

UNIVERSIDAD  
NACIONAL  
DE COLOMBIA

# ECUACIONES DE LANGEVIN EN COORDENADAS POLARES

Delsy Yurani Villa Cárdenas

Universidad Nacional de Colombia  
Facultad de Ciencias  
Escuela de Matemáticas  
Medellín, Colombia  
2019



# ECUACIONES DE LANGEVIN EN COORDENADAS POLARES

Delsy Yurani Villa Cárdenas

Trabajo presentado como requisito parcial para optar al título de

**Magister en Ciencias: Matemática Aplicada**

Director:

D. Jorge Mario Ramirez Osorio

Universidad Nacional de Colombia  
Facultad de Ciencias  
Escuela de Matemáticas  
Medellín, Colombia  
2019



# Agradecimientos

Doy mis más sinceros agradecimientos a mi asesor de tesis, el Doctor Jorge Mario Ramirez Osorio, quien fue un apoyo fundamental no sólo para el desarrollo de este trabajo sino desde el acercamiento al estudio de la modelación estocástica. Agradezco también a mi hermana Francy, por acogerme y apoyarme durante la realización de esta maestría, su calidez facilitó la consecución de esta meta. A mis padres, Olga y Vicente, gracias por su confianza en los proyectos que he emprendido, son siempre mi motivación.

# Resumen

En la primera parte de este trabajo utilizamos la caracterización de Levy del movimiento Browniano y un teorema de cambio temporal para Martingales para deducir las ecuaciones diferenciales estocásticas que describen los procesos radial y angular de un proceso bidimensional de Ornstein-Uhlenbeck. En la segunda parte demostramos la existencia y unicidad del proceso radial de Ornstein-Uhlenbeck y analizamos la viabilidad de usar esta ecuación en la modelación. Finalmente, se muestra que la distribución del proceso radial de Ornstein-Uhlenbeck converge a una distribución invariante con una media y varianza especificada.

**Palabras clave:** Ecuación de Langevin, Coordenadas Polares, Ecuaciones Diferenciales Estocásticas, Distribución Invariante

# Abstract

**Thesis title: Langevin Equations in polar coordinates**

In the first part of this work we use Levy's characterization of Brownian motion and a Time-Change theorem for Martingales to deduce the stochastic differential equations that describe the radial and angular processes of a two-dimensional Ornstein-Uhlenbeck process. In the second part we demonstrate the existence and uniqueness of the radial Ornstein-Uhlenbeck process and analyze its usefulness for modeling. Finally, we show that the distribution of the radial Ornstein-Uhlenbeck process converges to an invariant distribution with an specified mean and variance.

**Keywords: Langevin Equation, Polar Coordinates, Stochastic Differential Equations, Invariant Distribution**

# Índice general

<b>1. Preliminares</b>	<b>1</b>
1. Variables aleatorias y Procesos estocásticos . . . . .	1
2. Procesos de Markov . . . . .	3
3. Integración y Ecuaciones Diferenciales Estocásticas . . . . .	4
4. Martingalas locales y su caracterización . . . . .	6
<b>2. Proceso de Ornstein-Uhlenbeck y Coordenadas Polares</b>	<b>9</b>
<b>3. Distribución Invariante del proceso radial de Ornstein-Uhlenbeck</b>	<b>19</b>
1. Generador infinitesimal del proceso radial $R$ . . . . .	19
2. Distribución Invariante del proceso radial $R$ y Simulaciones . . . . .	21
3. Conclusiones . . . . .	23
Bibliografía . . . . .	24



# Introducción

Las hormigas son organismos caracterizados por su alto grado de organización. Éstas potencian procesos colectivos, como la búsqueda de alimento, siguiendo reglas simples que les permiten la comunicación, basadas en información local y en el uso de señales químicas (Perna et al., 2012). Estas características son deseadas en diversos sistemas organizacionales, para los cuales un modelo matemático que describa dicho comportamiento resulta de gran utilidad.

Organismos como las hormigas son típicamente modelados como partículas Brownianas (Schweitzer, 2003), las cuales en su forma más simple son caracterizadas a través de la ecuación de Langevin. Esta ecuación es históricamente una de las primeras ecuaciones diferenciales estocásticas (EDE) que surge y, basada en la ecuación del movimiento de Newton  $m\mathbf{a} = \mathbf{F}$ , describe la evolución de la velocidad  $\mathbf{U}(t)$  de una partícula Browniana como

$$d\mathbf{U}(t) = -\lambda\mathbf{U}(t) dt + \sqrt{2D} d\mathbf{W}(t), \quad (1)$$

donde  $\lambda$  y  $D$  son coeficientes de fricción y difusión, respectivamente, y  $\mathbf{W}$  es un movimiento Browniano, a través del cual se enmarca el carácter aleatorio presente en su movimiento.

El proceso estocástico que resuelve la anterior EDE es conocido como proceso de Ornstein-Uhlenbeck, y su versión compleja  $\mathbf{U}(t) = U_1(t) + iU_2(t)$  tiene particular relevancia debido a sus numerosas aplicaciones en diferentes campos de la ciencia, que van desde la biología hasta las finanzas. La utilización de dicho proceso para modelar el comportamiento de las hormigas es la principal motivación del presente trabajo.

Observaciones respecto al uso de feromonas para la comunicación de las hormigas, han develado que este fenómeno quimiotáctico no influye directamente en la rapidez de la hormiga, sino únicamente en su cambio de dirección (Perna et al., 2012), por lo que se hace pertinente realizar una descripción independiente de los procesos radial  $\{R(t), t \geq 0\}$  y angular  $\{\varphi(t), t \geq 0\}$  de  $\mathbf{U}(t)$ . El principal objetivo del presente trabajo es deducir EDEs para los procesos polares  $R$  y  $\varphi$ , y analizar la equivalencia del proceso  $R$ , descrito por dichas ecuaciones, con el proceso radial de Ornstein-Uhlenbeck  $\|\mathbf{U}\|$ . Esta equivalencia se analiza con base en la teoría de EDEs y, posteriormente, en el contraste de comportamiento de ambos procesos, observado a partir de simulaciones.

Otro de los objetivos es corroborar las observaciones hechas en Perna et al. (2012), según las cuales el proceso radial  $R$  de Ornstein-Uhlenbeck hallado, al modelar la rapidez de la hormiga y, por tanto, no verse directamente afectado por las señales quimiotácticas, debe converger a una distribución invariante en el tiempo. La EDE que caracteriza el proceso radial  $R$  es una ecuación de Itô, con coeficiente de difusión  $\sqrt{2D}$  y coeficiente de fricción no acotado, por lo cual, para demostrar dicha

convergencia, se hace necesario pasar por el problema de la martingala para obtener que tal proceso satisface la ecuación de Fokker-Planck, cuya solución se simula para verificar la convergencia en distribución del proceso  $R(t) = \|\mathbf{U}\|(t)$  a ésta.

En el capítulo 1 se definen los objetos matemáticos más relevantes relacionados con la teoría de la probabilidad, los procesos estocásticos y la integración estocástica; al mismo tiempo que se establece las notaciones a usar y se presenta los principales resultados respecto a los mismos, que serán de utilidad a lo largo de este trabajo. Dentro de estos resultados se hace particular énfasis en los teoremas de caracterización y escalamiento temporal del movimiento Browniano y la fórmula de Itô, los cuales permitirán deducir ecuaciones diferenciales estocásticas para las coordenadas polares del proceso de Ornstein-Uhlenbeck y obtener información respecto a sus distribuciones.

El capítulo 2 comienza exponiendo la solución cartesiana del proceso de Ornstein-Uhlenbeck complejo  $\{\mathbf{U}(t), t \geq 0\}$  y presentando, a manera de motivación, su aplicación como modelo del movimiento de las hormigas, en el cual es fundamental el paso a coordenadas polares para obtener una mejor aproximación al comportamiento de las hormigas. Posteriormente se deducen EDEs para los procesos polares  $R$  y  $\varphi$  de  $\mathbf{U}$ , y se muestra la existencia y unicidad de solución de la EDE correspondiente al proceso radial  $R$ , usando el hecho de que el cero es un estado inaccesible para éste. A partir de simulaciones del proceso  $R$  a través de la EDE hallada, se analiza su precisión como modelo del proceso radial  $\|\mathbf{U}\|$ .

En el capítulo 3 se muestra, haciendo uso del problema de la martingala, la teoría de operadores infinitesimales y la unicidad de solución de la EDE del proceso radial  $R$ , que éste proceso satisface la ecuación de Fokker-Planck, solucionando la cual se obtiene su distribución invariante. El capítulo finaliza mostrando, a partir de simulaciones, la convergencia en distribución del proceso radial de Ornstein-Uhlenbeck  $R(t) = \|\mathbf{U}(t)\|$  a la distribución invariante deducida.

# Capítulo 1

## Preliminares

En el presente capítulo se presentan los conceptos básicos de la teoría de procesos estocásticos que se abordarán a lo largo del presente trabajo, a la vez que se estudian los dos resultados principales de dicha teoría que nos permitirán más adelante concluir la representación diferencial estocástica de los procesos radial y angular de un proceso de Ornstein-Uhlenbeck complejo.

### 1. Variables aleatorias y Procesos estocásticos

Dado un espacio de probabilidad  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ , las **variables aleatorias** (v.a.) sobre este espacio son aplicaciones  $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ , que en adelante se denotarán con letras mayúsculas, tal que si  $A$  pertenece a la  $\sigma$ -álgebra de Borel  $\mathcal{B}$ , entonces  $X^{-1}(A) \in \mathcal{F}$ . Así, una v.a.  $X$  induce una medida de probabilidad  $\mu_X$  en el espacio  $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$  dada por

$$\mu_X = \mathbb{P}_X(A) = \mathbb{P}(X^{-1}(A)).$$

$\mu_X$  es llamada la distribución de  $X$  y a partir de ésta se define la **función de distribución de probabilidad** de la v.a. como  $F_X(x) = \mathbb{P}(X \leq x)$ . Si además existe una función real  $f_X$  tal que

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^x f_X(y) dy, \quad -\infty < x < \infty,$$

ésta será llamada la **función de densidad de probabilidad** de  $X$ .

Dada una v.a.  $X$  y una función Borel medible cualquiera  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , la **esperanza, valor esperado o media** de la v.a.  $g(X)$  se define como la integral de Lebesgue-Stieltjes de  $g$  respecto a  $F_X$ , es decir

$$\mathbb{E}g(X) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) dF_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f_X(x) dx, \quad (1.1)$$

usando la cual se define la **varianza** de un proceso  $X$  como  $\mathbb{E}(X - \mathbb{E}(X))^2$ . Se dice que una v.a.  $X$  es integrable si  $\mathbb{E}|X| < \infty$ .

Dado un evento  $A$  de la  $\sigma$ -álgebra  $\mathcal{F}$ , con probabilidad positiva; la probabilidad de un evento  $D$  y el valor esperado de una v.a. se pueden condicionar a la ocurrencia de  $A$  de la siguiente manera

$$\mathbb{P}(A | D) = \frac{\mathbb{P}(A \cap D)}{\mathbb{P}(D)} \quad \text{y} \quad \mathbb{E}(X|A) = \frac{\mathbb{E}(X\mathbf{1}_A)}{\mathbb{P}(A)}, \quad (1.2)$$

respectivamente, donde  $\mathbb{1}_A$  es la función indicadora del conjunto  $A \in \mathcal{F}$ :

$$\mathbb{1}_A(\omega) = \begin{cases} 1, & \text{si } \omega \in A, \\ 0, & \text{si } \omega \notin A. \end{cases}$$

Las v.a. complejas tienen la forma  $\mathbf{Z} = X + iY$ , donde  $X$  e  $Y$  son v.a. reales e  $i$  es la unidad imaginaria, y serán denotadas con letra mayúscula y en negrilla. Su valor esperado está dado por  $\mathbb{E}\mathbf{Z} = \mathbb{E}X + i\mathbb{E}Y$ , siempre que estos dos últimos existan. Dada una v.a. real  $X$  se define su función característica como

$$\phi_X(t) = \mathbb{E}e^{i\lambda X} := \mathbb{E} \cos(\lambda X) + i\mathbb{E} \sin(\lambda X), \quad (1.3)$$

la cual es de hecho la transformada de Fourier de  $F_X$  y permite caracterizar dicha v.a. ya que por el teorema de inversión de Levy (teorema 6.11 Walsh (2012) p. 159) existe una relación biunívoca entre ésta y  $F_X$ .

Un **proceso estocástico** (1-dimensional) es una colección  $X = \{X(t) : t \in T\}$  de variables aleatorias reales definidas en un mismo espacio de probabilidad  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  y con valores en  $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$ ; estos se denotarán con letras mayúsculas y, dado que la variable  $t$  que indexa el proceso es típicamente el tiempo, se supondrá en adelante que  $T = [0, \infty)$ . Una **filtración** es una familia  $\{\mathcal{F}(t)\}$  no decreciente de sub- $\sigma$ -álgebras de  $\mathcal{F}$ . Diremos además que un proceso  $X = \{X(t) : t \geq 0\}$  es **adaptado** a la filtración  $\{\mathcal{F}(t)\}$  si para todo tiempo  $t \geq 0$  la v.a.  $X(t)$  es  $\mathcal{F}(t)$ -medible. Los procesos estocásticos complejos se definen de manera análoga a las v.a. complejas como  $\mathbf{Z}(t) = X(t) + iY(t)$  y también serán denotados con letras mayúsculas y en negrilla.

En caso de tenerse una sub  $\sigma$ -álgebra  $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$  que provea información adicional respecto a  $\Omega$  y una v.a.  $X$  definida en  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ , el concepto de valor esperado  $\mathbb{E}X$  se extiende al de **esperanza condicional**  $\mathbb{E}(X | \mathcal{G})$ : una variable aleatoria que predice el valor de  $X(t)$  considerando la información que contenga  $\mathcal{G}$ .  $\mathbb{E}(X | \mathcal{G})$  es la única v.a.  $\mathcal{G}$ -medible tal que

$$\mathbb{E}(\mathbb{1}_G X) = \mathbb{E}(\mathbb{1}_G \mathbb{E}(X | \mathcal{G})) \text{ para todo } G \in \mathcal{G}. \quad (1.4)$$

Con base a este concepto surgen las denominadas **martingalas** (respecto a una filtración  $\{\mathcal{F}(t)\}$ ), las cuales son procesos estocásticos  $M$  tales que cada v.a.  $M(t)$  es  $\mathcal{F}(t)$ -medible e integrable y se satisface que

$$\mathbb{E}\{M(t) | \mathcal{F}(s)\} = M(s) \quad 0 \leq s < t. \quad (1.5)$$

En particular  $\mathbb{E}M(t) = \mathbb{E}M(0)$ .

Una de las martingalas de mayor relevancia en el estudio de los procesos estocásticos es el Movimiento Browniano o Proceso de Wiener, el cual es también un proceso de Markov y captura el comportamiento errático de pequeñas partículas en un fluido. Un **Movimiento Browniano** 1-dimensional es un proceso estocástico  $B = \{B(t), \mathcal{F}(t), t \geq 0\}$  que satisface las siguientes propiedades

- (Incrementos independientes)  $B(t) - B(s)$ , para  $t > s$ , es independiente del pasado, es decir es independiente de  $\mathcal{F}(s)$ , la  $\sigma$ -álgebra generada por  $B(u)$ , con  $u \leq s$ .
- (Incrementos normales)  $B(t) - B(s)$  tiene distribución normal con media 0 y varianza  $t - s$ .

- (Continuidad de sus trayectorias)  $t \rightarrow B(t, \omega)$ , con  $t \geq 0$ , son funciones continuas con probabilidad 1.

El teorema 3.3 de (Klebaner, 2005) garantiza que el movimiento Browniano  $B$  es el único proceso que satisface tales propiedades, luego los incrementos del movimiento Browniano  $B(t) - B(s)$  tienen función característica dada por

$$\mathbb{E}e^{i\lambda(B(t)-B(s))} = e^{\frac{|\lambda|^2}{2}(t-s)}. \quad (1.6)$$

La posición inicial no se incluye en la definición de  $B$ . Cuando  $B(0) = x$  c.p.1, el proceso es un movimiento Browniano empezando en  $x$  y se denota  $B^x$ . Si  $x = 0$  se habla de un movimiento Browniano estándar puesto que la media y la varianza de  $B(1)$  son 0 y 1, respectivamente. En adelante cuando se hable de movimiento Browniano se supondrá que es estándar, a menos que se especifique algo diferente. Además se utilizarán las letras mayúsculas  $B$  ó  $W$  para representarlos. Un proceso complejo  $\mathbf{B} = B_1 + iB_2$  se dirá movimiento Browniano si  $B_1$  y  $B_2$  son movimientos Brownianos 1-dimensionales independientes.

## 2. Procesos de Markov

Dado un proceso estocástico  $X$  con distribución  $\mathbb{P}$ , en un espacio de probabilidad  $(\Omega, \mathcal{F})$ , denotemos por  $\mathbb{P}_x$  a la distribución de dicho proceso dado  $X(0) = x$ , es decir, para  $D \in \mathcal{F}$  dado,

$$\mathbb{P}_x(X(t) \in D) = \mathbb{P}(X(t) \in D \mid X(0) = x). \quad (1.7)$$

La **propiedad de Markov** establece que la distribución condicional del futuro dado el pasado y el presente, solo depende del presente. Es decir, un proceso  $X$  posee la propiedad de Markov si para  $s \geq 0$  dado se tiene que todo  $t > s$  es tal que

$$\mathbb{P}(X(t+s) \in D \mid \mathcal{F}(s)) = \mathbb{P}_{X(s)}(X(t) \in D). \quad (1.8)$$

Por ejemplo se puede probar que el Movimiento Browniano posee la propiedad de Markov dado que sus incrementos son independientes (Proposición 10.6, Walsh (2012)).

Si  $X$  es Markoviano, denotamos por  $p(t; x, y)$  a sus **densidades de transición**, dadas por la siguiente probabilidad condicional

$$p(t; x, y) dy = \mathbb{P}_x(X(t) \in dy). \quad (1.9)$$

En caso en que se conozca una distribución inicial  $\pi_0$  para la v.a.  $X(0)$ , se denota por  $\mathbb{P}_{\pi_0}$  a la distribución de probabilidad de  $X$ , la cual depende de las probabilidades de transición  $p(t, x, y)$  de la siguiente manera

$$\mathbb{P}_{\pi_0}(X(t) \in D) = \int_0^\infty \int_{y \in D} p(t, x, y) \pi_0(x) dy dx \quad (1.10)$$

Se dice que  $\pi$  es una **distribución invariante** de un proceso de Markov  $X$  si, para todo  $t \geq 0$  y para todo  $y \in \mathbb{R}$ , se tiene que  $\pi(D) = \mathbb{P}_\pi(X(t) \in D)$ . Es decir  $\pi$  es una distribución invariante si no cambia con el tiempo, en tal caso, si la v.a. inicial tiene distribución  $\pi_0$ , entonces para todo  $t$

la distribución de  $X(t)$  es también  $\pi_0$ .

Dado  $I = (a, b) \subset \mathbb{R}$ , denotamos por  $C_0 = C_0(I)$  al conjunto de funciones continuas  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  tales que  $f(x) \rightarrow 0$  cuando  $x \rightarrow \infty$ . Kallenberg (1997) define un **semigrupo de Feller** como una familia de contracciones  $\{T_t : t > 0\}$ , con la propiedad de semigrupo  $T_{t+s} = T_t T_s$ , tales que:

$$T_t[C_0] \subset C_0 \quad (1.11)$$

$$T_t[f](x) \rightarrow f(x) \text{ cuando } t \rightarrow 0, \quad f \in C_0, x \in I. \quad (1.12)$$

Dado un proceso de Markov  $X$ , con probabilidades de transición  $p(t; x, y) dy$ , se define el semigrupo de  $X$  como el conjunto de operadores  $\{T_t, t > 0\}$  dados por

$$T_t[f](x) = \mathbb{E}_x f(X(t)) = \int f(z)p(t; x, z) dz, \quad t > 0. \quad (1.13)$$

En Bhattacharya and Waymire (2009) se muestra que (1.13) define en efecto un semigrupo, además el Lema 17.3 de Kallenberg (1997) muestra que para este semigrupo, la propiedad (1.12) es equivalente a que, para cada  $x$  fijo,

$$X_x(t) \xrightarrow{P} x, \text{ cuando } t \rightarrow 0. \quad (1.14)$$

A partir de la propiedad de semigrupo, estas familias de operadores están completamente determinadas por su comportamiento cerca de  $t = 0$ . Se define entonces el **generador infinitesimal** del proceso de Markov  $X$  como el operador lineal

$$\mathbf{A}[f](x) := \lim_{s \downarrow 0} \frac{T_s[f](x) - f(x)}{s}, \quad (1.15)$$

para  $f \in \text{Dom}(\mathbf{A}) = \{f \in C_0 : \mathbf{A}[f] \in C_0\}$  y  $x \in I$ ; el cual, en caso de que el semigrupo sea de Feller, caracteriza dicho comportamiento.

### 3. Integración y Ecuaciones Diferenciales Estocásticas

Dado un proceso estocástico continuo  $X$  se define su proceso de **variación** como

$$\lim \sum_{i=1}^n |X(t_{i+1}^n) - X(t_i^n)| \quad (\text{limite en probabilidad}). \quad (1.16)$$

donde el límite es tomado sobre todas las particiones de  $[0, t]$ , con  $\delta_n = \max_i(t_{i+1}^n - t_i^n) \rightarrow 0$  cuando  $k \rightarrow \infty$ . Si  $Y$  es otro proceso continuo se define el proceso de variación cruzada de  $X$  e  $Y$ , denotado  $\langle X, Y \rangle$ , como

$$\langle X, Y \rangle(t) = \lim_{\delta_n \rightarrow 0} \sum_{i=1}^k (X(t_{i+1}^n) - X(t_i^n))(Y(t_{i+1}^n) - Y(t_i^n)) \quad (\text{limite en probabilidad}). \quad (1.17)$$

Si  $X = Y$ , el proceso  $\langle X, X \rangle$  se denota  $\langle X \rangle$  y es llamado **variación cuadrática** de  $X$ , este proceso tiene los mismos intervalos de constancia que  $X$ , es decir c.p.1  $M(t) = M(a)$  para  $a \leq t \leq b$  si y

sólo si  $\langle M \rangle(b) = \langle M \rangle(a)$  (Teorema 7.28 Klebaner (2005)), y es el único proceso continuo, creciente y adaptado con  $\langle X \rangle(0) = 0$  tal que  $X^2(t) - \langle X \rangle(t)$  es una martingala. En el caso del movimiento Browniano, éste tiene trayectorias que son de variación no acotada en cualquier intervalo finito  $[0, t]$  y su variación cuadrática es  $\langle B \rangle(t) = t$ .

Numerosos procesos estocásticos son representados mediante expresiones diferenciales que involucran al movimiento Browniano  $B$  a manera de “ruido”, es decir mediante ecuaciones diferenciales estocásticas (EDE) de la forma

$$dX(t) = \mu(X(t)) dt + \sigma(X(t)) dB(t), \quad (1.18)$$

donde  $\mu$  y  $\sigma$  son funciones dadas, denominados coeficientes de deriva y difusión, respectivamente. Tales ecuaciones no pueden ser interpretadas en el mismo sentido que las ecuaciones diferenciales ordinarias puesto que el movimiento Browniano es diferenciable en ninguna parte c.p.1 (Walsh (2012) teorema 10.40). La versión integral de la EDE (1.18) está dada por

$$X(t) = X(0) + \int_0^t \mu(X(s)) ds + \int_0^t \sigma(X(s)) dB(s). \quad (1.19)$$

La primera integral de esta ecuación es una integral de Riemann, por lo que  $t \rightarrow (\mu \circ X)(t)$  debe tener trayectorias Riemann integrables. Dado que las trayectorias del movimiento Browniano son de variación no acotada c.p.1, la segunda integral de esta ecuación no puede definirse como una integral de Riemann-Stieltjes. En este trabajo se define tal integral como una integral de Itô.

Dados  $0 < S < T$ , la integral de Itô

$$\int_S^T X(s) dB(s), \quad (1.20)$$

se define en un primer momento para funciones elementales (escalón) en términos de los incrementos del movimiento Browniano. Por ejemplo

$$\int_0^t \mathbb{1}_{(a,b)}(s) dB(s) = B(b) - B(a), \quad t > b > a > 0. \quad (1.21)$$

Para procesos más generales  $X$ , adaptados al movimiento Browniano  $B$  y con

$$\mathbb{E} \left( \int_S^T X^2(t) dt \right) < \infty, \quad (1.22)$$

tal definición es extendida mediante aproximación diádica (Oksendal (1985), capítulo 3). La integral así definida se conoce como **Integral de Itô** y tiene la propiedad de ser, al igual que el movimiento Browniano, una martingala continua, por lo que su valor esperado es cero.

El proceso  $X$  que solucione la ecuación (1.18) es llamado **proceso de Ito** y  $\mu$  y  $\sigma$  son llamados los coeficientes de **deriva** y **difusión**, respectivamente. Diremos que un proceso  $X$  es **solución fuerte** de la ecuación (1.18) si se encuentra definido en el mismo espacio de probabilidad que  $B$ ,  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ,  $\mu$  y  $\sigma$  son integrables para todo  $t > 0$  y  $X$  satisface la ecuación (1.19) c.p.1. Una EDE tiene **unicidad fuerte** si dadas dos soluciones  $X$  y  $X'$ , éstas tienen trayectorias iguales c.p.1. Una **solución débil** de (1.18) es una tripleta  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  junto con un proceso Browniano  $B$  y un proceso

adaptado  $X$  que satisfacen (1.19). Una EDE tiene **unicidad débil** si dadas dos soluciones  $X$  y  $X'$ , posiblemente en espacios de probabilidad diferentes, tales que las distribuciones iniciales de  $X(0)$  y  $X'(0)$  son iguales, entonces las distribuciones de  $X$  y  $X'$  son iguales. Claramente si un proceso  $X$  es solución fuerte de una EDE entonces automáticamente es solución débil.

Dada una función  $g$  dos veces diferenciable, es decir  $g \in C^2([0, \infty) \times \mathbb{R})$ , la **fórmula de Itô** establece que si  $X$  es un proceso de Itô entonces  $Y(t) = g(t, X(t))$  es también un proceso de Itô que satisface la ecuación diferencial estocástica

$$dY(t) = \frac{\partial g}{\partial t}(t, X(t)) dt + \frac{\partial g}{\partial x}(t, X(t)) dX(t) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(t, X(t)) (dX(t))^2 \quad (1.23)$$

donde  $(dX(t))^2$  se computa usando la regla  $dt dt = dt dB = dB dt = 0$  y  $dB dB = t$  (Karatzas and Shreve (1991) p. 154)

En el caso  $\mathbf{X} = (X_1, X_2)$  y  $\mathbf{B} = (B_1, B_2)$ , donde  $B_1, B_2$  son movimientos Brownianos 1-dimensionales independientes, la definición de integral de Itô se extiende a

$$I_t(\mathbf{X}) := \int_0^t \mathbf{X}(s) \cdot d\mathbf{B}(s) = \int_0^t (X_1(s) dB_1(s) + X_2(s) dB_2(s)). \quad (1.24)$$

La variación cuadrática del movimiento Browniano es  $\langle B \rangle(t) = t$ , por lo que si  $\mathbf{B}$  es un movimiento Browniano planar, al tener componentes independientes, se observa que sus variaciones cruzadas están dadas por  $\langle B_k, B_j \rangle(t) = \delta_{kj}$ ,  $1 < k, j \leq 2$ , donde  $\delta_{kj}$  es el delta de Kronecker. Usando este hecho se obtiene que la variación cuadrática de la integral de Itô (1.24) está dada por (Teorema 4.9 Klebaner (2005)):

$$\langle I \rangle(t) := \int_0^t \|\mathbf{X}(s)\|^2 ds, \quad (1.25)$$

donde  $\|\cdot\|$  es la norma en  $\mathbb{C}$ .

## 4. Martingalas locales y su caracterización

Una técnica muy utilizada para debilitar propiedades sobre las trayectorias de un proceso estocástico es describirla de manera “local”, para lo cual se utiliza el concepto de tiempo de parada. Una v.a.  $\tau \geq 0$  es un **tiempo de parada** de la filtración  $\{\mathcal{F}(t)\}$  si para todo  $t \geq 0$  el evento  $\{\tau \leq t\}$  pertenece a  $\mathcal{F}(t)$ . Dado un tiempo de parada  $\tau \geq 0$  de una filtración  $\{\mathcal{F}(t)\}$ , se define  $\mathcal{F}(\tau)$  como la  $\sigma$ -álgebra de eventos determinados antes del tiempo  $\tau$ , es decir de aquellos eventos  $A \in \mathcal{F}$  tales que  $A \cap \{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}(t)$  para todo  $t \geq 0$ .

La propiedad fuerte de Markov extiende la propiedad de Markov para tiempos aleatorios. Ésta establece que si  $\tau$  es un tiempo de parada finito entonces

$$\mathbb{P}(X(\tau + s) \in D | \mathcal{F}(s)) = \mathbb{P}_{X(s)}(X(\tau) \in D). \quad (1.26)$$

Si  $X$  es un proceso estocástico y  $\tau$  es un tiempo de parada finito, al proceso  $X(t \wedge \tau)$  se le llama proceso parado de  $X$ . En caso que  $M$  sea una martingala entonces su correspondiente proceso parado  $M(t \wedge \tau)$  es también martingala y se llama **martingala parada**. Se dice que una propiedad



se satisface de manera **local** si existe una secuencia no decreciente  $\{\tau_n\}_{n=1}^\infty$  de tiempos de parada de  $\{\mathcal{F}(t)\}$  convergiendo a infinito, tal que para todo  $n \geq 1$  el proceso parado  $X(t \wedge \tau_n)$  satisface dicha propiedad. Por ejemplo, se dice que  $M$  es una **martingala local** respecto a la filtración  $\{\mathcal{F}(t)\}$  si existe una sucesión de tiempos de parada  $\{\tau_n\}_{n=1}^\infty$  de  $\{\mathcal{F}(t)\}$ , con  $\tau_n \leq \tau_{n+1}$  y  $\tau_n \rightarrow \infty$  cuando  $n \rightarrow \infty$  (c.p.1), tal que para todo  $n$  el proceso parado  $M(t \wedge \tau_n)$  es una martingala respecto a dicha filtración.

La siguiente proposición será punto de partida para nuestros propósitos, en ella se estudiará una de las caracterizaciones fundamentales del movimiento Browniano, la cual enuncia que éste es la única martingala local continua cuya variación cuadrática es  $t$ . Se estudiará dicha caracterización en términos 1-dimensionales, pero ésta se extiende de manera natural al movimiento Browniano complejo.

**Proposición 1** (Caracterización de Lèvy del movimiento Browniano). *Sea  $X$  una martingala local continua respecto a la filtración  $\{\mathcal{F}(t), 0 \leq t < \infty\}$ , tal que  $\langle X \rangle(t) = t$ . Entonces  $X$  tiene la distribución del movimiento Browniano.*

*Demostración.* Veamos que dados  $0 < s < t$ , los incrementos  $X_t - X_s$  son independientes de  $\mathcal{F}(s)$  y tienen una distribución normal con media 0 y varianza  $t - s$ , es decir veamos que para todo  $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\mathbb{E}e^{i\lambda(X(t)-X(s))} = e^{\frac{|\lambda|^2}{2}(t-s)}. \quad (1.27)$$

Condicionando en  $\mathcal{F}(s)$ , es suficiente mostrar que

$$\mathbb{E}[e^{i\lambda(X(t)-X(s))} \mid \mathcal{F}(s)] = e^{\frac{|\lambda|^2}{2}(t-s)}. \quad (1.28)$$

Sean  $s, t > 0$  fijos tales que  $0 \leq s < t$  y sea  $\lambda \in \mathbb{R}$  dado. Usando la definición de esperanza condicional, nuestro objetivo es mostrar que para todo  $A \in \mathcal{F}(s)$  se satisface que

$$\mathbb{E}[e^{\frac{|\lambda|^2}{2}(t-s)} \mathbf{1}_A] = \mathbb{E}[e^{i\lambda(X(t)-X(s))} \mathbf{1}_A]. \quad (1.29)$$

En efecto, sea  $A \in \mathcal{F}(s)$  dado. Si consideramos la función  $f(x) = e^{i\lambda x}$  entonces aplicando la fórmula de Itô se obtiene que

$$e^{i\lambda X(t)} = e^{i\lambda X(s)} + i\lambda \int_s^t e^{i\lambda X(r)} dX(r) \quad (1.30)$$

multiplicando esta ecuación por  $e^{-i\lambda X(s)} \mathbf{1}_A$  se obtiene que

$$e^{i\lambda(X(t)-X(s))} \mathbf{1}_A = \mathbf{1}_A + i\lambda e^{-i\lambda X(s)} \mathbf{1}_A \int_s^t e^{i\lambda X(r)} dX(r) - \frac{\lambda^2}{2} \mathbf{1}_A \int_s^t e^{i\lambda(X(r)-X(s))} dr \quad (1.31)$$

Tomando valor esperado en la anterior igualdad, y usando el hecho que la integral de Itô es una martingala, se llega a que

$$\mathbb{E}[e^{i\lambda(X(t)-X(s))} \mathbf{1}_A] = \mathbb{P}(A) - \frac{\lambda^2}{2} \int_s^t \mathbb{E}[e^{i\lambda(X(r)-X(s))} \mathbf{1}_A] dr \quad (1.32)$$

Así,  $\mathbb{E}[e^{i\lambda(X(t)-X(s))} \mathbf{1}_A]$  es aquella función  $g(t)$  que satisfaga el PVI

$$\begin{cases} \frac{dg}{dt} = -\frac{\lambda^2}{2}g(t) , \\ g(s) = \mathbb{P}(A) . \end{cases} \quad (1.33)$$

es decir

$$\mathbb{E}[e^{i\lambda(X(t)-X(s))} \mathbf{1}_A] = \mathbb{P}(A)e^{-\frac{\lambda^2}{2}(t-s)}, \quad (1.34)$$

luego

$$\mathbb{E}[e^{i\lambda(X(t)-X(s))} \mathbf{1}_A] = \mathbb{E}[e^{\frac{\lambda^2}{2}(t-s)} \mathbf{1}_A], \quad (1.35)$$

lo que demuestra que  $X$  es un movimiento Browniano.  $\square$

La siguiente proposición garantiza que toda martingala local continua se puede expresar como un movimiento Browniano haciendo un escalamiento temporal adecuado en términos de su variación cuadrática. En otras palabras la variación cuadrática de una martingala es el “reloj” con el que se ajusta dicho proceso para volverlo un movimiento Browniano. Este resultado representará la herramienta fundamental para nuestro objetivo de deducir las ecuaciones diferenciales estocásticas que describan la evolución de los procesos polares de Ornstein-Uhlenbeck.

**Proposición 2** (Cambio temporal para martingalas [Dambis, Dubins & Schwarz], Teorema 4.6 Karatzas and Shreve (1991)). *Sea  $M$  una martingala local continua respecto a  $\mathcal{F}(t)$ , que empiece en cero, y cuya variación cuadrática sea no decreciente y no acotada, es decir tal que  $\langle M \rangle(t) \rightarrow +\infty$  cuando  $t \rightarrow +\infty$  c.p.1. Para cada  $0 \leq s < \infty$  consideremos el tiempo de parada*

$$T(s) = \inf\{t \geq 0 : \langle M \rangle(t) > s\} \quad (1.36)$$

Entonces el proceso de tiempo cambiado

$$B(s) := M(T(s)), \quad \mathcal{G}(s) := \mathcal{F}(T(s)); \quad s \geq 0, \quad (1.37)$$

es un movimiento Browniano estándar uni-dimensional. Más aún c.p.1 la martingala  $M$  puede obtenerse de  $B$  mediante el cambio temporal:

$$M(t) = B(\langle M \rangle(t)); \quad t \geq 0 \quad (1.38)$$

*Demostración.* Nótese que la sucesión de tiempos de parada  $\{T(s)\}$ ,  $s \geq 0$ , es creciente y que cada  $T(s)$  es finito puesto que  $\langle M \rangle(t) \rightarrow +\infty$  cuando  $t \rightarrow +\infty$ , lo que nos asegura que  $\{\mathcal{F}(T(t))\}$ ,  $t \geq 0$ , es una filtración. Nuestro objetivo es usar la caracterización de Lèvy para mostrar que  $B$  es un movimiento Browniano. Para dicho propósito elijamos  $0 \leq s_1 < s_2$  y consideremos la martingala parada  $X(t) = M(t \wedge T(s_2))$ ,  $t \geq 0$ , respecto a  $\mathcal{F}(t)$ . Por las propiedades de la variación cuadrática se sabe que  $X^2 - \langle X \rangle$  es también una martingala integrable y por tanto  $\mathbb{E}(X(T(s_2)) | \mathcal{F}(T(s_1))) = X(T(s_1))$ . Así

$$\mathbb{E}(B(s_2) - B(s_1) | \mathcal{G}(s_1)) = \mathbb{E}(X(T(s_2)) - X(T(s_1)) | \mathcal{F}(T(s_1))) = 0 \quad (1.39)$$

y para  $0 \leq t < \infty$

$$\begin{aligned} \mathbb{E}((B(s_2) - B(s_1))^2 | \mathcal{G}(s_1)) &= \mathbb{E}((X(T(s_2)) - X(T(s_1)))^2 | \mathcal{F}(T(s_1))) \\ &= \mathbb{E}(X^2(T(s_2)) - X^2(T(s_1)) | \mathcal{F}(T(s_1))) \\ &= \mathbb{E}(\langle X(T(s_2)) \rangle - \langle X(T(s_1)) \rangle | \mathcal{F}(T(s_1))) \\ &= s_2 - s_1 \end{aligned}$$

Además  $B$  es continua puesto que  $M$  tiene los mismos intervalos de constancia que  $\langle M \rangle$  y ambas son continuas. (Problema 4.5 Karatzas and Shreve (1991)). Es decir que  $B$  es una martingala continua cuya variación cuadrática es  $\langle B \rangle(s) = s$ . Por la caracterización de Lèvy (Proposición 1)  $B$  es un movimiento Browniano.  $\square$

# Capítulo 2

## Proceso de Ornstein-Uhlenbeck y Coordenadas Polares

En el estudio de las ecuaciones diferenciales estocásticas (EDEs), una de las más relevantes es la ecuación de Langevin, la cual explica el movimiento de una partícula Browniana con base en la ecuación de movimiento de Newton  $m\mathbf{a} = \mathbf{F}$ . La ecuación de Langevin describe tal movimiento como aquél en el cual intervienen una fuerza de fricción proporcional a la velocidad  $\mathbf{U}$  y una fuerza estocástica dependiente del tiempo y resultante de las interacciones de la partícula con el medio. Así un modelo para la velocidad  $\mathbf{U}$  de la partícula Browniana está dado por la siguiente ecuación

$$d\mathbf{U}(t) = -\lambda\mathbf{U}(t) dt + \sqrt{2D} d\mathbf{W}(t), \quad (2.1)$$

donde  $\lambda$  ( $s^{-1}$ ) es el coeficiente de fricción,  $D$  ( $cm^2/s^3$ ) es el coeficiente de difusión y  $\mathbf{W}$  ( $s^{1/2}$ ) es un movimiento Browniano 2-dimensional. El proceso  $\mathbf{U}$  que soluciona dicha EDE es denominado proceso de Ornstein-Uhlenbeck (OU) y está dado por (Karatzas and Shreve, 1991):

$$\mathbf{U}(t) = \mathbf{U}(0)e^{-\lambda t} + \sqrt{2D} \int_0^t e^{-\lambda(t-s)} d\mathbf{W}(s), \quad 0 \leq t < \infty.$$

En el caso del movimiento Browniano se sabe que sus trayectorias son no acotadas c.p.1, lo cual se verifica mediante la ley del tmo iterado, que establece que c.p.1 el crecimiento del movimiento Browniano tiene el mismo orden que  $\sqrt{2t \log \log t}$  cuando  $t \rightarrow \infty$  (Klebaner (2005), teorema 3.31). En Chen (2015) se muestra que el proceso de Ornstein-Uhlenbeck 1-dimensional también tiene asociado una ley similar, estableciendo lo siguiente:

**Proposición 3** (Ley del logaritmo para el proceso de OU, Chen (2015), proposición 2.1). *Un proceso de OU 1-dimensional  $U$  satisface la siguiente ley c.p.1*

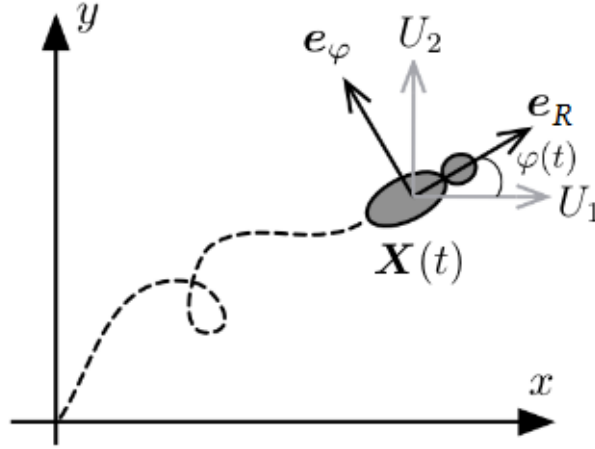
$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\max\{|U(s)| : s \leq t\}}{\sqrt{2 \ln t}} = 1. \quad (2.2)$$

La versión planar  $\mathbf{U}(t) = U_1(t) + iU_2(t)$  del proceso de OU es de particular interés dado que se puede usar para describir el comportamiento de numerosos agentes Brownianos (Schweitzer, 2003), entre los que se encuentran organismos como las hormigas, cuyo estudio fue la principal motivación del presente trabajo. Las hormigas poseen un eje claro de orientación (cabeza-cola), por lo que es posible describir su movimiento a través de sus coordenadas polares locales, es decir

si  $\mathbf{U}(t) = U_1(t) + iU_2(t)$  es la representación en  $\mathbb{C}$  del vector velocidad de la hormiga en  $\mathbb{R}^2$  en el tiempo  $t$ , entonces se pueden considerar sus coordenadas polares  $(R, \varphi)$ , dadas por la rapidez  $R(t) = \|\mathbf{U}(t)\|$  y el ángulo  $\varphi(t)$  entre el eje de orientación de la hormiga en el tiempo  $t$  y el eje  $x$ . Luego

$$\mathbf{U}(t) = R(t)(\cos \varphi(t) + i \operatorname{sen} \varphi(t)) = R(t) e^{i\varphi(t)}, \quad 0 \leq t < \infty \quad (2.3)$$

En el siguiente gráfico se visualizan ambos sistemas coordenados



donde  $\mathbf{e}_R(t)$  y  $\mathbf{e}_\varphi(t)$  están dados por

$$\mathbf{e}_R(t) = \cos \varphi(t) + i \operatorname{sen} \varphi(t) \quad \text{y} \quad \mathbf{e}_\varphi(t) = -\operatorname{sen} \varphi(t) + i \cos \varphi(t).$$

Así, para organismos que poseen un eje claro de orientación hay dos sistemas equivalentes a través de los cuales se puede describir su movimiento.

Observaciones respecto al fenómeno de quimiótaxis en las hormigas han develado que las señales químicas afectan de manera directa a la dirección  $\varphi$  de su movimiento pero no la rapidez (Perna et al., 2012), por lo que resulta más conveniente explicar la evolución de su movimiento en términos de sus coordenadas polares locales  $(R, \varphi)$ . Para el modelo de hormigas (Ramirez et al., 2019), la distribución de la rapidez de la hormiga se asume igual a la distribución invariante o límite de  $R(t)$ .

Motivados por lo anterior, el presente capítulo tiene por objetivo estudiar la representación polar del proceso de Ornstein-Uhlenbeck complejo  $\mathbf{U}(t) = U_1(t) + iU_2(t)$  con el fin de hallar EDEs que describan el comportamiento, tanto del proceso radial  $R(t) = \|\mathbf{U}(t)\|$ , como del proceso angular  $\varphi(t) = \operatorname{Arg} \mathbf{U}(t)$ . Además se demostrará que el proceso radial es la única solución de tal EDE, lo cual permitirá calcular la distribución invariante de  $R$  en el siguiente capítulo.

Con el propósito de deducir EDEs para  $R$  y  $\varphi$ , consideremos el logaritmo complejo del proceso  $\mathbf{U}$ , definido como

$$\operatorname{Log} \mathbf{U}(t) := \ln R(t) + i\varphi(t), \quad (2.4)$$

cuya rama se elige de manera que  $\varphi(t)$  tome valores en el intervalo  $[-\pi, \pi)$ . Más adelante se mostrará una importante similitud entre el movimiento Browniano y el proceso de OU, como lo es el hecho de que el origen es inaccesible para ambos procesos, por lo que el logaritmo complejo

c.p.1 toma valores finitos para  $0 \leq t < \infty$  pues  $R(t) \neq 0$  c.p.1. Basados en la teoría de análisis complejo (Lang (1999), p. 52) se puede extender el Teorema 5.3 de Klebaner (2005) para obtener la siguiente ecuación para  $\text{Log} \mathbf{U}(t)$

$$\int_0^t \frac{d\mathbf{U}(t)}{\mathbf{U}(t)} = \text{Log} \mathbf{U}(t), \quad t \geq 0. \quad (2.5)$$

Utilizando la ecuación (2.5) y la Proposición 2, junto con un análisis similar al realizado en Vakevoudis (2015), lograremos uno de los objetivos de este capítulo, el cual se enuncia en el siguiente teorema.

**Teorema 1.** *Los procesos radial  $R$  y angular  $\varphi$  del proceso de OU dado por la ecuación (2.1) satisfacen las ecuaciones diferenciales estocásticas*

$$dR(t) = \sqrt{2D} dB(t) + \left( \frac{D}{R(t)} - \lambda R(t) \right) dt \quad (2.6)$$

$$d\varphi(t) = \frac{\sqrt{2D}}{R(t)} dB(t) \quad (2.7)$$

*Demostración.* Usando la ecuación para el logaritmo complejo (2.5) y la ecuación de Langevin (2.1) se tiene que

$$\begin{aligned} \ln R(t) + i\varphi(t) &= \ln R(0) + i\varphi(0) + \int_0^t \frac{-\lambda \mathbf{U}(s) ds + \sqrt{2D} d\mathbf{W}(s)}{\mathbf{U}(s)} \\ &= \ln R(0) + i\varphi(0) - \lambda t + \sqrt{2D} \int_0^t \frac{dW_1(s) + i dW_2(s)}{U_1(s) + iU_2(s)} \frac{U_1(s) - iU_2(s)}{U_1(s) - iU_2(s)} \\ &= \ln R(0) + i\varphi(0) - \lambda t \\ &\quad + \sqrt{2D} \int_0^t \frac{U_1(s) dW_1(s) + U_2(s) dW_2(s) + i[U_1(s) dW_2(s) - U_2(s) dW_1(s)]}{R^2(s)}. \end{aligned}$$

Discriminando la parte real y la parte imaginaria en la anterior expresión se observa que los procesos radial y angular satisfacen, respectivamente, las siguientes ecuaciones

$$\ln R(t) = \ln R(0) - \lambda t + \sqrt{2D} \int_0^t \frac{U_1(s) dW_1(s) + U_2(s) dW_2(s)}{R^2(s)}, \quad (2.8)$$

$$\varphi(t) = \varphi(0) + \sqrt{2D} \int_0^t \frac{U_1(s) dW_1(s) - U_2(s) dW_2(s)}{R^2(s)}. \quad (2.9)$$

Nótese que ambas ecuaciones involucran integrales de Itô, las cuales son martingalas continuas que empiezan en cero. Denotemos dichas integrales por

$$M_1(t) := \int_0^t \sqrt{2D} \frac{U_1(s) dW_1(s) + U_2(s) dW_2(s)}{R^2(s)},$$

$$M_2(t) := \int_0^t \sqrt{2D} \frac{U_1(s) dW_1(s) - U_2(s) dW_2(s)}{R^2(s)}.$$

Usando la fórmula para la variación cuadrática de una integral de Itô, dada en (1.25), se obtiene que las martingalas  $M_1$  y  $M_2$  tienen la misma variación cuadrática, satisfaciendo lo siguiente

$$\langle M_1 \rangle(t) = \langle M_2 \rangle(t) = \int_0^t \left\| \frac{\sqrt{2D} \mathbf{U}(s)}{R^2(s)} \right\|^2 ds = \int_0^t \frac{2D}{R^2(s)} ds \xrightarrow{t \rightarrow \infty} \infty. \quad (2.10)$$

Aplicando la Proposición 2 se concluye que existe un movimiento Browniano 1-dimensional  $B$  tal que, al aplicarle el escalamiento temporal

$$T(s) = \int_0^s \frac{2D}{R^2(s)} ds, \quad (2.11)$$

se obtiene un proceso cuyas trayectorias son iguales c.p.1 a las trayectorias de  $M_1$  y  $M_2$ . Es decir c.p.1  $M(T(s)) = B(t)$ , de donde

$$M_1(t) = M_2(t) = B \left( \int_0^t \frac{2D}{R^2(s)} ds \right), \quad t \geq 0. \quad (2.12)$$

Ahora nótese que la integral de Itô

$$M(t) := \int_0^t \frac{\sqrt{2D}}{R(s)} dB(s), \quad (2.13)$$

tiene también variación cuadrática dada por

$$\langle M \rangle(t) = \int_0^t \left| \frac{\sqrt{2D}}{R(s)} \right|^2 ds = \int_0^t \frac{2D}{R^2(s)} ds, \quad (2.14)$$

por tanto, nuevamente vía la Proposición 2, se tiene que c.p.1

$$M(t) = B \left( \int_0^t \frac{2D}{R^2(s)} ds \right). \quad (2.15)$$

Igualando (2.12) y (2.15) se tiene que c.p.1

$$M_1(t) = M_2(t) = M(t). \quad (2.16)$$

Volviendo a (2.8) y (2.9), tenemos que c.p.1 los procesos radial  $R$  y angular  $\varphi$  satisfacen las ecuaciones

$$\ln R(t) = \ln R(0) - \lambda t + \int_0^t \frac{\sqrt{2D}}{R(s)} dB(s), \quad (2.17)$$

$$\varphi(t) = \varphi(0) + \int_0^t \frac{\sqrt{2D}}{R(s)} dB(s), \quad (2.18)$$

donde  $B$  es un movimiento Browniano. Así, denotando  $X(t) = \ln R(t)$ , se concluye de (2.17) y (2.18) que  $X(t)$  y  $\varphi$  son soluciones fuertes de las siguientes ecuaciones diferenciales estocásticas:

$$dX(t) = \frac{\sqrt{2D}}{e^{X(t)}} dB(t) - \lambda dt \quad (2.19)$$

$$d\varphi(t) = \frac{\sqrt{2D}}{R(t)} dB(t), \quad (2.20)$$

respectivamente. Nuestro objetivo es encontrar una ecuación diferencial estocástica para  $R(t) = e^{X(t)}$ . Aplicando la fórmula de Itô a  $e^{X(t)}$  y usando (2.19) y la regla  $(dt)^2 = 0$  y  $(dB(t))^2 = dt$  se tiene que

$$de^{X(t)} = e^{X(t)} dX(t) + \frac{1}{2}e^{X(t)}(dX(t))^2 \quad (2.21)$$

$$= e^{X(t)}(\sqrt{2D}e^{-X(t)} dB(t) - \lambda dt) + \frac{1}{2}e^{X(t)}(\sqrt{2D}e^{-X(t)} dB(t) - \lambda dt)^2 \quad (2.22)$$

$$= \sqrt{2D} dB(t) - \lambda e^{X(t)} dt + \frac{1}{2}e^{X(t)}(2De^{-2X(t)}(dB(t))^2) \quad (2.23)$$

$$= \sqrt{2D} dB(t) + (De^{-X(t)} - \lambda e^{X(t)}) dt \quad (2.24)$$

Desprendiéndose la EDE

$$dR(t) = \sqrt{2D} dB(t) + \left( \frac{D}{R(t)} - \lambda R(t) \right) dt. \quad (2.25)$$

□

Demostrar existencia y unicidad de solución de la EDE (2.6) será la base para desarrollar la teoría del siguiente capítulo, la cual a su vez nos permitirá hallar la distribución invariante del proceso  $R$ . La existencia de solución a dicha EDE es clara puesto que fue construida precisamente como una descripción del proceso radial de Ornstein-Uhlenbeck,  $R(t) = \|\mathbf{U}(t)\|$ . Para demostrar su unicidad se requiere que  $R(t) \neq 0$  c.p.1, lo cual se mostrará en la siguiente proposición, que es una adaptación de la Proposición 3.22 de Karatzas and Shreve (1991) y muestra un resultado análogo para el proceso radial del movimiento Browniano, también llamado proceso de Bessel.

**Proposición 4.** *El estado  $R = 0$  es inaccesible para el proceso radial de Ornstein-Uhlenbeck  $R(t) = \|\mathbf{U}(t)\|$ , es decir que c.p.1  $R(t) > 0$  para todo  $0 < t < \infty$ .*

*Demostración.* Consideremos primero el caso en que  $r := R(0) > 0$ . Para cada entero  $k$  tal que  $(1/k)^k < r < k$  consideremos las funciones

$$l_k(t) = \left( \frac{1}{k} \right)^k e^{-\lambda t}, \quad u_k(t) = ke^{-\lambda t}. \quad (2.26)$$

Las cuales son asintóticas a cero y actúan como barreras para el proceso radial  $R$ . La idea es mostrar que cuando  $k \rightarrow \infty$  el proceso radial supera primero la barrera de arriba  $u_k(t)$  y a partir de ello ver que c.p.1 no se hace cero (ver figura 2.1). Para ello definamos los tiempos de parada

$$T_k = \inf \left\{ t \geq 0; R(t) = \left( \frac{1}{k} \right)^k e^{-\lambda t} \right\}, \quad S_k = \inf \{ t \geq 0; R(t) = ke^{-\lambda t} \} \quad (2.27)$$

y, para cada  $n \geq 1$ , consideremos  $\tau_k = T_k \wedge S_k \wedge n$ .

Nótese que  $R(T_k) = (1/k)^k e^{-\lambda T_k}$  y  $R(S_k) = ke^{-\lambda S_k}$ , además como cada componente de  $\mathbf{U}$  es no acotada (ver (3)) entonces para cada  $k$  el proceso radial se hace igual a  $ke^{-\lambda t}$  c.p.1 en algún tiempo  $t$ , es decir

$$\mathbb{P} \left( \bigcap_{k=1}^{\infty} \{S_k < \infty\} \right) = 1. \quad (2.28)$$

Veamos además que

$$\mathbb{P}\left(\lim_{k \rightarrow \infty} S_k = \infty\right) = 1. \quad (2.29)$$

En efecto, como  $U_1(s) \leq \|\mathbf{U}(s)\| \leq |U_1(s)| + |U_2(s)|$ , entonces se satisface la siguiente desigualdad

$$\begin{aligned} \frac{\max\{U_1(s) : s \leq t\}}{\sqrt{2 \ln t}} &\leq \frac{\max\{R(s) : s \leq t\}}{\sqrt{2 \ln t}} \\ &\leq \frac{\max\{|U_1(s)| : s \leq t\}}{\sqrt{2 \ln t}} + \frac{\max\{|U_2(s)| : s \leq t\}}{\sqrt{2 \ln t}}, \end{aligned}$$

tomando límite cuando  $t \rightarrow \infty$  y aplicando la proposición 3 se tiene que c.p.1

$$1 \leq \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\max\{R(s) : s \leq t\}}{\sqrt{2 \ln t}} \leq 2, \quad (2.30)$$

de donde c.p.1 existe  $T > 0$  tal que si  $t \geq T$  entonces

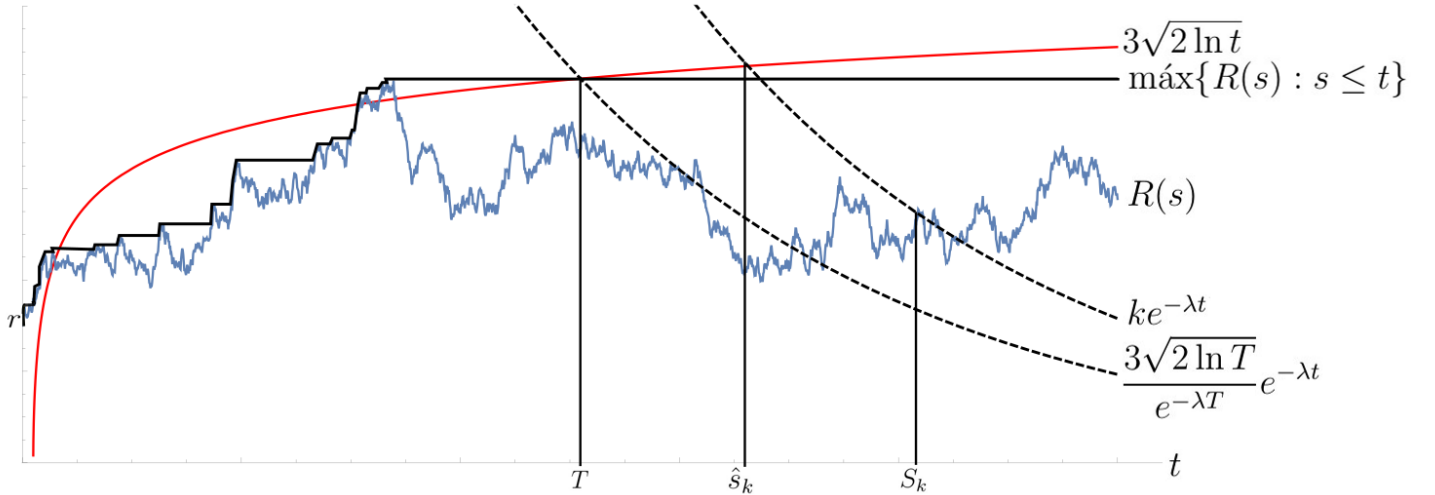
$$\max\{R(s) : s \leq t\} < 3\sqrt{2 \ln t}. \quad (2.31)$$

Consideremos ahora, para cada  $k$ ,  $\hat{s}_k = \inf\{t \geq 0 : 3\sqrt{2 \ln t} = ke^{-\lambda t}\}$ . Nótese que tanto  $\{S_k\}$  como  $\{\hat{s}_k\}$  son sucesiones monótonas crecientes y además c.p.1

$$\hat{s}_k \leq S_k \quad \text{para todo } k > \frac{3\sqrt{2 \ln T}}{e^{-\lambda T}} e^{-\lambda t}, \quad (\text{ver Figura 2.1}) \quad (2.32)$$

luego, dado que  $\{\hat{s}_k\}$  es claramente no acotada, entonces c.p.1  $\{S_k\}$  tampoco lo es, es decir que se satisface (2.29).

Figura 2.1: Comportamiento del tiempo de parada  $S_k$  respecto a  $\hat{s}_k$  en el infinito.



Por otro lado, la función  $\ln$  es de clase  $C^2$  en un intervalo abierto conteniendo  $[(1/k)^k e^{-\lambda \tau_k}, ke^{-\lambda \tau_k}]$ , aplicando la fórmula de Itô a  $\ln R(t)$  y usando la EDE (2.6) obtenida para  $R$ , se obtiene que

$$\ln R(\tau_k) = \ln r - \lambda \tau_k + \int_0^{\tau_k} \frac{1}{R(s)} dB(s). \quad (2.33)$$



Para  $0 \leq s \leq \tau_k$  se sabe que  $1/k \leq 1/R(s) \leq k^k$ , además  $\tau_k$  es también acotado, luego la integral de Itô que se observa en la ecuación (2.33) es una martingala, por lo que al tomar valor esperado en ambos miembros de dicha ecuación se obtiene que

$$\ln r = \mathbb{E}(\lambda\tau_k + \ln R(\tau_k)) = \mathbb{E}(\ln(e^{\lambda\tau_k} R(\tau_k))). \quad (2.34)$$

Considerando las diferentes posibilidades de  $\tau_k$ , la anterior ecuación es equivalente a

$$\ln r = -k \ln k \mathbb{P}(T_k \leq S_k \wedge n) + \ln k \mathbb{P}(S_k \leq T_k \wedge n) + \mathbb{E}(\ln(e^{\lambda n} R(n)) \mathbb{1}_{\{n < T_k \wedge S_k\}}). \quad (2.35)$$

Nótese que en el evento  $\{n < S_k \wedge T_k\}$  el proceso  $R(n)$  se encuentra acotado por  $(1/k)e^{-\lambda n}$  y  $ke^{-\lambda n}$ , por tanto se tiene que  $-k \ln k < \ln(e^{\lambda n} R(n)) < \ln k$ , además de (2.28) se deduce que  $\mathbb{P}(n < S_k \wedge T_k) \rightarrow 0$  cuando  $n \rightarrow \infty$ . Luego tomando límite cuando  $n \rightarrow \infty$  en la ecuación (2.35) obtenemos la ecuación

$$\ln r = -k \ln k \mathbb{P}(T_k \leq S_k) + \ln k \mathbb{P}(S_k \leq T_k). \quad (2.36)$$

Dividiendo la anterior ecuación entre  $k \ln k$ , y haciendo  $k \rightarrow \infty$ , se desprende que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \mathbb{P}(T_k \leq S_k) = 0, \quad (2.37)$$

luego, si se considera  $T = \inf\{t > 0; R(t) = 0\}$ , entonces  $T_k \leq T$  para todo  $k \geq 1$  y usando (2.28), (2.29) y (2.37) se deduce que

$$\mathbb{P}(T < \infty) = \lim_{k \rightarrow \infty} \mathbb{P}(T \leq S_k) \leq \lim_{k \rightarrow \infty} \mathbb{P}(T_k \leq S_k) = 0, \quad (2.38)$$

lo cual demuestra que, en el caso  $r := R(0) > 0$ ,  $R(t) > 0$  c.p.1 para todo  $0 < t < \infty$ . En el caso  $r = 0$  se extiende dicha característica puesto que ésta es válida para cualquier  $\epsilon > 0$  dado, luego usando la propiedad fuerte de Markov se tiene lo siguiente

$$\mathbb{P}_0(R(t) > 0 : \epsilon < t < \infty) = \mathbb{E}_0(\mathbb{P}_{R(\epsilon)}(R(t) > 0 : 0 < t < \infty)) = 1. \quad (2.39)$$

Haciendo  $\epsilon \downarrow 0$  se obtiene que c.p.1  $R(t) > 0$  para todo  $0 < t < \infty$ , concluyéndose que cero es inaccesible para  $R$ .  $\square$

Típicamente los teoremas de unicidad de solución de EDEs requieren que la deriva sea acotada, Lipchitz o localmente Lipchitz en el infinito. En nuestro caso la deriva está dada por  $\frac{D}{R(t)} - \lambda R(t)$  y no se cumplen las hipótesis de dichos teoremas, por lo que modificaremos la prueba del teorema 5.2.5 de Karatzas and Shreve (1991) como se ve a continuación para mostrar la unicidad de la solución de la EDE (2.6). Para obtener el resultado deseado haremos uso de la desigualdad de Gronwall (Karatzas and Shreve (1991), p. 287), la cual establece que si  $g$  es una función continua que satisfaga

$$0 \leq g(t) \leq \alpha(t) + \beta \int_0^t g(s) ds; \quad 0 \leq t \leq T, \quad (2.40)$$

con  $\beta \geq 0$  y  $\alpha : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$  integrable. Entonces

$$g(t) \leq \alpha(t) + \beta \int_0^t \alpha(s) e^{\beta(t-s)} ds; \quad 0 \leq t \leq T. \quad (2.41)$$

**Proposición 5.** *El proceso radial  $R(t) = \|\mathbf{U}(t)\|$  es la única solución fuerte de la ecuación (2.6)*

*Demostración.* Supongamos que  $X$  y  $\tilde{X}$  son dos soluciones fuertes de la EDE (2.6) y definamos los tiempos de parada  $\tau_n = \inf\{t \geq 0; \|X(t)\| \leq \frac{1}{n}\}$ , para  $n \geq 1$  y consideremos  $s_n = \tau_n \wedge \tilde{\tau}_n$ . Nótese que para  $0 < s < s_n$  se tiene que  $\|X(s)\| > \frac{1}{n}$  y  $\|\tilde{X}(s)\| > \frac{1}{n}$ . Dado que 0 es inaccesible tanto para  $X$  como para  $\tilde{X}$  entonces c.p.1  $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \infty$  y

$$X(t \wedge s_n) - \tilde{X}(t \wedge s_n) = \int_0^{t \wedge s_n} \left( \frac{D}{X(u)} - \lambda X(u) - \frac{D}{\tilde{X}(u)} + \lambda \tilde{X}(u) \right) du, \quad (2.42)$$

luego, utilizando la desigualdad de Cauchy-Schwarz, se tiene que

$$\begin{aligned} \mathbb{E}|X(t \wedge s_n) - \tilde{X}(t \wedge s_n)|^2 &= \mathbb{E} \left| \int_0^{t \wedge s_n} \left( D \frac{\tilde{X}(u) - X(u)}{X(u)\tilde{X}(u)} + \lambda(\tilde{X}(u) - X(u)) \right) du \right|^2 \\ &\leq \mathbb{E} \left\{ \left( \int_0^{t \wedge s_n} 1^2 du \right) \left( \int_0^{t \wedge s_n} \left( D \frac{\tilde{X}(u) - X(u)}{X(u)\tilde{X}(u)} + \lambda(\tilde{X}(u) - X(u)) \right)^2 du \right) \right\} \\ &\leq t \mathbb{E} \int_0^{t \wedge s_n} \left( D \frac{\tilde{X}(u) - X(u)}{X(u)\tilde{X}(u)} + \lambda(\tilde{X}(u) - X(u)) \right)^2 du \\ &\leq T(Dn^2 + \lambda)^2 \mathbb{E} \int_0^{t \wedge s_n} |\tilde{X}(u) - X(u)|^2 du \\ &= T(Dn^2 + \lambda)^2 \int_0^t \mathbb{E} |\tilde{X}(u \wedge s_n) - X(u \wedge s_n)|^2 du. \end{aligned}$$

Resumiendo, tenemos que

$$0 \leq \mathbb{E} \left| X(t \wedge s_n) - \tilde{X}(t \wedge s_n) \right|^2 \leq T(Dn^2 + \lambda)^2 \int_0^t \mathbb{E} |X(t \wedge s_n) - \tilde{X}(t \wedge s_n)|^2 du, \quad 0 \leq t \leq T, \quad (2.43)$$

y aplicando la desigualdad de Gronwall donde  $g(t) := \mathbb{E}|X(t \wedge s_n) - \tilde{X}(t \wedge s_n)|^2$  y  $\alpha$  es la función idénticamente cero, se obtiene que  $\mathbb{E}|X(t \wedge s_n) - \tilde{X}(t \wedge s_n)|^2 = 0$ , es decir que  $X$  y  $\tilde{X}$  son indistinguibles.  $\square$

Con la Proposición 4 se mostró que el proceso radial de Ornstein-Uhlenbeck  $R$  es distinto de cero c.p.1, lo cual junto con la unicidad mostrada en la Proposición 5, permite deducir desde la teoría que la ecuación (2.6) describe unívocamente al proceso radial  $R(t) = \|\mathbf{U}(t)\|$ . Sin embargo en las simulaciones realizadas de ambos procesos, en la Figura 2.2, se observa que las trayectorias del proceso  $R$ , generado como la solución a la EDE (2.6), tienen un comportamiento considerablemente diferente a las trayectorias del proceso radial, generado como la norma de un proceso de Ornstein-Uhlenbeck complejo.

En la simulación del proceso  $R$ , realizada en el software Mathematica y mostrada en la Figura 2.2, se observa que varias trayectorias se vuelven rápidamente negativas, lo cual se debe a las singularidades generadas por la forma de la ecuación (2.6), en la cual el proceso  $R$ , que puede tomar valores muy cercanos a cero, se encuentra en el denominador, haciendo que la simulación sea

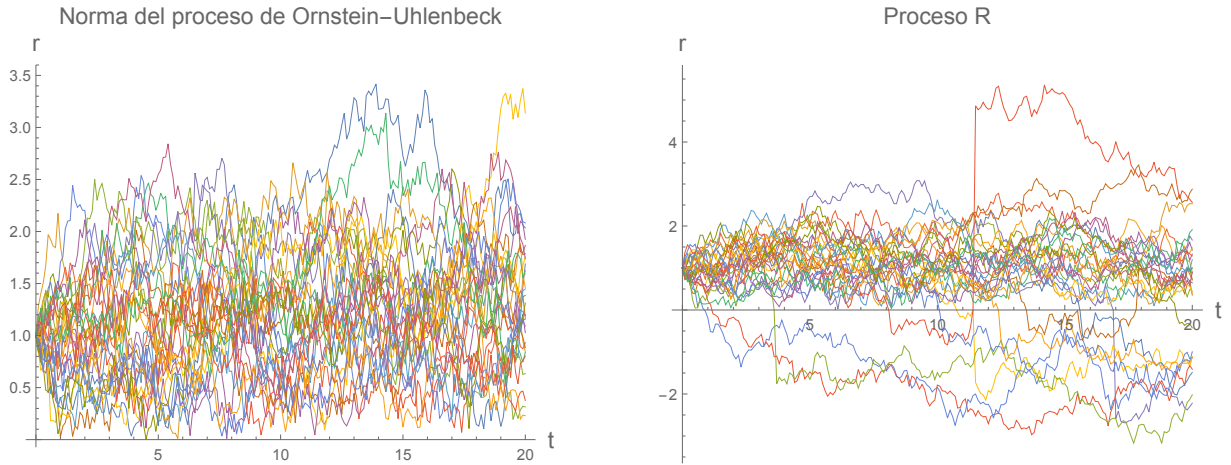


Figura 2.2: Realizaciones del proceso radial de Ornstein-Uhlenbeck  $\|U\|$  y del proceso  $R$  dado por la EDE (2.6), hasta un tiempo de 20 segundos, con  $\lambda = 0,1$  y  $D = 0,1$ .

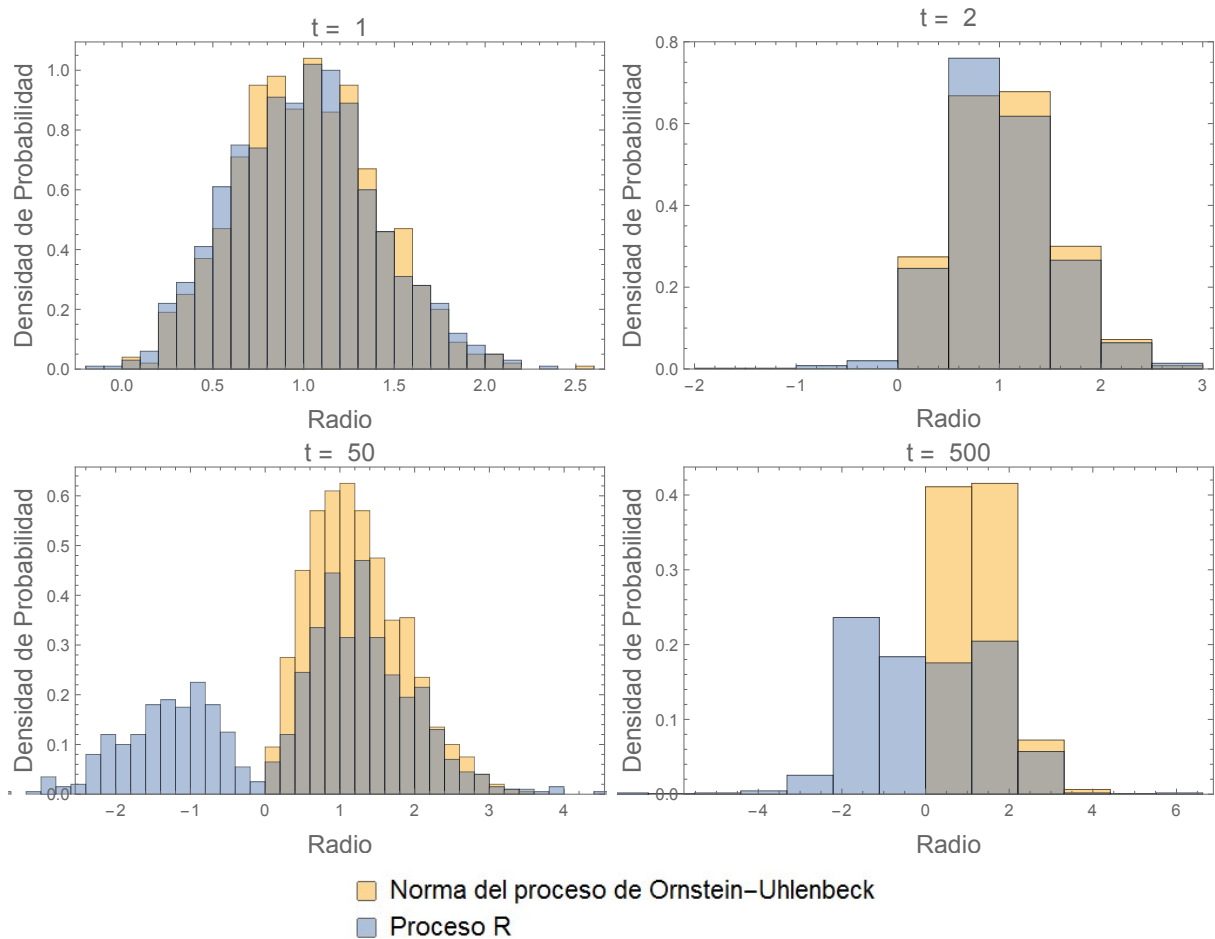


Figura 2.3: Histogramas realizados en diferentes tiempos a partir de la simulación de 1000 trayectorias del proceso radial de Ornstein-Uhlenbeck  $\|U\|$  y del proceso  $R$  dado por la ecuación (2.6). El coeficiente de deriva es  $\lambda = 0,1$  y el coeficiente de difusión es  $D = 0,1$ .

computacionalmente inestable. En la figura 2.3 se observa cómo, a medida que el tiempo crece, la distribución del proceso  $R$ , generado por la ecuación (2.6), es cada vez más alejada de la realidad, puesto que toma valores tanto positivos como negativos con, aparentemente, igual probabilidad, lo cual es conceptualmente imposible.

El anterior análisis indica que, para efectos de modelación, no es conveniente simular el proceso radial de Ornstein-Uhlenbeck como la solución de la EDE (2.6), sin embargo, haciendo uso de ésta y de su existencia y unicidad, se deducirá en el próximo capítulo la distribución invariante del proceso radial de Ornstein-Uhlenbeck, la cual en el modelo de hormigas dado en (Ramirez et al., 2019) se asume igual a la distribución de la rapidez, puesto que esta última no se ve afectada por las señales quimiotácticas de la hormiga y por tanto se supone que su distribución es independiente del tiempo.

# Capítulo 3

## Distribución Invariante del proceso radial de Ornstein-Uhlenbeck

En el capítulo anterior se mostró que, en el espacio de las funciones continuas  $C(\mathbb{R})$ , el único proceso que satisface la EDE

$$dR(t) = \sqrt{2D} dB(t) + \left( \frac{D}{R(t)} - \lambda R(t) \right) dt \quad (3.1)$$

es el proceso radial de Ornstein-Uhlenbeck  $R$ . Nuestro primer objetivo en el presente capítulo es caracterizar la distribución de dicho proceso mediante ecuaciones diferenciales parciales que describan su evolución. Luego se utilizará tal caracterización para mostrar que  $R$  posee una distribución invariante y hallar una expresión para ésta. Se mostrará mediante simulaciones la evolución en el tiempo del proceso radial de Ornstein-Uhlenbeck  $R$  y su convergencia a dicha distribución invariante.

### 1. Generador infinitesimal del proceso radial $R$

Típicamente la caracterización de las probabilidades de transición de un ov se hace mediante un operador diferencial, denominado generador infinitesimal, que representa en cierto sentido la razón de cambio de dichas probabilidades (Bhattacharya and Waymire (2009), Sección 5.2). El teorema 7.2.2 de Bhattacharya and Waymire (2009), junto con la teoría desarrollada en la sección 5.2 del mismo texto, muestra que si  $X : \Omega \rightarrow I$ , es un proceso de Itô dado por la ecuación

$$dX(t) = \mu(X(t)) dt + \sigma(X(t)) dB(t), \quad (3.2)$$

y los coeficientes  $\sigma$  y  $\mu$  son acotados o Lipchitz entonces existe un único generador infinitesimal  $A$  para  $X$ , dado por

$$A[f](x) = \frac{1}{2} \sigma^2(x) f''(x) + \mu(x) f'(x), \quad x \in I, \quad (3.3)$$

el cual permite caracterizar la evolución de la distribución del proceso  $X$ .

La EDE del proceso radial  $R$  tiene coeficiente de difusión constante  $\sqrt{2D}$  y coeficiente de deriva dado por

$$\mu(x) = \frac{D}{x} - \lambda x, \quad x > 0, \quad (3.4)$$

el cual no es Lipchitz ni acotado. Así, para garantizar la existencia y unicidad de un generador infinitesimal para el proceso radial  $R$ , hacemos uso de la teoría del problema de la martingala local de Stroock & Varadhan y de su relación con la existencia y unicidad de solución de la EDE (3.2).

Dada una ecuación de la forma (3.2), consideremos el correspondiente operador diferencial dado por (3.3). Se dice que  $X$  soluciona **el problema de la martingala local** asociado a la EDE (3.2) si para todo  $f \in C^2(I)$  el proceso estocástico  $M^f$ , definido como

$$M^f(t) = f(X(t)) - f(X(0)) - \int_0^t Af(X(s)) ds, \quad t \geq 0, \quad (3.5)$$

es una martingala local respecto a la filtración natural de  $X$ .

Los siguientes resultados permiten establecer una conexión entre la existencia y unicidad de solución de una EDE, el problema de la martingala y la existencia de un generador infinitesimal para dicha solución.

**Proposición 6** (Karatzas and Shreve (1991), Corolarios 5.4.8 y 5.4.9). *La existencia de solución  $X$  al problema de la martingala local asociado al operador  $A$  es equivalente a la existencia de solución débil de la ecuación (3.2). Además la unicidad de solución  $X$  del problema de la martingala local, con distribución inicial fija pero arbitraria  $\pi_0$ , es equivalente a la unicidad en sentido de probabilidad de la ecuación (3.2).*

Dado que el proceso radial de Ornstein-Uhlenbeck  $R$  es solución fuerte de la EDE (3.1) en el espacio de las funciones continuas  $C(I)$ , entonces es también solución débil a dicha ecuación. Además se tiene unicidad fuerte de dicha solución (Proposición 5), luego aplicando el teorema 18.14 de Kallenberg (1997) se tiene unicidad débil (en el sentido descrito en la sección 1.3). Así, la Proposición 6 garantiza que, para cada  $r \geq 0$ , el problema de la martingala local asociado a la EDE (3.1) tiene solución única  $X$  en  $C(I)$ .

El Teorema 18.11 de Kallenberg (1997) establece que si  $\mu$  y  $\sigma$  son funciones medibles tales que, para cada  $x \in \mathbb{R}$ , el problema de la martingala local asociado tiene solución única  $X$ , entonces  $X$  satisface la propiedad fuerte de Markov. Además muestra que si  $\mu$  y  $\sigma$  son acotados y continuos, entonces

$$T_t[f](x) = \mathbb{E}_x[f(X(t))] \quad (3.6)$$

define un semigrupo de Feller, es decir que satisface las propiedades (1.11) y (1.14). A partir de esto concluye que el operador  $A$  dado por (3.3) es el correspondiente generador infinitesimal de  $X$ . Aplicando el Teorema 18.11 de Kallenberg (1997) al proceso radial de Ornstein-Uhlenbeck  $R$ , se concluye que éste satisface la propiedad fuerte de Markov; sin embargo, como el coeficiente de deriva de  $R$  es no acotado, se hace necesario utilizar las propiedades heredadas del proceso de Ornstein-Uhlenbeck  $U$  para demostrar que el semigrupo  $T_t^R[f](x) := \mathbb{E}_x[f(R(t))]$ , es un semigrupo de Feller y así concluir que el generador infinitesimal del proceso  $R$  está dado por (3.3). Tal razonamiento se muestra en la siguiente proposición.

**Proposición 7** (Kallenberg (1997), Teorema 18.11). *El generador infinitesimal del proceso radial de Ornstein-Uhlenbeck  $R$  está dado por*

$$A[f](x) = D \frac{d^2}{dx^2} f(x) + \left( \frac{D}{x} - \lambda x \right) \frac{d}{dx} f(x). \quad (3.7)$$

*Demostración.* Veamos que el semigrupo  $T_t^R[f](x) := \mathbb{E}_x[f(R(t))]$  tiene las propiedades de Feller (1.11) y (1.14). Dado que el proceso de Ornstein-Uhlenbeck 2-dimensional  $\mathbf{U} = U_1 + iU_2$  está dado por la EDE (2.1), cuyos coeficientes son acotados, entonces tal proceso satisface las hipótesis del Teorema 18.11 de Kallenberg (1997), de donde  $\{T_t^{\mathbf{U}} : t \geq 0\}$  es un semigrupo de Feller.

Sea  $f \in C_0(I^2)$  una función dada, entonces  $f \circ \|\cdot\| \in C_0(I^2)$  puesto que  $\|\cdot\|$  es continua, por lo que se tiene que

$$T_t^R[f] = \mathbb{E}_r f(R(t)) = \mathbb{E}_{r+i0} f(\|\mathbf{U}\|) = T_t^{\mathbf{U}}(f \circ \|\cdot\|), \quad (3.8)$$

lo que muestra que  $T^R[f]$  es continua. Para ver que  $T^R[f] \in C_0$  basta ver que  $R_r(t) \xrightarrow{P} \infty$  cuando  $r \rightarrow \infty$ . La medida de probabilidad  $\mathbb{P}$  del proceso  $R$  es la inducida por el proceso de Ornstein-Uhlenbeck  $\mathbf{U}$ . Luego, para  $x$  y  $t$  fijos pero arbitrarios, se tiene que

$$\mathbb{P}_r(R(t) < x) \leq \mathbb{P}_{r+i0}(U_1(t) < x) \xrightarrow[|r| \rightarrow \infty]{} 0, \quad (3.9)$$

concluyéndose que  $T_t^R[f] \in C_0$  y por tanto que  $T_t^R[C_0] \subset C_0$ .

Veamos ahora que, para todo  $r > 0$ ,  $R_r(t) \xrightarrow{P} r$  cuando  $t \rightarrow 0$ . En efecto, sean  $r > 0$  y  $\epsilon > 0$  dados. Como el proceso de Ornstein-Uhlenbeck satisface las propiedades de Feller, entonces cuando  $t \rightarrow 0$ ,

$$\mathbf{U}_{r+i0}(t) \xrightarrow{P} r + i0, \quad (3.10)$$

es decir que  $\mathbb{P}_{r+i0}(\|\mathbf{U}(t) - (r + i0)\| > \epsilon) \rightarrow 0$  cuando  $t \rightarrow 0$ . Usando la desigualdad triangular se tiene entonces que

$$\mathbb{P}_r(R(t) - r > \epsilon) \leq \mathbb{P}_{r+i0}(\|\mathbf{U}(t) - (r + i0)\| > \epsilon) \xrightarrow[t \rightarrow 0]{} 0, \quad (3.11)$$

de donde  $T_t^R$  satisface la propiedad de Feller (1.14). Luego el generador infinitesimal del proceso radial de Ornstein-Uhlenbeck  $R$  está dado por la ecuación (3.7). □

## 2. Distribución Invariante del proceso radial $R$ y Simulaciones

El generador infinitesimal del proceso radial de Ornstein-Uhlenbeck  $R$ , dado por (3.7), permite caracterizar la evolución de sus densidades de transición  $p(t; x, y)$  como función de la variable de atrás  $x$ , puesto que éstas satisface la ecuación diferencial parcial

$$\frac{\partial}{\partial t} p(t; \cdot, y) = A[p](t, \cdot, y), \quad (3.12)$$

(Bhattacharya and Waymire (2009), Proposición 2.2), conocida como ecuación hacia atrás puesto que describe la evolución de la densidad de transición en términos de la variable de atrás  $x$ .

En aplicaciones al campo de la física, como la que motivó el presente trabajo, juega un papel más relevante la descripción de las densidades de transición  $p$  en términos de la evolución de la variable de adelante  $y$ . Para ello se considera el operador adjunto de  $A$  que, retomando los cálculos realizados en el capítulo 5, sección 2 de (Bhattacharya and Waymire, 2009), está dado por

$$A^*f(y) = \frac{d^2}{dy^2}[Df(y)] - \frac{d}{dy} \left[ \left( \frac{D}{y} - \lambda y \right) f(y) \right]. \quad (3.13)$$

A partir del operador  $A^*$  se obtiene la ecuación de Fokker-Planck

$$\frac{\partial}{\partial t}p(t; x, y) = D \frac{\partial^2}{\partial y^2}p(t; x, y) - \frac{\partial}{\partial y} \left[ \left( \frac{D}{y} - \lambda y \right) p(t; x, y) \right], \quad (3.14)$$

la cual caracteriza la evolución temporal de las densidades de transición de  $R$ .

Dieker and Gao (2013) muestran que el proceso de Ornstein-Uhlenbeck  $\mathbf{U}$  tiene una única distribución invariante y por tanto también el proceso radial  $R$ . Por el Teorema 5.12.2 de Bhattacharya and Waymire (2009), la distribución invariante  $\bar{\pi}$  satisface la ecuación  $A^*(\bar{\pi}) = 0$ , es decir que  $\bar{\pi}$  satisface

$$0 = -\frac{\partial}{\partial y} \left[ \left( \frac{D}{y} - \lambda y \right) \bar{\pi}(y) \right] + D \frac{\partial^2}{\partial y^2} (\bar{\pi}(y)), \quad \int_0^\infty \bar{\pi}(x) dx = 1. \quad (3.15)$$

Solucionando dicha ecuación se tiene que

$$\bar{\pi}(x) = \frac{\lambda}{D} e^{-\frac{x^2 \lambda}{2D}}, \quad (3.16)$$

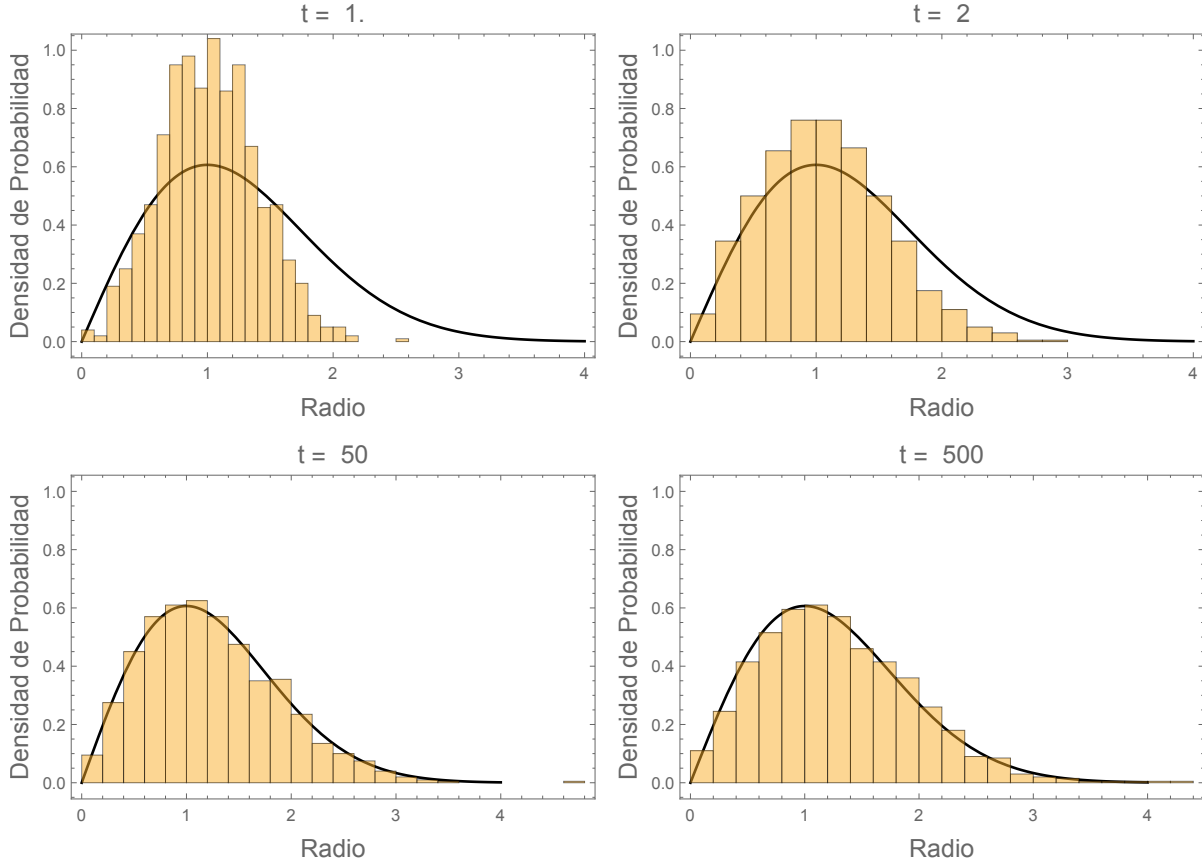
cuya media y varianza están dadas respectivamente por

$$R^* = \sqrt{\frac{\pi D}{2\lambda}}, \quad \sigma_R^* = \frac{(4 - \pi)D}{2\lambda}. \quad (3.17)$$

En la figura 3.1 se observa que la distribución del proceso radial, generado como la norma de un proceso de Ornstein-Uhlenbeck complejo, converge rápidamente a la distribución invariante  $\pi$ , hallada a partir de la EDE (3.1).



Figura 3.1: Distribución invariante  $\pi$  del proceso  $R$  comparada en diferentes tiempos con el histograma del proceso radial de Ornstein-Uhlenbeck  $\|\mathbf{U}\|$ , realizado a partir de la simulación de 1000 trayectorias de tal proceso. El coeficiente de deriva es  $\lambda = 0,1$  y el coeficiente de difusión es  $D = 0,1$ .



### 3. Conclusiones

Dado un proceso de Ornstein-Uhlenbeck bidimensional  $\mathbf{U}$ , el proceso radial  $R(t) = \|\mathbf{U}(t)\|$  está gobernado por la ecuación

$$dR(t) = \sqrt{2D} dB(t) + \left( \frac{D}{R(t)} - \lambda R(t) \right) dt, \quad (3.18)$$

la cual tiene coeficiente de fricción no acotado. Esta dificultad se extendió a la parte analítica puesto que la teoría de operadores infinitesimales está desarrollada para el caso en que los coeficientes sean acotados o Lipchitz. Sin embargo, estudiando esta teoría se logró concluir, utilizando la unicidad de solución de la EDE y en el problema de la martingala, que el proceso  $R$  descrito por (3.18) satisface la ecuación de Fokker-Planck, a partir de lo cual se pudo hallar la distribución invariante de dicho proceso.

Además de la caracterización de los procesos polares  $R$  y  $\varphi$ , en términos de movimientos Brownianos de tiempo cambiado, el proceso  $\mathbf{U}$  tiene notables similitudes con el movimiento Browniano, tales como la ley del logaritmo iterado y la inaccesibilidad del proceso radial asociado al estado

cero. Estas similitudes son, de hecho, las que permiten tanto hallar EDEs para los procesos polares como, posteriormente, ajustar la teoría de operadores infinitesimales para hallar la distribución invariante del proceso  $R$  dado por (3.18).

Dadas las singularidades que se presentan computacionalmente en la simulación del proceso  $R$  a través de la ecuación (3.18), no se visualiza desde el capítulo 2 la equivalencia de éste con el proceso radial  $\|\mathbf{U}(t)\|$ . Sin embargo en el capítulo 3 se observa que el proceso radial  $\|\mathbf{U}(t)\|$ , simulado como la norma de un proceso de Ornstein-Uhlenbeck, converge rápidamente a la distribución invariante del proceso  $R$ , hallada a partir de la EDE (3.18). Esto permite deducir que en efecto la EDE (3.18) describe el proceso radial  $\|\mathbf{U}(t)\|$ .

Otra forma de calcular la distribución invariante del proceso radial  $R$  sería describiendo éste como la magnitud de un proceso de Ornstein-Uhlenbeck y hallando su distribución invariante, sin pasar por la EDE (3.18). Para esto se tendría que resolver una ecuación diferencial parcial de segundo grado. Sin embargo el principal objetivo del presente trabajo era analizar la equivalencia de la ecuación de Langevin en coordenadas cartesianas, con el correspondiente modelo estocásticos para su magnitud dado por (3.18), lo cual como se mencionó no pudo hacerse directamente, debido a las singularidades de dicha ecuación. Partir entonces de la ecuación (3.18) para hallar la distribución invariante del proceso radial  $\|\mathbf{U}(t)\|$ , y mostrar que en efecto se da la convergencia, permite concluir la validez de la ecuación (3.18).

A partir de las similitudes del proceso de Ornstein-Uhlenbeck con el movimiento Browniano y de las implicaciones de éstas para el desarrollo de las teorías abordadas en el trabajo, se concluye que, dado un proceso bidimensional de Ornstein-Uhlenbeck, su proceso radial asociado satisface la ecuación (3.18) y converge a una distribución invariante, tal como se esperaba a partir de las observaciones hechas en (Perna et al., 2012).

# Bibliografía

- R.N. Bhattacharya and E.C. Waymire. *Stochastic Processes with Applications*. 2009.
- X. Chen. The Limit Law of the Iterated Logarithm. *Journal of Theoretical Probability*, 28(2): 721–725, 2015.
- A. S. Cherny. On the strong and weak solutions of stochastic differential equations governing Bessel processes. *Stochastics and Stochastics Reports*, 3(70):213–219, 2000.
- A.B. Dieker and Xuefeng Gao. Positive recurrence of piecewise Ornstein-Uhlenbeck processes and common quadratic Lyapunov functions. *Journal of Theoretical Probability*, 23(4):1291–1317, 2013.
- O. Kallenberg. *Foundations of Modern Probability*. 1997.
- I. Karatzas and S.E. Shreve. *Brownian Motion and Stochastic Calculus*. 1991.
- F. Klebaner. *Introduction to Stochastic Calculus with Applications*. 2005.
- H. Kunita and S. Watanabe. On square integrable martingales. *Nagoya Mathematical Journal*, 30 (30):209–246, 1967.
- S. Lang. *Complex Analysis*. 1999.
- B. Oksendal. *Stochastic Differential Equations. An introduction with applications*. Springer-Verlag Berlin, 5 edition, 1985.
- A. Perna, B. Granovskiy, S. Garnier, S. C. Nicolis, M. Labédan, G. Theraulaz, V. Fourcassié, and D.J. Sumpter. Individual rules for trail pattern formation in Argentine ants (*linepithema humile*). *PLoS Computational Biology*, 8(7), 2012.
- J.M. Ramirez, S. Vallejo, Y. Villa, S. Gaona, and S. Quintero. Modeling tropotaxis in ant colonies: recruitment and trail formation. *Submitted to Journal of Insect Behavior*, 2019.
- D. Revuz and M. Yor. *Continuous Martingales and Brownian Motion*, volume 293. 1999.
- P. Romanczuk, M. Bär, W. Ebeling, B. Lindner, and L. Schimansky-Geier. Active Brownian Particles. From Individual to Collective Stochastic Dynamics. 2012.
- M. Schienbein and H. Gruler. Langevin equation, Fokker-Planck equation and cell migration. *Bulletin of Mathematical Biology*, 55(3):585–608, 1993.
- F. Schweitzer. *Brownian Agents and Active Particles*. Springer, 2003.

D.W. Strock and S.R.S. Varadhan. *Multidimensional Diffusion Processes*. 1979.

S. Vakeroudis. On the windings of complex-valued Ornstein–Uhlenbeck processes driven by a Brownian motion and by a stable process. *Stochastics*, 87(5):766–793, 2015.

J. B. Walsh. *Knowing the Odds An introduction , to Probability*. 2012.