UNIVERSIDAD
NACIONAL
DE COLOMBIA

Aproximación de los estudiantes de grado décimo de la Institución Educativa Integral de Formación e Investigación Misak a la modelación matemática de situaciones reales a partir de las funciones cuadráticas

Astrith Juranny Orozco Mera

Universidad Nacional de Colombia
Facultad de Ingeniería y Administración – Escuela de Postgrados
Palmira, Valle, Colombia
2019

Aproximación de los estudiantes de grado décimo de la Institución Educativa Integral de Formación e Investigación Misak a la modelación matemática de situaciones reales a partir de las funciones cuadráticas

Astrith Juranny Orozco Mera

Trabajo de investigación presentado como requisito para optar el título de:
Magister en Enseñanza de las Ciencias Exactas y Naturales

Director: John Jairo Leal Gómez

Universidad Nacional de Colombia
Facultad de Ingeniería y Administración – Escuela de Postgrados
Palmira, Valle, Colombia
2019

Dedicatoria

A mis padres, Oscar y Sorhaida por su apoyo incondicional.

A mis hermanos, Oscar y Juan Carlos.

Los amo con toda mi alma.

Agradecimientos

A Dios, por ser mi luz y por permitirme culminar este proceso.

A mi director John Jairo Leal, por su paciencia, ayuda, dedicación y conocimientos.

A la Universidad Nacional, Facultad de Ingeniería y Administración - Sede Palmira, que con su equipo de docentes contribuyeron en mi formación profesional.

A mis compañeros, quienes aportaron en este proceso.

A mis estudiantes, quienes me colaboraron y se esforzaron durante este proceso.

A todas las personas que me acompañaron y contribuyeron al proceso y culminación del presente trabajo.

Resumen

Esta investigación consistió en diseñar una estrategia basada en el desarrollo de una estructura matemática para aproximar a los estudiantes de grado décimo de la institución educativa integral de formación e investigación Misak a la modelación matemática de situaciones reales utilizando funciones cuadráticas.

La investigación se realizó de la siguiente manera, en primer lugar, se estudió la estructura matemática de los números reales, en la cual se articuló la teoría, la mecanización, el análisis, las herramientas tecnológicas, y las aplicaciones; de forma similar se estudió la función cuadrática. Luego se desarrollaron procesos de modelación matemática para dos situaciones reales, la primera, consistió en encontrar un modelo que representara la caída libre de un objeto, y la segunda, modeló el ingreso para la venta de pollos en una comercializadora avícola del municipio de Morales. Los estudiantes tomaron datos, formularon y ajustaron modelos matemáticos cuadráticos con los datos obtenidos, e hicieron análisis de la información resultante de tales modelos.

Palabras clave: Modelación matemática, situaciones reales, funciones cuadráticas, estructura matemática.

Abstract

This research consisted of designing a strategy based on the development of a mathematical structure to approach the tenth grade students of the Misak comprehensive educational and research educational institution to the mathematical modeling of real situations using quadratic functions.

The research was carried out in the following way. First, the mathematical structure of real numbers was studied, in which theory, mechanization, analysis, technological tools, and applications were articulated; the quadratic function was similarly studied. Then mathematical modeling processes were developed for two real situations, the first, consisted of finding a model that represented the free fall of an object, and the second, modeled the income for the sale of chickens in a poultry marketer in the municipality of Morales. Students took data, formulated and fitted quadratic mathematical models with the data obtained, and analyzed the information resulting from such models.

Keywords: Mathematical modeling, real situations, quadratic functions, mathematical structure.

Contenido

Pág.

Lista de figuras

Lista de tablas

Pág.

Introducción

La manera en que usualmente los docentes presentan los contenidos matemáticos, enfocándose en lo actitudinal como en lo procedimental y dejando de lado las aplicaciones en contextos reales, ha hecho que el aprendizaje carezca de utilidad (Lozano & Sierra, 2012). Esta desarticulación hace que por falta de aplicaciones en contextos reales el estudiante sea incapaz de emplear en la realidad lo que ha aprendido y mucho menos que vea lo útil que puede ser. En esta circunstancia, la articulación entre los contenidos matemáticos y situaciones de la realidad se puede abordar con el concepto de función, pues por su carácter modelador permite explicarlas o predecirlas (Vargas, 2011).

En la educación escolar, la enseñanza de las funciones y en particular de las funciones cuadráticas consiste en dar definiciones, hacer tabulaciones y gráficas, encontrar el dominio y el rango, y por último, las aplicaciones relacionadas con problemas ficticios. Esto ha llevado a que los estudiantes de la Institución Educativa Integral de Formación e Investigación Misak desconozcan la aplicación de las funciones y tengan dificultades cuando se trata de modelar situaciones sencillas. Según los resultados de las pruebas saber del grado noveno del año 2017 (Icfes, 2017), sólo el 2% de los estudiantes lograron modelar situaciones sencillas de variación. Por lo anterior, se concluyó que los estudiantes presentaban problemas con la modelación matemática, por tal razón, esta investigación se desarrolló con el objetivo de diseñar una estrategia para aproximar a los estudiantes de grado décimo de la Institución Educativa Integral de Formación e Investigación Misak a la modelación matemática de situaciones reales a partir de funciones cuadráticas.

La presentación de este trabajo se realiza en cinco capítulos. En el primero se expone la problemática que trae para la modelación matemática la desvinculación de la estructura conceptual, los procedimientos algorítmicos, y las aplicaciones de los conceptos matemáticos; en particular, se muestra lo que sucede con las funciones y en especial con las funciones cuadráticas. De esta manera, se delimitó el problema mediante la pregunta ¿la estrategia basada en el desarrollo de una estructura conceptual de las funciones cuadráticas aproxima a los estudiantes de grado décimo a la modelación matemática de situaciones reales a partir de funciones cuadráticas?

El segundo capítulo, se divide en dos partes. En la primera se hace una revisión internacional y nacional respecto al proceso de modelación matemática. En la literatura internacional se menciona a Hein y Biembengut (2006) quienes indican que el proceso de modelación es una herramienta didáctica para enseñar o para investigar; Blum y Borromeo (2009), establecen que es la base para el aprendizaje de las matemáticas; Blomhøj y Jensen (2003), y, Galbraith y Stillman (2006) asumen que contribuye tanto a la enseñanza como al aprendizaje de las matemáticas, esta idea también la comparten Greefrath, Siller y Weitendorf (2011), pero además, consideran que en el proceso de modelación se debe incluir la tecnología, pues ella amplia la posibilidad de resolver problemas. En la literatura nacional se retoma los planteamientos del ministerio de educación nacional MEN (1998), donde se indica que la modelación matemática contribuye a la construcción significativa de los conceptos matemáticos; también se menciona a Villa (2009) quien considera que la modelación es una herramienta de aprendizaje que contribuye a mejorar la comprensión de los conceptos.

En la segunda parte del capítulo dos, se presentan algunas consideraciones teóricas que direccionan la investigación, entre ellas, se puede encontrar el proceso de modelación y simulación, y la definición de modelo matemático asumido por Velten (2009), también se muestra a grandes rasgos en qué consiste el análisis de regresión, se presenta las tecnologías de la información y las comunicaciones en las matemáticas, en particular, la herramienta tecnológica Excel, y otros aspectos que fueron fundamentales para el desarrollo de la investigación, tales como: el conocimiento conceptual y procedimental en matemáticas, la mecanización para la comprensión de los conceptos matemáticos, la teoría de errores, y los distintos tipos de estudio de caso.

En el tercer capítulo se muestra la metodología de la investigación, que incluye el enfoque cualitativo, el tipo de estudio, el contexto, los participantes, los métodos de recolección de datos, y el diseño de la estrategia. En esta última, se proponen una serie de dimensiones para la construcción de los conceptos matemáticos, se busca una articulación de la teoría, la mecanización, el análisis, las herramientas tecnológicas, y las aplicaciones, las cuales se enmarcan a la vez en el concepto de función cuadrática; se propone una perspectiva para el proceso modelación matemática en el ámbito escolar, y se presenta las tres fases de intervención con los participantes, la primera que consistió en brindar la fundamentación matemática requerida para el proceso de modelación y simulación, tales como ecuaciones lineales, cuadráticas, y funciones lineales y cuadráticas, mientras que la segunda y la tercera fase consistió en que los estudiantes modelaran dos situaciones reales, una relacionada con la caída de un objeto, y otra con el ingreso por la venta de pollos en un almacén avícola ubicado en el municipio de Morales.

En el capítulo cuatro se describen los resultados de la investigación de acuerdo a las fases mencionadas y al proceso de modelación propuesto. Finalmente, en el capítulo cinco se presentan las conclusiones del trabajo incluyendo algunas recomendaciones.

1. Planteamiento del problema

En la enseñanza de los saberes matemáticos los docentes siempre buscan exponerlos de una forma didáctica, por ello, antes de presentarlos debe transformarlos y adaptarlos al contexto de enseñanza, de tal manera que sean comprensibles para los estudiantes. Esto es lo que se denomina como el proceso de Transposición Didáctica, en la cual "un contenido del saber que ha sido designado como saber a enseñar, sufre a partir de entonces un conjunto de transformaciones adaptativas que van a hacerlo apto para ocupar un lugar entre los objetos de enseñanza" Chevallard (1991).

Las transformaciones que se realizan en el proceso de transposición didáctica conducen a un saber distinto del saber inicial que ha sido escogido como saber a enseñar, y este aspecto Chevallard (1991) lo califica como "el terrible secreto que el concepto de transposición didáctica pone en peligro". Si bien la transposición facilita la enseñanza, es evidente que el saber obtenido en este proceso está aislado de sus orígenes y de su evolución histórica, perdiendo el nivel de fundamentación y de profundidad. De igual modo, el MEN (1998), en los lineamientos curriculares indica que la transposición didáctica facilita la enseñanza del saber matemático, pero, al mismo tiempo excluye propiedades elementales que hacen parte de la fundamentación de dicho saber.

Con estos argumentos, se puede decir, que las transformaciones que realiza el docente a los saberes y los procedimientos matemáticos son la causa de que estos pierdan su nivel de fundamentación, y ejemplo de ello, es el procedimiento algorítmico que se presenta para resolver ecuaciones. En éste sentido, las transformaciones y adaptaciones más significativas que realizan los docentes de la Institución Educativa Integral de Formación e Investigación Misak corresponden a los procedimientos algorítmicos.

Para mostrar un caso particular, veamos la transposición didáctica para la solución de ecuaciones, por ejemplo, se establecen reglas para “facilitar” su solución moviendo los términos, usando expresiones tales como: “el término que está sumando pasa a restar”, o “el término que está multiplicando pasa a dividir”. De hecho, en el texto guía hipertexto de matemáticas del grado octavo de Ramírez, Salazar, Joya, y Cely (2010) se definen tales cambios de términos como el procedimiento que consiste en pasar el término que está en un lado de la ecuación al otro cambiándole el signo, sin que la ecuación cambie. La preocupación respecto a este tipo de pseudo-reglas radica en las confusiones que generan en los estudiantes, pues, cuando tratan de resolver ecuaciones no lo hacen en el orden correcto (De Moreno & De Castellano, 1997) y por ello cometen errores como el siguiente.

$$\frac{x+2}{4} = 16$$
$$\frac{x}{4} = 16 - 2$$

La aplicación de este tipo de pseudo-reglas que no tienen una base teórica, y que son utilizadas tanto por docentes como en textos guías, generan confusión y no le permiten a los estudiantes acceder a la teoría matemática con el rigor necesario, imposibilitando que se realicen verdaderos procesos de construcción de conceptos matemáticos ni la comprensión y solución de problemas reales.

Teniendo en cuenta lo anterior, y que los Lineamientos Curriculares (MEN, 1998) indican que en la enseñanza de los contenidos el docente debe hacer un “buen proceso de transposición didáctica” en el sentido que el estudiante pueda “deconstruir” el saber transpuesto para así tener un acercamiento al saber académico, se propone como base para el desarrollo de modelos matemáticos el desarrollo de una etapa de fundamentación matemática en la que se estudien los conceptos con cierto rigor teórico utilizando reglas matemáticas.

Así, por ejemplo, la solución de ecuaciones debe basarse en las propiedades de los números reales y de las igualdades para que los estudiantes despejen adecuadamente las incógnitas. Esto es importante en el momento de estudiar conceptos como la función, cuando se requiere hallar los puntos de corte con el eje x, lo que implica resolver una ecuación. En el caso de la función cuadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$ con a, b, c números reales y $a \neq 0$ debe resolverse la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$, empleando las propiedades de los números reales, de las igualdades y la técnica de completar el cuadrado (Stewart, Redlin & Watson, 2012). Con esto se concluye la importancia de articular la teoría con los procesos algorítmicos

Otro aspecto que también se debe desarrollar en el aula de clase, es la articulación de los contenidos temáticos y las situaciones reales conocidas por los estudiantes. En este sentido, investigadores como Artigue (2011) y Lozano y Sierra (2012) indican que la enseñanza debe dar cuenta de las aplicaciones reales de los saberes aprendidos, por lo cual mencionan, que el docente emplee la modelación matemática, dado que es la herramienta didáctica más indicada para tal fin. De hecho, el MEN (1998) reconoce que la modelación matemática es un proceso en el cual, los estudiantes comienzan con fenómenos o problemas de su entorno, los observan, describen, relacionan, y analizan para hacer conjeturas y formular expresiones que expliquen el fenómeno o problema desde el punto de vista matemático.

Con base en lo anterior, uno de los contenidos temáticos que tiene distintas aplicaciones en la realidad y permite abordar la modelación matemática es el concepto de función. Según Vargas (2011), este concepto permite describir el comportamiento de situaciones sociales y de fenómenos naturales, los cuales pueden modelarse para encontrar una representación matemática que dé cuenta de las respectivas predicciones.

Sin embargo, López y Sosa (2008), manifiestan que la manera en que el docente presenta el concepto de función conduce a que los estudiantes tengan dificultades con la modelación matemática. Los autores mencionan, que cuando se aborda este concepto, el docente sigue unos pasos en estricto orden, primero la define como la representación de dos conjuntos unidos a través de una flecha, la definición se trata como una correspondencia entre conjuntos; luego simboliza la función utilizando la expresión $f(x)$, y finalmente, muestra la representación gráfica de la función en el plano cartesiano. Este modo de definir la función aísla la relación entre variables y la idea de variación, desfavoreciendo así el papel que cumple para modelar y explicar fenómenos de la realidad; esto se convierte en una dificultad para los estudiantes, cuando requieran encontrar una expresión o la gráfica de una función que modele un fenómeno. En conclusión, se puede decir, que un proceso de modelación matemática requiere la presentación de los conceptos basada en la teoría matemática.

Para tratar de mitigar el impacto de las problemáticas planteadas, en esta investigación se diseñó una estrategia didáctica para la modelación matemática con el concepto función cuadrática, la cual fue aplicada en la institución educativa integral de formación e investigación Misak con los estudiantes de grado décimo. En primer lugar, se desarrolló una estructura matemática para el concepto de función cuadrática, que incluyó la teoría, los ejercicios, problemas geométricos, hallar raíces de la función, problemas de aplicación, entre otros. Una vez se realizó esto, se adaptaron al ámbito escolar varias fases del modelamiento matemático propuesto por Velten (2009), las cuales fueron adoptadas por los estudiantes para aproximarse a la modelación matemática de situaciones reales.

La investigación propone una estructura matemática para estudiar el concepto de función cuadrática fundamentado en un desarrollo teórico, y además, propone la formulación de una estrategia de modelamiento ajustada al ámbito escolar para estudiantes de grado decimo de la institución educativa Misak ubicada en Morales, Cauca.

1.1 Justificación

Los docentes de la Institución Educativa Integral de Formación e Investigación Misak en el caso de las funciones por ejemplo, y específicamente en la función cuadrática hacen énfasis en que los estudiantes afiancen en hacer tabulaciones, en hallar dominios y rangos, puntos de corte y en las representaciones etc., dejando de lado las distintas aplicaciones que estas funciones tienen en situaciones reales. Inclusive en el transcurso de dichos procedimientos los docentes tratan de subsanar las confusiones que tienen los estudiantes en cuanto a la solución de ecuaciones, las cuales se han generado por las pseudo-reglas no fundamentadas en la teoría que se mencionaron en el apartado anterior. Además, por falta de tiempo, no se abordan situaciones reales que pueden modelarse utilizando la función cuadrática.

La problemática respecto a la modelación matemática de situaciones se puede evidenciar desde el grado noveno, con los resultados de las pruebas saber realizadas en el año 2017 (Icfes, 2017). Estos resultados muestran cuatro niveles, el porcentaje de estudiantes que hay en cada uno de ellos y la respectiva descripción. Según esto, se tiene que el 38% de los estudiantes están en el nivel insuficiente, pues sólo interpretaron información representada en tablas y gráficas, el 60% estuvo en el nivel mínimo, donde reconocieron y utilizaron representaciones de funciones, solo el 2% de los estudiantes están en el nivel satisfactorio pues modelaron situaciones sencillas; ningún estudiante estuvo en el nivel avanzado. Esto se puede apreciar en la figura 1.

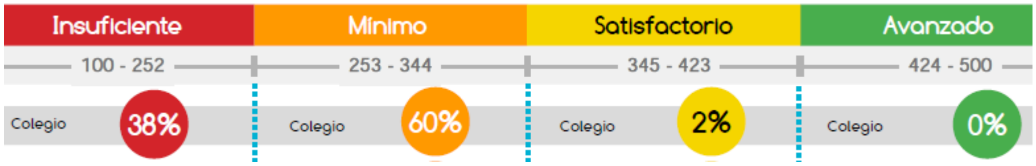


Figura 1. Niveles de desempeño en las pruebas saber noveno. Icfes (2017)

Dado que los resultados muestran mínimos avances respecto a la modelación matemática, surgió la intención de emprender estrategias para que tanto docentes como estudiantes asimilaran su importancia, y que estos últimos lograran modelar situaciones reales. En esta oportunidad, se eligieron los estudiantes de grado décimo para modelar situaciones reales vinculadas con la función cuadrática.

La autora consideró que para modelar situaciones reales con la función cuadrática, previamente se debía planear y desarrollar una estructura matemática, la cual diera cuenta de una fundamentación matemática donde los estudiantes adquieran saberes en cuanto a la solución de ecuaciones cuadráticas, el despeje de incógnitas o variables con rigurosidad matemática, elementos teóricos del concepto de función cuadrática, ejercicios y problemas de aplicación respectivos, pues así, tendrían bases teóricas y procedimientos algorítmicos rigurosos para desarrollar un proceso de modelación matemática.

Indagando en la teoría preliminar, no se encontró ninguna estrategia en la literatura especializada que abordara la formulación de la estructura matemática como base fundamental para el desarrollo del modelamiento por parte de los estudiantes, por ello, se desarrolló la presente investigación, la cual tuvo en cuenta el aspecto mencionado. Así, se llegó a una nueva propuesta metodológica para el estudio de los conceptos matemáticos y para la modelación matemática en el ámbito escolar.

1.2 Pregunta de investigación

¿La estrategia basada en el desarrollo de una estructura matemática, permite aproximar a los estudiantes de grado décimo a la modelación matemática de situaciones reales utilizando funciones cuadráticas?

1.3 Objetivos

1.3.1 Objetivo general.

Diseñar una estrategia basada en el desarrollo de una estructura matemática para aproximar a los estudiantes de grado décimo de la Institución Educativa Integral de Formación e Investigación Misak a la modelación matemática de situaciones reales utilizando funciones cuadráticas.

1.3.2 Objetivos específicos.

- ✓ Proponer para el ámbito escolar una perspectiva de modelación matemática.
- ✓ Elaborar una estructura matemática que le permita a los estudiantes acceder a los conceptos de funciones cuadráticas.
- ✓ Aplicar la perspectiva de modelación matemática para aproximar a los estudiantes en la interpretación de situaciones reales utilizando funciones cuadráticas.

1.4 Planteamiento de hipótesis

El desarrollo de una estructura matemática de las funciones cuadráticas permite que los estudiantes se aproximen a la modelación matemática de situaciones reales que estén relacionadas con dicho concepto.

2. Marco de referencia

2.1 Estado del arte

2.1.1 Una revisión a la literatura internacional de la modelación matemática

Para la presente propuesta se realizó una búsqueda en la literatura para presentar los estudios que se han realizado acerca de la modelación matemática y los aportes que esta ha dado a las investigaciones desarrolladas en el ámbito educativo.

En la literatura internacional se encuentra una variedad de documentos que relacionan la modelación y la educación matemática, los cuales tratan entre otros aspectos temáticas sobre implementar la modelación como proceso y como recurso en la clase de matemáticas, en este caso se encuentran varios autores que se pronuncian al respecto, entre ellos Hein y Biembengut (2006) quienes indican que es una herramienta didáctica para enseñar o para investigar; Blum y Borromeo (2009), establecen que es la base para aprender matemáticas; Blomhøj y Jensen (2003), y, Galbraith y Stillman (2006) comparten la idea de que la modelación contribuye a la enseñanza y al aprendizaje de las matemáticas, en esta misma dirección se encuentran Greefrath, Siller y Weitendorf (2011), pero también consideran que se debe integrar la tecnología, pues esta amplía la posibilidad de resolver problemas.

La modelación matemática en el aula de clase puede concebirse como una herramienta didáctica para enseñar o para investigar, permitiendo a los estudiantes entre otras cosas vincular las matemáticas con otras áreas del conocimiento, mejorar la aprehensión de los conceptos matemáticos, desarrollar la habilidad para usar elementos tecnológicos como la calculadora graficadora y las computadoras, estimular la creatividad para formular y resolver problemas, favorecer la capacidad de trabajar en grupo y promover el interés por las matemáticas y por la investigación (Hein & Biembengut, 2006). Estos aspectos de alguna manera contribuyen a un solo fin, lograr que los estudiantes construyan conceptos matemáticos; la modelación se define como método de enseñanza y de investigación, especialmente para espacios académicos ceñidos por la enseñanza formal, donde necesariamente se debe desarrollar un currículo, cumplir un horario de clases, y, además, inciden factores como el número de estudiantes y la disponibilidad de tiempo para que el profesor realice un acompañamiento simultaneo al trabajo de los estudiantes.

Según Hein y Biembengut (2006), la modelación matemática como método de enseñanza se puede implementar atendiendo al contenido matemático programado. De esta manera los estudiantes pueden mejorar aspectos como la capacidad de lectura, de formulación, resolución de situaciones problemáticas, y la aprehensión de los conceptos matemáticos.

Esta perspectiva de modelación no es un modo de transmitir conocimientos matemáticos, sino que proporciona una alternativa para emplear conceptos matemáticos desde situaciones problemáticas. En este sentido, se podría inferir que la modelación es el proceso donde se utilizan los conceptos que han sido desarrollados en el proceso de transposición didáctica

Para implementar la modelación el docente tiene dos alternativas, la primera, elegir una temática de algún área del conocimiento para elaborar un modelo matemático ajustado a un concepto matemático, y la segunda alternativa, consiste en tomar un modelo que esté construido para adaptarlo al contenido matemático programado.

Cualquier alternativa que elija el docente, conduce a que realice un trabajo simultaneo con los estudiantes, donde desarrolle las siguientes etapas: exponer el tema, donde el docente inicia la clase explicando la modelación matemática para que los estudiantes realicen preguntas sobre la temática en cuestión; delimitar el problema, donde se eligen las preguntas que permitan exponer el contenido matemático programado; formular el problema planteando hipótesis, ecuaciones y organizando los datos; desarrollar el contenido programático, donde se exponen conceptos, definiciones, propiedades, etc., que estén relacionados con la pregunta que propicio el proceso; presentar ejemplos análogos, con el propósito de amplificar las aplicaciones relacionadas con la situación abordada, en esta parte se puede emplear elementos tecnológicos como calculadoras y computadores; formular el modelo matemático y resolver la situación problemática a partir del modelo; finalmente se interpreta la solución y se valida el modelo.

En cuanto a la modelación como método de investigación, Hein y Biembengut (2006) indican que está encaminada a que los estudiantes aprendan a investigar, por lo que deben elaborar modelos matemáticos para aplicarlos en algunas áreas del conocimiento. En esta perspectiva, el trabajo se realiza simultáneamente con el desarrollo del contenido curricular, y para ello se proponen cinco etapas que consisten en lo siguiente: En la primera etapa se elige el tema, donde los estudiantes seleccionan un tema de interés, y bajo la dirección del docente deben obtener datos a través de bibliografías o consultas a personas especializadas en el tema. De esta forma los estudiantes pasan a la segunda etapa, donde se familiarizan con el tema a modelar, empleando los datos obtenidos para elaborar preguntas y al final realizan una síntesis de la investigación. Posteriormente, pasan a la tercera etapa, donde se delimita y reformula la pregunta, en esta parte se retoman las preguntas elaboradas para delimitarlas y formularlas, de manera que requiera matemática elemental. Una vez hecha la formulación, pasan a la cuarta etapa, que consiste en elaborar el modelo que resuelva el interrogante y, a su vez contribuya a resolver otras preguntas. Finalmente, el proceso de modelación como método de investigación, termina en la divulgación del trabajo realizado, tanto de manera escrita como oral.

Independientemente del enfoque de modelación que tome el docente, Hein y Biembengut (2006), recomiendan la importancia de la planificación para el proceso de modelación matemática. Esto, porque es adecuado establecer con antelación estrategias para disipar problemas relacionados con el aprendizaje, estructura y forma de adoptar el proceso, las practicas a desarrollar, la evaluación del proceso y los resultados. En este sentido, si el docente tiene una planificación, entonces puede haber orientación tanto para él como para los estudiantes durante el proceso de modelación.

De otro lado, Blum y Borromeo (2009) asumen que la modelación es la base para aprender matemáticas, dado que los estudiantes construyen, comprenden y retienen conceptos, comprenden el mundo que los rodea y conciben una imagen adecuada de las matemáticas encontrándolas cada vez más significativas. La modelación como parte de la enseñanza de las matemáticas es un proceso cíclico que se desarrolla en varios momentos, pues en general, busca transformar una situación real en un problema matemático, cuya solución es interpretada mediante un modelo matemático. Durante esta transformación se logran construir los objetos matemáticos. A continuación, se esboza el ciclo de modelación desde la perspectiva de estos autores.

La primera fase o el inicio del ciclo de modelación consiste en establecer una situación del mundo real donde se involucra al estudiante a fin de encontrar solución a un problema. Es preciso que en esta parte el estudiante realice un proceso de construcción mental del problema, es decir, que describa la situación real con elementos de su contexto, para así tener más claridad respecto a la situación. Para ello puede diseñar un bosquejo o una imagen ilustrativa que permita obtener un modelo de la situación real. Dicho modelo debe ser simplificado y estructurado de acuerdo a los conocimientos y propósitos de los estudiantes, por lo cual se emplea la información real y necesaria proporcionada por el problema. De esta manera el estudiante construye un modelo real que le permite explicar el problema bajo los datos más importantes que él ha considerado.

Seguidamente, el modelo real pasa por un subproceso de matematización, donde los datos, relaciones y condiciones que lo conforman y que aún conservan características que describen la situación real se traducen al lenguaje matemático. Es así, como se genera un modelo matemático, el cual consiste en expresiones algebraicas o en ecuaciones.

El modelo matemático generado, pasa por un subproceso que en el ciclo de modelación se denomina trabajo matemático, aquí, los estudiantes abordan el modelo empleando métodos matemáticos para obtener resultados matemáticos. El trabajo matemático que se menciona se concibe en los estilos de pensamiento matemático del estudiante, los cuales dan cuenta de la manera en que prefiere mostrar, entender y analizar las situaciones y las relaciones mediante las matemáticas, empleando para ello, algunas imaginaciones internas y representaciones exteriorizadas.

En coherencia con lo anterior, los estilos de pensamiento de los estudiantes son las preferencias de cómo utilizar las matemáticas, es decir, la manera de proceder para solucionar problemas matemáticos, por ello, está constituido respectivamente por dos componentes: imaginaciones internas y representaciones exteriorizadas, y la forma holística, las cuales dan cuenta de la forma de proceder en la solución de problemas matemáticos. Para Blum y Borromeo (2009) los estilos de pensamiento matemático pueden ser de tipo visual, analítico o integrado, estos se explican a continuación.

Estilo de pensamiento visual (pictórico – holístico): los sujetos prefieren las distintas imágenes internas pictóricas y representaciones pictóricas exteriorizadas, para así comprender hechos matemáticos y relaciones mediante representaciones que ilustren el problema. En este caso, los sujetos durante el ciclo de modelación tienden a enfocarse en la parte del proceso del mundo real, por ello, los resultados los expresan con los significados que le han dado a la situación real.

Estilo de pensamiento analítico (simbólico): los pensadores analíticos prefieren imaginaciones formales internas y representaciones formales externalizadas. Estos sujetos se enfocan en el paso a paso de los procedimientos, y pueden ser capaces de comprender y expresar hechos matemáticos mediante expresiones simbólicas o representaciones. Por tal razón, durante el ciclo de modelación, las personas se enfocan en la parte matemática del proceso.

***Estilo de pensamiento integrado*:** Los sujetos son capaces de combinar simultáneamente formas visuales y analíticas de pensamiento.

Los estudiantes toman los resultados matemáticos y los llevan a la situación real para contrastarlos, y así garantizar la validación del modelo. En esta parte, los resultados deben traducirse a la situación real para interpretarlos como resultados reales, en este caso se dan los argumentos para solucionar el problema que se encontró en la situación del mundo real de la primera fase. De manera simultánea se desarrolla la validación del modelo, para ello se realizan comparaciones, haciendo corresponder la interpretación de los resultados matemáticos con la solución del problema. En caso de que el modelo no satisfaga la solución del problema o no sea compatible con situación real se tendrá que repetir el ciclo de modelación hasta lograr obtener un nuevo modelo matemático que si satisfaga las condiciones requeridas. Si se logra ajustar el modelo con la situación real, los resultados de la modelación podrán ser expuestos por los estudiantes en el aula de clase. El ciclo de modelación mencionado se representa en la figura 2.

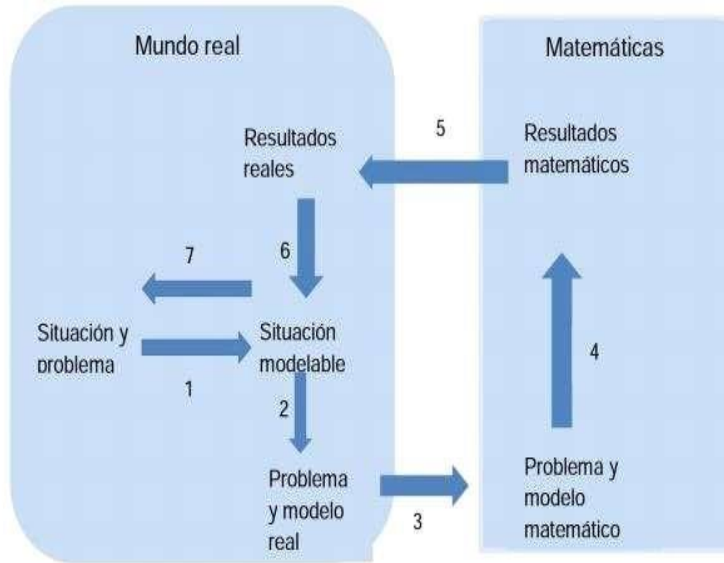


Figura 2. Ciclo de modelación. Adaptado de Blum y Borromeo (2009)

En la misma dirección de Blum y Borromeo (2009), se encuentran Blomhøj y Jensen (2003), quienes indican que la modelación es una práctica que logra relacionar las matemáticas y la realidad, colocándolos a la vez como centro de la enseñanza y el aprendizaje. Este aspecto, motiva al estudiante a aprender y además, le proporciona elementos cognitivos para la construcción de los conceptos.

La modelación matemática de Blomhøj y Jensen (2003) es una descripción de la elaboración y de la empleabilidad de un modelo, y para ello es necesario recorrer todo un camino denominado proceso de modelación matemática que consta de seis fases que consisten lo siguiente. En primer lugar, está la formulación del problema, la cual debe tener cierto grado de claridad y precisión, para que así oriente al modelador a identificar las características de la realidad que serán modelizadas.

La segunda fase es la sistematización, que parte de un dominio de investigación previamente establecido, es decir, de una parte del contexto o de la naturaleza del problema, y a partir de ahí, el modelador selecciona los elementos más importantes y las relaciones para posteriormente, en la fase de matemátizacion traducirlos al lenguaje matemático, donde resultan expresiones algebraicas o ecuaciones. En la fase siguiente se emplean métodos y se realizan procedimientos matemáticos para resolver las expresiones obtenidas, y así llegar a los resultados matemáticos, o mejor, al modelo matemático, el cual es retomado en la quinta fase para interpretarlo desde el dominio de investigación. Finalmente, el modelo obtenido debe ser validado, y para ello se emplea la comparación de datos ya observados, con la teoría o con la experiencia personal. El proceso de modelación descrito se muestra en la figura 3.

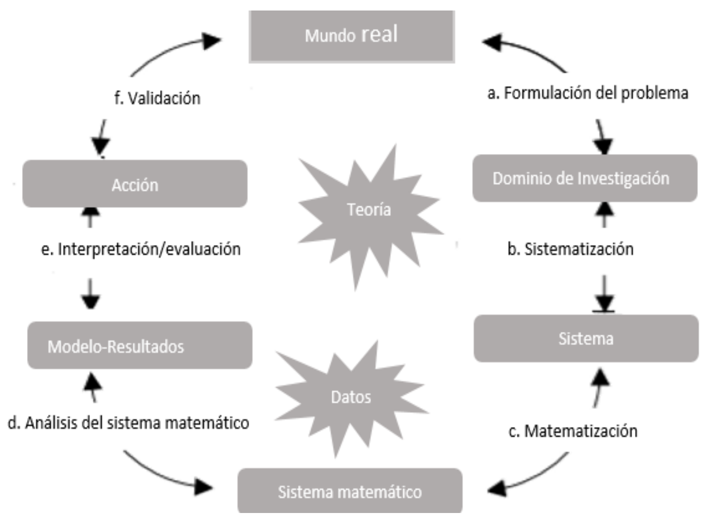


Figura 3. Ciclo de modelación. Adaptado de Blomhøj y Jensen (2003)

Blomhøj y Jensen (2003), asumen que la modelación matemática consiste en pasar por todo el proceso anterior, y recalcan que es un proceso cíclico, pues dependiendo de los análisis que se hagan al modelo o el propósito para el cual fue creado o diseñado, se deberá regresar o repetir algunas fases para redefinirlo. Además, recalcan que la labor de los estudiantes es importante en las fases de matematizacion y de análisis, pues ambas requieren de un trabajo cognitivo exigente, incluso, en el caso en el que los conceptos matemáticos sean bien conocidos. De ahí que, en el proceso de modelación haya tanto esfuerzo por parte de los estudiantes y apoyo pedagógico por parte de los docentes.

Para Galbraith y Stillman (2006), la modelación es un método de enseñanza y aprendizaje, cuyos propósitos son resolver problemas y con el tiempo desarrollar habilidades de modelación para que los estudiantes describan y resuelvan problemas del ámbito personal y social. De esta manera, el docente podrá tener mayor comprensión de lo que hacen los estudiantes al intentar resolver problemas de modelación, al tiempo que tendrá bases para hacer juicios e intervenciones pertinentes. En este sentido, el esquema del proceso de modelación de la figura 4 comprende la necesidad de captar lo que ocurre en la mente de las personas a medida que desarrollan el trabajo de modelación.

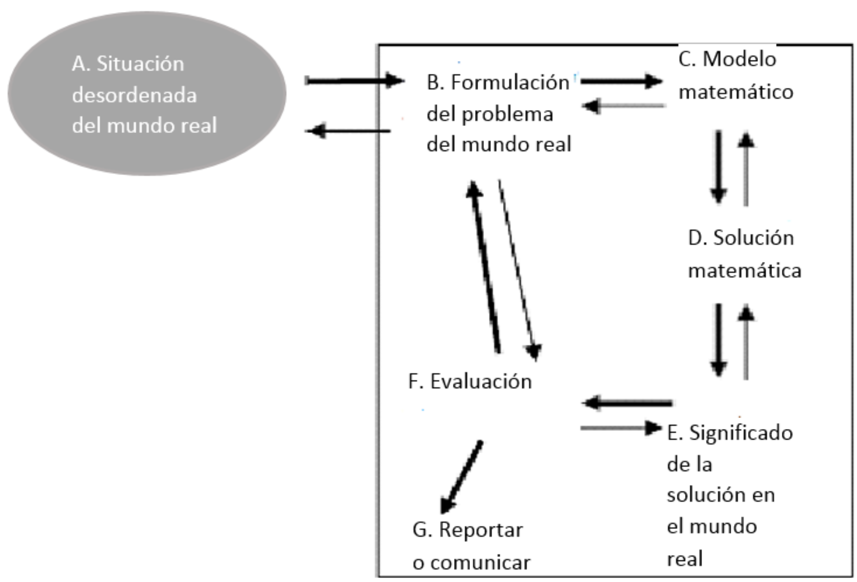


Figura 4. Proceso de modelación. Adaptado de Galbraith y Stillman (2006)

En el proceso de modelación de la figura 4 las entradas [A] -[G] representan las etapas, y las flechas más gruesas ilustran transiciones entre estas; el proceso queda descrito siguiendo las flechas en el sentido de las manecillas del reloj desde la parte superior izquierda. De esta manera, la primera etapa es una situación desordenada del mundo real [A] y culmina en el reporte [G] de un resultado satisfactorio, o en un nuevo ciclo si la evaluación indica que la solución es insatisfactoria. La explicación del proceso de modelación de Galbraith y Stillman (2006), se hace a partir de las transiciones definidas en la tabla 1, y de las actividades metacongnitivas (actividades mentales) clasificadas en la tabla 2 de acuerdo a las transiciones, las cuales determinan la manera en que el sujeto modelador intenta hacer cada una de las transiciones.

Tabla 1. Transiciones en el proceso de modelación.

Transición	Etapa inicial	→	Etapa final
1	Situación desordenada del mundo real	→	Planteamiento del problema del mundo real
2	Formulación del problema del mundo real	→	Modelo matemático
3	modelo matemático	→	Solución matemática
4	Solución matemática	→	Significado de la solución en el mundo real
5	Significado de la solución en el mundo real	→	Evaluación
6	Evaluación	→	Reportar o comunicar (si el modelo es satisfactorio)
7	Evaluación	→	Revisar el proceso (si el modelo es insatisfactorio)

Fuente: Adaptado de Galbraith y Stillman (2006).

Tabla 2. Actividades metacognitivas en las transiciones del proceso de modelación.

Transición	Actividades metacognitivas
1	Comprender, estructurar, simplificar e interpretar el contexto.
2	Formular y matematizar.
3	Trabajar matemáticamente.
4	Interpretar del resultado matemático
5	Comparar y validar
6	Comunicar, justificar e informar (si el modelo es favorable)
7	Revisar el proceso de modelación (si el modelo es desfavorable)

Fuente: Adaptado de Galbraith y Stillman (2006).

Teniendo en cuenta lo anterior, el proceso de modelación de Galbraith y Stillman (2006) en el ámbito educativo se puede describir de la siguiente manera. En la primera transición, el sujeto modelador comprende, estructura, simplifica e interpreta el contexto de la situación para formular el problema. En la segunda transición, identifica los elementos relevantes del problema, establece relaciones entre ellos, hace formulaciones y matematiza, es decir, realiza traducciones al lenguaje matemático para así obtener un posible modelo matemático (expresiones algebraicas o ecuaciones).

En la tercera transición, el sujeto toma el posible modelo para realizar un trabajo matemático, este es el momento donde emplea procedimientos matemáticos para encontrar la solución del modelo. Las siguientes transiciones consisten en interpretar la solución en el mundo real mediante comparaciones y análisis para llegar a la validación; en el caso que el modelo sea satisfactorio se comunica o se realizan informes escritos, de lo contrario se debe revisar el proceso de modelación desarrollado. El esquema del proceso de modelación se muestran flechas en doble sentido, y ello se debe a dos razones: que el proceso no es lineal, y que en cada transición hay presencia de actividad metacognitiva.

El papel del docente durante las actividades de modelación, y en particular en las actividades metacognitivas es importante, pues contribuye a que los estudiantes desarrollen habilidades para la modelación, y evadan bloqueos que le impidan continuar en el proceso de solución. Para tal propósito, él debe monitorear el progreso individual o grupal para evaluar e intervenir estratégicamente en las actividades metacognitivas, sin olvidar algunos aspectos didácticos durante el proceso de modelación. Esto último hace referencia a que el docente debe garantizar que los estudiantes tengan las competencias matemáticas requeridas para elaborar el modelo, como la comprensión y facilidad con los procedimientos técnicos concernientes al uso de la tecnología, tales como, calcular, realizar diagramas de datos y graficas de funciones, etc.

En los ciclos de modelación hasta ahora mencionados no se incluye el uso de herramientas digitales y computacionales, sólo los mencionan para indicar que usarlos permite entre otras cosas, facilitar cálculos y realizar gráficos. En vista de esto, se trae a colación el ciclo de modelación de Greefrath et al. (2011), quienes basados en el ciclo de modelación de Blum y Borromeo (2009), deciden integrar el mundo tecnológico al mundo real y mundo matemático para plasmar en él la relevancia de las herramientas tecnológicas, como se muestra en la figura 5.

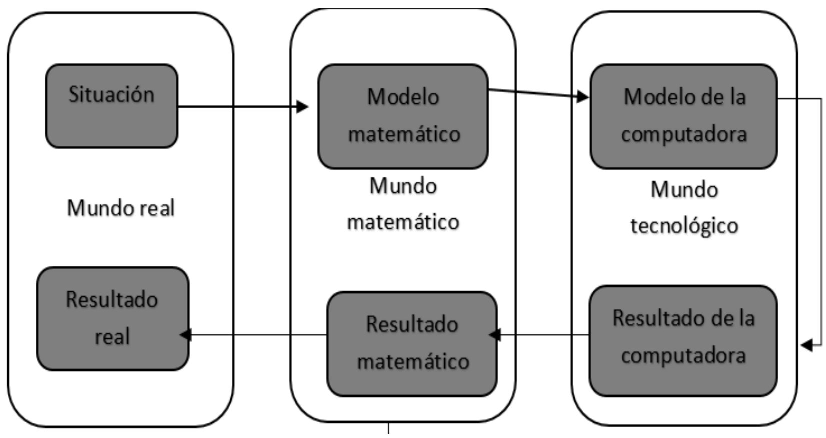


Figura 5. Ciclo de modelación. Adaptado de Greefrath et al. (2011)

Greefrath et al. (2011) considera que el desarrollo de un modelo matemático depende tanto del conocimiento matemático como de las posibilidades que ofrece la tecnología para resolver modelos, por tal razón decide ampliar el ciclo de modelación incluyendo el mundo de la tecnología. En este sentido, las herramientas tecnológicas son útiles en el paso del modelo matemático al resultado matemático (solucionar expresiones matemáticas complejas), pero su uso más relevante está en que ayuda a entender un problema (obtener ideas), traducir el modelo de la realidad al modelo matemático, interpretar y validar resultados.

En este caso, se debe tener presente que las principales herramientas según Barzel et al. (2005, citados por Greefrath et al. 2011) son: el sistema de algebra computacional con el cual se puede trabajar símbolos, algebra y algoritmos; el software de geometría dinámica que permite crear construcciones geométricas y trabajar interactivamente con hojas digitales; las hojas de cálculo que ayudan a organizar datos reales para facilitar el manejo, realizar cálculos en tablas y analizar similitudes. Por todo lo anterior, se puede decir que la modelación resulta exitosa si se pone en juego tanto el conocimiento matemático como las herramientas tecnológicas.

Para culminar, se trae a colación la idea de Kaiser y Sriraman (2006), quienes presentan el desarrollo que ha tenido la modelación a través siete perspectivas, las cuales están clasificadas de acuerdo al propósito para el cual el docente la implementa en el aula escolar. En la tabla 3 se presentan las siete perspectivas especificando las principales características.

Tabla 3. Perspectivas de la modelación

Perspectiva	Características principales
Modelación realística o aplicada	La modelación es un proceso que tiene propósitos de índole pragmático y utilitario, es decir resolver problemas y comprender la realidad. De aquí que la modelación transforme una situación de la realidad en un modelo matemático a través de la interpretación, la abstracción y la simplificación
Modelación contextual	La modelación es una actividad que promueve la resolución de problemas del contexto. En este caso, se deben tener en cuenta aspectos psicológicos, pues son el soporte para tratar dificultades de aprendizaje relacionadas con el modelo matemático.
Modelación educativa	La modelación es un mediador para aprender matemáticas, por ello tiene fines estrictamente pedagógicos. De aquí que esté relacionado con la estructura de los procesos de aprendizaje, la introducción y desarrollo de conceptos y con la motivación de los estudiantes por las matemáticas.
Modelación socio-crítica	Los estudiantes reflexionan críticamente acerca del proceso de modelación y del papel que tienen los modelos en situaciones reales

Modelación epistemológica	La modelación es una herramienta para construir y vincular la actividad matemática emergente de situaciones problemáticas planteadas por una comunidad.
Modelación cognitiva	La modelación da cuenta de habilidades cognitivas, por ello su interés es netamente psicológico pues busca analizar los procesos mentales que se dan en la modelación.

Fuente: Adaptado de Kaiser y Sriraman (2006).

Hasta el momento sólo se ha mencionado desde la literatura internacional el papel que toma la modelación en el aula de clase, a continuación, se hace una descripción a nivel nacional.

2.1.2 La modelación matemática en Colombia

En el marco nacional, la modelación matemática se retoma de los planteamientos del ministerio de educación nacional MEN (1998) y de Villa (2009). En el primero, la modelación matemática es un proceso que permite relacionar las matemáticas y el contexto del estudiante, por lo que debe implementarse en el aula escolar para promover el aprendizaje de las matemáticas; la modelación conduce a realizar observaciones, reflexiones, argumentaciones y predicciones contribuyendo así, a la construcción significativa de los conceptos matemáticos. Mientras que, en el segundo, la modelación se asume como una estrategia en la que el estudiante retoma sus conocimientos tanto matemáticos como cotidianos para relacionarlos, y así abordar de una manera diferente y con actitud motivante problemas tomados de un contexto real, pretendiendo así, que entienda el concepto matemático inmerso en una situación contextual; la modelación resulta siendo una herramienta de aprendizaje que contribuye a mejorar la comprensión de los conceptos.

Según los planteamientos del MEN (1998), el proceso de modelación surge con una situación de la realidad que debe simplificarse, estructurarse y precisarse, esto depende de los intereses de la persona que resuelve el problema. De esta manera se llega a la formulación del problema, el cual conserva elementos relevantes de la situación inicial y puede ser tratado matemáticamente. Es aquí, donde se emplean los datos del problema, conceptos matemáticos, se establecen relaciones y se hacen suposiciones para traducirlos al lenguaje matemático, obteniendo así el modelo matemático que representa la situación inicial. Posteriormente, este modelo pasa a un trabajo matemático, donde se hacen conclusiones, cálculos y se emplean procedimientos matemáticos, para finalmente obtener resultados que deben ser aplicados e interpretados en la situación inicial para ser validados. De esta manera, va culminando el proceso de modelación, pues si el modelo es satisfactorio entonces puede emplearse para hacer predicciones y tomar decisiones frente a la situación problema; en caso que el modelo sea desfavorable se debe retornar reiteradamente a pasos anteriores.

Por otra parte, Villa (2009), admite que la modelación matemática es el proceso que permite estudiar fenómenos o situaciones procedentes de contextos cercanos a los estudiantes, de otras ciencias o disciplinas académicas. En este proceso se emplean saberes matemáticos y del contexto para establecer relaciones que permitan construir el modelo. Esto implica que se deba seguir una serie de fases conocidas habitualmente como el ciclo de modelación. La representación correspondiente a este ciclo se observa en la figura 6, en primera instancia se inicia con un fenómeno o problema de la realidad, el cual se somete a la experimentación para tratar de comprenderlo, recopilar datos e identificar elementos relevantes, dado que en este último aspecto puede ser imposible considerar todos los elementos, se deben hacer simplificaciones e hipótesis que permitan excluir algunos de ellos. Con toda la información recolectada, se empiezan a establecer relaciones para elaborar el modelo que represente el fenómeno o problema real. Posteriormente, pasa a ser analizado y luego de emplear herramientas matemáticas se llega a la solución teórica, de la cual se obtienen los resultados del modelo que serán interpretados y evaluados en la realidad para dar cuenta de su validación. En esta parte pueden surgir dos posibilidades, si el modelo se ajusta al fenómeno entonces culmina el ciclo; de lo contrario, se inicia nuevamente el ciclo teniendo como punto de partida el análisis realizado en la evaluación del problema.

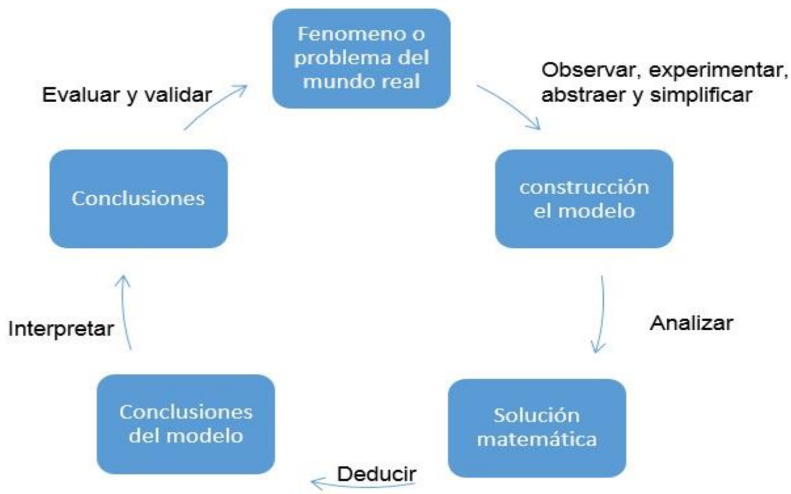


Figura 6. Proceso de modelación. Adaptado de Villa (2009)

2.1.3 Aportes de la modelación matemática para la enseñanza de funciones lineales y cuadráticas

La propuesta de Roldan (2013), surge porque desde el punto de vista didáctico, en la práctica docente hay una falta de sentido y de significado con el concepto de función lineal, y los elementos o parámetros que la conforman, tales como inclinación e interceptos. Por ello, propone una alternativa donde se crean actividades basadas en la experimentación como puente para aprender y elaborar modelos matemáticos, los cuales dan cuenta de elementos relacionados con la función lineal. En este sentido, los estudiantes parten analizando situaciones matemáticas y cotidianas, realizando experimentaciones y prácticas de laboratorio, en las cuales hacen mediciones, y registros para luego matematizarlos, y así generar ideas y nociones para desarrollar el concepto de función lineal

De igual manera, la investigación de Bossio (2014) surge porque en la educación escolar se ha prestado más interés en la mecanización de los procedimientos y en proponer problemas desarticulados del contexto estudiantil, por ello, consideran que el proceso de modelación es pertinente para vincular las matemáticas con una situación del contexto de los estudiantes. La idea es analizar un proceso de modelación en el que los estudiantes abordan el problema de la ganancia en la producción de plátano, para obtener modelos lineales. Los autores se basaron en el ciclo de modelación de Blum y Borromeo (2009) y concluyeron que los participantes tenían experiencia en la situación abordada lo cual los condujo a percibir y relacionar la información que cambia, también usaron gráficas para describir los cambios y construyeron expresiones algebraicas para así obtener modelos lineales. Los estudiantes identificaron las variaciones en la situación y a partir de las líneas rectas representadas gráficamente reconocieron lo que estas realizan al tener más inclinación. Se concluye que no es necesario dar una definición del concepto de función lineal, pues el proceso de modelación y la situación contextualizada permiten que los estudiantes se aproximen a dicha definición.

En cuanto a las funciones cuadráticas, está el trabajo de maestría de Vargas (2011), el cual trata del diseño e implementación de una unidad didáctica encaminada a la modelación de fenómenos físicos que den cuenta de las aplicaciones de la función cuadrática. La autora indica que para llegar al modelo matemático los estudiantes describieron la situación problemática, plantearon hipótesis o conjeturas, identificaron variables, experimentaron la situación a través de la realidad o de manera virtual, tomaron y analizaron datos, formularon e identificaron el modelo matemático, y por último, validaron las hipótesis con el modelo obtenido. La unidad didáctica consta de una secuencia de actividades que inician con la determinación de los conocimientos previos de los estudiantes, luego con actividades de desarrollo donde se proponen fenómenos físicos cuya experimentación se realiza de manera directa o con el programa simulador *modellus*, esto con el fin de obtener y analizar datos. Posteriormente se presentan actividades de refuerzo donde las situaciones ya presentadas tienen algunas variaciones, pretendiendo así que los estudiantes empleen nuevamente el proceso de modelación y terminen comprendiéndolo, luego se proponen actividades de ampliación que son más generales para que los estudiantes analicen otros aspectos, y finalmente se presentan las actividades de síntesis donde los estudiantes dan sus apreciaciones para generalizar y recopilar los aspectos más importantes del proceso de modelación. La autora concluye que la unidad didáctica da cuenta de un método para la enseñanza de la función cuadrática, que les permite a los estudiantes comprender este concepto, también el comportamiento, la representación, la descripción y las aplicaciones para modelar fenómenos físicos. Además, menciona que el papel que cumplen las simulaciones es esencial, pues permite que los estudiantes manipulen el software para descubrir la forma en que cambia la representación de la gráfica, comprendiendo así algunas propiedades para asimilar el concepto de función cuadrática.

De los planteamientos expuestos, se puede inferir que Roldan (2013), Bossio (2014) y Vargas (2011), comparten un aspecto en común, y es que a partir de la modelación matemática se puede vincular las matemáticas con situaciones del contexto de los estudiantes, de manera que, se conduzca al desarrollo, la aproximación o la comprensión de la noción de función, y en especial de las funciones lineales y cuadráticas.

Lo anterior se ha mencionado con el fin de aclarar que la presente investigación no se acopla en ninguna de ellas. Aunque las investigaciones realizadas en la educación escolar tienen valiosos resultados se puede notar que no se realiza con antelación un trabajo matemático donde los estudiantes primero adquieran la estructura teórica como definiciones, propiedades, procedimientos algorítmicos justificados matemáticamente etc., requeridos para el proceso de modelación.

En vista de lo anterior, se trae a colación el trabajo de Leal, Cardona y Agudelo (2015), quienes en su interés por que los estudiantes de un programa de ingenierías empleen los conceptos matemáticos en una situación específica de la ingeniería, propusieron un proyecto con el cual buscaban que los estudiantes formularan o emplearan modelos matemáticos para comprender y resolver problemas. Para ello, primero presentaron los contenidos básicos y específicos en este caso de las ecuaciones diferenciales ordinarias, y luego dieron lugar al proceso de modelamiento matemático siguiendo los lineamientos de Velten (2009). Dicho proceso comenzó con la elección de una situación real, luego se definió el sistema, es decir, se enmarcó la situación en un campo, en este caso el de las ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden, después se identificaron las variables que intervinieron y se establecieron relaciones entre ellas, y con ello se formuló el modelo matemático que estaba vinculado con las ecuaciones diferenciales. Al final, los autores pudieron comprobar que los estudiantes requieren de conceptos para emplearlos rigurosamente en la experimentación, es decir, en el proceso de modelación matemática, de esta manera van desarrollando posibles soluciones bien fundamentadas para la problemática abordada.

La idea acerca de la modelación matemática que conciben Leal, Cardona y Agudelo (2015) estuvo en la misma dirección que la presente investigación, en el sentido de que primero se debe realizar un trabajo de fundamentación matemática para luego pasar al modelamiento matemático. Por tal razón, el proceso de modelación que se realizó en este trabajo siguió los planteamientos de Velten (2009).

En el siguiente apartado se muestra la interpretación de la teoría de modelación matemática que fue utilizada en la investigación.

2.2 Marco Teórico

En este apartado se desarrollará el marco teórico, donde se presenta lo concerniente al proceso de modelación matemática, modelo matemático, la herramienta tecnológica Excel y otros aspectos necesarios para la investigación.

2.2.1 Modelación matemática y modelo matemático

El lenguaje simbólico de las matemáticas permite representar de manera cuantitativa los cambios en los fenómenos de tipo económico, social, físico, etc. No obstante, si se quiere estudiar cómo cambia una magnitud entonces se debe usar las distintas herramientas matemáticas. En este sentido, según Sierpinska (1992), los estudiantes deben predecir cambios y relacionarlos, y tener la oportunidad de utilizar el conocimiento sobre las funciones para explicar los fenómenos sociales, económicos y de su vida diaria.

La idea de utilizar la fundamentación matemática respecto a las funciones lineales y cuadráticas, para luego realizar predicciones y conjeturas cobra relevancia dentro de la modelación. En esta dirección, se empleó el esquema de modelación en el marco de la ingeniería que propone Velten (2009), pues él asume que se debe usar una estructura matemática para lograr modelar problemas reales, de modo que hallen soluciones y se tomen decisiones bien sea para el bienestar o malestar de la sociedad.

Velten (2009) propone un esquema para el proceso de modelación y simulación, el cual tiene el propósito de resolver problemas, pero para comprenderlo, primero es necesario definir algunos términos como sistema y simulación. El sistema hace referencia al objeto de interés, el cual puede pertenecer a la naturaleza o a la tecnología artificial. Según esto, entonces el sistema debe ser observable, puede resultar muy amplio y en consecuencia muy complejo, por lo cual, lo primero que se debe buscar es la manera de hacerlo más simple. En el ámbito particular de las matemáticas, el sistema puede ser cualquier objeto siempre y cuando se tenga una pregunta relacionada con el objeto que se pueda responder empleando matemáticas. Otro concepto que se debe aclarar es el de simulación, el cual, consiste en la aplicación de un modelo con el propósito de obtener estrategias que ayuden bien sea a resolver el problema o responder una pregunta relacionada del sistema.

Dado que la investigación se realizó en la educación escolar, la primera medida que se tomó fue interpretar el esquema propuesto por Velten (2009), para luego ajustarlo en el escenario escolar y así encontrar la manera de aproximar a los estudiantes de grado décimo a la modelación matemática de situaciones reales.

El esquema del proceso de modelación y simulación que propone Velten (2009), está conformado por cinco fases: definiciones, análisis del sistema, modelación, simulación y validación.

Fase de definiciones: el modelador define el sistema y el problema o la pregunta a resolver. El sistema hace referencia a una parte del contexto o de la naturaleza que trata el problema o la pregunta.

Fase de análisis: en el sistema que se ha definido, se identifican los elementos más importantes relacionados con problema o la pregunta, en esta parte se pueden diseñar experimentos para recolectar datos.

Fase de modelación: los elementos identificados en la fase anterior son empleados para iniciar el proceso de diseño o adaptación de un modelo del sistema.

Fase de simulación: el modelo diseñado se aplica al problema o pregunta, con esto se derivan estrategias bien sea para resolver el problema o para responder la pregunta.

Fase de validación: se verifica que la estrategia del paso anterior resuelva el problema o la pregunta en el sistema real, en esta parte se puede comparar los resultados del modelo con datos experimentales.

El esquema de modelación y simulación no se desarrolla de manera lineal, pues, si en el paso de validación hay inconsistencias entonces se debe regresar a las fases anteriores, bien sea para mejorar la formulación del modelo, volver a analizar el sistema o redefinir la formulación del problema, dando lugar así a que se dé una interacción entre las fases, en otras palabras, este hecho hace que el esquema de modelación sea cíclico.

El proceso de modelado y simulación de Velten (2009) tiene el propósito de encontrar un modelo que describa simplificadamente un sistema real, y a su vez, permita resolver un problema o una pregunta relacionado con dicho sistema. En particular, si la descripción simplificada de un sistema real está en términos matemáticos el modelo recibe el nombre de modelo matemático.

Velten (2009) define que un modelo matemático es una tripla (S, Q, M), donde S simboliza un sistema, Q una pregunta vinculada con S, y M es un conjunto de enunciados o ecuaciones que están bien establecidas matemáticamente, y que pueden utilizarse para responder la pregunta Q. La tripla muestra el orden cronológico en el que surgen los componentes de un modelo matemático, es decir, primero aparece el sistema S, después la pregunta Q y luego el modelo.

En la tripla (S, Q, M) cada uno de estos componentes tienen un papel importante, pues si no existe el sistema entonces no se podría formular la pregunta; sin la pregunta no habría nada para hacer el modelo matemático, y sin el sistema y la pregunta, M sería sólo una expresión netamente matemática. En este sentido, se puede concluir que M se convierte en un modelo matemático cuando vincule con un sistema y una pregunta.

2.2.2 Relaciones entre ecuaciones y funciones

En esta sección se establecen algunas relaciones entre los conceptos de ecuaciones lineales y cuadráticas, y las funciones lineales y cuadráticas, dejando plasmada su relevancia para el proceso de modelación matemática.

En la educación secundaria, el lenguaje algebraico se entiende como una manera de representación matemática; se enseñan un conjunto de signos y reglas como instrumentos para hacer generalizaciones de las distintas operaciones que se desarrollan en la aritmética. En el álgebra elemental, la letra x se usa como variable, conceptualizándola como incógnita o como relación funcional; cuando se habla de relacionar cuantitativamente cantidades conocidas con cantidades desconocidas se conceptualiza a la ecuación y a la letra como incógnita, mientras que, si se habla de una relación entre magnitudes variables se habla de la noción de función (Sierpinska, 1992). En esta dirección, se deduce que la variable se aborde primero como incógnita y luego como una relación funcional, para así abordar las ecuaciones lineales y cuadráticas, y posteriormente las funciones lineal y cuadrática, pues en algunos aspectos de estas últimas entran en juego las ecuaciones.

En las ecuaciones lineales y cuadráticas en una sola variable, esta última se usa como incógnita. En el ámbito educativo, y desde una perspectiva didáctica, las ecuaciones mencionadas admiten la representación verbal y simbólica, y las soluciones se encuentran con procedimientos algebraicos o con el método gráfico.

Para la presente investigación se abordaron ecuaciones en su representación verbal y simbólica, y las soluciones se obtuvieron acudiendo a procedimientos algebraicos.

La representación simbólica expresa las ecuaciones lineales y cuadráticas como una combinación de números y la variable como incógnita, los cuales están relacionados con una igualdad, algunos ejemplos son los siguientes.

$$ax + b = 0$$
$$3x + 2 = 0$$
$$ax + b = cx + d$$
$$ax^2 + bx + c = 0$$
$$ax^2 + bx = c$$
$$2x^2 + x + 2 = 0$$

En las igualdades anteriores, se identifica un primer y un segundo miembro en el lado izquierdo y derecho, respectivamente; las letras a, b, c y d representan valores conocidos, y la letra x es la variable como incógnita, cuyo valor hay que encontrarlo para que satisfaga la igualdad, por ello, recibe nombre de solución.

El procedimiento para encontrar la solución de las ecuaciones lineales y cuadráticas se basa en las propiedades de los números reales y de la igualdad. Para las ecuaciones lineales, es importante que el estudiante conozca y comprenda, que detrás de las reglas inadecuadas que concibe para resolverlas están las propiedades mencionadas. En las ecuaciones cuadráticas, el papel de las propiedades se refleja en el método de completar el cuadrado, y este último en hallar la formula cuadrática, la cual se emplea después en la solución de ecuaciones, desde las más sencillas hasta con expresiones racionales y radicales.

La variable como relación funcional se utiliza en las funciones lineales $y = f\ (x) = ax + b$, y en las funciones cuadráticas $f\ (x) = ax^2 + bx + c$, donde x es la variable independiente y, y o $f(x)$ es la variable dependiente.

Las funciones lineales $y = f(x) = ax + b$, se soportan entre otros aspectos, en el concepto de pendiente, representación gráfica, tabular y algebraica, y del procedimiento para hallar la ecuación de la recta.

Las funciones cuadráticas $f(x) = ax^2 + bx + c$, se basan en la definición, donde se reconoce el término cuadrático ax^2 , el término lineal bx y el término independiente c, representación tabular y gráfica, y de acuerdo a esta última, cuya representación es una parábola, se aborda la concavidad, vértice y los puntos de corte con los ejes. Al tratarse de puntos de corte con los ejes x y y, en la función dada se sustituyen los valores específicos $x = 0$ y = 0, de modo que, para $x = 0$ la ordenada corresponde al término independiente, y para $y = 0$ la abscisa se halla al resolver ecuaciones cuadráticas. Por esto último, es importante abordar con antelación el procedimiento de solución de este tipo de ecuaciones, pues los puntos de corte de la parábola con el eje x están dados por las soluciones de la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$.

El manejo conceptual y procedimental de las ecuaciones lineales y cuadráticas, y las funciones lineales y cuadráticas fue importante para la fase de simulación y validación de Velten (2009), porque al aplicar el modelo cuadrático al problema o a la pregunta, se acuden a los conceptos previos para derivar estrategias de solución.

2.2.3 Regresión de variables

Para Cardona, González, Rivera y Cárdenas (2013) existen investigaciones que se realizan en distintas áreas del conocimiento con el propósito de mejorar procesos o solucionar eficazmente problemas en las cuales se mide, observa o se hacen experimentos para obtener datos de distintas variables, y luego establecer cómo los datos ya conocidos se relacionan para dar cuenta de eventos futuros. Por esto último, es que resulta importante establecer el tipo de relación de dependencia entre las variables, con el fin de hacer predicciones de acuerdo a su comportamiento.

Lo anterior se realiza mediante un procedimiento estadístico denominado análisis de regresión, con el cual se determina la relación funcional o la ecuación matemática que permite relacionar la variable dependiente (variable a predecir) y la variable independiente (variable que se usa para predecir), así como la potencia de dicha relación (Cardona, et al., 2013). Las variables se pueden relacionar de cuatro posibles maneras: relación lineal directa, relación lineal inversa, relación no lineal directa y relación no lineal inversa. Dichas relaciones se pueden observar en la figura 7, de donde, la estructura formal y funcional permite esclarecer objetivamente las actividades que conducen a decidir la clase de curva que muestran los puntos, y la ecuación que mejor se ajusta los datos. Esto coincide con los planteamientos de Rosas y Zúñiga (1992) quien indica que la manera de establecer si existe o no regresión entre dos variables es construir un diagrama de dispersión.

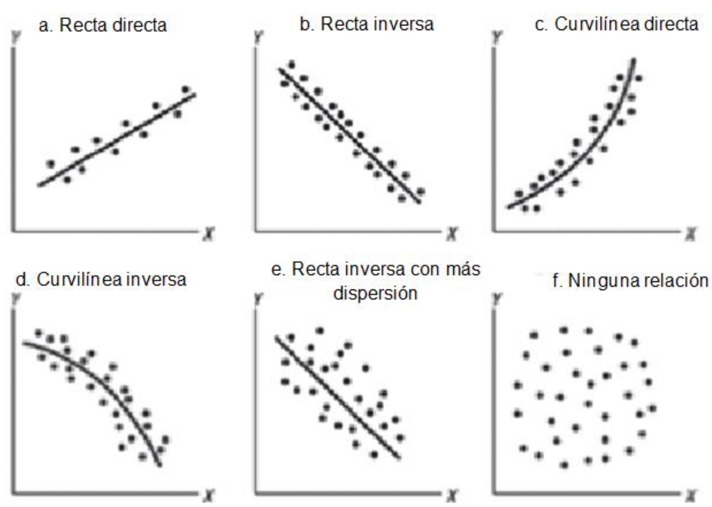


Figura 7. Tipos de relación entre variables. Adaptado de Cardona, et al. (2013)

Para construir un diagrama de dispersión se debe emplear un sistema de coordenadas rectangulares en el que el eje horizontal es el de las abscisas y constituida por una escala para registrar los valores de una de las variables; mientras que el eje vertical es el de las ordenadas está conformada por una escala para representar los valores de la otra variable. Los valores que toman las variables son pares ordenados (x, y) los cuales están dispersos en el sistema mencionado. Con la dispersión de dichos pares se puede determinar el tipo de relación de las variables, por ejemplo, si la dispersión de los pares ordenados alude a una línea recta, entonces la relación entre las variables es recta.

Cuando se obtengan datos de dos variables (una independiente, y otra dependiente) cuya representación gráfica no tenga un “buen comportamiento”, se pone en juego la regresión de variables, pues con ella se puede decidir si la relación funcional es lineal o no lineal, es decir, que se puede determinar la clase de curva y la ecuación que mejor se ajuste a los datos.

En esta investigación la regresión de variables sólo se menciona para que el lector se haga una idea de qué es lo que se busca cuando se emplea. El procedimiento para el análisis de regresión no se amplía, pues para encontrar la relación entre una variable independiente y otra dependiente se decidió emplear Excel como herramienta para encontrar de manera inmediata el tipo de relación entre las variables y su respectiva expresión o ecuación matemática.

2.2.4 Las tecnologías de la información y las comunicaciones en las matemáticas

Las tecnologías de la información y las comunicaciones (Tics) buscan trascender del aula física para ofrecer nuevas alternativas pedagógicas, donde los estudiantes aprendan, fortalezcan y empleen lo aprendido. Según Jaramillo, Castañeda y Pimienta (2009), las Tics son herramientas digitales que incluyen las computadoras, los programas o aplicaciones (software), y las tecnologías basadas en el internet; esto ayuda a procesar, registrar y presentar la información en distintos formatos.

2.2.5 Hoja de cálculo Excel como herramienta

El programa Excel es una hoja de cálculo que se encuentra disponible en cualquier computadora, y puede emplearse para elaborar actividades que contribuyan a la modelación, comprensión y solución de problemas. En este sentido, las funciones tales como: tabular y organizar datos, construir gráficas, ajustar curvas mediante líneas de tendencia (llamada también línea de regresión), y encontrar la ecuación posibilita estudiar la modelación de problemas, y encontrar soluciones a problemas de otras disciplinas, cotidianos y físicos. En concordancia con lo anterior, Lewis (citada por López, Lagunes & Herrera, 2006) afirma que Excel es una herramienta de aprendizaje, y si los estudiantes la emplean pueden ser hábiles para organizar datos, realizar distintas clases de graficas que puedan dar significados a la información para luego interpretarla y analizarla.

En esta ocasión, se empleó la hoja de cálculo de Excel porque sus funciones permiten encontrar la relación funcional entre una variable independiente y una dependiente. Si se estudia una situación real, de la cual se tienen datos de dos variables (una dependiente y otra independiente), cuya representación gráfica no es lineal ni cuadrática, entonces es posible encontrar la relación funcional entre ellas usando Excel, pues este permite ajustar los datos a una línea de tendencia y a la vez proporciona la respectiva ecuación algebraica.

2.2.6 Conocimiento conceptual y procedimental en matemáticas

Para Hiebert y Lefevre (1986), el conocimiento conceptual se caracteriza por relacionar piezas de información, lo cual ocurre entre dos partes de esta y de dos formas diferentes, una donde se vinculan las partes de la información ya conocida, y otra donde se relaciona una parte de la información conocida con una recién aprendida. Según Crooks y Alibali (2014) el conocimiento conceptual es importante en el momento de hacer matemáticas, pues permite decidir acerca del procedimiento más indicado para abordar una situación, también ofrece mayor rigurosidad en la resolución de problemas y permite valorar la solución obtenida.

De otro lado, el conocimiento procedimental, está conformado por el lenguaje formal de las matemáticas, es decir la representación simbólica, y por los algoritmos o reglas para realizar los quehaceres matemáticos.

2.2.7 Mecanización para la comprensión de los conceptos matemáticos

La mecanización está encaminada a que los estudiantes solucionen ejercicios para que se apropien de los conceptos y procedimientos. Al respecto, Colera y Oliveira (2009), asumen que para solucionar un ejercicio se puede aplicar conocimientos y procedimientos aprendidos con anterioridad. La mecanización es importante porque las matemáticas deben practicarse para obtener cierto dominio y reducir esfuerzos, por ello hay que proponer ejercicios que conduzcan a este propósito.

2.2.8 Errores de redondeo y aritmética de una computadora

Según Burden y Faires (2002), los errores de redondeo aparecen cuando se utiliza una calculadora o una computadora para hacer cálculos con los números reales, como estos equipos usan números con una cantidad finita de cifras, entonces dichos cálculos los ejecutan con aproximaciones de los verdaderos números.

2.2.9 Teoría de errores en la medición

Según Chapotin (2019), al determinar el valor de una magnitud, el valor numérico obtenido que resulta de las medidas no corresponde al valor exacto de la magnitud en mención, ya que, está afectado por cierto grado de error. Se denomina error de una medida, a la diferencia entre el valor obtenido y el valor real de la magnitud medida. A continuación, se presentan los distintos tipos de errores.

Clases de errores

Los errores se clasifican en errores sistemáticos y accidentales.

Los errores sistemáticos ocurren repetidamente. En este caso, se encuentran tres tipos: los errores teóricos que se dan por la presencia de condiciones diferentes a las ideales; los errores instrumentales, los cuales se deben a limitaciones del equipo, defectos de fabricación o por una mala calibración, y están los errores personales, que ocurren por el observador al reaccionar muy rápido o muy tarde.

Los errores accidentales se deben a la irregularidad de efectos, tales como la variación de temperatura o corrientes de aire en el momento de realizar la experiencia.

Otra manera de clasificar los errores es de acuerdo a la cuantificación. En este caso hay dos tipos: error absoluto y error relativo.

Error absoluto: es la diferencia entre el valor real de la magnitud a medir y el valor obtenido en una medida, esto es, sea $x\, el\, valor\, medido$ y $x_1\, el\, valor\, medido\, real$ entonces el valor absoluto es $|x - x_1|$.

Error relativo: es el cociente entre el error absoluto $\frac{|x-x_1|}{x_1}$.y el valor real

El error relativo se puede expresar de manera porcentual, así:

$$\frac{|x - x_1|}{x_1} \times 100\%$$

De aquí que reciba el nombre de error relativo porcentual.

Según Chapotin (2019), si el valor de la medida se observa de forma directa, entonces se presenta el error de sensibilidad del instrumento. Para hablar de este tipo de error, se debe definir que la sensibilidad o error instrumental es el intervalo más pequeño de la magnitud medible con él.

Para saber el número de medidas directas que se deben realizar de una misma magnitud, es necesario hallar las causas del error, pues los datos y la expresión del resultado tienen un tratamiento diferente. En este sentido, si se realizan 3 medidas, se halla la dispersión o diferencia d entre los valores extremos, aquí se pueden presentar los siguientes casos:

Caso 1. Si d es cero o toma el valor del error instrumental, entonces se acepta que el mejor valor de la magnitud es la media $\bar{x}$ de las medidas, y el error absoluto es el error del instrumento.

Caso 2. Si d es mayor al error instrumental, entonces el número de medidas debe ser mayor. En este caso el mejor valor de la magnitud la media $\bar{x}$ y el error absoluto se halla con la expresión

$$\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_{i}-\bar{x})^{2}}{n(n-1)}}, donde\ n\ es\ el\ número\ de\ medidas$$

Si las medidas que se deban realizar son muchas se halla el porcentaje de la dispersión así:

$$E_d = \frac{d}{\bar{x}} \times 100$$

El valor anterior se usa en el siguiente criterio, el cual se admite un error estadístico del 2%.

Si $E_d < 2\%$ entonces el número de medidas a realizar será 3.

Si $2\% \leq E_d < 8\%$ entonces el número de medidas será 6

Si $8\% \leq E_d < 15\%$ entonces el número de medidas será 15

Si $E_d \geq 15\%$ entonces el número mínimo de medidas será 50

Para el desarrollo de algunas actividades del presente trabajo se asumió que el error en la dispersión de los datos fuera del 10%.

2.2.10 Enfoque del estudio de caso

Stake (1999), describe el método de estudio de caso como “el estudio de la particularidad y de complejidad de un caso singular para llegar a comprender su actividad en circunstancias importantes”. De aquí, que este tipo de estudio permite comprender a profundidad situaciones que resultan relevantes para un caso particular.

En la perspectiva de Stake (1999) en el estudio de casos hay tres tipos: el estudio intrínseco, el estudio instrumental y el estudio colectivo de casos. El primer tipo se emplea cuando el caso ya se conoce, y además, tiene características propias que hacen que el investigador sienta necesidad o curiosidad por estudiarlo. El segundo tipo se emplea para comprender la conducta o las reacciones de los sujetos participantes cuando se han incorporado nuevos elementos, así se produce el caso a estudiar, el cual llega a ser un apoyo para formular tesis acerca del objeto de estudio. Esta misma idea se mantiene en el tercer tipo, pero no se estudia un solo caso sino varios de manera exhaustiva, tratando de llevar coherencia entre cada uno.

En el siguiente apartado se indica el tipo de estudio que se eligió para el desarrollo de la investigación.

.

3. Metodología

En este capítulo se presentará, la perspectiva de la investigación, el tipo de estudio, los participantes, los instrumentos empleados para recoger los datos, la propuesta del diseño, la perspectiva de modelación matemática en el ámbito escolar, y las fases que se desarrollaron a lo largo de la investigación.

3.1 La perspectiva de la investigación

La investigación estuvo enmarcada en la perspectiva cualitativa, pues con el diseño de una estrategia basada en el desarrollo de una estructura matemática se buscó que los estudiantes de grado décimo se aproximaran a la modelación matemática de situaciones reales utilizando funciones cuadráticas. Esto implicó tener en cuenta procesos reflexivos, analíticos, observacionales, y descriptivos de las prácticas grupales e individuales, interacciones y las experiencias que influyeron durante el proceso desarrollado por los participantes. Esto queda en concordancia con los planteamientos de Marshall y Rossman (1999, citado en Gialdino, 2006) quienes indican que un enfoque cualitativo permite estudiar situaciones del contexto con dinámicas propias, también la interacción entre los estudiantes con las actividades matemáticas, con el contexto, con sus compañeros de clase y con los docentes.

3.2 Tipo de estudio

En este estudio se empleó el estudio instrumental de casos de Stake (1999) que se presentó en la sección 2.2.10, pues se consideró que para modelar matemáticamente situaciones reales relacionadas con funciones cuadráticas se debe incluir previamente elementos matemáticos teóricos, es así, como el estudio consistió en comprender la manera en que los estudiantes se aproximaron a la modelación matemática. En este sentido, el estudio de caso fue la aproximación a la modelación matemática que tuvieron los estudiantes de una institución educativa indígena de Morales Cauca.

3.3 Diseño de la Metodología

El diseño que orientó el desarrollo de esta investigación tuvo presente el contexto y los participantes, también las orientaciones de Stake (1999) en cuanto a las fuentes para la recolección de datos y el análisis de los datos recogidos y, como elemento complementario se definieron las fases de intervención con los estudiantes.

3.3.1 Contexto y participantes

La población objeto de estudio es de un sector rural, una vereda llamada La Bonanza, del municipio de Morales en el departamento del Cauca. En esta vereda residen campesinos e indígenas Misak que pertenecen al estrato uno, y su economía depende de pequeños cultivos como el café, caña y maíz.

El trabajo de investigación se desarrolló en La Institución Educativa Integral de Formación e Investigación Misak ubicada en el sector antes mencionado durante el primer semestre del año 2019, dicha institución atiende a 120 estudiantes, entre ellos campesinos, indígenas nasa y Misak, siendo estos últimos la mayor población. Los estudiantes pertenecen a familias que cuentan con escasos recursos económicos, por ello, en el periodo febrero-junio que llega la cosecha de café hay días en que se ausentan de clases por irse a trabajar; en una encuesta realizada por grado, en promedio hay 5 estudiantes que faltan, 2 y 3 días de clase, e incluso toda la semana. Por ello, cuando el estudiante retorna a las clases habituales, debe desarrollar las actividades de cada una de las áreas, y en ocasiones esto produce que haya un retraso en la continuación de los contenidos temáticos. En este sentido, se concluye, que en el año escolar no se alcanza a desarrollar el plan de área en su totalidad.

Por tratarse de una institución educativa de carácter indígena, la educación está enfocada en restablecer y fortalecer las costumbres, la identidad, y el saber propio del pueblo Misak; en este sentido, se imparten diez áreas académicas, las cuales están enfocadas en los propósitos mencionados, y dentro de las cuales está el área de pensamiento matemático, conformada por las asignaturas de matemática, geometría y estadística, con una intensidad horaria semanal total de 4 horas. Este hecho conduce a que en promedio la asignatura de matemáticas se aborde en 2 horas semanales, por tal motivo en el año 2018, los estudiantes de grado décimo, quienes fueron los participantes de la presente investigación sólo alcanzaron la introducción a ecuaciones lineales y cuadráticas, dejando pendiente la noción de función y algunos tipos de funciones.

En conclusión, factores como la inasistencia a clases y la intensidad horaria, han provocado que en noveno grado no se haya abordado la noción de función, y que por ende en el grado décimo se inicie con esta noción, con funciones lineales y cuadráticas.

Dado que, el propósito fue diseñar una estrategia basada en el desarrollo de una estructura matemática para aproximar a los estudiantes a la modelación matemática de situaciones reales utilizando funciones cuadráticas, se eligieron los estudiantes del grado décimo, pues en el año inmediatamente anterior adquirieron una introducción a ecuaciones lineales y cuadráticas; este grupo de estudiantes estuvo conformado por catorce personas.

3.3.2 Fuentes para la recolección de datos

La recolección de la información se realizó en 4 meses durante un semestre, y para ello se empleó la observación directa y documentos escritos por los estudiantes.

La observación directa sustentada por Stake (1999) señala que es una forma de observar las acciones, interacciones y decisiones de los participantes en las diferentes fases del trabajo de campo. De acuerdo con esto, las observaciones se realizaron con el propósito de analizar la manera en que los estudiantes interactúan, discuten y resuelven las actividades planteadas en cada una de las sesiones. La observación fue recolectada en notas para su posterior análisis.

En el trabajo de campo los documentos elaborados por los estudiantes permiten verificar la información suministrada por otras fuentes, en este caso por la observación, pues según Stake (1999) estos documentos tienen un bosquejo de razonamiento análogo a las observaciones. Los documentos fueron importantes porque permitieron analizar los procesos matemáticos que realizan los participantes para aproximarse a la modelación matemática desde situaciones reales, por ello fueron clasificados de acuerdo a las sesiones y actividades.

3.3.3 Propuesta del diseño

Durante el año 2018 se realizaron varias reuniones con los docentes de matemáticas de la Institución educativa Misak para discutir sobre la metodología que emplean en el desarrollo de las temáticas. Se dedujo que, en el desarrollo de un contenido matemático se presentan las definiciones, se muestran métodos y algoritmos, y su respectivo uso en ejercicios repetitivos, después, se proponen problemas descontextualizados para que los estudiantes apliquen los métodos y procedimientos. Luego de presentar las temáticas, se aplica una evaluación para establecer el nivel de comprensión de los estudiantes frente a la temática desarrollada. Con esta manera de presentar los contenidos temáticos, se puede concluir que, hay un énfasis en la mecanización de los métodos y algoritmos, y en la aplicación de estos en ejercicios y problemas que en general son ficticios. No se realiza una articulación entre la teoría y los procedimientos para que estos estén últimos estén justificados matemáticamente, se excluyen problemas para que el estudiante analice, y desvincula las matemáticas aprendidas con situaciones del contexto de los estudiantes. Con la evaluación, se podría afirmar, que el estudiante daría cuenta solamente de la memorización de los conceptos y de los procesos mecánicos, pero no de la apropiación y el dominio de los contenidos matemáticos.

En ésta investigación se propuso una alternativa encaminada a que los estudiantes adquieran una fundamentación matemática para la construcción de los conceptos matemáticos. Se trata de integrar varios elementos para cada temática, a saber: la historia, la estructura o la fundamentación teórica, la mecanización, el análisis, las tecnologías de la información y la comunicación (Tics) y las aplicaciones. Estos elementos se denominaron dimensiones para la construcción de los conceptos matemáticos y hacen parte de la estructura matemática; para cada temática específica, el docente selecciona las dimensiones que considere necesarias para desarrollar los conceptos.

Una vez se aborden las dimensiones, entonces, los estudiantes podrían modelar situaciones reales relacionadas con el concepto matemático estudiado. En conclusión, la postura que se asumió para la investigación fue, que si los estudiantes realizaban un trabajo fundamentado matemáticamente entonces podían hacer modelamiento matemático. Lo anterior se plasma en la figura 8

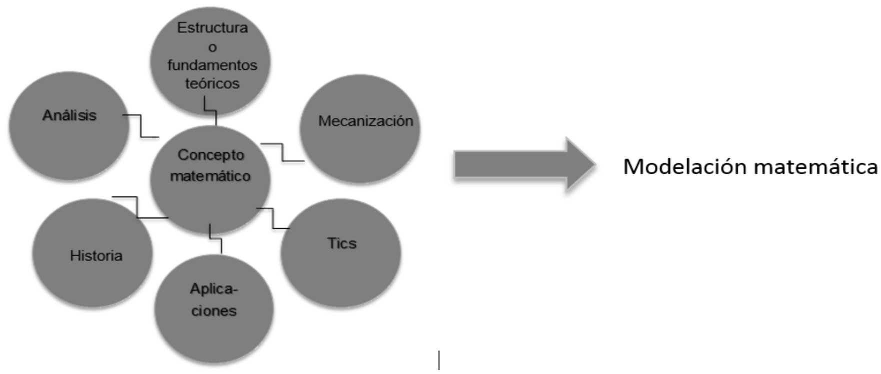


Figura 8. Dimensiones para el desarrollo de los conceptos matemáticos. Elaboración propia.

A continuación, se explica a que hace referencia cada una de las dimensiones mencionadas, y al mismo tiempo, se encaminan hacia la construcción de las ecuaciones lineales, cuadráticas, y las funciones lineales y cuadráticas.

3.4 Diseño de la estructura matemática para el desarrollo del concepto de función cuadrática

3.4.1 Dimensión histórica

Si el docente presenta la perspectiva histórica de las matemáticas, entonces los estudiantes pueden considerar que el conocimiento matemático surgió con el objetivo de solucionar los problemas que la antigua humanidad enfrentaba. En este sentido, Anacona (2003), indica que las matemáticas dejan de ser abstractas sin relación alguna con la vida real, y empiezan a concebirse como el resultado de las actividades humanas enmarcadas en contextos socio-culturales.

González (2004) indica que para emplear la historia de las matemáticas en la educación escolar como una herramienta didáctica se debe tener en cuenta el grado que cursan los estudiantes, la unidad temática, los problemas, los aspectos históricos que conoce el docente, también su iniciativa como su capacidad para trasponer didácticamente el saber histórico seleccionado en saber a enseñar. El autor expone que el docente puede emplear la historia en el momento de exponer una temática, puede dar una introducción histórica donde se presente el origen y la evolución de los problemas a estudiar, sin olvidar su carácter científico y cultural.

La historia en la clase de matemáticas puede emplearse por dos motivos, porque el estudiante puede comprender conceptos y teorías, y porque puede convertirse en un agente motivador. En este sentido, los docentes pueden tomar problemas históricos relacionados con la temática en estudio y mostrar su desarrollo, y para la segunda, presentar problemas o lecturas interesantes que despierten la atención de los estudiantes (Arteaga, 2017).

3.4.2 Dimensión de la estructura teórica

Una mirada a la historia de los conocimientos matemáticos muestra que estos se han desarrollado continuamente, y cada evolución ha dejado un legado formado por fundamentación teórica, argumentos y procedimientos rigurosos. Este desarrollo brinda para cada temática una estructura rigurosa constituida por definiciones, propiedades, axiomas etc., los cuales deben ser presentados para que los estudiantes las conozcan y logren comprenderlos, pero ante todo, para que los empleen y justifiquen matemáticamente los procedimientos algorítmicos. Esta dimensión hace referencia al conocimiento conceptual y procedimental que asumen Hiebert y Lefevre (1986), y Crooks y Alibali (2014) que se mencionó en la sección 2.2.6.

En el caso del conocimiento procedimental autores como Rico (1998) asume varios tipos entre los cuales están los analíticos que se relacionan con el álgebra y las funciones, por ejemplo, resolver ecuaciones, manejar las distintas representaciones de la función, etc.

Como la presente investigación estuvo enmarcada en las ecuaciones lineales, cuadráticas, y las funciones lineales y cuadráticas, entonces la dimensión teórica estuvo en la perspectiva del anexo 1.

3.4.3 Dimensión mecánica

Esta dimensión está relacionada con el proceso de elaboración, comparación y ejercitación de procedimientos que se propone en los Lineamientos curriculares del MEN (1998), donde los procedimientos se refieren a las destrezas, las estrategias, métodos, técnicas, usos y aplicaciones. En conclusión, el docente debe proponer actividades matemáticas para que los estudiantes reflexionen sobre los procedimientos, y comprendan cuando y porque se usan. Cuando los estudiantes comprendan la función de los procedimientos, entonces se plantean actividades para favorecer su desarrollo y práctica.

Para la presente investigación, la dimensión mecánica estuvo en la perspectiva del anexo 2.

3.4.4 Dimensión analítica

La dimensión del análisis consiste en que el estudiante utilice la estructura teórica, analice y razone para resolver problemas matemáticos, así, avanza a la formalización del pensamiento matemático. Los problemas de esta dimensión están relacionados con los procesos mecánicos, de hecho, Carrillo (1998) indica que el problema debe estar vinculado con el uso del conocimiento matemático en situaciones jamás afrontadas, por ello, es necesario que el sujeto profundice, reflexione y analice, para encontrar la solución.

Para la presente investigación, la dimensión analítica estuvo en la perspectiva del anexo 3.

3.4.5 Dimensión de las TICS

La Revista Altablero de la página del Ministerio de Educación Nacional MEN (2004) presenta algunas razones para usar las Tics en el aula de clase, entre ellas, que utilizar programas interactivos, permite mostrar los conocimientos de forma dinámica y vivencial que el tablero como los textos guía de la metodología “tradicional” no permiten mostrar.

Las Tics se pueden emplear con distintos objetivos, según Fouts (2000, citado en Jaramillo, Castañeda & Pimienta, 2009) se pueden usar para enseñar, practicar, resolver problemas y experimentar con simulaciones. Las simulaciones, permiten que los estudiantes se familiaricen con los conceptos matemáticos en estudio, y se pueden emplear para estudiar fenómenos físicos que no sean asequibles visual y analíticamente. En este sentido, las Tics puede usarse al iniciar una temática o durante la presentación.

Para la presente investigación, la dimensión en mención se basó en el uso de la herramienta tecnológica Excel y estuvo en la perspectiva del anexo 4.

Cuando el estudiante se apropie de lo que tratan las dimensiones anteriores, es decir, conozca a grandes rasgos la historia de los conceptos, y domine mecánica y analíticamente la estructura teórica de la temática en estudio, y algunas herramientas tecnológicas, se pueden presentar las aplicaciones enfocadas a contextos reales. En dichas aplicaciones se estudian situaciones físicas o cotidianas que serán abordadas por una estructura teórica y determinados programas o software que permitan establecer su respectiva solución.

3.4.6 Dimensión de las aplicaciones

Rico (1998) señala que la asignatura de matemáticas es indispensable en la educación, porque permite que los estudiantes sean rigurosos y precisos. También es importante por su utilidad, pues, en vista que, esta asignatura está presente en el contexto social y natural, se puede estudiar un fenómeno y sistematizar su información para encontrar una representación matemática. Dicha representación es un modelo matemático que permite predecir el comportamiento del fenómeno, por ejemplo, predecir la estabilidad, o variaciones que pueden suceder.

Los argumentos previos acerca de la importancia de las matemáticas son consecuentes, pues la precisión, la rigurosidad y el análisis influyen de gran manera en la utilidad práctica, como es el caso de la obtención del modelo matemático que dé cuenta del comportamiento de un fenómeno social o natural.

La dimensión de la estructura, del análisis, de la mecanización y de las Tics son las bases para la dimensión de las aplicaciones, pues, esta da cuenta de la utilidad de los saberes matemáticos para analizar y entender el entorno, fenómenos o situaciones con el propósito de predecir su comportamiento.

Dado que la presente investigación estuvo enmarcada en las ecuaciones lineales, cuadráticas, y las funciones lineales y cuadráticas, entonces la dimensión de las aplicaciones estuvo en la perspectiva del anexo 5 donde se dio prioridad a situaciones financieras y físicas.

3.5 Perspectiva de modelación matemática en el ámbito escolar

El esquema de modelación y simulación que propone Velten (2009) está conformado por cinco fases: definiciones, análisis del sistema, modelación, simulación y validación. Dichas fases se adaptaron al ámbito escolar de la Institución Educativa Integral de Formación e Investigación Misak de la siguiente manera.

La fase de definiciones fue desarrollada por la docente, quien investigó y consultó información sobre dos situaciones relacionadas con las funciones cuadráticas. Luego planteó los problemas y las preguntas respectivas.

La fase de análisis fue desarrollada por los estudiantes, quienes identificaron las variables más importantes para responder las preguntas. El problema proporcionaba datos para cada una de las variables, de lo contrario, los estudiantes debían realizar experimentos para obtenerlos.

La fase de modelación fue desarrollada por los estudiantes. Una parte de esta fase la realizaron empleando la herramienta Excel para ajustar los datos de los problemas a una línea de tendencia, estableciendo así, la relación funcional o ecuación matemática. En otra parte de la fase, tomaron las ecuaciones obtenidas y usaron procedimientos matemáticos para despejar variables y diseñar los modelos matemáticos.

La fase de simulación fue desarrollada por los estudiantes, quienes aplicaron el modelo a la situación abordada para contestar las preguntas formuladas. Ellos emplearon los modelos matemáticos para remplazar datos proporcionados por las situaciones estudiadas, así plantearon ecuaciones cuadráticas que resolvieron con procedimientos matemáticos que habían sido desarrollados previamente. También usaron conceptos de las funciones cuadráticas y elementos de la parábola tales como concavidad, punto máximo y coordenadas del vértice.

La fase de validación fue desarrollada por los estudiantes, quienes validaron el modelo diseñado hallando el error relativo porcentual y utilizando saberes adquiridos por su experiencia.

3.6 Fases de intervención con los participantes

Las actividades que fueron propuestas para el trabajo de campo estuvieron enmarcadas en las dimensiones mencionadas y se desarrollaron en cinco fases:

3.6.1 Fundamentación matemática

Se abordaron los conceptos matemáticos requeridos para la modelación matemática, tales como ecuaciones lineales, cuadráticas, y funciones lineales y cuadráticas. Para cada concepto se presentaron ejemplos, se propusieron ejercicios mecánicos y analíticos, y se mostraron algunas aplicaciones en problemas físicos y financieros.

3.6.2 Primer acercamiento a la modelación matemática: el caso de la caída de una piedra.

La actividad hizo referencia a un primer acercamiento de la modelación matemática, y para ello se estudió el caso de la caída libre de una piedra. La actividad se desarrolló en dos partes, una realizada por la docente y otra por los estudiantes. La descripción de esta fase se hace de acuerdo al proceso de modelación y simulación planteado en la sección 3.5.

3.6.3 Modelación matemática en un problema de demanda e ingresos en un almacén avícola.

Esta fase consistió en que el estudiante encontrara un modelo cuadrático para predecir el ingreso por la venta de pollos en un almacén avícola ubicado en el municipio de Morales. La descripción de esta fase se hace de acuerdo al proceso de modelación y simulación planteado en la sección 3.5.

3.6.4 Prueba de verificación

La estrategia que se ejecutó con el propósito de aproximar a los estudiantes de grado décimo a la modelación matemática de situaciones reales relacionadas con funciones cuadráticas, culminó con una prueba de verificación, pues se consideró necesario hacer un análisis del resultado de la intervención de aula. Esta prueba se aplicó a un grupo de estudiantes de grado décimo de otra sede de la institución educativa con el propósito de comparar la intervención de aula.

4. Resultados y análisis de resultados

En este apartado se presenta la descripción de las actividades que realizaron los estudiantes en cada una de las fases junto con sus respectivos resultados. Este es el espacio para plasmar el comportamiento de los estudiantes respecto a la intervención realizada y frente a los saberes y aprendizajes adquiridos. De acuerdo a los resultados, se realiza el respectivo análisis.

4.1 Resultados

4.1.1 Fase 1: Fundamentación matemática

Esta fase se desarrolló durante 12 semanas con una intensidad de 4 horas semanales de 45 minutos, en el horario de clases habitual. Como su nombre lo indica, esta fase consistió en establecer los fundamentos matemáticos requeridos para la modelación matemática de situaciones reales mediante funciones cuadráticas.

Se decidió partir desde ecuaciones lineales, porque después de aplicar una prueba diagnóstica (ver anexo 6) se identificó que en la resolución de estas ecuaciones algunos estudiantes recurrían a la regla de tomar el término que estaba sumando en un miembro de la igualdad y, pasarlo al otro lado a restar, o viceversa, para así agrupar y reducir términos semejantes. Esta regla los llevó a realizar procedimientos incorrectos.

Por lo anterior, se decidió iniciar un proceso de fundamentación matemática preliminar para ecuaciones lineales, priorizando el procedimiento de resolución en las propiedades de los números reales y las propiedades de las igualdades. En este caso, los estudiantes resolvieron distintas ecuaciones lineales justificando el procedimiento en la propiedad del inverso aditivo, inverso multiplicativo, y la propiedad del elemento neutro de la adición y de multiplicación. Este proceso de fundamentación culminó con una prueba escrita, cuyos resultados evidenciaron que los estudiantes, manejaban y empleaban las propiedades para resolver ecuaciones lineales.

Posteriormente, se organizó y se presentó la fundamentación matemática concerniente a las ecuaciones cuadráticas, las funciones lineales, y las funciones cuadráticas, para ello, se elaboraron tres guías de estudio.

La primera guía (anexo 7) trató sobre la definición y resolución de ecuaciones cuadráticas, y por el tipo de soluciones se dio una introducción a los números complejos. En el procedimiento de resolución de las ecuaciones cuadráticas se empleó el método de completar el cuadrado, cuyo procedimiento también se fundamentó en las propiedades de los números reales y de las igualdades, de hecho, estas se usaron para encontrar la fórmula cuadrática. Después, se dio lugar a las aplicaciones de las ecuaciones cuadráticas, las cuales estuvieron enfocadas en problemas sobre el lanzamiento vertical de objetos, de áreas, dimensiones, problemas de tipo financiero, y problemas matemáticos como encontrar dos números que cumplieran dos condiciones dadas.

La segunda guía (anexo 8) inició con la definición de parejas ordenadas, producto cartesiano y relaciones, las cuales son importantes para comprender la definición de función, dominio y rango. Posteriormente, se presentaron las funciones de variable real, y entorno a estas el concepto de dominio y rango, la prueba de la recta vertical para determinar cuándo una relación es función, y algunas situaciones cotidianas en las que están implícitas las funciones. Luego se dio lugar a la función lineal, la representación tanto tabular como gráfica, el significado de la pendiente a partir del corrimiento, y las aplicaciones de este tipo de función en la cotidianidad, en este caso, también se buscaba interpretar el significado de la pendiente y de los puntos de corte. Con respecto a las aplicaciones, se trataron problemas tales como el costo que debe pagar una persona de acuerdo a los metros que marca un taxímetro, o si tiene cierta cantidad de dinero, la distancia que le alcanzaría para el recorrido; el dinero que podría recibir un caficultor por determinados kilos recolectados, o los kilos que debería recolectar para recibir una cantidad de dinero en específico. También se abordaron otros problemas relacionados con ingresos, egresos y utilidades por la venta de productos.

La tercera y última guía (anexo 9), abordó la función cuadrática, su representación tabular y gráfica, dominio, rango, los elementos y características de la parábola como concavidad, vértice, puntos de corte con el eje x y con el eje y, y, valor máximo y mínimo; en lo que respecta a los puntos de corte con el eje x se emplea la formula cuadrática vista en la primera guía. Posteriormente, se realizaron aplicaciones a problemas de área, altura e ingreso máximo.

La estructura matemática que se desarrolló en las guías estuvo basada en la dimensión teórica, mecánica, analítica y de las aplicaciones. Los aspectos que se trataron en la dimensión teórica, los ejemplos y los ejercicios que se diseñaron en la dimensión mecánica y analítica, y los problemas de carácter físico y financiero planteados en la dimensión de las aplicaciones, resultó relevante para que los estudiantes comprendieran los conceptos de función lineal y cuadrática

Los estudiantes lograron apropiarse del concepto de ecuación lineal, ecuación cuadrática, de las propiedades tanto de los números reales como de la igualdad, y de la formula cuadrática, pues identificaban cuando debían emplearlos para resolver problemas matemáticos, de áreas, de lanzamiento de objetos y financieros. De hecho, en estos últimos, pudieron hacer aportes importantes, cómo que a partir de la ecuación lineal de demanda se obtenía la ecuación cuadrática de ingreso, y a partir de esta y de la ecuación de costo total se podía plantear la ecuación utilidad, las cuales se podían utilizar para hacer predicciones. En este sentido, se mostraron interesados en querer hacer tales predicciones para productos de los establecimientos comerciales conocidos por ellos.

4.1.2 Fase 2. Primer acercamiento a la modelación matemática: el caso de la caída de una piedra.

Esta fase se desarrolló durante 2 semanas con una intensidad de 4 horas de 45 minutos. Dado que los estudiantes tenían una fundamentación teórica concerniente a ecuaciones lineales y cuadráticas, función lineal y función cuadrática se dio lugar al primer acercamiento del proceso de modelación y simulación planteado para esta investigación. Para ello, se propuso la actividad uno (ver anexo 10), la cual consistió en grabar la caída libre de un objeto desde una altura de 3.7 metros, luego se reprodujo en un computador y con un cronómetro se fue determinando la altura aproximada que alcanzaba el objeto en los intervalos de tiempo; el video se repitió hasta cinco veces.

La actividad se desarrolló en dos partes, una realizada por la docente y otra por los estudiantes. En la primera, la docente realizó la experiencia, tomó datos para las variables de tiempo y altura, utilizo Excel para ajustarlos y hallar la relacional funcional o ecuación matemática que relacionará dichas variables, luego uso elementos teóricos de la función cuadrática para plantear el modelo; los estudiantes debían analizar el modelo cuadrático obtenido por la docente. La segunda parte la ejecutaron los estudiantes, quienes realizaron el experimento conformando grupos de 2 estudiantes, un lanzador y un visualizador, ellos obtuvieron datos, y los registraron en una hoja de cálculo de Excel, así, encontraron la curva de regresión y su respectiva ecuación matemática. En esta última, emplearon la fundamentación matemática estudiada para despejar variables y plantear el modelo cuadrático, con el cual respondieron los interrogantes de la actividad. A continuación, se describe en detalle los resultados de la actividad.

En la primera parte de la actividad, la docente siguió el proceso de modelación y simulación propuesto en la sección3.5, luego, la organizó en una guía para presentarla a los estudiantes. La docente definió el sistema S como la caída de un objeto desde 3,7 metros de altura, un margen de error en la dispersión de los datos del 10%, y las preguntas fueron ¿qué altura alcanzó al cabo de 0.5 seg y 0,9 seg? ¿Cuánto tardó el objeto en alcanzar una altura de 1 metro, 2 metros, y 3 metros? Luego, analizó que los elementos más relevantes tanto del problema como de las preguntas eran las variables tiempo t y la altura h, siendo la primera independiente y la segunda dependiente. En esta parte, la docente grabo el experimento de la caída del objeto para luego reproducirlo en un computador, y con ayuda de un cronómetro fue registrando la altura aproximada que alcanzaba el objeto en 0.2 seg, 0.4 seg, 0.6 seg, 0,8 seg y 1 seg. El video se reprodujo varias veces hasta tener cinco alturas para cada tiempo, después se encontró los promedios para cada intervalo de tiempo.

Seguidamente, se dio paso a la fase de modelación, donde se emplearon las opciones de Excel para ajustar los datos (promedios de las alturas y tiempo) y encontrar una ecuación matemática para relacionar las variables tiempo y altura. En este caso, se identificó que las alturas promedio para cada intervalo de tiempo era muy variable, entonces, se usó una curva de regresión que correspondía a una función cuadrática porque era la que mejor se ajustaba a los datos. La ecuación de regresión obtenida fue $y = 1{,}528x^2 + 1{,}1603x + 0{,}054$. De acuerdo a las variables involucradas en la experiencia, la docente identificó que se debían tomar la ecuación $y = 1{,}528x^2 + 1{,}1603x + 0{,}0541$ y cambiar y por h y x por t, así obtuvo $h = 1{,}528t^2 + 1{,}1603t + 0{,}0541$

Luego se pasó a la fase de simulación, aquí, la docente uso los elementos teóricos de la función cuadrática, y dedujo, que se debía sustituir los datos dados, y realizar procedimientos matemáticos para responder los interrogantes planteados.

Después se dio lugar a la fase de validación, donde la docente utilizó la ecuación para reemplazar los tiempos y hallar las alturas teóricas. Luego, se usaron las alturas experimentales y teóricas para hallar cada error relativo porcentual; los errores porcentuales se compararon con un margen de error del 10%, el cual se estableció en la fase de definiciones. Con lo anterior, la docente pudo evidenciar que los errores relativos eran superiores al 10%, entonces concluyo, que la expresión $h = 1{,}528t^2 + 1{,}1603t + 0{,}0541$ no podía representar la situación abordada, y por ende, dicho modelo debía ser mejorado.

La docente, con el objetivo de que los estudiantes también se familiarizaran con el proceso de modelación y simulación, propuso que ellos desarrollarán la segunda parte de la actividad. En este caso, se formaron cinco grupos de dos personas y un grupo de tres personas para realizar la práctica experimental. A continuación, se describe el proceso realizado por los estudiantes.

Fase de análisis

Cada grupo realizó lo siguiente: grabaron el lanzamiento del objeto desde una altura de 3.7 metros, luego lo reprodujeron en un computador, y con ayuda de un cronómetro determinaron hasta cinco veces la altura aproximada para cada intervalo de tiempo. Los datos obtenidos y los respectivos promedios los registraron en una tabla como la que se muestra en la tabla 4.

Tabla 4. Registro para la altura y el tiempo de caída del objeto

Tiempo	$t = 0{,}2$	$t = 0{,}4$	$t = 0{,}6$	$t = 0{,}8$	$t = 1$
Primer dato					
Segundo dato					
Tercer dato					
Cuarto dato					
Quinto dato					
Promedio Altura					

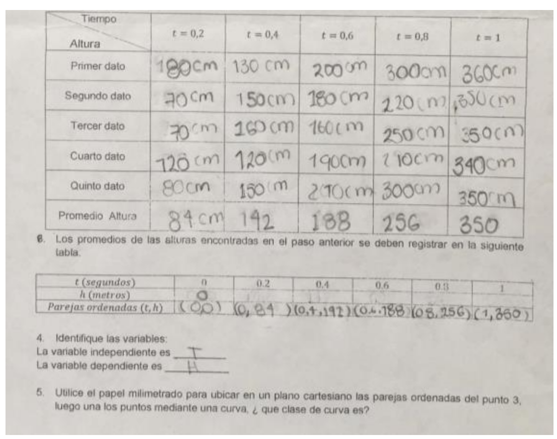
t (segundos)	0	0.2	0,.4	0.6	0.8	1
h (metros)						
Parejas ordenadas (t,h)						

Fuente: Elaboración propia

A continuación, se describen las fases de simulación y verificación para dos grupos llamados A y B, los cuales son los más representativos porque el primero encontró un modelo aproximado de la situación, y el segundo no.

Fase de modelación.

Los datos que obtuvieron los grupos A y B se muestran en la figura 9 y 10, respectivamente.



Tiempo / Altura	$t = 0{,}2$	$t = 0{,}4$	$t = 0{,}6$	$t = 0{,}8$	$t = 1$
Primer dato	180cm	130 cm	200cm	300cm	360cm
Segundo dato	70cm	150cm	180cm	220cm	350cm
Tercer dato	70cm	160cm	160cm	250cm	350cm
Cuarto dato	120 cm	120cm	190cm	210cm	340cm
Quinto dato	80cm	150cm	210cm	300cm	350cm
Promedio Altura	84 cm	192	188	256	350

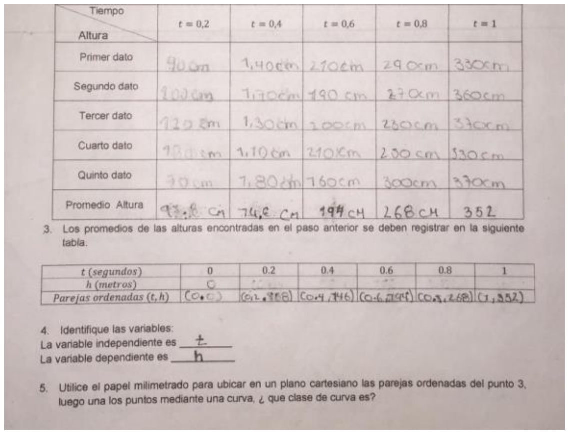
3. Los promedios de las alturas encontradas en el paso anterior se deben registrar en la siguiente tabla.

t (segundos)	0	0.2	0.4	0.6	0.8	1
h (metros)	0					
Parejas ordenadas (t,h)	(0,0)	(0, 84)	(0,4,192)	(0,6.188	(0,8,256)	(1,360)

4. Identifique las variables:
La variable independiente es T
La variable dependiente es H

5. Utilice el papel milimetrado para ubicar en un plano cartesiano las parejas ordenadas del punto 3, luego una los puntos mediante una curva, ¿ que clase de curva es?

Figura 9. Altura y tiempo de caída registrado por el grupo A



Tiempo / Altura	$t = 0,2$	$t = 0,4$	$t = 0,6$	$t = 0,8$	$t = 1$
Primer dato	90 cm	1,40 cm	210 cm	290 cm	330 cm
Segundo dato	100 cm	1,70 cm	190 cm	270 cm	360 cm
Tercer dato	120 cm	1,30 cm	200 cm	230 cm	370 cm
Cuarto dato	90 cm	1,10 cm	210 cm	230 cm	330 cm
Quinto dato	70 cm	1,80 cm	160 cm	300 cm	370 cm
Promedio Altura	93,8 cm	74,6 cm	194 cm	268 cm	352

3. Los promedios de las alturas encontradas en el paso anterior se deben registrar en la siguiente tabla.

t (segundos)	0	0.2	0.4	0.6	0.8	1
h (metros)	0					
Parejas ordenadas (t, h)	(0,0)	(0,2, 988)	(0,4, 146)	(0,6, 194)	(0,8, 268)	(1, 352)

4. Identifique las variables:
La variable independiente es t
La variable dependiente es h

5. Utilice el papel milimetrado para ubicar en un plano cartesiano las parejas ordenadas del punto 3, luego una los puntos mediante una curva, ¿ que clase de curva es?

Figura 10. Altura y tiempo de caída registrado por el grupo B

Los estudiantes registraron los datos del tiempo y la altura promedio en Excel, utilizaron el diagrama de dispersión y las líneas de regresión para ajustar dichos datos. Los estudiantes del grupo A y B obtuvieron la curva y la ecuación cuadrática que se muestra en la figura 11 (a) y 11(b), respectivamente. En esta parte, ambos grupos, analizaron la línea de tendencia obtenida, el primero concluyo que esta se alejaba una distancia mínima de los puntos de dispersión, mientras que el grupo B determinó que la línea se alejaba una distancia considerable de casi todos los puntos. Estos análisis tendrán sentido en la fase de verificación.

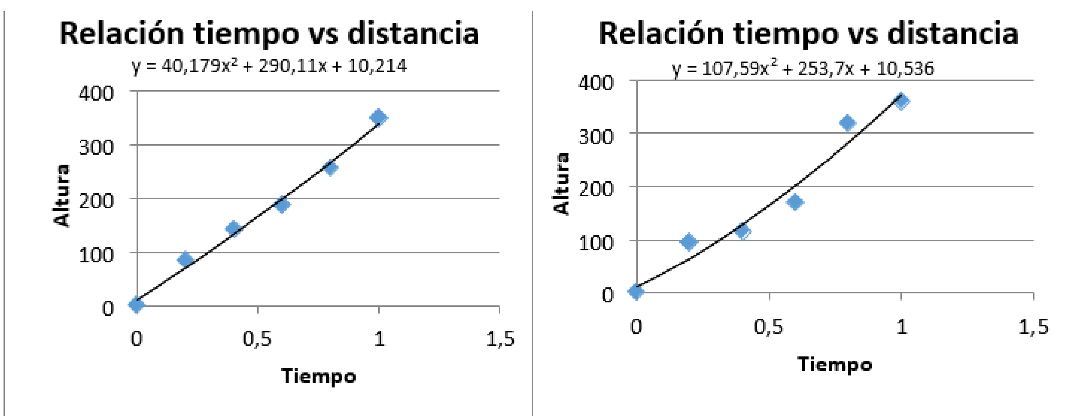


Figura 11. Regresión de datos grupo A (a) / regresión de datos grupo B (b).

Los grupos de estudiantes A y B, analizaron las ecuaciones obtenidas y notaron que debían hacer un cambio de variables, es decir la variable x por t, y la variable y por h. De aquí dedujeron, que para resolver los interrogantes debían sustituir los valores que se daban en el modelo hallado.

Fase de verificación

El grupo A utilizó la ecuación $h = 40{,}179t^2 + 290{,}11t + 10{,}214$ para sustituir cada uno de los tiempos y hallar las respetivas alturas teóricas; las alturas experimentales y las teóricas se usaron para encontrar el error relativo porcentual que se muestra en la tabla 5.

Tabla 5. Comparación de datos grupo A

Tiempo (seg).	Promedio de alturas experimentales (cm)	Alturas teóricas (cm)	Error relativo porcentual
0,2	84,0	69,8	20,3
0,4	142,0	132,7	7,0
0,6	188,0	198,7	5,4
0,8	256,0	268,0	4,5
1	350,0	340,5	2,8

Fuente: Elaboración propia

Teniendo en cuenta que en la fase de definiciones se había establecido que el margen de error entre los datos debía ser del 10%, entonces, los estudiantes procedieron a comparar este porcentaje con cada error relativo porcentual, así notaron, que sólo para 0,2 seg el error relativo era superior al margen establecido. Este aspecto confirmaba la idea que habían enunciado en la fase de modelación, donde había datos del diagrama de dispersión alejados de la línea de regresión. En vista de esta situación, los estudiantes concluyeron que los errores porcentuales se debían a errores personales del sujeto que regulaba el tiempo como de quien debía encontrar la altura en la grabación.

Como sólo hubo un error relativo porcentual superior al 10%, los estudiantes llegaron a la conclusión que la ecuación $h = 40{,}179t^2 + 290{,}11t + 10{,}214$ era un modelo aproximado del sistema S, y que por ende, las predicciones iban a ser aproximadas.

Los estudiantes del grupo B hicieron un procedimiento similar. Con los datos de la tabla 6 notaron que el error relativo porcentual para todos los tiempos era superior al 10%. Este aspecto les confirmaba la idea que habían enunciado en la fase de modelación, donde todos los datos del diagrama de dispersión se alejaban de la línea de regresión. Debido a esto, los estudiantes dedujeron que esta situación se debía a errores personales tanto del estudiante quien regulaba el tiempo como del estudiante que debía encontrar la altura en la grabación. En este caso, sugirieron que la toma de datos debía registrarse nuevamente.

A pesar de lo anterior, los estudiantes continuaron trabajando con la expresión $h = 107{,}59t^2 + 253{,}7t + 10{,}536$.

Tabla 6. Comparación de datos grupo B

Tiempo (seg)	Promedio de alturas experimentales (cm)	Alturas teóricas (cm)	Error relativo porcentual
0,2	95	65,439	45,2
0,4	116	128,95	10,0
0,6	170	201,068	15,5
0,8	320	281,793	13,6

Fuente: Elaboración propia

Fase de simulación

Los estudiantes del grupo A y B emprendieron la estrategia, que debían sustituir en el modelo hallado los valores que daban los interrogantes ¿qué altura alcanzó al cabo de 0.5 seg y 0,9 seg? ¿Cuánto tardó el objeto en alcanzar una altura de 1 metro?

El grupo A realizó los procedimientos que se muestran en la figura 12.

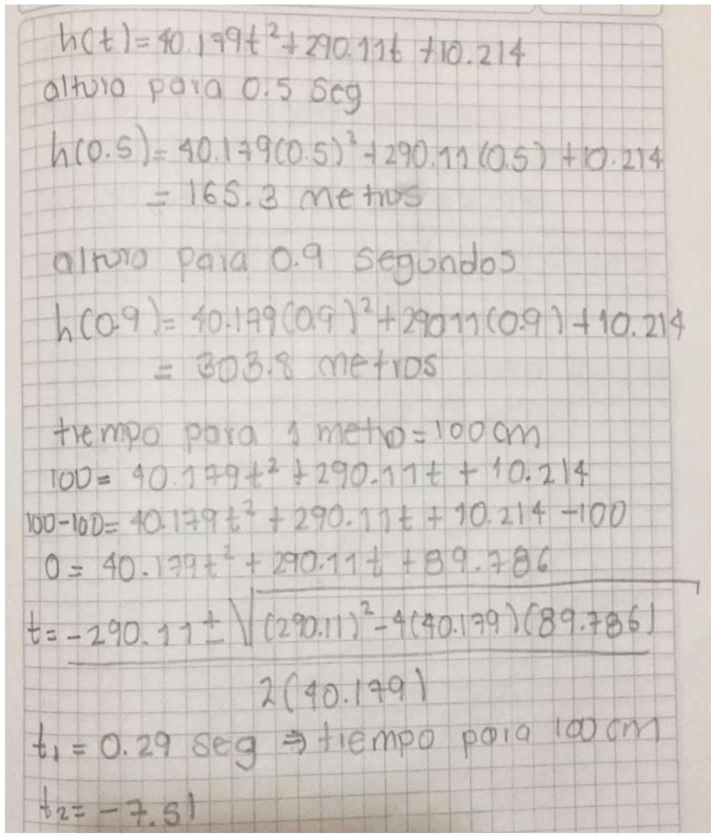


Figura 12. Aplicación del modelo grupo A

El grupo B realizó los procedimientos que se presentan en la figura 13.

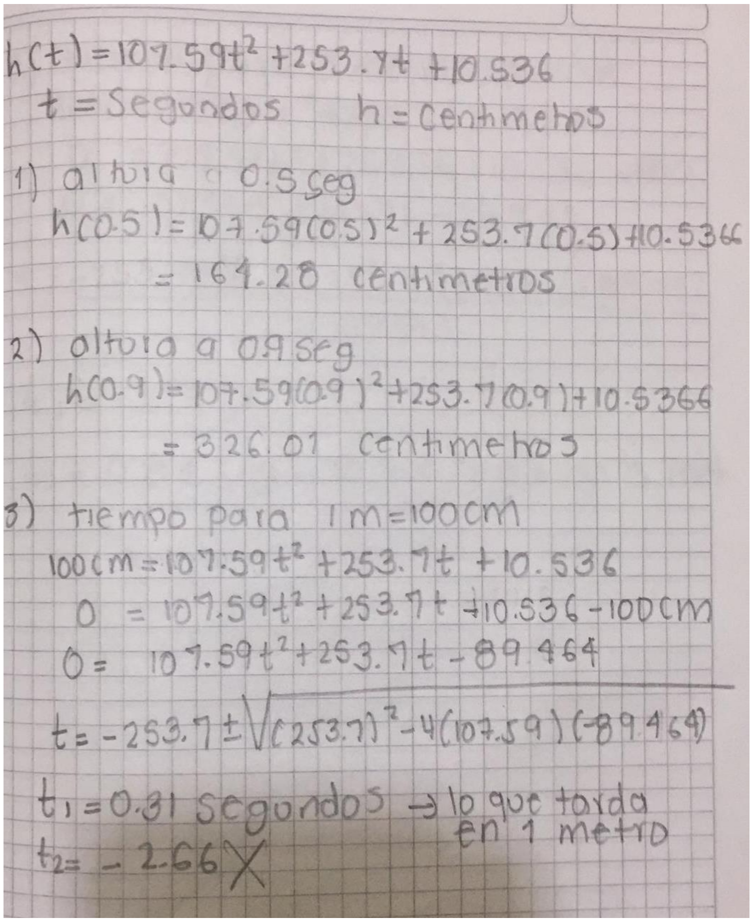


Figura 13. Aplicación del modelo grupo B

En ambos casos se puede evidenciar que los estudiantes sustituyeron el valor del tiempo para hallar las alturas respectivas. También remplazaron el valor de las alturas y dedujeron que se obtenía una ecuación cuadrática, por ello, emplearon las propiedades de los números reales y de la igualdad para encontrar una ecuación cuadrática equivalente, con la cual pudieran utilizar la formula y encontrar las respetivas soluciones, en este caso indican que las respuestas para cada uno de los interrogantes deben ser valores numéricos positivos, porque las variables tiempo y altura sólo pueden tomar este tipo de valores.

Los estudiantes del grupo A y del grupo B quisieron encontrar el tiempo que el objeto tardo en caer al suelo, pues creían que, aunque los modelos eran distintos, el tiempo de caída debía ser muy cercano entre ambos. Los procedimientos se muestran en la figura 14.

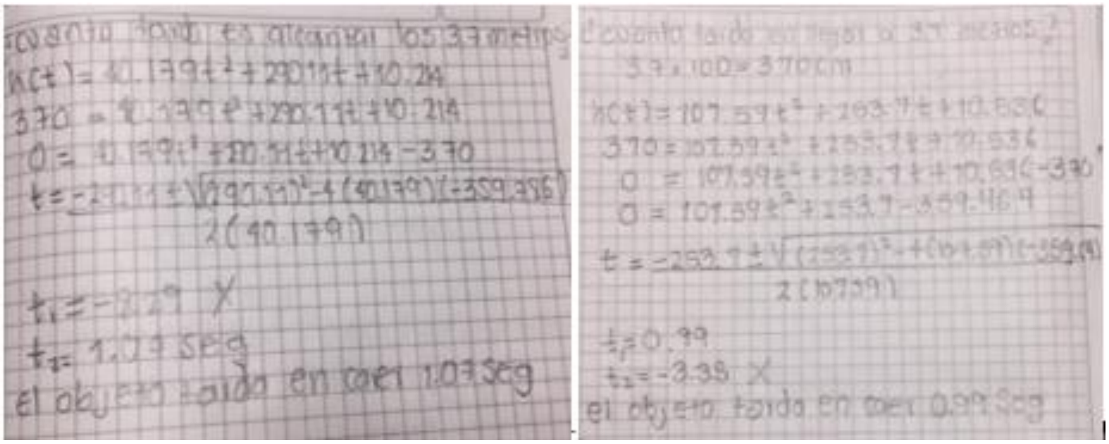


Figura 14. Datos de grupo A / datos de grupo B

En coherencia con los planteamientos anteriores, el proceso realizado por los estudiantes para modelar el comportamiento de los sistemas, se puede resumir de la siguiente manera: análisis-modelación -verificación- simulación. Así, se logró plasmar en la educación escolar, el proceso de modelación y simulación aquí propuesto

Con esta actividad, se concluye que la planeación del docente, los análisis y conclusiones de los estudiantes fueron relevantes para el desarrollo de cada una de las fases del proceso de modelación y simulación. Con la planeación de la primera parte de esta actividad, la docente logro comprender en qué consistían cada una de las fases del proceso, y con la segunda parte, condujo a que los estudiantes también se aproximaran a las fases de análisis-modelación-verificación- simulación de dicho proceso.

4.1.3 Fase 3. Modelación matemática en un problema de demanda y de ingreso en las ventas de un almacén avícola.

En esta fase los estudiantes se organizaron en parejas para desarrollar la actividad dos (ver anexo 11), durante dos sesiones de 4 horas de 45 minutos. Esta actividad se desarrolló en dos partes.

Primera parte.

En la primera, la docente ejecutó la fase de definiciones y de análisis del proceso de modelación y simulación propuesto en la sección 3.5, así, se dirigió a un almacén avícola ubicado en el municipio de Morales, allí le proporcionaron datos reales respecto a la cantidad de pollos vendida y precio de venta por día durante los meses de enero y febrero del año 2019. Con la información obtenida, la docente planteó la situación y formuló la pregunta respecto a qué precio se ganaría más dinero. La fase de modelación, simulación, y verificación fue desarrollada por los estudiantes, quienes relacionaron variables, utilizaron Excel para ajustar los datos obtenidos, y emplearon procedimientos algebraicos para encontrar un modelo cuadrático, en este último usaron los saberes adquiridos de funciones cuadráticas para predecir el ingreso máximo. Esta predicción resultó incoherente con la información real, por ello los estudiantes rechazaron el modelo cuadrático, y retomaron nuevamente el proceso de modelación y simulación propuesto. Así, se dio inicio a la segunda parte de la actividad, en la cual, los estudiantes fueron al mismo almacén, en busca de datos reales respecto al promedio mensual de la cantidad de pollos vendida y el precio de venta entre octubre de 2018 y mayo de 2019. La descripción de esta parte se hace de acuerdo al esquema de modelación y simulación propuesto.

Fase de definiciones

La fase de definiciones fue desarrollada por la docente, quien eligió el sistema S como: la fecha en la que ingresan los pollos en un almacén avícola, la fecha de venta, la cantidad vendida, el precio de venta, y los ingresos que obtiene el almacén avícola, y la pregunta fue ¿cuál debería ser el precio de los pollos para obtener el ingreso máximo?

Fase de análisis

Para la fase de análisis, la docente se dirigió a un almacén, donde el administrador le proporcionó datos reales respecto a la cantidad de pollos ingresada, precio de compra, precio de venta, y cantidad vendida por día durante los meses de enero y febrero del año 2019. La información obtenida fue organizada para plantear un problema que diera cuenta de los interrogantes de la fase de definiciones. A continuación, se describe el proceso que desarrollaron los estudiantes.

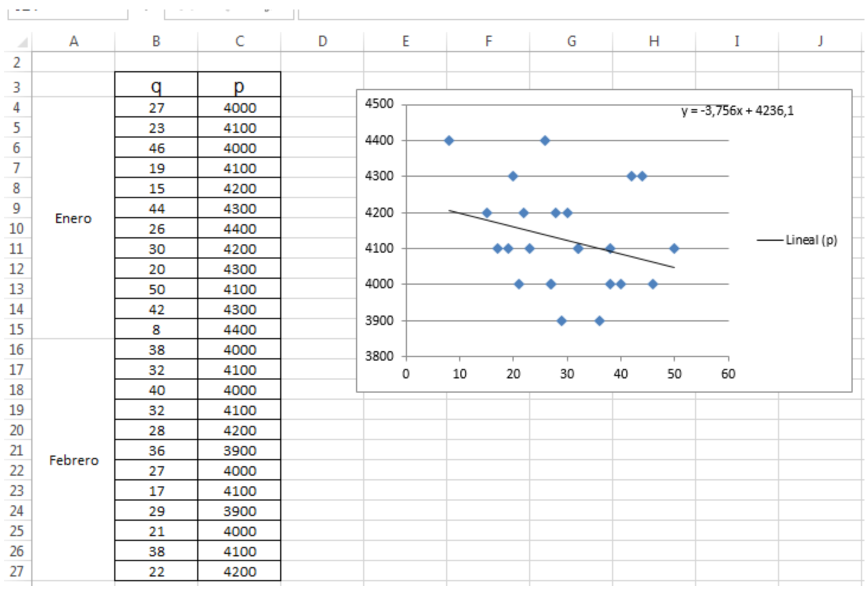
Se organizaron en parejas para realizar la actividad de modelación.

Fase de análisis

Los estudiantes identificaron que los elementos relevantes eran las variables cantidad vendida y precio de venta.

Fase de modelación

Los estudiantes utilizaron la idea previa que habían deducido en la guía de función lineal y cuadrática, la cual se refería a lo siguiente: para hallar el ingreso, primero se debía encontrar la relación lineal entre cantidad y precio, es decir la ecuación de demanda. De acuerdo a esto, elaboraron una tabla en una hoja de cálculo de Excel, donde registraron tanto la cantidad vendida por día como el precio de venta. Luego utilizaron las opciones de Excel para hallar el respectivo diagrama de dispersión, línea de tendencia, y la ecuación de ecuación demanda correspondiente, esto se muestra en la figura 15.



	q	p
Enero	27	4000
	23	4100
	46	4000
	19	4100
	15	4200
	44	4300
	26	4400
	30	4200
	20	4300
	50	4100
	42	4300
	8	4400
Febrero	38	4000
	32	4100
	40	4000
	32	4100
	28	4200
	36	3900
	27	4000
	17	4100
	29	3900
	21	4000
	38	4100
	22	4200

Figura 15. Diagrama de dispersión de la primera parte de la fase 3

Los estudiantes observaron el comportamiento de la línea de tendencia, e interpretaron el concepto de demanda, pues dedujeron que, al aumentar la cantidad de pollos, el precio de venta disminuía. De hecho, esto fue corroborado al interpretar el valor de la pendiente de la ecuación $p = -3{,}756q + 4236{,}1$, donde concluyeron que por cada pollo ingresado, el precio disminuía en $\$4$ pesos.

Seguidamente, los estudiantes procedieron a plantear el modelo de ingreso de la forma $I = f(p)$ que se muestran en la figura 16. Para este planteamiento, tuvieron en cuenta que un elemento importante de la pregunta principal era el precio p, por ello emplearon las propiedades de los números reales y de las igualdades para despejar la variable q de la ecuación de demanda $p = -3{,}756q + 4236{,}1$. Por último, emplearon la expresión $ingreso = precio * cantidad$ para finalmente obtener el modelo de ingreso en términos de p.

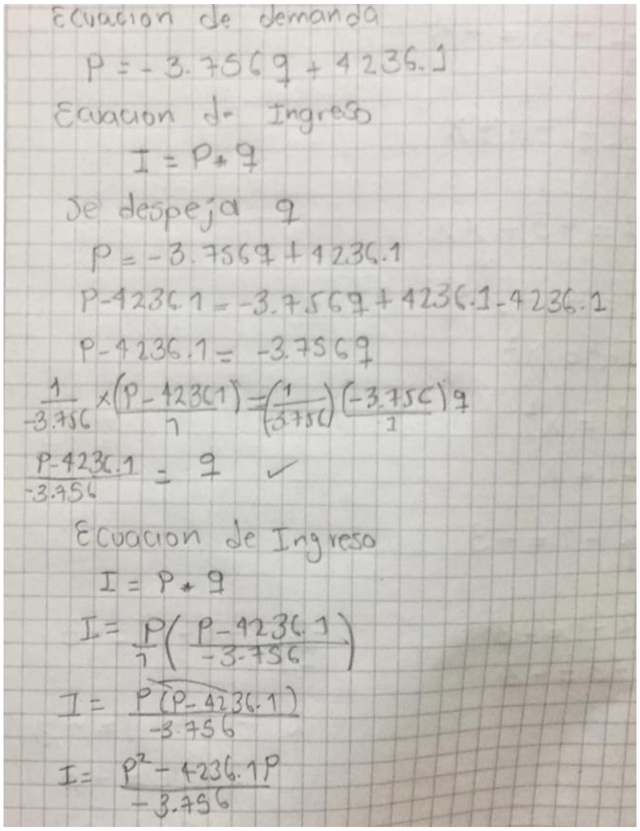


Figura 16. Procedimiento para hallar el modelo de ingreso

Fase de simulación

En la fase de simulación, los estudiantes analizaron las función de ingreso $I = f(p)$ y acudieron a conceptos previos que habían sido abordados en la fase de fundamentación matemática para derivar estrategias de solución. Por el término cuadrático reconocieron que se trataba de un tipo de función cuadrática, de hecho, como el coeficiente del término cuadrático era negativo, indicaron que su representación gráfica correspondía a una parábola cóncava hacia abajo, y por ello el vértice, correspondía al punto máximo. De esta manera, dedujeron la estrategia, que para encontrar el precio de venta al cual se obtendría el ingreso máximo se debía hallar las coordenadas del vértice en la función $I = f(p)$.

Fase de verificación

Los estudiantes implementaron la estrategia establecida previamente. En la figura 17 se muestra el procedimiento realizado, del cual dedujeron que diariamente se podría tener un ingreso máximo de $1.482.939 si, el precio de venta fuera de $2.088. Sin embargo, tal información divergía de los precios reales, pues comúnmente en un almacén agropecuario donde se venden pollos de engorde los precios superan los $ 3900 pesos. De esta manera, afirmaron que el modelo cuadrático $I = f(p)$ no representaba el ingreso de las ventas. Este aspecto, hizo que los estudiantes entendieran porqué en el diagrama de dispersión la mayoría de datos se alejaban de la línea de regresión.

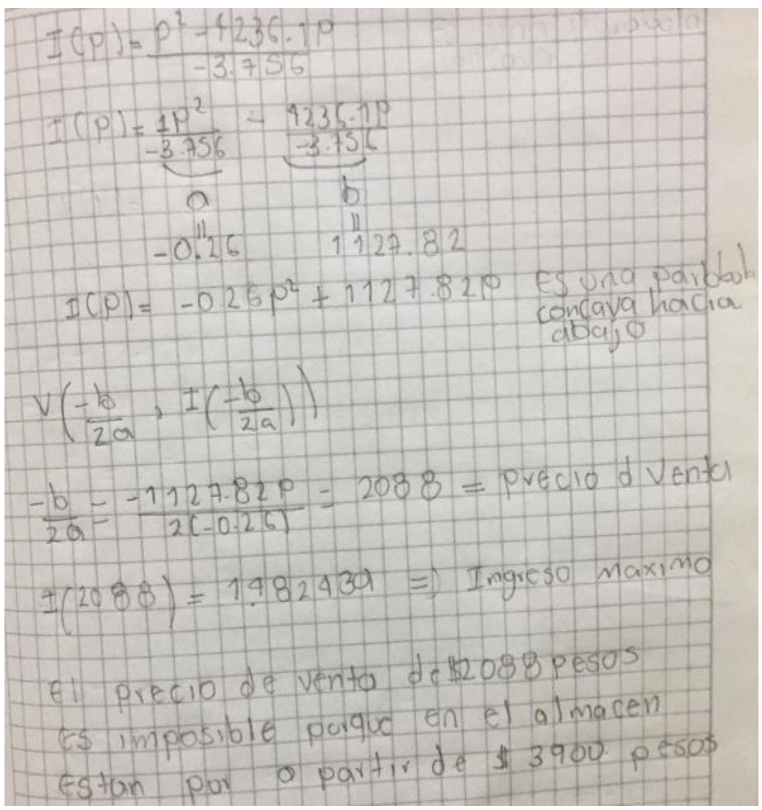


Figura 17. Procedimiento para hallar el ingreso máximo. Primera parte

Por lo anterior, los estudiantes sugirieron que se debía solicitar información respecto a la cantidad vendida y el precio de venta mensual; con este aspecto estaban retornando a la fase de análisis

Segunda parte: Nuevo proceso de modelación y simulación para hallar el ingreso máximo.

Dado que, los estudiantes no aceptaron el modelo cuadrático obtenido, decidieron retornar al proceso de modelación y simulación, partiendo desde la fase de análisis. Para este trabajo se conformaron 4 equipos de 3 personas y un equipo de 2 estudiantes

Fase de análisis

En la actividad anterior, los estudiantes identificaron que el precio y la cantidad vendida estaba por días, por ello, plantearon otra estrategia, que consistió en solicitar información mensual respecto al precio, y la cantidad promedio vendida desde el mes de octubre de 2018 hasta el mes de mayo de 2019. En la tabla 7 se organizaron los datos.

Tabla 7. Datos para hallar el ingreso máximo. Segunda parte

Mes	Cantidad vendida q	Precio promedio p
Octubre	320	4600
Noviembre	340	4450
Diciembre	350	4310
Enero	360	4200
Febrero	365	4250
Marzo	370	4150
Abril	380	4060
Mayo	390	4000

Fase de modelación

Los estudiantes empezaron esta fase ajustando los datos correspondientes a la cantidad vendida q y precio p. Ellos hallaron el diagrama de dispersión que se muestra en la figura 18, aquí notaron que los puntos se ajustaban a una línea recta. Así que, procedieron a hallar la línea de regresión cuya ecuación fue $y = -8{,}7702\ x + 7404{,}3$, la cual correspondía a la ecuación de demanda. En este caso, hicieron un cambio de la variable x por q y la variable y por p, con esto obtuvieron la ecuación $p = -8{,}7702\ q + 7404{,}3$

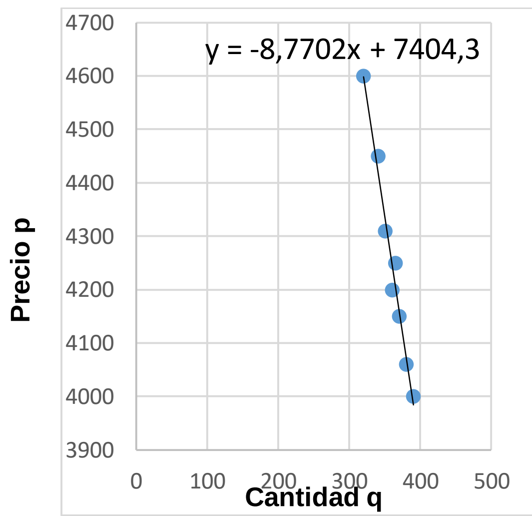


Figura 18. Diagrama de dispersión. Segunda parte de la fase 3

De la línea de regresión, los estudiantes interpretaron el concepto de demanda, pues dedujeron, que, al aumentar la cantidad de pollos en el mercado, el precio de venta disminuía. De hecho, esto fue corroborado al interpretar el valor de la pendiente de la ecuación $p = -8{,}7702\ q + 7404{,}3$, donde concluyeron que, por cada pollo ingresado, el precio disminuía aproximadamente en $ 9 pesos.

En la misma fase de modelación, los estudiantes plantearon la función de ingreso de la forma $I = f(p)$ que se muestra en la figura 19. En este planteamiento emplearon las propiedades de los números reales y de las igualdades para despejar la variable q de la ecuación de demanda $p = -8{,}7702\ q + 7404{,}3$. Por último, emplearon la expresión $ingreso = precio * cantidad$ para finalmente obtener el modelo de ingreso en términos de p.

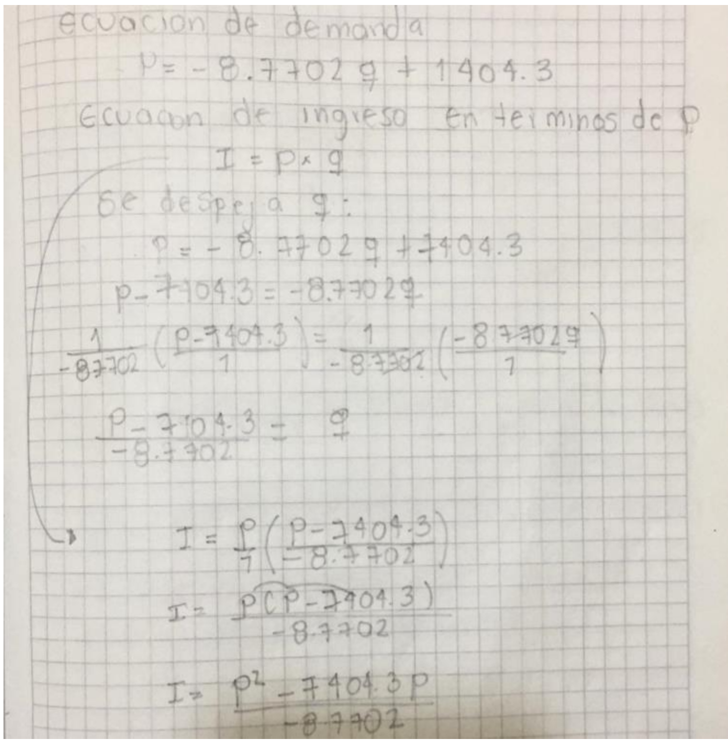


Figura 19. Procedimiento para hallar el modelo de ingreso en la segunda parte de la fase 3

Fase de simulación

En la fase de simulación, los estudiantes analizaron la función de ingreso $I = f(p)$, y por el término cuadrático reconocieron que se trataba de una función cuadrática, de hecho, como el coeficiente de dicho término era negativo, indicaron que su representación gráfica correspondía a una parábola cóncava hacia abajo, de esto último, concluyeron que el vértice correspondía al punto máximo. De esta manera, dedujeron que para encontrar el precio de venta al cual se obtendría el ingreso máximo se debía hallar las coordenadas del vértice en la función que estaba estrictamente en términos de p.

Fase de verificación

Los estudiantes decidieron poner en marcha la estrategia de usar el modelo cuadrático $I = f(p)$ para encontrar las coordenadas del vértice, este procedimiento se muestra en la figura 20. Ellos concluyeron, que mensualmente se podría obtener un ingreso máximo de $1.619.789 pesos si el precio de venta fuera de $3837 pesos.

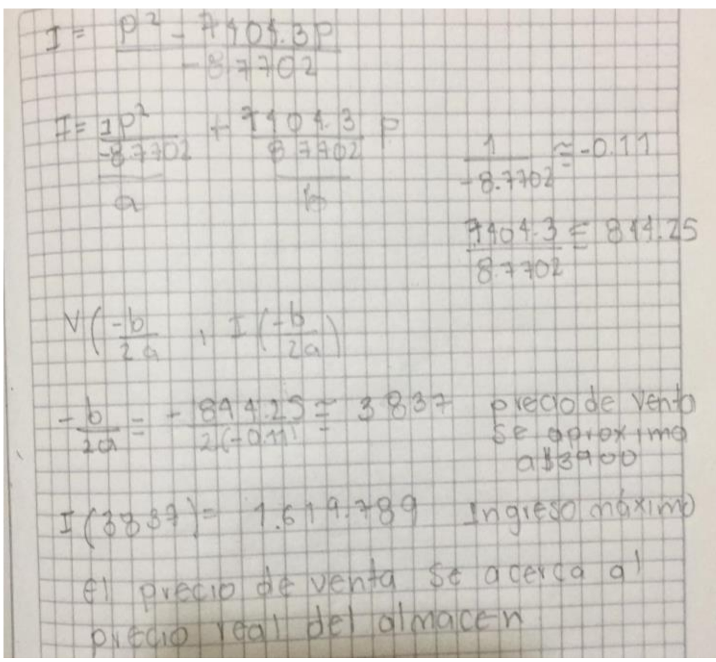


Figura 20. Procedimiento para hallar el ingreso máximo en la segunda parte de la fase 3.

Para los estudiantes, el precio de venta, cuyo valor era $3837 pesos se aproximaba a los $3900 pesos que ellos conocían por su experiencia, por esta razón, corroboraron que el modelo cuadrático del ingreso $I = f(p)$ satisfacía la solución del problema o que representaba la situación para la cual fue diseñada.

Este aspecto, hizo que los estudiantes entendieran porqué en el diagrama de dispersión todos los datos se ajustaban de la línea de regresión.

El trabajo inicial propuesto por la docente propició que los estudiantes utilizaran la estructura matemática de la función cuadrática para aproximarse al proceso de modelación y simulación aquí propuesto. En la fase de modelación, los estudiantes diseñaron el modelo matemático empleando saberes que habían sido abordados en la fase de fundamentación matemática, tales como, las propiedades de los números reales y de las igualdades para despejar adecuadamente las variables; en la fase de simulación emplearon la definición de función cuadrática y algunos elementos de la parábola como la concavidad, punto máximo y las coordenadas del vértice, de esta manera, dedujeron la estrategia de solución, finalmente, en la fase de verificación, recurrieron al precio de venta que conocían a partir de su experiencia, este aspecto fue determinante para que decidieran si el modelo cuadrático era coherente o no con la situación planteada, en otras palabras, para decidir si el modelo cuadrático de ingreso $I = f(p)$ resolvía el problema.

4.1.4 Fase 4. Prueba de verificación

Se desarrolló una prueba (ver anexo 12) con el propósito de determinar el nivel de apropiación de los conceptos, procedimientos y las aplicaciones vistas tanto en las guías como en las actividades de modelación. La prueba estuvo conformada por 4 puntos, los cuales consistieron en lo siguiente. En el primer punto se debían resolver dos ecuaciones que a primera vista no tenían la forma cuadrática, pues una tenia expresiones fraccionarias y otra con expresiones radicales. En el segundo punto se daban dos funciones cuadráticas, con las cuales se debía realizar un bosquejo de su representación gráfica a partir de los puntos de corte con los ejes, el vértice y la concavidad. El tercer punto era de selección múltiple, el cual pretendía que el estudiante verificará si un punto del plano cartesiano cumplía la función cuadrática. En el cuarto y último punto se propuso una situación real relacionada con la piscicultura, en la cual se daban unos datos reales respecto a la cantidad vendida de peces (libras) y el precio de venta desde el mes de abril hasta el mes de julio; los estudiantes debían desarrollar el proceso de modelación y simulación aquí propuesto para encontrar un modelo matemático $I = f(p)$ que permitiera predecir el ingreso.

El primer punto de la prueba consistió en resolver ecuaciones con términos racionales y con términos radicales. En este caso, los estudiantes utilizaron las propiedades del inverso aditivo, multiplicativo y la propiedad inversa de la radicación, así obtuvieron una ecuación cuadrática que resolvieron con la fórmula para hallar las posibles soluciones. Luego, las verificaron sustituyéndolas en las ecuaciones iniciales, para así determinar si cumplía o no la igualdad en ambos sentidos. De esta manera, se evidenció que los estudiantes prescindieron de las pseudo-reglas que usualmente utilizaban para resolver ecuaciones, las cuales consistían en pasar la expresión que estaba sumando a restar o viceversa, o la que estaba multiplicando a dividir y viceversa. Las soluciones se observan en la figura 21.

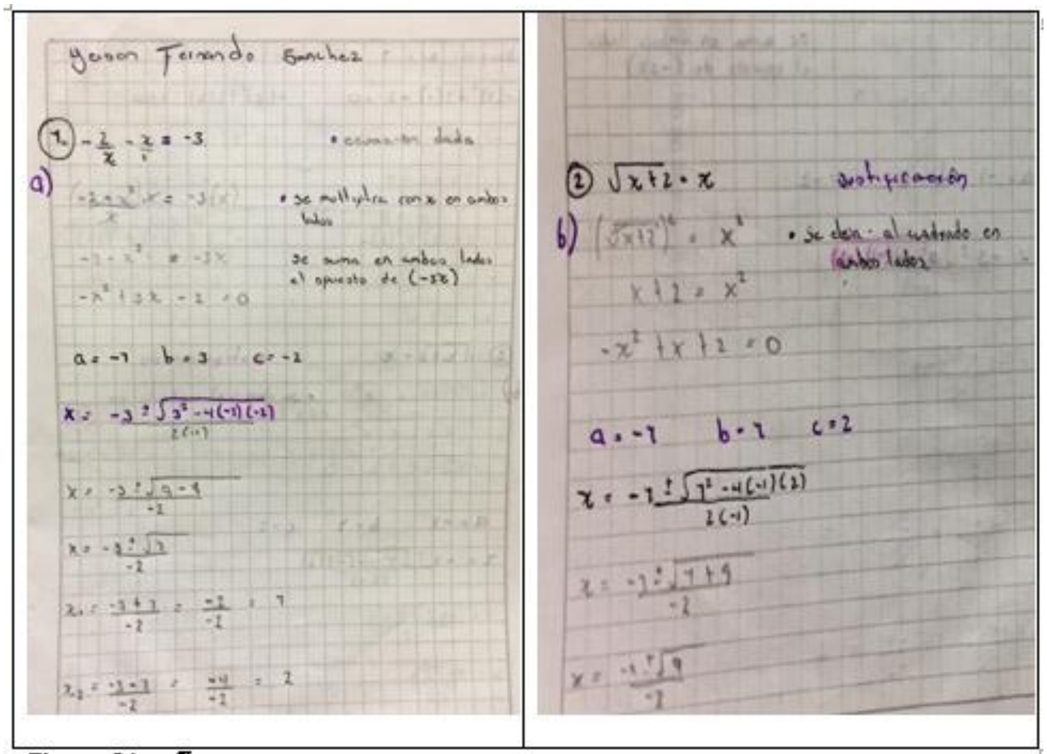


Figura 21. Solución del primer punto de la prueba de verificación

El segundo punto trataba sobre el bosquejo de dos funciones cuadráticas, sus respectivos vértices y puntos de corte con los ejes coordenados. Para la solución de ambas, todos los estudiantes tomaron cada una de las funciones dadas para hallar los puntos de corte con los ejes x y y , hicieron la variable $y = 0$ y $x = 0$, respectivamente. Dado que, al hacer $y = 0$ obtenían una ecuación cuadrática, está la resolvían usando la formula cuadrática. Esto se muestra en la figura 22 y 23.

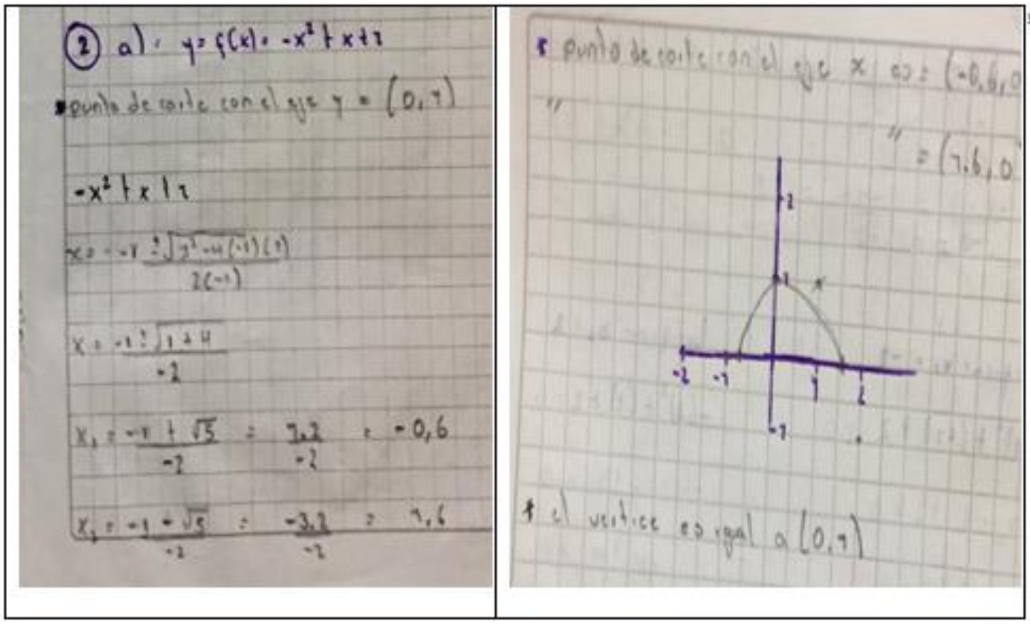


Figura 22. Solución del segundo punto de la prueba de verificación parte 2(a).

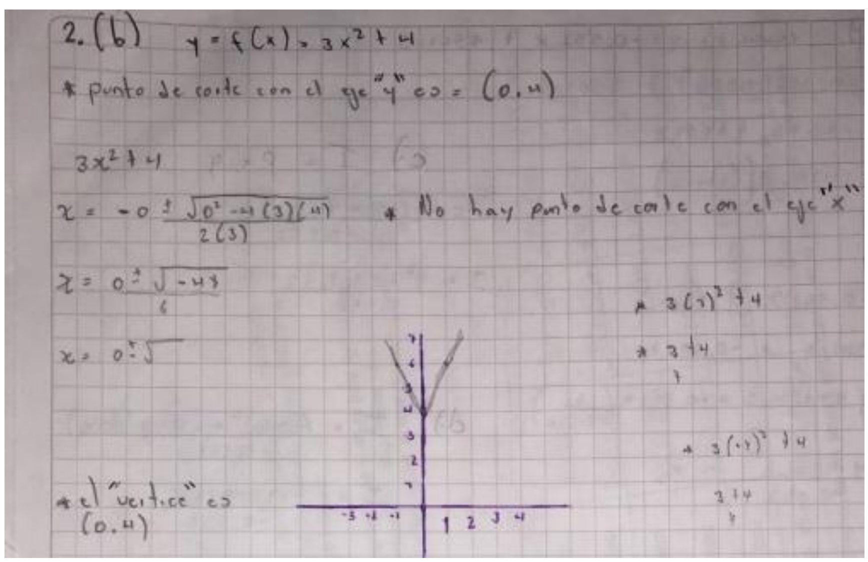


Figura 23. Solución del segundo punto de la prueba de verificación parte 2(b).

.

En el tercer punto se buscaba verificar si un punto estaba o no sobre la parábola de una función cuadrática. En este caso, todos los estudiantes identificaron en el punto dado el valor de la abscisa y la ordenada, luego procedieron a sustituir el valor de la primera en la función, comprobando que el resultado coincidía con el valor de la ordenada. La solución se observa en la figura 24.

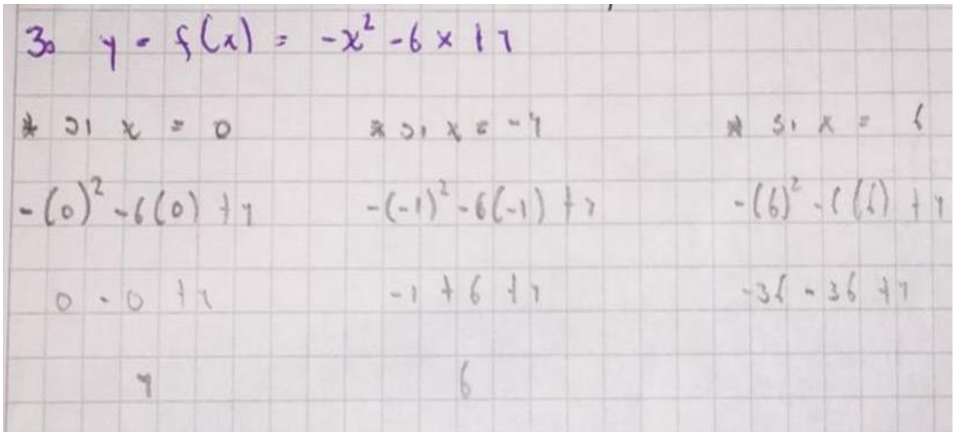


Figura 24. Solución del tercer punto de la prueba de verificación

El cuarto punto, los estudiantes lo resolvieron partiendo de la fase de modelación.

Fase de modelación

Los estudiantes iniciaron encontrando el diagrama de dispersión entre la cantidad vendida q y el precio p, y como el problema trataba sobre pescado tipo trucha, trajeron al escenario los saberes adquiridos por su experiencia, es decir, usaron el hecho que al haber poca cantidad de peces sabían que el precio aumentaba y al haber gran cantidad el precio disminuía. Con este argumento y con el diagrama de dispersión, concluyeron que los puntos debían ajustarse a una recta. Por ello, ajustaron los datos, encontrando una línea de regresión y su respectiva expresión algebraica, esto se muestra en la figura 25. En este caso, la ecuación fue $y = -0{,}552x + 8501{,}5$, en la cual hicieron el cambio de la variable x por p y la variable y por q, con esto obtuvieron la ecuación $q = -0{,}552p + 8501{,}5$.

Precio de venta p	Cantidad vendida q
15000	500
13250	550
12000	2220
10000	3000

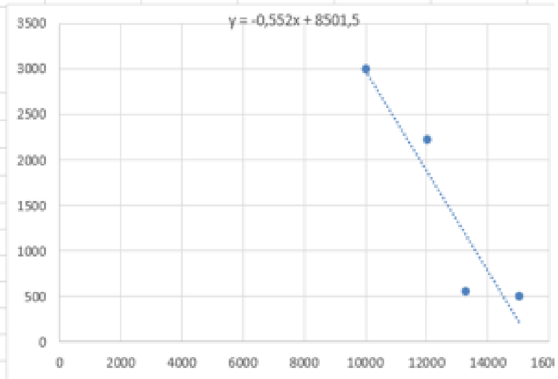


Figura 25. Diagrama de dispersión para el precio y cantidad vendida de pescado tipo trucha.

.

Seguidamente, los estudiantes plantearon la función de ingreso de la forma $I = f(q)$ que se muestra en la figura 26. En este planteamiento emplearon parte de la fundamentación matemática vista, como las propiedades de los números reales y de las igualdades para despejar la variable p de la ecuación de demanda $q = -0{,}552p + 8501{,}5$. Por último, emplearon la expresión $ingreso = precio * cantidad$ para finalmente obtener el modelo de ingreso en términos de q .

c.) $I = p * q$

$I = q\left(\frac{q - 8501,5}{-0,552}\right)$

$I = \frac{q^2 - 8501,5\,q}{-0,552}$

Figura 26. Procedimiento para hallar el modelo de ingreso I = f(q).

Los estudiantes también plantearon el modelo de ingreso de la forma $I = g(p)$ que se muestra en la figura 27. Para este planteamiento reemplazaron

$q = -0{,}552p + 8501{,}5$ y la expresión $ingreso = precio \ * \ cantidad$ para finalmente obtener el modelo de ingreso en términos de p.

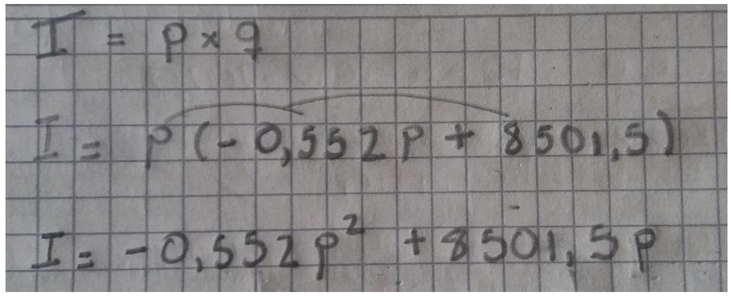


Figura 27. Procedimiento para hallar el modelo de ingreso I = g(p)

Fase simulación

En la fase de simulación, los estudiantes identificaron que la función de demanda se podía emplear en dos casos: para predecir la cantidad o para predecir el precio de venta. Además, utilizaron elementos de la fundamentación matemática vista, y con ello, dedujeron que la representación gráfica de las funciones de ingreso $I = f(q)$ e $I = g(p)$ eran parábolas cóncavas hacia abajo, por tal razón, el vértice correspondía al punto máximo. Así concluyeron, que en el caso de $I = f(q)$ debían hallar las coordenadas del vértice para predecir la cantidad que les generaría el ingreso máximo, y en el caso de $I = g(p)$ las coordenadas les permitían encontrar el precio que les generaría el ingreso máximo.

Fase de verificación

En primera medida, los estudiantes tomaron la decisión de utilizar el modelo cuadrático $I = g(p)$ para encontrar el precio y obtener el ingreso máximo. Aquí asumieron, que si el precio de venta por unidad se aproximaba al valor conocido por ellos, en este caso $8000 pesos (precio de venta al por mayor), entonces asumían que la expresión $I = g(p)$ era el modelo aproximado que podía satisfacer la solución del problema. En la figura 28 se observa que utilizaron la estrategia establecida en la fase de simulación de hallar las coordenadas del vértice para encontrar el precio que les generaría el ingreso máximo. Así, los estudiantes obtuvieron que el precio de venta por unidad debía ser aproximadamente de $7700 pesos, como este valor se aproximaba al valor real, entonces decidieron concluir que las expresiones $I = g(p)$ y $I = f(q)$ satisfacían la solución del problema

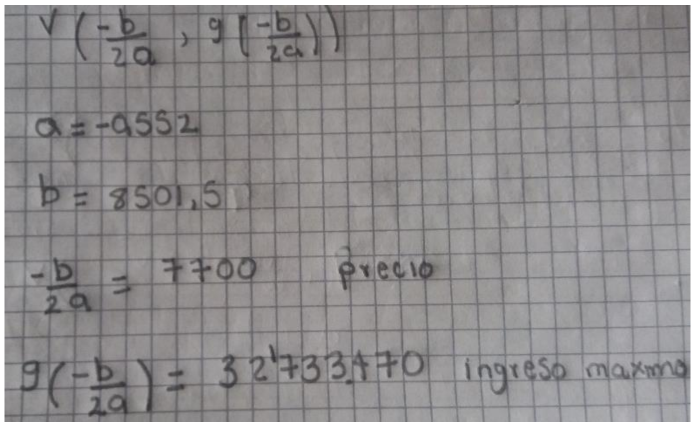


Figura 28. Procedimiento para hallar el ingreso máximo

Como el modelo para el ingreso era confiable, los estudiantes pusieron en marcha las estrategias propuestas en la fase de simulación para responder los interrogantes del problema.

En la figura 29 se observa que los estudiantes abordan las funciones con variable x y y que para ellos corresponden al precio y la cantidad respectivamente. Para la parte (b), los estudiantes utilizaron la función de demanda y sustituyeron el precio dado para predecir la cantidad vendida. En la parte (c) tomaron la función de demanda para despejar la variable x, para ello, utilizaron las propiedades de inverso aditivo y multiplicativo, así, hallaron la función de demanda en términos de y; la función fue usada para sustituir la cantidad dada y predecir el precio de venta.

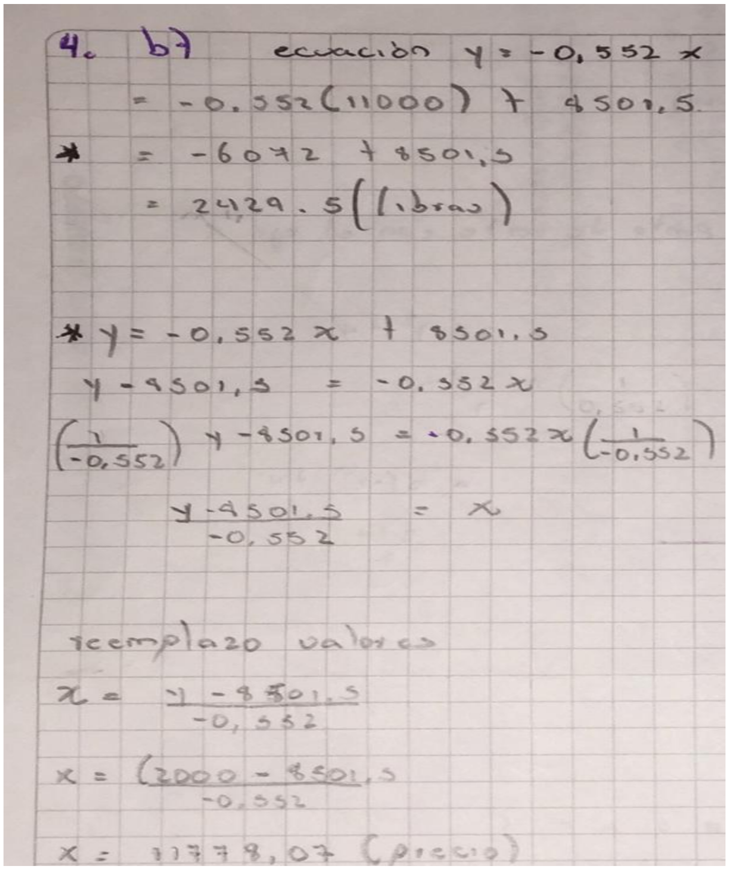


Figura 29. Procedimiento para predecir la demanda de pescado tipo trucha

En la figura 30, se observa que en la parte (d), los estudiantes utilizaron la función $I = f(q)$ para predecir el ingreso por la venta de 5000 libras de trucha.

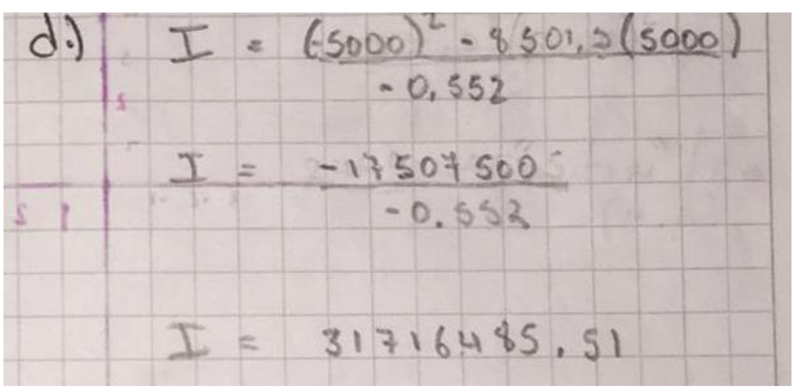


Figura 30. Procedimiento para hallar el ingreso por 5000 libras de pescado tipo trucha

En la parte (e), los estudiantes utilizaron nuevamente la función $I = f(\mathrm{q})$, pero esta vez para hallar las coordenadas del vértice de la parábola, con ello predijeron que para obtener un ingreso máximo de $ 32.733.470 la asociación debía vender alrededor de 4250 kilos de pescado.

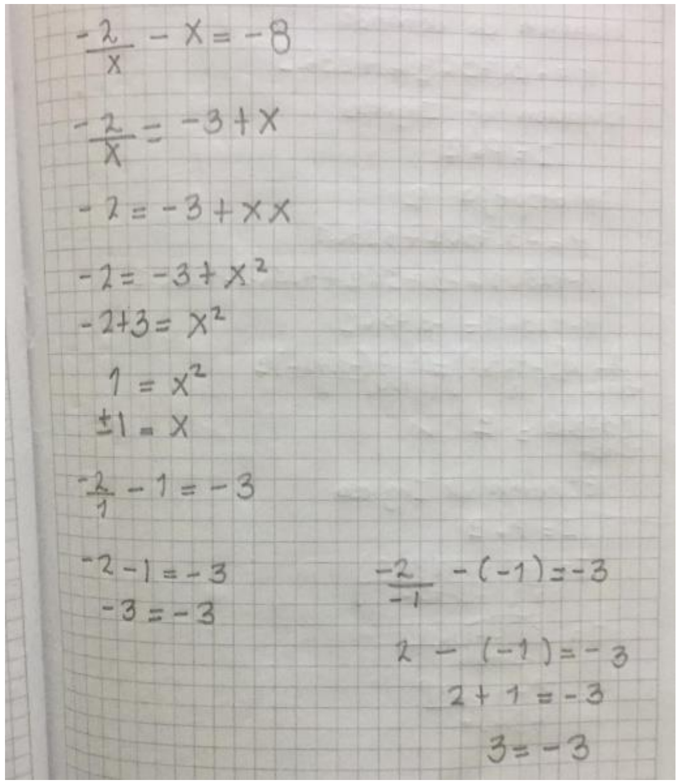
Los resultados de la prueba de verificación evidenciaron que los estudiantes utilizaron la estructura matemática de la función cuadrática en las fases de modelación, simulación y verificación. En la primera, se apoyaron en Excel para hallar la línea de regresión y la ecuación matemática que relacionara el precio y cantidad promedio vendida, después, utilizaron las ecuaciones obtenidas y las propiedades de los números reales y de las igualdades para despejar variables y diseñar los modelos matemático $I = g(p)$ y $I = f(q)$. En la fase de simulación, propusieron estrategias para responder las preguntas planteadas, indicaron que se debía despejar variables y resolver ecuaciones utilizando las propiedades del inverso aditivo, multiplicativo y las de la igualdad, de igual manera, emplearon parte de la fundamentación matemática vista en las funciones cuadráticas, específicamente los elementos de la parábola como concavidad, vértice y punto máximo. En la fase de verificación, los estudiantes validaron el modelo poniendo en juego dos aspectos, el precio real de venta que ellos conocían por su experiencia, y la estrategia de hallar las coordenadas del vértice para saber el precio de venta y el ingreso máximo, así asumieron, que si el precio hallado se aproximaba al valor real entonces los modelos $I = g(p)$ y $I = f(q)$ satisfacían la solución del problema. Los estudiantes concluyeron que el proceso de modelación y simulación podía aplicarse a muchas otras situaciones reales y para ello indicaron que se debía tener en cuenta los siguientes aspectos: la definición adecuada de las magnitudes o cantidades, e información o datos reales suficientes para cada una de ellas.

4.1.5 Comparación de la investigación con otro grupo de estudiantes.

Como una manera de comparar la intervención de aula realizada en el grado décimo, específicamente la información obtenida en la prueba de verificación, se decidió aplicar dicha prueba a un grupo de estudiantes del mismo grado de otra sede de la institución educativa. En este caso, el proceso educativo de dichos estudiantes no tuvo el desarrollo de una estructura matemática como la que se realizó en la presente investigación.

La prueba de verificación fue aplicada a 10 estudiantes de grado décimo de otra sede de la institución educativa, quienes ya habían abordado todo lo concerniente a la ecuación lineal, cuadrática, función lineal y función cuadrática. Los resultados de dicha prueba evidenciaron que no resolvieron las ecuaciones del primer punto, ni la situación real del cuarto punto que se propuso para modelar; solo resolvieron el segundo y tercer punto que trataba sobre la mecanización de las funciones cuadráticas, es decir la representación gráfica, puntos de corte con los ejes, y sobre puntos que podían satisfacer o no la función dada. Los resultados de esta prueba se presentan a continuación.

Los estudiantes sólo intentaron resolver la primera ecuación del punto uno. En la figura 31 se muestra que aplican las reglas de pasar el término que está dividiendo a multiplicar, y el término que está sumando a restar. El uso de tales reglas los llevó a obtener un posible valor para la incógnita, pero no se percatan de que tal valor era incorrecto, porque no lo evaluaron en la ecuación inicial.


$-\frac{2}{x} - x = -8$

$-\frac{2}{x} = -3 + x$

$-2 = -3 + xx$

$-2 = -3 + x^2$

$-2 + 3 = x^2$

$1 = x^2$

$\pm 1 = x$

$-\frac{2}{1} - 1 = -3$

$-2 - 1 = -3$

$-3 = -3$

$-\frac{2}{-1} - (-1) = -3$

$2 - (-1) = -3$

$2 + 1 = -3$

$3 = -3$

Figura 31. Solución del primer punto de la prueba de verificación por un estudiante de otra institución educativa

Para el segundo punto, los estudiantes realizaron primero una representación tabular para cada función cuadrática, y luego, ubicaron los puntos en el plano cartesiano para hallar la respectiva parábola. En la primera gráfica señalan los puntos de corte con los ejes, en este caso, dan las coordenadas exactas del punto de corte en el eje y, pero no lo hacen para los puntos de corte en el eje x porque sus coordenadas no son números enteros. En la segunda gráfica también señalan las coordenadas precisas del punto de corte en el eje y e indican que hay puntos de corte con el eje x. Lo anterior se puede ver en la figura 32.

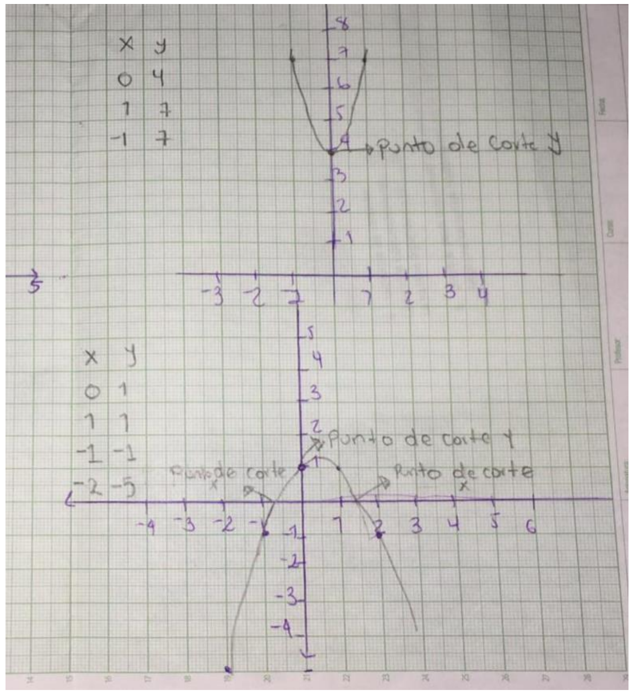


Figura 32. Solución del segundo punto de la prueba de verificación realizada por un estudiante de otra institución educativa.

Para el tercer punto, se observa que los estudiantes primero identifican las coordenadas en x y en y de cada pareja ordenada, y luego, proceden a sustituirlas en la función dada. En este caso, eligen el punto cuyas coordenadas satisfacen la función. Esto se muestra en la figura 33.

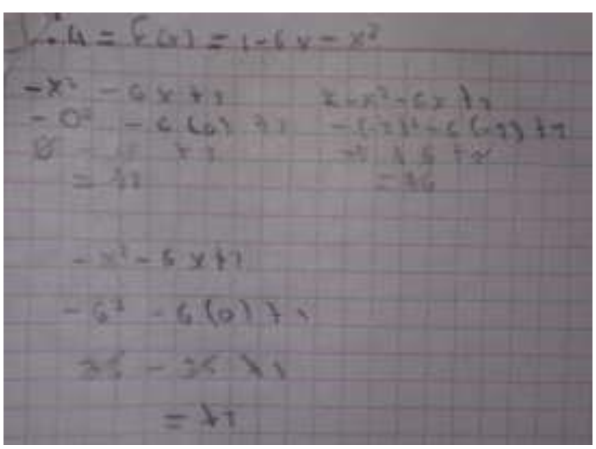


Figura 33. Solución del tercer punto de la prueba de verificación realizada por un estudiante de otra institución educativa

4.2 Análisis de resultados

Con el diseño e implementación de la estrategia basada en el desarrollo de una estructura matemática para aproximar a los estudiantes de grado décimo de la Institución Educativa Integral de Formación e Investigación Misak a la modelación matemática de situaciones reales utilizando funciones cuadráticas, se pueden reportar los siguientes resultados.

La fase de fundamentación matemática, donde se presentó la estructura matemática de la función lineal y cuadrática basada en la dimensión teórica, mecánica, analítica y de las aplicaciones permitió que los estudiantes accedieran a estos conceptos. La parte teórica, mecánica, y analítica que se desarrolló para la función lineal y cuadrática cobró importancia en la dimensión de las aplicaciones, donde se propusieron problemas físicos y financieros. Con estos últimos, los estudiantes encontraron sentido a elementos teóricos de la función lineal y cuadrática como la pendiente e interceptos de la recta, vértice y punto máximo de la parábola.

Los problemas propuestos en la dimensión de las aplicaciones dieron lugar a que los estudiantes resolvieran ecuaciones lineales y ecuaciones cuadráticas. En esta parte, ellos analizaban los valores obtenidos de acuerdo al contexto del problema, de ahí, que decidieran si el problema en estudio tenía solución o no, por ejemplo, cuando se trataba un problema de áreas o dimensiones, y las soluciones de las ecuaciones eran valores negativos. En otras palabras, los estudiantes iban más allá que simplemente resolver una ecuación.

La estructura matemática desarrollada en las dimensiones teórica, mecánica, analítica y aplicativa, fue relevante para la segunda y tercera fase de la intervención, donde se desarrolló el proceso de modelación propuesto. Los estudiantes desarrollaron dos actividades de modelación, una física y otra financiera utilizando la dimensión teórica, analítica y de las Tics, para obtener modelos aproximados de caída libre de un objeto y de ingreso para la venta de los pollos de engorde.

Para la caída libre de un objeto, los estudiantes obtuvieron un modelo cuadrático, desarrollando el proceso de modelación y simulación propuesto en la sección 3.5. En la fase de modelación ajustaron datos (promedios de las alturas experimentales y el tiempo) encontrando la línea de tendencia y su respectiva ecuación, después utilizaron esta ecuación y las propiedades de los números reales y de las igualdades para despejar variables y diseñar el modelo. En la verificación, usaron la estrategia de tomar el modelo para hallar las alturas teóricas en cada uno de los tiempos, después encontraron los errores relativos porcentuales entre los datos experimentales y teóricos, de modo que, si estos porcentajes era inferiores al 10% (margen de error establecida para la dispersión de los datos) concluían que el modelo era aproximado y que podía emplearse para resolver el problema. En caso contrario, algunos estudiantes tomaron una posición analítica para derivar estrategias y mejorar el modelo rechazado.

El proceso de modelación y simulación de la situación financiera sobre la demanda e ingreso de los pollos de engorde en un almacén avícola del municipio de Morales fue relevante, porque los estudiantes trajeron al escenario los datos reales del precio de venta que ya conocían para verificar y decidir si el modelo de ingreso que habían obtenido podía usarse para hacer predicciones.

En un primer momento, en el enunciado de la situación financiera se proporcionaba una serie de datos correspondiente a la cantidad y precio de venta por día, así que los estudiantes abordaron las fases de modelación-simulación-verificación del proceso de modelación y simulación propuesto. En la modelación, ajustaron los datos empleando Excel, de manera que hallaron la línea de regresión y su respectiva ecuación, en esta utilizaron propiedades de los números reales y de las igualdades para despejar variables y plantear el modelo cuadrático de ingreso. En la simulación, dedujeron la estrategia que elementos teóricos de la función cuadrática como concavidad, punto máximo y las coordenadas del vértice se podían usar en el modelo cuadrático para hallar el precio de venta al cual se obtendría mayor ingreso. Los estudiantes aplicaron dicha estrategia en la fase de verificación, donde encontraron un precio que no se aproximaba al valor de venta real conocido por ellos. En vista de esto, concluyeron que el modelo cuadrático de ingreso no se ajustaba a los datos reales, y en consecuencia no representaba la situación estudiada, por tal razón, decidieron emprender la búsqueda de otra estrategia.

En un segundo momento desarrollaron nuevamente, las fases de modelación, pero esta vez análisis- modelación- simulación- verificación. Como los datos ya estaban recolectados por días, en el análisis decidieron recolectar la información por meses. En la modelación ajustaron los datos encontrando la línea de regresión y su respectiva ecuación, seguidamente usaron las propiedades de los números reales y de las igualdades para despejar variables en la ecuación de regresión y plantear el modelo cuadrático de ingreso. En la simulación encontraron las coordenadas del vértice para hallar el precio que generaba el ingreso máximo, como este dato se aproximó el dato real, concluyeron, que el modelo para el ingreso lograba representar la situación estudiada, y por ende, podía usarse para predecir el ingreso por el precio de venta. La manera en que los estudiantes plasmaron esquema de modelación y simulación, deja concluir que este se desarrolla de manera cíclica.

Con la situación anterior, los estudiantes lograron adquirir destrezas y habilidades para el uso de las Tics, usando las funciones de Excel para establecer si las variables se relacionaban de manera lineal o no lineal. Este hecho se presentó con la situación de ingreso, pues, al decidir que el modelo cuadrático satisfacía la solución de problema, entendían porque en el diagrama de dispersión la línea de regresión se ajustaba a los datos. En este sentido, concluyeron, que si la línea de regresión tenía un buen ajuste con los datos reales, entonces el modelo cuadrático diseñado representaba la situación estudiada, y por ende, se podía utilizar para hacer predicciones, este argumento se acercaba al planteamiento de Cardona, et al. (2013), quienes indican que la regresión de variables da cuenta de la fuerza en que se relacionan las variables en estudio.

Para la prueba de verificación, se puede afirmar que los estudiantes lograron plasmar en el escenario escolar las fases del proceso de modelación y simulación propuesto en la sección 3.5. En ellas utilizaron la dimensión teórica de las funciones lineales y cuadráticas y hasta encontraron sentido a algunos elementos conceptuales.

Finalmente, al aplicar la prueba de verificación a otro grupo de estudiantes se puede inferir, que presentan dificultades para resolver ecuaciones con expresiones fraccionaras y con expresiones radicales, dejado en evidencia, que asumen unas pseudo-reglas no fundamentadas en la teoría. En lo concerniente a las funciones cuadráticas, se comprueba que hay un manejo algorítmico respecto al gráfico de este tipo de funciones, pero no se conoce el procedimiento algebraico para hallar con exactitud los puntos de corte con los ejes coordenados. En general, se puede decir, que, aunque los estudiantes tenían un manejo mecánico de algunos procesos matemáticos de las funciones cuadráticas, desconocían que a partir de estas se podían modelar situaciones reales.

Los resultados de la prueba de verificación corroboraron la necesidad que, si los estudiantes realizan un trabajo fuerte de fundamentación matemática donde se desarrolle la estructura matemática basada en la dimensión teórica, analítica, mecánica y de las Tics, entonces pueden aproximarse a la modelación matemática.

5. Conclusiones y recomendaciones

5.1 Conclusiones

Después de implementar la estrategia basada en el desarrollo de una estructura matemática para aproximar a los estudiantes a la modelación matemática de situaciones reales utilizando funciones cuadráticas, se concluye que:

El desarrollo de una conceptualización matemática previa en cuanto a los procedimientos matemáticos basados en las propiedades de los números reales y de las igualdades para para despejar variables, y elementos teóricos respecto a la función cuadrática como concavidad, punto máximo y coordenadas del vértice así como sus aplicaciones, permitió aproximar a los estudiantes al proceso de modelación y simulación de situaciones reales.

Los estudiantes analizaron las situaciones reales propuestas, tomaron datos, analizaron variables y se apoyaron en la herramienta Excel para ajustar los datos y encontrar la ecuación matemática que relacionara las variables en estudio. El trabajo más relevante se encuentra en el planteamiento del modelo cuadrático, pues, para ello, usaron la ecuación de regresión y parte de la fundamentación matemática vista para diseñar dicho modelo, en este caso, las propiedades de los números reales y de las igualdades para despejar adecuadamente las variables (fase de modelación).

Los estudiantes analizaron los modelos obtenidos y dedujeron estrategias que los condujera a responder los interrogantes de cada situación (fase de simulación).

En este sentido, se basaron en elementos teóricos vistos en la fase de fundamentación, tales como, las propiedades de los números reales y de las igualdades para resolver ecuaciones, y respecto a la función cuadrática, concavidad, punto máximo y las coordenadas del vértice

Los estudiantes tomaron los modelos matemáticos para validarlos con la situación real (fase de validación). En este sentido, se deduce que para las dos situaciones usaron respectivamente los siguientes criterios: el error relativo porcentual entre el promedio de los datos experimentales y los datos teóricos (hallados con el modelo) se estableció inferior al 10%. En la otra situación, los estudiantes compararon los datos teóricos con los datos reales que ellos ya sabían por su experiencia.

Los estudiantes exploraron en la fase de análisis los datos de los modelos y los compararon de acuerdo con los criterios establecidos. Aquí propusieron estrategias para mejorar los modelos matemáticos donde fue necesario, en este sentido, solicitaron más datos reales en el problema avícola y reformularon el modelo de una manera distinta, lo que permitió ajustar el comportamiento de los datos.

Se propone una alternativa para incorporar herramientas de modelamiento matemático en el ámbito escolar, pues en esta investigación se estableció que primero se debe desarrollar una estructura matemática basada en una serie de dimensiones interrelacionadas entre sí, en las que los estudiantes avanzan en la construcción de los conceptos matemáticos, entendiendo hasta sus aplicaciones. Una vez hecho este avance es posible articular dichas dimensiones y luego aproximarse a las fases de modelamiento matemático.

5.2 Recomendaciones

A las personas que deseen continuar con la presente investigación, se les recomienda elegir un grupo control y un grupo experimental al cual se le aplique la estrategia diseñada. De modo que, al final se realice las respectivas comparaciones.

El docente debe mostrar a los estudiantes las opciones que tiene Excel para resolver situaciones reales y problemas matemáticos. Con este trabajo, los estudiantes conocieron que esta herramienta puede ajustar datos mediante las opciones de diagrama de dispersión y de regresión.

En la dimensión de las TICS se recomienda el uso de software Tracker para analizar sistemas móviles. Dicho software permite hacer el seguimiento de objetos, registrar su posición y tiempo, extraer la tabla de datos y gráficos.

6. Referencias

Anacona, M. (2003). *La historia de las matemáticas en la educación matemática*. Revista Ema Vol. 8, N°, 30-46.

Arteaga, E. (2017). *La Historia de la Matemática en la Educación matemática*. Revista Conrado, 13(59), 62-68. Recuperado de http://conrado.ucf.edu.cu/index.php/conrado

Artigue, M. (2011). *Tecnología y enseñanza de las matemáticas: desarrollo y aportes de la aproximación instrumental*. Paris: Laboratoire de Didactique André Revuz Francia. Recuperado el 19 de Octubre de 2011, de http://cimm.ucr.ac.cr/ojs/index.php/CIFEM/article/download/669/658.

Blomhøj, M., & Jensen, T. H. (2003). *Developing mathematical modelling competence: Conceptual clarification and educational planning*. Teaching mathematics and its applications, 22(3), 123-139.

Blum, W., & Borromeo, R. (2009). *Mathematical Modelling: Can It Be Taught And Learnt?* Journal of Mathematical Modelling and Application, 1 (1), pp. 45-58

Bossio, J. L. (2014). *Un proceso de modelación matemática desde una situación en el contexto del cultivo de plátano con estudiantes de grado décimo al generar modelos lineales* (Doctoral dissertation, Universidad de Antioquia).

Burden, R. L., & Faires, J. D. (2002). Análisis Numérico. Séptima edición, Thomson Learning.

Cardona, D. F., Gónzalez, J. L., Rivera, L. M., & Cárdenas, E. H. (2013). *Aplicación de la regresión lineal en un problema de pobreza*. Interacción, 12, 73-84.

Carrillo, J. (1998). *Modos de resolver problemas y concepciones sobre la Matemática y su enseñanza: metodología de la investigación y relaciones*. Universidad de Huelva Publicaciones.

Chappotin, G. J. (2019). *Física.* Recuperado el 15 de abril de 2019 de https://chappotin20014.wixsite.com/fisica/talleres-y-trabajos

Chevallard, Y. (1991). *La transposición didáctica. Del saber sabio al saber enseñado*, 3.

Colera, J., & Oliveira, M. J. (2009). *Matemáticas aplicadas a las Ciencias Sociales II*.

Crooks, N., & Alibali, M. (2014). *Defining and measuring conceptual knowledge in mathematics*. Developmental Review, 34(4), 344-377.

De Moreno, I. & De Castellanos, L. (1997). *Secuencia de enseñanza para solucionar ecuaciones de primer grado con una incógnita*. Revista EMA, 2(3), 247-258.

Galbraith, P., & Stillman, G. (2006). *A framework for identifying student blockages during transitions in the modelling process*. ZDM, 38(2), 143-162.

Gialdino, I. V. (2006). *La investigación cualitativa*. En Estrategias de investigación cualitativa (págs. 23-64). Barcelona: Gedisa.

González, P. M. (2004). *La historia de las matemáticas como recurso didáctico e instrumento para enriquecer culturalmente su enseñanza*. Suma, 17-18.

Greefrath, G., Siller, H. S., & Weitendorf, J. (2011). *Modelling considering the influence of technology*. En Trends in teaching and learning of mathematical modelling (pp. 315-329). Springer, Dordrecht.

Hein, N., & Biembengut, M. (2006). *Modelaje matemático como método de investigación en clases de matemáticas*. M. Murillo (presidente), Memorias del V festival internacional de matemática, 1-25.

Hiebert, J., & Lefevre, P. (1986). *Conceptual and procedural knowledge in mathematics: An introductory analysis*. En J. Hiebert (Ed.), Conceptual and procedural knowledge: The case of mathematics (pp. 1-27). Hillsdale, MI: Lawrence Erlbaum Associates.

Icfes (2017). *Resultados pruebas saber en el área de matemáticas*. Recuperado el 9 de marzo de 2020 de https://www.icfes.gov.co/web/guest/resultados-historicos-saber-359.

Jaramillo, P., Castañeda, P., & Pimienta, M. (2009). *Qué hacer con la tecnología en el aula: inventario de usos de las TIC para aprender y enseñar*. Educación y Educadores, 12 (2), 159-179.

Kaiser, G., & Sriramam, B. (2006). *A global survey of international perspectives on modelling in mathematics education*. ZDM, 38 (3), 302-310.

Kaiser, G., & Schwarz, B. (2010). *Authentic Modelling Problems in Mathematics* Education—Examples and Experiences. Journal für Mathematik-Didaktik, 31 (1), 51-76.

Leal, J. J., Cardona, J. P., & Agudelo, A. (2015). *El modelamiento matemático como vía idónea para la formación de ingenieros. Una reflexión pedagógica*. Revista Científica, 1(21), 91-96.

López, N. M., Lagunes, H. C., & Herrera, S. M. (2006). *Excel como una herramienta asequible en la enseñanza de la Estadística*. Teoría de la Educación. Educación y Cultura en la Sociedad de la Información, 7(1).

López, J., & Sosa, L. (2008). *Dificultades conceptuales y procedimentales en el aprendizaje de funciones en estudiantes de bachillerato*.

Lozano, W., & Sierra, W. (2012). *El proceso de la modelación y aplicación de las matemáticas y evaluación*. HACER Y SABER N° 1 Julio-Diciembre, pp.140-152.

MEN (2004). *Una llave maestra: Las TIC en el aula*. Altablero No. 29, ABRIL-MAYO 2004.

MEN. (1998). *Lineamientos Curriculares*. Bogotá: Ministerio de Educación.

Ramírez, M., Salazar, F. L., Joya, A., & Cely, V. (2010). *Hipertexto Matemáticas 8*. Bogotá: Santillana S.A.

Rico, L. (1998). *Consideraciones sobre el Currículo de Matemáticas para Educación Secundaria*. Departamento Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada. Publicado por la Revista EMA (Una Empresa Docente), Vol. 1, N° 14. 1995, pp. 4-24.

Roldán, E. O. (2013). *El aprendizaje de la función lineal, propuesta didáctica para estudiantes de 8 y 9 grados de educación básica*. Facultad de Ciencias.

Rosas, A., & Zúñiga, J. (1992). *Estadística descriptiva e inferencial I*. Fascículo 3 Correlación y regresión lineales. Colegio.

Sierpinska, A. (1992). *On Understanding The Notion of Function*. En E. Dubinsky, & G. Hareld (Edits.), The concep of function: Some Aspects of Epistemology and Pedagogy (C. Delgado G., Trad., Vol. 25, págs. 25-58). Washington, DC: MAA Notes. Mathematical Association of America.

Stake, R. (1999). *Investigación con estudio de casos*. Madrid: Morata.

Stewart, J., Redlin, L., & Watson, S. (2012). *Precalculus*. Mathematics for Calculus. Sixth Edition. Publicado en inglés por Brooks & Cole, una compañía de Cengage Learning © 2012

Vargas, M. E. (2011*). El concepto de función y sus aplicaciones en situaciones relacionadas con fenómenos físicos, que conducen a un modelo cuadrático, una propuesta para trabajar en el grado noveno*. Tesis de Maestría Universidad Nacional de Colombia.

Velten, K. (2009). *Mathematical modeling and simulation: introduction for scientistsand engineers*. John Wiley & Sons

Villa, J. A., & Ruiz Vahos, H. M. (2009). *Modelación en educación matemática: una mirada desde los lineamientos y estándares curriculares colombianos*. Revista virtual Universidad católica del norte, 1(27).

. .

7. Anexos

Anexo 1. Perspectiva de la dimensión teórica

Propiedades de los números reales

Sean $a, b, c \in \mathbb{R}$ se cumplen las siguientes operaciones para la operación suma:

Propiedad Conmutativa: $a + b = b + a$

Propiedad Asociativa: $(a + b) + c = a + (b + c) = a + b + c$

Propiedad Modulativa: Para todo $a \in \mathbb{R}$ existe $0 \in \mathbb{R}$ que cumple lo siguiente $a + 0 = 0 + a = a$. El Número 0 recibe el nombre de módulo de la suma.

Propiedad Inversa: Para todo $a \in \mathbb{R}$ existe $-a \in \mathbb{R}$ que cumple lo siguiente $a + (-a) = 0$ El Número $-a$ recibe el nombre de opuesto aditivo.

Sean $a, b, c \in \mathbb{R}$ se cumplen las siguientes propiedades para la operación producto:

Propiedad Conmutativa: $a * b = b * a$

Propiedad Asociativa: $(a * b) * c = a * (b * c) = a * b * c$

Propiedad Modulativa: Para todo $a \in \mathbb{R}$ existe $1 \in \mathbb{R}$ que cumple lo siguiente $a * 1 = 1 * a = a$. El Número 1 recibe el nombre de módulo del producto.

Propiedad Inversa: Para todo $a \in \mathbb{R}$ con $a \neq 0$ existe $\frac{1}{a} \in \mathbb{R}$ que cumple lo siguiente $a * \frac{1}{a} = 1$ El número $\frac{1}{a}$ recibe el nombre de inverso multiplicativo.

Propiedad distributiva

$\boldsymbol{a * (b + c) = a * b + a * c}$

Propiedades de la igualdad

Sean a, b, c expresiones algebraicas

$a = b$ si y solo si $a + c = b + c$

$a = b$ si y solo si $a * c = b * c$ con $c \neq 0$

Uso de las propiedades para resolver la ecuación cuadrática general

A continuación, se presenta un ejemplo para ilustrar como debe aplicarse la estructura teórica para resolver ejercicios, en este caso se utilizan las propiedades de los números reales para resolver la ecuación cuadrática

La ecuación $ax^2 + bx + c = 0$ con $a \neq 0$ se conoce como la ecuación cuadrática general y para resolverla se realiza lo siguiente:

Se divide a ambos lados de la igualdad por a para obtener:

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$$

Se dejan las variables a un solo lado de la igualdad:

$$x^2 + \frac{b}{a}x = -\frac{c}{a}$$

Se completa el trinomio cuadrado perfecto que está en el lado izquierdo de la ecuación, y para ello se adiciona en ambos lados de la igualdad la mitad del coeficiente $\frac{b}{a}$ elevado al cuadrado, esto es $\left(\frac{b}{2a}\right)^2$

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 = -\frac{c}{a} + \left(\frac{b}{2a}\right)^2$$

:

Como puede observarse en el lado izquierdo se forma un trinomio cuadrado perfecto y su respectiva factorización es:

$$\left(x+\frac{b}{a}\right)^2=\frac{b^2-4ac}{4a}$$

Al extraer la raíz cuadrada a ambos lados de la igualdad se obtiene

$$x+\frac{b}{2a}=\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

Luego se resta $\frac{b}{2a}$ en ambos lados de la igualdad

$$x=\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}-\frac{b}{2a}$$

Se realiza la suma de fracciones homogéneas para obtener la reconocida solución de la ecuación cuadrática

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

Los valores $x_1=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ $x_2=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ se conocen como las raíces de la ecuación cuadrática.

Finalmente, la ecuación se puede escribir como:

$ax^2+bx+c=(x-x_1)(x-x_2)$.

Concepto de función

Una función f de un conjunto en un conjunto B es una regla en la que a cada elemento x le corresponde un único elemento $f(x)$ del conjunto B.

Función cuadrática

Definición

Si se tienen los números reales a, b, c con $a \neq 0$, la función $f(x)=ax^2+bx+c$ se denomina función cuadrática.

Representación de la función cuadrática

Para estudiar la representación gráfica de la función cuadrática $f(x)=ax^2+bx+c$ se debe tener en cuenta los parámetros a, b, con $a \neq 0$. El parámetro a establece la concavidad de la parábola, así que, si $a > 0$ la parábola es cóncava hacia arriba y si < 0 la una parábola es cóncava hacia abajo.

Si $a \neq 0$ y b, $c = 0$ se obtiene la función $(x) = ax^2$ cuyo vértice es (0,0), es decir el origen del plano cartesiano. En la figura 1 y 2 se presenta el comportamiento la función.

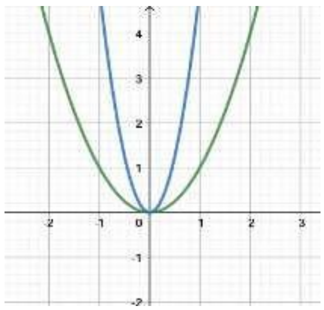


Fig.1 Parábola cóncava hacia arriba y con vértice en el origen

.

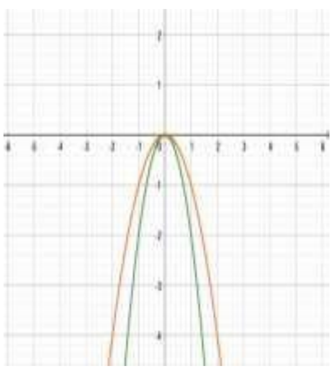


Fig. 2 Parábola cóncava hacia abajo y con vértice en el origen

Si, $c \neq 0$ y $b = 0$ se obtiene la función $(x) = ax^2 +$, y el parámetro c da cuenta del desplazamiento en el eje vertical. Así que si $c > 0$ la gráfica de desplaza c unidades hacia arriba y si $c < 0$ se desplaza $|c|$ unidades hacia abajo. En este caso el vértice de la parábola es (0, c). En la figura 3 y 4 se observa unos ejemplos

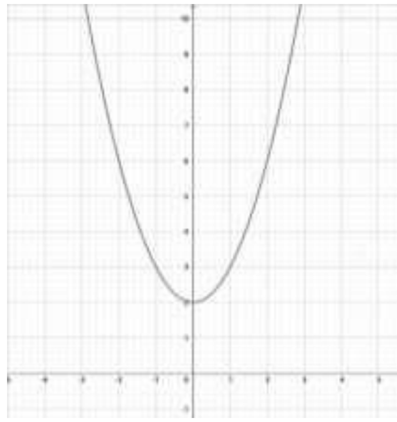


Fig. 3 Parábola con desplazamiento vertical hacia arriba

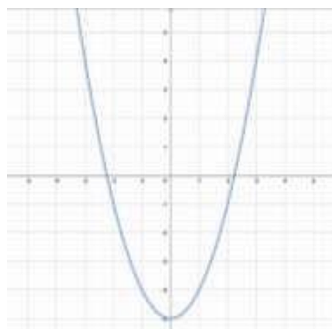


Fig. 4 Parábola con desplazamiento vertical hacia abajo

Si a, b, $c \neq 0$ se obtiene la función $f(x) = ax^2 + bx + c$ cuyo estudio se hace completando cuadrados para transformarla en:

$$f(x) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a}$$

Y al sustituir los valores $h = -\frac{b}{2a}$ y $k = -\frac{4ac-b^2}{4a}$ se obtiene:

$f(x) = (x - h)^2 + k$

En esta función el vértice de la parábola es (h, k) mientras que el parámetro h determina que el desplazamiento horizontal de la gráfica es $|h|$.

Para encontrar el punto de corte de la parábola con el eje de las y se debe hacer

$fx = 0$ en $f(x) = ax^2 + bx + c$

para obtener $f(0) = c$, de aquí que el punto de corte es $(0, c)$.

Para encontrar los puntos de corte con el eje de las x se encuentran haciendo

y = 0 en $f()$ = $ax^2 + bx + c$ para obtener la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$, y para resolver esta ecuación se emplea la fórmula de la ecuación cuadrática

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

En esta expresión, $b^2 - 4ac$ se llama **discriminante**, el cual da cuenta de las soluciones de la ecuación y a la vez indica el número de cortes de la parábola con el eje x, a saber:

Si $b^2 - 4ac > 0$ entonces la ecuación tiene dos soluciones reales distintas, y por ello la parábola corta el eje x en dos puntos distintos.

Si $b^2 - 4ac < 0$ entonces se dice que la ecuación no tiene soluciones reales, y por ello no corta el eje x. En este caso, la ecuación tiene dos soluciones en los números complejos.

Si $b^2 - 4a = 0$ entonces la ecuación tiene una solución, y entonces la parábola corta el eje x en un único punto.

Anexo 2. Perspectiva de la dimensión de mecanización.

SOLUCIÓN DE ECUACIONES CUADRÁTICAS

En los siguientes ejemplos se muestra en detalle el método de **completar el cuadrado** para resolver ecuaciones cuadráticas. Se resuelven tres ecuaciones cuyas soluciones son respectivamente dos números reales diferentes, dos números complejos y dos números reales iguales

PRIMER EJEMPLO

Resolver la ecuación $x^2 + 6x - 16 = 0$ y verificar las soluciones.

Observe que la incógnita es x y el coeficiente del término cuadrático x^2 es 1, entonces para resolver la ecuación con el método de completar el cuadrado se procede de la siguiente manera

Procedimiento	Justificación
$x^2 + 6x - 16 = 0$	Ecuación dada.
$x^2 + 6x - 16 + 16 = 0 + 16$	Se suma en ambos lados de la ecuación el opuesto aditivo de -16 que es 16, para así dejar en el lado izquierdo únicamente los términos que tengan la incógnita x
$x^2 + 6x + \left(\frac{6}{2}\right)^2 = 16 + \left(\frac{6}{2}\right)^2$	Se suma en ambos lados de la ecuación la mitad del coeficiente lineal elevado al cuadrado, es decir $\left(\frac{6}{2}\right)^2$
$x^2 + 6x + (3)^2 = 16 + (3)^2$	Se resuelven las divisiones
$x^2 + 6x + 9 = 16 + 9$	Se resuelven las potencias
$(x+3)^2 = 25$	Se factoriza el trinomio cuadrado perfecto del lado izquierdo y se resuelve la suma del lado derecho. **Verifique** que $(x+3)^2 = x^2 + 6x + 9$
$x + 3 = \pm 5$	Se saca raíz cuadrada en ambos lados de la ecuación
$x + 3 - 3 = \pm 5 - 3$	Se suma en ambos lados de la ecuación el opuesto aditivo de 3 que es -3
$x = \pm 5 - 3$	Se resuelve la resta del lado izquierdo

Por lo tanto la ecuación $x^2 + 6x - 16 = 0$ tiene dos posibles soluciones reales que se denominarán x_1 y x_2 donde:

$x_1 = 5 - 3$, esto es $x_1 = 2$

Anexo 3. Perspectiva de la dimensión analítica.

4. $2x = -\sqrt{2} - x + 1$

Procedimiento	Justificación
$2x = -\sqrt{2-x} + 1$	Ecuación dada
$2x - 1 = -\sqrt{2-x} + 1 - 1$	En ambos lados se resta 1 para dejar en el lado derecho únicamente el radical
$(2x-1)^2 = \left(-\sqrt{2-x}\right)^2$	En ambos lados de la ecuación se eleva al cuadrado eliminar la raíz cuadrada
$(2x)^2 - 2(2x)(1) + 1^2 = 2 - x$	En el lado izquierdo se emplea el producto notable del cuadrado de la diferencia, es decir $(a-b)^2 = a^2 - 2(a)(b) + b^2$
$4x^2 - 4x + 1 = 2 - x$	Se resuelve las potencias y el producto en el lado izquierdo
$4x^2 - 4x + 1 - 2 = 2 - x - 2$	En ambos lados de resta 2
$4x^2 - 4x + 1 - 2 + x = -x + x$	En ambos lados de suma x
$4x^2 - 3x - 1 = 0$	En el lado izquierdo se suman términos semejantes
$4x^2 - 3x - 1 = 0$	En la ecuación $a = 4, b = -3$ y $c = -1$
$x = \frac{-(-3) \pm \sqrt{(-3)^2 - 4(4)(-1)}}{2(4)}$	Por la fórmula cuadrática $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$
$x = \frac{3 \pm \sqrt{9+16}}{8}$	Se desarrolla la potencia y productos que están dentro del radical y el producto del denominador
$x = \frac{3 \pm \sqrt{25}}{8}$	Se resuelve la operación que está dentro del radical
$x = \frac{3 \pm 5}{8}$	Se halla $\sqrt{25} = 5$

Por lo tanto las posibles soluciones de la ecuación $2x - 1 = \sqrt{2-x}$ son x_1 y x_2

$x_1 = \frac{3-5}{8}$, es decir $x_1 = -\frac{1}{4}$

$x_2 = \frac{3+5}{8}$, es decir $x_2 = 1$

Anexo 4. Perspectiva de la dimensión de las TICS

La perspectiva de la dimensión de las Tics se desarrolla a partir de la herramienta Excel. Esta herramienta se usa para construir una gráfica, para encontrar el tipo de gráfica y para encontrar la expresión algebraica de la gráfica.

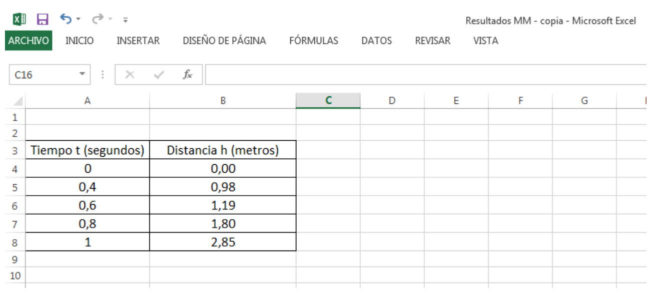
La explicación de lo anterior, se realizó con la siguiente tabla de datos, los cuales corresponden a la variación de la altura de un objeto a medida que pasa el tiempo.

$t\ (segundos)$	0	0.2	0.4	0.6	0.8	1
$h\ (metros)$	0	0.81	0.98	1.19	1.80	2.85
$Parejas\ ordenadas\ (t,h)$	(0,0)	(0.2,0.81)	(0.4 , 0.98	(0.6 , 1.19)	(0.8 , 1.80)	(1 , 2.85)

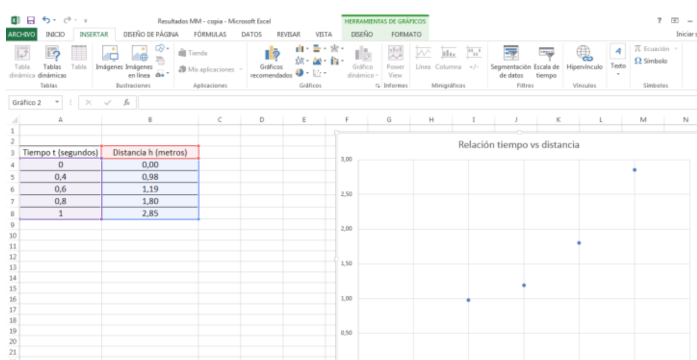
- ➢ Construcción de la gráfica utilizando Excel para representar la situación:

Esta parte consiste en ubicar las parejas ordenadas en el plano cartesiano: en el eje horizontal el tiempo t y en el eje vertical la altura h. A continuación se muestra paso a paso este procedimiento.

En una hoja de Excel se realiza una tabla de 2 columnas por 7 filas para registrar los datos de la tabla



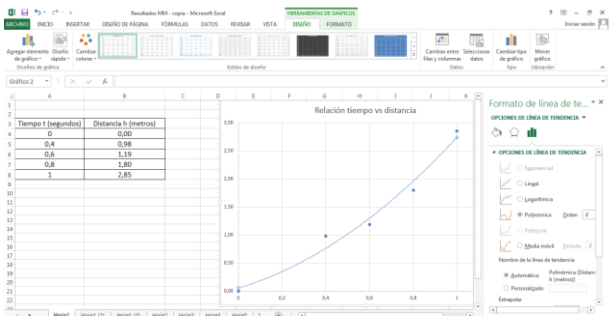
Se selecciona la tabla y se da clic en Insertar en la barra de herramientas. Se da clic en la opción gráficos y luego en la opción dispersión. Al realizar lo anterior aparece una gráfica como la siguiente.



- Procedimiento para encontrar el tipo de gráfica usando Excel:

Se da clic dentro de la gráfica anterior para que aparezca la opción Herramientas de gráficos. Luego se da clic en la opción Diseño y finalmente en la opción Agregar Elementos de gráfico. Después, se da clic en la opción Líneas de tendencia y luego en la opción Más opciones de línea de tendencia.

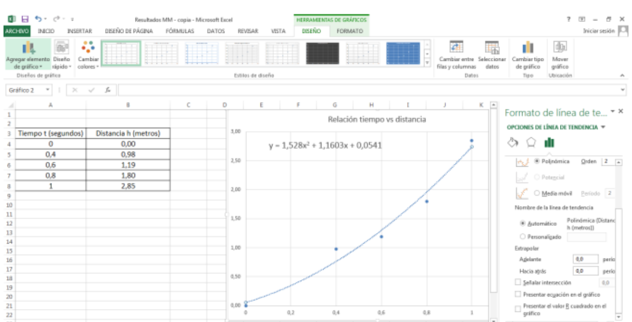
Cuando se ejecute el paso anterior en la parte derecha de la pantalla aparece la opción Formato de Línea de Tendencia. Allí se debe activar la opción Polinómica de orden 2. Con lo anterior le aparece una curva como la que se muestra en la siguiente gráfica.



En la gráfica se puede identificar que la curva describe una parábola. En este caso Excel también tiene una opción que da la expresión algebraica (ecuación) que corresponde la curva mencionada.

- Procedimiento para encontrar la expresión algebraica (ecuación) de la parábola usando Excel:

En la opción líneas de tendencia se activa la opción Presentar ecuación en el gráfico, de inmediato aparece la ecuación de la curva sobre el gráfico.



Anexo 5. Perspectiva de la dimensión de las aplicaciones

PROBLEMAS CON ECUACIONES CUADRATICAS

1. La suma de un número y su cuadrado es de 42. Cuál es el número que cumple esta condición.

2. El producto de las edades de Juanita y María es 176. Si María tiene 5 años más que Juanita ¿qué edad tiene cada una?

3. Una finca que tiene forma de cuadrado tiene un área de $900m^2$. Cuáles son las dimensiones de la finca

4. Una finca de forma rectangular mide 80 metros más de largo que de ancho. Si su área es de $600\ m^2$ ¿cuáles son las dimensiones de la finca?

5. Si una pelota se deja caer desde una altura h_0 entonces su altura h después de cierto tiempo t está dada por $h = -4.9t^2 + h_0$, donde h se mide en metros y t en segundos. De acuerdo a esta información responder lo siguiente:
   a. Si la pelota se deja caer desde un edificio de 84 metros de altura ¿Cuánto tiempo ha transcurrido cuando la pelota está a 42 metros? ¿Cuánto tiempo ha transcurrido cuando la pelota está a 10 metros de altura? ¿Cuánto tardará en llegar al nivel del suelo?

.

Anexo 6. Prueba diagnóstico sobre ecuaciones lineales, ecuaciones con expresiones radicales y racionales.

INSTITUCION EDUCATIVA DEPARTAMENTAL INDIGENA MISAK MISAK ALA KUSREINUK "MINGA EDUCATIVA INTERCULTURAL KURAK CHAK".

Código DANE No. 219473006636. Resolución No 09119 de Octubre de 2013 y modificado No. 10002del28deOctubredel2013.

NOMBRE: ____ GRADO: _____

I. Defina con sus propias palabras que es una ecuación lineal

____
____
____

II. Indique cuales son ecuaciones lineales.

1. $y + 10 = 15$
2. $2.\,a + 10$
3. $6x - 12 = 0$

III. Escribe las propiedades de los números reales.

IV. Emplee las propiedades de los números reales para hallar el valor de las incógnitas.

1. $x - 9 = 0$
2. $4y + 16 = 2y + 10$
3. $\frac{x-2}{x} = 1 - \frac{2x}{x}$
4. $2x - 1 = \sqrt{2 - x}$
5. $\sqrt{2x} = x$

V. Un estudiante de grado noveno realizo el siguiente procedimiento, determine si es correcto o falso y explique claramente utilizando las propiedades de los números reales.

$$a = b$$

$$a^2 - b^2 = ab - b^2$$

$$(a - b)(a + b) = b(a - b)$$

$$a + b = b$$

$$b + b = b$$

$$2b = b$$

$$2 = 1$$

Anexo 7. Guía de Ecuaciones cuadráticas

FUNDAMENTACIÓN ECUACIONES CUADRÁTICAS

Definición

Las ecuaciones cuadráticas tienen la forma $ax^2 + bx + c = 0$ donde a, b, c son números reales con $a \neq 0$.

Observe que si $a = 0$, entonces en la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$ se tiene $(0)x^2 + bx + c = 0$, esto es, una ecuación lineal de la forma $bx + c = 0$. Por tal razón la restricción de que $a \neq 0$.

La ecuación cuadrática $ax^2 + bx + c = 0$ tiene las siguientes partes:

- ax^2 es el término cuadrático y a su coeficiente.
- bx es el término lineal y b su coeficiente
- c es el término independiente.
- La letra x es la incógnita, razón por la cual se debe encontrar el valor o los valores de tal manera que al ser reemplazados en la ecuación la satisfacen, estos valores reciben el nombre de soluciones o raíces.

Una ecuación cuadrática tiene dos soluciones, las cuales tienen las siguientes posibilidades: dos números reales diferentes, dos números complejos o dos números reales iguales.

SOLUCIÓN DE ECUACIONES CUADRÁTICAS

En los siguientes ejemplos se muestra en detalle el método de **completar el cuadrado** para resolver ecuaciones cuadráticas. Se resuelven tres ecuaciones cuyas soluciones son respectivamente dos números reales diferentes, dos números complejos y dos números reales iguales

PRIMER EJEMPLO

Resolver la ecuación $x^2 + 6x - 16 = 0$ y verificar las soluciones.

Observe que la incógnita es x y el coeficiente del término cuadrático x^2 es 1, entonces para resolver la ecuación con el método de completar el cuadrado se procede de la siguiente manera

Procedimiento	Justificación
$x^2 + 6x - 16 = 0$	Ecuación dada.
$x^2 + 6x - 16 + 16 = 0 + 16$	Se suma en ambos lados de la ecuación el opuesto aditivo de -16 que es 16, para así dejar en el lado izquierdo únicamente los términos que tengan la incógnita x
$x^2 + 6x + \left(\frac{6}{2}\right)^2 = 16 + \left(\frac{6}{2}\right)^2$	Se suma en ambos lados de la ecuación la mitad del coeficiente lineal elevado al cuadrado, es decir $\left(\frac{6}{2}\right)^2$
$x^2 + 6x + (3)^2 = 16 + (3)^2$	Se resuelven las divisiones
$x^2 + 6x + 9 = 16 + 9$	Se resuelven las potencias
$(x + 3)^2 = 25$	Se factoriza el trinomio cuadrado perfecto del lado izquierdo y se resuelve la suma del lado derecho. **Verifique** que $(x + 3)^2 = x^2 + 6x + 9$
$x + 3 = \pm 5$	Se saca raíz cuadrada en ambos lados de la ecuación
$x + 3 - 3 = \pm 5 - 3$	Se suma en ambos lados de la ecuación el opuesto aditivo de 3 que es -3
$x = \pm 5 - 3$	Se resuelve la resta del lado izquierdo

Por lo tanto la ecuación $x^2 + 6x - 16 = 0$ tiene dos posibles soluciones reales que se denominarán x_1 y x_2 donde:

$x_1 = 5 - 3$, esto es $x_1 = 2$

$x_2 = -5 - 3$, esto es $x_2 = -8$

Se procede a reemplazar $x_1 = 2$ y $x_2 = -8$ en la ecuación $x^2 + 6x - 16 = 0$ para verificar que sean las soluciones.

- Si $x = 2$ entonces se tiene $2^2 + 6(2) - 16$

  Se resuelven potencias y productos $4 + 12 - 16$

  Se resuelven sumas para obtener $16 - 16 = 0$

  Dado que $x = 2$ satisface la ecuación $x^2 + 6x - 16 = 0$ se concluye que 2 es solución.

- Si $x = -8$ entonces se tiene $(-8)^2 + 6(-8) - 16$

  Se resuelven potencias y productos $64 - 48 - 16$

  Se resuelven sumas para obtener $16 - 16 = 0$

  Dado que $x = -8$ satisface la ecuación $x^2 + 6x - 16 = 0$ se concluye que -8 también es solución.

En conclusión $x_1 = 2$ y $x_2 = -8$ son dos soluciones reales de la ecuación $x^2 + 6x - 16 = 0$

SEGUNDO EJEMPLO

Resolver la ecuación $z^2 + 1 = 0$ y verificar las soluciones.

Observe que la ecuación no tiene el término lineal por ello para resolverla no se emplea la técnica de completar el cuadrado

Procedimiento	Justificación
$z^2 + 1 = 0$	Ecuación dada
$z^2 + 1 - 1 = 0 - 1$	Se suma en ambos lados de la ecuación el opuesto aditivo de 1 que es -1, para así dejar en el lado izquierdo únicamente el término que tiene la incógnita z
$z^2 = -1$	Se realizan las operaciones
$z = \pm\sqrt{-1}$	Se saca raíz cuadrada en ambos lados de la ecuación

Por lo tanto la ecuación $z^2 + 1 = 0$ tiene dos posibles soluciones que se denominarán x_1 y x_2:

$x_1 = \sqrt{-1}$; $x_2 = -\sqrt{-1}$

Se procede a reemplazar $x_1 = \sqrt{-1}$ y $x_2 = -\sqrt{-1}$ en la ecuación $z^2 + 1 = 0$ para verificar que sean las soluciones.

- Si $x = \sqrt{-1}$ entonces se tiene $\left(\sqrt{-1}\right)^2 + 1$
  Al resolver la potencia se obtiene $-1 + 1 = 0$
  Dado que $\sqrt{-1}$ satisface la ecuación $z^2 + 1 = 0$ se concluye que es solución.

- Si $x = -\sqrt{-1}$ entonces se tiene $\left(-\sqrt{-1}\right)^2 + 1$
  Al resolver la potencia se obtiene $-1 + 1 = 0$
  Dado que $-\sqrt{-1}$ satisface la ecuación $z^2 + 1 = 0$ se concluye que también es solución

En conclusión $x_1 = \sqrt{-1}$ y $x_2 = -\sqrt{-1}$ son dos soluciones de la ecuación $z^2 + 1 = 0$.

NOTA:

Las soluciones contienen $\sqrt{-1}$, pero es imposible que un número real elevado al cuadrado de -1 (por ejemplo, $(-1)^2 = 1$). Por tal razón, las soluciones de la ecuación $z^2 + 1 = 0$ NO son números reales.

Por lo anterior, las soluciones $x_1 = \sqrt{-1}$ y $x_2 = -\sqrt{-1}$ de la ecuación $z^2 + 1 = 0$ pertenecen a un conjunto de números denominado **números complejos**. A continuación, se presenta la definición de este conjunto.

DEFINICIÓN DE NÚMEROS COMPLEJOS

Un número complejo es de la forma $a + bi$ donde a y b son números reales e $i^2 = -1$, esto significa que $i = \sqrt{-1}$. La parte real de un número complejo es a y la parte imaginaria es b

Los siguientes son ejemplos de números complejos:

- $\sqrt{-1}$ y $-\sqrt{-1}$ (soluciones de la ecuación $z^2 + 1 = 0$) se reescriben respectivamente i y $-i$, sólo tienen la parte imaginaria.
- En $3 + bi$ la parte real es 3 y 4 la parte imaginaria

TERCER EJEMPLO

Resolver la ecuación $2x^2 + 4x + 2 = 0$ y verificar las soluciones

Procedimiento	Justificación
$2x^2 + 4x + 2 = 0$	Ecuación dada
$2x^2 + 4x + 2 - 2 = 0 - 2$	Se suma en ambos lados de la ecuación el opuesto aditivo de 2 que es -2, para así dejar en el lado izquierdo únicamente los términos que tiene la incógnita x
$\frac{2x^2+4x}{2} = \frac{-2}{2}$	Se multiplica en ambos lados de la ecuación entre el inverso multiplicativo de 2 que es $\frac{1}{2}$
$\frac{2x^2}{2} + \frac{4x}{2} = \frac{-2}{2}$	En el lado izquierdo se emplea la suma de fracciones de igual denominador.
$x^2 + 2x = -1$	Se realizan las divisiones.
$x^2 + 2x + \left(\frac{2}{2}\right)^2 = -1 + \left(\frac{2}{2}\right)^2$	Se suma en ambos lados de la ecuación la mitad del coeficiente lineal elevado al cuadrado, es decir $\left(\frac{2}{2}\right)^2$
$x^2 + 2x + 1 = -1 + 1$	Se resuelven las divisiones y las potencias.
$(x+1)^2 = 0$	Se factoriza el trinomio cuadrado perfecto del lado izquierdo y se resuelve la suma del lado derecho. <u>**Verifique**</u> que $(x+1)^2 = x^2 + 2x + 1$
$x + 1 = 0$	Se saca raíz cuadrada en ambos lados de la ecuación.
$x = -1$	Se suma en ambos lados de la ecuación el inverso aditivo de 1 que es -1

Por lo tanto la posible solución de la ecuación $2x^2 + 4x + 2 = 0$ es $x = -1$. Se procede a reemplazar para verificar:

Si $x = -1$ entonces $2(-1)^2 + 4(-1) + 2$

Se resuelve la potencia $2(1) + 4(-1) + 2$

Se resuelven los productos $2 - 4 + 2 = 0$

Dado que $x = -1$ satisface la ecuación $2x^2 + 4x + 2 = 0$ se puede decir que -1 es la única solución.

En conclusión la $2x^2 + 4x + 2 = 0$ tiene dos soluciones reales iguales

CUARTO EJEMPLO

Emplear la técnica de completar el cuadrado para encontrar resolver la ecuación cuadrática general $ax^2 + bx + c = 0$.

Procedimiento	Justificación
$ax^2 + bx + c = 0$	Ecuación dada
$ax^2 + bx + c - c = -c$	Se resta c en ambos lados de la ecuación
$\frac{ax^2+bx}{a} = \frac{-c}{a}$	Se divide entre a en ambos lados de la ecuación
$x^2 + \frac{b}{a}x = -\frac{c}{a}$	Se emplea suma de fracciones en el lado izquierdo
$x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 = -\frac{c}{a} + \left(\frac{b}{2a}\right)^2$	Se completa el cuadrado sumando en ambos lados de la ecuación la mitad del coeficiente lineal elevado al cuadrado, es decir $\left(\frac{b}{2a}\right)^2$
$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{-4ac + b^2}{4a^2}$	Se factoriza en el lado izquierdo y se resuelve las operaciones de la derecha. **<u>Verifique</u>** que: $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2$
$\sqrt{\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2} = \sqrt{\frac{-4ac + b^2}{4a^2}}$	Se saca raíz cuadrada en ambos lados de la ecuación.
$\left(x + \frac{b}{2a}\right) = \frac{\pm\sqrt{-4ac + b^2}}{2a}$	Se emplean propiedades de radicales
$x = \frac{\pm\sqrt{-4ac + b^2}}{2a} - \frac{b}{2a}$	Se resta $\frac{b}{2a}$ en ambos lados de la ecuación
$x = \frac{\pm\sqrt{-4ac + b^2} - b}{2a}$	Se suman las fracciones de igual denominador

La solución $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ de la ecuación cuadrática general $ax^2 + bx + c = 0$ recibe el nombre de fórmula cuadrática y se emplea para resolver cualquier tipo de ecuación cuadrática.

Observación:

En la fórmula cuadrática $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ la expresión que está dentro del radical $b^2 - 4ac$ recibe el nombre de discriminante y cumple una de las siguientes posibilidades:

- Si $b^2 - 4ac > 0$ entonces la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$ tiene dos soluciones en los números reales distintas.
- Si $b^2 - 4ac < 0$ entonces la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$ no tiene solución en los números reales, pero si tiene dos soluciones en los números complejos
- Si $b^2 - 4ac = 0$ entonces la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$ tiene dos soluciones iguales en los números reales.

El discriminante se emplea para determinar el tipo de soluciones que tienen las ecuaciones. A continuación se muestran algunos ejemplos.

EJEMPLO

Utilice el discriminante para determinar el tipo de soluciones de las ecuaciones dadas. No resuelva la ecuación

1. $-x^2 + 4x - 1 = 0$

Como $a = -1$, $b = 4$, $c = -1$ entonces $b^2 - 4ac > 0$. De aquí que la ecuación tiene dos soluciones o dos raíces reales distintas.

2. $6x^2 - 2x - 4 = 0$

Como $a = 6$, $b = --2$, $c = 4$ entonces $b^2 - 4ac < 0$. De aquí que la ecuación tiene solución dos soluciones en los números complejos

3. $2x^2 - 4x + 2 = 0$

Como $a = 2$, $b = -4$, $c = 2$ entonces $b^2 - 4ac = 0$. De aquí que la ecuación tiene dos soluciones iguales en los números reales.

EJERCICIOS RESUELTOS

A continuación, se resuelven distintas ecuaciones cuadráticas empleando la formula cuadrática y se verifican las respectivas soluciones.

1. $x^2 + 2x + 2 = 0$

Procedimiento	Justificación
$x^2 + 2x + 2 = 0$	En esta ecuación $a = 1$, $b = 2$ y $c = 2$
$x = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4(1)(2)}}{2(1)}$	Por la fórmula cuadrática $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$
$x = \frac{-2 \pm \sqrt{4-8}}{2}$	Se desarrolla la potencia y productos que están dentro del radical y el producto del denominador
$x = \frac{-2 \pm \sqrt{-4}}{2}$	Se resuelve la operación que está dentro del radical
$x = \frac{-2 \pm \sqrt{4(-1)}}{2}$	Dado que $4(-1) = -4$
$x = \frac{-2 \pm \sqrt{4}\sqrt{-1}}{2}$	Por propiedades de los radicales $\sqrt{4(-1)} = \sqrt{4}\sqrt{-1}$
$x = \frac{-2 \pm 2i}{2}$	Se halla $\sqrt{4}$ y se emplea la definición de los números complejos, es decir que $\sqrt{-1} = i$

Por lo tanto la ecuación $x^2 + 2x + 2 = 0$ tiene dos posibles soluciones en los números complejos que se denominarán x_1 y x_2.

$x_1 = \frac{-2+2i}{2}$ que por suma de fracciones de igual denominador se obtiene $x_1 = \frac{-2}{2} + \frac{2i}{2}$ es decir
$x_1 = -1 + i$

$x_2 = \frac{-2-2i}{2}$ que por resta de fracciones de igual denominador se obtiene $x_2 = \frac{-2}{2} - \frac{2i}{2}$ es decir
$x_2 = -1 - i$

Responda: ¿Cuál es la parte real y la parte imaginaria en $x_1 = -1 + i$ y $x_2 = x_2 = -1 - i$?

Se procede a reemplazar $x_1 = -1 + i$ y $x_2 = -1 - i$ en la ecuación $x^2 + 2x + 2 = 0$ para verificar que sean las soluciones.

- Si $x = -1 + i$ entonces se tiene $(-1 + i)^2 + 2(-1 + i) + 2$

Al desarrollar el cuadrado en $(-1 + i)^2$ y el producto se obtiene

$$(-1)^2 + 2(-1)(i) + i^2 + 2(-1) + 2(i) + 2$$

Al resolver la potencia y los productos $1 - 2i + i^2 - 2 + 2i + 2$

Dado que $i^2 = -1$ se tiene que $1 - 2i - 1 - 2 + 2i + 2$

Al emplear las propiedades conmutativa y asociativa reiteradamente se obtiene que

$$(1 - 1) + (-2i + 2i) + (-2 + 2) = 0$$

Dado que $x = -1 + i$ satisface la ecuación $x^2 + 2x + 2 = 0$ se concluye que $-1 + i$ es solución

Verifique que $x_2 = -1 - i$ también es solución de la ecuación $x^2 + 2x + 2 = 0$

2. $6x^2 + 8x = -2$

Procedimiento	Justificación
$6x^2 + 8x = -2$	Ecuación dada
$6x^2 + 8x + 2 = -2 + 2$	Se suma en ambos lados opuesto aditivo de -2 que es 2 para que la ecuación tenga la forma $ax^2 + bx + c = 0$
$6x^2 + 8x + 2 = 0$	En esta ecuación $a = 6$, $b = 8$ y $c = 2$
$x = \frac{-8 \pm \sqrt{8^2 - 4(6)(2)}}{2(6)}$	Por la fórmula cuadrática $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$
$x = \frac{-8 \pm \sqrt{64 - 48}}{12}$	Se desarrolla la potencia y productos que están dentro del radical y el producto del denominador
$x = \frac{-8 \pm \sqrt{16}}{12}$	Se resuelve la operación que está dentro del radical
$x = \frac{-8 \pm 4}{12}$	Dado que $\sqrt{16} = 4$

Por lo tanto las posibles soluciones de la ecuación $6x^2 + 8x = -2$ son x_1 y x_2

$x_1 = \frac{-8+4}{12}$, es decir $x_1 = \frac{-4}{12}$ que al simplificar se obtiene $x_1 = \frac{-1}{3}$

$x_2 = \frac{-8-4}{12}$, es decir $x_2 = \frac{-8-4}{12}$ que al simplificar se obtiene $x_2 = -1$

Se procede a reemplazar $x_1 = \frac{-1}{3}$ y $x_2 = -1$ en la ecuación $6x^2 + 8x = -2$ para verificar

- Si $x = \frac{-1}{3}$ entonces se tiene $6\left(\frac{-1}{3}\right)^2 + 8\left(\frac{-1}{3}\right)$

  Al resolver potencias se obtiene $6\left(\frac{1}{9}\right) + 8\left(\frac{-1}{3}\right)$

  Al resolver productos se obtiene $\frac{6}{9} - \frac{8}{3}$

  Al simplificar $\frac{2}{3} - \frac{8}{3} = -2$

  Dado que $x_1 = \frac{-1}{3}$ satisface la ecuación $6x^2 + 8x = -2$ se concluye que $\frac{-1}{3}$ es solución

➢ **Verifique** que $x_2 = -1$ también es solución.

3. $\frac{1}{x-2}+\frac{1}{x+2}=1$

Procedimiento	Justificación
$\frac{1}{x-2}+\frac{1}{x+2}=1$	Ecuación dada
$\frac{1(x+2)+1(x-2)}{(x-2)(x+2)}=1$	Se suman fracciones algebraicas de distinto denominador
$\left(\frac{1(x+2)+1(x-2)}{(x-2)(x+2)}\right)(x-2)(x+2)=1(x-2)(x+2)$	Se multiplica en ambos lados de la ecuación por el inverso multiplicativo de $\frac{1}{(x-2)(x+2)}$ que es $(x-2)(x+2)$
$1(x+2)+1(x-2)=x^2+2x-2x-4$	Se resuelve el producto del lado derecho
$x+2+x-2=x^2+2x-2x-4$	Se resuelven los productos del lado izquierdo
$2x=x^2-4$	En ambos lados se reducen términos semejantes
$2x-x^2+4=x^2-4-x^2+4$	Se suma en ambos lados el opuesto de x^2 que es $-x^2$ y el opuesto de -4 que es 4
$-x^2+2x+4=0$	Se emplea la propiedad conmutativa de los números reales reiteradamente.
$-x^2+2x+4=0$	En esta ecuación $a=-1$, $b=2$ y $c=4$
$x=\frac{-2\pm\sqrt{(2)^2-4(-1)(4)}}{2(-1)}$	Se emplea la fórmula cuadrática $x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$
$x=\frac{-2\pm\sqrt{4+16}}{-2}$	Se desarrolla la potencia y productos que están dentro del radical y el producto del denominador
$x=\frac{-2\pm\sqrt{20}}{-2}$	Se resuelve la operación que está dentro del radical
$x=\frac{-2\pm\sqrt{(2)(2)(5)}}{-2}$	Se descompone 20 en sus factores primos para obtener $20=(2)(2)(5)$.
$x=\frac{-2\pm\sqrt{(2^2)(5)}}{-2}$	Por definición de potenciación se obtiene que $20=(2^2)(5)$
$x=\frac{-2\pm\sqrt{2^2}\sqrt{5}}{-2}$	Por propiedades de la radicación $\sqrt{(2^2)(5)}=\sqrt{(2^2)}\sqrt{5}$
$x=\frac{-2\pm2\sqrt{5}}{-2}$	De halla $\sqrt{2^2}=2$

Por lo tanto las posibles soluciones de la ecuación $\frac{1}{x-2}+\frac{1}{x+2}=1$ se llamarán x_1 y x_2, donde:

➢ $x_1=\frac{-2+2\sqrt{5}}{-2}$, y por suma de fracciones se tiene $x_1=\frac{-2}{-2}+\left(\frac{2\sqrt{5}}{-2}\right)$.

Al realizar las divisiones se tiene $x_1=1+\left(-\sqrt{5}\right)$, es decir $x_1=1-\sqrt{5}$.

➢ $x_2 = \frac{-2-2\sqrt{5}}{-2}$ que por resta de fracciones se tiene $x_2 = \frac{-2}{-2} - \left(\frac{2\sqrt{5}}{-2}\right)$.

Al realizar las divisiones $x_2 = 1 - (-\sqrt{5})$, es decir $x_2 = 1 + \sqrt{5}$

Se procede a reemplazar $x_1 = 1 - \sqrt{5}$ y $x_2 = 1 + \sqrt{5}$ en la ecuación $\frac{1}{x-2} + \frac{1}{x+2} = 1$ para verificar

➢ Si $x_1 = 1 - \sqrt{5}$ entonces se tiene $\frac{1}{(1-\sqrt{5})-2} + \frac{1}{(1-\sqrt{5})+2}$

Se resuelven las sumas de los denominadores $\frac{1}{-1-\sqrt{5}} + \frac{1}{3-\sqrt{5}}$

Se suman las fracciones $\frac{1(3-\sqrt{5}) + 1(-1-\sqrt{5})}{(-1-\sqrt{5})(3-\sqrt{5})}$

Se resuelven los productos $\frac{3-\sqrt{5}-1-\sqrt{5}}{-3+\sqrt{5}-3\sqrt{5}+(\sqrt{5})^2}$

Al resolver la potencia del denominador $\frac{3-\sqrt{5}-1-\sqrt{5}}{-3+\sqrt{5}-3\sqrt{5}+5}$

Al resolver sumas y restas $\frac{2-2\sqrt{5}}{2-2\sqrt{5}} = 1$

Dado que $x_1 = 1 - \sqrt{5}$ satisface la ecuación $\frac{1}{x-2} + \frac{1}{x+2} = 1$ se concluye que $1 - \sqrt{5}$ es solución

Verifique que $x_2 = 1 + \sqrt{5}$

4. $2x = -\sqrt{2-x} + 1$

Procedimiento	Justificación
$2x = -\sqrt{2-x} + 1$	Ecuación dada
$2x - 1 = -\sqrt{2-x} + 1 - 1$	En ambos lados se resta 1 para dejar en el lado derecho únicamente el radical
$(2x-1)^2 = \left(-\sqrt{2-x}\right)^2$	En ambos lados de la ecuación se eleva al cuadrado eliminar la raíz cuadrada
$(2x)^2 - 2(2x)(1) + 1^2 = 2 - x$	En el lado izquierdo se emplea el producto notable del cuadrado de la diferencia, es decir $(a-b)^2 = a^2 - 2(a)(b) + b^2$
$4x^2 - 4x + 1 = 2 - x$	Se resuelve las potencias y el producto en el lado izquierdo
$4x^2 - 4x + 1 - 2 = 2 - x - 2$	En ambos lados de resta 2
$4x^2 - 4x + 1 - 2 + x = -x + x$	En ambos lados de suma x
$4x^2 - 3x - 1 = 0$	En el lado izquierdo se suman términos semejantes
$4x^2 - 3x - 1 = 0$	En la ecuación $a = 4, b = -3$ y $c = -1$
$x = \frac{-(-3) \pm \sqrt{(-3)^2 - 4(4)(-1)}}{2(4)}$	Por la fórmula cuadrática $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

$x = \frac{3 \pm \sqrt{9+16}}{8}$ Se desarrolla la potencia y productos que están dentro del radical y el producto del denominador

$x = \frac{3 \pm \sqrt{25}}{8}$ Se resuelve la operación que está dentro del radical

$x = \frac{3 \pm 5}{8}$ Se halla $\sqrt{25} = 5$

Por lo tanto las posibles soluciones de la ecuación $2x - 1 = \sqrt{2-x}$ son x_1 y x_2

$x_1 = \frac{3-5}{8}$, es decir $x_1 = -\frac{1}{4}$

$x_2 = \frac{3+5}{8}$, es decir $x_2 = 1$

Se procede a reemplazar $x_1 = -\frac{1}{4}$ y $x_2 = 1$ en la ecuación $2x - 1 = -\sqrt{2-x}$ para verificar

- Si $x = -\frac{1}{4}$, entonces $2\left(-\frac{1}{4}\right) - 1 = -\sqrt{2 - \left(-\frac{1}{4}\right)}$

  Al resolver el producto del lado izquierdo $-\frac{2}{4} - 1 = -\sqrt{2 - \left(-\frac{1}{4}\right)}$

  Al resolver sumar las fracciones del lado izquierdo $\frac{-2-4}{4} = -\sqrt{2 - \left(-\frac{1}{4}\right)}$

  Dado que $-\left(-\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{4}$, entonces en el lado derecho se tiene $\frac{-2-4}{4} = -\sqrt{2 + \frac{1}{4}}$

  Al sumar las fracciones que están dentro del radical se tiene $\frac{-2-4}{4} = -\sqrt{\frac{9}{4}}$

  Empleando propiedades de radicales en el lado derecho $\frac{-6}{4} = -\frac{\sqrt{9}}{\sqrt{4}}$

  Se hallan las raíces en el lado derecho $\frac{-6}{4} = -\frac{3}{2}$

  Se simplifica en el lado izquierdo $-\frac{3}{2} = -\frac{3}{2}$

Dado que $x_1 = -\frac{1}{4}$ satisface la ecuación $2x - 1 = -\sqrt{2-x}$ se concluye que $-\frac{1}{4}$ es solución

- Al verificar la otra posible solución se tiene:

  Si $x = 1$, entonces $2(1) - 1 = -\sqrt{2-(1)}$
  Al resolver productos $2 - 1 = -\sqrt{1}$
  Al resolver la resta y la raíz cuadrada se tiene $1 = -1$ **¿Este resultado es verdadero?**
  Como $x = 1$ no satisface la ecuación $2x - 1 = -\sqrt{2-x}$ se concluye que 1 no es solución.

En conclusión $-\frac{1}{4}$ es solución pero 1 no lo es.

Por lo anterior, cuando se resuelve una ecuación cuadrática que contenga radicales se pueden obtener soluciones extrañas que no satisfacen la ecuación inicial, en el caso de la ecuación $2x - 1 = -\sqrt{2-x}$ la solución extraña es 1.

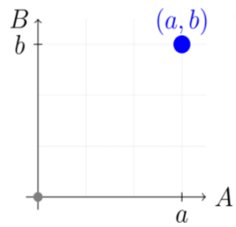
Anexo 8. Guía 2. Funciones

Para entender el concepto de función se utilizan conceptos como pareja ordenada, producto cartesiano y las relaciones.

Definición pareja ordenada:

Dados dos conjuntos A y B, se define la pareja ordenada como el par (a, b) donde $a \in A$ y $b \in B$, la primera componente es a y se llama $\boldsymbol{abcisa},$ mientras que la segunda componente es b y se llama $\boldsymbol{ordenada}$.

La representación de la pareja ordenada (a, b) puede hacerse en un plano cartesiano como se muestra en la siguiente figura.



Se le atribuye el nombre de pajera ordenada porque la pareja (a, b) es distinta de la pareja (b, a)

Represente la pareja (b, a) en el plano cartesiano

Ejemplo uno

Dados los conjuntos $A = \{1, 2, 3\}$ y $B = \{a, b\}$ ejemplos de parejas ordenadas son:

$(1, a)$, donde $1 \in A$ y $a \in B$

$(2, b)$, donde $2 \in A$ y $b \in B$

$(3, a)$, donde $3 \in A$ y $a \in B$

Represente las parejas en el plano cartesiano.

Definición Producto cartesiano:

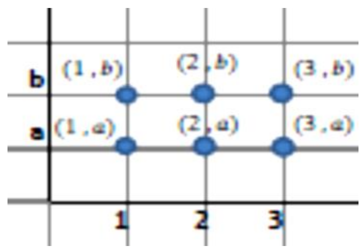
Dados dos conjuntos A y B se define el producto cartesiano como el conjunto de **todas** las parejas ordenadas (a, b) donde la primera componente pertenece a A y la segunda componente pertenece a B , se denota como:
$A \times B = \{(a, b) : a \in A , b \ \in B\}$, A se llama $conjunto\ de\ partida$ y B se llama $conjunto\ de\ llegada$.

Ejemplo dos:

Dados los conjuntos $A = \{1, 2, 3\}$ y $B = \{a, b\}$ el producto cartesiano se escribe como:

$$A \times B = \{(1, a), (1, b), (2, a)(2, b), (3, a), (3, b), (4, a)(4, b)\ \}$$

El producto cartesiano se puede representar en el plano cartesiano, y para elaborarlo se colocan los elementos s del conjunto A en el eje horizontal y los elementos del conjunto B en el eje vertical, a cada pareja ordenada del producto cartesiano se le hace corresponder un punto del plano cartesiano. A continuación se representa el producto cartesiano del ejemplo dos.



Actividad: Halle $B \times A$. ¿Qué se puede concluir de los conjuntos $A \times B$ y $B \times A$? ¿Son conjuntos iguales o diferentes?

Definición Relación: Cualquier subconjunto del producto cartesiano se denomina relación.

Ejemplo tres

Del producto cartesiano $A \times B$ del ejemplo dos se puede seleccionar un subconjunto, por ejemplo $R = \{(1, a),\ (2, b), (3, a)\ \}$ el cual es una relación.

Si una pareja (a, b) pertenece a la relación se dice que a esta relacionado con b y se escribe $a\ R\ b$, también se dice que b es la imagen de a a través de la relación R

Para la pareja $(3, a)$ de la relación del ejemplo tres se tiene que $3\ R\ a$, es decir que 3 esta relacionado con a a través de la relación R, o también se puede escribir que $R(3) = a$ lo cual quiere decir que a es la imagen de 3 a través de la relación R.

FUNCIONES

Definición. Dados dos conjuntos no vacíos A y B, una función f del conjunto A en el conjunto B es una relación (subconjunto de $A \times B$) que se denota $f: A \to B$ y que cumple lo siguiente: para todo elemento $a \in A$ le corresponde un único $b \in B$. De esta manera, si una pareja $(a, b) \in f$ se dice que b es la imagen de a a través de f y se escribe $f(a) = b$

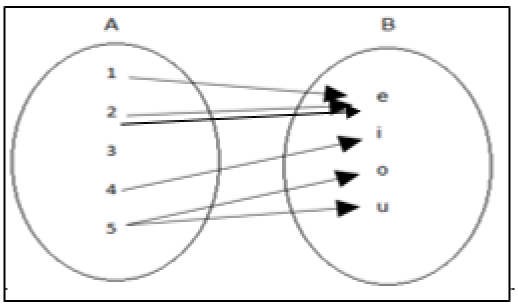
Para simbolizar las funciones se emplean letras minúsculas f, g o h.

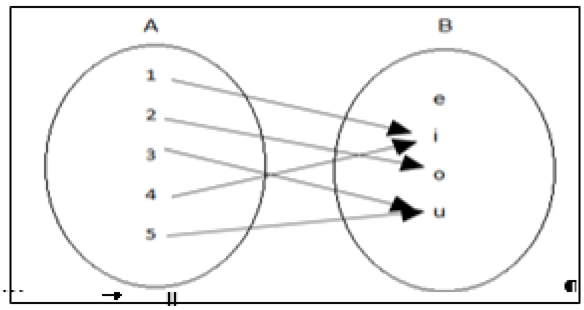
Ejemplo uno

Dados los conjuntos $A = \{1,2,3,4,5\}$ y $B = \{ e, i\ o, u\}$ considere las relaciones f y g del producto cartesiano $A \times B$

$$f = \{ (1, e), (2, e), (4, i), (5, o)\ \ (5, u)\}\ ;\quad g = \{(1, i), (2, o), (3, u), (4, i), (5, u),\}$$

Dado que las relaciones f, g son conjuntos finitos se puede representar en diagramas de flechas como los siguientes:





La relación f NO es funcion La relación NO funcion porque el elemento $5 \in A$ le correspondedos elementos en B, es decir que 5 tiene dos imágenes en B

La relación g es funcion porque todos los elementos del conjunto A le correponde un unico elemento en el conjunto B

.

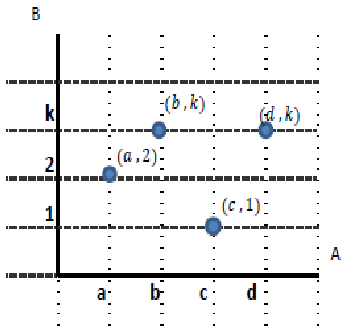
Ejemplo dos

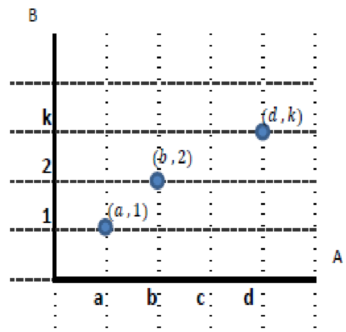
Dados los conjuntos $A = \{a, b, c, d\}$ *y* $B = \{1, 2, k\}$ *considere las siguientes relaciones de* $A \times B$ $h = \{ (a, 2), (b, k), (c, 1), (d, k)\}$; $i = \{(a, 1), (b, 2), (d, k)\}$ *;* $j = \{ (a, 2), (b, 1), (b, k), (c, 2), (d, k) \}$

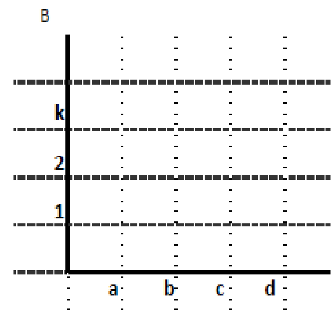
<u>**Actividad:**</u> **represente las relaciones dadas en diagrama de flechas**

A continuación se representa h e i respectivamente en el plano cartesiano.

Representación de h Representación de i







Actividad: represente la relación j en el plano cartesiano de la derecha

La relación h es función porque todo elemento del conjunto A le corresponde un único elemento del conjunto B.

La relación i NO ES función porque el elemento $c \in A$ no esta relacionado con ningun elemento del conjunto B.

La relación j NO ES función porque en las parejas $(b,1)$ y (b,k) al elemento $b \in A$ le corresponde los elementos $1 \; y \; k$ del conjunto B, también se dice que el elemento b no le corresponde un único elemento en B, o que b tiene dos imágenes en el conjunto B.

DOMINIO Y RANGO DE UNA FUNCIÓN

Si $f: A \to B$ es una función entonces:

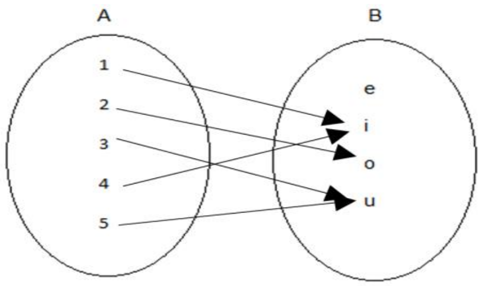
El dominio de f es el conjunto de elementos de A (conjunto de partida) que tienen imagen y se denota $Dom(f)$

El codominio f es B y se denota $Cod(f)$

El rango de f es el conjunto de imágenes y se denota $Rang(f)$

Ejemplo tres

Para la función $g = \{(1,i),(2,o),(3,u),(4,i),(5,u),\}$ del ejemplo uno el dominio cuya representación en diagrama de flechas es:



El dominio es $Dom(f) = \{1, 2,3,4,5\}$,

El codominio es $Cod(f) = \{e, i, o, u\}$

El rango es $Rang\ (f) = \{i, o, u\}$, en este último caso observe que $e \in B$ pero NO ES IMAGEN de ningún elemento del conjunto A.

__Actividad:__ **Halle el dominio y el rango para la función f del EJEMPLO DOS.**

FUNCIONES REALES

Una clase especial de relaciones son las funciones reales, en las cuales tanto el conjunto de partida como el conjunto de llegada son los números reales, esto se denota :

$$\boldsymbol{f}: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}.$$

$$x \longrightarrow y = f(x)$$

Una función real se escribe como $y = f(x)$ dónde la **variable $\boldsymbol{x}$** se denomina **variable independiente**, mientras que la **variable $\boldsymbol{y}$** o $\boldsymbol{f(x)}$ se denomina **variable dependiente**, esto quiere decir que y depende de x, también que x se transforma en y a través de f. Por ello, a $f(x)$ se le denomina la imagen de x por la función f.

DOMINIO Y RANGO DE UNA FUNCIÓN REAL

Si $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función real entonces:

El dominio se denota $Dom(f)$ y es el conjunto de los reales x para los cuales $f(x)$ existe.

El rango se denota $Rang(f)$ y es el conjunto de los reales que son imágenes de todos los valores del dominio.

GRÁFICA DE UNA FUNCIÓN

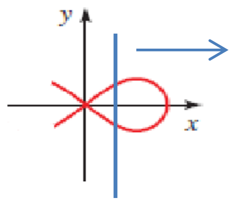
Dada una función $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ la gráfica de f es la representación en el plano cartesiano del conjunto de parejas ordenadas (a, b) que conforman la función f, es decir la gráfica de del conjunto:

$$\{(x, y) :\ y = f(x), \qquad para\ todo\ x \in Domf\}$$

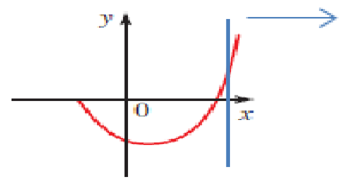
LA PRUEBA DE LA RECTA VERTICAL PARA DETERMINAR QUE UNA RELACIÓN ES FUNCIÓN

Consiste en trazar rectas paralelas al eje y, si estas rectas cortan la gráfica en un solo punto la relación ES FUNCIÓN, de lo contrario, si las rectas cortan la gráfica en más de un punto se concluye que la relación NO ES FUNCIÓN. Las siguientes figuras muestran la prueba de la recta vertical.

Ejemplo cuatro



No es función porque la recta corta la gráfica en dos puntos



Recta vertical

Es función porque la recta corta la gráfica en un solo punto

FUNCIONES EN LA COTIDIANIDAD

Primera situación

Realice la siguiente situación, encienda o apague la luz ¿qué sucede con la intensidad lumínica cuando se cambia la posición del switch?

Observe que la intensidad de la luz (encendido o apagado) depende de la posición del switch. De aquí que la variable independiente es la posición del switch y la variable dependiente es la intensidad de la luz. Llámese:

p: $Posición\ de\ switch$

i: $Intensidad\ de\ la\ luz\ (encendido\ o\ apagado)$

De lo anterior, la intensidad de la luz está en función de la posición del switch, es decir, $i(p)$

Segunda situación

Usted compra un tubo de crema dental para aplicarle a un cepillo de dientes ¿qué sucede con la cantidad de crema cuando la presión ejercida sobre el empaque es mayor? Si usted compra otro tubo de crema dental de la misma cantidad al anterior para aplicarle al cepillo de dientes ¿Qué sucede con la cantidad de crema cuando la presión ejercida sobre el empaque es menor? ¿Cuál es la variable independiente y la variable dependiente?

Observe que la cantidad de crema de dientes depende de la presión ejercida sobre el empaque. De aquí que la variable dependiente es la cantidad de crema de dientes y la variable independiente es la presión ejercida. Llámese:

$C_{C:}\, cantidad\ de\ crema$

$p: presión\ ejercida$

De lo anterior, la cantidad de la crema está en función de la presión ejercida, es decir $C_C\ (p)$

<u>Actividad:</u> A partir de la siguiente situación responder los interrogantes.

La estatura de una persona al transcurrir la edad de una persona ¿qué sucede con la estatura al trascurrir la edad? ¿Cuál es la variable independiente y la variable dependiente?

La cantidad de dinero que se debe cancelar por el número de minutos que se hablan al realizar una llamada telefónica. ¿Cuál es la variable independiente y la variable dependiente?

LA FUNCIÓN LINEAL

Antes de abordar la definición de función lineal analice la siguiente situación.

En la ciudad de Popayán, María aborda un taxi en el barrio la Esmeralda para dirigirse a la alcaldía municipal que está a una distancia de 1500 metros. Antes de iniciar el recorrido María pregunta el valor que debe cancelar, ante esto el taxista le responde que el costo fijo por subir al taxi es de $2500 pesos más un costo de $30 pesos por cada metro recorrido. De inmediato María empieza a registrar los metros recorridos y el dinero a pagar en una tabla como la siguiente, pero sólo alcanza a registrar para los primeros 6 metros.

Metros recorridos	0	1	2	3	4	5	6
Dinero a pagar $	2500	2530	2560	2590	2620	2650	2680

¿Cuál es la representación gráfica que relaciona los metros recorridos y el dinero a pagar?

¿Cuál es el valor aproximado que debería pagar María por 2,5 m y por 15m?

En la situación descrita se puede notar que la variable independiente son los metros recorridos y la variable dependiente es el dinero a pagar. Llámese:

$x: metros\ recorridos$

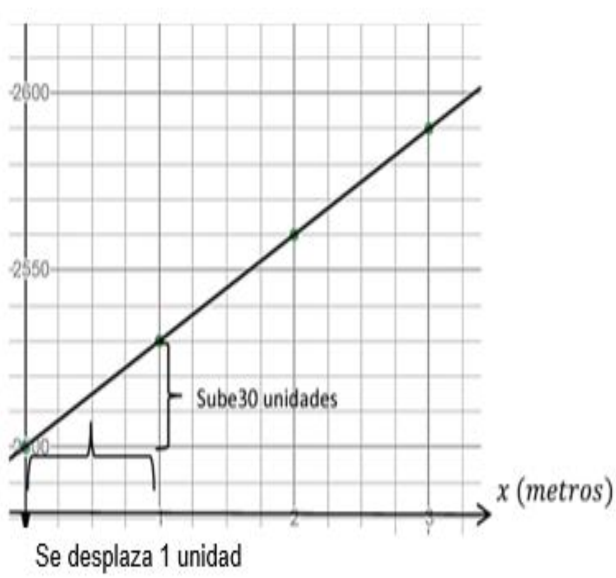
$C: Dinero\ a\ pagar$

De lo anterior, se dice que el dinero a pagar está en función de los metros recorridos, es decir $C(x)$

Los datos de la tabla anterior permiten obtener parejas ordenadas de la forma $(x, y), donde\ y = c(x)$ como muestra la tabla.

x (Metros recorridos)	0	1	2	3	4	5	6
$y = c(x)$ Dinero a pagar	2500	2530	2560	2590	2620	2650	2680
Parejas ordenadas (x, y)	$(0, 2500)$	$(1, 2530)$	$(2, 2560)$	$(3, 2590)$	$(4, 2620)$	$(5, 2650)$	$(6, 2680)$

Se procede a ubicar las parejas ordenadas en el plano cartesiano para luego unirlas. Tenga en cuenta que en el eje horizontal se ubica los metros recorridos y en el eje vertical el dinero a pagar.



En la gráfica se puede observar lo siguiente:

- Al unir los puntos del plano se obtiene una línea recta, la cual tiene el punto de corte con el eje y en $(0, 2500)$ es decir cuando $x = 0$ (el taxi aun no inicia el recorrido) se tiene que $y = 2500$ (sólo se cobra el cargo fijo).
- Por cada unidad que se desplace sobre el eje de las x la recta sube 30 unidades en el eje de las y (esto es lo que más adelante se definirá como **pendiente de la recta**)

Para responder la pregunta ¿Cuál es la representación gráfica que relaciona los metros recorridos y el dinero a pagar? En la representación se observa que es una línea recta.

¿Cuál es el valor aproximado que debería pagar María por 5,5 m, 15m y por 1500 m?

De la gráfica se observa que por 2,5 metros se pagaría aproximadamente $ 2575 pesos, pero no se muestra el costo para 15 m ni para 1500 m. Por esto último es importante deducir la expresión algebraica que relaciona los metros recorridos y el dinero a pagar. Pero ya se conoce que gráficamente dicha relación es una línea recta, así que habría que encontrar la expresión algebraica que la representa, esto es justo lo que se va a abordar en lo que sigue.

En conclusión el dinero a pagar está en función de los metros recorridos, lo cual se ha denotado como $C(x)$, y la respectiva representación gráfica es una línea recta. El tipo de función a la que se hace referencia es la denominada función lineal. En este apartado se aborda dicha función.

Definición de función lineal: Una función real que a cada número real x lo transforma en $mx+b$ se llama $funcion\ l$ineal, es decir que la función se define como:

$$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$x \longrightarrow y = f(x) = mx + b$$

La función $f(x) = mx + b$ multiplica el valor numérico de la variable x por m y le suma b.

Para la función $f(x) = mx + b,\ m$ y b son números reales y $m \neq 0$. Además el dominio y el rango son los números reales, es decir $Dom(f) = \mathbb{R}$, y el $Rang(f) = \mathbb{R}\ \ (si\ m \neq 0)$ y la representación gráfica es la recta cuya ecuación es $y = mx + b$.

En $y = f(x) = mx + b$, m representa la **pendiente** de la recta que pasa por el punto inicial $(x_i\ , y_i)$ y por el punto final $\left(x_f\ , y_f\right)$, mientras que b es un número real y representa la ordenada del **punto de corte** de la recta con el eje y.

La pendiente m representa el grado de inclinación de la recta respecto el eje x y está dada por $m = \frac{y_f - y_i}{x_f - x_i}$, donde $y_f - y_i$ representa la cantidad que la recta se mueve sobre el eje y mientras que $x_f - x_i$representa la cantidad que la recta se desplaza sobre el eje de las x. En resumen, la pendiente representa qué tanto se mueve la recta en y cuando sobre el eje x se desplaza una cantidad $x_f - x_i$

Ejemplo uno

Hallar la ecuación de la recta que pasa por los puntos $(1,2)\ y\ (2,6)$.

Primero se halla la pendiente de la recta

Para ello se asigna $(1{,}2)$ como punto incial y $(2{,}6)$ como punto final, es decir que $x_{i=}1,\ x_{f=}2\ ,\ y_{i=}2,\ \ y_{f=}6$. De aquí se tiene que $x_f - x_i = 2 - 1 = 1$, mientras que $y_f - y_i = 6 - 2 = 4$. Entonces la pendiente es $m = \frac{4}{1}$, esto quiere decir que **por cada unidad que se corra en el eje x hacia la derecha la recta sube 4 unidades en el eje y**.

Luego se reemplaza $m = 4$ en ecuación de la recta $y = mx + b$ para obtener $y = 4\,x + b$.

Se halla el valor de b

Los puntos $(1{,}2)\ y\ (2{,}6)$ deben satisfacer la ecuación de la recta, por tal razón se puede sustituir cualquiera de ellos en $y = 4\,x + b$ para hallar b. Por ejemplo al emplear el punto $(1{,}2)$ donde $x = 1,\ y = 2$ se tiene $2 = 4\,(1) + b$ al resolver el producto $2 = 4\ + b$ y al despejar $b = -2$.

Luego se reemplaza $b = -2$ en $y = 4\,x + b$ para obtener $y = 4\,x + 2(-2)$ es decir $y = 4\,x - 2$

Se verifica que los puntos $(1, 2)\ y\ (2, 6)$ satisfagan la ecuación:

Para el punto $(1{,}2)$ se tiene $2 = 4\,(1) - 2$. Al resolver el producto $2 = 4 - 2$ esto es $2 = 2$

Para el punto $(2{,}6)$ se tiene $6 = 4\,(2) - 2$. Al resolver el producto $6 = 8 - 2$ esto es $6 = 6$

Dado que los puntos satisfacen la ecuación se concluye que $y = 4\,x - 2$ es la ecuación que pasa por los puntos $(1{,}2)\ y\ (2{,}6)$.

Ahora se pueden hallar más puntos de la recta $y = 4\,x - 2$:

Si $x = 0$ entonces $y = 4\,(0) - 2 = -2$. Se obtiene el punto $(0, -2)$

Si $x = 3$ entonces $y = 4\,(3) - 2 = 10$. Se obtiene el punto $(3{,}10)$

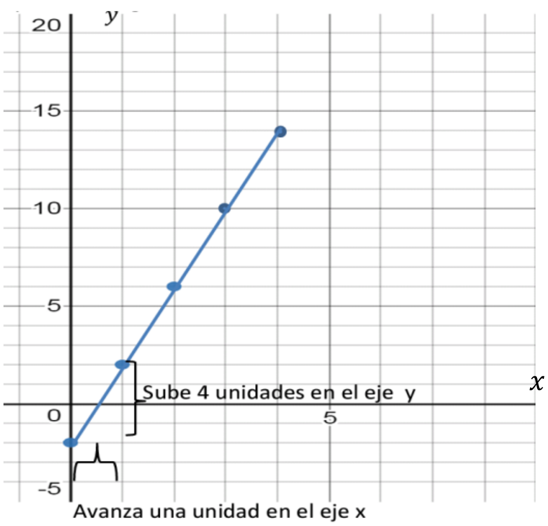
Si $x = 4$ entonces $y = 4\,(4) - 2 = 12$. Se obtiene el punto $(4{,}12)$

Lo anterior se puede organizar en una tabla de valores como la siguiente:

x	0	1	2	3	4			
y	-2	2	6	10	14			
Pareja ordenada (x, y)	$(0\,, -2)$	$(1{,}2)$	$(3{,}6)$	$(3{,}10)$	$(4\,, 14)$			

Actividad: Encuentre 5 puntos de la recta y regístrelos en la tabla

A continuación se representa la gráfica de la recta



En la representación se puede notar que:

La recta corta el eje x en el punto $(0\,,-2)$.

Se puede explicar el hecho de que la pendiente sea $m = 4$. En este sentido por cada unidad que se avance en el eje x la recta sube 4 unidades en el eje y.

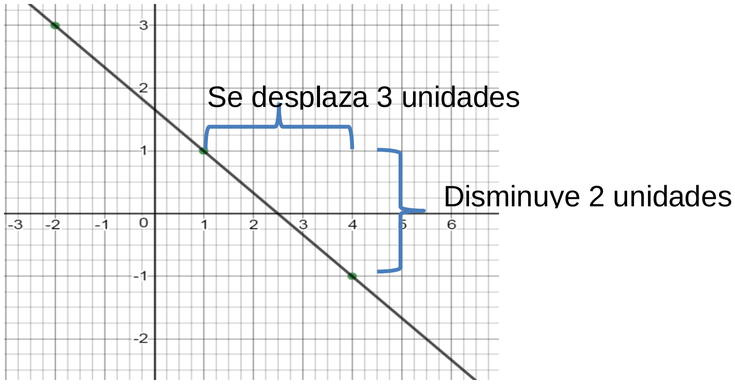
De acuerdo a este significado el punto siguiente a $(4\,,14)$ es ________ (señale en el plano)

<u>**Actividad**</u>: Cuántos puntos son suficientes para trazar una recta.

Ejemplo dos

Halle la ecuación de la recta que pasa por el punto $(-2\,,3)$, además cuando x se desplaza 3 unidades en el eje x la recta disminuye 2 unidades en el eje y.

Primero se ubica el punto $(-2\,,3)$ en el plano cartesiano y a partir de este se busca otro punto que satisfaga la condición dada, es decir que cuando x se desplaza 3 unidades a la izquierda la recta disminuye 2 unidades en el eje y, por lo cual el otro punto de la recta es $(-5\,,5)$, observe la gráfica.



Primero se halla la pendiente de la recta

Como la recta pasa por los puntos $(-2\,,3)$ $(-5\,,5)$ primero se halla la pendiente de la recta usando $m = \frac{y_f - y_i}{x_f - x_i}$.

Se asigna $(-2\,,3)$ como punto inicial y $(-5\,,5)$ como punto final, es decir que $x_{i=} -2$, $x_{f=} -5$, $y_{i=}3$, $y_{f=}5$. De aquí se tiene que $x_f - x_i = -5 - (-2) = -3$, mientras que $y_f - y_i = 5 - 3 = 2$. Entonces la pendiente es $m = \frac{2}{-3}$, esto quiere decir que **por cada tres unidades que se corra en el eje x hacia la izquierda la recta sube 2 unidades en el eje y.**

Luego se reemplaza $m = \frac{2}{-3}$ en ecuación de la recta $y = mx + b$ para obtener $y = \frac{2}{-3}\,x + b$.

Se halla el valor de b

Los puntos $(-2, 3)$ $(-5{,}5)$ deben satisfacer la ecuación de la recta, por tal razón se puede sustituir cualquiera de ellos en $y = \frac{2}{-3}\,x + b$ para obtener el valor de b, por ejemplo al emplear el punto $(-2, 3)$ donde $x = -2\,, y = 3$ se tiene $3 = \frac{2}{-3}\,(-2) + b$ al resolver el producto $3 = \frac{4}{3} + b$ y al despejar $b = 3 - \frac{4}{3} = \frac{5}{3}$.

Se reemplaza $b = \frac{5}{3}$ en $y = \frac{2}{-3}\,x + b$. De aquí se obtiene la ecuación $y = -\frac{2}{3}\,x + \frac{5}{3}$

Verifique que los puntos dados $(-2, 3)$ $(-5{,}5)$ satisfacen la ecuación $y = -\frac{2}{3}\,x + \frac{5}{3}$

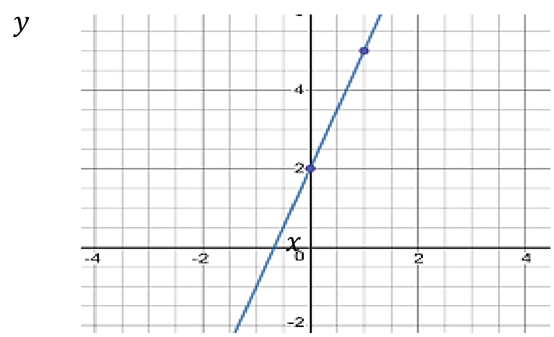
Ejemplo tres

Graficar la función lineal $y = f(x) = 3x + 2$

Sabiendo que el dominio de una función lineal son los números reales la función $f(x) = 3x + 2$ toma el número real x (variable independiente) lo multiplica por 3 y luego suma 2. De acuerdo e esto se hace la tabla de valores para hallar las parejas ordenadas, es decir los puntos (x, y). Es suficiente con encontrar dos puntos pues por dos puntos pasa una única recta.

x	0	1
$y = f(x)$	2	5
Pareja ordenada (x, y)	$(0,2)$	$(1,5)$

Las parejas ordenadas se localizan en el plano cartesiano y luego se unen para obtener la gráfica



Observe que la recta corta el eje y en el punto $(0\,,2)$

Ejercicios resueltos

Ejercicio uno

Dada la función $y = f(x) = \frac{3}{2}x - 2$. Si $x = 2$ encontrar $f(-2)$ $f(2)$ $f\left(\frac{2}{3}\right)$

Observe que la función toma el número real x (variable independiente) lo multiplica por $\frac{3}{2}$ y luego resta 2. Así que $f(-2) = \frac{3}{2}(-2) - 2 = -5$ (verifique). Es decir que $f(2) = 1$.

Halle $f(2)$ y $f\left(\frac{2}{3}\right)$

Ejercicio dos

Juan desea abordar un taxi para dirigirse a su lugar de trabajo, pero, como desconoce el costo de la carrera decide preguntarle al taxista, quien le informa que el servicio tiene un costo fijo de $2150 pesos más $1790 pesos por cada kilómetro recorrido. Si Juan sabe que el taxi debe recorrer 12.5 km, ¿es posible que pueda determinar el costo de la carrera antes subirse al taxi? Si Juan sólo tiene $15500

¿cuántos kilómetros podría recorrer? Con la información que juan recibe se puede realizar una tabla para registrar los kilómetros que serán recorridos y el dinero a pagar en una tabla como la siguiente.

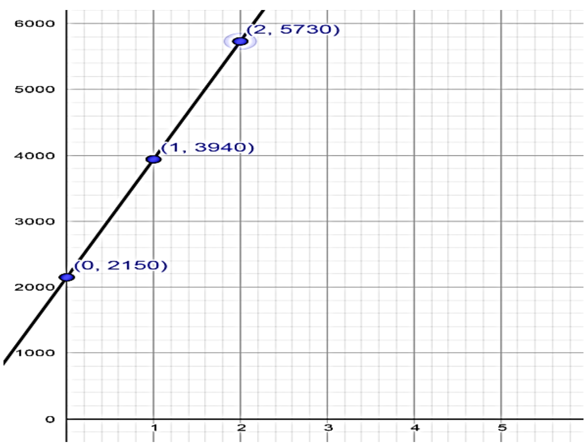
$x(metros\ recorridos$	0	1	2	3	4	5	6
$c(dinero\ a\ pagar)$	2150	3940	5730	7520	9310	11100	12890
Parejas $(x\ ,c)$	$(0\ ,215$	$(1\ ,3940)$	$(2\ ,5730)$	$(3\ ,7520)$	$(4\ ,9310)$	$(5\ ,11100$	$(6\ ,12890$

En la situación descrita se puede notar que la variable independiente son los kilómetros recorridos y la variable dependiente es el dinero a pagar. Llámese:

x: $kilómetros\ recorridos$; c: $Dinero\ a\ pagar$

De lo anterior, se dice que el dinero a pagar está en función de los kilómetros recorridos, es decir $c(x)$.

Luego, al ubicar parejas $(x\ ,c)$en el plano cartesiano y unirlas se obtiene una línea recta (ver figura). Por lo tanto, la función $c(x)$ que representa la situación descrita es una función lineal de la forma $y = c(x) = mx + b$.



Si se encuentra la función lineal entonces se puede responder los interrogantes del problema. Para hallarla se realiza lo siguiente.

Primero se halla la ecuación de la línea recta.

Recuerde que la ecuación de una línea recta es $y = mx + b$ así que se debe hallar la pendiente m y b que es la ordenada del punto de corte de la recta con el eje vertical.

Para hallar la pendiente se usa como punto inicial $(1\ ,3940)$ y como punto final $(3\ ,7520)$. Al usar $m = \frac{y_f - y_i}{x_f - x_i}$ se obtiene $m = 1790$ (Verifique que $m = 1790$ y también explique qué significa)

Luego se reemplaza $m = 1790$ en $y = mx + b$ para obtener $y = m = 1790 + b$

Ahora se escoge cualquiera de los puntos de la tabla para hallar b, por ejemplo $(1\ ,\ 3940)$. De aquí se obtiene que

$b = 2150$ (**Verifique).**

El hecho de que la ordenada del punto de corte con el eje vertical sea $b = 2150$ se puede corroborar en la representación gráfica. De hecho el punto $(0\,,2150)$ es el punto de corte, y significa que el valor mínimo que el taxista puede cobrar es de $2150

Por lo tanto la ecuación de la recta es $y = 1790x + 2150$ y la función lineal es $y = c(x) = 1790x + 2150$.

Con la ecuación $y = 1790x + 2150$ se puede responder las preguntas del problema, las cuales son:

Si Juan sabe que el taxi debe recorrer 12.5 km, ¿es posible que pueda determinar el costo de la carrera antes subirse al taxi? Si Juan sólo tiene $15500 ¿cuántos kilómetros podría recorrer?

Respuestas:

Si Juan conociera la ecuación la expresión $y = c(x) = 1790x + 2150$ podría saber justo antes de subirse al taxi el valor que debe pagar.

Si $x = 12.5$ entonces $y = c(12.5) = 1790(12.5) + 2150$.

Por lo tanto, por 12.5 km Juan paga exactamente $24,525 pesos

Si por equivocación, el taxista recorre 1.2 km de más ¿cuánto debe pagar Juan?

Si Juan sólo tiene $15500 con la ecuación $y = 1790x + 2150$ también se puede hallar los kilómetros que podría recorrer.

Observe que x representa los kilómetros y $y = 15500$ entonces al reemplazar se obtiene

$$15500 = 1790x + 2150$$

Al despejar x se tiene que con $\$15500$ alcanza a recorrer alrededor de 4.4 km

Verifique que por $18250 se puede recorrer alrededor de 8.9 km

Ejercicio tres

La finca “Buena Vista” tiene únicamente cultivo de café, y en época de cosecha a los recolectores se les paga $ 495 pesos por cada kg recogido. Encontrar la función que relaciona los kg recolectados y el valor a pagar para responder:

Si juan el lunes recogió 65, 5 kg ¿Cuánto dinero le pagarán?

¿Cuántos kilogramos debe recolectar un trabajador para recibir $57200 pesos?

En la situación anterior la variable independiente son los kilogramos y la variable dependiente es el dinero pagado. Llámese:

k: A los kilogramos de café recolectados

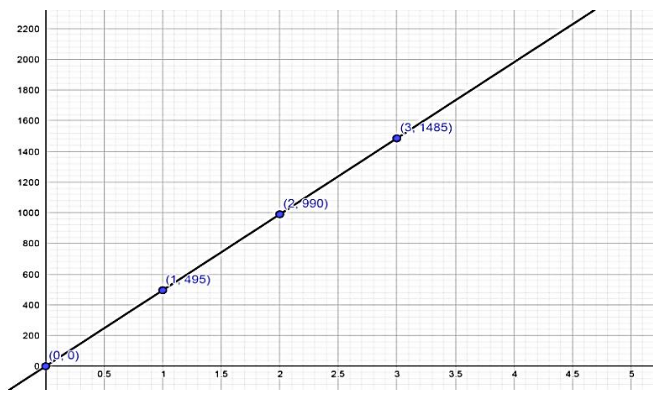
d: Al dinero a pagar

El dinero a pagar d está en función de los kg recolectados, lo cual se denota $d(kg)$.

Para ver el tipo de función se realiza una tabla de valores utilizando la condición de que por cada kg recogido se paga $ 795.

Kg	0	1	2	3	4	5
$y = d(x)$ (Dinero a pagar)	0	495	990	1485	1980	2475

Al localizar los puntos en el plano cartesiano y al unirlos se obtiene una línea recta. De aquí que la expresión matemática que se debe encontrar es la ecuación de la recta y por tanto la función es de la forma $y = d(k) = mk + b$.



Primero se halla la ecuación de la recta $y = mk + b$

De la gráfica se puede notar que la recta corta el eje vertical en la ordenada cuyo valor es 0, por lo que se puede decir que la ordenada del punto de corte es $b = 0$, y entonces la ecuación es de la forma $y = mk$.

Para hallar la pendiente m se toman dos puntos cualesquiera, por ejemplo $(0\ ,\ 0)$ y $(2\ ,\ 990)$. De donde se obtiene que $m = 495$ **(verifique).**

Luego se reemplaza $m = 495$ en $y = d(k) = mk + b$ para obtener $y = d(k) = 495k + b$

Para corroborar que $b = 0$ se usa cualquier punto y se reemplaza en $y = 495k + b$, por ejemplo si se toma el punto $(4\ ,\ 1980)$, se tiene que $1980 = 495\ (4) + b$. Al despejar b se tiene que efectivamente $b = 0$. **(Verifique)**

En conclusión la ecuación de la línea recta es $y = 495k$ y la función lineal es $y = d(k) = 495k$

Se procede a emplear la expresión $y = 495k$ o $d(k) = 495k$ para responder los interrogantes iniciales.

Si juan el lunes recogió 65, 5 kg ¿Cuánto dinero le pagarán?

Si Juan recogió 65, 5 kg entonces $k = 65{,}5$ y al reemplazar en $d(k) = 495k$ se tiene $d(65{,}5) = 495(65{,}5) = 32422$. De lo anterior, por 65, 5 kg Juan recibe $\$32422$.

¿Cuántos kilogramos debe recolectar un trabajador para recibir $57200 pesos?

Se toma la expresión $y = 495k$ (también se puede emplear $d(k) = 495k$) se despeja k para obtener $k = \frac{y}{495}$ **(Justifique).**

Se reemplaza $y = 57200$ en $k = \frac{y}{495}$ para obtener $k = 115{,}5$

De lo anterior, si Juan quiere recibir $\$57200$ debe recolectar $115{,}5\ kg$.

Ejercicio cuatro

Juan decide crear una microempresa de artesanías Misak. Antes de fijar el precio de las artesanías analiza en su libro de contabilidad los costos de fabricación, y concluye que el costo de producción mensual por cada artesanía fue de $20000 (incluye el salario de los trabajadores, la materia prima, etc.) más un costo adicional de $33000 correspondiente al alquiler del local y otros gastos administrativos. Si juan decide fijar el precio de las artesanías a $50000 ¿cómo va a encontrar la utilidad (ganancia) mensual por vender 10 artículos? Y si juan quiere obtener una utilidad mensual de $600000 ¿cuántas unidades debe vender?

Dado que se quiere encontrar la utilidad mensual se recordar que esta es la diferencia entre el ingreso total I y el costo total, es decir

$\boldsymbol{Utilidad = ingreso\ total - costo\ total}$

Pero el ingreso total que está dado por el número de unidades vendidas en el mes multiplicado por el precio y los costos totales es la suma del costo variable y el costo fijo.

Para abordar la situación llámese:

U: El número de unidades que debe venderse

I: El ingreso total

C: El costo total

q: Es el número de unidades vendidas

c_v: Es el costo variable que está relacionado con la producción, por ejemplo salario de trabajadores, materia prima, pago de servicios públicos, etc.

c_f: Es el costo fijo que no depende de la producción de las artesanías, por ejemplo alquiler, impuestos, etc.

Por lo tanto la utilidad se denotará $U = I - \left(C_v + C_f\right)$

Para hallar la utilidad primero se debe encontrar el ingreso total I que como se dijo está dado por el número de unidades vendidas en el mes multiplicado por el precio. Si se designa por q el número de unidades vendidas, entonces los ingresos totales son:

$I = q * 50000$ que es equivalente a $I = 50000q$

Luego se hallan los costos totales C que como se dijo es la suma del costo variable C_v y el costo fijo C_f.

Como el costo mensual de cada artesanía es de $20000 entonces el costo variable está dado por $c_v = 20000q$ donde q es el número de artesanías.

El costo fijo c_f corresponde a un valor de $33000, es decir $c_f = 33000$

En conclusión, la utilidad de la producción de las artesanías que está dada por $U = I - \left(C_v + C_f\right)$ se encuentra dada por la ecuación:

$$U = 50000q - (20000q + 33000)$$

Lo que es equivalente a:

$$U = 50000q - 20000q - 33000$$

Es decir
$$U = 30000q - 33000$$

La anterior expresión es una ecuación lineal que corresponde a la utilidad de las artesanías.

Se reescribe la ecuación para obtener la función lineal:

$$y = U(q) = 30000q - 33000$$

Dado que el problema de Juan consiste en saber la utilidad que se obtiene por vender 10 artículos, y además, quiere saber cuántos artículos debe vender para obtener una utilidad de $600000 se procede a emplear la expresión $y = 30000q - 33000$ o $U(q) = 30000q - 33000$.

Si Juan vende 10 artículos, es decir $q = 10$ y al reemplazar en la ecuación $y = 30000q - 330000$ se obtiene

$$y = 30000(10) - 33000$$

De donde $y = 276000$

Por lo tanto, si Juan vende 10 artículos entonces obtiene una utilidad de $276000

Si Juan quiere obtener una utilidad de $600000, es decir $U(q) = 600000$ y al reemplazar en $U(q) = 30000q - 33000$ se obtiene

$$600000 = 30000q - 33000$$

Al despejar q se obtiene que $q = 21.1$

Como $q = 21.1$ entonces se concluye que Juan debe vender aproximadamente 22 artículos artesanales para obtener una ganancia de $600000.

Anexo 9. Guía Función Cuadrática

Definición de función cuadrática

Una función real que a cada número real lo transforma en $ax^2 + bx + c$ se define llama Función Cuadrática, es decir que la función se define como:

$$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$x \longrightarrow y = f(x) = ax^2 + bx + c$$

En la función $y = f(x) = ax^2 + bx + c$, a, b, c son números reales con $a \neq 0$, donde:

La expresión ax^2 es el término cuadrático, bx es el término lineal y c es el término independiente.

Actividad: ¿Qué función se obtendría si $a = 0$? Justifique porque $a \neq 0$.

REPRESENTACIÓN GRAFICA DE UNA FUNCIÓN CUADRÁTICA

La representación gráfica de una función cuadrática es una parábola, y para ejemplificar a continuación se muestran algunas representaciones de este tipo funciones.

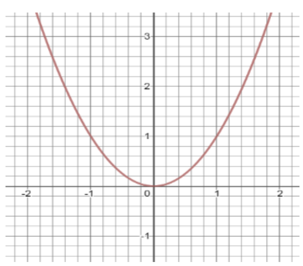


Fig. 1. Representación gráfica de la función $\boldsymbol{y = f(x) = x^2}$

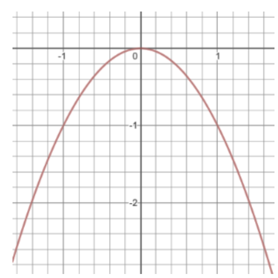


Fig. 2. Representación gráfica de la función $\boldsymbol{y = f(x) = -x^2}$

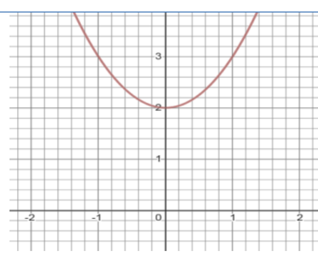


Fig. 3. Representación gráfica de la función $\boldsymbol{y = f(x) = x^2 + 2}$

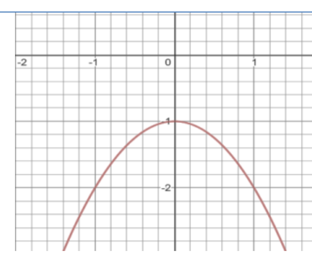


Fig. 4. Representación gráfica de la $\boldsymbol{y = f(x) = x^2 - 1}$

DOMINIO Y RANGO DE UNA FUNCIÓN CUADRÁTICA $\boldsymbol{y = f(x) = ax^2 + bx + c}$

DOMINIO:

El dominio de una función son todos los valores posibles para la variable x, en el caso particular de una función cuadrática el dominio es el conjunto de todos números reales, es decir $Dom(f) = \mathbb{R}$.

RANGO:

De otro lado, el rango de una función es el conjunto de imágenes de la variable x, es decir, el conjunto de valores de la variable y. En el caso de una función cuadrática el rango es un subconjunto de los números reales, es decir $Rang(f) \subset \mathbb{R}$.

Para ejemplificar, a continuación se presentan el dominio y el rango de las funciones cuadráticas representadas en las figuras 1-4.

Para la función $y = f(x) = x^2$ representada en la figura 1 se tiene que el dominio son todos los valores posibles para la variable x, es decir $Dom(f) = \mathbb{R}$. Mientras que el rango es el conjunto de imágenes de la variable x (conjunto de valores de la variable y) y por ello resulta ser un subconjunto de los números reales, el cual se escribe como $[0, +\infty)$ y significa que los valores numéricos que toma la variable y varían a partir de 0 y como no hay un último número se usa $+\infty$ que simboliza el infinito positivo.

Para la función $y = f(x) = -x^2$ representada en la figura 2 se tiene que el dominio es $Dom(f) = \mathbb{R}$. Mientras que el rango es $(-\infty\, ,\ 0]$ y significa que los valores numéricos que toma la variable y varían desde los reales negativos hasta 0 (como no hay un último número en los reales negativos se usa $-\infty$ que simboliza el infinito negativo)

Para la función $y = f(x) = x^2 + 2$ representada en la figura 3 se tiene que el dominio es $Dom(f) = \mathbb{R}$. Mientras que el rango es $[2\, ,\ +\infty)$ y significa que los valores numéricos que toma la variable y varían desde 2 y como no hay un último número se usa $+\infty$ que simboliza el infinito positivo.

Actividad: Hallar el dominio y el rango para la función representada en la figura 4.

CARACTERISTICAS Y ELEMENTOS DE LA PARÁBOLA

En una parábola se identifican la concavidad, los puntos de corte con el eje y y con el eje x, el vértice, el máximo o el mínimo.

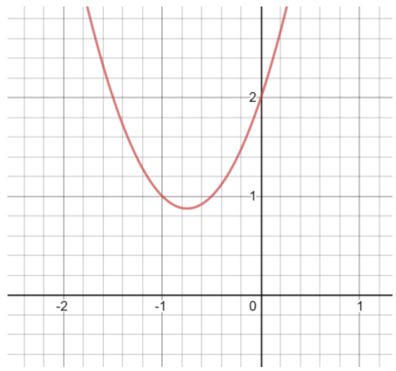
CONCAVIDAD

En una función $y = f(x) = ax^2 + bx + c$ el parámetro a en determina la concavidad de la parábola. Dicho parámetro puede tomar dos siguientes posibilidades: $a > 0$, $a < 0$.

Si $a > 0$ la parábola es cóncava hacia arriba (abre hacia arriba).

Ejemplo

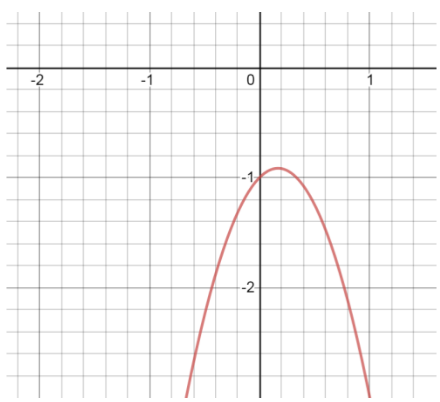
Dada la función $y = f(x) = 2x^2 + 3x + 2$ observe que $a = 2$, es decir $a > 0$. Por lo tanto, la parábola es cóncava hacia arriba, como se muestra en la figura



Si $a < 0$ la parábola es cóncava hacia abajo (abre hacia abajo)

Ejemplo.

Dada la función $y = f(x) = -3x^2 + x - 1$ observe que $a = -3$, es decir $a < 0$. Por lo tanto, la parábola es cóncava hacia abajo, como se muestra en la figura



PUNTOS DE CORTE DE LA PARÁBOLA CON EL EJE DE LAS y, Y CON EL EJE DE LAS x

Punto de corte con el eje de las y

Para hallar el punto de corte de la parábola con el eje de las y se debe tomar la función $y = f(x) = ax^2 + bx + c$, y seguidamente hacer $x = 0$. De aquí se tiene que:

$$y = f(0) = a(0)^2 + b(0) + c$$

Así que, cuando $x = 0$ se obtiene $y = f(0) = c$.

En conclusión, el punto de corte de la parábola con el eje y esta en la coordenada $(0\,, c)$.

Ejemplo

Dada la función $y = f(x) = 2x^2 - 3x + 1$ hallar el punto de corte con el eje y.

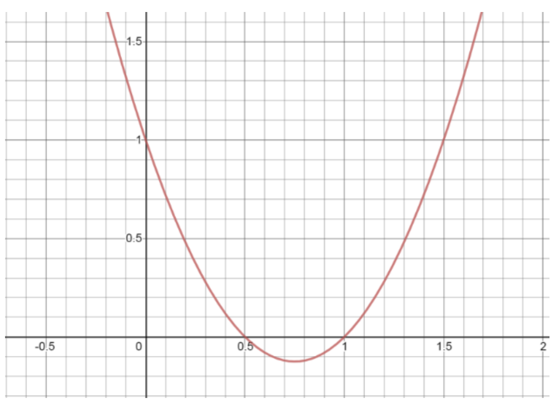
Solución

Para hallar el punto de corte con el eje y se debe tomar la función $y = f(x) = 2x^2 - 3x + 1$, y hacer $x = 0$, es decir:

$$y = f(x) = 2(0)^2 - 3(0) + 1$$

Al resolver las operaciones se obtiene $y = f(0) = 1$

Por lo anterior, el punto de corte con el eje y es $(0\,, 1)$ y se puede identificar en la siguiente figura.



Puntos de corte con el eje de las x.

Para hallar los puntos de corte de la parábola con el eje de las x se debe tomar la función $y = f(x) = ax^2 + bx + c$, y seguidamente hacer $y = 0$. De aquí se tiene que:

$$0 = ax^2 + bx + c$$

Observe que se obtiene una ecuación cuadrática cuya solución está dada por:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Recuerde que la expresión que está dentro de la raíz $b^2 - 4ac$ se llama discriminante y cumple una de las siguientes posibilidades:

Si el valor $b^2 - 4ac > 0$ entonces la ecuación tiene dos soluciones reales distintas, lo cual quiere decir que la parábola corta el eje x en dos puntos distintos.

Si el valor $b^2 - 4ac = 0$ entonces la ecuación tiene una única solución real que se repite dos veces, lo cual quiere decir que la parábola toca el eje x en un solo punto.

Si el valor $b^2 - 4ac < 0$ entonces la ecuación tiene dos soluciones en los números complejos, lo cual quiere decir la parábola no corta el eje x.

Según lo anterior, entonces las soluciones de la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$ son:

$x_1 = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$; $x_2 = \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

Con estas soluciones la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$ se puede factorizar como:

$$a(x - x_1)(x - x_2) = 0$$

Es decir que $ax^2 + bx + c = 0$ y $a(x - x_1)(x - x_2) = 0$ son equivalentes.

Por tanto, la función cuadrática $y = f(x) = ax^2 + bx + c$ se puede escribir como:

$$y = f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$$

Ejemplo

Dada la función $y = f(x) = 2x^2 - 3x + 1$ del ejemplo anterior encontrar los puntos de corte con el eje x.

Solución

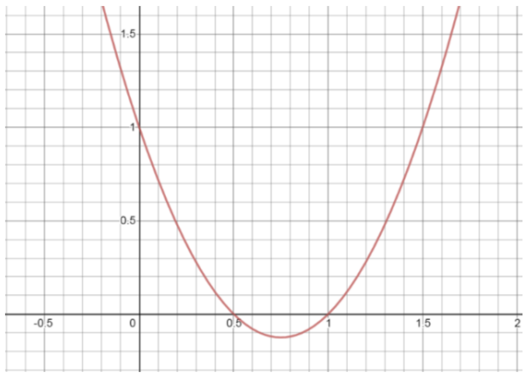
Para hallar los puntos de corte con el eje x se debe tomar la función $y = f(x) = 2x^2 - 3x + 1$ y hacer $y = 0$, de esta manera se obtiene

$0 = 2x^2 - 3x + 1$ que es equivalente a $2x^2 - 3x + 1 = 0$

Dado que $b^2 - 4ac$ =1 (verifique) y $1 > 0$ entonces la ecuación tiene dos soluciones reales, lo que indica que la parábola corta el eje x en dos puntos.

Al resolver la ecuación cuadrática $2x^2 - 3x + 1 = 0$ se obtiene que las soluciones son: $\frac{1}{2}$ y 1 (verifique).

Por el resultado anterior, los puntos de corte de la parábola con el eje x son $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ y $(1, 0)$. Esto se puede identificar en la siguiente figura.



Con las soluciones $\frac{1}{2}$ y 1 la ecuación $2x^2 - 3x + 1 = 0$ se factoriza así:

$$2\left(x - \frac{1}{2}\right)(x - 1) = 0$$

Es decir que $2x^2 - 3x + 1 = 0$ y $2\left(x - \frac{1}{2}\right)(x - 1) = 0$ son equivalentes.

Por tanto, función $y = f(x) = 2x^2 - 3x + 1$ se puede escribir así:

$$y = f(x) = 2\left(x - \frac{1}{2}\right)(x - 1)$$

LAS COORDENADAS DEL VÉRTICE DE LA PARÁBOLA.

En el punto anterior se mencionó que se pueden obtener los puntos de corte de la parábola con el eje de las x resolviendo la ecuación $0 = ax^2 + bx + c$ mediante la expresión $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$.

Según lo anterior, entonces las soluciones de la ecuación son:

$\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ y $\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

Lo anterior se tiene en cuenta para encontrar las coordenadas $(x\,,y)$ del vértice.

La abscisa x se halla haciendo el promedio entre las soluciones anteriores, es decir:

$$\frac{\left(\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)+\left(\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)}{2}=\frac{-2b}{4a}=\frac{-b}{2a}$$

Luego $x=\frac{-b}{2a}$

La ordenada y se halla haciendo $f\left(\frac{-b}{2a}\right)$

Por lo tanto, si se tiene una función $y=f(x)=ax^2+bx+c$ entonces para para hallar las coordenadas del vértice de la parábola se emplea el punto $\left(\frac{-b}{2a}\,,\quad f\left(\frac{-b}{2a}\right)\right)$

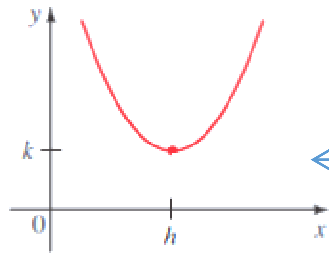
En el caso de que la parábola no corte el eje x, el vértice se halla transformando la función $y=f(x)=ax^2+bx+c$ en la forma canónica $y=f(x)=a(x-h)^2+k$, en esta última, el vértice de la parábola tiene coordenadas $(h\,,k)$.

Para transformar $y=f(x)=ax^2+bx+c$ en $y=f(x)=a(x-h)^2+k$ se hace uso del método de completar cuadrados. Esto se explica en el siguiente recuadro.

1. Se factoriza a en los términos que tengan x	$y=f(x)=a\left(x^2+\frac{b}{a}x\right)+c$
2. En la expresión que esta entre paréntesis se completa el cuadrad, y para ello se suma y se resta la mitad del coeficiente lineal elevado al cuadrado, es decir $\left(\frac{b}{2a}\right)^2$	$y=f(x)=a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\left(\frac{\boldsymbol{b}}{\boldsymbol{2a}}\right)^2-\left(\frac{\boldsymbol{b}}{\boldsymbol{2a}}\right)^2\right)+c$
3. Se extrae de la expresión entre paréntesis el término que está restando	$y=f(x)=a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\left(\frac{\boldsymbol{b}}{\boldsymbol{2a}}\right)^2\right)+c-a\left(\frac{\boldsymbol{b}}{\boldsymbol{2a}}\right)^2$ $\boxed{X^2}\ \boxed{2XY}\ \boxed{Y^2}=\boxed{(X+Y)^2}$
4. Se factoriza el trinomio cuadrado perfecto.	$y=f(x)=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+c-a\left(\frac{\boldsymbol{b}}{\boldsymbol{2a}}\right)^2$
5. Por abreviación se hace $h=-\frac{b}{2a}$ y $k=c-a\left(\frac{\boldsymbol{b}}{\boldsymbol{2a}}\right)^2$	$y=f(x)=a(x-h)^2+k$

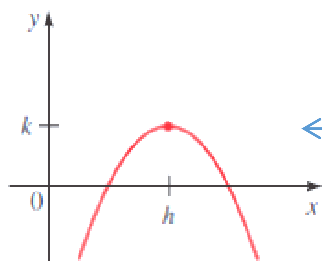
El vértice y la concavidad se relacionan para dar cuenta del punto máximo o del punto mínimo de la parábola, es decir que:

Si $a > 0$ la parábola es cóncava hacia arriba y tiene un punto mínimo en el vértice $(h\,,k)$



Punto mínimo: $(h\,,k)$

- Si $a < 0$ la parábola es cóncava hacia abajo y tiene un punto máximo en el vértice $(h\,,k)$



Punto máximo: $(h\,,k)$

Ejemplo

Dada la función $y = f(x) = 2x^2 - 3x + 1$ hallar el vértice y decidir si corresponde al punto máximo o al punto mínimo de la parábola.

Solución

Primero se halla $x = \frac{-b}{2a}$

Como la función es $y = f(x) = 2x^2 - 3x + 1$, donde $a = 2$ y $b = -3$ se tiene que $x = \frac{-b}{2a}$ toma el valor $x = \frac{3}{2(2)} = \frac{3}{4}$.

Luego, $x = \frac{-1}{2}$

Luego se halla $f\left(\frac{-b}{2a}\right)$

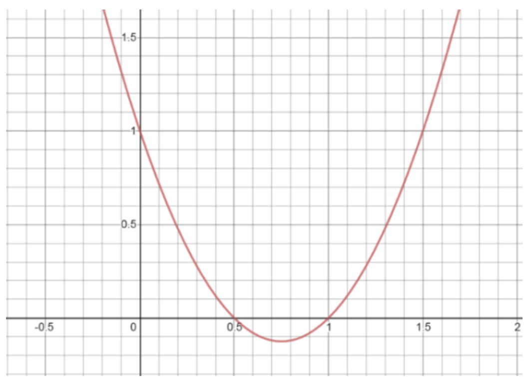
Como $y = f\left(\frac{-b}{2a}\right)$ quiere decir que se debe hallar $f\left(\frac{-b}{2a}\right)$, o lo que es lo mismo hallar la imagen de $\frac{-b}{2a}$.

Observe que: $f\left(\frac{-b}{2a}\right) = f\left(\frac{-1}{2}\right)$

Entonces $f\left(\frac{3}{4}\right) = 2\left(\frac{3}{4}\right)^2 - 3\left(\frac{3}{4}\right) + 1$

Al realizar las operaciones se obtiene $f\left(\frac{3}{4}\right) = \frac{-1}{8} \cong -0.125$ (verifique).

Como la forma general de las coordenadas del vértice de una parábola son $\left(\frac{-b}{2a}\ ,\ \ f\left(\frac{-b}{2a}\right)\right)$, entonces en este caso donde la parábola esta dada por la función $y = f(x) = x^2 + x + 2$ las coordenadas del vértice son: $\left(\frac{3}{4}\ ,\ \frac{-1}{8}\right)$ y se identifica en la figura siguiente.



En la gráfica se puede observar que la parábola es cóncava hacia arriba, de ahí que el vértice sea el punto mínimo de esta.

A continuación se presentan algunos ejemplos de lo planteado hasta el momento sobre la función cuadrática y su representación gráfica.

Ejemplo uno

Realizar un bosquejo de la gráfica de la función $y = f(x) = x^2 - 2$

Concavidad

En $y = f(x) = x^2 - 2$ se identifica que $a = 1$, por lo que la parábola es cóncava hacia arriba.

Punto de corte con el eje y

Para encontrar el punto de corte en con el eje y se toma la función dada $y = f(x) = x^2 - 2$ y se evalua $x = 0$, es decir:

$$y = f(0) = (0)^2 - 2$$

De donde se obtiene que $y = -2$.

Por lo tanto la parábola corta el eje y en el punto $(0\,,-2)$.

Puntos de corte con el eje x

Para encontrar los puntos de corte con el eje x se toma la función $y = f(x) = x^2 - 2$ y se hace $y = 0$, es decir:

$0 = x^2 - 2$ que es equivalente a $x^2 - 2 = 0$

Como se obtiene una ecuación cuadrática usando su discriminante indica que tiene dos soluciones reales (verifique).

Al resolver la ecuación cuadrática se obtiene que las soluciones son:

$\frac{\sqrt{8}}{2}$ ≅1.41 y $-\frac{\sqrt{8}}{2}$ ≅-1.41 (verifique)

Con las soluciones anteriores y teniendo en cuenta que se hizo $y = 0$, entonces los puntos de corte con el eje x son:

$\left(\frac{\sqrt{8}}{2}\,,\; 0\right)$ Y $\left(-\frac{\sqrt{8}}{2}\,,\; 0\right)$

Recuerde que:

Si una ecuación $ax^2 + bx + c = 0$ tiene por soluciones a x_1 y x_2 entonces la ecuación se factoriza así:

$$a(x - x_1)(x - x_2)$$

Según lo anterior, para la ecuación $x^2 - 2 = 0$ cuyas soluciones son $\frac{\sqrt{8}}{2}$ y $-\frac{\sqrt{8}}{2}$ se puede factorizar así:

$$1\left(x - \frac{\sqrt{8}}{2}\right)\left(x - \left(-\frac{\sqrt{8}}{2}\right)\right) = 0 \iff \left(x - \frac{\sqrt{8}}{2}\right)\left(x + \frac{\sqrt{8}}{2}\right) = 0$$

$$a\ (x - x_1)\quad (x - x_2)$$

Por tanto las ecuaciones $x^2 - 2 = 0$ y $\left(x - \frac{\sqrt{8}}{2}\right)\left(x + \frac{\sqrt{8}}{2}\right) = 0$ son equivalentes

Con esto la función $y = f(x) = x^2 - 2$ se escribe así:

$$y = f(x) = \left(x - \frac{\sqrt{8}}{2}\right)\left(x + \frac{\sqrt{8}}{2}\right)$$

Coordenadas del vértice de la parábola

Recuerde que, dada una función $y = f(x) = ax^2 + bx + c$ esta tiene el vértice en el punto $\left(\frac{-b}{2a}, f\left(\frac{-b}{2a}\right)\right)$.

Como la función es $y = f(x) = x^2 - 2$ entonces se tiene que:

$$\frac{-b}{2a} = \frac{0}{2(-2)} = 0$$

$$f\left(\frac{-b}{2a}\right) = f(0) = -2$$

En conclusión el vértice de la parábola es el punto $(0, -2)$.

Previamente se había mencionado que la parábola es cóncava hacia arriba, por lo tanto el vértice $(0, -2)$ resulta ser el punto mínimo de la parábola.

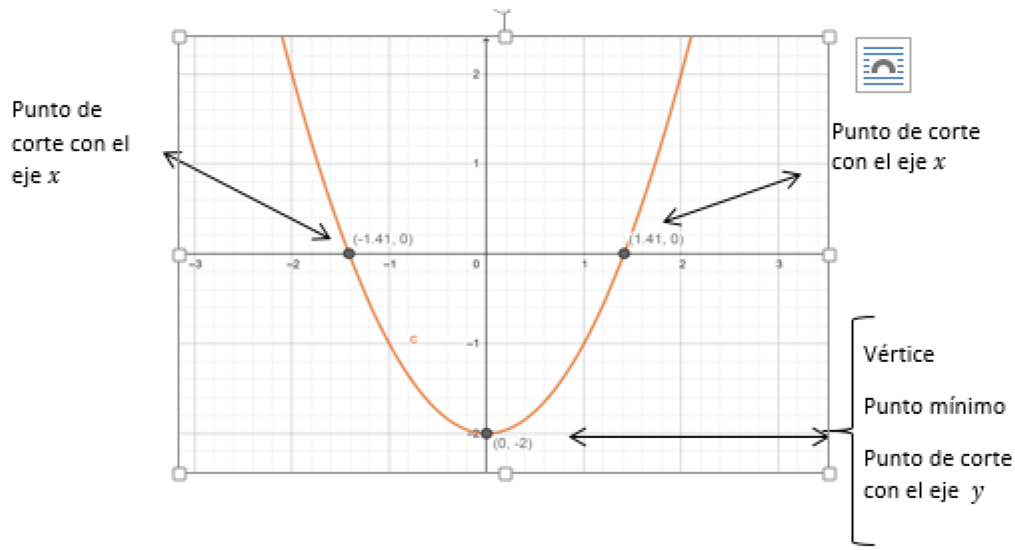
Dominio y rango de la función $y = f(x) = x^2 - 2$

Como se mencionó anteriormente el dominio de una función cuadrática es el conjunto de los números reales, es decir $Domf = \mathbb{R}$.

De igual forma se mencionó que el rango de una función cuadrática es el conjunto de valores de la variable y, y además que es un subconjunto de los números reales. Para encontrar el rango se tiene en cuenta lo siguiente:

Como la ordenada del punto mínimo es -2 y la parábola es cóncava hacia arriba, entonces el rango se escribe así: $[-2, +\infty)$ y significa que los valores numéricos que toma la variable y varían a partir de -2, y como no hay un último número se usa $+\infty$ que simboliza el infinito positivo.

Todo lo anterior, se identifica en la siguiente figura.



<u>Ejemplo dos</u>

Realizar un bosquejo de la gráfica de la función $y = f(x) = 2x^2 + 3x - 1$

Concavidad

En $y = f(x) = 2x^2 + 3x - 1$ se identifica que $a = 2$, por lo que la parábola es cóncava hacia arriba.

Punto de corte con el eje y

Para encontrar el punto de corte en con el eje y se toma la función dada $y = f(x) = 2x^2 + 3x - 1$ y se evalua $x = 0$, es decir:

$$y = f(0) = 2(0)^2 + 3(0) - 1$$

De donde se obtiene que $y = -1$.

Por lo tanto la parábola corta el eje y en el punto $(0\,, -1)$.

Puntos de corte con el eje x

Para encontrar los puntos de corte con el eje x se toma la función $y = f(x) = 2x^2 + 3x - 1$ y se hace $y = 0$, es decir:

$0 = 2x^2 + 3x - 1$ que es equivalente a $2x^2 + 3x - 1 = 0$

Como se obtiene una ecuación cuadrática su discriminante indica que tiene dos soluciones reales (verifique).

Al resolver la ecuación cuadrática se obtiene que las soluciones son:

$\frac{-3+\sqrt{17}}{4} \cong 0.28$ y $\frac{-3-\sqrt{17}}{4} \cong -1.78$ (verifique)

Con las soluciones anteriores y teniendo en cuenta que se hizo $y = 0$, entonces los puntos de corte con el eje x son:

$\left(\frac{-3+\sqrt{17}}{4}\,,\ 0\right)$ y $\left(\frac{-3-\sqrt{17}}{4}\,,\ 0\right)$

Además, con las soluciones $\frac{-3+\sqrt{17}}{4} \cong 0.28$ Y $\frac{-3+\sqrt{17}}{4} \cong -1.78$ la función $y = f(x) = 2x^2 + 3x - 1$ se puede factorizar aproximadamente así:

$$y = f(x) = 2(x - 0.28)(x + 1.78)$$

Coordenadas del vértice de la parábola

Recuerde que, dada una función $y = f(x) = ax^2 + bx + c$ esta tiene el vértice en el punto $\left(\frac{-b}{2a}\,,\ f\left(\frac{-b}{2a}\right)\right)$.

Como la función es $y = f(x) = 2x^2 + 3x - 1$entonces se tiene que:

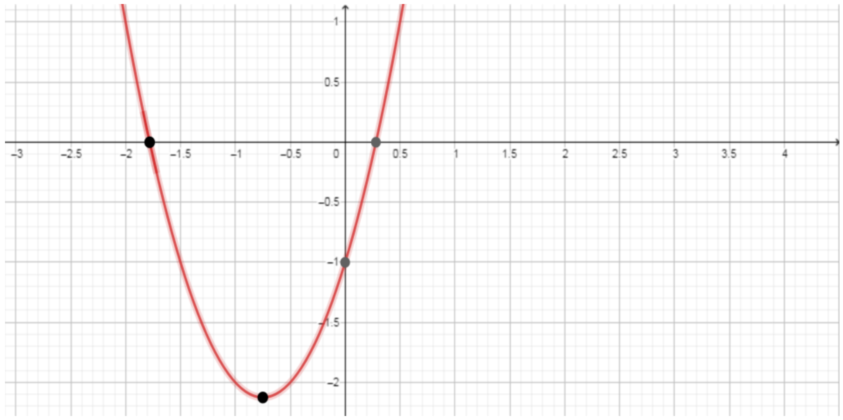
$$\frac{-b}{2a} = \frac{-3}{2(2)} = \frac{-3}{4}$$

$$f\left(\frac{-b}{2a}\right) = f\left(\frac{-3}{4}\right) = \frac{-43}{25}$$

En conclusión el vértice de la parábola es el punto $\left(\frac{-3}{4}\,,\ \frac{-43}{25}\right)$.

Previamente se había mencionado que la parábola es cóncava hacia arriba, por lo tanto el vértice $\left(\frac{-3}{4}\,,\ \frac{-43}{25}\right)$ resulta ser el punto mínimo de la parábola.

En la figura que sigue se muestra la representación gráfica de la función $y = f(x) = 2x^2 + 3x - 1$.



Actividad: Señale en la gráfica de la siguiente figura los elementos y las características encontradas.

Dominio y rango de la función $y = f(x) = 2x^2 + 3x - 1$

El dominio de la función cuadrática es el conjunto de los números reales, es decir $Domf = \mathbb{R}$.

El rango de la función se escribe así: $\left[-\frac{-43}{25}\ ,\ +\infty\right)$ y significa que los valores numéricos que toma la variable y varían a partir de $\frac{-43}{25}$, y como no hay un último número se usa $+\infty$ que simboliza el infinito positivo.

Ejemplo tres

Realizar un bosquejo de la gráfica de la función $y = f(x) = -8x^2 + 5x + 4$

- Concavidad

En $y = f(x) = -8x^2 + 5x + 4$ se identifica que $a = -8$, por lo que la parábola es cóncava hacia abajo.

Punto de corte con el eje y

Para encontrar el punto de corte en con el eje y se toma la función dada $y = f(x) = -8x^2 + 5x + 4$ y se evalua $x = 0$, es decir:

$$y = f(x) = -8(0)^2 + 5(0) + 4$$

De donde se obtiene que $y = 4$.

Por lo tanto la parábola corta el eje y en el punto $(0\ ,4)$.

- Puntos de corte con el eje x

Para encontrar los puntos de corte con el eje x se toma la función $y = f(x) = -8x^2 + 5x + 4$ y se hace $y = 0$, es decir:

$0 = -8x^2 + 5x + 4$ que es equivalente a $-8x^2 + 5x + 4$ =0

Como se obtiene una ecuación cuadrática su discriminante indica que tiene dos soluciones reales (verifique).

Al resolver la ecuación cuadrática se obtiene que las soluciones son:

$\frac{-5+\sqrt{3200}}{-16}$ ≅ -3.22 y $\frac{-5-\sqrt{3200}}{-16}$ ≅ -3.85 (verifique)

Con las soluciones anteriores y teniendo en cuenta que se hizo $y = 0$, entonces los puntos de corte con el eje x son:

$\left(\frac{-5+\sqrt{3200}}{-16}\ ,\ 0\right)$ y $\left(\frac{-5-\sqrt{3200}}{-16}\ ,\ 0\right)$

Actividad: Complete la siguiente frase.

Con las soluciones _______________ la función $y = f(x) = -8x^2 + 5x + 4$ se puede factorizar aproximadamente como __________________________

- Coordenadas del vértice de la parábola

Recuerde que, dada una función $y = f(x) = ax^2 + bx + c$ esta tiene el vértice en el punto $\left(\frac{-b}{2a}\ ,\ f\left(\frac{-b}{2a}\right)\right)$.

Como la función es $y = f(x) = -8x^2 + 5x + 4$entonces se tiene que:

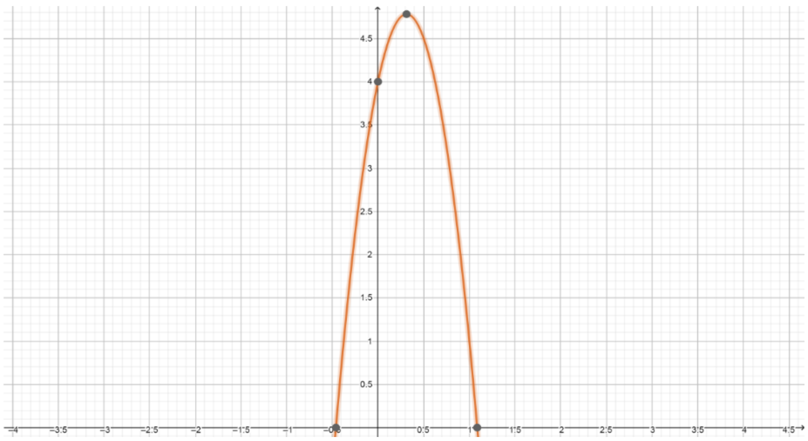
$$\frac{-b}{2a} = \frac{-5}{2(-8)} = \frac{-3}{-16} = \frac{3}{16}$$

$$f\left(\frac{3}{16}\right) = f\left(\frac{3}{16}\right) = \frac{149}{32}$$

En conclusión el vértice de la parábola es el punto $\left(\frac{3}{16}\ ,\ \frac{149}{32}\right)$.

Previamente se había mencionado que la parábola es cóncava hacia arriba, por lo tanto el vértice $\left(\frac{3}{16}\ ,\ \frac{149}{32}\right)$ resulta ser el punto máximo de la parábola.

En la figura que sigue se muestra la representación gráfica de la función $y = f(x) = -8x^2 + 5x + 4$.



Actividad: Señale en la gráfica de la figura los puntos de corte con los ejes x y y, y las coordenadas del vértice.

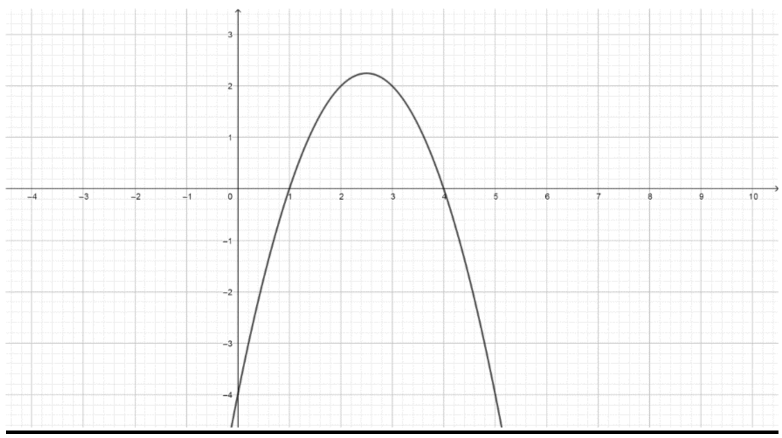
- Dominio y rango de la función $y = f(x) = -8x^2 + 5x + 4$

El dominio de la función cuadrática es el conjunto de los números reales, es decir $Domf = \mathbb{R}$.

El rango de la función se escribe así: $\left(-\infty, \frac{149}{32}\right]$ y significa que los valores numéricos que toma la variable y varían desde los reales negativos hasta $\frac{149}{32}$ (como no hay un último número en los reales negativos se usa $-\infty$ que simboliza el infinito negativo).

Ejercicios resueltos

Hallar la función que representa la siguiente gráfica.



Dado que la gráfica es una parábola entonces la función es de la forma $y = f(x) = ax^2 + bx + c$. A continuación se procede a hallar los valores de los parámetros a, b, c.

Observe que la gráfica tiene el punto de corte con el eje y en $(0\,,-4)$ de donde se tiene que $x = 0$ y $y = -4$. Al sustituir estos valores en la función $y = f(x) = ax^2 + bx + c$ se tiene lo siguiente:

$$-4 = f(0) = a(0)^2 + b(0) + c$$

Es decir que $c = -4$.

Observe también, que la gráfica tiene puntos de corte con el eje x en $(1\,,0)$ y en $(4\,,0)$. A continuación se sustituyen estos puntos en $y = f(x) = ax^2 + bx + c$.

Al sustituir el punto $(1\,,0)$ en $y = f(x) = ax^2 + bx + c$ se tiene que:

$$0 = f(1) = a(1)^2 + b(1) + c$$

Al resolver las operaciones se tiene $0 = a + b + c$ que es equivalente a:

$$\boxed{a + b + c = 0}$$

La expresión anterior es una ecuación con tres incógnitas.

Al sustituir el otro punto $(4\,,0)$ en $y = f(x) = ax^2 + bx + c$ se tiene lo siguiente:

$$0 = f(4) = a(4)^2 + b(4) + c$$

Al resolver las operaciones se tiene: $0 = 16a + 4b + c$ que es equivalente a:

$$\boxed{16a + 4b + c = 0}$$

En resumen se obtuvo el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} c = -4 \\ a + b + c = 0 \\ 16a + 4b + c = 0 \end{cases}$$

Como $c = 0$ entonces se tienen las siguientes ecuaciones:

$$\begin{cases} a + b - 4 = 0 \\ 16a + 4b - 4 = 0 \end{cases}$$

Al resolver las ecuaciones se tiene que $a = -1$ y $b = 5$. (Verifique)

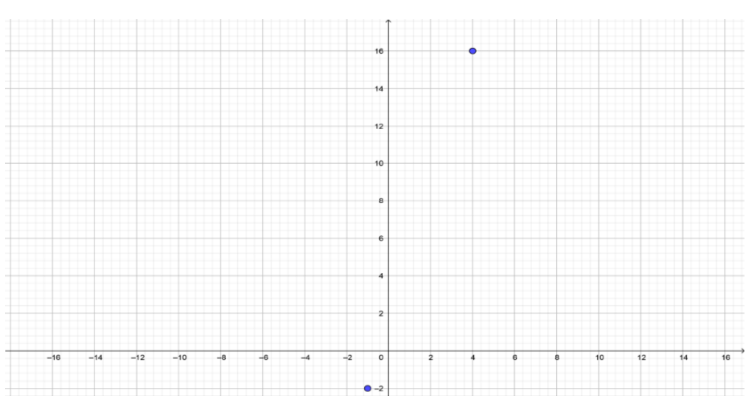
Al reemplazar los parámetros obtenidos $a = -1$ y $b = 5$ y $c = -4$ en la función $y = f(x) = ax^2 + bx + c$ se tiene:

$y = f(x) = -1x^2 + 5x - 4$ que es equivalente a $y = f(x) = -x^2 + 5x - 4$

Actividad: Para verificar que la función $y = f(x) = -x^2 + 5x - 4$ representa la gráfica dada, use los puntos de corte con los ejes $(0\,,-4)$ $(1\,,0)$ $(4\,,0)$ y cerciórese que satisfagan la función. Además, encuentre el vértice de la parábola, el dominio y el rango de la función.

2. Encontrar la función cuya grafica es una parábola con vértice en $(-1\,,-2)$ y pasa por el punto $(4\,,16)$.

Al ubicar los puntos dados en el plano cartesiano se tiene lo siguiente:



Teniendo en cuenta que el punto $(-1,-2)$ es el vértice de la parábola una los puntos en la gráfica anterior.

Según lo anterior y dado que, la función que se busca es de la forma $y = f(x) = ax^2 + bx + c$, indique si $a > 0$ o $a < 0$. Justifique ____

A continuación, se emplean los puntos $(-1,-2)$ y $(4,16)$ para obtener ecuaciones y hallar los valores de los parámetros.

Para el punto $(-1,-2)$ se tiene la ecuación $-2 = a - b + c$ Verifique.

Para el punto $(4,16)$ se tiene la ecuación $16 = 16a + 4b + c$ Verifique.

Además, se usa el hecho de que el punto $(-1,-2)$ es el vértice de la parábola. Para ello, recuerde que el vértice de una parábola tiene la forma $\left(\frac{-b}{2a}, f\left(\frac{-b}{2a}\right)\right)$. Es decir que

$-1 = \frac{-b}{2a}$ lo cual es equivalente a la ecuación $b = 2a$

En conclusión se obtienen las siguientes ecuaciones:

$$\begin{cases} -2 = a - b + c \\ 16 = 16a + 4b + c \end{cases}$$

Al utilizar que $b = 2a$ se obtienen las siguientes ecuaciones:

$$\begin{cases} -2 = -a + c \\ 16 = 24a + c \end{cases}$$

Al resolver el sistema de ecuaciones se tiene que los parámetros de la función son:

$a = \frac{18}{25}$; $b = \frac{36}{25}$; $c = -\frac{32}{25}$

En conclusión la función se obtiene la función $y = f(x) = \frac{18}{25}x^2 + \frac{36}{25}x - \frac{32}{25}$

Ahora verifique que $y = f(x) = \frac{18}{23}x^2 + \frac{36}{23}x - \frac{28}{23}$ representa la parábola cuyo vértice es $(-1,-2)$ y que pasa por el punto es $(4,16)$.

Actividad: utilice la función para realizar una tabla de valores y así graficar la otra parte de la parábola. Además halle el dominio y el rango.

Ejercicios propuestos

Dada la siguiente tabla de valores ubicar los puntos en un plano cartesiano, luego, unir los puntos y encontrar la función. Además, halle el vértice y los puntos de corte con los ejes e indique si hay punto máximo o mínimo; señale lo anterior en la gráfica.

x	0	1	2	3	4	-1	-2
$f(x)$	9	7	7	9	13	13	19

Para el ejercicio anterior se puede utilizar Excel, el cual permite hallar la gráfica y encontrar la expresión algebraica.

En un solo plano cartesiano construya las graficas $y = f(x) = 2x^2$; $y = f(x) = 5x^2$ $y = f(x) = 8x^2$ ¿cómo es el comportamiento de estas graficas?

En un solo plano cartesiano construya las graficas $y = f(x) = -3x^2$; $y = f(x) = -6x^2$ $y = f(x) = -10x^2$ ¿cómo es el comportamiento de estas graficas?

En un solo plano cartesiano construya las graficas $y = f(x) = \frac{1}{4}x^2$ y $y = f(x) = \frac{1}{10}x^2$ ¿cómo es el comportamiento de estas graficas?

De acuerdo a sus conclusiones en los numerales 3-5 complete los siguientes enunciados:

Si $a > 0$ la curva abre hacia _________ es decir que es cóncava hacia ________

En esta misma condición, si a toma valores positivos muy grandes la gráfica se acerca más al eje____; y si a toma valores positivos cercanos a cero la gráfica se acerca más al eje________

Si $a < 0$ la curva abre hacia _________ es decir que es cóncava hacia ________

En esta misma condición, si a toma valores cada vez más negativos la gráfica se acerca más al eje____; y si a toma valores negativos cercanos a cero la gráfica se acerca más al eje________

En un solo plano cartesiano construya las graficas $y = f(x) = x^2 + 1$; $y = f(x) = x^2 + 2$ $y = f(x) = -x^2 + 4$ ¿cómo es el comportamiento de estas graficas?

En un solo plano cartesiano construya las graficas $y = f(x) = -x^2 - 3$; $y = f(x) = -x^2 - 5$ $y = f(x) = x^2 - 7$¿cómo es el comportamiento de estas graficas?

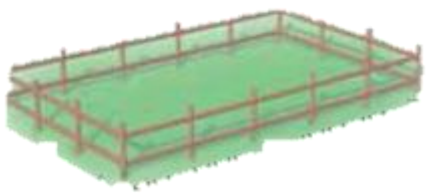
De acuerdo a sus conclusiones en los numerales 7-8 complete los siguientes enunciados:

Si $c > 0$ la curva se desplaza c unidades hacia _________

Si $c < 0$ la curva se desplaza c unidades hacia _________

Aplicaciones funciones cuadráticas

1. Pablo es un agricultor que tiene 2400 pies de alambre para cercar un corral rectangular para vacas.



Encuentre una función que modele el área del corral en términos del ancho del mismo ¿Cuáles deben ser las dimensiones del corral para obtener el área máxima?

Solución

Primero llámese x al ancho y y al largo del corral.

Recuerde que el perímetro de una figura rectangular es la suma de todos sus lados.

Como Pablo tiene 2400 pies de alambre para cercar, entonces el perímetro del corral es:

$$x + x + y + y = 2400$$

Lo cual es equivalente a:

$$2x + 2y = 2400$$

La expresión anterior en términos del ancho x queda así:

$y = \frac{2400-2x}{2}$ (Justifique)

Al resolver las operaciones se obtiene:

$$y = 1200 - x$$

Por lo tanto las dimensiones del corral son:

Ancho: x

Largo: $y = 1200 - x$

A continuación se encuentra el área A de la figura rectangular

El área del corral rectangular es:

$$Area = \ largo \ \times ancho$$

$$A = (1200 - x)\,(x)$$

Es decir $$A = 1200x - x^2$$

Para dar respuesta al ítem a note que la expresión $A = 1200x - x^2$ está en términos del ancho x, de aquí, que la función que modela el área del corral es:

$A(x) = 1200x - x^2$ ¿Qué tipo de función es?

Observe que en la función anterior ________depende de _______.

A continuación se dan algunos valores al ancho del corral para encontrar su área correspondiente.

Si $x = 50\, pies$ entonces el área del corral es $A(50) = 57500\, pies^2$

Si $x = 80\, pies$ entonces el área del corral es $A(80) =$ ______ $pies^2$

Si $x = 100\, pies$ entonces el área del corral es $A(100) = 110000\, pies^2$

Si $x = 200\, pies$ entonces el área del corral es $A(200) = 200000\, pies^2$

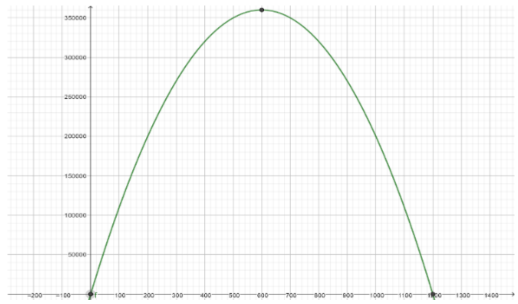
Si $x = 1000\, pies$ entonces el área del corral es $A(1000) =$ ________

Si $x = 1200\, pies$ entonces el área del corral es $A(1200) =$ ________

¿Qué se puede concluir a partir de los valores que se dieron al ancho x y el área correspondiente encontrada?

¿Puede dar una aproximación del valor de las dimensiones para que el corral tenga el área máxima?

Para encontrar las dimensiones del corral que permiten obtener el área máxima primero se debe presentar la gráfica de la función $A(x) = 1200x - x^2$ la cual se muestra en la siguiente figura.



Dado que la parábola es cóncava hacia _____ entonces su vértice corresponde al punto _______________de la parábola. De aquí se tiene que el vértice proporciona el valor que debe tener del ancho del coral para obtener el área máxima.

Observe que gráficamente no se puede identificar el vértice de la parábola, por ello se debe tomar la función $A(x) = 1200x - x^2$ y llevarla a la forma canónica.

Actividad: verifique que la forma canónica de la función $A(x) = 1200x - x^2$ es:

$$A(x) = -(x - 600^2) - (360000)$$

Por lo tanto el vértice de la parábola es $(600\ ,\ 36000)$, lo cual quiere decir que si el ancho x del corral es de $600\,pies$ entonces el área máxima del corral será de $36000pies^2$.

Si sabe que el ancho del corral es de 600 entonces ¿cuál será el largo del corral? Utilice la expresión $y = \frac{2400-2x}{2}$.

Actividad: Compruebe que con las dimensiones del ancho y del largo se obtiene un área de $36000pies^2$.

La función de demanda para una compañía que fabrica computadores es $p = 2500 - 5q$, donde p es el precio en dólares cuando el comprador demanda q unidades semanales. A partir de esto encontrar la cantidad de computadores que puede maximizar el ingreso del fabricante.

Para maximizar el ingreso se debe encontrar la función de ingreso $i = f(q)$, es decir una función expresada únicamente en términos de q, por tal razón se utilizará la ecuación de demanda $p = 2500 - 5q$

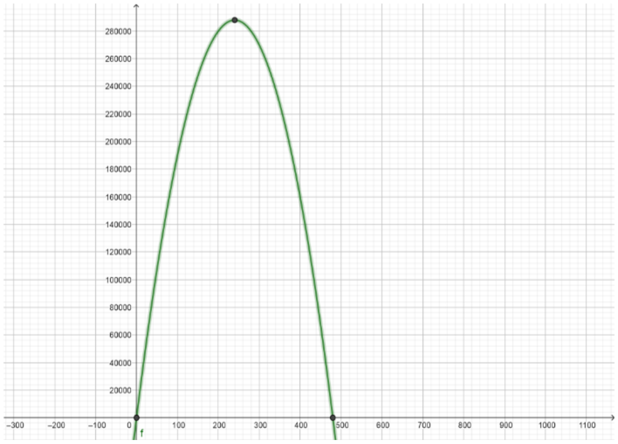
Recuerde que $ingreso = precio\ \times cantidad$, es decir $i = p \times q$

Según lo anterior entonces $i = (2500 - 5q) \times q$

Por lo tanto la función se ingreso es $i = f(q) = 2500q - 5q^2$.

La función obtenida es__________ cuya representación gráfica es una ________ que es cóncava hacia_______ porque _________.

Como la parábola es cóncava hacia______ entonces su punto máximo está en el____________. Esto se puede identificar en la siguiente figura.



Para encontrar la cantidad de computadores que puede maximizar el ingreso del fabricante se debe encontrar el vértice, y para ello usted debe encontrar la forma canónica de la función $i = f(q) = 2500q - 5q^2$.

Actividad: verifique que las coordenadas del vértice de la función son aproximadamente $(240\,,288000)$. Esto quiere decir que si la fábrica de computadores tiene una producción aproximada de240 computadores entonces el ingreso máximo que puede recibir será se $288000\ dolares$.

En un lanzamiento de arco Andrés dispara una flecha hacia arriba con una velocidad inicial de $90\ \frac{pies}{seg}$. La altura h y el tiempo t después del lanzamiento se relacionan con la función $h(t) = -16t^2 + 80t$+35. ¿Cuál es la altura máxima que alcanza la flecha? ¿Cuánto Tarda la flecha en alcanzar la altura encontrada?

Anexo 10. Actividad de modelación de la fase 2.

Primera actividad: caída libre de un cuerpo

Práctica realizada por la docente.

Situación: Un objeto se deja caer desde 3,7 metros de altura

Análisis: Determinar la variación de la altura del objeto a medida que pasa tiempo.

Se realizó la práctica experimental para registrar el tiempo que tarda el objeto en variar la altura en intervalos iguales de tiempo. Para ello, se utilizó, una cámara de celular, un computador, un cronometro, una piedra, un flexómetro, y además, se requirieron de dos personas: un lanzador y un visualizador. Las instrucciones que se siguieron fueron las siguientes:

Primero, se buscó una casa de dos plantas, luego se midió los 3,7 metros de altura en la pared exterior de la casa, y en ella se adhirió un flexómetro.

Después, el lanzador se ubicó a los 3,7 metros de altura para tirar la piedra, mientras que, el visualizador grababa la caída del objeto. Enseguida, se reprodujo el video desde el computador, y simultáneamente, se tenía el cronometro para tratar de determinar la altura aproximada que toma la piedra a los 0,2 seg; para este tiempo el video se repite 5 veces y al final se halla el promedio de las alturas. Este procedimiento se realiza para 0.4 seg, 0,6 seg, 0,8 seg y 1 seg.

Los promedios obtenidos se registraron en una tabla como la siguiente.

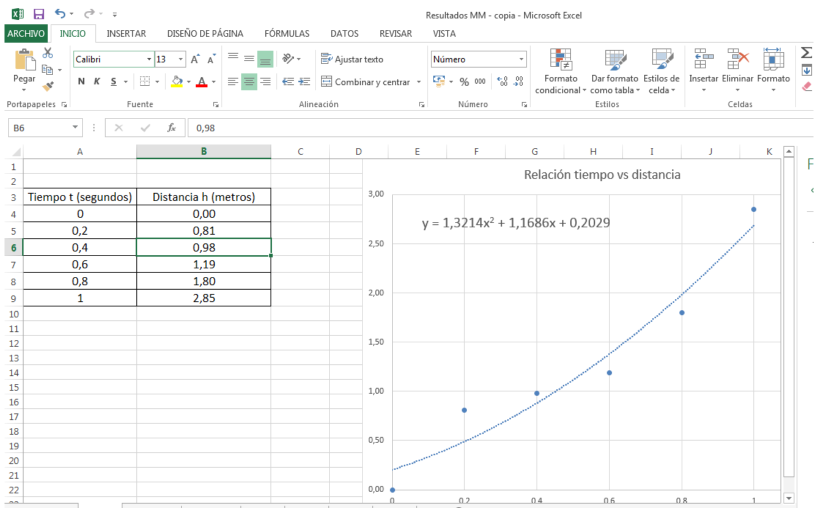
t $(segundos)$	0	0.2	0.4	0.6	0.8	1
h $(metros)$	0	0.81	0.98	1.19	1.80	2.85
$Parejas\ ordenadas\ (t,h$	(0,0)	(0.2,0.81)	(0.4 , 0.98	(0.6 , 1.19)	(0.8 , 1.80)	(1 , 2.85)

Se identifica que las variables son:

La variable independiente es el tiempo t.

La variable dependiente es la altura h.

Se siguieron las instrucciones dadas en el anexo 4 para ubicar las parejas ordenadas en el plano cartesiano y para encontrar el tipo de gráfica. Con esto se obtuvo lo siguiente:



También se encontró la expresión algebraica de la curva anterior era:

$$y = 1{,}3214x^2 + 1{,}1686x + 0{,}2029$$

Se debe tener en cuenta que en el eje horizontal se ubicó el tiempo t y en el eje vertical la altura h. Por ello en la ecuación $y = 1{,}3214x^2 + 1{,}1686x + 0{,}2029$ se debe realizar los siguientes cambios:

La variable x se cambia por la variable t.

La variable y se cambia por la variable h.

Con los cambios anteriores se obtiene la siguiente ecuación:

$y = 1{,}3214x^2 + 1{,}1686x + 0{,}2029$.

En conclusión, la función que describe la variación del desplazamiento del objeto en caída libre se puede escribir como:

$y = 1{,}3214x^2 + 1{,}1686x + 0{,}2029$.

Esta función recibe el nombre de *modelo cuadrático*, el cual describe la situación del objeto en caída libre.

.Prueba del modelo cuadrático encontrado

Para comprobar que el modelo cuadrático es coherente con los datos obtenidos en la experiencia realizada, se procede a reemplazar en la función $h(t) = 1{,}3214x^2 + 1{,}1686x + 0{,}2029$. los valores del tiempo $t = 0$; $t = 0{,}4$; $t = 0{,}6$; $t = 0{,}8$; $t = 1$

$$h(0) = 1{,}3214(0)^2 + 1{,}1686(0) + 0{,}2029 = 0{,}20$$

$$h(0{,}4) = 1{,}3214(0{,}4)^2 + 1{,}1686(0{,}4) + 0{,}2029 = 0{,}88$$

$$h(0{,}6) = 1{,}3214(0{,}6)^2 + 1{,}1686(0{,}6) + 0{,}2029 = 1{,}37$$

$$h(1) = 1{,}3214(1)^2 + 1{,}1686(1) + 0{,}2029 = 2{,}69$$

Al reemplazar cada uno de los tiempos, se obtiene que las alturas son muy aproximadas a los datos obtenidos en la experiencia. Por lo tanto el modelo matemático $h(t) = 1{,}3214x^2 + 1{,}1686x + 0{,}2029$ puede representar la situación.

Práctica experimental que deben realizar los estudiantes para comprobar el modelo cuadrático obtenido

Materiales: Cronómetro- flexómetro -lápiz-una piedra pequeña-computador-cámara de celular.

Participantes: Grupos de dos estudiantes.

Experimentación:

Conformar grupos de dos personas. El estudiante que lanzará la piedra se ubicará en la parte superior, y el otro se ubicará en la parte inferior para grabar la caída de la piedra.

Enseguida, se reproduce el video desde el computador, y simultáneamente, se utiliza el cronometro para tratar de determinar la altura aproximada que toma la piedra a los 0,2 seg; para este tiempo el video debe repetirse 5 veces y al final se halla el promedio de las alturas. Este procedimiento se realiza para 0,4 seg, 0,6 seg, 0,8 seg y 1 seg

Los datos deben registrarse en las siguientes tablas. También se deberá calcular y registrar el promedio de las cinco alturas.

Tiempo	$t = 0$	$t = 0{,}2$	$t = 0{,}4$	$t = 0{,}6$	$t = 0{,}8$	$t = 1$
Primer dato						
Segundo dato						
Tercer dato						
Cuarto dato						
Quinto dato						
Promedio Altura						

Los promedios de las alturas encontradas en el paso anterior se deben registrar en la siguiente tabla.

$t\ (segundos)$	0	0.2	0.4	0.6	0.8	1
$h\ (metros)$						
$Parejas\ ordenadas\ (t, h)$						

Para encontrar la representación gráfica y su correspondiente expresión algebraica, se siguen las instrucciones dadas en el anexo 4.

Para comprobar el modelo encontrado proceda a reemplazar en la función $t = 0{,}4$; $t = 0{,}6$; $t = 0{,}8$; $t = 1$.

NOTA: En esta parte las alturas de cada tiempo deben ser aproximadas con los datos obtenidos en la experimentación.

Utilice el modelo cuadrático para responder: ¿qué altura alcanzó al cabo de 0.5 seg y 0,9 seg? ¿Cuánto tardó el objeto en alcanzar una altura de 1 metro, 2 metros, y 3 metros?

Anexo 11. Actividad modelación fase 3

Segunda actividad

Un almacén agropecuario ubicado en la cabecera del municipio de Morales ofrece entre sus productos los denominados pollos blancos de engorde. Juan, quien es el administrador de dicho establecimiento mensualmente lleva un registro de la información de ingreso de los pollos y la información de la venta. La información de ingreso se observa en la tabla 1, la cual contiene la cantidad de pollos que se recibe de la distribuidora avícola, el costo de compra por unidad y el costo total; mientras que la información de las ventas se observa en la tabla 2, la cual contiene la cantidad diaria vendida, el precio de venta por unidad, la venta total y los ingresos totales. Esto se muestra en las siguientes tablas.

Fecha de ingreso	Cant. ingresada	Costo unitario $	Costo total $
10/01/2019	50	3400	170000
19/01/2019	80	3400	272000
22/01/2019	70	3700	259000
24/01/2019	50	3600	180000
29/01/2019	50	3500	175000
30/01/2019	50	3700	185000
05/02/2019	70	3400	238000
12/02/2019	100	3400	340000
19/02/2019	80	3300	264000
23/02/2019	50	3300	165000
26/02/2019	60	3500	210000

Tabla 1. Información de ingreso de los pollos

Fecha de ingreso	Fecha venta	Cantidad q	Precio unitario p	Venta total	Ingreso total
10/01/2019	10-ene	27	4000	108000	202300
	11-ene	23	4100	94300	
19/01/2019	19-ene	46	4000	184000	324900
	20-ene	19	4100	77900	
	21-ene	15	4200	63000	
22/01/2019	22-ene	44	4300	189200	303600
	23-ene	26	4400	114400	
24/01/2019	24-ene	30	4200	126000	212000
	25-ene	20	4300	86000	
29/01/2019	29-ene	50	4100	205000	205000
30/01/2019	30-ene	42	4300	180600	215800
	31-ene	8	4400	35200	
05/02/2019	05-feb	38	4000	152000	283200
	06-feb	32	4100	131200	
12/02/2019	12-feb	40	4000	160000	408800
	13-feb	32	4100	131200	
	14-feb	28	4200	117600	
19/02/2019	19-feb	36	3900	140400	318100
	20-feb	27	4000	108000	
	21-feb	17	4100	69700	
23/02/2019	23-feb	29	3900	113100	197100
	24-feb	21	4000	84000	
26/02/2019	26-feb	38	4100	155800	248200
	27-feb	22	4200	92400	

Tabla 2. Información de venta

Utilice la información anterior para encontrar una expresión con la cual se pueda predecir el precio al cual se ganaría más dinero.

Anexo 12. Prueba de verificación.

1. Resolver las siguientes ecuaciones.
   a. $-\frac{2}{x} - x = -3$

   b. $\sqrt{x+2} = x$

2. Determine el vértice, los puntos de corte con los ejes (si los hay), y haga un bosquejo de la gráfica en cada caso.

   a. $y = f(x) = -x^2 + x + 1$ b. $y = f(x) = 3x^2 + 4$

3. La parábola de la función $y = f(x) = 1 - 6x - x^2$, pasa por el punto:
   a. $(0\,,0)$ b. $(-1\,,6)$ c. $(6\,,-1)$

4. Mario es el presidente de una asociación de piscicultores, y desde el mes de abril al mes de julio ha registrado la siguiente información.

Precio de venta p	Cantidad vendida $q(libras)$
15000	500
13250	550
12000	2220
10000	3000

A partir de la información anterior determinar lo siguiente:

a. Utilice la hoja de cálculo de Excel para encontrar la relación lineal entre el precio p y la cantidad vendida q. Que puede inferir del comportamiento de los datos.
b. Utilice la expresión del ítem (a) para responder lo siguiente. Si el precio de venta fuera de $11000 ¿Cuántas libras estaría vendiendo Mario? Si se vendieran 2000 libras ¿Cuál sería el precio de venta?
c. Determine la función de ingreso.
d. Cuál es el ingreso correspondiente a 5000 libras.
e. Cuál debe ser el nivel de producción de peces para lograr maximizar el ingreso total. De acuerdo a esta cantidad, determine el ingreso correspondiente.