SOBRE EL ESTUDIO DE UN PROBLEMA DE DIFUSIÓN NO LOCAL Y SU APROXIMACIÓN A LA ECUACIÓN DEL CALOR CON CONDICIONES DE NEUMANN

Cesar A. Gomez S.
Matemático, M.Sc.
Código: 830144

Universidad Nacional de Colombia
Facultad de Ciencias
Departamento de Matemáticas
Bogotá, D.C.
Julio del 2011

SOBRE EL ESTUDIO DE UN PROBLEMA DE DIFUSIÓN NO LOCAL Y SU APROXIMACIÓN A LA ECUACIÓN DEL CALOR CON CONDICIONES DE NEUMANN

Cesar A. Gomez S.
Matemático, M.Sc.
Código: 830144

Trabajo de tesis para optar al título de
Doctor en Matemáticas

Director
Mauricio Bogoya L, Ph.D.
Doctor en Matemáticas

Codirector
Julio D. Rossi, Ph.D.
Doctor en Matemáticas

Universidad Nacional de Colombia
Facultad de Ciencias
Departamento de Matemáticas
Bogotá, D.C.

Julio del 2011

Título en español

Sobre el estudio de un problema de difusión no local y su aproximación a la ecuación del calor con condiciones de Neumann

Title in English

On the study of non-local diffusion problem and its approximation to the heat equation with Neumann boundary

Resumen: Estudiamos un problema de difusión no local y variantes del mismo, desde el punto de vista de existencia y unicidad de soluciones. En casos particulares, se presenta un principio de comparación y se estudia el comportamiento asintótico de las soluciones respectivas. De la misma manera, se hace el análisis de explosion. Se hace el estudio de los modelos discretos asociados a los modelos más importantes mencionados en la primera parte.

Abstract: We study a non-local diffusion problem and some variants of them, from the point of view of existence and uniqueness of solutions. In particular cases, we present a comparison principle and we study the asymptotic behavior of its respective solutions. In the same way, we analyze the blow-up. We study the discrete models associated with the most important models mentioned in the first part.

Palabras clave: Problema no local, Ecuación del calor, Frontera de Neumann, Explosión, Problema discreto.

Keywords: Non-local problem, Heat equation, Neumann Boundary, Blow-up, Discrete problem.

Nota de aceptación

Trabajo de tesis
Aprobado

"Mención Meritoria"

Jurado
Arturo de Pablo Martínez

Jurado
Raul Ferreira

Jurado
Gaspar Mora

Director
Mauricio Bogoya L.

Codirector
Julio D. Rossi

Bogotá, D.C., Julio 26 de 2011

Dedicado a

A Patricia, Beto y Andrés.

Agradecimientos

A Jesús y la Virgen María por todo.

Al profesor Mauricio Bogoya, por su confianza y la tarea de asumir la dirección de éste trabajo.

Al profesor Julio D. Rossi, por su constante y valiosa ayuda y su orientación en los aspectos más difíciles. A la Facultad de matemáticas de la Universidad de Buenos Aires por todo el apoyo prestado durante mi permanencia allí

A mis companẽros, Alexander Sinitsyne, Rodrigo Duque y Juan Carlos Hernández quienes compartieron conmigo largas jornadas de trabajo en la primera parte del programa. A los colegas de trabajo que me apoyaron y me motivaron para avanzar en algo que había decidido no terminar.

A la Universidad Nacional de Colombia, en especial a la Facultad de Ciencias, de donde recibí el apoyo para poder realizar los estudios de doctorado.

Finalmente, debo agradecer a las personas que representan las razones de ésta lucha: mi esposa Heidy Patricia, mis hijos Cesar Alberto y Cesar Andrés, y mi Madre Isabel.

Bogotá, Julio 2011.

Cesar A. Gómez S.

Índice general

Introducción

La descripción matemática de una gran cantidad de fenómenos que se presentan en muchas ramas de la ciencias puras como la Física, la Química, la Biología y la Ecología entre otras, conduce a ecuaciones diferenciales parciales lineales y no lineales. Algunos de los modelos más importantes que aparecen con frecuencia son los llamados *modelos de difusión*. Un ejemplo de estos estos modelos es dada por la ecuación del calor, ya sea con condiciones de Dirichlet o de Neumann. En el caso de las condiciones de Neumann, el modelo más simple es descrito por la siguiente ecuación, ver [29],

$$\begin{aligned} &u_t(x,t) = \triangle u(x,t), \quad (x,t) \in \Omega \times (0,T), \\ &\frac{\partial u}{\partial n}(x,t) = 0, \quad (x,t) \in \partial\Omega \times (0,T), \\ &u(x,0) = u_0(x), \quad x \in \Omega. \end{aligned} \tag{1}$$

En éste tipo de modelos, la difusión de la densidad u en el punto x en un tiempo t depende de $u(x,t)$ únicamente, razón por la cual son llamados modelos locales.

En los últimos años, han aparecido procesos de difusión no-local, descritos por ecuaciones de la forma

$$\begin{aligned} &u_t(x,t) = \int_{\mathbb{R}^N} J(x-y)[u(y,t)-u(x,t)]dy, \quad (x,t) \in \Omega \times (0,T), \\ &u(x,0) = u_0(x), \quad x \in \Omega, \end{aligned} \tag{2}$$

y variantes de la misma, donde $J(x)$ es en muchos casos, una funcion real definida en $\mathbb{R}^N$, continua, de soporte compacto en la bola unitaria, decreciente, simétrica y con integral unitaria, es decir $\int_{\mathbb{R}^N} J(x)dx = 1$. Un ejemplo de funcion de éste tipo es dada por

$$J(x) = \begin{cases} k\, e^{-\frac{1}{1-|x|^2}} & \text{si} \ \ |x| < 1 \\ 0 \ \ \text{si} \ \ |x| \geq 1, \end{cases}$$

siendo k una constante adecuada para que tenga integral unitaria.

Algunos modelos no-locales han sido estudiados recientemente, véase por ejemplo [6], [7], [8], [24], [23], [39], [41], [40] y el libro [4]. Siguiendo las ideas presentadas en [48], éste último modelo (2) puede ser interpretado de la siguiente manera: si $u(x,t)$ es la densidad de una población en el punto x en el tiempo t y $J(x-y)$ representa la distribución de probabilidad de saltar de la posición x a la posición y, entonces la convolución entre J definida como

$$(J*u)(x,t) = \int_{\mathbb{R}^N} J(y-x)u(y,t)\,dy,$$

es la razón a la cual los individuos están arrivando a la posición x desde todos los otros lugares. De la misma manera,

$$-\int_{\mathbb{R}^N} J(y-x)u(x,t)dy = -u(x,t),$$

es la razón a la cual los individuos están dejando la posición x para viajar a otros lugares. Así que, si no se consideran fuentes externas o internas, la densidad u satisface la ecuación no local (2). El nombre de no-local, hace referencia a que, caso contrario al modelo (1), la densidad u en el punto x en el tiempo t, depende no sólo de $u(x,t)$, sino que depende además de todos los valores de u en una vecindad de x a través de la convolución $J*u$.

Estas ecuaciones con términos no-locales se han utilizado en diversas aplicaciones, por ejemplo en biología ([33], [57]), procesamiento de imágenes ([52]), sistemas de partículas ([27]), modelos de coagulación ([49]), modelos anisotrópicos para transiciones de fase ([2], [3]), matemática financiera y teoría de control óptimo ([26], [56]), etc.

Por otra parte, hay una larga lista de referencias que se dedican a estas ecuaciones basadas en su puro interés matemático, vease la lista de referencias al final de esta tesis. Citemos, por ejmeplo, [16], [19], [43], [47], que se dedican al estudio de soluciones de tipo travelling wave. En cuanto al comportamiento asintótico de las soluciones, véase [35], [54], y para el problema de Neumann, [5]. En [53] se obtienen términos convectivos. Para problemas anisotrópicos nos referimos a [45].

También hay un reciente interés en el estudio de estas ecuaciones en relación con problemas de frontera libre y problemas de regularidad, como por ejemplo, en el problema del obstáculo, el Laplaciano fraccionario, etc. Nos referimos a [11], [30], [31], [32], [34], pero destacamos que en esta tesis no se aborda esta problemática.

Para ecuaciones no-locales en lattices citamos, [14], [21], [55]. En esta tesis nos restringimos a modelos continuos.

Hay que mencionar que hay una relación muy fuerte entre estas ecuaciones y la teoría de la probabilidad. De hecho cuando uno considera un proceso de Levy([25]) el operador que aperace naturalmente es una potencia fraccionaria del Laplaciano. Esta relación con la teoría de probabilidad no será usada en esta tesis y nos referimos a [9] para más datos.

Descripción del contenido de esta memoria

El principal objetivo de este trabajo, consiste en analizar el problema de difusión no local con frontera de Neumann descrito por la ecuación

$$u_t(x,t) = \int_\Omega J(x-y)(u(y,t)-u(x,t))dy + \int_{\partial\Omega} G(x-y)g(y,t)\, dS_y,$$

donde $J : \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}$ y $G : \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}$ son funciones continuas de soporte compacto en la bola unitaria ($J, G \in \ C_0(\mathbb{R}^N)$), *no negativas, radialmente simétricas y decrecientes*, con la propiedad

$$\int_{\mathbb{R}^N} J(z)dz = 1,$$

y $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ un dominio acotado, conexo con frontera suave.

En la referencia [41] se trata un problema análogo de la forma

$$u_t(x,t) = \int_\Omega J(x-y)(u(y,t)-u(x,t))dy + \int_{\mathbb{R}^N\setminus\Omega} G(x-y)g(y,t)\, dy.$$

En este formato, para estudiar problemas con flujos no lineales de la forma $g(y,t) = f(u(y,t))$ se hace necesario extender u de Ω a $\mathbb{R}^N \setminus \Omega$. Es de destacar que en el modelo propuesto en esta tesis dicha extensión no es necesaria.

En el capítulo 1, enunciamos algunos resultados en lo referente a la existencia y unicidad de soluciones, un principio de comparación y se estudia lo relacionado con el comportamiento asintótico de las soluciones de éste problema.

En el capítulo 2, estudiaremos el fenómeno de explosión para las soluciones, en el caso que la función $g(x,t)$ que describe la condición de frontera es la función

$$g(x,t) = \frac{g(x)}{(T-t)^\alpha},$$

con $\alpha > 0$ y $g(x) \geq 0$ una función suave no trivial.

En el capítulo 3, se analizará el problema más general

$$\begin{cases} u_t(x,t) = (J * u(x,t)) - u(x,t) + \displaystyle\int_{\partial\Omega} G(x-y)g(u(y,t))dS_y & (x,t) \in \overline{\Omega} \times (0,T), \\ u(x,0) = u_0(x) \quad x \in \overline{\Omega}. \end{cases}$$

De igual manera que el caso anterior, se enunciaran los respectivos resultados sobre existencia y unicidad de soluciones, un principio de comparación y se realizará un estudio del perfil de las soluciones (análisis de explosión) para el caso particular en el que $g(u(x,t)) = u^p(x,t)$.

Finalmente, en el capítulo 4, consideramos el problema (forma discreta del problema analizado en el capítulo 1 con $\Omega = [-L, L]$)

$$\begin{cases} u_t(x,t) = \displaystyle\int_{-L}^{L} J(x-y)(u(y,t)-u(x,t))dy + G(x+L)g(-L,t) + G(x-L)g(L,t), \\ u(x,0) = u_0(x), \end{cases}$$

siendo $J, G : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funciones no negativas, suaves, simétricas $J(z) = J(-z)$, $G(z) = G(-z)$, estrictamente crecientes en $[-L, 0]$ y de soporte compacto en la bola unitaria con integrales unitarias, es decir

$$\int_{[-L,L]} J(x)dx = 1.$$

Aquí g es una función dada regular. Se presentarán resultados acerca de la existencia y unicidad de soluciones, veremos además que las soluciones satisfacen un principio de comparación. De la misma manera como en el capítulo 3, se obtendrán resultados acerca del perfil de explosion de las soluciones para un caso particular. Veremos que el problema es consistente en el sentido que las soluciones del problema discreto convergen a las soluciones del respectivo problema continuo.

Es de destacar que cuando se consideran los problemas reescalados

$$\begin{cases} u_t^{\epsilon}(x,t) = \frac{1}{\epsilon^2} \displaystyle\int_{\Omega} J_{\epsilon}(x-y)(u^{\epsilon}(y,t)-u^{\epsilon}(x,t))\,dy + \frac{1}{\epsilon}\int_{\partial\Omega} G_{\epsilon}(x-y)g(y,t)\,dS_y, \\ \\ u^{\epsilon}(x,0) = u_0(x), \end{cases}$$

donde

$$J_{\epsilon}(z) = C_1 \frac{1}{\epsilon^N} J(\frac{z}{\epsilon}), \quad G_{\epsilon}(z) = C_1 \frac{1}{\epsilon^N} G(\frac{z}{\epsilon}), \quad C_1^{-1} = \frac{1}{2}\int_{B(0,1)} J(z) z^2 dz,$$

se tienen resultados de existencia y unicidad idénticos a los contenidos en esta tesis.

Es de esperar que si u es una solución del problema de Neumann clásico

$$\begin{cases} u_t - \triangle u = 0 \quad en \quad \Omega \times (0,T), \\ \\ \dfrac{\partial u}{\partial n} = g \quad \text{sobre} \quad \partial\Omega \times (0,T), \\ \\ u(x,0) = u_0(x) \quad en \quad \Omega, \end{cases}$$

y si u^{ϵ} es solución del problema reescalado entonces

$$u^{\epsilon} \to u,$$

cuando $\epsilon \to 0$.

Este resultado no forma parte de esta memoria y será objeto de investigación en el futuro.

CAPÍTULO 1

Un modelo de difusión no local con frontera de Neumann (I)

1.1. Introducción

Como lo mencionamos en la Introducción inicial, los modelos de difusión están entre los más importantes en la teoría de las ecuaciones diferenciales. Uno de los modelos locales más sencillos, esta descrito por la ecuación diferencial parcial,

$$u_t = \triangle u, \tag{1.1}$$

siendo $\triangle u$ el laplaciano de u. Como puede verse en [48], un análogo a (1.1) es dado por la ecuación no local

$$u_t = J * u - u, \tag{1.2}$$

donde $J * u$ es la convolución de J con u,

$$J(x) * u(x,t) = \int_{\mathbb{R}^N} J(x-y)u(y,t)dy.$$

En éste modelo (1.2), si $u(x,t)$ representa la densidad en el punto x en el tiempo t, si J tiene integral unitaria y representa la distribución de probabilidad de saltar de la posición y a la posición x, entonces

$$J * u(x,t),$$

es la razón con la cual los individuos llegan a la posición x desde todas las demás posiciones y

$$-u(x,t) = -\int_{\mathbb{R}^N} J(x-y)u(x,t)dy,$$

es la razón con la cual los individuos van de la posición x hacia cualquier otra posición y. Si no hay fuentes externas o internas, se obtiene que la densidad u debe satisfacer la ecuación (1.2), la cual es llamada ecuación de difusión no-Local.

Ecuaciones de éste tipo y variantes de ella han sido estudiadas en la última década, ver [24], [23], [28], [39], [41], [40] y el libro reciente [4].

El objetivo principal de éste capítulo es el estudio del problema de difusión no local con frontera de Neumann en $\Omega \times (0,T)$, descrito por la ecuación

$$\begin{cases} u_t(x,t) = \displaystyle\int_\Omega J(x-y)(u(y,t)-u(x,t))dy + \int_{\partial\Omega} G(x-y)g(y,t)dS_y, \\ u(x,0) = u_0(x), \end{cases} \tag{1.3}$$

siendo $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ un dominio acotado, conexo con frontera suave. El núcleo $J : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ es una función continua no negativa de soporte compacto en la bola unitaria ($J \in C_0(\mathbb{R}^\mathbb{N})$), simétrica $J(z) = J(-z)$, con integral unitaria, es decir

$$\int_{\mathbb{R}^N} J(z)dz = 1.$$

El núcleo $G(x)$ tiene las mismas características del núcleo J. El dato inicial $u_0(x)$ es no negativo y $g \in L^\infty_{loc}[(0,\infty); L^1(\partial\Omega)]$. En el modelo descrito por (1.3), los individuos solo pueden saltar dentro de Ω (lo que esta reflejado en la primera integral sobre Ω). El segundo término en (1.3) tiene en cuenta el flujo de individuos que entran o salen del dominio Ω, el cual depende de g y de su signo. En la literatura sobre éste tipo de modelos, ésta última condición es conocida como *condiciones de frontera de Neumann.*

1.2. Existencia y unicidad de soluciones

Usando el Teorema de punto fijo de Banach, mostraremos existencia y unicidad de soluciones para la ecuación (1.3). Para éste fin, seguiremos las ideas expuestas en [41], teniendo en cuenta que los resultados obtenidos aquí son técnicamente diferentes.

Sea $t_0 > 0$ fijo y consideraremos el espacio de Banach definido por el conjunto de funciones continuas definidas en $[0,t_0]$ que tienen la norma uniforme respecto de la variable temporal y la norma de $L^1(\Omega)$ respecto de la variable espacial que notaremos por

$$B_{t_0} = C([0,t_0]; L^1(\Omega)),$$

dotado con la norma

$$|||w||| = \max_{0\le t\le t_0} ||w(\cdot,t)||_{L^1(\Omega)} = \max_{0\le t\le t_0} \int_\Omega |w(\cdot,t)|dx.$$

Intercambiando el papel de u por w y t por s en (1.3), obtenemos la ecuación

$$w_s(x,s) = \int_{\Omega} J(x-y)[w(y,s)-w(x,s)]dy + \int_{\partial\Omega} G(x-y)g(y,s)dS_y. \tag{1.4}$$

Integrando (1.4) de 0 a t, se obtiene

$$w(x,t) = w_0(x)+\int_0^t \int_{\Omega} J(x-y)[w(y,s)-w(x,s)]dyds+\int_0^t \int_{\partial\Omega} G(x-y)g(y,s)dS_y ds. \tag{1.5}$$

Definicion 1. *Sea $T : B_{t_0} \longrightarrow B_{t_0}$ el operador definido por*

$$\begin{aligned} T_{w_0,g}(w(x,t)) = w_0(x) &+ \int_0^t \int_{\Omega} J(x-y)[w(y,s)-w(x,s)]dyds \\ &+ \int_0^t \int_{\partial\Omega} G(x-y)g(y,s)dS_y ds. \end{aligned} \tag{1.6}$$

Lema 1. *Sea $w_0(x) \in L^1(\Omega)$, $g \in L^{\infty}_{loc}[(0,\infty); L^1(\partial\Omega)]$. El operador $T_{w_0,g}$ dado por (1.6) esta bien definido como aplicación de B_{t_0} sobre B_{t_0}.*

Demostración. Sean $0 < t_1 < t_2 \leq t_0$ y $w \in B_{t_0}$. Como $J, G \in C_0(\Omega)$, entonces, en particular $J, G \in L^{\infty}(\Omega)$, así que sea $||J||_{\infty} = K_1$ y $||G||_{\infty} = K_2$. Tenemos las siguientes estimativas:

$$\begin{aligned}
&\left|\left|T_{w_0,g}[w(x,t_1)] - T_{w_0,g}[w(x,t_2)]\right|\right|_{L^1(\Omega)} \\
&= \int_{\Omega} \left|T_{w_0,g}[w(x,t_1)] - T_{w_0,g}[w(x,t_2)]\right| dx \\
&= \int_{\Omega} \left| \int_{t_1}^{t_2} \int_{\Omega} J(x-y)[w(y,s)-w(x,s)]dyds + \int_{t_1}^{t_2} \int_{\partial\Omega} G(x-y)g(y,s)dS_y ds \right| dx \\
&\leq \int_{\Omega} \left| \int_{t_1}^{t_2} \int_{\Omega} J(x-y)[w(y,s)-w(x,s)]dyds \right| dx + \int_{\Omega} \left| \int_{t_1}^{t_2} \int_{\partial\Omega} G(x-y)g(y,s)dS_y ds \right| dx \\
&\leq \int_{\Omega} \int_{t_1}^{t_2} \int_{\Omega} |J(x-y)||w(y,s)-w(x,s)|dydsdx + \int_{\Omega} \int_{t_1}^{t_2} \int_{\partial\Omega} |G(x-y)||g(y,s)|dydsdx \\
&\leq (t_2-t_1)K_1|\Omega| \int_{\Omega} |w(y,s)-w(x,s)|dy + (t_2-t_1)K_2|\Omega| \int_{\partial\Omega} |g(y,s)|dS_y \\
&\leq (t_2-t_1) \max\{K_1|\Omega|, K_2|\Omega|\} \left\{ 2|||w||| + ||g||_{L^{\infty}[(0,t_0);L^1(\partial\Omega)]} \right\}.
\end{aligned}$$

En las estimativas anteriores, $|\Omega|$ es la medida de Ω. De lo anterior se desprende que el operador $T_{w_0,g}$ es continuo en $t \in (0, t_0]$. La continuidad en el caso $t = 0$, se desprende de (1.6). En efecto, tenemos que bajo las mismas condiciones del enunciado

$$\begin{aligned}
&\left|\left|T_{w_0,g}[w(x,t)] - w_0(x)\right|\right|_{L^1(\Omega)} \\
&= \int_\Omega \left|T_{w_0,g}[w(x,t)] - w_0(x)]\right| dx \\
&= \int_\Omega \left| \int_0^t \int_\Omega J(x-y)[w(y,s) - w(x,s)]dyds + \int_0^t \int_{\partial\Omega} G(x-y)g(y,s)dS_y ds \right| dx \\
&\leq t \max\{K_1|\Omega|, K_2|\Omega|\} \left\{ 2|||w||| + ||g||_{L^\infty[(0,t_0);L^1(\partial\Omega)]} \right\}.
\end{aligned}$$

Obtenemos de esta manera la continuidad en $t = 0$. Así que el operador es continuo en $t \in [0, t_0]$. De otra parte, de ésta última desigualdad se deriva que

$$|||T_{w_0,g}[w(x,t)]||| \leq ||w_0(x)||_{L^1(\Omega)} + t_0 \max\{K_1|\Omega|, K_2|\Omega|\} \left\{ 2|||w||| + ||g||_{L^\infty[(0,t_0);L^1(\partial\Omega)]} \right\},$$

con lo cual $T_{w_0,g}(w) \in B_{t_0}$. Es decir el operador está bien definido. □

El siguiente resultado es importante en la demostracion del teorema sobre la existencia y unicidad de la soluciones para el problema (1.3).

Lema 2. *Sean $w_0, u_0 \in L^1(\Omega)$, $g, h \in L^\infty_{loc}[(0,t_0); L^1(\partial\Omega)]$ y $w, z \in B_{t_0}$. Entonces existe una constante $C = C(\Omega, J, G)$ tal que*

$$\begin{aligned}
\left|\left|\left|T_{w_0,g}[w(x,t)] - T_{z_0,h}[z(x,t)]\right|\right|\right| &\leq ||w_0 - z_0||_{L^1(\Omega)} \\
&\quad + Ct_0\{|||w - z||| + ||g - h||_{L^\infty_{loc}[(0,t_0);L^1(\partial\Omega)]}\}.
\end{aligned} \tag{1.7}$$

Demostración. Tenemos las siguiente estimativa:

$$\begin{aligned}
&\left|\left|T_{w_0,g}[w(x,t)] - T_{z_0,h}[z(x,t)]\right|\right|_{L^1(\Omega)} \\
&= \int_\Omega \left|T_{w_0,g}[w(x,t)] - T_{z_0,h}[z(x,t)]\right| dx \\
&\leq \int_\Omega |w_0(x) - z_0(x)| dx \\
&\quad + \int_\Omega \left| \int_0^t \int_\Omega J(x-y)[(w(y,s) - z(y,s)) - (w(x,s) - z(x,s))]dyds \right| dx \\
&\quad + \int_\Omega \left| \int_0^t \int_{\partial\Omega} G(x-y)[g(y,s) - h(y,s)]dS_y ds \right| dx,
\end{aligned}$$

y entonces se obtiene

$$
\begin{aligned}
&\left|\left|T_{w_0,g}[w(x,t)] - T_{z_0,h}[w(x,t)]\right|\right|_{L^1(\Omega)} \\
&\leq ||w_0(x) - z_0(x)||_{L^1(\Omega)} \\
&\qquad + \int_\Omega \int_0^t \int_\Omega |J(x-y)||(w(y,s) - z(y,s))|dydsdx \\
&\qquad + \int_\Omega \int_0^t \int_\Omega |J(x-y)||(w(x,s) - z(x,s))|dydsdx \\
&\qquad + \int_\Omega \int_0^t \int_{\partial\Omega} |G(x-y)||g(y,s) - h(y,s)|dS_y dsdx
\end{aligned}
$$

finalmente tenemos

$$
\begin{aligned}
&\left|\left|T_{w_0,g}[w(x,t)] - T_{z_0,h}[w(x,t)]\right|\right|_{L^1(\Omega)} \\
&\leq ||w_0(x) - z_0(x)||_{L^1(\Omega)} \\
&\qquad + K_1|\Omega|(t_0)\left\{ \int_\Omega |(w(y,s) - z(y,s))|dy \right.\\
&\qquad \left. + \int_\Omega |(w(x,s) - z(x,s))|dx \right\} \\
&\qquad + K_2|\Omega|(t_0) \int_{\partial\Omega} |g(y,s) - h(y,s)|dS_y \\
&\leq ||w_0(x) - z_0(x)||_{L^1(\Omega)} + C(t_0)\left\{ |||w - z||| + ||g - h||_{L^\infty[(0,t_0);L^1(\partial\Omega)]} \right\},
\end{aligned}
$$

con $C = \text{máx}\{2K_1|\Omega|, K_2|\Omega|\}$. □

Como consecuencia de los Lemas anteriores, Lema 1 y Lema 2, podemos enunciar el siguiente teorema de existencia y unicidad:

Teorema 1. *Para todo $u_0 \in L^1(\Omega)$, existe una única solución $u \in C[[0,\infty); L^1(\Omega)]$ del problema (1.3). Más aún, la* masa *total en Ω satisface*

$$
\int_\Omega u(y,t)dy = \int_\Omega u_0(y)dy + \int_0^t \int_\Omega \int_{\partial\Omega} G(x-y)g(y,s)dS_y dxds. \tag{1.8}
$$

Demostración. Si en el Lema 2 escogemos t_0 suficientemente pequeño, de tal manera que $C(t_0) < 1$ y hacemos $z_0 \equiv w_0 \equiv u_0$, $g = h$, vemos que $T_{u_0,g}$ es una contracción estricta en el espacio de Banach B_{t_0}, y la existencia y unicidad se sigue del Teorema del punto fijo de Banach en el intervalo $[0, t_0]$. Para extender la solución al intervalo $[0, \infty)$, podemos tomar como dato inicial $u(x, t_0) \in L^1(\Omega)$ y si $u \in B_{t_0}$ es tal que $|||u||| < \infty$, un argumento similar al expuesto en los Lemas anteriores, permite extender la solución hasta un intervalo $[t_0, t_1)$, con $t_1 > t_0$. Iterando este procedimiento , obtenemos una solución definida en $[0, \infty)$.

Finalmente, si u es una solución del problema (1.3), intercambiando w por u en (1.5), obtenemos

$$u(x,t)-u_0(x) = \int_0^t \int_\Omega J(x-y)[u(y,s)-u(x,s)]dyds + \int_0^t \int_{\partial\Omega} G(x-y)g(y,s)dS_y ds. \quad (1.9)$$

Integrando (1.9) en Ω se tiene

$$\begin{aligned} &\int_\Omega u(x,t)dx - \int_\Omega u_0(x)dx \\ &= \int_\Omega \int_0^t \int_\Omega J(x-y)u(y,s)dydsdx \\ &\qquad - \int_\Omega \int_0^t \int_\Omega J(x-y)u(x,s)dydsdx \\ &\qquad + \int_0^t \int_\Omega \int_{\partial\Omega} G(x-y)g(y,s)dS_y dsdx. \end{aligned}$$

Usando el Teorema de Fubini en las dos primeras integrales del lado derecho de la ecuación anterior, haciendo cambio de variable en la segunda integral y usando la simetría de J, las dos primeras integrales se cancelan, con lo cual, finalmente obtenemos

$$\int_\Omega u(x,t)dx - \int_\Omega u_0(x)dx = \int_0^t \int_\Omega \int_{\partial\Omega} G(x-y)g(y,s)dS_y dxds, \quad (1.10)$$

de donde se desprende (1.8). El Teorema queda demostrado. □

Como una consecuencia de los dos últimos resultados, en especial teniendo en cuenta la demostración del Lema 2, podemos decir que las soluciones de (1.3) dependen continuamente del dato inicial y de la condición de frontera. Más exactamente tenemos:

Corolario 1. ***(Dependencia continua)*** *Sean u, w soluciones de (1.3), con datos iniciales u_0, w_0 y condición de frontera g y h respectivamente. Entonces, para todo $t_0 > 0$, existe una constante C_1 que depende de t_0 tal que*

$$\max_{0\le t\le t_0} ||u(\cdot,t) - v(\cdot,t)||_{L^1(\Omega)} \le C_1 \Big\{ ||u(\cdot,0) - v(\cdot,0)||_{L^1(\Omega)} + ||g-h||_{L^\infty[(0,t_0);L^1(\partial\Omega)]} \Big\}.$$

Demostración. En efecto, de (1.5) obtenemos

$$
\begin{aligned}
u(x,t) = u_0(x) + \int_0^t \int_\Omega J(x-y)[u(y,s) - u(x,s)]dyds \\
+ \int_0^t \int_{\partial\Omega} G(x-y)g(y,s)dS_y ds
\end{aligned}
$$

y

$$
\begin{aligned}
w(x,t) = w_0(x) + \int_0^t \int_\Omega J(x-y)[w(y,s) - w(x,s)]dyds \\
+ \int_0^t \int_{\partial\Omega} G(x-y)h(y,s)dS_y ds.
\end{aligned}
$$

Argumentando como en el Lema 2, si $Ct_0 < 1$, podemos concluir

$$(1 - Ct_0)|||u(\cdot,t) - w(\cdot,t)||| \leq ||u_0 - w_0||_{L^1(\Omega)} + Ct_0||g - h||_{L^\infty[(0,t_0);L^1(\partial\Omega)]},$$

de donde se obtiene el resultado tomando

$$C_1 = \text{máx}\left\{\frac{1}{1 - Ct_0}, \frac{Ct_0}{1 - Ct_0}\right\}.$$

Ahora podemos usar el mismo razonamiento en $[t_0, 2t_0]$, etc, para concluir la demostración de este corolario. □

El siguiente resultado nos brinda una caracterización de la solución u de (1.3):

Corolario 2. *La función u es solución de (1.3) si y solo si*

$$
\begin{aligned}
u(x,t) = e^{-A(x)t}u_0(x) + \int_0^t \int_\Omega e^{-A(x)(t-s)} J(x-y)u(y,s)dyds \\
+ \int_0^t \int_{\partial\Omega} e^{-A(x)(t-s)} G(x-y)g(y,s)dS_y ds,
\end{aligned}
\tag{1.11}
$$

donde

$$A(x) = \int_\Omega J(x-y)dy.$$

Demostración. La ecuación (1.4) con u en vez de w, toma la forma

$$u_s(x,s) = \int_\Omega J(x-y)[u(y,s) - u(x,s)]dy + \int_{\partial\Omega} G(x-y)g(y,s)dS_y.$$

Multiplicando ambos lados por $e^{A(x)s}$ y reescribiendo esta última ecuación, se obtiene

$$
\begin{aligned}
&u_s(x,s)e^{A(x)s} + \int_\Omega e^{A(x)s} J(x-y)u(x,s)dy \\
&= \int_\Omega e^{A(x)s} J(x-y)u(y,s)dy + \int_{\partial\Omega} e^{A(x)s} G(x-y)g(y,s)dS_y,
\end{aligned}
$$

la cual puede escribirse en la forma diferencial

$$
d(u(x,s)e^{A(x)s}) = \int_\Omega e^{A(x)s} J(x-y)[u(y,s)dy + \int_{\partial\Omega} e^{A(x)s} G(x-y)g(y,s)dS_y.
$$

Integrando esta última ecuacion de 0 a t, obtenemos

$$
\begin{aligned}
u(x,t)e^{A(x)t} - u_0(x) = &\int_0^t \int_\Omega e^{A(x)s} J(x-y)[u(x,s)dyds \\
&+ \int_0^t \int_{\partial\Omega} e^{A(x)s} G(x-y)g(y,s)dS_y ds,
\end{aligned}
$$

de donde se deriva (1.11). □

Como consecuencia de éste resultado, se puede entonces observar que si $u_0(x) \in C^0(\Omega)$, entonces la solución $u \in C^0([0,t_0] \times \Omega)$.

Nota 1. *Por las características de J, existe una constante α tal que $A(x) \geq \alpha > 0$, para cada $x \in \overline{\Omega}$.*

1.3. Un principio de comparación

Comenzamos esta sección, dando algunas definiciones preliminares que nos permitirán enunciar un resultado de comparación para las soluciones del problema (1.3).

Definicion 2. *Una función $\overline{u} \in C([0,T]; L^1(\Omega))$, es una supersolución de (1.3), si cumple:*

- $\overline{u}(x,0) \geq u_0(x)$ *y*

$$
\overline{u}_t(x,t) \geq \int_\Omega J(x-y)[\overline{u}(y,t) - \overline{u}(x,t)]dy + \int_{\partial\Omega} G(x-y)g(y,t)dS_y. \tag{1.12}
$$

Definicion 3. *Una función $\underline{u} \in C([0,T]; L^1(\Omega))$, es una subsolución de (1.3), si cumple:*

- $\underline{u}(x,0) \leq u_0(x)$ *y*

$$
\underline{u}_t(x,t) \leq \int_\Omega J(x-y)[\underline{u}(y,t) - \underline{u}(x,t)]dy + \int_{\partial\Omega} G(x-y)g(y,t)dS_y. \tag{1.13}
$$

El siguiente resultado, nos da una propiedad de positividad de supersoluciones.

Lema 3. *Sea $u_0 \in C(\overline{\Omega})$, $u_0 \geq 0$, y $u \in C(\overline{\Omega} \times [0,T])$, una supersolución de (1.3) con $g \geq 0$. Entonces $u \geq 0$.*

Demostración. Supongamos que $u(x,t)$ es negativa en alguna parte. Consideremos $v(x,t) = u(x,t) + \epsilon t$, con $\epsilon > 0$ suficientemente pequeño, para que $v(x,t)$ siga siendo todavía negativa en alguna parte. Sea (x_0, t_0) un punto donde v alcanza su mínimo negativo, así que $t_0 > 0$ y como u es supersolución, $g \geq 0$ y G no negativa, entonces

$$\begin{aligned} v_t(x_0,t_0) = u_t(x_0,t_0) + \epsilon &> \int_\Omega J(x_0-y)[u(y,t_0) - u(x_0,t_0)]dy \\ &+ \int_{\partial\Omega} G(x_0-y)g(y,t)dS_y + \epsilon > \int_\Omega J(x_0-y)[u(y,t_0) - u(x_0,t_0)]dy \\ = \int_\Omega J(x_0-y)[v(y,t_0) - v(x_0,t_0)]dy \geq 0, \end{aligned}$$

dado que J es no negativo, y $v(y,t_0) - v(x_0,t_0) \geq 0$. Esto no puede ocurrir, por lo tanto, debe ser $u \geq 0$. $\square$

Enunciamos el siguiente principio de comparación para soluciones de nuestro problema (1.3):

Corolario 3. ***(Principio de Comparación)*** *Sean $u, v \in C([0,T]; L^1(\Omega))$, soluciones de (1.3), con datos iniciales $u_0, v_0 \in L^1(\Omega)$, y condición de Neumann $g, h \in L^\infty[(0,T); L^1(\partial\Omega)]$ respectivamente. Supóngase $u_0 \geq v_0$ y $g \geq h$. Entonces $u \geq v$* c.t.p.

Demostración. Sea $w(x,t) = u(x,t) - v(x,t)$. Por lo tanto $w(x,0) = u(x,0) - v(x,0) = u_0 - v_0 = w_0 \geq 0$. Por otra parte tenemos

$$\begin{aligned} w_t(x,t) &= u_t(x,t) - v_t(x,t) \\ &= \int_\Omega J(x-y)[u(y,t) - u(x,t)]dy + \int_{\partial\Omega} G(x-y)g(y,t)dS_y \\ &\quad - \left\{ \int_\Omega J(x-y)[v(y,t) - v(x,t)]dy + \int_{\partial\Omega} G(x-y)h(y,t)dS_y \right\} \\ &= \int_\Omega J(x-y)[w(y,t) - w(x,t)]dy + \int_{\partial\Omega} G(x-y)[g(y,t) - h(y,t)]dS_y. \end{aligned}$$

Por lo tanto, w es una solución de (1.3) con dato inicial $w_0 \geq 0$ y frontera de Neumann $(g-h) \geq 0$. En particular, w es una supersolución de (1.3). Notemos que por la dependencia continua de las soluciones (corolario 1), podemos aproximar los datos iniciales por funciones de $C(\Omega)$ cumpliendo la misma condición ($u_0 \geq v_0$)), asi que podemos asumir $w_0 \in C(\Omega)$. Teniendo en cuenta la observación dada al final del corolario 2, tenemos que $u, v \in C(\overline{\Omega} \times [0,T])$, así que $w \in C(\overline{\Omega} \times [0,T])$. El Lema 3 garantiza que $w \geq 0$ *c.t.p*, lo cual prueba el corolario. □

Corolario 4. *Sean $u, v \in C(\overline{\Omega} \times [0,T])$, u una supersolución de (1.3), con dato inicial $u_0 \in L^1(\Omega)$, y condición Neumann $g \in L^\infty[(0,T); L^1(\partial\Omega)]$ y v una subsolución de (1.3), con dato inicial $v_0 \in L^1(\Omega)$, y condición Neumann $h \in L^\infty[(0,T); L^1(\partial\Omega)]$. Supongase $u_0 \geq v_0$ y $g \geq h$. Entonces $u \geq v$* c.t.p.

Demostración. Por hipótesis, $u(x,0) \geq u_0$, $-v(x,0) \geq -v_0$. Reemplazando u por v y g por h en (1.13) se obtiene

$$-v_t(x,t) \geq -\int_\Omega J(x-y)[u(y,t) - u(x,t)]dy - \int_{\partial\Omega} G(x-y)h(y,t)dS_y.$$

Haciendo $w = u - v$, y procediendo como en el Corolario 3, se demuestra que w es una supersolución de (1.3) con condición de Neumann dada por $g - h \geq 0$ y satisface las condiciones del Lema 3. Así que $w \geq 0$, de donde $u \geq v$. □

Corolario 5. *Sea $u \in C(\overline{\Omega} \times [0,T])$ una solución de (1.3) con dato inicial $u(x,0) = u_0(x) \in L^\infty(\Omega)$ y con dato de frontera de Neumann $g \in L^\infty[\partial\Omega \times (0,T)]$. Entonces*

$$u(x,t) \leq \sup_\Omega u_0(x) + \int_0^t \sup_\Omega \int_{\partial\Omega} G(x-y)g(y,s)dS_y\, ds. \tag{1.14}$$

Demostración. Definimos

$$v(t) = \sup_\Omega u_0(x) + \int_0^t \sup_\Omega \int_{\partial\Omega} G(x-y)g(y,s)dS_y\, ds.$$

Por un lado, $v(x,0) = \sup u_0(x) \geq u_0(x)$. Además,

$$\begin{aligned} v_t(x,t) &= \int_\Omega J(x-y)[v(y,t) - v(x,t)]dy + \sup_\Omega \int_{\partial\Omega} G(x-y)g(y,t)dS_y \\ &= \sup\nolimits_\Omega \int_{\partial\Omega} G(x-y)g(y,t)dS_y, \end{aligned}$$

así que v satisface las condiciones de la definición 2. Es decir, v es una supersolución continua de (1.3). Por el Corolario 4, $v \geq u$, con lo cual se cumple (1.14). □

Terminamos ésta sección enunciando el siguiente corolario, cuya demostracion es consecuancia de éste último y por tanto omitiremos su prueba:

Corolario 6. *Sea $u \in C([0,T]; L^1(\Omega))$ una solución de (1.3), con dato inicial $u(x,0) = u_0 \in L^\infty(\Omega)$, y con condición de Neumann $g \in L^\infty([0,T]; L^1(\partial\Omega))$. Entonces se cumple (1.14).*

1.4. Comportamiento asintótico de las soluciones

Supongamos en (1.3) que la condición de Neumann dada determinada por el dato g es independiente del tiempo $g(x,t) = g(x)$, y consideremos el respectivo problema estacionario $(u(x,t) = u(x))$, el cual toma la forma (intercambiando u por ϕ)

$$\int_\Omega J(x-y)[\phi(y) - \phi(x)]dy + \int_{\partial\Omega} G(x-y)g(y)dS_y = 0. \tag{1.15}$$

El primer resultado que se obtiene respecto de (1.15) es dado por el siguiente lema:

Lema 4. *Si la ecuación (1.15) tiene una solución $\phi(x)$ entonces se cumple*

$$\int_\Omega \int_{\partial\Omega} G(x-y)g(y)dS_y dx = 0. \tag{1.16}$$

Demostración. Integrando (1.15) respecto en Ω se obtiene

$$\int_\Omega \int_\Omega J(x-y)[\phi(y) - \phi(x)]dydx + \int_\Omega \int_{\partial\Omega} G(x-y)g(y)dS_y dx = 0.$$

Separando la primera integral de ésta última ecuación como diferencia de dos integrales, usando Fubini y la simetría de J se obtiene que ésta primera integral es cero de donde se deriva (1.16). Esto demuestra el Lema. □

Notemos que (1.15) puede escribirse como

$$\int_\Omega J(x-y)\phi(y)dy - \phi(x)\int_\Omega J(x-y)dy + \int_{\partial\Omega} G(x-y)g(y)dS_y = 0,$$

y como hemos supuesto $J > 0$, entonces podemos dividir por $\int_\Omega J(x-y)dy$ para finalmente escribir (1.15) como

$$\frac{1}{\displaystyle\int_\Omega J(x-y)dy}\int_\Omega J(x-y)\phi(y)dy - \phi(x) + \frac{1}{\displaystyle\int_\Omega J(x-y)dy}\int_{\partial\Omega} G(x-y)g(y)dS_y = 0.$$

Finalmente, si hacemos

$$a(x) = \frac{1}{\displaystyle\int_\Omega J(x-y)dy}$$

entonces (1.15) toma la forma

$$T(\phi)(x) = \phi(x) - b(x). \tag{1.17}$$

siendo

$$\begin{cases} b(x) = a(x) \displaystyle\int_{\partial\Omega} G(x-y)g(y)dS_y, \\ T(\phi)(x) = a(x) \displaystyle\int_{\Omega} J(x-y)\phi(y)dy. \end{cases} \tag{1.18}$$

Sea L^2_μ el espacio de funciones de cuadrado integrable con medida de Lebesgue dada por

$$d\mu = \frac{dx}{a(x)},$$

donde (dx) es la correspondiente medida de Lebesgue asociada al espacio $L^2(\mathbb{R}^N)$.

Lema 5. *El operador $T : L^2_\mu \to L^2_\mu$ definido por*

$$T(\phi)(x) = a(x) \int_{\Omega} J(x-y)\phi(y)dy, \tag{1.19}$$

aplica L^2_μ sobre L^2_μ.

Demostración. En efecto, usando Hölder obtenemos

$$|T(\phi)(x)|^2 \leq K||J||^2_{L^2(\mathbb{R}^N)}||\phi||^2_{L^2_\mu},$$

con K una constante positiva, de donde se desprende que

$$||T\phi||^2_{L^2_\mu} \leq K||J||^2_{L^2(\mathbb{R}^N)}||\phi||^2_{L^2_\mu}|\Omega|,$$

siendo $|\Omega|$ la medida de Ω en L^2_μ. □

Lema 6. *El operador definido por (1.19) es compacto y autoadjunto.*

Demostración. Para el espacio de Hilbert L^2_μ, sea $\{e_n(x)\}$ una base ortonormal, y sea H el espacio de Hilbert formado por las funciones de dos variables de cuadrado integrable $x, y \in \Omega$, con el producto interno definido por

$$< f, g >= \int_{\Omega}\int_{\Omega} f(x,y)\overline{g(x,y)}\frac{dx}{a(x)}\frac{dy}{a(y)},$$

tal que

$$\int_{\Omega}\int_{\Omega} |f(x,y)|^2 \frac{dx}{a(x)}\frac{dy}{a(y)} < \infty.$$

Entonces, $\{e_i(x)e_j(y)\}$ es base para H. En particular, si definimos $f(x,y) = a(x)J(x-y)$ la condición previa se traduce en

$$\int_{\Omega}\int_{\Omega} \frac{a(x)}{a(y)}|J(x-y)|^2 dx\, dy < \infty,$$

lo cual se cumple por ser J un elemento de $L^2(\mathbb{R}^N)$. En este sentido, podemos expresar

$$a(x)J(x-y) = \sum_{i,j=1}^{\infty} a_{i,j} e_i(x) e_j(y),$$

o en forma equivalente

$$\int_\Omega \int_\Omega |a(x)J(x-y) - \sum_{i,j=1}^{n} a_{i,j} e_i(x) e_j(y)|^2 \frac{dx}{a(x)} \frac{dy}{a(y)} \to 0,$$

cuando $n \to \infty$, siendo $a_{i,j} = \displaystyle\int_\Omega \int_\Omega a(x)J(x-y)\overline{e_i(x)e_j(y)} \frac{dx}{a(x)} \frac{dy}{a(y)}$.

Consideremos la sucesión de operadores compactos (de núcleo separable) T_n de L^2_μ en L^2_μ definidos por

$$(T_n\phi)(x) = \int_\Omega \sum_{i,j=1}^{n} a_{i,j} e_i(x) e_j(y) \phi(y) dy.$$

entonces se obtiene que

$$||T - T_n||^2_{L^2_\mu} \leq \int_\Omega \int_\Omega |a(x)J(x-y) - \sum_{i,j=1}^{n} a_{i,j} e_i(x) e_j(y)|^2 \frac{dx}{a(x)} \frac{dy}{a(y)},$$

asi que $T_n \to T$ cuando $n \to \infty$, con lo cual T es compacto por ser límite de operadores compactos.

Para ver que es autoadjunto, sea

$$< T^*\phi, g > = \int_\Omega (T^*\phi)(x) g(x) \frac{dx}{a(x)}. \tag{1.20}$$

De otra parte, consideremos el producto interno

$$\begin{aligned}
&< \phi, Tg > \\
&= \int_\Omega \phi(x)(Tg)(x) \frac{dx}{a(x)} \\
&= \int_\Omega a(x)\phi(x)(\int_\Omega J(x-y)g(y)dy) \frac{dx}{a(x)} \\
&= \int_\Omega (\int_\Omega J(x-y)\phi(y)dy) g(x) dx \\
&= \int_\Omega (a(x) \int_\Omega J(x-y)\phi(y)dy) g(x) \frac{dx}{a(x)}.
\end{aligned} \tag{1.21}$$

De (1.20) y (1.21) se concluye que

$$(T^*\phi)(x) = (T\phi)(x),$$

con lo cual T es autoadjunto. □

Proposicion 1. *Si $\phi \in \ker(I-T)$, entonces ϕ es constante.*

Demostración. Sea $\phi \in \ker(I-T)$. Entonces se cumple

$$\phi(x) = a(x)\int_\Omega J(x-y)\phi(y)dy.$$

Veamos entonces que ϕ debe ser constante. Primero veamos que ϕ es continua. Basta ver que

$$r(x) = \int_\Omega J(x-y)\phi(y)dy$$

es continua. Para tal efecto, sea $p=q=2$, entonces

$$\begin{aligned}
&\Big|r(x+h)-r(x)\Big|\\
&=\Big|\int_\Omega (J(x-y+h)-J(x-y))\phi(y)dy\Big|\\
&\le \int_\Omega |(J(x-y+h)-J(x-y))|\,|\phi(y)|dy\\
&= \int_\Omega (|J(x-y+h)-J(x-y)|^{\frac{1}{2}}\,|\phi(y)|)(|J(x-y+h)-J(x-y)|^{\frac{1}{2}})dy\\
&\le (\int_\Omega |J(x-y+h)-J(x-y)|dy)^{\frac{1}{2}}(\int_\Omega |J(x-y+h)-J(x-y)|\,|\phi(y)|^2\,dy)^{\frac{1}{2}}).
\end{aligned}$$

Por otro lado, la función $|J(x-y+h)-J(x-y)|\,|\phi(y)|^2$ está dominada por $2\sup|g|\,|\phi(y)|^2$ y tiende a cero cuando h tiende a cero. Por el teorema de la convergencia dominada se obtiene finalmente que $|r(x+h)-r(x)| \to 0$ cuanto $h \to 0$. Esto demuestra la continuidad de $r(x)$. Así que ϕ es continua.

Sea $A = \text{máx}_{\overline{\Omega}}\,\phi(x)$, y definamos

$$M = \{x \in \overline{\Omega}/\phi(x) = A\}. \tag{1.22}$$

Así que M es cerrado y no vacío en $\overline{\Omega}$. Además, es abierto: En efecto, sea $x_0 \in M$, por lo tanto

$$\phi(x_0) = a(x_0)\int_\Omega J(x_0-y)\phi(y)dy. \tag{1.23}$$

Sea $d > 0$ y consideremos la bola $B(x_0, d) \subsetneqq \Omega$. Por lo tanto, si $y \in B(x_0, d)$, $\phi(y) \leq \phi(x_0)$. Si suponemos $|\phi(y)| < |\phi(x_0)|$, y tenemos en cuenta que

$$a(x_0) = \left(\int_\Omega J(x_0 - y)dy \right)^{-1},$$

de (1.23) se desprende

$$|\phi(x_0)| < |\phi(x_0)|,$$

lo cual es una contradicción. Así que debe tenerse $\phi(y) = \phi(x_0)$ para todo $y \in B(x_0, d)$, con lo cual $y \in M$. Así que $B(x_0, d) \subsetneqq M$ y M es abierto. Como Ω es conexo, M abierto y cerrado, entonces, dado que $M \subsetneqq \overline{\Omega}$, ha de ser $M = \overline{\Omega}$. Con lo cual ϕ es constante.

Esto demuestra la proposición. □

Teorema 2. *La ecuación (1.15) tiene una solución, si y solo si se cumple (1.16).*

Demostración. Que la condición es necesaria es consecuencia del Lema 4.

Por otro lado, por el Lema 6, T es compacto y autoadjunto, así que aplicando la alternativa de Fredholm's, se obtiene que (1.17) y por tanto (1.15) tiene una solución si y solo si $\phi \in ker(I - T)$ es ortogonal a $b(x)$, es decir

$$\int_\Omega \phi(x)b(x)\frac{dx}{a(x)} = 0.$$

Por la Proposición 1 se tiene que ϕ es constante, luego se obtiene que

$$\int_\Omega b(x)\frac{dx}{a(x)} = 0,$$

o lo que es lo mismo

$$\int_\Omega \int_{\partial\Omega} G(x - y)g(y)dS_y dx = 0.$$

Esto demuestra la suficiencia en el Teorema. □

El resultado más importante de esta sección es dado por el siguiente Teorema:

Teorema 3. *Sea u una solución continua del problema (1.3), con $g(x,t) \equiv g(x)$ satisfaciendo la condición de compatibilidad (1.16), y sea ϕ la única solución del respectivo problema estacionario (1.15) satisfaciendo la condición*

$$\int_\Omega \phi(x)dx = \int_\Omega u_0(x)dx.$$

Entonces

$$u(x,t) \to \phi(x), \tag{1.24}$$

uniformemente en $\overline{\Omega}$ cuando $t \to \infty$.

Antes de comenzar con la demostración del teorema, es necesario considerar la siguiente proposición:

Proposicion 2. *Sea $u(x,t)$ una solución de (1.3). Si definimos*

$$\begin{aligned} F[u](t) = \frac{1}{4}\int_\Omega\int_\Omega J(x-y)[u(y,t)-u(x,t)]^2 dydx \\ -\frac{1}{2}\int_\Omega\int_{\partial\Omega} G(x-y)g(y)u(x,t)dS_y dx, \end{aligned} \tag{1.25}$$

entonces

$$\frac{\partial}{\partial t}F[u](t) = -\frac{1}{2}\int_\Omega (u_t(x,t))^2 dx.$$

Demostración. En efecto, teniendo en cuenta (1.3) y simplificando tenemos

$$\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial t}F[u](t) \\ &= \frac{1}{2}\int_\Omega\int_\Omega J(x-y)[u(y,t)-u(x,t)](-u_t(x,t))dydx \\ &\qquad -\frac{1}{2}\int_\Omega\int_{\partial\Omega} G(x-y)g(y)u_t(x,t)dS_y dx \\ &= -\frac{1}{2}\int_\Omega\int_\Omega\int_\Omega J^2(x-y)[u(y,t)-u(x,t)]^2 dydydx \\ &\qquad -\int_\Omega\int_\Omega\int_{\partial\Omega} J(x-y)G(x-y)g(y)[u(y,t)-u(x,t)]dS_y dydx \\ &\qquad -\frac{1}{2}\int_\Omega\int_{\partial\Omega}\int_{\partial\Omega} G^2(x-y)g^2(y)dS_y dS_y dx \\ &= -\frac{1}{2}\int_\Omega (u_t(x,t))^2 dx. \end{aligned}$$

Esto finaliza la demostración. □

Demostracion del teorema:

Demostración. Sea $w(x,t) = u(x,t) - \phi(x)$. Entonces $w_t(x,t) = u_t(x,t)$, de donde

$$\begin{aligned} w_t(x,t) &= \int_\Omega J(x-y)[u(y,t)-u(x,t)]dy + \int_{\partial\Omega} G(x-y)g(y)dS_y \\ &= \int_\Omega J(x-y)[w(y,t)-w(x,t)]dy + \int_\Omega J(x-y)[\phi(y)-\phi(x)]dy \\ &\quad + \int_{\partial\Omega} G(x-y)g(y)dS_y. \end{aligned}$$

Como ϕ es solución del problema estacionario, las dos últimas integrales de la ecuación anterior suman cero, entonces se desprenden los siguientes resultados (que ordenaremos numerándolos):

1. $$w_t(x,t) = \int_\Omega J(x-y)[w(y,t) - w(x,t)]dy, \tag{1.26}$$

2. Integrando (1.26) sobre Ω obtenemos
$$\frac{\partial}{\partial t}\int_\Omega w(x,t)dx = \int_\Omega \int_\Omega J(x-y)[w(y,t) - w(y,x)]dydx.$$

3. $$\int_\Omega w(x,t) = 0.$$
Éste resultado se desprende, si integramos con respecto a t la ecuación en el numeral inmediatamente anterior. En efecto, en éste caso obtenemos
$$\int_\Omega w(x,t) = \int_\Omega w(x,0)dx + \int_0^t \int_\Omega \int_\Omega J(x-y)[w(y,t) - w(y,x)]dydxds.$$
Dado que por las hipótesis en el teorema, $\int_\Omega w(x,0)dx = 0$, y además $\int_\Omega \int_\Omega J(x-y)[w(y,t) - w(y,x)]dydx = 0$, como lo hemos mencionado anteriormente, entonces el resultado se obtiene.

4. $$\int_\Omega u(x,t)dx = \int_\Omega \phi(x)dx = \int_\Omega u_0(x).$$
Esto es consecuencia del numeral anterior y de que hemos supuesto $w(x,t) = u(x,t) - \phi(x)$.

5. $$||w||_{L^\infty[\overline{\Omega}\times[0,\infty)]} \leq ||u_0 - \phi||_{L^\infty(\Omega)}.$$
Esto se obtiene usando el Corolario 5 y (1.16). En efecto, teniendo en cuenta (1.16), por corolario 5 se tiene que
$$w(x,t) \leq \sup w_0(x) = \sup |u_0(x) - \phi(x)|.$$
De ésta desigualdad se desprende lo mencionado en el presente numeral.

6. Si $A(x) = \int_\Omega J(x-y)dy$, entonces

$$w(x,t) = e^{-A(x)t}w(x,0) + \int_0^t e^{-A(x)(t-s)} \int_\Omega J(x-y)w(y,s)dyds.$$

   Este resultado se obtiene aplicando los pasos del Corolario 2 a (1.26).

7. $$|e^{-A(x_1)t} - e^{-A(x_2)t}| \leq e^{-\alpha t}t|A(x_1) - A(x_2)|.$$

   Si consideramos la función $f(z,t) = e^{-zt}$ con $t > 0$, por el Teorema del Valor Medio se obtiene que $|e^{-z_1 t} - e^{-z_2 t}| = te^{-\xi t}|z_1 - z_2|$, con ξ entre z_1 y z_2. Cambiando z por $A(x)$ (que es continua), y usando que $A(x) > \alpha$ para todo $x \in \overline{\Omega}$ se obtiene la desigualdad.

8. $|w(x_1,t) - w(x_2,t)| \leq D(|A(x_1) - A(x_2)| + |w(x_1,0) - w(x_2,0)|)$. En efecto, usando

la expresión para $w(x,t)$ dada en el item 6, tenemos que

$$
\begin{aligned}
&\Big|w(x_1,t)-w(x_2,t)\Big| \\
\leq &\Big|e^{-A(x_1)t}w(x_1,0)-e^{-A(x_2)t}w(x_2,0)\Big| \\
&\qquad +\Big|\int_0^t e^{-A(x_1)(t-s)}\int_\Omega J(x_1-y)w(y,s)dyds \\
&\qquad -\int_0^t e^{-A(x_2)(t-s)}\int_\Omega J(x_2-y)w(y,s)dyds\Big| \\
= &\Big|e^{-A(x_1)t}w(x_1,0)-e^{-A(x_2)t}w(x_2,0)-e^{-A(x_2)t}w(x_1,0)+e^{-A(x_2)t}w(x_1,0)\Big| \\
&\qquad +\Big|\int_0^t e^{-A(x_1)(t-s)}\int_\Omega J(x_1-y)w(y,s)dyds \\
&\qquad -\int_0^t e^{-A(x_2)(t-s)}\int_\Omega J(x_2-y)w(y,s)dyds \\
&\qquad -\int_0^t e^{-A(x_2)(t-s)}\int_\Omega J(x_1-y)w(y,s)dyds \\
&\qquad +\int_0^t e^{-A(x_2)(t-s)}\int_\Omega J(x_1-y)w(y,s)dyds\Big| \\
\leq &\Big|(e^{-A(x_1)t}-e^{-A(x_2)t})w(x_1,0)\Big|+\Big|e^{-A(x_2)t}(w(x_1,0)-w(x,2,0))\Big| \\
&\qquad +\Big|\int_0^t (e^{-A(x_1)(t-s)}-e^{-A(x_2)(t-s)})\int_\Omega J(x_1-y)w(y,s)dyds\Big| \\
&\qquad +\Big|\int_0^t e^{-A(x_2)(t-s)}\int_\Omega (J(x_1-y)-J(x_2-y))w(y,s)dyds\Big|
\end{aligned}
$$

Si usamos la desigualdad del item inmediatamente anterior, el hecho que $\lim_{t\to\infty} te^{-\alpha t}=0$ y que J es uniformemente continua (para todo $\epsilon>0$ existe $\delta>0$ tal que $|x_1-x_2|<\delta$ entonces $|J(x_1-y)-J(x_2-y)|<\epsilon$), obtenemos que

$$
\begin{aligned}
&|w(x_1,t)-w(x_2,t)|\leq D_1|A(x_1)-A(x_2)| \\
&+D_2|w(x_1,0)-w(x_2,0)|+D_3|A(x_1)-A(x_2)|+D_4\epsilon.
\end{aligned}
$$

Para adecuadas constantes D_1,D_2,D_3. Como ϵ es arbitrario, si $D=\max\{D_1,D_2,D_3\}$ obtenemos la desigualdad mencionada en el presente item, con D una constante independiente del tiempo.

9. Las funciones $\{w(\cdot,t)\}$, forman un conjunto secuencialmente compacto en la topología de convergencia uniforme. En efecto, el numeral 5 dice que forman un conjunto equiacotado, y el numeral 8, dice que son un conjunto equicontinuo. La afirmación se desprende del teorema de Arzelá–Ascoli.

Por otro lado, si consideramos la sucesión divergente t_n, entonces la correpondiente familia $\{w(\cdot,t_n)\}$, tiene una subsucesión $\{w(\cdot,t_{n_k})\}$ la cual converge uniformemente a una función $\psi(x)$. Considerando el funcional de Lyapunov (Proposición 2) se obtiene (1.16), con lo cual $\psi(x)$ es solución del respectivo problema estacionario (Teorema 2) y por lo tanto $\psi(x)$ debe ser constante. El numeral 3, implica que la constante debe ser 0. Como esto es cierto para toda sucesión $\{t_n\}$ divergente, se obtiene que

$$w(\cdot,t)\to 0,$$

en la topología de convergencia uniforme. Como hemos tomado $w(x,t)=u(x,t)-\phi(x)$, esto demuestra (1.24).

El Teorema queda demostrado. □

Corolario 7. *Si en la hipótesis del Teorema 3, no se tiene la condición de compatibilidad (1.16) entonces la solución continua de (1.3) es no acotada.*

Demostración. Si no se cumple (1.16), entonces usando la ecuación para la masa total (1.8), se tiene que para un t suficientemente grande la masa es tan grande como queramos. Siendo Ω acotado, necesariamente u debe ser no acotado. □

Teorema 4. *Sea $u_0\in L^2(\Omega)$. Sea $u(x,t)$ la solución de (1.3) con $g(x,t)\equiv g(x)\equiv 0$. Entonces,*

$$||u(\cdot,t)-<u_0>||^2_{L^2(\Omega)}\le e^{-\beta t}||u_0-<u_0>||^2_{L^2(\Omega)}, \tag{1.27}$$

con β una constante estrictamente positiva y $<u_0>=\dfrac{1}{|\Omega|}\displaystyle\int_\Omega u_0(x)dx$ es el valor promedio del dato inicial.

Demostración. Sea

$$H(t)=\frac{1}{2}\int_\Omega [u(x,t)-<u_0>]^2.$$

Derivando respecto a t, tenemos

$$H'(t)=\int_\Omega [u(x,t)-<u_0>]u_t(x,t)dx.$$

Usando (1.3) con $g(y) = 0$, se obtiene

$$
\begin{aligned}
H'(t) &= \int_\Omega \int_\Omega J(x-y)u(x,t)u(y,t)dydx - \int_\Omega \int_\Omega J(x,y)u^2(x,t)dydx \\
&= \int_\Omega \int_\Omega J(x-y)u(x,t)u(y,t)dydx - \frac{1}{2}\int_\Omega \int_\Omega J(x-y)u^2(x,t)dydx \\
&\qquad -\frac{1}{2}\int_\Omega \int_\Omega J(x-y)u^2(x,t)dydx \\
&= -\frac{1}{2}\int_\Omega \int_\Omega J(x-y)(u(y,t)-u(x,t))^2dydx \\
&= -\frac{1}{2}\frac{\displaystyle\int_\Omega \int_\Omega J(x-y)(u(y,t)-u(x,t))^2dydx}{\displaystyle\int_\Omega (u(x,t)- < u_0 >)^2dx}\int_\Omega (u(x,t)- < u_0 >)^2dx \\
&\leq -\frac{D}{2}\int_\Omega (u(x,t)- < u_0 >)^2dx,
\end{aligned}
$$

donde $D > 0$ es una constante tal que

$$
\frac{\displaystyle\int_\Omega \int_\Omega J(x-y)(u(y,t)-u(x,t))^2dydx}{\displaystyle\int_\Omega (u(x,t)- < u_0 >)^2dx} \geq D
$$

(esta constante siempre existe [41]). Si el

$$
\text{ínf}\ \frac{\displaystyle\int_\Omega \int_\Omega J(x-y)(u(y,t)-u(x,t))^2dydx}{\displaystyle\int_\Omega (u(x,t)- < u_0 >)^2dx}
$$

lo denotamos por β, entonces se obtiene

$$
H'(t) \leq -\beta H(t).
$$

Integrando respecto a t obtenemos

$$
H(t) \leq H(0)e^{-\beta t},
$$

lo que es equivalente a

$$
\int_\Omega |u(x,t)- < u_0 > |^2dx \leq e^{-\beta t}\int_\Omega |u(x,0)- < u_0 > |^2dx,
$$

es decir, se obtiene (1.27). El Teorema queda demostrado. □

Terminamos éste capítulo con un resultado sobre el decaimiento exponencial de las soluciones en estado estacionario de (1.3) cuando $g(x,t) \equiv g(x) \neq 0$.

Corolario 8. *Sea* $u_0 \in L^2(\Omega)$*, y* $u(x,t)$ *una solución de (1.3) con* $g(x,t) \equiv g(x)$*. Entonces*

$$||u-\phi||^2_{L^2(\Omega)} \leq e^{-\beta t}||u_0-\phi||^2_{L^2(\Omega)}, \tag{1.28}$$

donde ϕ *es la única solución del problema estacionario satisfaciendo la condición del numeral 4 en el Teorema 3 (Tiene el mismo valor promedio del dato inicial), y* β *como en el Teorema 4.*

Demostración. En este caso, si $g=0$, entonces $v=u-\phi$ es solución de (1.3). En efecto, observemos que

$$\begin{aligned} v_t(x,t) &= u_t(x,t) - 0 \\ &= \int_\Omega J(x-y)[u(y,t)-u(x,t)]dy - \int_\Omega J(x-y)[\phi(y)-\phi(x)]dy \\ &= \int_\Omega J(x-y)[(u(y,t)-\phi(y)) - (u(x,t)-\phi(x))]dy \\ &= \int_\Omega J(x-y)[v(y,t)-v(x,t)]dy. \end{aligned}$$

Entonces, del Teorema anterior (teniendo en cuenta que $< v_0 >= 0$), tenemos

$$||v(\cdot,t)||^2_{L^2(\Omega)} \leq e^{-\beta t}||v_0||^2_{L^2(\Omega)}.$$

De ésta ultima ecuación se deduce (1.28). $\square$

CAPÍTULO 2

Estudio de la explosión para la ecuación de difusión no local (I)

2.1. Introduction

Dentro de las ramas de estudio en el campo de las ecuaciones diferenciales, el de las soluciones no acotadas es una de las más importantes a las cuales se dedican muchos investigadores hoy en día. En la literatura inglesa, este fenomeno es conocido como Blow-up.

Definicion 4. *Se dice que la solucion $u(x,t)$ explota en tiempo finito T, si existe un tiempo $0 < T < \infty$ tal que $u(x,t)$ está definida para todo $t \in [0,T)$ pero*

$$\sup_{x\in\Omega} u(x,t) \to \infty$$

cuando $t \to T^-$.

2.2. Análisis de explosión: caso particular

El principal objetivo de ésta seccion, es el estudio del fenómeno de explosión para las soluciones del problema

$$\begin{aligned} &u_t(x,t) = \int_\Omega J(x-y)(u(y,t)-u(x,t))dy + \int_{\partial\Omega} G(x-y)\frac{g(y)}{(T-t)^\alpha}dS_y, \\ &u(x,0) = u_0(x), \end{aligned} \tag{2.1}$$

el cual es un caso particular del problema estudiado en el primer capítulo, donde asumiremos $g(y) \geq 0$ no trivial, $g \in L^\infty(\partial\Omega)$, $u_0 \geq 0$, $u \in L^\infty(\Omega)$, $\alpha > 0$, y además, con el fin de simplificar cálculos, supondremos $T < 1$.

Recientemente, en [58], los autores estudiaron el fenómeno de explosion para el problema de difusión no local con término de reacción descrito por la ecuación

$$\begin{aligned} u_t(x,t) &= \int_\Omega J(x-y)(u(y,t)-u(x,t))dy + u^p(x,t), \\ u(x,0) &= u_0(x). \end{aligned}$$

En dicho trabajo, los autores mostraron existencia y unicidad de las soluciones para dicho modelo y que las soluciones no-negativas y no triviales explotan en tiempo finito si y solo si $p > 1$. Adicionalmente encontraron que la razón de explosion de las soluciones viene dada por

$$\lim_{t \to T} (T-t)^{\frac{1}{p-1}} \|u(.,t)\|_\infty = \left(\frac{1}{p-1}\right)^{\frac{1}{p-1}}.$$

El fenómeno de explosion ha sido estudiado ampliamente en ecuaciones parabólicas no-lineales. Por ejemplo, en los trabajos [12], [13], [50], y las respectivas referencias, se puede encontrar una extensa bibliografía acerca del fenómeno de explosión.

En lo que respecta al problema (2.1), el primer resultado es dado por el siguiente Lema:

Lema 7. *Sea $u(x,t)$ una solución de (2.1). Entonces u explota en el tiempo T si y solo si $\alpha \geq 1$.*

Demostración. Consideremos la función

$$M(t) = \int_\Omega u(x,t)dx.$$

Entonces

$$\begin{aligned} M'(t) = &\int_\Omega \int_\Omega J(x-y)[u(y,t)-u(x,t)]dydx \\ &+ \frac{1}{(T-t)^\alpha} \int_\Omega \int_{\partial\Omega} G(x-y)g(y)dS_y dx. \end{aligned}$$

Como la primera integral del lado derecho es cero, se obtiene

$$M'(t) = \frac{1}{(T-t)^\alpha} \int_\Omega \int_{\partial\Omega} G(x-y)g(y)dS_y dx.$$

Como hemos supuesto G y g positivas, entonces existe una constante $c > 0$ tal que

$$M'(t) \geq \frac{c}{(T-t)^\alpha}.$$

Integrando ésta última ecuación desde 0 hasta t, tenemos

$$\int_0^t M(\tau)\, d\tau \geq \int_0^t \frac{c}{(T-\tau)^\alpha}\, d\tau = -\frac{c(T-\tau)^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}\bigg|_0^t.$$

Es decir, se obtiene

$$M(t) - \int_\Omega u(x,0)dx \geq \frac{c}{\alpha-1}\left(\frac{1}{(T-t)^{\alpha-1}} - \frac{1}{T^{\alpha-1}}\right).$$

Por otro lado, dado que $u(x,0) > 0$, concluímos

$$M(t) > c_1 + \frac{c}{(T-t)^{\alpha-1}},$$

con

$$c_1 = \int_\Omega u(x,0)dx$$

una constante positiva. De ésta última ecuación se obtiene que si $\alpha > 1$, entonces $M(t)$ es no acotada cuando $t \to T^-$, por lo tanto u debe ser no acotada en este caso. Ahora bien, si $\alpha = 1$ se tiene

$$M(t) = c_1 - c\ln(T-t),$$

de donde se concluye igualmente que $M(t)$ es no acotada si $t \to T^-$, y por lo tanto u no puede ser acotada. En resumen, para $\alpha \geq 1$, $M(t)$ (y por tanto u) no es acotada cuando $t \to T^-$.

Supongamos ahora $\alpha < 1$, y veamos que existe una constante K tal que

$$z(t) = \frac{K}{(T-t)^{\alpha-1}}, \tag{2.2}$$

es una supersolución de (2.1). En efecto, consideremos el problema de valor inicial dado por

$$\begin{cases} z'(t) = \dfrac{\tilde{K}}{(T-t)^\alpha}, \\ z(0) = \max_{x\in\overline{\Omega}}\{u_0, 1\}. \end{cases} \tag{2.3}$$

Se tiene que

$$z(t) = z(0) + \frac{\tilde{K}}{\alpha-1}\left(\frac{1}{(T-t)^{\alpha-1}} - \frac{1}{T^{\alpha-1}}\right), \tag{2.4}$$

es una supersolucion (acotada para $\alpha < 1$) de (2.1) si $t < T$, y $\tilde{K}$ es suficientemente grande (por ejemplo mayor que $||G||_{L^\infty(\mathbb{R}^N)}||g||_{L^\infty(\partial\Omega)}|\partial\Omega|$). En efecto, bajo éstas consideraciones se tiene

$$z'(t) = \frac{\tilde{K}}{(T-t)^\alpha} \geq \int_\Omega J(x-y)[z(y,t) - z(x,t)]dy + \frac{1}{(T-t)^\alpha}\int_{\partial\Omega} G(x-y)g(y)dS_y,$$

dado que

$$\int_\Omega J(x-y)[z(y,t)-z(x,t)]dy = 0,$$

y $z(0) \geq u_0$. Por comparación se desprende que u sigue siendo acotada para $t < T$. Así que para $0 < \alpha < 1$, u es acotada.

Ahora bien, si en (2.4) seleccionamos $\tilde{K}$ de tal manera que adicionalmente satisfaga la condición

$$\frac{\tilde{K}}{(\alpha-1)T^{\alpha-1}} \geq u_0,$$

entonces tomando $K = \dfrac{\tilde{K}}{\alpha-1}$, obtenemos que

$$z(t) \leq \frac{K}{(T-t)^{\alpha-1}}.$$

En particular, con éste K (2.2) es una supersolución acotada de (2.1) y por tanto

$$u(x,t) \leq \frac{K}{(T-t)^{\alpha-1}}.$$

Esto finaliza la demostración del lemma. $\square$

En lo que sigue vamos a suponer que el soporte de g es $\partial\Omega$. Como el soporte de J y G es la bola unitaria, entonces es importante considerar los siguientes conjuntos:

$$\begin{cases} \Omega_0 = \Omega, \quad B_0 = \partial\Omega, \\ B_i = \{x \in \Omega - \bigcup_{j<i} B_j \ / \ d(x, B_{i-1}) < 1\}, \\ \Omega_i = \Omega_{i-1} - B_i. \end{cases}$$

Es claro que como Ω es acotado, hay un número finito de tales conjuntos no vacíos. En éste sentido, veremos que como las soluciones de (2.1) explotan para $\alpha \geq 1$, entonces éstas divergen a infinito con una determinada tasa para cada uno de los conjuntos B_i. Para lograr éste objetivo, el siguiente resultado es fundamental:

Lema 8. *Sea u una solución de (2.1). Entonces, existe una constante K tal que para cada entero i tal que $1 \leq i \leq \alpha$,*

$$u(x,t) \leq \frac{K}{(T-t)^{\alpha-i}}, \quad \textit{en} \quad \Omega_{i-1}, \quad \textit{si} \quad i \neq \alpha,$$

y

$$u(x,t) \leq -K \ln(T-t), \quad \textit{en} \quad \Omega_{i-1}, \quad \textit{si} \quad i = \alpha.$$

Demostración. De la misma manera como argumentamos en el Lema 7, si $\alpha > 1$, existe una constante K_1 tal que

$$z(t) = \frac{K_1}{(T-t)^{\alpha-1}},$$

es una supersolucion de (2.1). En efecto, consideremos el problema de valor inicial dado por

$$\begin{cases} z'(t) = \dfrac{\tilde{K_1}}{(T-t)^{\alpha}}, \\ z(0) = \text{máx}_{x\in\overline{\Omega}}\{u_0, 1\}. \end{cases} \tag{2.5}$$

Se tiene que

$$z(t) = z(0) + \frac{\tilde{K_1}}{\alpha-1}\left(\frac{1}{(T-t)^{\alpha-1}} - \frac{1}{T^{\alpha-1}}\right), \tag{2.6}$$

es una supersolucion (no acotada cuando $t \to T^-$) de (2.1) si $\tilde{K_1}$ es suficientemente grande (por ejemplo mayor que $||G||_{L^\infty(\mathbb{R}^N)}||g||_{L^\infty(\partial\Omega)}|\partial\Omega|$). En efecto, bajo éstas consideraciones tenemos que

$$\begin{aligned} &\left|\int_\Omega J(x-y)[z(y,t)-z(x,t)]dy + \frac{1}{(T-t)^\alpha}\int_{\partial\Omega} G(x-y)g(y)dS_y\right| \\ \leq &\left|\frac{1}{(T-t)^\alpha}\int_{\partial\Omega} G(x-y)g(y)dS_y\right| \\ \leq &\ \frac{||G||_{L^\infty(\mathbb{R}^N)}||g||_{L^\infty(\partial\Omega)}|\partial\Omega|}{(T-t)^\alpha} \\ \leq &\ \frac{\tilde{K_1}}{(T-t)^\alpha} \\ = &\ z'(t). \end{aligned}$$

Procediendo de la misma manera a como lo hicimos en el Lema 7, si escogemos $\tilde{K_1}$ en (2.6) de tal manera que adicionalmente satisfaga la condición

$$\frac{\tilde{K_1}}{(\alpha-1)T^{\alpha-1}} \geq u_0,$$

entonces tomando

$$K_1 = \frac{\tilde{K_1}}{\alpha-1}$$

obtenemos en (2.6) que

$$z(t) \leq \frac{K_1}{(T-t)^{\alpha-1}}.$$

En particular, con éste K_1

$$z(t) = \frac{K_1}{(T-t)^{\alpha-1}}$$

es una supersolución de (2.1) y por tanto se tiene

$$u(x,t) \leq \frac{K_1}{(T-t)^{\alpha-1}}, \ \ en \ \ \Omega_0. \tag{2.7}$$

En el caso $\alpha = 1$, la solución de (2.5) toma la forma

$$z(t) = z(0) - \tilde{K_1}(\ln(T-t) - \ln(T)). \tag{2.8}$$

Nuevamente, si $\tilde{K_1}$ es suficientemente grande (mayor que $||G||_{L^\infty(\mathbb{R}^N)}||g||_{L^\infty(\partial\Omega)}$) entonces (2.8) es supersolución de (2.1). Notemos además que como hemos tomado $T < 1$, entonces podemos seleccionar $\tilde{K_1}$ de tal manera que adicionalmente satisfaga la condición $z(0) + \tilde{K_1}\ln(T) \leq 0$, entonces de (2.8) se obtiene $z(t) \leq -\tilde{K_1}\ln(T-t)$. Cambiando $\tilde{K_1}$ por K_1 tenemos que

$$z(t) = -K_1 \ln(T-t),$$

es una supersolución de (2.1), y por lo tanto, en éste caso ($\alpha = 1$) se tiene que existe K_1 tal que

$$u(x,t) \leq -K_1 \ln((T-t)), \ \ en \ \ \Omega_0. \tag{2.9}$$

Ahora bien, para $x \in \Omega_1$, y teniendo en cuenta que G es de soporte compacto en la bola unitaria, entonces (2.1) toma la forma

$$u_t(x,t) = \int_\Omega J(x-y)[u(y,t) - u(x,t)]dy, \tag{2.10}$$

y dado que $\Omega = \Omega_1 \cup B_1$ entonces ésta última ecuación se puede escribir como

$$\begin{gathered} u_t(x,t) = \int_{\Omega_1} J(x-y)[u(y,t) - u(x,t)]dy + \\ \int_{B_1} J(x-y)u(y,t)dy - \int_{B_1} J(x-y)u(x,t)dy, \end{gathered} \tag{2.11}$$

de donde obtenemos

$$u_t(x,t) \leq \int_{\Omega_1} J(x-y)u(y,t)dy + \int_{B_1} J(x-y)u(y,t)dy. \tag{2.12}$$

Ahora, teniendo en cuenta (2.7), se tiene finalmente que

$$u_t(x,t) \leq \frac{K_1}{(T-t)^{\alpha-1}}\left(\int_{\Omega_1} J(x-y)dy + \int_{B_1} J(x-y)dy\right) \leq \frac{2K_1}{(T-t)^{\alpha-1}}. \tag{2.13}$$

La anterior desigualdad implica que la solución del problema de valor inicial

$$\begin{cases} z'(t) = \dfrac{2K_1}{(T-t)^{\alpha-1}}, \\ z(0) = \text{máx}_{x\in\overline{\Omega}}\{u_0, 1\}, \end{cases} \tag{2.14}$$

la cual viene dada por

$$z(t) = z_0 + \frac{2K_1}{\alpha-2}\left(\frac{1}{(T-t)^{\alpha-2}} - \frac{1}{T^{\alpha-2}}\right), \tag{2.15}$$

es una supersolución de (2.1) en Ω_1. Si imponemos sobre K_1 la condición adicional

$$\frac{2K_1}{(\alpha-2)T^{\alpha-2}} \geq z(0),$$

entonces de (2.15) se deriva que

$$z(t) \leq \frac{K_2}{(T-t)^{\alpha-2}},$$

con $K_2 = \dfrac{2K_1}{\alpha-2}$. Como caso particular, con ésta elección de K_2, tenemos que

$$z(t) = \frac{K_2}{(T-t)^{\alpha-2}}, \tag{2.16}$$

es una supersolución de (2.1) en Ω_1 y por lo tanto

$$u(x,t) \leq \frac{K_2}{(T-t)^{\alpha-2}}, \quad \text{en} \quad \Omega_1. \tag{2.17}$$

Ahora bien, en el caso $\alpha = 2$, la solución de (2.14) viene dada por

$$z(t) = z(0) - 2K_1\Big(\ln(T-t) - \ln(T)\Big). \tag{2.18}$$

En éste caso, y teniendo en cuenta que $T < 1$, podemos seleccionar K_1 de tal manera que $2K_1 \ln(T) + z(0) \leq 0$, con lo cual, de (2.18) se obtiene $z(t) \leq -K_2 \ln(T-t)$, siendo $K_2 = 2K_1$. Con ésta selección de K_2 , tenemos como caso particular que

$$z(t) = -K_2 \ln(T-t),$$

es una supersolucion de (2.1) en Ω_1, y por lo tanto

$$u(x,t) \leq -K_2 \ln(T-t), \quad \text{en} \quad \Omega_1.$$

Ahora bien, si $x \in \Omega_2$, considerando que G es de soporte compacto en la bola unitaria, que en la segunda integral en (2.1) $y \in \partial\Omega$ y que $\Omega = \Omega_2 \cup B_1 \cup B_2$, entonces (2.1) toma la forma

$$\begin{aligned} u_t(x,t) &= \int_{\Omega_2} J(x-y)[u(y,t) - u(x,t)]dy \\ &+ \int_{B_1} J(x-y)u(y,t)dy - \int_{B_1} J(x-y)u(x,t)dy \\ &+ \int_{B_2} J(x-y)u(y,t)dy - \int_{B_2} J(x-y)u(x,t)dy. \end{aligned}$$

De ésta última ecuación se desprende que

$$u_t(x,t) \leq \int_{\Omega_2} J(x-y)u(y,t)dy + \int_{B_1} J(x-y)u(y,t)dy + \int_{B_2} J(x-y)u(y,t)dy.$$

Teniendo en cuenta (2.17), entonces

$$\begin{aligned} u_t(x,t) &\leq \frac{K_2}{(T-t)^{\alpha-2}}\left(\int_{\Omega_2} J(x-y)dy + \int_{B_1} J(x-y)dy + \int_{B_2} J(x-y)dy\right) \\ &\leq \frac{3K_2}{(T-t)^{\alpha-2}}, \end{aligned}$$

lo cual indica que la solución del problema del valor inicial dado por

$$\begin{cases} z'(t) = \dfrac{3K_2}{(T-t)^{\alpha-2}}, \\ z(0) = \text{máx}_{x\in\overline{\Omega}}\{u_0, 1\}, \end{cases} \tag{2.19}$$

la cual es dada por

$$z(t) = z_0 + \frac{3K_2}{\alpha-3}\left(\frac{1}{(T-t)^{\alpha-3}} - \frac{1}{T^{\alpha-3}}\right), \tag{2.20}$$

es una supersolución de (2.1) en Ω_2. Si imponemos sobre K_2 la condición adicional

$$\frac{3K_2}{(\alpha-3)T^{\alpha-3}} \geq z(0),$$

entonces de (2.20) se deriva que

$$z(t) \leq \frac{K_3}{(T-t)^{\alpha-3}},$$

con

$$K_3 = \frac{3K_2}{\alpha-3}.$$

Como caso particular, con ésta elección de K_3, tenemos que

$$z(t) = \frac{K_3}{(T-t)^{\alpha-3}}, \tag{2.21}$$

es una supersolucion de (2.1) en Ω_2 y por lo tanto

$$u(x,t) \leq \frac{K_3}{(T-t)^{\alpha-3}}, \quad \text{en} \quad \Omega_2. \tag{2.22}$$

En el caso $\alpha = 3$, la solución de (2.19) viene dada por

$$z(t) = z(0) - 3K_2(\ln(T-t) - \ln(T)). \tag{2.23}$$

Como antes, podemos tomar K_2 de tal manera que $z(0) + 3K_2 \ln(T) \leq 0$, así que de (2.23) se tiene $z(t) \leq -K_3 \ln(T-t)$, en donde hemos tomado $K_3 = 3K_2$. En particular, con ésta elección de K_3

$$z(t) = -K_3 \ln(T-t), \tag{2.24}$$

es una supersolución de (2.1) en Ω_2 y por lo tanto

$$u(x,t) \leq -K_3 \ln(T-t), \quad \text{en} \quad \Omega_2. \tag{2.25}$$

Como Ω es acotado, existe un número finito de conjuntos B_n. Luego, repitiendo el proceso anterior un número finito de veces, hallamos en cada paso una constante K_j que cumple la respectiva condición en cada Ω_{j-1}. Tomando $K = \text{máx}_{1\leq j\leq[\alpha]} K_j$ obtenemos la conclusion del Lema. $\square$

2.3. Conjuntos de Explosión

El principal objetivo en ésta sección, es el de presentar un resultado en donde se caracterizan los conjuntos de explosión y el respectivo comportamiento de las soluciones que explotan. De la primera parte, sabemos que u explota si $\alpha \geq 1$.

2.3.1. Caso $1 \leq \alpha < 2$

2.3.1.1. $1 < \alpha < 2$

Supongamos primero que $1 < \alpha < 2$, y consideremos el cambio de variable

$$\begin{aligned} v_1(x,s) &= (T-t)^{\alpha-1} u(x,t), \\ s &= -\ln(T-t). \end{aligned} \tag{2.26}$$

De la segunda parte en (2.26) obtenemos las siguientes expresiones equivalentes que usaremos en lo que sigue:

$$\begin{aligned} t &= T - e^{-s}, \\ \frac{e^{-s}}{T-t} &= 1, \end{aligned} \tag{2.27}$$

así, la expresión $t \to T^-$ será equivalente a $s \to \infty$. De la primera expresión en (2.26) encontramos que

$$\begin{aligned} &\frac{d}{ds} v_1(x,s) \\ &= \frac{d}{dt} v_1(x,s) \frac{dt}{ds} \\ &= e^{-s}\{-(\alpha-1)(T-t)^{\alpha-2} u(x,t)\} + e^{-s}\{(T-t)^{\alpha-1} u_t(x,t)\}. \end{aligned}$$

Ahora bien, usando (2.1), de ésta última ecuación obtenemos

$$\begin{aligned} (v_1)_s(x,s) = e^{-s} &\int_\Omega J(x-y)[v_1(y,s) - v_1(x,s)]dy \\ &+ \frac{e^{-s}}{T-t} \int_{\partial\Omega} G(x-y)g(y)dS_y - \frac{e^{-s}(\alpha-1)(T-t)^{\alpha-1}u(x,t)}{T-t}. \end{aligned}$$

Finalmente, usando la primera expresión en (2.26) y la segunda en (2.27), en la nuevas variables (2.1) toma la forma

$$\begin{aligned} (v_1)_s(x,s) = e^{-s} &\int_\Omega J(x-y)[v_1(y,s) - v_1(x,s)]dy \\ &+ \int_{\partial\Omega} G(x-y)g(y)dS_y - (\alpha-1)v_1(x,s). \end{aligned} \tag{2.28}$$

Esta última ecuación puede escribirse como

$$\begin{aligned} (v_1)_s(x,s) + (\alpha-1)v_1(x,s) &= e^{-s} \int_\Omega J(x-y)[v_1(y,s) - v_1(x,s)]dy \\ &+ \int_{\partial\Omega} G(x-y)g(y)dS_y. \end{aligned} \tag{2.29}$$

Multiplicando ambos lados de (2.29) por $e^{(\alpha-1)s}$, tenemos

$$\begin{aligned} d(e^{(\alpha-1)s}v_1(x,s)) = e^{(\alpha-2)s} &\int_\Omega J(x-y)[v_1(y,s) - v_1(x,s)]dy \\ &+ e^{(\alpha-1)s} \int_{\partial\Omega} G(x-y)g(y)dS_y. \end{aligned}$$

Integrando de 0 a s, encontramos

$$\begin{aligned} & e^{(\alpha-1)r} v_1(x,t)\Big|_0^s \\ &= \int_0^s e^{(\alpha-2)r} \int_\Omega J(x-y)[v_1(y,r)-v_1(x,r)]dy\,dr \\ &\quad + \frac{1}{\alpha-1} e^{(\alpha-1)r}\Big|_0^s \int_{\partial\Omega} G(x-y)g(y)dS_y, \end{aligned}$$

de donde se obtiene

$$\begin{aligned} & e^{(\alpha-1)s} v_1(x,s) - v_1(x,0) \\ &= \int_0^s e^{(\alpha-2)r} \int_\Omega J(x-y)[v_1(y,r)-v_1(x,r)]dy\,dr \\ &\quad + \frac{e^{(\alpha-1)s}}{\alpha-1} \int_{\partial\Omega} G(x-y)g(y)dS_y \\ &\quad - \frac{1}{\alpha-1} \int_{\partial\Omega} G(x-y)g(y)dS_y. \end{aligned}$$

Multiplicando ambos lados de ésta última ecuación por $e^{-(\alpha-1)s}$ y reorganizando términos, obtenemos finalmente que

$$\begin{aligned} & v_1(x,s) - \frac{1}{\alpha-1}\int_{\partial\Omega} G(x-y)g(y)dS_y \\ &= e^{-(\alpha-1)s} v_1(x,0) + e^{-(\alpha-1)s} \int_0^s e^{(\alpha-2)r} \int_\Omega J(x-y)[v_1(y,r)-v_1(x,r)]dydr \\ &\quad - e^{-(\alpha-1)s} \frac{1}{\alpha-1} \int_{\partial\Omega} G(x-y)g(y)dS_y. \end{aligned}$$

Notemos que por (2.7), para $x \in \Omega_0$ se tiene $u(x,t) \leq \dfrac{K_1}{(T-t)^{\alpha-1}}$, por lo tanto

$|v_1(x,s)| \leq K_1$, y entonces podemos obtener la siguiente acotación:

$$\begin{aligned} &\left| v_1(x,s) - \frac{1}{\alpha-1}\int_{\partial\Omega} G(x-y)g(y)dS_y \right| \\ &\leq e^{-(\alpha-1)s}v_1(x,0) + \frac{1}{\alpha-2}2K_1|\Omega|||J||_{L^\infty(\mathbb{R}^N)}\{e^{-s} - e^{-(\alpha-1)s}\} \\ &\quad + e^{-(\alpha-1)s}\frac{1}{\alpha-1}\partial\Omega|||G||_{L^\infty(\mathbb{R}^N)}||g||_{L^\infty(\partial\Omega)} \\ &\leq e^{-(\alpha-1)s}v_1(x,0) + \frac{1}{\alpha-2}2K_1|\Omega|||J||_{L^\infty(\mathbb{R}^N)}e^{-s} \\ &\quad + e^{-(\alpha-1)s}\frac{1}{\alpha-1}|\partial\Omega|||G||_{L^\infty(\mathbb{R}^N)}||g||_{L^\infty(\partial\Omega)}. \end{aligned} \tag{2.30}$$

Ahora bien, tomando

$$C = \text{máx}\{v_1(x,0),\ \frac{1}{\alpha-2}2K_1|\Omega|||J||_{L^\infty(\mathbb{R}^N)},\ \frac{1}{\alpha-1}|\partial\Omega|||G||_{L^\infty(\mathbb{R}^N)}||g||_{L^\infty(\partial\Omega)}\},$$

se obtiene

$$\left| v_1(x,s) - \frac{1}{\alpha-1}\int_{\partial\Omega} G(x-y)g(y)dS_y \right| \leq C(e^{-s} + e^{-(\alpha-1)s}). \tag{2.31}$$

De (2.31), considerando la observación hecha después de (2.27) se deduce

$$v_1(x,s) \to \frac{1}{\alpha-1}\int_{\partial\Omega} G(x-y)g(y)dS_y, \tag{2.32}$$

uniformemente en Ω_0 (y por tanto en B_1) cuando $t \to T^-$. Si hacemos

$$w_1(x) = \frac{1}{\alpha-1}\int_{\partial\Omega} G(x-y)g(y)dS_y, \tag{2.33}$$

entonces podemos escribir

$$(T-t)^{\alpha-1}u(x,t) \to w_1, \tag{2.34}$$

uniformemente en B_1 cuando $t \to T^-$.

De otro lado, si $x \in \Omega_1$, dado que G es de soporte compacto en la bola unitaria y $y \in \partial\Omega$, entonces

$$\int_{\partial\Omega} G(x-y)g(y)dS_y = 0.$$

Como $1 < \alpha < 2$ se tiene que $e^{-s} < e^{-(\alpha-1)s}$, y entonces de (2.31) se deriva que existe una constante $C_1 = 2C$ tal que

$$|v_1(x,s)| \leq C_1 e^{-(\alpha-1)s},$$

para $x \in \Omega_1$, es decir $|(T-t)^{\alpha-1}u(x,t)| \leq C_1 e^{-(\alpha-1)s}$, de donde

$$u(x,t) \leq C_1 \frac{e^{-(\alpha-1)s}}{(T-t)^{\alpha-1}}.$$

Pero de la primera expresión en (2.27) se desprende que $\dfrac{e^{-(\alpha-1)s}}{(T-t)^{\alpha-1}} = 1$, luego finalmente se halla que en Ω_1

$$u(x,t) \leq C_1, \tag{2.35}$$

es decir u es acotada en Ω_1, y por lo tanto de (2.34) se deduce que u explota en $B_1 = \Omega_0 \backslash \Omega_1$.

2.3.1.2. $\alpha = 1$

Ahora supongamos que $\alpha = 1$. En éste caso, la ecuación (2.1) toma la forma

$$u_t(x,t) = \int_\Omega J(x-y)[u(y,t)-u(x,t)]dy + \frac{1}{T-t}\int_{\partial\Omega} G(x-y)g(y)dS_y. \tag{2.36}$$

Integrando (2.36) desde 0 hasta t obtenemos

$$u(x,t) = u(x,0) + \int_0^t \int_\Omega J(x-y)[u(y,s)-u(x,s)]dyds+$$

$$(-\ln(T-t)+\ln(T))\int_{\partial\Omega} G(x-y)g(y)dS_Y.$$

Dividiendo ésta última ecuación por $-\ln(T-t)$, la podemos escribir como

$$\begin{aligned} &-\frac{u(x,t)}{\ln(T-t)} - \int_{\partial\Omega} G(x-y)g(y)dS_y \\ &= -\frac{u(x,0)}{\ln(T-t)} + \frac{1}{-\ln(T-t)}\int_0^t \int_\Omega J(x-y)[u(y,s)-u(x,s)]dyds \\ &\quad + \frac{\ln(T)}{-\ln(T-t)}\int_{\partial\Omega} G(x-y)g(y)dS_Y. \end{aligned} \tag{2.37}$$

Ahora bien, para $x \in \Omega_0$, por (2.9) $u(x,t) \leq -K_1 \ln((T-t))$, entonces obtenemos la siguiente estimativa para (2.37)

$$\begin{aligned} &\left| -\frac{u(x,t)}{\ln((T-t))} - \int_{\partial\Omega} G(x,y)h(y)dS_y \right| \leq \\ &\frac{u(x,0)}{-\ln(T-t)} + \frac{2K_1|\Omega|||J||_{L^\infty(\mathbb{R}^N)}\int_0^t \ln(T-r)dr}{-\ln(T-t)} \\ &+ \frac{\ln(T)|\partial\Omega|\,||G||_{L^\infty(\mathbb{R}^N)}||g||_{L^\infty(\partial\Omega)}}{-\ln(T-t)}. \end{aligned} \tag{2.38}$$

Si tenemos en cuenta que

$$\int_0^t \ln((T-r))dr = T(\ln T - 1) - (T-t)[\ln(T-t) - 1],$$

y usamos el hecho que

$$\lim_{t\to T^-} \frac{T-t}{-\ln(T-t)} = 0,$$

entonces de (2.38) se obtiene

$$\frac{u(x,t)}{-\ln(T-t)} \to \int_{\partial\Omega} G(x,y)g(y)dS_y, \tag{2.39}$$

uniformemente en Ω_0 (y por lo tanto en B_1) cuando $t \to T^-$.

De otra parte, si $x \in \Omega_1$, como G es de soporte compacto en la bola unitaria y $y \in \partial\Omega$ entonces (2.1) se convierte en (2.10). Integrando (2.10) de 0 a t se obtiene

$$u(x,t) = u(x,0) + \int_0^t \int_\Omega J(x-y)[u(y,s) - u(x,s)]dyds. \tag{2.40}$$

Ahora, para $\alpha = 1$, sabemos por el Lema 3.2 que si $x \in \Omega_0$ (en particular para $x \in \Omega_1$) entonces $u(x,t) \le -K_1 \ln(T-t)$. Usando éste hecho, obtenemos la siguiente acotación para (2.40)

$$|u(x,t)| \le u(x,0) + 2K_1||J||_{L^\infty(\mathbb{R}^N)}|\Omega| \int_0^t \ln(T-r)dr.$$

Si tenemos en cuenta que $\lim_{t\to T^-}(T-t)(\ln(T-t)) = 0$ entonces podemos concluir que u es acotado en Ω_1. Luego por (2.39) se obtiene que u explota en B_1 y en éste caso

$$\frac{1}{-\ln(T-t)} u(x,t) \to \tilde{w_1}, \tag{2.41}$$

uniformemente en B_1 cuando $t \to T^-$, donde

$$\tilde{w_1} = \int_{\partial\Omega} G(x,y)g(y)dS_y. \tag{2.42}$$

Hemos demostrado la siguiente proposición:

Proposicion 3. *Sea u una solución de (2.1), y sea w_1 como en (2.33) y $\tilde{w_1}$ como en (2.42). Si $1 \le \alpha < 2$ entonces u explota en B_1. En éste caso, si $1 < \alpha < 2$ entonces*

$$(T-t)^{\alpha-1} u(x,t) \to w_1, \tag{2.43}$$

uniformemente B_1 cuando $t \to T^-$, y si $\alpha = 1$, entonces

$$\frac{1}{-\ln(T-t)} u(x,t) \to \tilde{w_1}, \tag{2.44}$$

uniformemente en B_1 cuando $t \to T^-$.

2.3.2. Caso $2 \leq \alpha < 3$

2.3.2.1. $2 < \alpha < 3$

Como en el caso anterior, supongamos primero que $2 < \alpha < 3$. Si $x \in \Omega_0$, procedemos exactamente como en el caso $1 < \alpha < 2$ con la sustitucion

$$v_1(x,s) = (T-t)^{\alpha-1}u(x,t)$$

$$s = -\ln(T-t),$$

para concluir que u explota en B_1 con el perfil de explosion dado por (2.34). De otro lado, si $x \in \Omega_1$ entonces consideremos el cambio de variable

$$\begin{aligned} v_2(x,s) &= (T-t)^{\alpha-2}u(x,t), \\ s &= -\ln(T-t). \end{aligned} \tag{2.45}$$

En éste caso tenemos

$$\begin{aligned} &\frac{d}{ds}v_2(x,s) = \frac{d}{dt}v_2(x,s)\frac{dt}{ds} \\ &= e^{-s}\{-(\alpha-2)(T-t)^{\alpha-3}u(x,t)\} + e^{-s}\{(T-t)^{\alpha-2}u_t(x,t)\}. \end{aligned}$$

Ahora bien, usando (2.1) y teniendo en cuenta (2.45), de ésta última ecuación obtenemos

$$\begin{aligned} (v_2)_s(x,s) = e^{-s}&\int_\Omega J(x-y)[v_2(y,s)-v_2(x,s)]dy \\ &+\frac{e^{-s}}{(T-t)^2}\int_{\partial\Omega} G(x-y)g(y)dS_y - \frac{e^{-s}(\alpha-1)(T-t)^{\alpha-2}u(x,t)}{T-t}. \end{aligned}$$

Teniendo en mente la primera expresión en (2.45) y la segunda en (2.27), obtenemos que usando las nuevas variables, (2.1) se convierte en

$$\begin{aligned} (v_2)_s(x,s) = e^{-s}&\int_\Omega J(x-y)[v_2(y,s)-v_2(x,s)]dy \\ &+\frac{1}{T-t}\int_{\partial\Omega} G(x-y)g(y)dS_y - (\alpha-2)v_2(x,s). \end{aligned} \tag{2.46}$$

Como $x \in \Omega_1$, sabemos que $\displaystyle\int_{\partial\Omega} G(x-y)g(y)dS_y = 0$, y por lo tanto (2.46) se reduce a

$$(v_2)_s(x,s) = e^{-s}\int_\Omega J(x-y)[v_2(y,s)-v_2(x,s)]dy - (\alpha-2)v_2(x,s). \tag{2.47}$$

Ahora, usando el hecho que $\Omega = \Omega_1 \cup B_1$ y que

$$v_2(x,s) = (T-t)^{-1} v_1(x,s) = e^s v_1(x,s), \tag{2.48}$$

entonces (2.47) puede escribirse como

$$\begin{aligned} &(v_2)_s(x,s) + (\alpha-2) v_2(x,s) \\ &= e^{-s} \int_{\Omega_1} J(x-y)[v_2(y,s) - v_2(x,s)]dy \\ &\quad + \int_{B_1} J(x-y) v_1(y,s)dy - v_1(x,s) \int_{B_1} J(x-y)dy. \end{aligned} \tag{2.49}$$

Multiplicando ambos lados de (2.49) por $e^{(\alpha-2)s}$ se obtiene

$$\begin{aligned} d(v_2(x,s)e^{(\alpha-2)s}) &= e^{(\alpha-3)s} \int_{\Omega_1} J(x-y)[v_2(y,s) - v_2(x,s)dy \\ +e^{(\alpha-2)s} \int_{B_1} & J(x-y) v_1(y,s)dy - e^{(\alpha-2)s} \int_{B_1} J(x-y) v_1(x,s)dy. \end{aligned} \tag{2.50}$$

Integrando (2.50) desde 0 a s obtenemos

$$\begin{aligned} v_2(x,r)e^{(\alpha-2)r}\Big|_0^s &= \int_0^s e^{(\alpha-3)r} \int_{\Omega_1} J(x-y)[v_2(y,r) - v_2(x,r)]dydr \\ &+ \int_0^s e^{(\alpha-2)r} \int_{B_1} J(x-y) v_1(y,r)dydr \\ &- \int_0^s e^{(\alpha-2)r} \int_{B_1} J(x-y) v_1(x,r)dydr. \end{aligned} \tag{2.51}$$

Ahora, si multiplicamos (2.51) por $e^{-(\alpha-2)s}$, después de reorganizar términos, de (2.51) se obtiene

$$\begin{aligned} &v_2(x,r) - e^{-(\alpha-2)s} \int_0^s e^{(\alpha-2)r} \int_{B_1} J(x-y) v_1(y,r)dydr \\ &\le e^{-(\alpha-2)s} v_2(x,0) + e^{-(\alpha-2)s} \int_0^s e^{(\alpha-3)r} \int_{\Omega_1} J(x-y)[v_2(y,r) - v_2(x,r)]dydr. \end{aligned} \tag{2.52}$$

Por (2.48) sabemos que $v_2(x,s) = e^s v_1(x,s)$, y de (2.31) (para $x \in \Omega_1$) se tiene $|v_1| \le C(e^{-s} + e^{-(\alpha-1)s})$, entonces

$$|v_2(x,s)| \le (1 + e^{-(\alpha-2)s}).$$

Como estamos considerando $2 < \alpha < 3$ o en forma equivalente $0 < \alpha - 2 < 1$ entonces $e^{-(\alpha-2)s} < 1$, así que finalmente

$$v_2(x,s) \leq 2C.$$

Usando ésta cota para v_2 obtenemos la siguiente estimativa para (2.52):

$$\begin{aligned}
&\left| v_2(x,s) - e^{-(\alpha-2)s} \int_0^s e^{(\alpha-2)r} \int_{B_1} J(x-y) v_1(y,r) dy dr \right| \\
&\leq \left| e^{-(\alpha-2)s} v_2(x,0) \right. \\
&\qquad \left. + e^{-(\alpha-2)s} \int_0^s e^{(\alpha-3)r} \int_{\Omega_1} J(x-y)[v_2(y,r) - v_2(x,s)] dy dr \right| \\
&\leq e^{-(\alpha-2)s} v_2(x,0) \\
&\qquad + 4C|\Omega_1| ||J||_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} e^{-(\alpha-2)s} \left(\int_0^s e^{(\alpha-3)r} dr \right) \\
&= e^{-(\alpha-2)s} v_2(x,0) \\
&\qquad + 4C|\Omega_1| ||J||_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} e^{-(\alpha-2)s} \left(\frac{1}{\alpha-3} e^{(\alpha-3)r} \Big|_0^s \right) \\
&= e^{-(\alpha-2)s} v_2(x,0) \\
&\qquad + \frac{4C|\Omega_1| ||J||_{L^\infty(\mathbb{R}^N)}}{\alpha-3} \left(e^{-s} - e^{-(\alpha-2)s} \right) \\
&\leq e^{-(\alpha-2)s} v_2(x,0) \\
&\qquad + \frac{4C|\Omega_1| ||J||_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} e^{-s}}{\alpha-3} \\
&= C_6 (e^{-s} + e^{-(\alpha-2)s}),
\end{aligned} \tag{2.53}$$

donde

$$C_6 = \text{máx}\{v_2(x,0), \frac{4C|\Omega_1| ||J||_{L^\infty(\mathbb{R}^N)}}{\alpha-3}\}.$$

De otro lado, sabemos por (2.31) que la expresión

$$v_1(x,s) - \frac{1}{\alpha-1} \int_{\partial\Omega} G(x-y) g(y) dS_y, \tag{2.54}$$

se encuentra acotada por $C(e^{-s} + e^{-(\alpha-1)s})$ cuando $t \to T^-$ $(s \to \infty)$, y dado que $2 < \alpha < 3$ entonces $C(e^{-s} + e^{-(\alpha-1)s}) < C(e^{-s} + e^{-(\alpha-2)s})$. Multiplicando (2.54) por $J(x-y)$, integrando sobre B_1 y dividiendo por $\alpha-2$ y usando la observación inmediatamente anterior, obtenemos la siguiente estimativa:

$$
\begin{aligned}
&\left|\frac{1}{\alpha-2}\int_{B_1} J(x-y)v_1(y,s)dy - \frac{1}{\alpha-2}\int_{B_1} J(x-y)\frac{1}{\alpha-1}\int_{\partial\Omega} G(x-y)g(y)dS_y\, dy\right| \\
&=\left|\frac{1}{\alpha-2}\int_{B_1} J(x-y)[v_1(y,s) - \frac{1}{\alpha-1}\int_{\partial\Omega} G(x-y)g(y)dS_y]dy\right| \\
&\leq \frac{1}{\alpha-2}2C|B_1|||J||_{L^\infty(\mathbb{R}^N)}(e^{-s}+e^{-(\alpha-1)s}) \\
&\leq C_7(e^{-s}+e^{-(\alpha-2)s}),
\end{aligned}
\tag{2.55}
$$

con $C_7 = \dfrac{1}{\alpha-2}2C|B_1|||J||_{L^\infty(\mathbb{R}^N)}$.

De otra parte, podemos notar que

$$
\begin{aligned}
&\left|\frac{1}{\alpha-2}\int_{B_1} J(x-y)v_1(y,s)dy - e^{-(\alpha-2)s}\int_0^s e^{(\alpha-2)r}\int_{B_1} J(x-y)v_1(y,r)dydr\right| \\
&\leq \frac{1}{\alpha-2}|B_1|||J||_{L^\infty(\mathbb{R}^N)}2Ce^{-s} \\
&\qquad +\frac{1}{\alpha-2}|B_1|||J||_{L^\infty(\mathbb{R}^N)}2Ce^{-s}\left(1-e^{-(\alpha-2)s}\right) \\
&\leq \frac{1}{\alpha-2}|B_1|||J||_{L^\infty(\mathbb{R}^N)}2Ce^{-s} + \frac{1}{\alpha-2}|B_1|||J||_{L^\infty(\mathbb{R}^N)}2Ce^{-s} \\
&= C_8e^{-s},
\end{aligned}
\tag{2.56}
$$

donde $C_8 = \dfrac{1}{\alpha-2}4|B_1|||J||_{L^\infty(\mathbb{R}^N)}C$.

Por otra parte, usando (2.55) y (2.56) tenemos

$$
\begin{aligned}
&\left|\frac{1}{\alpha-2}\int_{B_1} J(x-y)\frac{1}{\alpha-1}\int_{\partial\Omega} G(x-y)g(y)dS_y\,dy \right.\\
&\qquad \left. -e^{-(\alpha-2)s}\int_0^s e^{(\alpha-2)r}\int_{B_1} J(x-y)v_1(y,r)dydr\right|\\
\le&\left|\frac{1}{\alpha-2}\int_{B_1} J(x-y)\frac{1}{\alpha-1}\int_{\partial\Omega} G(x-y)g(y)dS_y\,dy - \frac{1}{\alpha-2}\int_{B_1} J(x-y)v_1(y,s)dy\right|\\
&\quad +\left|\frac{1}{\alpha-2}\int_{B_1} J(x-y)v_1(y,s)dy - e^{-(\alpha-2)s}\int_0^s e^{(\alpha-2)r}\int_{B_1} J(x-y)v_1(y,r)dydr\right|\\
\le&\, C_7(e^{-s}+e^{-(\alpha-2)s}) + C_8e^{-s}\\
\le&\, C_9(e^{-s}+e^{-(\alpha-2)s}),
\end{aligned}
\tag{2.57}
$$

con $C_9 = C_7 + C_8$. Finalmente, por (2.53), y (2.57) obtenemos la siguiente estimativa

$$
\begin{aligned}
&\left|v_2(x,s) - \frac{1}{\alpha-2}\int_{B_1} J(x-y)\frac{1}{\alpha-1}\int_{\partial\Omega} G(x-y)g(y)dS_y\,dy\right|\\
\le&\left|v_2(x,s) - e^{-(\alpha-2)s}\int_0^s e^{(\alpha-2)r}\int_{B_1} J(x-y)v_1(y,r)dydr\right|\\
&\quad +\left|e^{-(\alpha-2)s}\int_0^s e^{(\alpha-2)r}\int_{B_1} J(x-y)v_1(y,r)dydr - \right.\\
&\left.\frac{1}{\alpha-2}\int_{B_1} J(x-y)\frac{1}{\alpha-1}\int_{\partial\Omega} G(x-y)g(y)dS_y\,dy\right|\\
\le&\, C_{10}(e^{-s}+e^{-(\alpha-2)s}),
\end{aligned}
\tag{2.58}
$$

con $C_{10} = C_6 + C_9$. De (2.58) se desprende entonces que

$$
v_2(x,s) \to \frac{1}{\alpha-2}\int_{B_1} J(x-y)\frac{1}{\alpha-1}\int_{\partial\Omega} G(y-z)g(z)dS_z\,dy
$$

uniformemente en Ω_1 (y por tanto en B_2) cuando $t \to T^-$. En forma equivalente, si definimos

$$
\begin{aligned}
w_2(x) &= \frac{1}{\alpha-2}\frac{1}{\alpha-1}\int_{B_1} J(x-y)\int_{\partial\Omega} G(y-z)g(z)dS_z\,dy,\\
&= \frac{1}{\alpha-2}\int_{B_1} J(x-y)w_1(y)dy
\end{aligned}
\tag{2.59}
$$

donde w_1 es dado por (2.33) podemos decir que si $2 < \alpha < 3$ entonces

$$
(T-t)^{\alpha-2}u(x,t) \to w_2(x) \tag{2.60}
$$

uniformemente en B_2 cuando $t \to T^-$.

De otro lado, para $x \in \Omega_2$, como $y \in B_1$ entonces $|x-y| > 1$ y por tanto, usando que el soporte de J es la bola unitaria, entonces $J(x-y) = 0$ así que $w_2(x) = 0$. Como estamos considerando $2 < \alpha < 3$, es decir, $0 < \alpha - 2 < 1$, se obtiene de (2.58)

$$|v_2(x,s)| \leq 2C_{10}e^{-(\alpha-2)s}, \tag{2.61}$$

es decir,

$$(T-t)^{(\alpha-2)}u(x,t) \leq 2C_{10}e^{-(\alpha-2)s},$$

de donde

$$u(x,t) \leq 2C_{10}. \tag{2.62}$$

Hemos usado el hecho que de (2.27) se desprende que

$$\frac{e^{-(\alpha-2)s}}{(T-t)^{\alpha-2}} = 1.$$

Por lo tanto, u es acotada en Ω_2. De (2.60) se deduce que u explota en B_2.

2.3.2.2. $\alpha = 2$

Para el caso $\alpha = 2$, procedemos realizando el cambio de variable

$$\begin{aligned} v_1(x,s) &= (T-t)u(x,t), \\ s &= -\ln(T-t). \end{aligned} \tag{2.63}$$

Notemos que $\dfrac{dt}{ds} = e^{-s}$, así que

$$\frac{dv_1}{ds} = \frac{dv_1}{dt}\frac{dt}{ds} = e^{-s}\frac{dv_1}{dt}$$

de donde

$$(v_1(x,s))_s = e^{-s}[-u(x,t) + (T-t)u_t(x,t)]. \tag{2.64}$$

Usando (2.64), entonces (2.1) toma la forma

$$(v_1)_s(x,s) = e^{-s}\int_\Omega J(x-y)[v_1(y,s)-v_1(x,s)]dy + \int_{\partial\Omega} G(x-y)g(y)dS_y - v_1(x,s). \tag{2.65}$$

Hemos usado que $v_1(x,s) = e^{-s}u(x,t)$. Multiplicando (2.65) por e^s y reorganizando términos, obtenemos

$$e^s(v_1)_s(x,s) + e^s v_1(x,s) = \int_\Omega J(x-y)[v_1(y,s)-v_1(x,s)]dy + e^s\int_{\partial\Omega} G(x-y)g(y)dS_y,$$

o de manera equivalente

$$d(e^s(v_1)(x,s)) = \int_\Omega J(x-y)[v_1(y,s)-v_1(x,s)]dy + e^s\int_{\partial\Omega} G(x-y)g(y)dS_y. \tag{2.66}$$

Integrando (2.66) de 0 a s se obtiene

$$v_1(x,r)e^r\Big|_0^s = \int_0^s\int_\Omega J(x-y)[v_1(y,r)-v_1(x,r)]dydr + (e^s-1)\int_{\partial\Omega} G(x-y)g(y)dS_y.$$

Multiplicando ésta última ecuación por e^{-s} llegamos a

$$\begin{aligned} v_1(x,s) &= e^{-s}v_1(x,0) + e^{-s}\int_0^s\int_\Omega J(x-y)[v_1(y,r)-v_1(x,r)]dydr \\ &+ \int_{\partial\Omega} G(x-y)g(y)dS_y - e^{-s}\int_{\partial\Omega} G(x-y)g(y)dS_y, \end{aligned} \tag{2.67}$$

así que de (2.67) obtenemos

$$\begin{aligned} &v_1(x,s) - \int_{\partial\Omega} G(x-y)g(y)dS_y \\ &\leq e^{-s}v_1(x,0) + e^{-s}\int_0^s\int_\Omega J(x-y)[v_1(y,r)-v_1(x,r)]dydr. \end{aligned} \tag{2.68}$$

Ahora bien, para el caso $\alpha = 2$, sabemos por la sección anterior Lemma (8) que existe una constante K tal que

$$u(x,t) \leq \frac{K}{T-t},$$

para $x \in \Omega_0$. Se desprende entonces que en el caso $x \in \Omega_0$, $v_1(x,s) = (T-t)u(x,t) \leq K$. Usando éste hecho, obtenemos la siguiente estimativa para (2.68):

$$\begin{aligned} &\left|v_1(x,s) - \int_{\partial\Omega} G(x-y)g(y)dS_y\right| \leq \\ &e^{-s}\{v_1(x,0) + 2K|\Omega|||J||_{L\infty(\mathbb{R}^N)}\int_0^s dr\} \leq \\ &e^{-s}\{v_1(x,0) + 2K|\Omega|||J||_{L\infty(\mathbb{R}^N)}(s)\} \leq \\ &e^{-s}v_1(x,0) + se^{-s}2K|\Omega|||J||_{L\infty(\mathbb{R}^N)}. \end{aligned} \tag{2.69}$$

Si $C_2 = \text{máx}\{v_1(x,0),\, 2K|\Omega|||J||_{L\infty(\mathbb{R}^N)}\}$, entonces,

$$\left|v_1(x,s) - \int_{\partial\Omega} G(x-y)g(y)dS_y\right| \leq C_2(se^{-s}+e^{-s}). \tag{2.70}$$

Por lo tanto, para el caso $\alpha = 2$, de (2.70) concluímos que

$$(T-t)u(x,t) \to \int_{\partial\Omega} G(x-y)g(y)dS_y = \tilde{w}_1, \tag{2.71}$$

uniformemente en Ω_0 (y por tanto en B_1) cuando $t \to T^-$.

Por otra parte, si $x \in \Omega_1$, se tiene $\displaystyle\int_{\partial\Omega} G(x-y)g(y)dS_y = 0$, por tanto, de (2.70) obtenemos

$$\Big|v_1(x,s)\Big| \leq C_2(se^{-s} + e^{-s}),$$

es decir

$$u(x,t) \leq \frac{1}{T-t} C_2(se^{-s} + e^{-s}) = C_2(s+1).$$

Hemos usado el hecho que $(T-t) = e^{-s}$. Por lo tanto, ésta última ecuación no asegura la acotación de u en Ω_1. Sin embargo, para $\alpha = 2$ y $x \in \Omega_1$ tenemos que (2.1) toma la forma

$$\begin{aligned} u_t(x,t) = &\int_{\Omega_1} J(x-y)[u(y,t) - u(x,t)]dy \\ &+ \int_{B_1} J(x-y)u(y,t)dy - \int_{B_1} J(x-y)u(x,t)dy. \end{aligned}$$

Integrando ésta última ecuación de 0 a t y reorganizando términos obtenemos

$$u(x,t) - \int_0^t \int_{B_1} J(x-y)u(y,r)dydr = u(x,0) + I_1 + I_2, \tag{2.72}$$

con

$$I_1 = \int_0^t \int_{\Omega_1} J(x-y)[u(y,r) - u(x,r)]dydr,$$

y

$$I_2 = -\int_0^t \int_{B_1} J(x-y)u(x,r)dydr.$$

Nuevamente por el Lema (8), si $x \in \Omega_1$ ($\alpha = 2$) se tiene $u(x,t) \leq -K_2 \ln(T-t)$. Entonces

$$|I_1| \leq 2K_2||J||_{L^\infty(\mathbb{R}^N)}|\Omega_1|\Big(T(\ln T - 1) - (T-t)(\ln(T-t) - 1)\Big),$$

se concluye que

$$\left|\frac{I_1}{\ln(T-t)}\right| \to 0, \tag{2.73}$$

uniformemente en Ω_1 cuando $t \to T^-$. En una forma semejante, se tiene

$$|I_2| \leq K_2 ||J||_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} |B_1| \Big(T(\ln T - 1) - (T-t)(\ln(T-t) - 1) \Big),$$

y por tanto

$$\left| \frac{I_2}{\ln(T-t)} \right| \to 0, \tag{2.74}$$

uniformemente en Ω_1 cuando $t \to T^-$. Por lo tanto,

$$-\frac{1}{\ln(T-t)} \int_0^t \int_{B_1} J(x-y)u(y,r)dydr \to$$
$$\int_{B_1} J(x-y) \int_{\partial\Omega} G(x-y)g(y)dS_y dy \frac{1}{-\ln(T-t)} \int_0^t \frac{1}{T-r} dr.$$

Como

$$\frac{1}{-\ln(T-t)} \int_0^t \frac{1}{T-r} dr \to 1$$

cuando $t \to T^-$, se concluye finalmente que

$$\begin{aligned} -\frac{1}{\ln(T-t)} \int_0^t \int_{B_1} J(x-y)u(y,r)dydr \to \\ \int_{B_1} J(x-y) \int_{\partial\Omega} G(x-y)g(y)dS_y dy, \end{aligned} \tag{2.75}$$

uniformemente en Ω_1 cuando $t \to T^-$. Así que multiplicando (2.72) por $\frac{1}{-\ln(T-t)}$, y usando (2.73), (2.74) y (2.75) obtenemos

$$\frac{u(x,t)}{-\ln(T-t)} \to \int_{B_1} J(x-y) \int_{\partial\Omega} G(x-y)g(y)dS_y dy, \tag{2.76}$$

uniformemente en Ω_1 cuando $t \to T^-$. En forma equivalente

$$\frac{u(x,t)}{-\ln(T-t)} \to \tilde{w}_2, \tag{2.77}$$

donde

$$\tilde{w}_2 = \int_{B_1} J(x-y) \int_{\partial\Omega} G(x-y)g(y)dS_y dy. \tag{2.78}$$

Por otro lado, es fácil ver que u es acotado en Ω_2. En efecto, sea $x \in \Omega_2$. Por el Lema 8 existe una constante K_2 (caso $\alpha = 2$) tal que si $x \in \Omega_1$ (en particular en Ω_2) entonces $u(x,t) \leq -K_2 \ln(T-t)$. Además, en este caso

$$u_t(x,t) = \int_\Omega J(x-y)[u(y,t) - u(x,t)]dy,$$

de donde, integrando ésta última ecuación de 0 a t se deriva

$$u(x,t) = u(x,0) + \int_0^t \int_\Omega J(x-y)[u(y,s) - u(x,s)]dyds.$$

Se obtiene de esta manera

$$u(x,t) \leq u(x,0) - K_2|\Omega|||J||_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} \int_0^t \ln(T-s)ds.$$

Por lo tanto, usando nuevamente el hecho que $\lim_{t\to T^-}(T-t)\ln(T-t) = 0$, se concluye que u es acotado en Ω_2. Por (2.76) se obtiene que u explota en B_2.

Se ha demostrado la siguiente proposición:

Proposicion 4. *Sea u una solución de (2.1). Si $2 < \alpha < 3$ entonces u explota en B_1 con el perfil de explosión dado por (2.34) y u explota en B_2 con el perfil de explosión dado por (2.60). Si $\alpha = 2$, entonces u explota en B_1 con el perfil de explosión dado por (2.71) y u explota en B_2 con el perfil (2.77).*

Ahora podemos dedicarnos al caso general.

2.3.3. Caso $i \leq \alpha < i+1$

2.3.3.1. $i < \alpha < i+1$

El objetivo en ésta sección es generalizar los resultados anteriores. Con éste fin, supongamos que $i \geq 1$ es un entero y que $i \leq \alpha < i+1$. Supongamos además que

$$\int_{B_1} \int_{\partial\Omega} G(x-y)g(y)dS_y dy \neq 0$$

y consideremos los siguientes conjuntos, algunos de los cuales ya han sido definidos en las subsecciones previas:

$$\begin{aligned}
w_1(x) &= \frac{1}{\alpha-1} \int_{\partial\Omega} G(x-y)g(y)dS_y, \\
w_2(x) &= \frac{1}{\alpha-2} \int_{B_1} J(x-y)w_1(y)dy, \\
w_3(x) &= \frac{1}{\alpha-3} \int_{B_2} J(x-y)w_2(y)dy, \qquad (2.79)\\
&\dots \\
w_i(x) &= \frac{1}{\alpha-i} \int_{B_{i-1}} J(x-y)w_{i-1}(y)dy.
\end{aligned}$$

Entonces tenemos la siguiente proposición:

Proposicion 5. *Sea $u(x,t)$ una solución de (2.1). Entonces, si $i < \alpha < i+1$ tenemos que u explota en*

$$\bigcup_{1}^{i} B_k$$

con el perfil de explosión dado por

$$(T-t)^{\alpha-i}u(x,t) \to w_i(x),$$

uniformemente en B_i cuando $t \to T^-$ y donde $w_i(x)$ es dado por (2.79).

Demostración. El caso $i = 1,2$ ha sido mostrado en las proposiciones (3) y (4). Supongamos que el resultado es cierto para $i-1$ con $i \geq 3$, y que se ha usado el cambio de variable

$$v_{i-1}(x,s) = (T-t)^{\alpha-(i-1)}u(x,t),$$

$$s = -\ln(T-t),$$

y por tanto se ha obtenido la estimativa

$$|v_{i-1} - w_{i-1}| \leq C_{i-1}(e^{-s} + e^{(\alpha-(i-1))s}). \tag{2.80}$$

Ahora consideramos el cambio de variable

$$(v_i)(x,s) = (T-t)^{\alpha-i}u(x,t),$$

$$s = -\ln(T-t).$$

Procediendo en forma a como se hizo en los casos anteriores ($i = 1,2$) si $x \in \Omega_{i-1}$, entonces (2.1) toma la forma

$$(v_i)_s(x,s) = e^{-s}\int_\Omega J(x-y)[v_i(y,s) - v_i(x,s)]dy - (\alpha - i)v_i(x,s). \tag{2.81}$$

Usando que $\Omega = \Omega_1 \cup B_1$ y que $v_i(x,s) = (T-t)^{-1}v_{i-1}(x,s) = e^s v_{i-1}(x,s)$ entonces (2.81) puede escribirse como

$$\begin{aligned}
&(v_i)_s(x,s) + (\alpha-i)v_i(x,s) \\
&= e^{-s}\int_{\Omega_1} J(x-y)[v_i(y,s) - v_i(x,s)dy \\
&\quad + \int_{B_1} J(x-y)v_{i-1}(y,s)dy - v_{i-1}(x,s)\int_{B_1} J(x-y)dy.
\end{aligned} \tag{2.82}$$

Multiplicando ambos lados de (2.82) por $e^{(\alpha-i)s}$ se obtiene

$$
\begin{aligned}
d(v_i(x,s)e^{(\alpha-i)s}) &= e^{(\alpha-(i+1))s}\int_{\Omega_1} J(x-y)[v_i(y,s)-v_i(x,s)]dy \\
&+e^{(\alpha-i)s}\int_{B_1} J(x-y)v_{i-1}(y,s)dy \\
&-e^{(\alpha-i)s}\int_{B_1} J(x-y)v_{i-1}(x,s)dy.
\end{aligned}
\tag{2.83}
$$

Integrando (2.83) desde 0 a s obtenemos

$$
\begin{aligned}
v_i(x,r)e^{(\alpha-i)r}\Big|_0^s &= \int_0^s e^{(\alpha-(i+1))r}\int_{\Omega_1} J(x-y)[v_i(y,r)-v_i(x,r)]dydr \\
&+\int_0^s e^{(\alpha-i)r}\int_{B_1} J(x-y)v_{i-1}(y,r)dydr \\
&-\int_0^s e^{(\alpha-i)s}\int_{B_1} J(x-y)v_{i-1}(x,r)dydr.
\end{aligned}
\tag{2.84}
$$

Multiplicando ambos lados de (2.84) por $e^{-(\alpha-i)s}$ y reorganizando términos, obtenemos

$$
\begin{aligned}
&\left|v_i(x,r) - e^{-(\alpha-i)s}\int_0^s e^{(\alpha-i)r}\int_{B_1} J(x-y)v_{i-1}(y,r)dydr\right| \\
&\le e^{-(\alpha-i)s}v_i(x,0) + e^{-(\alpha-i)s}\int_0^s e^{(\alpha-(i+1))r}\int_{\Omega_1} J(x-y)[v_i(y,r)-v_i(x,r)]dydr.
\end{aligned}
\tag{2.85}
$$

Notemos ahora que como $i < \alpha < i+1$ entonces por (2.80) $|v_{i-1}| \le 2C_{i-1}e^{-s}$, y dado que $v_i = e^s v_{i-1}$ se obtiene entonces $|v_i(x,s)| \le 2C_{i-1}$. Usando ésta cota para v_i tenemos entonces

$$
\begin{aligned}
&\left| v_i(x,s) - e^{-(\alpha-i)s} \int_0^s e^{(\alpha-i)r} \int_{B_1} J(x-y) v_{i-1}(y,r)\, dy dr \right| \\
\leq &\left| e^{-(\alpha-i)s} v_i(x,0) \right. \\
&\quad \left. + e^{-(\alpha-i)s} \int_0^s e^{(\alpha-(i+1))r} \int_{\Omega_1} J(x-y)[v_i(y,r) - v_i(x,s)]\, dy dr \right| \\
\leq &\; e^{-(\alpha-i)s} v_i(x,0) + 4C_{i-1}|\Omega_1| ||J||_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} e^{-(\alpha-i)s} \left(\int_0^s e^{(\alpha-(i+1))r} dr \right) \\
= &\; e^{-(\alpha-i)s} v_i(x,0) + 4C_{i-1}|\Omega_1| ||J||_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} e^{-(\alpha-i)s} \left(\frac{1}{\alpha-(i+1)} e^{(\alpha-(i+1))r} \Big|_0^s \right) \\
= &\; e^{-(\alpha-i)s} v_i(x,0) + \frac{4C_{i-1}|\Omega_1| ||J||_{L^\infty(\mathbb{R}^N)}}{\alpha-(i+1)} \left(e^{-s} - e^{-(\alpha-i)s} \right) \\
\leq &\; e^{-(\alpha-i)s} v_i(x,0) + \frac{4C_{i-1}|\Omega_1| ||J||_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} e^{-s}}{\alpha-(i+1)} \\
= &\; C_{6i}(e^{-s} + e^{-(\alpha-i)s}),
\end{aligned}
\tag{2.86}
$$

donde

$$C_{6i} = \max\{v_i(x,0), \frac{4C_{i-1}|\Omega_1| ||J||_{L^\infty(\mathbb{R}^N)}}{\alpha-(i+1)}\}.$$

Ahora bien, usando (2.80) tenemos

$$
\begin{aligned}
&\left| \frac{1}{\alpha-i} \int_{B_1} J(x-y) v_{i-1}(y,s)\, dy - \frac{1}{\alpha-i} \int_{B_1} J(x-y) w_{i-1}\, dy \right| \\
= &\left| \frac{1}{\alpha-i} \int_{B_1} J(x-y)[v_{i-1}(y,s) - w_{i-1}(y)]\, dy \right| \\
\leq &\; \frac{1}{\alpha-i} 2C_{i-1}|B_1| ||J||_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} (e^{-s} + e^{-(\alpha-(i-1))s}) \\
\leq &\; C_{7i}(e^{-s} + e^{-(\alpha-i)s}),
\end{aligned}
\tag{2.87}
$$

con

$$C_{7i} = \frac{1}{\alpha-i} 2C_{i-1}|B_1| ||J||_{L^\infty(\mathbb{R}^N)}.$$

Por otra parte,

$$\begin{aligned}
&\left|\frac{1}{\alpha-i}\int_{B_1} J(x-y)v_{i-1}(y,s)dy - e^{-(\alpha-i)s}\int_0^s e^{(\alpha-i)r}\int_{B_1} J(x-y)v_{i-1}(y,r)dydr\right| \\
&\leq \frac{1}{\alpha-i}|B_1|||J||_{L^\infty(\mathbb{R}^N)}2C_{i-1}e^{-s} + \frac{1}{\alpha-i}|B_1|||J||_{L^\infty(\mathbb{R}^N)}2C_{i-1}e^{-s}\left(1-e^{-(\alpha-i)s}\right) \\
&\leq \frac{1}{\alpha-i}|B_1|||J||_{L^\infty(\mathbb{R}^N)}2C_{i-1}e^{-s} + \frac{1}{\alpha-i}|B_1|||J||_{L^\infty(\mathbb{R}^N)}2C_{i-1}e^{-s} \\
&= C_{8i}e^{-s},
\end{aligned} \tag{2.88}$$

donde

$$C_{8i} = \frac{1}{\alpha-i}4|B_1|||J||_{L^\infty(\mathbb{R}^N)}C_{i-1}.$$

Por (2.87) y (2.88) tenemos

$$\begin{aligned}
&\left|\frac{1}{\alpha-i}\int_{B_1} J(x-y)w_{i-1}dy - e^{-(\alpha-i)s}\int_0^s e^{(\alpha-i)r}\int_{B_1} J(x-y)v_{i-1}(y,r)dydr\right| \\
&\leq\left|\frac{1}{\alpha-i}\int_{B_1} J(x-y)w_{i-1}dy - \frac{1}{\alpha-i}\int_{B_1} J(x-y)v_{i-1}(y,s)dy\right| \\
&\quad+\left|\frac{1}{\alpha-i}\int_{B_1} J(x-y)v_{i-1}(y,s)dy\right. \\
&\qquad\left.-e^{-(\alpha-i)s}\int_0^s e^{(\alpha-i)r}\int_{B_1} J(x-y)v_{i-1}(y,r)dydr\right| \\
&\leq C_{7i}(e^{-s}+e^{-(\alpha-i)s}) + C_{8i}e^{-s} \\
&\leq C_{9i}(e^{-s}+e^{-(\alpha-i)s}),
\end{aligned} \tag{2.89}$$

con $C_{9i} = C_{7i} + C_{8i}$. Finalmente, por (2.86), y (2.89) obtenemos la estimación

$$\begin{aligned}
&\left|v_i(x,s) - \frac{1}{\alpha-i}\int_{B_1} J(x-y)w_{i-1}dy\right| \\
&\leq\left|v_i(x,s) - e^{-(\alpha-i)s}\int_0^s e^{(\alpha-i)r}\int_{B_1} J(x-y)v_{i-1}(y,r)dydr\right| \\
&\quad+\left|e^{-(\alpha-i)s}\int_0^s e^{(\alpha-i)r}\int_{B_1} J(x-y)v_{i-1}(y,r)dydr\right. \\
&\qquad\left.-\frac{1}{\alpha-i}\int_{B_1} J(x-y)w_{i-1}dy\right| \\
&\leq c_{10i}(e^{-s}+e^{-(\alpha-i)s}),
\end{aligned} \tag{2.90}$$

con $C_{10i} = C_{6i} + C_{9i}$. Por lo tanto se obtiene que

$$(T-t)^{\alpha-i}u(x,t) \to w_i(x). \tag{2.91}$$

Por otra parte, para $x \in \Omega_i$, $(i \geq 2)$ y como $i < \alpha < i+1$, se obtiene de (2.90)

$$|v_i(x,s)| \leq 2C_{10i}e^{-(\alpha-i)s}, \tag{2.92}$$

con lo cual

$$u(x,t) \leq 2C_{10i}\frac{e^{-(\alpha-i)s}}{(T-t)^{\alpha-i}} = 2C_{10i}. \tag{2.93}$$

Es decir, u es acotada en Ω_i. Se deduce que u explota en B_i con el perfil de explosion dado por (2.91). Esto concluye la demostración de la proposición. □

2.3.3.2. $\alpha = i$

La idea es demostrar una proposición como la inmediatamente anterior pero teniendo en cuenta que ahora α es entero (≥ 1). Consideramos los místmos conjuntos definidos en (2.79)

Proposicion 6. *Sea $u(x,t)$ una solución de (2.1). Entonces, si $\alpha = i$ tenemos que u explota en*

$$\bigcup_{1}^{i} B_k$$

con el perfil de explosión dado por

$$(T-t)^{\alpha-i}u(x,t) \to w_i(x),$$

uniformemente en B_i cuando $t \to T^-$ para $i = 1,2,3,\ldots,\alpha-1$ y con el perfil de explosión dado por

$$\frac{1}{-\ln(T-t)}u(x,t) \to (\alpha-i)w_i(x), \tag{2.94}$$

uniformemente en B_i cuando $t \to T^-$ si $i = \alpha$, y donde los $w_i(x)$ son dados por (2.79) (tomando el valor $\alpha = i$).

Demostración. El resultado es cierto para $\alpha = 1,2$, acorde con las proposiciones (3) y (4). Queremos ver que es válido para $\alpha = i+1$ con $i \geq 2$. La demostración sigue los pasos que se hicieron en el caso $\alpha = 2$. Es decir, si $x \in B_1$ realizamos el cambio de variable

$$(v_1)(x,s) = (T-t)^{\alpha-1}u(x,t),$$

$$s = -\ln(T-t),$$

y siguiendo los pasos que se hicieron en el caso $\alpha = 2$ se llega a la conclusion de la proposición en éste caso. Para $x \in B_2$ se usa el cambio de variable

$$(v_2)(x,s) = (T-t)^{\alpha-2}u(x,t),$$

$$s = -\ln(T-t),$$

y asi sucesivamente. Si $x \in B_{i-1}$ entonces con el cambio de variable

$$(v_{i-1})(x,s) = (T-t)^2 u(x,t),$$

$$s = -\ln(T-t),$$

y siguiendo la técnica usada para el caso $\alpha = 2$, se obtiene la estimación

$$|v_{i-1}(x,s) - w_{i-1}(x)| \leq C_{i-1}e^{-s}. \tag{2.95}$$

Ahora bien, si $x \in B_i$, y consideramos la sustitución

$$\begin{aligned} (v_i)_s(x,s) &= (T-t)u(x,t), \\ s &= -\ln(T-t), \end{aligned} \tag{2.96}$$

nuevamente siguiendo los pasos que se realizaron para el caso $\alpha = 2$, se obtiene la estimativa

$$|v_i(x,s) - w_i(x)| \leq C_i[se^{-s} + e^{-s}], \tag{2.97}$$

de donde se concluye la primera parte de la proposición. Notemos además que para $x \in \Omega_i$

$$u(x,t) \leq C_i[s+1],$$

lo que no garantiza que u sea acotado en Ω_i. Sin embargo, para $x \in \Omega_i$ $(i \geq 1)$, (2.1) toma la forma

$$\begin{aligned} u_t(x,t) &= \int_{\Omega_1} J(x-y)[u(y,t) - u(x,t)]dy \\ &+ \int_{B_1} J(x-y)u(y,t)dy - \int_{B_1} J(x-y)u(x,t)dy, \end{aligned} \tag{2.98}$$

de donde integrando de 0 a t obtenemos

$$u(x,t) - \int_0^t \int_{B_1} J(x-y)u(y,r)dydr = u(x,0) + I_1^i + I_2^i, \tag{2.99}$$

donde

$$I_1^i = \int_0^t \int_{\Omega_1} J(x-y)[u(y,r) - u(x,r)]dydr,$$

y

$$I_2^i = -\int_0^t \int_{B_1} J(x-y)u(x,r)dydr.$$

Además, como $x \in \Omega_i$, por el Lema 8(con $\alpha = i+1$) se tiene $u(x,t) \le -K\ln(T-t)$ en Ω_i, luego, usando éste hecho se obtiene

$$|I_1^i| \le 2K_{|}|J||_{L\infty(\mathbb{R}^N)}|\Omega_1|\Big(T(\ln T - 1) - (T-t)(\ln(T-t)-1)\Big),$$

de donde podemos concluir

$$\left|\frac{I_1^i}{\ln(T-t)}\right| \to 0, \tag{2.100}$$

uniformemente en Ω_i cuando $t \to T^-$. En forma semejante, se tiene

$$\left|\frac{I_2^i}{\ln(T-t)}\right| \to 0, \tag{2.101}$$

uniformemente en Ω_i cuando $t \to T^-$. Tenemos entonces

$$\begin{aligned} -\frac{1}{\ln(T-t)}\int_0^t \int_{B_1} J(x-y)u(y,r)dydr \to \\ \int_{B_1} J(x-y)w_i(x)dy \frac{1}{-\ln(T-t)}\int_0^t \frac{1}{T-r}dr. \end{aligned} \tag{2.102}$$

Como $\displaystyle\frac{1}{-\ln(T-t)}\int_0^t \frac{1}{T-r}dr \to 1$ cuando $t \to T$, se concluye finalmente que

$$-\frac{1}{\ln(T-t)}\int_0^t \int_{B_1} J(x-y)u(y,r)dydr \to \int_{B_1} J(x-y)w_i(y)dy, \tag{2.103}$$

uniformemente en Ω_i cuando $t \to T$.

Multiplicando (2.99) por $-\dfrac{1}{\ln(T-t)}$, usando (2.100), (2.101) y (2.103) obtenemos

$$-\frac{u(x,t)}{\ln(T-t)} \to \int_{B_1} J(x-y)w_i(y)dy, \tag{2.104}$$

uniformemente en Ω_i cuando $t \to T^-$ (por lo tanto en B_{i+1}). Es decir

$$\frac{1}{-\ln(T-t)}u(x,t) \to w_{i+1}, \tag{2.105}$$

uniformemente en B_{i+1} cuando $t \to T^-$. Notemos finalmente que para $x \in \Omega_{i+1}$

$$u_t(x,t) = \int_\Omega J(x-y)[u(y,t) - u(x,t)]dy.$$

Integrando esta ecuación respecto de 0 a t, se obtiene

$$u(x,t) = u(x,0) + \int_0^t \int_\Omega J(x-y)[u(y,t) - u(x,t)]dyds,$$

y teniendo en cuenta que por el Lema 8 $u(x,t) \leq -K\ln(T-t)$ en Ω_i (y por tanto en Ω_{i+1}) entonces

$$u(x,t) \leq u(x,0) - K_|\Omega|||J||_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} \int_0^t \ln(T-s)ds.$$

Por lo tanto, u es acotado en Ω_{i+1}, y u explota en B_{i+1}, con el comportamiento asintótico dado por (2.105). $\square$

CAPÍTULO 3

Problema de difusión no-local con frontera de Neumann (II)

3.1. Introducción

En éste capítulo, trataremos con el problema de difusión no local descrito por la ecuación

$$\begin{cases} u_t(x,t) = (J * u(x,t)) - u(x,t) + \displaystyle\int_{\partial\Omega} G(x-y) g(u(y,t)) dS_y \ , \ (x,t) \in \overline{\Omega} \times (0,T), \\ u(x,0) = u_0(x) \qquad x \in \overline{\Omega}. \end{cases} \tag{3.1}$$

Como en capítulos anteriores, Ω es un dominio suave conexo y acotado de $\mathbb{R}^N$. El operador $J * u - u$ el operador de difusión no local ya usado antes donde $J * u(x,t)$ es la convolución definida por

$$(J * u(x,t)) = \int_{\mathbb{R}^N} J(x-y) u(y,t) dy.$$

Salvo que se diga lo contrario, a lo largo del presente capítulo siempre asumiremos que la función g satisface las siguientes condiciones:

1. (C1): $g : \mathbb{R} \longrightarrow [0,\infty)$ una función localmente Lipchitz con constante de Lipchitz k_g.
2. (C2): g creciente, convexa y tal que $\displaystyle\int^{\infty} \frac{1}{g(s)} ds < \infty$.

El dato inicial $u_0(x) \in C^1(\overline{\Omega})$ no negativo. De igual manera,

$$J, G : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N,$$

funciones de clase $C^1(\Omega)$, de soporte compacto la bola unitaria $B_1(x)$ de $\mathbb{R}^N$, positivas en B_1, radialmente simétricas

$$J(-x) = J(x), \quad G(-x) = G(x),$$

de integral unitaria

$$\int_{\mathbb{R}^N} J(x)dx = 1,$$

y estrictamente decrecientes.

En el modelo descrito por (3.1), si $u(x,t)$ es considerada como la densidad en un punto x en un instante t, y $J(x-y)$ es considerada como la distribución de probabilidad de saltar de la posición y a la posición x, entonces $J * u$ es la razón a la cual los individuos están arrivando a la posición x de todos los otros lugares, y

$$-u(x,t) = -\int_{\mathbb{R}^N} J(y-x)u(x,t)dy,$$

es la razón a la cual los individuos están dejando la posición x para viajar a todos los demás lugares. Ésta consideración en ausencia de fuentes externas, conduce a que la densidad u satisface la ecuación

$$u_t(x,t) = (J * u(x,t)) - u(x,t),$$

que representa la primera parte de la ecuación (3.1) (esto refleja el hecho que los individuos sólo pueden saltar dentro de Ω, ningún individuo puede saltar del interior de Ω al exterior de Ω y viceversa). En la frontera de Ω, se impone la condición

$$\int_{\partial\Omega} G(x-y)g(u(y,t))dS_y \qquad g(s) > 0,$$

que representa la cantidad de individuos que entran desde $\partial\Omega$.

Por una solución de (3.1), entenderemos una función $u \in C[\overline{\Omega} \times [0, t_0]]$ la cual satisface (3.1) en casi todas partes.

En éste capítulo, primero probaremos existencia y unicidad de soluciones para (3.1) y probaremos la validez de un principio de comparación para las soluciones de dicho problema. Posteriormente, analizaremos el fenómeno de explosión en tiempo finito para las soluciones de (3.1), y estudiaremos las tasas de explosión para el caso particular en que $g(u) = u^p$.

3.2. Existencia y unicidad de soluciones

Como en el capítulo 1, utilizaremos el Teorema de punto fijo de Banach para mostrar existencia y unicidad de soluciones para la ecuación (3.1). Para tal efecto, tomemos $t_0 > 0$ fijo, y consideraremos el espacio de Banach

$$X_{t_0} = C([0, t_0]; C(\overline{\Omega})) = C([0, t_0] \times \overline{\Omega}),$$

con la norma

$$|||w||| = \max_{0 \le t \le t_0} ||w(\cdot, t)||_\infty = \max_{0 \le t \le t_0} \max_{x \in \overline{\Omega}} |w(x,t)| = \max_{(x,t) \in \overline{\Omega} \times [0, t_0]} |w(x,t)|.$$

Intercambiando el papel de u por w y el de t por s en (3.1), se tiene

$$w_s(x,s) = \int_\Omega J(x-y)[w(y,s) - w(x,s)]dy + \int_{\partial\Omega} G(x-y) g(w(y,s)) dS_y. \tag{3.2}$$

Integrando (3.2) de 0 a t obtenemos

$$\begin{aligned} w(x,t) = \quad & w_0(x) + \int_0^t \int_\Omega J(x-y)[w(y,s) - w(x,s)]\, dy\, ds \\ & + \int_0^t \int_{\partial\Omega} G(x-y) g(w(y,s))\, dS_y\, ds. \end{aligned} \tag{3.3}$$

Definimos el operador $D : X_{t_0} \longrightarrow X_{t_0}$ por

$$\begin{aligned} D_{w_0,g}(w(x,t)) = \quad & w_0(x) + \int_0^t \int_\Omega J(x-y)[w(y,s) - w(x,s)]\, dy\, ds \\ & + \int_0^t \int_{\partial\Omega} G(x-y) g(w(y,s))\, dS_y\, ds. \end{aligned} \tag{3.4}$$

Con respecto al operador D, tenemos el siguiente Lema:

Lema 9. *El operador $D_{w_0,g}$ dado en (3.4) esta bien definido como aplicación de X_{t_0} sobre X_{t_0}.*

Demostración. Sea $0 < t_1 < t_2 \le t_0$, $w \in X_{t_0}$, $||J||_\infty = K_1$ y $||G||_\infty = K_2$. Tenemos las siguientes estimativas:

$$
\begin{aligned}
&\Big| D_{w_0,g}[w(x,t_1)] - D_{w_0,g}[w(x,t_2)] \Big| \\
=& \Big| \int_{t_1}^{t_2} \int_{\Omega} J(x-y)[w(y,s)-w(x,s)]dyds \\
&\quad + \int_{t_1}^{t_2} \int_{\partial\Omega} G(x-y)g(w(y,s))dS_y ds \Big| \\
\leq & \int_{t_1}^{t_2} \int_{\Omega} |J(x-y)||w(y,s)-w(x,s)|dyds \\
&\quad + \int_{t_1}^{t_2} \int_{\partial\Omega} |G(x-y)||g(w(y,s))|dyds \\
\leq & \, (t_2-t_1)K_1|\Omega| \, |||w(y,s)-w(x,s)||| + (t_2-t_1)K_2 \int_{\partial\Omega} |g(w(y,s))|dS_y \\
\leq & \, (t_2-t_1) \max\{K_1|\Omega|, \tilde{K}K_2|\partial\Omega|\} \Big\{ 2|||w||| + g(|||w|||) \Big\}.
\end{aligned}
$$

De lo anterior se desprende que el operador $D_{w_0,g}$ es continuo en $t \in (0, t_0]$. La continuidad en el caso $t = 0$, se obtiene como sigue:

$$
\begin{aligned}
&\Big| D_{w_0,g}[w(x,t)] - w_0(x) \Big| \\
=& \Big| \int_{0}^{t} \int_{\Omega} J(x-y)[w(y,s)-w(x,s)]dyds \\
&\quad + \int_{0}^{t} \int_{\partial\Omega} G(x-y)g(w(y,s))dS_y ds \Big| \leq \\
&(t) \max\{1, K_1|\Omega|, \tilde{K}K_2|\partial\Omega|\} \Big\{ 2|||w||| + g(|||w|||) \Big\}.
\end{aligned}
$$

Así que el operador es contínuo en $t \in [0, t_0]$. Notemos además que como función de x, el operador es continuo. Esto se desprende del hecho que la convolución en el espacio con la función J es uniformemente continua. De esta manera, $D_{w_0,g}$ aplica X_{t_0} sobre X_{t_0}. □

Teorema 5. *Para todo $u_0 \in C(\overline{\Omega})$, existe una única solución $u \in C[[0,t_0); C(\overline{\Omega})]$ del problema (3.1). Más aún,* la masa *total en Ω satisface*

$$
\int_{\Omega} u(y,t)dy = \int_{\Omega} u_0(y)dy + \int_0^t \int_{\Omega} \int_{\partial\Omega} G(x-y)g(u(y,s))dS_y \, dx \, ds. \tag{3.5}
$$

Demostración. Sea

$$\begin{aligned} D_{w_0,g}(w(x,t)) = w_0(x) &+ \int_0^t \int_\Omega J(x-y)[w(y,s) - w(x,s)]\, dy\, ds \\ &+ \int_0^t \int_{\partial\Omega} G(x-y) g(w(y,s))\, dS_y\, ds, \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} D_{w_0,g}(z(x,t)) = w_0(x) &+ \int_0^t \int_\Omega J(x-y)[z(y,s) - z(x,s)]\, dy\, ds \\ &+ \int_0^t \int_{\partial\Omega} G(x-y) g(z(y,s))\, dS_y\, ds, \end{aligned}$$

entonces

$$\begin{aligned} &\Big| D_{w_0,g}[w(x,t)] - D_{w_0,g}[z(x,t)] \Big| \\ &\leq \Big| \int_0^t \int_\Omega J(x-y)[w(y,s) - z(y,s)]\, dy\, ds \Big| \\ &\qquad + \Big| \int_0^t \int_\Omega J(x-y)[w(x,s) - z(x,s)]\, dy\, ds \Big| \\ &\qquad + \Big| \int_0^t \int_{\partial\Omega} G(x-y)[g(w(y,s)) - g(z(y,s))]\, dS_y\, ds \Big| \\ &\leq t_0 C_1 ||w - z||_\infty + t_0 C_2 ||w - z||_\infty + t_0 C_3 ||w - z||_\infty \\ &\leq C t_0 ||w - z||_\infty, \end{aligned} \tag{3.6}$$

donde $C_1 = C_2 = K_1|\Omega|$, $C_3 = K_2|\partial\Omega| k_g$, siendo k_g la constante de Lipchitz de g, y $C = \text{máx}\{C_1, C_3\}$. De la estimativa anterior se desprende que

$$\Big|\Big|\Big| D_{w_0,g}[w(x,t)] - D_{w_0,g}[z(x,t)] \Big|\Big|\Big| \leq C t_0 |||w - z|||.$$

Tomando t_0 de tal manera que $t_0 C \leq \dfrac{1}{2}$, entonces la existencia y unicidad se sigue del Teorema de punto fijo de Banach.

Finalmente, si u es una solución del problema (3.1), sustituyendo w por u en (3.3), obtenemos

$$\begin{aligned} u(x,t) - u_0(x) = &\int_0^t \int_\Omega J(x-y)[u(y,s) - u(x,s)] dy\, ds \\ &+ \int_0^t \int_{\partial\Omega} G(x-y) g(u(y,s)) dS_y\, ds. \end{aligned} \tag{3.7}$$

Integrando (3.7) en x se tiene

$$\begin{aligned}\int_\Omega u(x,t)dx - \int_\Omega u_0(x)dx = & \int_\Omega\int_0^t\int_\Omega J(x-y)u(y,s)dy\,ds\,dx \\ & - \int_\Omega\int_0^t\int_\Omega J(x-y)u(x,s)dy\,ds\,dx \\ & + \int_0^t\int_\Omega\int_{\partial\Omega} G(x-y)g(u(y,s))dS_y\,ds\,dx.\end{aligned}$$

Usando el Teorema de Fubini, obtenemos

$$\int_\Omega u(x,t)dx - \int_\Omega u_0(x)dx = \int_0^t\int_\Omega\int_{\partial\Omega} G(x-y)g(u(y,s))dS_y\,dx\,ds, \tag{3.8}$$

de donde se desprende (3.5). El Teorema queda demostrado. □

Como una consecuencia del Teorema anterior tenemos:

Corolario 9. *Sean u, w soluciones de (3.1), con datos iniciales $u_0 \in C(\overline{\Omega})$, $w_0 \in C(\overline{\Omega}$ y condición de frontera g. Entonces, para todo $t_0 > 0$, tal que $Ct_0 \le \frac{1}{2}$, donde C es dado como en el Teorema anterior, existe una constante $\tilde{C}$ que depende de t_0 tal que*

$$\max_{0\le t\le t_0} ||u(\cdot,t) - w(\cdot,t)||_\infty \quad \le \tilde{C}||u(\cdot,0) - w(\cdot,0)||_\infty.$$

Demostración. En efecto, por hipótesis,

$$\begin{aligned}u(x,t) = u_0(x) + & \int_0^t\int_\Omega J(x-y)[u(y,s)-u(x,s)]dy\,ds \\ & + \int_0^t\int_{\partial\Omega} G(x-y)g(u(y,s))dS_y\,ds,\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}w(x,t) = w_0(x) + & \int_0^t\int_\Omega J(x-y)[w(y,s)-w(x,s)]dy\,ds \\ & + \int_0^t\int_{\partial\Omega} G(x-y)g(w(y,s))dS_y\,ds.\end{aligned}$$

Procediendo como en el Teorema 5 tenemos

$$|u(x,t) - w(x,t)| \le ||u_0(x,0) - w_0(x,0)||_\infty + Ct_0|u-w|.$$

Podemos concluir

$$(1 - Ct_0)|u(\cdot,t) - w(\cdot,t)| \le ||u(\cdot,0) - w(\cdot,0)||_\infty,$$

de donde se obtiene el resultado tomando $\tilde{C} = \frac{1}{1-Ct_0}$. □

Corolario 10. *Sea $u \in X_{t_0}$. Entonces, u es solución de (3.1) si y solo si*

$$\begin{aligned} u(x,t) &= e^{-A(x)t}u_0(x) + \int_0^t \int_\Omega e^{-A(x)(t-s)} J(x-y)u(y,s)dy\, ds \\ &+ \int_0^t \int_{\partial\Omega} e^{-A(x)(t-s)} G(x-y)g(u(y,s))dS_y\, ds, \end{aligned} \tag{3.9}$$

donde

$$A(x) = \int_\Omega J(x-y)dy.$$

Demostración. La ecuación (3.2) con u en vez de w, toma la forma

$$u_s(x,s) = \int_\Omega J(x-y)[u(y,s) - u(x,s)]dy + \int_{\partial\Omega} G(x-y)g(u(y,s))dS_y.$$

Multiplicando ambos lados por $e^{A(x)s}$ y reescribiendo esta última ecuación, se obtiene

$$\begin{aligned} & u_s(x,s)e^{A(x)s} + \int_\Omega e^{A(x)s} J(x-y)u(x,s)dy \\ &= \int_\Omega e^{A(x)s} J(x-y)u(y,s)dy + \int_{\partial\Omega} e^{A(x)s} G(x-y)g(u(y,s))dS_y. \end{aligned}$$

En forma equivalente,

$$\begin{aligned} \tfrac{d}{ds}(u(x,s)e^{A(x)s}) &= \int_\Omega e^{A(x)s} J(x-y)[u(y,s)dy \\ &+ \int_{\partial\Omega} e^{A(x)s} G(x-y)g(u(y,s))dS_y. \end{aligned}$$

Integrando esta última ecuación de 0 a t se obtiene

$$\begin{aligned} u(x,t)e^{A(x)t} - u_0(x) &= \int_0^t \int_\Omega e^{A(x)s} J(x-y)[u(y,s)dy\, ds \\ &+ \int_0^t \int_{\partial\Omega} e^{A(x)s} G(x-y)g(u(y,s))dS_y\, ds, \end{aligned}$$

de donde se deriva (3.9). $\square$

Nota 2. *Notece que dadas las características de J existe una constante α tal que $A(x) \geq \alpha > 0$, para cada $x \in \overline{\Omega}$.*

Nota 3. *(Sobre la existencia y unicidad local). Consideremos el problema (3.1), con g localmente Lipchitz y $u_0 \in C(\overline{\Omega})$. Entonces existe $t_1 > 0$ tal que existe una única solución $u(x,t) \in C(\overline{\Omega} \times [0,t_1])$.*

En efecto, sea

$$M = ||u_0||_{L^\infty} + r,$$

con $r > 0$ algún r y g Lipchitz en $[-M, M]$. Sea $\tilde{g}$ la extensión de g a todo $\mathbb{R}$ de tal forma que g siga siendo Lipchitz en $\mathbb{R}$. Consideremos entonces el problema

$$\begin{cases} u_t(x,t) = (J(x) * u(x,t)) - u(x,t) + \displaystyle\int_{\partial\Omega} G(x-y)\tilde{g}(u(x,t))dS_y & (x,t) \in \overline{\Omega} \times (0,T), \\ u(x,0) = u_0(x) \qquad x \in \overline{\Omega}. \end{cases}$$

Por el Teorema 5, existe una única solución $\tilde{u}(x,t) \in C(\overline{\Omega} \times [0,t_0])$ de éste problema ($\tilde{u}(x,0) = u_0(x)$). Además

$$-M \leq |||\tilde{u}(x,t)||| \leq M,$$

para $t \in [0,t_1]$, algún $t_1 < t_0$. Se tiene además

$$\tilde{g}(\tilde{u}) = g(\tilde{u})$$

para $(x,t) \in \overline{\Omega} \times [0,t_1]$. Por lo tanto, tomando como $u = \tilde{u}$ tenemos la solución local buscada al problema inicial. La unicidad se obtiene de la unicidad de $\tilde{u}$.

Bajo condiciones de regularidad sobre los núcleos y el dato inicial, se obtienen soluciones más regulares. Es decir:

Corolario 11. *1. Si $u \in C[\Omega \times (0,T)]$, $u_0 \in C^k(\overline{\Omega})$, con $0 \leq k \leq \infty$, $g \in L^\infty(\mathbb{R})$, y $J, G \in W^{k,1}(\mathbb{R}^N)$, entonces $u(\cdot,t) \in C^k(\Omega \times [0,T])$.*

2. Si $J, G \in L^\infty(\mathbb{R}^N)$, $u_0 \in C^\infty(\Omega)$ y $g \in L^\infty(\mathbb{R})$, entonces $u \in L^\infty[\Omega \times (0,T)]$.

Demostración. Los resultados son consecuencia del Corolario 10, ecuación (3.9). □

3.3. Un principio de comparación

El siguiente resultado es un principio de comparacion para las soluciones de (3.1).

Corolario 12. *Sea u, v, soluciones de (3.1), con datos iniciales $u_0, v_0 \in C^1(\Omega)$, y dato de frontera g (creciente) respectivamente. Supóngase que $u_0 > v_0$. Entonces $u > v$* c.t.p.

Demostración. Por el Corolario 10 tenemos que

$$\begin{aligned} u(x,t) = e^{-A(x)t}u_0(x) &+ \int_0^t \int_\Omega e^{-A(x)(t-s)} J(x-y)u(y,s)dy\,ds \\ &+ \int_0^t \int_{\partial\Omega} e^{-A(x)(t-s)} G(x-y)g(u(y,s))dS_y\,ds, \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} v(x,t) = e^{-A(x)t}v_0(x) &+ \int_0^t \int_\Omega e^{-A(x)(t-s)} J(x-y)v(y,s)dy\,ds \\ &+ \int_0^t \int_{\partial\Omega} e^{-A(x)(t-s)} G(x-y)g(v(y,s))dS_y\,ds. \end{aligned}$$

Sea $w(x,t) = u(x,t) - v(x,t)$. Por lo tanto $w(x,0) = u(x,0) - v(x,0) = u_0 - v_0 = w_0 > 0$. Si el resultado fuera falso, existen $\tilde{x}$ y $\tilde{t}$ tales que $w(\tilde{x},\tilde{t}) = 0$ y $w(y,s) > 0$ para $(y,s) \in \overline{\Omega} \times [0,\tilde{t})$. Entonces

$$\begin{aligned} 0 = w(\tilde{x},\tilde{t}) &= e^{-A(x)t}w_0(x) \\ &+ \int_0^{\tilde{t}} \int_\Omega e^{-A(\tilde{x})(\tilde{t}-s)} J(\tilde{x}-y)w(y,s)dy\,ds \\ &+ \int_0^{\tilde{t}} \int_{\partial\Omega} e^{-A(\tilde{x})(\tilde{t}-s)} G(\tilde{x}-y)g'(\xi)(w(y,s))dS_y\,ds \\ &> 0, \end{aligned}$$

de donde se obtiene una contradicción. Luego debe ser $w > 0$ para todo $(x,t) \in \overline{\Omega} \times [0,t_0)$. □

3.4. Análisis de explosión con flujo $g(u(y,t))$

El principal resultado de ésta sección es dado por el siguiente Lemma:

Lema 10. *Sea $u(x,t)$ una solución de (3.1) con dato inicial u_0 tal que*

$$\int_{\partial\Omega} u_0 dS_x > 0.$$

Entonces u explota en tiempo finito.

Demostración. Supongamos que $u(x,t)$ es finito para todo t. Definimos la función $M(t)$ para $t > 0$ por

$$M(t) = \int_{\partial\Omega} u(x,t)dS_x.$$

En particular, se tiene que $M(t)$ está bien definido y es finito para todo $t > 0$. Por un lado tenemos:

$$
\begin{aligned}
M'(t) = &\int_{\partial\Omega}\int_{\Omega} J(x-y)u(y,t)dy\, dS_x - \int_{\partial\Omega}\int_{\Omega} J(x-y)u(x,t)dy\, dS_x \\
&+ \int_{\partial\Omega}\int_{\partial\Omega} G(x-y)g((y,t))dS_y dS_x, \\
&\geq - \int_{\partial\Omega}\left(\int_{\Omega} J(x-y)dy\right)u(x,t)dS_x \\
&+ \int_{\partial\Omega}\left(\int_{\partial\Omega} G(x-y)dS_x\right)g(u(y,t))dS_y.
\end{aligned}
$$

En la primera desigualdad, hemos usado el hecho que

$$\int_{\partial\Omega}\int_{\Omega} J(x-y)u(y,t)dy\, dS_x \geq 0.$$

Ahora, teniendo en cuenta que

$$-\int_{\Omega} J(x-y)dy \geq -1$$

y que por las características de G, existe $c > 0$ tal que

$$\int_{\partial\Omega} G(x-y)dS_x \geq c,$$

entonces, usando la convexidad de g, la desigualdad anterior se transforma en

$$
\begin{aligned}
M'(t) \geq &- \int_{\partial\Omega} u(x,t)dS_x \\
&+ c\int_{\partial\Omega} g(u(y,t))dS_y \\
&\geq -M(t) + \frac{c}{K} g(K\, M(t)),
\end{aligned}
$$

para alguna constante $K > 0$. En la última desigualdad de la ecuación anterior, hemos usado la desigualdad de Jensen. Sin pérdida de generalidad, la desigualdad anterior la podemos escribir como

$$M'(t) \geq -M(t) + cg(M(t)). \tag{3.10}$$

Ahora bien, como $g > 0$ es convexa, creciente y satisface la condición $C2$, la anterior desigualdad implica que $M(t) \to \infty$ en tiempo finito si para algún tiempo t_0, $M(t_0)$ es suficientemente grande (u_0 suficientemente grande). Ahora, supongamos que $\tilde{u}(x,t)$ es una solución de (3.1) con dato $g = 0$ y con la condición inicial $\tilde{u}_0 = u(x,t_0)$ para algún t_0 fijo.

Del capítulo anterior sabemos que $\tilde{u}$ converge uniformemente en Ω ala solución estacionaria, y ésta al valor promedio del dato inicial, así que tenemos

$$\tilde{u}(x,t) \to \frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega \tilde{u}_0\, dx.$$

Es claro que $u(x,t)$ es una supersolución del problema satisfecho por $\tilde{u}$ si $u_0 \geq \tilde{u}_0$, luego existe un $t_1 > 0$ tal que para $t \geq t_1$,

$$u(x,t) \geq \frac{1}{2|\Omega|}\int_\Omega \tilde{u}_0 dx = c_0 > 0.$$

Definamos

$$m(t) = \int_\Omega u(x,t)dx.$$

Para $t > t_1$ se obtiene

$$m(t) \geq m(t_1) + \tilde{k}(t - t_1)g(c_0).$$

Procediendo de la misma manera que antes, pero ahora consideramos $\tilde{u}$ con dato inicial $\tilde{u}_0 = u(x,t_2)$ para $t_2 > t_1$. Si $u_0 > u(x,t_2)$, entonces podemos concluir que

$$u(x,t) \geq \frac{1}{2|\Omega|}m(t_2).$$

Ahora se obtiene

$$\begin{aligned} M(t) = \int_{\partial\Omega} u(x,t)dx \geq & \frac{|\partial\Omega|}{2|\Omega|}m(t_2) \\ & +C[m(t_1) + (t_2 - t_1)\tilde{k}g(c_0)], \end{aligned}$$

para t suficientemente grande. Es decir, si t es suficientemente grande, $M(t)$ es tan grande como queramos, y por tanto, como Ω es acotado, $u(x,t)$ es tan grande como se quiera, lo cual es una contradicción.

□

3.4.1. Análisis de explosión con flujo $u^p(y,t)$

Un caso particular del modelo anterior (3.1) es dado al tomar como función g la función u^p, obteniéndose de ésta manera el modelo siguiente:

$$\begin{cases} u_t(x,t) = \displaystyle\int_\Omega J(x-y)(u(y,t)-u(x,t))dy + \int_{\partial\Omega} G(x-y)u^p(y,t)dS_y, \\ u(x,0) = u_0(x), \end{cases} \tag{3.11}$$

con las mismas hipótesis sobre los núcleos y dato inicial dadas en el modelo (3.1). Consideramos aquí $u(y,t) \geq 0$, y $p > 0$.

Definicion 5. *Una función $v \in C'$ se dice es una supersolución de (3.11) si se cumple*

$$
\begin{aligned}
&v_t(x,t) \geq \int_{\Omega} J(x-y)(v(y,t)-v(x,t))dy + \int_{\partial\Omega} G(x-y)v^p(y,t)dS_y,\\
&v(x,0) \geq u_0(x).
\end{aligned}
$$

El primer resultado asociado a (3.11) es dado por el siguiente Lemma:

Lema 11. *Sea $u(x,t)$ una solución de (3.11). Entonces u explota en tiempo finito si y solo si $p > 1$.*

Demostración. Supongamos que para todo $t > 0$, u es acotada. Sea $p > 1$, y consideremos la función

$$M(t) = \int_{\partial\Omega} u(x,t)dS_x.$$

Entonces, la explosión se obtiene como caso particular del análisis de la sección inmediatamente anterior con $g(u) = u^p$.

Supongamos ahora $p \leq 1$, y sea

$$C = \max_{x\in\overline{\Omega}} \int_{\partial\Omega} G(x-y)dS_y.$$

Consideremos la función

$$v(x,t) = k_1\, e^{k_2\, t},$$

con $k_1 \geq \max_{x\in\overline{\Omega}}\{u_0(x), 1\}$, y $k_2 \geq C$. Entonces, v es una supersolución de (3.11). En efecto, cambiando u por v se obtiene

$$
\begin{aligned}
v_t(x,t) = &\int_{\Omega} J(x-y)(k_1\, e^{k_2\, t} - k_1\, e^{k_2\, t})dy\\
&+ \int_{\partial\Omega} G(x-y)k_1^p\, e^{p\, k_2\, t} dS_y,
\end{aligned}
$$

de donde se desprende que

$$k_1 k_2\, e^{k_2\, t} \geq k_1^p\, e^{p\, k_2\, t} \int_{\partial\Omega} G(x-y)dS_y.$$

La anterior desigualdad es clara, si observamos que bajo las condiciones sobre k_1 y k_2 y usando que $(1-p) > 0$, entonces tenemos

$$
\begin{aligned}
&k_1^{1-p} k_2 e^{k_2(1-p)t} - \int_{\partial\Omega} G(x-y)dS_y\\
&\geq k_1^{1-p} k_2 e^{k_2(1-p)t} - k_2 \geq 0.
\end{aligned}
$$

Luego, si u es solución de (3.11), por comparacion usando el Corolario 12 se tiene

$$u(x,t) \leq v(x,t) = k_1 \, e^{k_2 \, t} \quad \text{para todo } (x,t) \in \overline{\Omega} \times [0, t_0),$$

con lo cual, u esta definida y es acotada para $p \leq 1$.

Esto demuestra el Lema. □

3.4.2. Sobre la tasa de explosión de las soluciones de (3.11)

Supongamos que u explota en el tiempo T. Sea

$$\max_{x \in \overline{\Omega}} u(x,t) = u(y_0, t).$$

Entonces

$$\begin{aligned} u_t(y_0,t) &= \int_\Omega J(y_0 - y)[u(y,t) - u(y_0,t)]dy + \int_{\partial\Omega} G(y_0 - y) u^p(y,t) dS_y \\ &\leq u^p(y_0,t). \end{aligned} \tag{3.12}$$

Hemos usado el hecho que $[u(y,t) - u(y_0,t)] \leq 0$ y que $\displaystyle\int_{\partial\Omega} G(y_0 - y)dy \leq 1$. Definimos la función $f(t) = u(y_0,t)$. Entonces, de la desigualdad anterior obtenemos

$$\frac{f'(t)}{f^p(t)} \leq 1.$$

Integrando de t a T concluimos

$$\int_t^T \frac{f'(\xi)}{f^p(\xi)} d\xi \leq (T - t).$$

Con el cambio de variable $w = f(\xi)$ se obtiene

$$\int_{f(t)}^{f(T)} \frac{de}{w^p} \leq (T - t),$$

luego

$$\left. \frac{w^{-p+1}}{-p+1} \right|_{f(t)}^{f(T)} \leq (T - t).$$

Teniendo en cuenta que u explota en el tiempo T (es decir $f(T) = \infty$) y que $p > 1$ entonces

$$\frac{f(t)^{-p+1}}{p-1} \leq (T - t),$$

es decir

$$u(y_0, t) \geq (p-1)^{\frac{-1}{p-1}}(T-t)^{\frac{-1}{p-1}},$$

por lo tanto

$$\max_{x \in \overline{\Omega}} u(\cdot, t) \geq v(t).$$

Definimos

$$v(t) = (p-1)^{\frac{-1}{p-1}}(T-t)^{\frac{-1}{p-1}}.$$

Entonces, se tiene

$$v'(t) = v^p(t).$$

Usando el hecho que $\max_{\overline{\Omega}} \int_{\partial\Omega} G(x-y)dS_y \leq 1$ se obtiene que

$$v'(t) = v^p(t) \geq v^p(t) \int_{\partial\Omega} G(x-y)dS_y,$$

por lo tanto $v(t)$ es una supersolución de (3.11).

Ahora bien, si existiera $t_0 \in (0, T)$ tal que

$$\max_{x \in \Omega} u(\cdot, t) < v(t_0),$$

entonces hay muy cerca de T un $\widetilde{T} > T$ tal que

$$u(x, t_0) < (p-1)^{\frac{-1}{p-1}}(\widetilde{T} - t_0)^{\frac{-1}{p-1}}.$$

Si llamamos $\widetilde{v}(t) = (p-1)^{\frac{-1}{p-1}}(\widetilde{T}-t)^{\frac{-1}{p-1}}$, entonces $\widetilde{v}$ es una supersolución de (3.11) para todo $t \in [t_0, \widetilde{T})$ y tal que $\widetilde{v} < v$. Entonces como

$$u(x, t) < \widetilde{v} < v,$$

para todo $t \in (t_0, \widetilde{T})$, por la elección de $\tilde{T}$, $\tilde{v}$ no explotaría en T, luego esto no puede ocurrir pues hemos supuesto que u explota en T. Así que para todo $t \in [0, T)$

$$\max_{x \in \Omega} u(\cdot, t) > v(t),$$

y entonces

$$\max_{x \in \Omega} u(\cdot, t) \geq (p-1)^{\frac{-1}{p-1}}(T-t)^{\frac{-1}{p-1}}.$$

Se tiene el siguiente Lemma:

Lema 12. *Sea u una solución de (3.11) que explota en tiempo T. Entonces, existe una constante C_1 tal que*

$$\frac{C_1}{(T-t)^{\frac{1}{p-1}}} \leq \max_{x \in \overline{\Omega}} u(\cdot, t).$$

Demostración. Se ha mostrado que

$$\frac{1}{(p-1)^{\frac{1}{p-1}}(T-t)^{\frac{1}{p-1}}} \leq \max_{x\in\Omega} u(\cdot,t).$$

Sin embargo, la función

$$\frac{1}{(p-1)^{\frac{1}{p-1}}},$$

alcanza un mínimo positivo cuando $p = e+1$. Si denotamos éste mínimo por C_1 entonces tenemos

$$C_1 \leq \frac{1}{(p-1)^{\frac{1}{p-1}}},$$

para todo $p > 1$. Se concluye que para todo $p > 1$

$$\frac{C_1}{(T-t)^{\frac{1}{p-1}}} \leq \frac{1}{(p-1)^{\frac{1}{p-1}}(T-t)^{\frac{1}{p-1}}} \leq \max_{x\in\Omega} u(\cdot,t).$$

□

El siguiente resultado, nos brinda una desigualdad en sentido contrario a la obtenida en el Lemma 12. Más exactamente tenemos

Lema 13. *Sea u una solución de (3.11) que explota en tiempo T. Entonces existe una constante C_2 tal que*

$$\max_{x\in\Omega} u(\cdot,t) \leq \frac{C_2}{(T-t)^{\frac{1}{p-1}}}.$$

Demostración. Sea

$$M(t) = \int_{\partial\Omega} u(x,t)dS_x,$$

luego $\lim_{t\to T^-} M(t) = \infty$. Además, procediendo como en Lemma 11 podemos escribir

$$M'(t) \geq KM^p(t),$$

para $M(t_0)$ suficientemente grande y K constante. Entonces, integrando de t a T tenemos

$$\int_{M(T)}^{M(t)} \frac{dw}{w^p} \geq K(T-t),$$

de donde, usando que $\lim_{t\to T^-} M(t) = \infty$ y $p > 1$ se obtiene

$$M(t) \leq \frac{C}{(T-t)^{\frac{1}{p-1}}}, \tag{3.13}$$

siendo
$$C = \frac{1}{(K(p-1)^{\frac{1}{p-1}})}.$$

Ahora bien, sabemos que u es solución de (3.1) si y solo si

$$\begin{aligned} u(x,t) = e^{-A(x)t}u_0(x) &+ \int_0^t \int_\Omega e^{-A(x)(t-s)}J(x-y)u(y,s)dyds \\ &+ \int_0^t \int_{\partial\Omega} e^{-A(x)(t-s)}G(x-y)u^p(y,s)dS_y ds, \end{aligned} \tag{3.14}$$

donde
$$A(x) = \int_\Omega J(x-y)dy.$$

Para demostrar el Lemma, basta ver que $(T-t)^{\frac{1}{p-1}}u(x,t)$ es acotado. Con éste fin, sea $t_0 < T$ y definamos

$$m = \max_{(x,t)\in(\overline{\Omega}\times[0,t_0])} (T-t)^{\frac{1}{p-1}}u(x,t) = (T-t_1)^{\frac{1}{p-1}}u(x_1,t_1),$$

para algún $(x_1,t_1) \in \overline{\Omega}\times[0,t_0]$. Multiplicando ambos lados de (3.14) por $(T-t)^{\frac{1}{p-1}}$ y tomando el máximo en $\overline{\Omega}\times[0,t_0]$ se obtiene

$$\begin{aligned} m &\le C_1 + \int_0^{t_1} e^{-A(x_1)(t_1-s)} \int_\Omega J(x_1-y)mdyds \\ &\quad +(T-t_1)^{\frac{1}{p-1}} \int_0^{t_1} \int_{\partial\Omega} e^{-A(x_1)(t_1-s)}G(x_1-y)u^p(x_1,t_1)dS_y ds \\ &\le C_1 + (1-e^{-A(x_1)t_1})m \\ &\quad +(T-t_1)^{\frac{1}{p-1}} \int_0^{t_1} \int_{\partial\Omega} e^{-A(x_1)(t_1-s)}G(x_1-y)u^p(y,s)dS_y ds. \end{aligned}$$

Como $A(x) \ge \alpha > 0$ y $(t_1-s) > 0$ entonces $e^{-A(x_1)(t_1-s)} < 1$, y por lo tanto, de la desigualdad anterior obtenemos

$$e^{-A(x_1)t_1}m \le C_1 + (T-t_1)^{\frac{1}{p-1}} \int_0^{t_1} \int_{\partial\Omega} G(x_1-y)u^p(y,s)dS_y ds,$$

de donde

$$m \le e^{A(x_1)t_1}\Big(C_1 + (T-t)^{\frac{1}{p-1}} \int_0^{t_1} \int_{\partial\Omega} G(x_1-y)u^p(y,s)dS_y ds\Big).$$

Para concluir la prueba, basta ver finalmente que

$$(T-t_1)^{\frac{1}{p-1}}\int_0^{t_1}\int_{\partial\Omega}G(x-y)u^p(y,s)dS_y ds\leq K_2, \tag{3.15}$$

para alguna constante K_2, y para todo $x\in\overline{\Omega}$. Sea $x\in\partial\Omega$. Si (3.15) no fuera cierta, entonces existe una sucesión (x_n,t_n) con $x_n\in\partial\Omega$, con $t_n\to T$ tal que

$$(T-t_n)^{\frac{1}{p-1}}\int_0^{t_n}\int_{\partial\Omega}G(x_n-y)u^p(y,s)dS_y ds\to\infty.$$

Como $G>0$ y $G\in L^\infty$, lo anterior indica que

$$(T-t_n)^{\frac{1}{p-1}}\int_0^{t_n}\int_{\partial\Omega}u^p(y,s)dS_y ds\to\infty, \tag{3.16}$$

cuando $t_n\to T$. Por la compacidad de $\partial\Omega$, existe $x_0\in\partial\Omega$ tal que $x_n\to x_0$. En particular

$$(T-t_n)^{\frac{1}{p-1}}\int_0^{t_n}\int_{\partial\Omega\cap B(x_0,\frac{1}{2})}u^p(y,s)dS_y ds\to\infty.$$

Existe un punto $x_1\in\partial\Omega\cap B(x_0,\frac{1}{2})$ tal que para alguna (t_{n_k}) subsucesión de (t_n) se cumple

$$(T-t_{n_k})^{\frac{1}{p-1}}\int_0^{t_{n_k}}\int_{\partial\Omega\cap B(x_1,\frac{1}{4})}u^p(y,s)dS_y ds\to\infty,$$

cuando $t_n\to T$. Ahora bien, en particular la ecuación anterior implica que

$$(T-t_{n_k})^{\frac{1}{p-1}}\int_0^{t_{n_k}}\int_{\partial\Omega}G(\tilde{x}-y)u^p(y,s)dS_y ds\to\infty, \tag{3.17}$$

para todo $\tilde{x}\in(\partial\Omega\cap B(x_1,\frac{1}{4})\}$. Aquí hemos usado que $G(x-y)\leq c>0$ para $|x-y|\leq\frac{1}{2}$ y que u es positiva.

De otra parte, multiplicando(3.14) por $(T-t_{n_k})^{\frac{1}{p-1}}$ se obtiene

$$\begin{aligned}
&(T-t_{n_k})^{\frac{1}{p-1}}u(\tilde{x},t_{n_k})\\
&=(T-t_{n_k})^{\frac{1}{p-1}}\Bigg(e^{-A(\tilde{x})t_{n_k}}u_0(\tilde{x})+\int_0^{t_{n_k}}\int_\Omega e^{-A(\tilde{x})(t_{n_k}-s)}J(\tilde{x}-y)u(y,s)dyds\\
&\qquad+\int_0^{t_{n_k}}\int_{\partial\Omega}e^{-A(\tilde{x})(t_{n_k}-s)}G(\tilde{x}-y)u^p(y,s)dS_y ds\Bigg)\\
&\geq(T-t_{n_k})^{\frac{1}{p-1}}\int_0^{t_{n_k}}\int_{\partial\Omega}e^{-A(\tilde{x})(t_{n_k}-s)}G(\tilde{x}-y)u^p(y,s)dS_y ds.
\end{aligned}$$

Asi que

$$(T-t_{n_k})^{\frac{1}{p-1}}u(\tilde{x},t_{n_k}) \geq c(T-t_{n_k})^{\frac{1}{p-1}}\int_0^{t_{n_k}}\int_{\partial\Omega} G(\tilde{x}-y)u^p(y,s)dS_y ds.$$

En ésta última desigualdad hemos usado el hecho que existe $c>0$ tal que

$$c < e^{-A(\tilde{x})(t_{n_k}-s)} < 1.$$

Integrando en la frontera, obtenemos

$$\begin{aligned}(T-t_{n_k})^{\frac{1}{p-1}}M(t_{n_k}) &= (T-t_{n_k})^{\frac{1}{p-1}}\int_{\partial\Omega} u(\tilde{x},t_{n_k})dS_x \\ &\geq c(T-t_{n_k})^{\frac{1}{p-1}})\int_{\partial\Omega}\int_0^{t_{n_k}}\int_{\partial\Omega} G(\tilde{x}-y)u^p(y,s)dS_y ds dS_x,\end{aligned}$$

de donde se concluye entonces que $M(t_{n_k}) \to \infty$, lo cual contradice (3.13).

Como consecuencia de lo anterior, se cumple que para cualquier $x \in \partial\Omega$

$$(T-t)^{\frac{1}{p-1}}\int_0^t\int_{\partial\Omega\cap B(x,\frac{1}{4})} u^p(\xi,s)dS_\xi ds \leq K,$$

para alguna constante K. Por la compacidad de $\partial\Omega$, existen $x_1,\cdots,x_k$ tales las bolas de centro x_k y radio $\frac{1}{4}$ cubren $\partial\Omega$. Se concluye entonces que

$$(T-t)^{\frac{1}{p-1}}\int_0^t\int_{\partial\Omega} u^p(x,s)dS_x ds \leq \tilde{K}. \tag{3.18}$$

donde $\tilde{K}$ es el máximo de los K_k tales que

$$(T-t)^{\frac{1}{p-1}}\int_0^t\int_{\partial\Omega\cap B(x_k,\frac{1}{4})} u^p(\xi,s)dS_\xi ds \leq K_k.$$

Pero de (3.18) y dado que $G>0$ y $G \in L^\infty$, entonces (3.15) es cierto para todo $x \in \overline{\Omega}$.

Esto termina la demostración del Lemma. (Las constantes son independientes del t_0 escogido previamente para definir m). $\square$

3.4.3. Sobre los conjuntos de explosión de (3.11)

Finalizamos el presente capítulo, con un Teorema que nos permite identificar los conjuntos de explosion de de la solución u de (3.11). Con este fin, usamos los mismos conjuntos definidos en el capítulo 2 a saber:

$$\Omega_0 = \Omega, \quad B_0 = \partial\Omega,$$

$$B_i = \{x \in \Omega - \bigcup_{j<i} B_j \ / \ d(x, B_{i-1}) < 1\},$$

$$\Omega_i = \Omega_{i-1} - B_i.$$

Teorema 6. *Sea u una solución de (3.11) que explota en el tiempo T, y sea $i \geq 2$ un número entero . Entonces, si $p > 2$ u explota en B_1. Si $\frac{i+1}{i} < p \leq \frac{i}{i-1}$ entonces u explota en*

$$\bigcup_{k=1}^{k=i} B_k.$$

Demostración. Sea u una solución de (3.11) y sea C_2 como en el Lemma 13 tal que

$$|||u(x,t)||| \leq \frac{C_2}{(T-t)^{\frac{1}{p-1}}}.$$

En particular se tiene que

$$u^p(x,t) \leq \frac{\tilde{C}_2}{(T-t)^{\frac{p}{p-1}}}.$$

Consideremos el problema

$$\begin{cases} z_t(x,t) = \displaystyle\int_\Omega J(x-y)(z(y,t)-z(x,t))dy + \int_{\partial\Omega} G(x-y)\frac{\tilde{C}_2}{(T-t)^{\frac{p}{p-1}}}dS_y, \\ u(x,0) = u_0(x). \end{cases} \tag{3.19}$$

Notemos entonces que

$$\begin{aligned} & u_t(x,t) \\ & = \int_\Omega J(x-y)(u(y,t)-u(x,t))dy + \int_{\partial\Omega} G(x-y)u^p(y,t)dS_y \\ & \leq \int_\Omega J(x-y)(u(y,t)-u(x,t))dy + \int_{\partial\Omega} G(x-y)\frac{\tilde{C}_2}{(T-t)^{\frac{p}{p-1}}}dS_y. \end{aligned}$$

Como la condición inicial de (3.11) es la misma que la de (3.19) entonces se concluye que u es una subsolución de (3.19) así que $u(x,t) \leq z(x,t)$, siendo $z(x,t)$ la solución de (3.19). Si llamamos $B(u)$ el conjunto de explosion de u y $B(z)$ el conjunto de explosion de z, entonces se tiene que si $x \in B(u)$ entonces $x \in B(z)$. Así que

$$B(u) \subseteq B(z).$$

Ahora bien, sea C_1 como en el Lemma 12 tal que

$$\frac{C_1}{(T-t)^{\frac{1}{p-1}}} \leq ||u(\cdot,t)||.$$

En particular se obtiene

$$\frac{\tilde{C}_1}{(T-t)^{\frac{p}{p-1}}} \leq u^p(x,t).$$

Si consideramos el problema

$$\begin{cases} v_t(x,t) = \displaystyle\int_\Omega J(x-y)(v(y,t)-v(x,t))dy + \int_{\partial\Omega} G(x-y)\frac{\tilde{C}_1}{(T-t)^{\frac{p}{p-1}}} dS_y, \\ u(x,0) = u_0(x), \end{cases} \tag{3.20}$$

puede entonces observarse que

$$\begin{aligned} u_t(x,t) &= \int_\Omega J(x-y)(u(y,t)-u(x,t))dy + \int_{\partial\Omega} G(x-y)u^p(y,t)dS_y \\ &\geq \int_\Omega J(x-y)(u(y,t)-u(x,t))dy + \int_{\partial\Omega} G(x-y)\frac{\tilde{C}_1}{(T-t)^{\frac{p}{p-1}}} dS_y, \end{aligned}$$

y por lo tanto se obtiene que u es una supersolución de (3.20) y entonces $v(x,t) \leq u(x,t)$ siendo v la solución de (3.20). Luego, si $B(v)$ es el conjunto de explosion de v entonces se obtiene

$$B(v) \subseteq B(u).$$

Ahora bien, si llamamos $\alpha = \dfrac{p}{p-1}$ y consideramos el problema estudiado en el capítulo 2 con $g(y) = C$ siendo C una constante, obtenemos

$$\begin{aligned} &u_t(x,t) = \int_\Omega J(x-y)(u(y,t)-u(x,t))dy + \int_{\partial\Omega} G(x-y)\frac{C}{(T-t)^\alpha} dS_y, \\ &u(x,0) = u_0(x). \end{aligned} \tag{3.21}$$

De acuerdo a los resultados del capítulo 2, los conjuntos de explosion de (3.21) no dependen de la constante C, y por lo tanto los conjuntos de explosion $B(z)$ y $B(v)$ son iguales. Se obtiene entonces que

$$B(u) = B(z).$$

Usando los resultados del capítulo 2, obtenemos que si $p > 2$ entonces $1 < \alpha < 2$ y en éste caso el conjunto de explosion es B_1. Si $p = \frac{i}{i-1}$ entonces $\alpha = i$ y así el conjunto de explosion es

$$B(u) = \bigcup_{k=1}^{k=i} B_k.$$

Finalmente, si $\frac{i+1}{i} < p < \frac{i}{i-1}$ entonces $i < \alpha < i+1$ y por lo tanto

$$B(u) = \bigcup_{k=1}^{k=i} B_k.$$

Esto finaliza la prueba del Teorema. $\square$

Nota 4. *En el caso particular $\Omega = [-L, L]$ entonces las tasas de explosión (Lemas (12-13) se obtienen de una manera más sencilla. En efecto, sea $p > 1$, y notemos que en este caso, el problema (4.32) toma la forma*

$$\begin{cases} u_t(x,t) = \displaystyle\int_{-L}^{L} J(x-y)(u(y,t)-u(x,t))dy + G(x+L)u^p(-L,t) + G(x-L)u^p(L,t), \\ u(x,0) = u_0(x). \end{cases} \tag{3.22}$$

Es fácil observar que dada la simetría de J y G, si el dato inicial es simétrico ($u_0(x) = u_0(-x)$), entonces la solución u es simétrica, es decir, para todo t se tiene $u(x,t) = u(-x,t)$. En efecto, sea $w(x,t) = u(-x,t)$, entonces

$$\begin{aligned} w_t(x,t) &= u_t(-x,t) \\ &= \int_{-L}^{L} J(x+y)(u(y,t)-w(x,t))dy + G(x-L)w^p(L,t) + G(x+L)w^p(-L,t) \\ &= \int_{-L}^{L} J(x-y)(w(y,t)-w(x,t))dy + G(x-L)w^p(L,t) + G(x+L)w^p(-L,t), \end{aligned}$$

es decir, dado que el dato inicial es simétrico entonces w satisface (3.22). Con lo cual la solución u es simétrica y por lo tanto $u(-L,t) = u(L,t)$. El problema (3.22) se reduce a

$$\begin{cases} u_t(x,t) = \displaystyle\int_{-L}^{L} J(x-y)(u(y,t)-u(x,t))dy + (G(x+L)+G(x-L))u^p(-L,t). \\ u(x,0) = u_0(x), \end{cases} \tag{3.23}$$

.

Si suponemos que el dato inicial es estrictamente decreciente en $[-L, 0]$, entonces u es estrictamente decreciente en $[-L, 0]$. En efecto, si no fuera así, existen t_1, x_1, x_2 con $x_1 < x_2$, $x_1, x_2 \in (-L, 0)$ tales que $u(x_1,t_1) = u(x_2,t_1) = 0$ y $u(x_1,t) \le u(x_2,t)$ para todo t. Además tendríamos

$$0 \le u_t(x_2,t) - u_t(x_1,t) \le u(x_1,t) - u(x_2,t) \le 0,$$

de donde

$$u(x_1,t)-u(x_2,t)=0,$$

para todo t*. Pero esto no puede ocurrir, pues hemos supuesto que el dato inicial el estrictamente decreciente. Entonces debe ser* $u(x_1,t)>u(x_2,t)$*, para todo* t *y todo* $x_1<x_2$*. Sea entonces*

$$\max_{x\in[-L,L]} u(x,t)=u(-L,t),$$

entonces de (3.23) obtenemos

$$\begin{aligned} u_t(-L,t) &= \int_{-L}^{L} J(-L-y)(u(y,t)-u(-L,t))dy+(G(0)+G(-2L))u^p(-L,t) \\ &\leq Cu^p(-L,t). \end{aligned} \tag{3.24}$$

Hemos usado el hecho que $u(y,t)-u(-L,t)<0$*, y* $C=G(0)+G(-2L)$*. Definiendo* $f(t)=u(-L,t)$ *entonces*

$$\frac{f'(t)}{(f(t))^p}\leq C.$$

Sea T *el tiempo de explosion de la solución* u *de (3.23). Integrando de* t *a* T *obtenemos*

$$\int_t^T \frac{f'(t)}{(f(t))^p}dt\leq C(T-t),$$

de donde se desprende que existe una constante C_1 *tal que*

$$u(-L,t)\geq \frac{C_1}{(T-t)^{\frac{1}{p-1}}}.$$

De la misma manera, de (3.24) se tiene

$$\begin{aligned} u_t(-L,t) &\geq -\int_{-L}^{L} J(-L-y)u(-L,t)dy+(G(0)+G(-2L))u^p(-L,t) \\ &\geq -u(-L,t)dy+C_2u^p(-L,t), \end{aligned}$$

con $C_2=(G(0)+G(-2L))$*. Si como antes, hacemos* $f(t)=u(-L,t)$ *obtenemos*

$$f'(t)\geq -f(t)+C_2(f(t))^p.$$

Como $p>1$*, y* u *explota entonces*

$$f'(t)\geq \frac{C_2}{2}(f(t))^p,$$

si tomamos $u(-L,0)$ suficientemente grande. Integrando de t a T y procediendo como antes, podemos concluir que existe una constante $\tilde{C}_1$ tal que

$$u(-L,t) \leq \frac{\tilde{C}_1}{(T-t)^{\frac{1}{p-1}}}.$$

En definitiva, tenemos el siguiente Teorema sobre las tasas de explosión de las soluciones de (3.23):

Teorema 7. *Sea u una solución de (3.23) que explota en el tiempo T. Entonces existen constantes C_1, $\tilde{C}_1$ tales que*

$$\frac{C_1}{(T-t)^{\frac{1}{p-1}}} \leq ||u(\cdot,t)||_{L^\infty} \leq \frac{\tilde{C}_1}{(T-t)^{\frac{1}{p-1}}}.$$

Para el estudio de los conjuntos de explosion se procede de la misma manera que en la sección anterior.

CAPÍTULO 4

Sobre el problema discreto

4.1. Introducción

En el capítulo I, estudiamos el problema

$$
\begin{aligned}
&u_t(x,t) = \int_\Omega J(x-y)(u(y,t)-u(x,t))dy + \int_{\partial\Omega} G(x-y)g(y,t)dS_y,\\
&u(x,0) = u_0(x),
\end{aligned} \tag{4.1}
$$

que para el caso particular en que $\Omega = [-L, L]$ toma la forma

$$
\begin{aligned}
&u_t(x,t) = \int_{-L}^{L} J(x-y)(u(y,t)-u(x,t))dy + G(x+L)g(-L,t) + G(x-L)g(L,t),\\
&u(x,0) = u_0(x),
\end{aligned} \tag{4.2}
$$

en donde $J, G : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ son funciones no negativas, suaves, simétricas $J(z) = J(-z)$, $G(z) = G(-z)$, crecientes en $[-L, 0]$ y de soporte compacto en la bola unitaria con integrales unitarias, es decir $\int_{\mathbb{R}} J(x)dx = 1$, $\int_{\mathbb{R}} G(x)dx = 1$. Aquí g es una función dada regular. En el presente capítulo, estudiamos el problema discreto asociado a (4.2). Se presentarán resultados acerca de la existencia y unicidad de soluciones y veremos además que las soluciones satisfacen un principio de comparación. De la misma manera como en el capítulo 3, se obtendrán resultados acerca del perfil de explosión de las soluciones para el caso particular $g = u^p$. Veremos que el problema es consistente en el sentido que las soluciones del problema discreto convergen a las soluciones del respectivo problema continuo.

4.2. Discretización de (4.2)

La discretización del modelo (4.2) se realizará en la variable espacial x, de tal manera que la variable temporal t se mantendrá continua. Para tal fin, consideramos una descomposición uniforme del intervalo $[-L, L]$ en $2N$ partes iguales, para obtener $2N+1$ puntos de la forma $x_i = ih$, $-N \leq i \leq N$, siendo $h = \dfrac{L}{N} > 0$ el parámetro de discretización. En ésta descomposición, se observa entonces que $L = Nh$ y $-L = -Nh$. Usando la notación

$$u(x_i, t) = u_i(t),$$

y usando el hecho que

$$\int_{x_j}^{x_j+h} dx_j = h,$$

entonces el modelo discreto asociado a (4.2) toma la forma

$$\begin{aligned} u_i'(t) &= \sum_{j=-N}^{j=N} hJ(h(i-j))(u_j(t) - u_i(t)) + G(h(i+N))g_-(t) + G(h(i-N))g_+(t) \\ u_i(0) &= u_0(x_i) = u_0(ih), \end{aligned} \tag{4.3}$$

para $-N \leq i \leq N$, en donde, por simplicidad, se ha puesto $g_-(t)$ y $g_+(t)$ en vez de $g(-Nh, t)$ y $g(Nh, t)$ respectivamente y $u_0(x_i) > 0$.

4.2.1. Existencia y unicidad de soluciones para (4.3)

Teorema 8. *Consideremos* $(u_0)_i > 0$. *Entonces, existe una única solución de (4.3) en* $C([0, t_0); l_1^h)$.

Demostración. El problema (4.3) determina un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias ($U' = F(U)$). La existencia y unicidad de la solución son consecuencia de la teoría clásica para sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias, usando el hecho que con las condiciones $F(U)$ es Lipchitz. □

Corolario 13. u_i, $i = -N, \ldots, N$ *es solución de (4.3) si y solo si*

$$\begin{aligned} u_i(t) = (u_0)_i &+ \int_0^t \sum_{j=-N}^{j=N} hJ(h(i-j))(u_j(s) - u_i(s))dt \\ &+ \int_0^t (G(h(i+N))g_-(s) + G(h(i-N))g_+(s))dt. \end{aligned} \tag{4.4}$$

Demostración. El Teorema (8) garantiza la existencia y unicidad de la solución. Integrando (4.3) de 0 a t, se obtiene lo afirmado. □

Corolario 14. *Sea u_i una solucion de (4.3). Entonces la masa total del sistema verifica*

$$\begin{aligned} m(t) &= \sum_{i=-N}^{N} u_i(t) \\ &= \sum_{i=-N}^{N} (u_0)_i(t) + \int_0^t \sum_{i=-N}^{N} (G(h(i+N))g_-(s) + G(h(i-N))g_+(s))dt. \end{aligned} \tag{4.5}$$

Demostración. En efecto, de (4.4) obtenemos

$$\begin{aligned} \sum_{i=-N}^{N} u_i(t) = &\sum_{i=-N}^{N} (u_0)_i(t) \\ &+ \sum_{i=-N}^{N} \int_0^t \sum_{j=-N}^{j=N} hJ(h(i-j))(u_j(s) - u_i(s))dt \\ &+ \int_0^t \sum_{i=-N}^{N} (G(h(i+N))g_-(s) + G(h(i-N))g_+(s))dt. \end{aligned}$$

El resultado se desprende, usando la simetría de J y haciendo cambio de índice en la sumatoria donde aparece el núcleo J junto con $u_i(s)$, pues, en éste caso tenemos

$$\sum_{i=-N}^{N} \int_0^t \sum_{j=-N}^{j=N} hJ(h(i-j))(u_j(s) - u_i(s))dt = 0.$$

□

Otro resultado importante, el cual nos indica la dependencia continua de las soluciones con respecto al dato inicial es el siguiente:

Corolario 15. *Sean u y w soluciones de (4.3), con datos iniciales $(u_0)_i$, $(w_0)_i$ respectivamente. Entonces, para $t_0 > 0$ existe una constante C_4 que depende unicamente de t_0 tal que*

$$\max_{0 \le t \le t_0} ||u(\cdot,t) - w(\cdot,t)||_{l_h^1} \le C_4 ||u_0 - w_0||_{l_h^1}. \tag{4.6}$$

Demostración. En efecto, por el corolario 13 tenemos

$$\begin{aligned} u_i(t) = (u_0)_i &+ \int_0^t \sum_{j=-N}^{j=N} hJ(h(i-j))(u_j(s) - u_i(s))dt \\ &+ \int_0^t (G(h(i+N))g_-(s) + G(h(i-N))g_+(s))dt. \end{aligned}$$

y

$$w_i(t) = (w_0)_i + \int_0^t \sum_{j=-N}^{j=N} hJ(h(i-j))(w_j(s) - w_i(s))dt$$
$$+ \int_0^t (G(h(i+N))g_-(s) + G(h(i-N))g_+(s))dt.$$

Después de cálculos, se obtiene

$$|||u(\cdot,t) - w(\cdot,t)||| \leq ||u_0 - w_0||_{l_h^1} + C_3 t_0 |||u - w|||,$$

siendo $|||u||| = \text{máx}_{0<t<t_0} ||u(\cdot,t)||_{l_h^1}$, de donde, haciendo $C_4 = \frac{1}{1-C_3 t_0}$, obtenemos (4.6). Aquí, debe tomarse t_0 suficientemente pequeño tal que $C_3 t_0 < 1$. $\square$

El siguiente teorema es útil para análisis posteriores, y es conocido como (**Teorema de comparación**):

Teorema 9. *Supongamos que $u, v \in C[-L, L]$ son soluciones de (4.3) con datos de frontera g_-, g_+ y $\tilde{g_-}, \tilde{g_+}$ respectivamente y datos iniciales u_0 y v_0 en $C^1[-L, L]$. Supongamos que $u_0 < v_0$, $\tilde{g_-} \leq g_-$ y $\tilde{g_+} \leq g_+$. Entonces $u_k(t) < v_k(t)$ $k \in \{-N, \cdots, N\}$.*

Demostración. Sea t_0 suficientemente pequeño. Por contradicción, supongamos que existe un $t_1 < t_0$ y un índice i tal que $u_i(t_1) = v_i(t_1)$ y $u_i(s) < v_i(s)$ para $s < t_1$ y todo $i = \{-N, \cdots, N\}$. Sea $w_i = u_i - v_i$, luego $(w_0)_i = u_0 - v_0 < 0$. Usando el corolario 13, se tiene que

$$\begin{aligned}
0 &= w_i(t_1) \\
&= (w_0)_i + \int_0^{t_1} \sum_{-N}^{N} hJ(h(i-j))[w_j(s) - w_i(s)] \\
&\quad + G(h(i+N))(\tilde{g_-} - g_-) + G(h(i-N))(\tilde{g_+} - g_+) \\
&\leq (w_0)_i + \int_0^{t_1} \sum_{-N}^{N} hJ(h(i-j))[-w_i(s)] \\
&\leq (w_0)_i + 2t_0((u_0)_i + (v_0)_i) \\
&< 0,
\end{aligned}$$

para t_0 suficientemente pequeño, lo cual es una contradicción. En la anterior desigualdad, hemos usado que $\tilde{g_-} \geq g_-$ y $\tilde{g_+} \geq g_+$, que $(w_0)_i < 0$, que $w_j(s) < 0$, y que $-w_i(s) = v_i(s) - u_i(s) > 0$. La contradicción anterior prueba el Teorema. $\square$

4.3. Consistencia y convergencia

En ésta sección, enunciaremos algunos resultados que nos garantizan que las soluciones del problema discreto (4.3) convergen a las soluciones del problema continuo (4.2).

Definicion 6. *Una función u es una supersolución de (4.3) si satisface las siguientes dos condiciones:*

1. $u_i(0) \geq (u_0)_i$,
2. $u_i'(t) \geq \sum_{j=-N}^{j=N} hJ(h(i-j))(u_j(t)-u_i(t)) + G(h(i+N))g_-(t) + G(h(i-N))g_+(t)$.

Definicion 7. *Una función u es una subsolución de (4.3) si satisface las siguientes dos condiciones:*

1. $u_i(0) \leq (u_0)_i$,
2. $u_i'(t) \leq \sum_{j=-N}^{j=N} hJ(h(i-j))(u_j(t)-u_i(t)) + G(h(i+N))g_-(t) + G(h(i-N))g_+(t)$.

Como en el capítulo 1, una característica de las supersoluciones, es dado por el siguiente resultado:

Lema 14. *Sea $u_0 \in l_h^1$, $(u_0)_i \geq 0$, y sea u una supersolución de (4.3), con dato de frontera $g \geq 0$. Entonces, $u_i \geq 0$.*

Demostración. Por contradicción, supongamos que $u_i < 0$ algún i. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que es el más negativo de todos los u_k, es decir, si $u_i < 0$ y $u_p < 0$ entonces $u_i < u_p$. Sea $v_i = u_i + \epsilon t$, con $\epsilon > 0$ suficientemente pequeño de tal manera que v_i siga siendo aún negativo. Sea además t_0 el punto donde u_i alcanza su mínimo, entonces

$$
\begin{aligned}
0 \geq v_i'(t_0) &= u_i'(t_0) + \epsilon \\
&> \sum_{j=-N}^{j=N} hJ(h(i-j))(u_j(t_0)-u_i(t_0)) \\
&\qquad + G(h(i+N))g_-(t_0) + G(h(i-N))g_+(t_0) + \epsilon \\
&> \sum_{j=-N}^{j=N} hJ(h(i-j))(v_j(t_0)-v_i(t_0)) \geq 0,
\end{aligned}
$$

dado que J, G son positivos y g_+, g_- son no negativos y $v_j(t_0) - v_i(t_0) \geq 0$. Se obtiene entonces una contradicción, la cual prueba el Lemma. $\square$

El siguiente resultado, es uno de los más importantes de la presente sección:

Lema 15. *Sea $u(x,t)$ la solución continua (más exactamente $u \in C^1$) de (4.2), y sea $(u_i(t))$ la solución del problema discreto (4.3). Sea además $t_0 > 0$. Definamos $w_i(t) = u(x_i, t)$. Entonces, existe una constante $\tilde{K} > 0$ tal que*

$$\max_{t \in [0,t_0]} |w_i(t) - u_i(t)| < \tilde{K}\, h,$$

de donde se obtiene

$$w_i(t) \to u_i(t),$$

cuando $h \longrightarrow 0$.

Demostración. Como $w_i'(t) = u_t(x_i, t)$, usando (4.2) obtenemos

$$\begin{aligned} w_i'(t) &= \int_{-L}^{L} J(x_i - y)[u(y,t) - w_i(t)]dy + G(x_i + L)g_- + G(x_i - L)g_+ \\ &= \sum_{j=-N}^{N} \int_{x_j}^{x_j+h} J(x_i - y)[u(y,t) - w_i(t)]dy + G(x_i + L)g_- + G(x_i - L)g_+ \\ &+ \Big(- \sum_{j=-N}^{N} hJ(x_i - x_j)[w_j(t) - w_i(t)] + \sum_{j=-N}^{N} hJ(x_i - x_j)[w_j(t) - w_i(t)] \Big). \end{aligned}$$

Reorganizando los términos en la expresión anterior se llega a que

$$\begin{aligned} w_i'(t) &= \sum_{j=-N}^{N} hJ(h(i-j))[w_j(t) - w_i(t)] + G(x_i + L)g_- + G(x_i - L)g_+ \\ &+ \sum_{j=-N}^{N} \Big(\int_{x_j}^{x_j+h} J(x_i - y)[u(y,t) - w_i(t)]dy - hJ(x_i - x_j)[w_j(t) - w_i(t)] \Big). \end{aligned}$$

Si el primer sumando del último paréntesis lo llamamos $F(y)$ y el segundo $F(x_j)$, se tiene entonces como una aplicación del Teorema del valor medio que

$$|F(y) - F(x_j)| \leq \max_{\xi \in [-L,L]} |F'(\xi)|\, h,$$

para $\xi \in (x_j, x_j + h)$. Podemos entonces decir que existe una constante K tal que

$$-K\, h \leq F(y) - F(x_j) \leq K\, h. \tag{4.7}$$

Como consecuencia, encontramos que

$$w_i'(t) \leq \sum_{j=-N}^{N} hJ(h(i-j))[w_j(t) - w_i(t)] + G(x_i + L)g_- + G(x_i - L)g_+ + Kh.$$

En particular, tenemos

$$\begin{cases} ((w_i(t)) - u_i(t))' \leq \displaystyle\sum_{j=-N}^{N} hJ(h(i-j))[(w_j(t) - u_j(t)) - (w_i(t) - u_i(t))] + Kh \\ w_i(0) - u_i(0) = 0. \end{cases} \tag{4.8}$$

Sea $z_i(t) = w_i(t)) - u_i(t)$. Si cambiamos el $\leq$ por $=$ en (4.8), tenemos la ecuación

$$\begin{cases} (z_i(t))' = \displaystyle\sum_{j=-N}^{N} hJ(h(i-j))[z_j(t) - z_i(t)] + Kh \\ z_i(0) = 0. \end{cases} \tag{4.9}$$

De otra parte, la solución del problema

$$\begin{cases} \tilde{z}_i'(t) = Kh \\ \tilde{z}_i(0) = 0, \end{cases}$$

la cual viene dada por

$$\tilde{z}_i(t) = Kht,$$

Es una supersolución (solución) de (4.9). En efecto, para éste caso, la sumatoria en (4.9) es cero y $(\tilde{z}_i(t))' = Kh$. Por lo tanto, de (4.8) tenemos entonces

$$w_i(t) - u_i(t) \leq Kht \leq Kht_0, \tag{4.10}$$

para algún $t_0 > 0$ ($t_0 > t$).

Ahora bien, si tenemos en cuenta la desigualdad izquierda de (4.7), entonces podemos decir

$$w_i'(t) \geq \sum_{j=-N}^{N} hJ(h(i-j))[w_j(t) - w_i(t)] + G(x_i + L)g_- + G(x_i - L)g_+ - K\,h,$$

por lo tanto,

$$\begin{cases} ((w_i(t)) - u_i(t))' \geq \displaystyle\sum_{j+-N}^{N} hJ(h(i-j))[(w_j(t) - u_j(t)) - (w_i(t) - u_i(t))] - K_1 h \\ w_i(0) - u_i(0) = 0. \end{cases} \tag{4.11}$$

Procediendo como antes, podemos concluir que $\tilde{\tilde{z}}_i(t) = -Kht$ es una subsolución (solución) de

$$\begin{cases} ((w_i(t)) - u_i(t))' = \displaystyle\sum_{j+-N}^{N} hJ(h(i-j))[(w_j(t) - u_j(t)) - (w_i(t) - u_i(t))] - K_1 h \\ w_i(0) - u_i(0) = 0. \end{cases}$$

Por (4.11) tenemos entonces

$$w_i(t) - u_i(t) \geq -K_1 ht \geq -K_1 ht_1, \tag{4.12}$$

para algún $t_1 > 0$. Finalmente, de (4.10) y (4.12), podemos decir que existe $\tilde{K} > 0$ tal que

$$|w_i(t) - u_i(t)| \leq \tilde{K} h,$$

con lo cual se obtiene finalmente que

$$w_i(t) \to u_i(t),$$

cuando $h \to 0$. Es decir, las soluciones del problema continuo convergen a las soluciones del problema discreto. □

4.3.1. Soluciones estacionarias

En éste apartado, trataremos sobre la existencia de soluciones estacionarias para el problema (4.3). En éste sentido, es claro que el respectivo problema estacionario asociado a (4.3) está dado descrito por la siguiente ecuación:

$$0 = \sum_{j=-N}^{N} hJ(h(i-j))[\phi_j - \phi_i] + G(h(i+N))g_- + G(h(i-N))g_+. \tag{4.13}$$

El primer resultado asociado al problema (4.13) es dado por el siguiente lemma:

Lema 16. *Si el problema (4.13) tiene una solución, entonces se cumple*

$$\sum_{i=-N}^{N} (G(h(i+N))g_- + G(h(i-N))g_+) = 0. \tag{4.14}$$

Demostración. En efecto, sumando a ambos lados de (4.13) se tiene

$$\begin{aligned} 0 = &\sum_{i=-N}^{N} \sum_{j=-N}^{N} hJ(h(i-j))\phi_j - \sum_{i=-N}^{N} \sum_{j=-N}^{N} hJ(h(i-j))\phi_i \\ &+ \sum_{i=-N}^{N} (G(h(i+N))g_- + G(h(i-N))g_+). \end{aligned}$$

Usando la simetría de J, se obtiene

$$\sum_{i=-N}^{N}\sum_{j=-N}^{N} hJ(h(i-j))\phi_j - \sum_{i=-N}^{N}\sum_{j=-N}^{N} hJ(h(i-j))\phi_i = 0,$$

obteniendose entonces (4.14). Es decir, (4.14) es una condición necesaria para la existencia de soluciones estacionarias para el problema (4.13). □

En el siguiente Teorema, veremos que la condición es además suficiente.

Teorema 10. *El problema estacionario descrito por (4.13) tiene una solución si y solo si se satisface (4.14).*

Demostración. De acuerdo al Lemma anterior, solo hay que demostrar que la condición es suficiente. Supongamos que se cumple (4.14), y escribamos (4.13) como sigue:

$$\sum_{j=-N}^{N} hJ(h(i-j))\phi_i - \sum_{j=-N}^{N} hJ(h(i-j))\phi_j = G(h(i+N))g_- + G(h(i-N))g_+. \quad (4.15)$$

Después de cancelar adecuadamente, (4.15) toma la forma

$$\begin{aligned} \sum_{j=-N\,(j\neq i)}^{N} hJ(h(i-j))\phi_i - \sum_{j=-N\,(j\neq i)}^{N} hJ(h(i-j))\phi_j \\ = G(h(i+N))g_- + G(h(i-N))g_+. \end{aligned} \quad (4.16)$$

Escribiendo las respectivas ecuaciones para $-N \leq i \leq N$, obtenemos un sistema cuadrado de $2N+1$ ecuaciones, en las funciones ϕ_i, el cual puede escribirse en forma matricial como

$$B\phi = V, \quad (4.17)$$

siendo

$$\phi = \begin{pmatrix} \phi_{-N} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \phi_N \end{pmatrix},$$

$$V = \begin{pmatrix} v_{-N} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ v_N \end{pmatrix},$$

con

$$v_i = G(h(i+N))g_- + G(h(i-N))g_+,$$

$-N \leq i \leq N$, y donde B es la respectiva matriz de coeficientes la cual resulta ser simétrica, como consecuencia de la simetría de J.

Consideremos el sistema homogeneo asociado a (4.13)

$$B\phi = 0, \tag{4.18}$$

donde cada fila i-ésima es dada por

$$\phi_i \sum_{j=-N}^{N} hJ(h(i-j)) - \sum_{j=-N}^{N} hJ(h(i-j))\phi_j = 0,$$

o en forma equivalente

$$\sum_{j=-N}^{N} hJ(h(i-j))(\phi_j - \phi_i) = 0. \tag{4.19}$$

Notemos que de (4.19) debe tenerse $\phi_i = \phi_j$ para todo $|h(i-j)| \leq 1$. Caso contrario, si i es tal que $\phi_i = \max_{-N \leq j \leq N} \phi_j$, entonces de (4.19) se tendría

$$0 = \sum_{j=-N}^{N} hJ(h(i-j))(\phi_j - \phi_i) < 0,$$

dado que $\phi_j - \phi_i \leq 0$, lo cual es una contradicción. Por lo tanto, existe $K \neq 0$ tal que (4.18) se puede escribir como

$$K\,B\tilde{V} = 0,$$

con

$$\tilde{V} = \begin{pmatrix} 1 \\ . \\ . \\ . \\ 1 \end{pmatrix},$$

de donde se desprende (4.18) tiene soluciones diferentes de cero. (En particular, esto quiere decir que el núcleo de B está compuesto por los múltiplos de $\tilde{V}$). Luego el sistema (4.17) tiene solución si y solo si

$$< V, \tilde{V} >= 0,$$

es decir, si y solo si

$$\sum_{i=-N}^{N} (G(h(i+N))g_- + G(h(i-N))g_+) = 0.$$

Como ésta última es la condición que hemos supuesto se cumple, entonces el sistema (4.13) tiene solución $\phi = (\phi_{-N}, \dots, \phi_N)$. Teniendo en cuenta (4.14) y (4.5) entonces debe tenerse además que

$$\sum_{j=-N}^{N} (u_0)_j = \sum_{j=-N}^{N} u_0(x_j) = m$$

y por tanto la solución ϕ debe satisfacer

$$\sum_{j=-N}^{N} \phi_j = m,$$

o en forma equivalente

$$\sum_{j=-N}^{N} \phi_j = \sum_{j=-N}^{N} u_0(x_j). \tag{4.20}$$

Esto termina la demostración del Teorema. □

Teorema 11. *Sea u una solución del problema (4.3), con g una función satisfaciendo la condición de compatibilidad (4.14). Sea ϕ la única solución del respectivo problema estacionario (4.13) satisfaciendo (4.20). Entonces,*

$$u_i(t) \to \phi_i, \tag{4.21}$$

uniformemente cuando $t \to \infty$.

Demostración. Sea $w_i(t) = u_i(t) - \phi_i$, por lo tanto $w_i'(t) = u_i'(t) - 0$. De la condición de compatibilidad (4.14) se obtiene en particular $G(x_i + L)g_- + G(x_i - L)g_+ = 0$, dado que G, g_- y g_+ son positivas. Por lo tanto, tenemos que

$$\begin{aligned} w_i'(t) &= u_i'(t) - 0 \\ &= \sum_{j=-N}^{N} hJ(h(i-j))(u_j(t) - u_i(t)) - \sum_{j=-N}^{N} hJ(h(i-j))(u_j(t) - u_i(t)) \\ &= \sum_{j=-N}^{N} hJ(h(i-j))(w_j(t) - w_i(t)). \end{aligned} \tag{4.22}$$

Se desprende entonces que

$$\frac{\partial}{\partial t} \sum_{i=-N}^{N} w_i(t) = \sum_{i=-N}^{N} \sum_{j=-N}^{N} hJ(h(i-j))(w_j(t) - w_i(t)) = 0. \tag{4.23}$$

De ésta última ecuación obtenemos

$$\sum_{i=-N}^{N} w_i(t) = K,$$

para K una constante. Sin embargo, para $t = 0$, por la condición (4.20) debe tenerse $K = 0$, y entonces

$$\sum_{i=-N}^{N} w_i(t) = 0, \tag{4.24}$$

de donde, usando nuevamente (4.20) podemos concluir

$$\sum_{i=-N}^{N} u_i(t) = \sum_{i=-N}^{N} \phi_i = \sum_{i=-N}^{N} u_0(x_i). \tag{4.25}$$

Por otro lado, usando el corolario (15) obtenemos que en particular existe una constante $C > 0$ tal que

$$|w_i| \leq C|||(u_0)_i - \phi_i|||, \tag{4.26}$$

luego, las $w_i(t)$ son uniformemente acotadas. Cada $w_i(t)$ determina un conjunto equiacotado, entonces, si consideramos la familia $\{w_i(t_n)\}$, para (t_n) una sucesión creciente, existe una subsucesión $\{w_i(t_{n_k})\}$ que converge uniformemente a una función ξ_i la cual resulta ser solución del respectivo problema estacionario. En efecto, si

$$\sum_{i=-N}^{N} \sum_{j=-N}^{N} hJ(h(i-j))(\xi_j - \xi_i) = k \neq 0$$

tenemos

$$\begin{aligned} &\left| \frac{\partial}{\partial t} \sum_{i=-N}^{N} w_i(t_{nk}) - \sum_{i=-N}^{N} k \right| \\ &= \left| \sum_{i=-N}^{N} \sum_{j=-N}^{N} hJ(h(i-j))((w_j(t_{nk}) - \xi_j) - ((w_i(t_{nk}) - \xi_i)) \right|. \end{aligned}$$

La parte derecha de ésta última igualdad es cero contradiciendo el hecho de que

$$\sum_{i=-N}^{N} w_i(t) = 0.$$

Por lo tanto, debe tenerse $k = 0$, luego debe ser

$$\sum_{i=-N}^{N} \sum_{j=-N}^{N} hJ(h(i-j))(\xi_j - \xi_i) = 0.$$

Además, por (4.20) ξ_i debe ser constante, y por (4.24), la constante debe ser cero. Tenemos entonces que

$$w_i(t) \to 0,$$

uniformemente cuando $t \to \infty$. Se obtiene de ésta manera (4.21). □

Finalizamos ésta subsección con el siguiente corolario:

Corolario 16. *Si la condición de compatibilidad (4.14) no se cumple, entonces, si u es solución del problema (4.3) entonces* $\max_i u_i \to \infty$ *cuando* $t \to \infty$.

Demostración. Supongamos que

$$\sum_{i=-N}^{N} (G(h(i+N))g_- + G(h(i-N))g_+) > 0.$$

De (4.5), se desprende entonces que para t suficientemente grande, la masa total del sistema es tan grande como queramos, de donde se deriva que $u_i(t)$ es no acotada. □

4.4. Sobre el problema discreto (4.3) con $g = u^p(x,t)$ con $p > 1$

La idea fundamental en la presente sección, consiste en mostrar que para $p > 1$, existe un tiempo de explosión, y determinaremos con que perfil la solución explota. Tendremos en cuenta que para que la solución explote, basta que lo haga en alguna componente u_i. Con este fin, a lo largo de ésta sección haremos referencia al problema

$$\begin{aligned} u_i'(t) &= \sum_{j=-N}^{j=N} hJ(h(i-j))(u_j(t) - u_i(t)) \\ &\qquad + G(h(i+N))u^p(-Nh,t) + G(h(i-N))u^p(Nh,t), \\ u_i(0) &= u_0(x_i) = u_0(ih), \end{aligned} \tag{4.27}$$

para $-N \le i \le N$, $p > 1$. Notaremos $u^p(-Nh,t)$ por u^p_{-N}, $u^p(Nh,t)$ por u^p_N, $G(h(i+N)$ por G_{-N} y $G(h(i-N)$ por G_N. De (4.3) tenemos

$$\begin{aligned} u_N'(t) &= \sum_{j=-N}^{j=N} hJ(h(N-j))(u_j(t) - u_N(t)) + G_{-N}\, u^p_{-N} + G_N\, u^p_N, \\ u_{-N}'(t) &= \sum_{j=-N}^{j=N} hJ(h(-N-j))(u_j(t) - u_{-N}(t)) + G_{-N}\, u^p_{-N} + G_N\, u^p_N. \end{aligned} \tag{4.28}$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned} u'_N(t) &\geq -C_1 u_N + G(0)u_N^p, \\ u'_{-N}(t) &\geq -\tilde{C}_1 u_{-N} + G(0)u_{-N}^p, \end{aligned} \tag{4.29}$$

así que

$$\begin{aligned} &u'_N(t) + u'_{-N}(t) \geq -C(u_{-N} + u_N) + G(0)(u_{-N}^p + u_N^p) \\ &\geq -C(u_{-N} + u_N) + G(0)(u_{-N} + u_N)^p. \end{aligned} \tag{4.30}$$

Si hacemos $m(t) = u_{-N} + u_N$, y procedemos como en el capítulo 3, se obtiene entonces

$$m'(t) \geq -Cm(t) + G(0)m(t)^p, \tag{4.31}$$

de donde $m(t) \to \infty$ en tiempo finito, si para algun t_0, $m(t_0)$ es suficientemente grande. Por lo tanto existe un tiempo de explosion que llamaremos T donde m explota. En particular se tiene

$$m'(t) \geq \tilde{C}_2 m(t)^p, \tag{4.32}$$

para alguna constante positiva $\tilde{C}_2$. Ahora, sea $t < T$. Integrando (4.32) de t a T obtenemos

$$\int_{m(t)}^{m(T)} \frac{ds}{s^p} \geq C_3(T-t),$$

de donde usando que T es es tiempo de explosion de m se obtiene entonces

$$\frac{1}{(p-1)m(t)^{p-1}} \geq C_3(T-t).$$

De ésta ultima ecuación obtenemos

$$m(t) \leq \frac{K}{(T-t)^{\frac{1}{p-1}}},$$

para una adecuada constante $K > 0$. En particular obtenemos

$$\begin{aligned} u_N &\leq \frac{K}{(T-t)^{\frac{1}{p-1}}}, \\ u_{-N} &\leq \frac{K}{(T-t)^{\frac{1}{p-1.}}} \end{aligned}$$

Ahora bien, usando (4.27)

$$\begin{aligned} u'_i(t) &\leq \sum_{j=-N}^{j=N} hJ(h(i-j))(u_j(t) - u_i(t)) \\ &\qquad + G(h(i+N))u^p(-Nh,t) + G(h(i-N))u^p(Nh,t) \\ &\leq \sum_{j=-N}^{j=N} hJ(h(i-j))(u_j(t)) + \frac{K_1}{(T-t)^{\frac{p}{p-1}}}. \end{aligned}$$

integrando de 0 a t para $t < t_0$ y usando que la función $(T-t)^{\frac{1}{p-1}}$ es acotada para $0 \leq t < T$ entonces existe una constante K_2 tal que

$$u_i(t) \leq \frac{K_2}{(T-t)^{\frac{1}{p-1}}},$$

de donde

$$\max_i u_i(t) \leq \frac{K_2}{(T-t)^{\frac{1}{p-1}}}.$$

El siguiente Lemma nos proporciona una desigualdad en sentido contrario a la obtenida anteriormente.

Lema 17. *Sea*

$$\begin{cases} v_i(t) = \dfrac{A}{(T-t)^{\frac{1}{p-1}}}, \\ (v_0)_i \geq (u_0)_i, \\ C = \{G_{-N} + G_N\}. \end{cases}$$

Si

$$A = \frac{1}{(C(p-1))^{\frac{1}{p-1}}}$$

entonces v_i es una supersolución de (4.27).

Demostración. En efecto, un cálculo directo muestra que si

$$A = \frac{1}{(C(p-1))^{\frac{1}{p-1}}}$$

entonces v satisface (4.27). En particular v_i es una supersolución de (4.27). □

Como una consecuencia del Lemma, podemos entonces decir que

$$\frac{A}{(T-t)^{\frac{1}{p-1}}} \geq u_i,$$

y por lo tanto,

$$\frac{A}{(T-t)^{\frac{1}{p-1}}} \geq \max_i u_i. \tag{4.33}$$

De (4.33), se concluye que el perfil de las soluciones de (4.27) queda determinado por la relación

$$\frac{A}{(T-t)^{\frac{1}{p-1}}} \geq \max_i u_i \geq \frac{K_2}{(T-t)^{\frac{1}{p-1}}}. \tag{4.34}$$

Con el perfil de las soluciones de (4.27) concluimos éste trabajo.

Conclusiones

- En este trabajo se han estudiado modelos de difusión no-local análogos al problema de Neumann para la ecuación del calor.

  Más concretamente se estudian ecuaciones de la forma

  $$u_t(x,t) = \int_{\Omega} J(x-y)(u(y,t)-u(x,t))dy + \int_{\partial\Omega} G(x-y)g(y,t)\,dS_y,$$

  donde $J : \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}$ y $G : \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}$ son funciones continuas de soporte compacto en la bola unitaria ($J, G \in\ C_0(\mathbb{R}^N)$), *no negativas*, *radialmente simétricas y decrecientes*, con la propiedad

  $$\int_{\mathbb{R}^N} J(z)dz = 1,$$

  y $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ un dominio acotado, conexo con frontera suave.

  Se demuestran los siguientes resultados:

  1. existencia y unicidad de soluciones,
  2. validez de un principio de comparación,
  3. comportamiento asintótico de las soluciones de éste problema cuando el dato de borde g no depende del tiempo.

  A continuación se estudia el caso en que la función $g(x,t)$ que describe la condición de frontera es la función

  $$g(x,t) = \frac{g(x)}{(T-t)^{\alpha}},$$

  con $\alpha > 0$ y $g(x) > 0$ y se demuestran los siguientes resultados:

  1. las soluciones explotan en tiempo finito si y solo si $\alpha \geq 1$,
  2. se obtienen las tasas de explosión,

3. se obtienen los conjuntos de explosión.

Luego nos abocamos al estudio de problemas no lineales de la forma

$$\begin{cases} u_t(x,t) = (J * u(x,t)) - u(x,t) + \displaystyle\int_{\partial\Omega} G(x-y) g(u(y,t)) dS_y & (x,t) \in \overline{\Omega} \times (0,T), \\ u(x,0) = u_0(x) \qquad x \in \overline{\Omega}, \end{cases}$$

demostrando

1. existencia y unicidad de soluciones,
2. un principio de comparación
3. para el caso particular en el que $g(u(x,t)) = u^p(x,t)$ se estudia el fenómeno de explosión (con $p > 1$) y se realiza un estudio de las tasas y perfiles de las soluciones (análisis de explosion) .

Finalmente, se ha considerado el problema discretizado en $\Omega = [-L, L]$

$$\begin{cases} u_t(x,t) = \displaystyle\int_{-L}^{L} J(x-y)(u(y,t) - u(x,t)) dy + G(x+L) g(-L,t) + G(x-L) g(L,t), \\ u(x,0) = u_0(x), \end{cases}$$

y se obtienen los siguientes resultados:

1. existencia y unicidad de soluciones,
2. un principio de comparación,
3. perfiles de explosion de las soluciones para un caso particular de función g sobre la frontera.
4. las soluciones del problema discreto convergen a las soluciones del respectivo problema continuo.

En resumen, en esta tesis se aborda un problema actual de difusión no-local que no había sido estudiado previamente. El estudio propuesto se basa en establecer que el problema está bien planteado y luego estudiar propiedades asintóticas de las soluciones así como empezar el estudio de las aproximaciones numéricas de estos problemas.

Las técnicas empleadas en esta tesis son mayormente aquellas del análisis no-lineal de ecuaciones diferenciales y sus aproximaciones numéricas.

Trabajo futuro

A continuación hacemos una breve descripción de problemas que nos gustaría abordar en el futuro y que se abren como continuación natural de esta tesis.

- Estudiar el problema rescalando los núcleos

$$\begin{cases} u^\epsilon_t(x,t) = \frac{1}{\epsilon^2} \displaystyle\int_\Omega J_\epsilon(x-y)(u^\epsilon(y,t) - u^\epsilon(x,t))\, dy + \frac{1}{\epsilon} \int_{\partial\Omega} G_\epsilon(x-y) g(y,t)\, dS_y, \\ u^\epsilon(x,0) = u_0(x), \end{cases}$$

  donde

$$J_\epsilon(z) = C_1 \frac{1}{\epsilon^N} J(\frac{z}{\epsilon}), \;\; G_\epsilon(z) = C_1 \frac{1}{\epsilon^N} G(\frac{z}{\epsilon}), \;\; C_1^{-1} = \frac{1}{2} \int_{B(0,1)} J(z) z^2 dz,$$

  se tienen resultados de existencia y unicidad idénticos a los contenidos en esta tesis.

  Es de esperar que si u es una solución del problema de Neumann clásico

$$\begin{cases} u_t - \triangle u = 0 \quad en \quad \Omega \times (0,T), \\ \dfrac{\partial u}{\partial n} = g \quad \text{sobre} \quad \partial\Omega \times (0,T), \\ u(x,0) = u_0(x) \quad en \quad \Omega, \end{cases}$$

  y si u^ϵ es solución del problema reescalado entonces

$$u^\epsilon \to u,$$

  cuando $\epsilon \to 0$. Este resultado no forma parte de esta memoria y será objeto de investigación en el futuro.

- Abordar el estudio de aproximaciones numéricas de estos problemas en dimensiones mayores. En este punto esperamos que los resultados obtenidos para una variable sean fácilmente generalizables a más variables, sin embargo en este caso habrá que tener especial cuidado en la convergencia del método al discretizar la integral sobre la frontera del dominio
$$\int_{\partial\Omega} G(x-y)g(y,t)\,dS_y.$$

- Estudiar problemas no-locales (existencia, unicidad, propiedades asintóticas, etc) donde la parte principal no es lineal. Nos referimos a problemas de la forma
$$\begin{cases} u_t(x,t) = \displaystyle\int_{\Omega} J(x-y)|u(y,t)-u(x,t)|^{p-2}(u(y,t)-u(x,t))\,dy \\ \qquad\qquad\qquad + \displaystyle\int_{\partial\Omega} G(x-y)g(y,t)\,dS_y, \\ u(x,0) = u_0(x). \end{cases}$$

- Estudiar este tipo de problemas no-locales cuando Ω no es un dominio en $\mathbb{R}^N$ sino un espacio de medida general y la probabilidad de salto viene dada por núcleos simétricos $J(x,y)$ y $G(x,y)$. Nos referimos a problemas del tipo
$$\begin{cases} u_t(x,t) = \displaystyle\int_{\Omega} J(x,y)(u(y,t)-u(x,t))\,d\mu(y) \\ \qquad\qquad\qquad + \displaystyle\int_{\partial\Omega} G(x,y)g(y,t)\,dS_y, \\ u(x,0) = u_0(x), \end{cases}$$
donde Ω es un subconjunto abierto de un espacio topológico (con una medida $d\mu$) y $\partial\Omega$ es su frontera (con otra medida dS_y).

- Considerar problemas "mixtos", es decir, problemas de la forma
$$\begin{cases} u_t(x,t) = \displaystyle\int_{\Omega} J(x-y)(u(y,t)-u(x,t))\,dy \\ \qquad\qquad\qquad + \displaystyle\int_{\Gamma_1} G(x,y)g(y,t)\,dS_y, \\ u(y,t) = h(y,t) \qquad y \in \Gamma_2, \\ u(x,0) = u_0(x), \end{cases}$$
donde
$$\partial\Omega = \Gamma_1 \cup \Gamma_2.$$

Bibliografía

[1] Robert Adams. *Sobolev Spaces.* Academic Press, New York, 1 edition, 1975.

[2] G. Alberti and G. Bellettini, A nonlocal anisotropic model for phase transition. Part I: the Optimal Profile problem. *Math. Ann.*, 310, (1998), 527–560.

[3] G. Alberti and G. Bellettini, A nonlocal anisopropic model for phase transition: asymptotic behaviour of rescaled. *European J. Appl. Math.*, 9, (1998), 261–284.

[4] F. Andreu-Vaillo, J. M. Mazón, J. D. Rossi and J. J. Toledo-Melero. Nonlocal Diffusion Problems. American Mathematical Society. Mathematical Surveys and Monographs 2010. Vol. 165.

[5] F. Andreu, J. M. Mazón, J. D. Rossi and J. Toledo. The Neumann problem for nonlocal nonlinear diffusion equations. *J. Evol. Equ.*, 8(1), (2008), 189–215.

[6] F. Andreu, J. M. Mazon, J. D. Rossi and J. Toledo. A nonlocal $p-$Lapla-cian evolution equation with Neumann boundary conditions. *J. Math. Pures Appl.* Vol. 90(2), 201–227, (2008).

[7] F. Andreu, J. M. Mazón, J. D. Rossi and J. Toledo. A nonlocal $p-$Lapla-cian evolution equation with non homogeneous Dirichlet boundary conditions. *SIAM J. Math. Anal.* Vol. 40(5), 1815–1851, (2009).

[8] F. Andreu, J. M. Mazon, J. D. Rossi and J. Toledo. The limit as $p \to \infty$ in a nonlocal $p-$Laplacian evolution equation. A nonlocal approximation of a model for sandpiles. *Calc. Var. Partial Differential Equations.* Vol. 35(3), 279–316, (2009).

[9] D. Applebaum. Lévy Processes and Stochastic Calculus. Cambridge studies in advanced mathematics, 93, 2004.

[10] G. Barles, E. Chasseigne and C. Imbert. On the Dirichlet problem for second-order elliptic integro-differential equations. *Indiana Univ. Math. J.*, 57, (2008), 213–246.

[11] G. Barles and C. Imbert. Second-order elliptic integro-differential equations: Viscosity solutions theory revisited. *Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire*, 25, (2008), 567–585.

[12] A.Friedman and B. McLeod. Blow-up of positive solutions of semilinear heat equations. *Indiana Univ. Math. J.*, 34(2):425–447, 1985.

[13] C. Bandle and H. Brunner. Blow-up in diffusion equations: a survey. *J.Comp. Appl. Math.*, 97:3–22, 1998.

[14] P. Bates. On some nonlocal evolution equations arising in materials science. Nonlinear dynamics and evolution equations, 13–52, Fields Inst. Commun., 48, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2006.

[15] P. Bates and F. Chen. Spectral analysis of traveling waves for nonlocal evolution equations. *SIAM J. Math. Anal.*, 38, (2006), 116–126.

[16] P. Bates and F. Chen. Spectral analysis and multidimensional stability of traveling waves for nonlocal Allen-Cahn equation. *J. Math. Anal. Appl.*, 273, (2002), 45–57.

[17] P. Bates and F. Chen. Periodic traveling waves for a nonlocal integro-differential model. *Electron. J. Differential Equations*, 1999 (26), 1–19.

[18] P. Bates, X. Chen and A. Chmaj, Heteroclinic solutions of a van der Waals model with indefinite nonlocal interactions. *Calc. Var. Partial Differential Equations*, 24, (2005), 261–281.

[19] P. Bates, P. Fife, X. Ren and X. Wang. Travelling waves in a convolution model for phase transitions. *Arch. Ration. Mech. Anal.*, 138, (1997), 105–136.

[20] P. Bates, J. Han and G. Zhao. On a nonlocal phase-field system. *Nonlinear Anal.,* 64, (2006), 2251–2278.

[21] P. Bates and C. Zhang. Traveling pulses for the Klein-Gordon equation on a lattice or continuum with long-range interaction. *Discrete Contin. Dyn. Syst.*, 16, (2006), 235–252.

[22] P. Bates and G. Zhao. Existence, uniqueness and stability of the stationary solution to a nonlocal evolution equation arising in population dispersal. *J. Math. Anal. Appl.,* 332, (2007), 428–440.

[23] P. Bates and A. Chmaj. A discrete convolution model for phase transitions. *Arch. Rat. Mech. Anal.*, 150:281–305, 1999.

[24] P. Bates and A. Chmaj. An integrodifferential model for phase transitions: stationary solutions in higher dimensions. *J.Statistical Phys*, 95:1119–1139, 1999.

[25] J. Bertoin. Lévy processes. Cambridge Tracts in Mathematics, 121. Cambridge University Press, Cambridge, 1996.

[26] I. H. Biswas, E. R. Jakobsen and K. H. Karlsen. Error estimates for finite difference-quadrature schemes for fully nonlinear degenerate parabolic integro-PDEs. *J. Hyperbolic Differ. Equ.*, 5(1), (2008), 187–219.

[27] M. Bodnar and J. J. L. Velázquez. An integro-differential equation arising as a limit of individual cell-based models. *J. Differential Equations*, 222, (2006), 341–380.

[28] M. Bogoya, R. Ferreira, and J.D. Rossi. Neumann boundary conditions for a nonlocal nonlinear diffusion operator. continuous and discrete models. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 135:3837–3846, 2007.

[29] Haïm Brézis. *Análisis funcional: Teoría y applicaciones.* Alianza Editorial, Madrid, 1 edition, 1984.

[30] L. Caffarelli and L. Silvestre. An extension problem related to the fractional Laplacian. *Comm. Partial Differential Equations*, 32, (2007), 1245–1260.

[31] L. Caffarelli and L. Silvestre. Regularity theory for fully nonlinear integro-differential equations. *Comm. Pure Appl. Math.*, 62, (2009), 597–638.

[32] L. Caffarelli, S. Salsa and L. Silvestre. Regularity estimates for the solution and the free boundary of the obstacle problem for the fractional Laplacian. *Invent. Math.*, 171, (2008), 425–461.

[33] C. Carrillo and P. Fife. Spatial effects in discrete generation population models. *J. Math. Biol.*, 50(2), (2005), 161–188.

[34] E. Chasseigne. The Dirichlet problem for some nonlocal diffusion equations. *Differential Integral Equations*, 20, (2007), 1389–1404.

[35] E. Chasseigne, M. Chaves and J. D. Rossi. Asymptotic behaviour for nonlocal diffusion equations. *J. Math. Pures Appl.* (9), 86, (2006), 271–291.

[36] C. Cortázar, J. Coville, M. Elgueta and S. Martínez. A non local inhomogeneous dispersal process. *J. Differential Equations*, 241, (2007), 332–358.

[37] C. Cortázar, M. Elgueta, S. Martínez and J. D. Rossi. Random walks and the porous medium equation. *Rev. Union Matemática Argentina*, 50, (2009), 149–155.

[38] C. Cortázar, M. Elgueta and J. D. Rossi. Nonlocal diffusion problems that approximate the heat equation with Dirichlet boundary conditions. *Israel J. Math.*, 170, (2009), 53–60.

[39] C. Cortázar, M. Elgueta, and J.D. Rossi. A non-local diffusion equation whose solutions developed a free boundary. *Annales Henri Poincaré.*, 6(2):269–281, 2005.

[40] C. Cortázar, M. Elgueta, J.D. Rossi, and N. Wolanski. How to aproximate the heat equation with neumann boundary conditions by nonlocal diffusion problems. *Arch. Rat. Mech. Anal.* Vol. 187(1), 137–156, (2008).

[41] C. Cortázar, M. Elgueta, J.D. Rossi, and N. Wolanski. Boundary fluxes for nonlocal diffusion. *J. Differential Equations.*, 234:360–390, 2007.

[42] J. Coville. On uniqueness and monotonicity of solutions on non-local reaction diffusion equations. *Ann. Mat. Pura Appl.* (4), 185, (2006), 461–485.

[43] J. Coville. Maximum principles, sliding techniques and applications to nonlocal equations. *Electron. J. Differential Equations,* 2007 (68), (2007), 1–23.

[44] J. Coville, J. Dávila and S. Martínez, Existence and uniqueness of solutions to a nonlocal equation with monostable nonlinearity. *SIAM J. Math. Anal.*, 39, (2008), 1693–1709.

[45] J. Coville, J. Dávila and S. Martínez. Nonlocal anisotropic dispersal with monostable nonlinearity. *J. Differential Equations*, 244, (2008), 3080–3118.

[46] J. Coville and L. Dupaigne. Propagation speed of travelling fronts in nonlocal reaction diffusion equations. *Nonlinear Anal.*, 60, (2005), 797–819.

[47] J. Coville and L. Dupaigne. On a nonlocal equation arising in population dynamics. *Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A*, 137, (2007), 1–29.

[48] P. Fife. Some nonclassical trends in parabolic and paraboli-like evolutions . *Trends in nonlinear analysis, Springer, Berlin.*, pages 153–191, 2003.

[49] N. Fournier and P. Laurencot. Well-posedness of Smoluchowski's coagulation equation for a class of homogeneous kernels. *J. Funct. Anal.*, 233, (2006), 351–379.

[50] V. Galaktionov and J.L. Vázquez. The problem of blow-up in nonlinear parabolic equations. *Discrete Contin. Dynam. Systems*, 8(A):399–433, 2002.

[51] J. García Melián and J. D. Rossi. On the principal eigenvalue of some nonlocal diffusion problems. *J. of Differential Equations.* Vol. 246(1), 21–38, (2009).

[52] G. Gilboa and S. Osher, Nonlocal linear image regularization and supervised segmentation. UCLA CAM Report 06-47, (2006).

[53] L. I. Ignat and J. D. Rossi. A nonlocal convection-diffusion equation. *J. Funct. Anal.*, 251(2), (2007), 399–437.

[54] L. I. Ignat and J. D. Rossi, Refined asymptotic expansions for nonlocal diffusion equations. *J. Evol. Equ.*, 8, (2008), 617–629.

[55] L. I. Ignat and J. D. Rossi. Asymptotic behaviour for a nonlocal diffusion equation on a lattice. *Z. Angew. Math. Phys.*, 59(5), (2008), 918–925.

[56] E. R. Jakobsen and K. H. Karlsen. Continuous dependence estimates for viscosity solutions of integro-PDEs. *J. Differential Equations*, 212, (2005), 278–318.

[57] A. Mogilner and Leah Edelstein-Keshet. A non-local model for a swarm. *J. Math. Biol.*, 38, (1999), 534–570.

[58] M. Perez and J.D. Rossi. Blow-up for a non-local diffusion problem with neumann boundary conditions and a reaction term. *Analysis TM&A*. Vol. 70(4), 1629–1640, (2009).

Declaración

Me permito afirmar que he realizado la presente tesis de manera autónoma y con la única ayuda de los medios permitidos y no diferentes a los mencionados en la propia tesis. Todos los pasajes que se han tomado de manera textual o figurativa de textos publicados y no publicados, los he reconocido en el presente trabajo. Ninguna parte del presente trabajo se ha empleado en ningún otro tipo de tesis.

Bogotá, D.C., 04.08.2011

(Cesar A. Gómez S.)