:

   a) $a_{\overline{15}|}$

   b) $\ddot{a}^{(4)}_{\overline{\infty}|}$

   c) $\ddot{a}^{(4)}_{\overline{15}|}$

   d) $(I^{(4)}\ddot{a})^{(12)}_{\overline{15}|}$

e) Encuentre $a^{(4)}_{\overline{15}|}$ a partir de c)

f) Encuentre $\big(I^{(4)}a\big)^{(12)}_{\overline{15}|}$ a partir de d)

2. Los recaudos por concepto de pagos en un retén se colocan al final de cada día en un depósito a la vista que ofrece una tasa efectiva diaria i=0.00042. El recaudo de un día se puede modelar como el producto cN =(valor del peaje)(No de vehículos en un día). Suponga que $N \sim$ Poisson(λ), con $\lambda = 800$ y el valor del peaje por vehículo es $c = \$$ 6000.00. Encuentre una expresión para el valor presente del fondo después de 30 días.

3. Suponga que N es una variable aleatoria distribuída Poisson con parámetro $\lambda > 0$. Considere una anualidad vencida de duración aleatoria N, $a_{\overline{N}|}$, con tasa de interés efectiva i.

   a) Encuentre el valor esperado y la desviación estándar de esta anualidad.

   b) Encuentre el valor numérico de estas cantidades cuando $\lambda = 15$, $i = 0.3$.

   c) Compruebe que se cumple la desigualdad siguiente: $E(a_{\overline{N}|}) \leq a_{\overline{E(N)}|}$. Ayuda: use la desigualdad de Jensen.

4. El saldo de una inversión al final del mes k, $F(k)$, colocada en un fondo que ofrece una tasa i efectiva mensual satisface la ecuación:

$$F(k) = (1 + i)F(k - 1) + r(k), \ k = 1, 2, \ldots , n$$

donde $F(0)$ es el valor inicial de la inversión. Suponga que $(r(k))_{k=1,2,\ldots}$ son variable aleatorias que representan consignaciones al final de cada mes k. Además suponga que todas son copias i.i.d. de la variable r que tiene la siguiente distribución:

w	0	35	50
$P(r = w)$	$2/9$	$4/9$	$2/9$

(10.35)

Tabla 1. Distribución de probabilidad de las consignaciones.

   a) Encuentre la expresión para $F(n)$, el saldo al final del mes n.

   b) Encuentre expresiones generales para $E(F(n))$ y $Var(F(n))$.

   c) Suponga que $i = 0.02, F(0) = 10, n = 120.$ Evalúe $E(F(n))$ y $\sigma_{F(n)}$

5. Con el mismo enunciado del problema 4, suponga que al final de cada mes se hace un depósito de $c > 0$, y un retiro por valor $X(k)$, donde $(X(k))_{k=1,2,\ldots}$ es una sucesión de variables aleatorias i.i.d. con distribución dada en la tabla (10.35) del problema anterior. Luego, las inversiones al final del mes k están dadas por: $r(k) = c - X(k),\ k = 1, 2, \ldots, n$, (ahorro-gasto).

   a) Encuentre la expresión para el saldo al final del año n.

   b) Encuentre la expresión para $E(F(n)),\ Var(F(n))$, colocando $F(0) = b$

   c) Suponga que c representa el ingreso mensual depositado en la cuenta, y que el promedio de gastos mensuales representa el $60\,\%$ del ingreso. Asuma que el saldo inicial es 2/3 del ingreso mensual. Encuentre $c,\ b,\ E(F(36)),\ \sigma_{F(36)}$.

   d) Suponga que $F(n) \sim N(E(F(n)), Var(F(n)))$, para $n > 30$. Encuentre un intervalo alrededor de la media que contenga el valor de $F(36)$ con una probabilidad del $90\,\%$

6. Suponga una anualidad vencida con m pagos y m capitalizaciones al año, a la tasa efectiva i_m, durante n años, con pagos vencidos de $X(k) \sim i.i.dN(\mu, \sigma^2)$. Entonces el saldo de la cuenta al final del período k es $F(k)$ donde $F(k) = (1 + i_m)F(k-1) - X(k)$ para $k = 1, 2, \ldots, nm$. Defina $S_n = \sum_{j=1}^{nm} v^{j/m} X(j)$. Entonces $v^n F(nm) = F(0) - S_n$.

   a) Encuente $E(S_n)$ y $Var(S_n)$. Ayuda: use las propiedades de la esperanza condicional, ver por ejemplo Giraldo et al. [2010], pag. 9 y ss..

   b) Encuentre estos valores cuando $\mu = 2.5$ (millones), $\sigma = 0.8$ (mill), $i = 0.07, m = 12$.

   c) Asuma como condición de cierre que $F(0) = p_{S_n}(0.95)$, donde $p_{S_n}(0.95)$ es el percentil de $95\,\%$ de S_n tal que $P(S_n > p_{S_n}(0.95)) = 0.05$. Encuentre $F(0)$.

7. Suponga una anualidad vencida con m pagos y m capitalizaciones al año, a la tasa efectiva i_m, durante n años, con pagos vencidos de 1, pero que ocurren aleatoriamente con probabilidad $p \in (0, 1)$. Es decir, se trata de retiros de una cuenta, que pueden ocurrir en cada período con una probabilidad p. Entonces el saldo de la cuenta al final del período k es $F(k)$ donde $F(k) = (1+i_m)F(k-1) - X(k)$ para $k = 1, 2, \ldots, nm$. Defina $S_n = \sum_{j=1}^{nm} v^{j/m} X(j)$. Entonces $v^n F(nm) =$

$F(0) - S_n$. Asuma como condición de cierre que $F(0) = p_{S_n}(0.95)$, donde $p_{S_n}(0.95)$ es el percentil de $95\,\%$ de S_n tal que $P(S_n > p_{S_n}(0.95)) = 0.05$. Compruebe o desarrolle lo siguiente.

a) Encuentre $\mu_n = E(S_n), \sigma_n^2 = Var(S_n)$

b) Utilizando la aproximación Normal a S_n, es decir, asumiendo $S_n \sim N(\mu_n, \sigma_n)$, encuentre $p_{S_n}(0.95)$ y justifique por qué se tiene que $\Pi = P(F(nm) < 0) = P(p_{S_n}(0.95) < S_n) = 0.05$ aproximadamente.

c) Calcule la probabilidad Π mediante simulación de la variable S_n, utilizando $n = 10$, $m = 12$, $\delta = 0.02$, $\sigma = 0.002$. Compare con el valor $p_{S_n}(0.95)$.

8. Suponga una anualidad con m pagos vencidos y m capitalizaciones al año, invertida en un fondo a la tasa efectiva i_m. La duración de la anualidad es a N años, donde N es una variable aleatoria distribuída Poisson con parámetro $\lambda > 0$. Los pagos vencidos se asumen variables aleatorias $X(k) \sim i.i.dN(\mu, \sigma^2)$. Las variables $X(j)$ se asumen independientes de N. El saldo de la cuenta al final del período k es $F(k)$ donde $F(k) = (1 + i_m)F(k-1) - X(k)$ para $k = 1, 2, \ldots, mN$. Defina $S_N = \sum_{j=1}^{mN} v^{j/m} X(j)$. Entonces el valor presente del saldo en el tiempo de cierre es $v^N F(mN) = F(0) - S_N$. El valor $F(0)$ se define como el valor de esta anualidad. Este modelo es una primera aproximación a una pensión en la modalidad de retiro programado, considerado en la Ley 100, en el cual suponemos que los retiros no son fijos sino que se gastan cantidades variables mensuales.

a) Encuente $E(S_N)$ y $Var(S_N)$. Ayuda: use las propiedades de la esperanza condicional, ver por ejemplo Giraldo et al. [2010], pag. 9 y ss..

b) Encuentre estos valores cuando $\mu = 2.5$ (millones), $\sigma = 0.8$ (mill), $\lambda = 12$, $i = 0.07$, $m = 12$.

c) Calcule $F(0)$ como el percentil del $95\,\%$ con base en una Normal con media $E(Sn)$ y varianza $Var(Sn)$, utilizando los valores numéricos anteriores para los parámetros. Cómo podría validarse que $F(0)$ sí es el capital necesario para financiar esta anualidad?.

d) Compruebe que se cumple la desigualdad siguiente:

$$E(S_N) \leq \sum_{j=1}^{mE(N)} v^{j/m} E(X(j)).$$

Qué conclusión podría sacarse de esta desigualdad?.

9. En el modelo para anualidades temporales con tasa aleatorias $i_m(k), k = 1, 2, \ldots$ tales que $\delta_m(k) = \log(1 + i_k(k)) \sim i.i.d.N(\delta, \sigma^2)$ se definieron las variables $Z_k = 1/(1 + i_m(k))$ y $X_k = Z_1 ... Z_k = 1/\prod_{j=1}^{k}(1 + i_m(j))$. Entonces se cumple que $X_k \sim LogNor(-k\delta, k\sigma^2)$. Compruebe o desarrolle lo siguiente.

   a) $X_{k+1} = Z_{k+1} X_k$.

   b) $Cov(X_n, X_{n+1})$.

   c) $Var(X_n)$.

Bibliografía

BAIONE, F. AND S. LEVANTESI (2014): "A health insurance pricing model based on prevalence rates: Application to critical illness insurance," *Insurance: Mathematics and Economics*, 58, 174–184.

——— (2018): "Pricing Critical Illness Insurance from Prevalence Rates: Gompertz versus Weibull," *North American Actuarial Journal*, 1–19.

BEARD, R. E. (1971): "Some aspects of theories of mortality, cause of death analysis, forecasting and stochastic processes," *Biological aspects of demography*, 999, 57–68.

BELLHOUSE, D. R. AND H. H. PANJER (1981): "Stochastic Modelling of Interest Rates with Applications to Life Contingencies. Part II," *Journal of Risk and Insurance*, 628–637.

BOWERS, N., H. GERBER, J. C. HICKMAN, D. A. JONES, AND C. J. NESBITT (1997): *Actuarial Mathematics*, Itasca, Illinois: Society of Actuaries.

BROSTRÖM, G. (2016): *eha: Event History Analysis*, r package version 2.4-4.

CARRIERE, J. F. (1992): "Parametric models for life tables," *Transactions of the Society of Actuaries*, 44, 77–99.

CHIANG, C. L. (1984): *The Life Table and its Applications*, Malabar, Fl, USA: Robert E. Krieger Publishing.

COX, D. R. (1972): "Regression Models and Life Tables (with discussion)," *Journal of the Royal Statistical Society, Series B*, 34.

DESHMUKH, S. R. (2012): *Multiple decrement models in insurance: an introduction using R*, Springer Science & Business Media.

EASTON, A. AND T. HARRIS (2007): *Actuarial aspects of individual life insurance and annuity contracts*, Winsted, CT, USA: Actex Publications.

ENGLAND, P. D. AND S. HABERMAN (1993): "A new approach to modeling excess mortality," *Journal of Actuarial Practice*, 1, 85–117.

GERBER, H. (1994): *Life Insurance Mathematics*, New York: Sringer Verlag.

GERBER, H. U., B. P. LEUNG, AND E. S. SHIU (2003): "Indicator function and Hattendorff theorem," *North American Actuarial Journal*, 7, 38–47.

GIRALDO, N., L. OSORIO, AND J. VALENCIA (2010): "Una Aplicación de Estimadores Robustos de Matrices de Covarianza en Finanzas," *Memorias XII Seminario de Estadística Aplicada IASI*.

GOMEZ CEBALLOS, J. (1985): *Sistemas de Amortización*, Armenia, Colombia: Tecno Mundo Editores, Ltda.

GONZÁLEZ GALÉ, J. (1959): *Elementos de Cálculo Actuarial*, Buenos Aires, Argentina: Imprenta López.

HABERMAN, S. (1983): "Decrement tables and the measurement of morbidity: I," *Journal of the Institute of Actuaries*, 110, 361–381.

HAJIHOSSEINI, M., T. KAZEMI, AND J. FARADMAL (2016): "Multistate Models for Survival Analysis of Cardiovascular Disease Process," *Revista Española de Cardiología (English Edition)*.

HELIGMAN, L. AND J. H. POLLARD (1980): "The age pattern of mortality," *Journal of the Institute of Actuaries*, 107, 49–80.

HOEM, J. M. (1969): "Markov chain models in life insurance," *Blätter der DGVFM*, 9, 91–107.

HUSTEAD, E. (2005): "Ending the mortality table," *Presented at the Living to 100 and Beyond Symposium, Orlando, Fla., Society of Actuaries*, 100, 12–14.

IEVA, F., C. H. JACKSON, AND L. D. SHARPLES (2015): "Multi-State modelling of repeated hospitalisation and death in patients with Heart Failure: the use of large administrative databases in clinical epidemiology," *Statistical methods in medical research*, 0962280215578777.

KOLLER, M. (2012): *Stochastic models in life insurance*, Springer Science & Business Media.

LAI, S.-W. AND E. W. FREES (1991): "Stochastic Life Contingencies with Solvency Considerations," *Transactions of the Society of Actuaries*, 42, 91–148.

LINDBERGSON, M. (2001): “Mortality among the elderly in Sweden 1988–1997,” *Scandinavian Actuarial Journal*, 2001, 79–94.

LOBEZ URQUIA, J. (1959): *Matemática Financiera con Nociones de Cálculo Actuarial*, Zaragoza, España: Imprenta Estilo, S.A.

MACDONALD, A. S. (1997): “Current Actuarial Modeling Practice and Related Issues and Questions,” *North American Actuarial Journal*, 1, 24–35.

MOORE, J. (1945): *Matemáticas Financieras*, México: UTEHA.

NIETO-ENCISO, L. H. (2005): “Análisis del Comportamiento de la Siniestralidad por Enfermedades Catastróficas en una Empresa Promotora de Salud-Colombia,” *Revista de Salud Pública*, 7, 293–304.

NORBERG, R. (1977): *Life Insurance Mathematics*, Copenhage University, Denmark: Laboratory of Actuarial Mathematics.

——— (2005): “Interest Guarantees in Bankin,” *Applied Mathematical Finance*, 12, 351–370.

ORTIZ, F., A. VILLEGAS, AND A. ZARRUK (2012): “Tablas De Mortalidad,” *Documentos de Matemáticas y Estadística, U. Externado de Colombia*, 1–30.

ORTIZ-GUZMÁN, F. (2014): “Cálculo de primas y reservas de seguros de vida por Julio Garavito según el texto de É. Dormoy,” *Lecturas Matemáticas*, 35, 59–85.

PANJER, H. AND D. BELLHOUSE (1980): “Stochastic Modelling of Interest Rates with applications to Life Contingencies,” *Journal of Risk and Insurance*, 47, 91–110.

PASCARIU, M. D. (2018): “MortalityLaws: Parametric Mortality Models, Life Tables and HMD,” R package version 1.3.0.

PERKS, W. (1932): “On some experiments in the graduation of mortality statistics,” *Journal of the Institute of Actuaries*, 63, 12–57.

PITACCO, E. (2014): *Health Insurance, Basic Actuarial Models*, Cham, Switzerland: Springer International Publishing.

——— (2016): “Premiums for long-term care insurance packages: Sensitivity with respect to biometric assumptions,” *Risks*, 1–22.

PITACCO, E., M. DENUIT, AND S. HABERMAN (2009): *Modelling longevity dynamics for pensions and annuity business*, New York: Oxford University Press.

PLA-PORCEL, J., M. VENTURA-MARCO, AND C. VIDAL-MELIÁ (2016): "Converting retirement benefit into a life care annuity with graded benefits," *Scandinavian Actuarial Journal*, 1–25.

RICHARDS, S. (2012): "A handbook of parametric survival models for actuarial use," *Scandinavian Actuarial Journal*, 2012, 233–257.

RITZ, C. AND J. C. STREIBIG (2008): *Nonlinear regression with R*, Springer Science & Business Media.

SANS Y DE LLANOS, A. (1979): *Cálculo Actuarial Aplicado*, Marqués del Duero, Madrid: Ediciones ICE.

SCARPELLO, G. M., D. RITELLI, AND D. SPELTA (2006): "Actuarial values calculated using the incomplete Gamma function," *Statistica*, 66, 77–84.

SHARROW, D. J. (2012): *HPbayes: Heligman Pollard mortality model parameter estimation using Bayesian Melding with Incremental Mixture Importance Sampling*, r package version 0.1.

SHIU, E. S. W. (1982): "Integer functions and life contingencies," *Transaction of Society of Actuaries*, 34, 557–600.

SPEDICATO, G. A. (2013): "The lifecontingencies Package: Performing Financial and Actuarial Mathematics Calculations in R," *Journal of Statistical Software*, 55, 1–36.

TÜRLER, H. (1977): *Actuaría. La Matemática del Seguro*, Talleres de Intergráficas Ltda, Bogotá: Edición del Autor.

VADIVELOO, J., G. NIU, E. A. VALDEZ, AND G. GAN (2016): "Unlocking reserve assumptions using retrospective analysis," in *International Congress on Actuarial Science and Quantitative Finance*, Springer, 25–48.

WATERS, H. R. (1978): "The moments and distributions of actuarial functions," *Journal of the Institute of Actuaries (1886-1994)*, 105, 61–75.

WILLMOT, G. E. (1997): "Statistical Independence and Fractional Age Assumptions," *North American Actuarial Journal*, 1, 84–90.

WUNSCH, G., M. MOUCHART, AND J. E. DUCHÊNE (2002): *The Life Table: Modelling Survival and Death*, European Studies of Population 11, Springer Netherlands, 1 ed.

Índice alfabético