SOLUCIONES NO TRIVIALES PARA UN PROBLEMA DE DIRICHLET SEMILINEAL CON MÚLTIPLES VALORES PROPIOS NO LINEALES

WILSON RIVERA LOZANO

UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA
FACULTAD DE CIENCIAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS
Bogotá D.C., COLOMBIA
2011

SOLUCIONES NO TRIVIALES PARA UN PROBLEMA DE DIRICHLET SEMILINEAL CON MÚLTIPLES VALORES PROPIOS NO LINEALES

WILSON RIVERA LOZANO

Trabajo de grado presentado para optar al título de Maestría en Scienteae Matemáticas

Director
Ph. D. JOSÉ FRANCISCO CAICEDO CONTRERAS

UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA
FACULTAD DE CIENCIAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS
Bogotá D.C., COLOMBIA
2011

Dedicatoria

A la memoria de mi padre,
Henry Rivera Alvarez.

Agradecimentos

A Dios por permitirme culminar con éxito mi carrera profesional en MAGISTER SCIENTEAE MATEMÁTICAS y superar esta etapa de mi vida.

Al Profesor José Francisco Caícedo por aceptar dirigir este trabajo, por su dedicación incondicional, sus consejos y sobre todo por sus valiosos aportes.

A mi esposa Mireya García, por estar a mi lado, por apoyarme durante todo este tiempo, sus valiosos aporte, el amor y dedicación hacia mi.

Resumen

En este trabajo se demuestra que el problema elíptico semilineal tiene por lo menos tres soluciones no triviales. Una de estas es positiva, otra negativa y la tercera cambia de signo. La demostración se hace mediante el uso del Teorema de Paso de Montaña y el índice de Morse.

Palabras claves: Ecuación elíptica semilineal, cambio de signo de las soluciones, Índice de Morse.

Abstract

In this paper prove that a semilinear elliptic boundary value problem has at least three nontrivial solutions when the range of the derivate of th nonlinearity includes at least the first two eigenvalues of the Laplacian and all solutions ar nondegenerate. A pair are of one sign (positive and negative, respectively). The one sign solution has Morse index greater than or equal to 2. Extensive use is made of the mountain pass theorem, and Morse index arguments of the type Lazer-Solimini (see [LS]).

Keywords: Semilinear elliptic equation, on-sign solutions, Morse index.

Tabla de Contenido

Introducción

Encontrar las soluciones no triviales para un problema de Dirichlet de tipo elíptico ha sido un problema fundamental de la física-matemática en especial para los no lineales, donde la teoría clásica ya no funciona. Más precisamente, en este trabajo se estudiara la existencia de soluciones múltiples para el siguiente problema de Dirichlet si Ω es un abierto acotado de $\mathbb{R}^N (N \geq 3)$ con frontera suave, $\Delta = \sum\limits_{i=1}^{N} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$ el operador de laplace

$$\begin{cases} \Delta u + f(u) = 0, & \text{en} \quad \Omega \\ u = 0, & \text{en} \quad \partial\Omega \end{cases} \tag{1}$$

Siendo la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función diferenciable tal que $f(0) = 0$ y f es asintóticamente lineal, y

$$\exists f'(\infty) := \lim_{|t| \to \infty} \frac{f(t)}{t} \in \mathbb{R}$$

Consideramos la sucesión de autovalores de $(-\Delta)$, $\quad 0 < \lambda_1 < \lambda_2 \leqslant \ldots \leqslant \lambda_k \ldots$ con condición cero en la frontera de Ω y la sucesión de funciones propias asociadas a cada autovalor $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_k, \ldots$; se plantea la existencia de tres soluciones no triviales a un problema elíptico seminileal (problema 1), cuando el rango de la derivada de la no linealidad incluye al menos los dos primeros valores propios. En este trabajo se estudia la existencia de las soluciones al problema (1) con las condiciones dadas, llevándose a cabo dicho estudio en tres partes, en el primer capítulo se estudiaran algunos conceptos básicos de los espacios L^p, los espacios de Sobolev, operadores compactos, Grado de Brouwer, índice local y grado de Leray-Schauder, entre otros. En el segundo capítulo se hace un estudio de las soluciones débiles de un problema de Dirichlet con condición en la frontera tanto de tipo no homogéneo como homogéneo, haciendo uso del Teorema de paso de montaña, también se muestra que el problema (1) tiene dos soluciones débiles clásicas, que no cambian de signo, una positiva, negativa y la existencia de otra solución que cambia de signo.

CAPÍTULO 1

PRELIMINARES

1.1. Espacios de Banach

Definición 1.1. Un espacio normado $(E, \| \ \|)$ se dice un espacio de Banach, si como espacio métrico con la métrica inducida por la norma es completo, es decir, es un espacio en el cual toda sucesión de Cauchy es convergente.

Definición 1.2. Sea $A \subset E$ y $B \subset E$. Se dice que el hiperplano H de ecuación $[f = \alpha]$ separa A y B en sentido amplio si se verifica

$$f(x) \leq \alpha \ \forall x \in A \text{ y } f(x) \geq \alpha \ \forall x \in B$$

Definición 1.3. Sean E y F dos espacios de Banach. Se llama operador lineal no acotado de E en F a toda aplicación lineal $T : D(T) \subset E \longrightarrow F$ definida sobre un subespacio vectorial $D(T) \subset E$ con valores en F. $D(T)$ es el dominio de T.

Se dice que T es acotado si existe una constante $c \geq 0$ tal que

$$\| Tu \| \leq c \| u \| \qquad \forall u \in D(T),$$

Sea E un espacio de Banach, E' su espacio dual y sea $f \in E'$. Se designa por $\varphi_f : E \longrightarrow \mathbb{R}$ la aplicación dada por $\varphi_f(x) = f(x)$. Cuando f recorre E' se obtiene una familia $(\varphi_f)_{f \in E'}$ de aplicaciones lineales continuas de E en $\mathbb{R}$.

Definición 1.4. La topología débil $\sigma(E, E')$ sobre E es la topología menos fina sobre E que hace continuas a todas las aplicaciones $(\varphi_f)_{f \in E'}$.

Tomado de [Br], Capítulo 1 al 3.

1.2. Los espacios L^p

En lo que sigue, Ω designa un abierto de $\mathbb{R}^n$ dotado de la medida de Lebesgue dx. Se supone que el lector está familiarizado con las nociones de **función integrable, función medible y conjunto de medida cero**; ver por ejemplo [Bt]. Se designa por $L^1(\Omega)$ el espacio de la funciones integrables sobre Ω con valores de $\mathbb{R}$. Se escribe,

$$\|f\| = \int_{\Omega} |f(x)| dx.$$

Cuando no hay ambigüedad, se escribe L^1 en lugar de $L^1(\Omega)$ y $\int f$ en lugar de $\int_{\Omega} |f(x)| dx$. Como es habitual, se identifican dos funciones de L^1 que coinciden c.t.p. = para casi todo punto (= excepto en un conjunto de medida nula).

Ahora, me permito presentar algunos resultados de integración.

Teorema 1.1 (Teorema de la convergencia monótona de Beppo Levi)**.** Sea (f_n) una sucesión creciente de funciones de L^1 tal que

$$\sup_n \int f_n < \infty$$

entonces $f_n(x)$ converge para casi todo punto en Ω a un límite finito denotado por $f(x)$; además $f \in L^1$ y $\| f_n - f\|_{L^1} \longrightarrow 0$.

Teorema 1.2 (Teorema de la convergencia dominada de Lebesgue)**.** Sea (f_n) una sucesión de funciones de L^1. Supongamos que

a) $f_n(x) \longrightarrow f(x)$ c.t.p. en Ω.

b) Existe una función $g \in L^1$ tal que para cada n, $|f_n(x)| \leq g(x)$ c.t.p. en Ω.

Entonces $f \in L^1(\Omega)$ y $\| f_n - f \|_{L^1} \longrightarrow 0$.

Lema 1.3 (Lema de Fatou)**.** Sea (f_n) una sucesión de funciones de L^1 tal que

(1) Para cada n, $f_n(x) \geq 0$ c.t.p. en Ω.

(2) $\sup_n \int f_n < \infty$.

Para cada $x \in \Omega$ se pone $f(x) = \operatorname{lím}_{n\to\infty} \operatorname{ínf} f_n(x)$. Entonces $f \in L^1(\Omega)$ y

$$\int f \leq \operatorname*{lím\,ínf}_{n\to\infty} \int f_n.$$

Notación 1.1. Se designa por $C_c(\Omega)$ el espacio de las **funciones continuas** en Ω y con **soporte compacto**, es decir, $C_c(\Omega) = \{f \in C(\Omega); f(x) = 0 \; \forall x \in \Omega - K$ donde $K \subset \Omega$ es un compacto$\}$.

Teorema 1.4 (Teorema de densidad)**.** El espacio $C_c(\Omega)$ es denso en $L^1(\Omega)$, es decir:

$$\forall f \in L^1(\Omega) \text{ y } \forall \epsilon > 0 \text{ se tiene que } \exists f_1 \in C_c(\Omega) \text{ tal que } \|f - f_1\|_{L^1} < \epsilon.$$

Sean $\Omega_1 \subset \mathbb{R}^n$, $\Omega_2 \subset \mathbb{R}^m$ abiertos y $F : \Omega_1 \times \Omega_2 \longrightarrow \mathbb{R}$ una función medible.

Teorema 1.5 (Tonelli)**.** Supongamos que

$$\int_{\Omega_2} |F(x,y)| dy < \infty \text{ para casi todo } x \in \Omega_1$$

y que

$$\int_{\Omega_1} dx \int_{\Omega_2} |F(x,y)| dy < \infty.$$

Entonces $F \in L^1(\Omega_1 \times \Omega_2)$.

Teorema 1.6 (Fubini)**.** Supongamos que $F \in L^1(\Omega_1 \times \Omega_2)$. Entonces para casi todo $x \in \Omega_1$

$$F(x,y) \in L^1_y(\Omega_2), \text{ y } \int_{\Omega_2} F(x,y)dy \in L^1_x(\Omega_1),$$

igualmente, para casi todo $y \in \Omega_2$

$$F(x,y) \in L^1_x(\Omega_1), \text{ y } \int_{\Omega_1} F(x,y)dx \in L^1_y(\Omega_2).$$

Además se verifica que

$$\int_{\Omega_1} dx \int_{\Omega_2} F(x,y)dy = \int_{\Omega_2} dy \int_{\Omega_1} F(x,y)dx = \iint_{\Omega_1 \times \Omega_2} F(x,y)dxdy$$

A continuación se presentan algunas definiciones y propiedades elementales de los espacios L^p.

Definición 1.5. Sea $p \in \mathbb{R}$ con $1 \leq p < \infty$, se define

$$L^p(\Omega) = \{f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}, f \text{ medible y } |f|^p \in L^1(\Omega)\}$$

y se nota

$$\| f \|_{L^p} = \left[\int_\Omega |f(x)|^p dx \right]^{1/p}.$$

Notación 1.2. Sea $1 \leq p < \infty$; se denotará por p' el exponente conjugado de p es decir, $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{p'} = 1$.

Teorema 1.7 (Desigualdad de Young)**.** Sean $1 < p < \infty$. Entonces

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^{p'}}{p'} \quad (a, b \geq 0)$$

Para su demostración ver [Br], pág 56.

Teorema 1.8 (Desigualdad de Hölder)**.** Sean $f \in L^p$ y $g \in L^q$ con $1 \leq p \leq \infty$. Entonces $fg \in L^1$ y

$$\int |fg| \leq \|f\|_{L^p} \|g\|_{L^q}.$$

Demostración. Por homogeneidad podemos asumir que $||f||_{L^p}||g||_{L^{p'}} = 1$ por lo tanto por el teorema 1.7

$$\begin{aligned}\int_\Omega |fg|dx &\leqslant \frac{1}{p}\int_\Omega |f|_p dx + \frac{1}{p'}\int_\Omega |g|'_p dx\\ &= 1 = ||f||_{L^p}||g||_{L^{p'}}\end{aligned}$$

□

Corolario 1.1 (Desigualdad de Interpolación)**.** Si $f \in L^p(\Omega) \cap L^p(\Omega)$con $1 \leqslant p \leqslant q \leqslant \infty$, entonces $f \in L^r(\Omega)$ para todo $p \leqslant r \leqslant q$ y se verifica la desigualdad de interpolación

$$||f||_r \leqslant ||f||_p^\alpha ||f||_q^{1-\alpha}$$

donde $\frac{1}{r} = \frac{\alpha}{p} + \frac{1-\alpha}{q}$

Demostración. $\int_\Omega |f|^r dx = \int_\Omega f^{\alpha r}|f|^{(1-\alpha)r}dx$, por teorema 1.8

$$\int_\Omega |f|^r dx \leqslant \left(\int_\Omega |f|^{\alpha r \frac{p}{\alpha r}}\right)^{\frac{\alpha r}{p}} \left(\int_\Omega |f|^{(1-\alpha)r\frac{q}{(1-\alpha)r}}\right)^{\frac{(1-\alpha)r}{q}} dx$$

□

Teorema 1.9 (Desigualdad de Minkowski)**.** Sean $1 \leqslant p \leqslant \infty$ y $f, g \in L^p(\Omega)$. Entonces

$$||f+g||_p \leqslant ||f||_p + ||g||_p$$

Demostración.

$$\begin{aligned}||f+g||_p^p &= \int_\Omega |f(x)+g(x)|^p dx\\ &\leqslant \int_\Omega |f(x)+g(x)|^{p-1}\left(|f(x)+|g(x)|\right)dx\\ &\leqslant \left(\int_\Omega |f(x)+g(x)|^p dx\right)^{\frac{p-1}{p}} \left(\int_\Omega |f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_\Omega |g(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}\\ &= ||f+g||_p^{p-1}\left(||f||_p + ||g||_p\right).\end{aligned}$$

□

Teorema 1.10. $L^p(\Omega)$ es un espacio de Banach para todo $1 \leq p \leq \infty$.

Para su demostración ver [Br], pág 57.

Teorema 1.11 (Teorema de representación de Riesz)**.** Sea $1 < p < \infty$ y sea $\varphi \in (L^{p'})'$. Entonces existe $u \in L^{p'}$ único tal que

$$< \varphi, f >= \int uf \quad \forall f \in L^{p'}.$$

Además se verifica

$$||u||_{L^{p'}} = ||\varphi||_{(L^p)'}.$$

El anterior teorema expresa que toda forma lineal continua sobre L^p con $1 < p < \infty$ se representa por medio de una función $L^{p'}$. La aplicación $\varphi \longrightarrow u$ es un operador lineal isométrico y sobreyectivo que permite identificar el dual de L^p con $L^{p'}$, es decir, en adelante $L^{p'} = (L^p)'$.

1.3. Los espacios de Hilbert

Definición 1.6. Un espacio de Hilbert es un espacio vectorial H dotado de un producto escalar $\langle u, v\rangle$ y que es completo para la norma $\langle u, u\rangle^{1/2}$

En lo que sigue H designa un espacio de Hilbert.

1.3.1. El dual de un espacio de Hilbert

Teorema 1.12 (Teorema de representación de Riesz-Fréchet)**.** Dada $\varphi \in H'$, existe $f \in H$ único, tal que

$$\varphi(v) = \langle f, v\rangle \ \forall v \in H.$$

Además se verifica

$$|f| = \|\varphi\|_{H'}$$

Definición 1.7. Se dice que una forma bilineal $T(u,v) : H \times H \longrightarrow \mathbb{R}$ es

(i) Continua si existe una constante c tal que

$$|T(u,v)| \leq c|u||v|, \ \forall u, v \in H,$$

(ii) Coerciva si existe una constante $\alpha > 0$ tal que

$$T(u,v) \geq \alpha |v|^2, \ \forall v \in H.$$

Teorema 1.13 (Stampacchia)**.** Sea $T(u,v)$ una forma bilineal continua y coerciva. Sea K un convexo, cerrado y no vacio. Dado $\varphi \in H'$, existe $u \in K$ tal que

$$T(u, v-u) \geq < \varphi, v-u > \quad \forall v \in K.$$

Además si T es simétrica, entonces u se caracteriza por la propiedad

$$\begin{cases} u \in K \\ \dfrac{1}{2}T(u,u) - < \varphi, u > = \min\limits_{v \in K} \left\{ \frac{1}{2}T(v,v) - < \varphi, v > \right\} \end{cases}$$

Para demostrar este Teorema se utilizará el siguiente resultado:

Teorema 1.14 (Punto fijo de Banach)**.** Sea X un espacio métrico completo y ea $S : X \longrightarrow X$ una aplicación tal que

$$d(Sv_1, Sv_2) \leq kd(v_1, v_2) \quad \forall v_1, v_2 \in X \quad \text{ con } k < 1.$$

Entonces S tiene un punt fijo único, $u = Su$.

Para demostración de teorema 1.13 ver [Br], pág 83.

Teorema 1.15 (Lax-Milgram)**.** Sea $T(u,v)$ una forma bilineal continua y coerciva. Entonces para todo $\varphi \in H'$, existe $u \in H$ único, tal que

$$T(u,v) = < \varphi, v > \ \forall v \in H.$$

Además si T es simétrica, entonces u se caracteriza por la propiedad

$$\begin{cases} u \in H \\ \dfrac{1}{2}T(u,u) - < \varphi, u > = \min\limits_{v \in K} \left\{ \frac{1}{2}T(v,v) - < \varphi, v > \right\} \end{cases}$$

y para su demostración ver [Br], pág 84.

1.4. Operadores Compactos

A continuación se presentan algunas propiedades y definiciones de los Operadores Compactos.

Sean E y F dos espacios de Banach.

Definición 1.8. Se dice que un operador $T \in \mathfrak{L}(E,F)$ es **compacto** si $T(B_E)$ es relativamente compacto en la topología fuerte. Se designa por $\varkappa(E,F)$ el conjunto de los operadores compactos y se denota $\varkappa(E) = \varkappa(E,E)$.

Teorema 1.16. El conjunto $\varkappa(E,F)$ es un subespacio vectorial cerrado de $\mathfrak{L}(E,F)$ (para la norma $\| \; \|_{\mathfrak{L}(E,F)}$).

Definición 1.9. Se dice que un operador $T \in \mathfrak{L}(E,F)$ es de **rango finito** si $\dim R(T) < \infty$.

Corolario 1.2. Sea T_n una sucesión de operadores continuos de rango finito de E en F y sea $T \in \mathfrak{L}(E,F)$ tal que $\|T_n - T\|_{\mathfrak{L}(E,F)} \longrightarrow 0$. Entonces $T \in \varkappa(E,F)$.

Proposición 1.17. Sean E, F y G tres espacios de Banach. Si $T \in \mathfrak{L}(E,F)$ y $S \in \varkappa(F,G)$ (reciprocamente $T \in \varkappa(E,F)$ y $S \in \mathfrak{L}(F,G)$), entonces $(S \circ T) \in \varkappa(E,G)$.

1.5. Espectro de un Operador Compacto

Definición 1.10. Sea $T \in \mathfrak{L}(E)$. El **conjunto resolvente** es

$$\rho(T) = \{\lambda \in \mathbb{R}; (T - \lambda I) \text{ es biyectiva de } E \text{ sobre } E\}.$$

El **espectro** $\sigma(T)$ es el complementario del conjunto resolvente, $\sigma(T) = \mathbb{R} - \rho(T)$. Se dice que λ es el **valor propio** (o autovalor) y se denota $\lambda \in VP(T)$ si $N(T - \lambda I) \neq 0$, donde $N(T - \lambda I)$ es el **espacio propio** asociado a λ.

Proposición 1.18. El espectro $\sigma(T)$ es un conjunto compacto y $\sigma(T) \subset \big[-\|T\| \, , \, +\|T\|\big]$

Teorema 1.19. Sea $T \in \varkappa(E)$ con dim$E = \infty$. Entonces se tiene:

a) $0 \in \sigma(T)$,

b) $\sigma(T) - \{0\} = VP(T) - \{0\}$,

c) una de las siguientes situaciones:

o bien $\sigma(T) = 0$,

o bien $\sigma(T) - \{0\}$ es finito,

o bien $\sigma(T) - \{0\}$ es una sucesión que tiende a 0.

Para su demostración ver [Br] pág 95, ó [Ev] pág 643.

Lema 1.20. Sea $(\lambda_n); n \geq 1$ una sucesión de números reales distintos tal que

$$\lambda_n \longrightarrow \lambda$$

y

$$\lambda_n \in (\sigma(T) - \{0\}) \quad \forall n.$$

Entonces $\lambda = 0$. Es decir, todos los puntos de $\sigma(T) - \{0\}$ son aislados.

Para su demostración ver [Br], pág 95.

1.6. Descomposición espectral de los operadores compactos autoadjuntos

En adelante supongamos que $E = H$ es un espacio de Hilbert y que $R \in \mathfrak{L}(H)$. Identificando H'y H se puede considerar que $T^* \in \mathfrak{L}(H)$.

Definición 1.11. Se dice que un operador $T \in \mathfrak{L}(H)$ es **autoadjunto** si $T^* = T$, es decir,

$$< Tu, v >=< u, Tv > \quad \forall u, v \in H.$$

Proposición 1.21. Sea $T \in \mathfrak{L}(H)$ un operador autoadjunto. Definamos

$$m = \inf_{\substack{u\in H \\ |u|=1}} < Tu, u > \quad \text{y} \quad M = \sup_{\substack{u\in H \\ |u|=1}} < Tu, u > .$$

Entonces $\sigma(T) \subset [m, M], m \in \sigma(T)$ y $M \in \sigma(T)$.

Para el siguiente teorema debemos definir:

Definición 1.12 (Suma Hilbertiana)**.** Sea $(E_n)_{n\geq 1}$ una sucesión de subespacios cerrados de H. Se dice que H es **Suma Hilbertiana** de los (E_n) y se escribe

$$H = \bigoplus_n E_n$$

si:

(i) Los E_n son ortogonales dos a dos, es decir,

$$< u, v >= 0 \quad \forall u \in E_m \quad \forall v \in E_n \quad m \neq n.$$

(ii) El espacio vectorial generado por los (E_n) es denso en H (en sentido algebraico es decir, las combinaciones lineales finitas de elementos de (E_n).

Definición 1.13 (Base Hilbertiana)**.** Se llama **base Hilbertiana** (o simplemente base si no hay posibilidad de confusión[1])a toda sucesión (e_n) de elementos de H tales que:

(i) $|e_n| = 1 \; \forall n, < e_m, e_n >= 0 \; \forall m, n, m\varphi n.$

(ii) El espacio vectorial generado por los (e_n) es denso en H.

Teorema 1.22. Supongamos que H es separable. Sea T un operador compacto y autoadjunto. Entonces H admite una base Hilbertiana formada por vectores propios de T.

[1]No confundirse con una **base algebraica**, es decir, una familia (e_n) de H tal que todo elemento de H se escribe de forma única como combinación lineal **finita** de los (e_i).

Para su demostración ver [Br], pág 97.

Teorema 1.23 (Teorema espectral para operadores compactos auto-adjuntos)**.** Sea H un espacio de Hilbert y $K : H \longrightarrow H$ un operador compacto auto-adjunto. Entonces existe un conjunto $\{\phi_i; i = \pm 1, \pm 2, \dots\}$ tal que

(i) Existe $\lambda_i \in \mathbb{R}$ y $\phi_i \in H$; con $i \in I \subset \mathbb{Z} - \{0\}$ tales que $K(\phi_i) = \lambda_i \phi_i$.

(ii) El conjunto $\{\phi_i; i \in I\}$ es un conjunto ortonormal.

(iii) Si $\{\lambda_i; i \in I \cap \mathbb{N}\}$ es finito (respectivamente) el conjunto $\{\lambda_i; i \in I \cap (-\mathbb{N})\}$ entonces $\lambda_i \longrightarrow 0$ (respectivamente $\lambda_{-i} \longrightarrow 0$).

(iv) Si $I = \mathbb{Z} - \{0\}$, el conjunto $\{\phi_i; i \in I\}$ es completo en el complemento ortogonal de $\mathcal{N} = \{u \in H; K(u) = 0\}$.

1.7. Espacios de Sobolev

1.7.1. El espacio de Sobolev $W^{1,p}(\Omega)$

Definición 1.14 (El espacio de Sobolev $W^{1,p}(I)$)**.** Sea $I = (a, b)$ un intervalo acotado o no y sea $p \in \mathbb{R}$ con $0 \leq p \leq \infty$. Se define:

$$W^{1,p}(I) = W^{1,p} = \left\{ u \in L^p(I);\ \exists g \in L^p(I) \text{ tal que } \int_I u\varphi' = -\int_I g\varphi \quad \forall \varphi \in C_c^1(I) \right\}.$$

Se denota

$$H^1(I) = W^{1,2}(I).$$

para cada $u \in W^{1,p}(I)$ se nota $u' = g$. Se dice que g es la derivada de u en el sentido generalizado.

Es claro que si $u \in C^1(I) \cap L^p(I)$ y si $u' \in L^p(I)$, entonces $u \in W^{1,p}$. Además la derivada usual de u coincide con la derivada de u en el sentido de $W^{1,p}(I)$. En particular, si I está acotado, entonces $C^1(\overline{I}) \subset W^{1,p}$ para todo $1 \leq p \leq \infty$.

Notación 1.3. El espacio $W^{1,p}$ está dotado de la norma

$$\|u\|_{W^{1,p}} = \|u\|_{L^p} + \|u'\|_{L^p}$$

El espacio H^1 está dotado del producto escalar

$$< u, v >_{H^1} = < u, v >_{L^2} + < u', v' >_{L^2};$$

la norma asociada

$$\|u\|_{H^1} = \left(\|u\|_{L^2}^2 + \|u'\|_{L^2}^2\right)^{1/2}$$

Consideremos $W^{1,2}(\Omega) = H_0^1(\Omega)$, está dotado del producto escalar:

$$< u, v >_{W^{1,p}} = \int_\Omega uvdx + \sum_{i=1}^{n} \int_\Omega \frac{\partial u \partial v}{\partial x_i^2} dx;$$

y tiene la norma asociada dada como:

$$\|u\|_{H_0^1(\Omega)} = \left(\|u\|_{L^2}^2 + \sum_{i=1}^{n} \|\frac{\partial u}{\partial x_i}\|_{L^2}^2\right)^{1/2}.$$

es equivalente a la norma $W^{1,2}(\Omega)$.

Definición 1.15. Sea $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}, u \in W^{1,p}(\Omega)$, afirmaremos:

(i) $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a u en $W^{1,p}(\Omega)$ y se denota:

$$u_n \longrightarrow u \text{ en } W^{1,p}(\Omega)$$

si

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} \|u_n - u\|_{1,p} = 0.$$

(ii) $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge débil a u en $W^{1,p}(\Omega)$ y se denota:

$$u_n \rightharpoonup u \text{ en } W^{1,p}(\Omega)$$

si

$$u_n \rightharpoonup u \text{ en } L^p(\Omega) \text{ y } \frac{\partial u_n}{\partial x_i} \rightharpoonup \frac{\partial u}{\partial x_i} \text{ en } L^p(\Omega) \quad \forall 1 \leq i \leq N.$$

Proposición 1.24. $W^{1,p}(\Omega)$ es reflexivo para $1 < p < \infty$ y separable para $1 \leq p < \infty$. El espacio $H_0^1(\Omega)$ es un espacio de Hilbert separable.

Para su demostración ver [Br], pág 121.

1.7.2. El espacio de Sobolev $W_0^{1,p}(\Omega)$

Definición 1.16. Sea $1 \leq p < \infty$, se designa $W_0^{1,p}(\Omega)$ la clausura de $C_c^\infty(\Omega)$ en $W^{1,p}(\Omega)$ y se denota $H_0^1(\Omega) = W_0^{1,2}$. El espacio $W_0^{1,p}(\Omega)$ dotado de la norma inducida por $W^{1,p}(\Omega)$ es un espacio de Banach separable, es reflexivo si $1 < p < \infty$. $H_0^1(\Omega)$ es un espacio de Hilbert con el product escalar de H^1.

NOTA: Se comprueba con ayuda de una sucesión regularizante que $C_c^\infty(\Omega)$ es denso en $W_0^{1,p}(\Omega)$ es decir se puede utilizar indistintamente $C_c^\infty(\Omega)$ y $C_c^1(\Omega)$ en la definición de $W_0^{1,p}(\Omega)$.

Teorema 1.25 (Teorema de inmersión de Sobolev)**.** Sea Ω un subconjunto abierto y acotado de $\mathbb{R}^n$ cuya frontera es suave. Si $u \in H_0^{1,2}(\Omega)$, entonces $u \in L^{\frac{2n}{n-2}}(\Omega)$ cuando $n \geq 3$ y existe una constante $k > 0$ tal que para todo $p \in [1, 2(n-2)^{-1}]$,

$$\|u\|_p \leq k\|u\|_{1,2}.$$

El resultado siguiente provee una caracterización esencial de las funciones $W_0^{1,p}(\Omega)$.

Teorema 1.26. Sea $u \in W^{1,p}(\Omega)$, entonces $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ si y solamente si $u = 0$ sobre $\partial\Omega$.

Proposición 1.27 (Desigualdad de Poincaré)**.** Supongamos que Ω es un abierto acotado. Entonces existe una constante k (dependiente de Ω y de p) tal que

$$\|u\|_p \leq k\|\nabla u\|_p \quad \forall u \in W_0^{1,p}(\Omega) \quad 1 \leq p < \infty.$$

Proposición 1.28. Supongamos que Ω es abierto de clase C^1. Sea $u \in L^p(\Omega)$ con $1 < p < \infty$. Las siguiente afirmaciones son equivalentes:

(i) $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$,

(ii) existe una constante k tal que

$$\left|\int_\Omega u\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}dx\right| \leq k\|\varphi\|_{p'} \quad \varphi \in C_c^1(\Omega) \quad \forall i = 1, 2, \cdots, n;$$

(iii) la función

$$\bar{u}(x) = \begin{cases} u(x) & \text{si} \quad x \in \Omega \\ 0 & \text{si} \quad x \in \mathbb{R}^N \diagdown \Omega. \end{cases}$$

pertenece a $W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ y en este caso $\frac{\partial \bar{u}}{\partial x_i} = \frac{\overline{\partial u}}{\partial x_i}$.

Para su demostración ver [Br], pág 173.

Teorema 1.29 (Rellich-Kondrachov)**.** Sea el abierto Ω acotado de clase C^1. Se verifica

$$\begin{array}{lll} \text{Si} \quad p < N \text{ entonces} & W^{1,P}(\Omega) \subset L^q(\Omega), & \forall q \in [1, p^*), \text{ donde } \dfrac{1}{p^*} = \dfrac{1}{p} - \dfrac{1}{N}, \\ \text{Si} \quad p = N \text{ entonces} & W^{1,P}(\Omega) \subset L^q(\Omega), & \forall q \in [1, \infty) \\ \text{Si} \quad p > N \text{ entonces} & W^{1,P}(\Omega) \subset C(\bar{\Omega}), & \end{array}$$

con inyecciones compactas, en particular para $W^{1,P}(\Omega) \subset L^p(\Omega)$ con inyección compacta $\forall p$.

Para su demostración ver [Br], pág. 169.

1.8. Tópicos de Análisis Funcional

Sea H un espacio de Hilbert real y sea $J : H \to \mathbb{R}$ una función de clase C^1. En esta sección se recordarán los conceptos y principales resultados para el desarrollo de este trabajo como la índice de Morse, Condición de Palais-Smale y el Teorema de punto silla.

Definición 1.17. Diremos que J satisface la **condición de Palais-Smales**, en adelante referida como (P-S), si dada una sucesión $\{u_n\}$ en H tal que $DJ(u_n) \to 0$ y $\{J(u_n)\}$ es acotada, $\{u_n\}_n$ contiene una subsucesión convergente.

Se introduce el concepto de índice de Morse que será usado a lo largo del trabajo, tomada según definición [LS].

Definición 1.18. Supongamos que $J \in C^2$ y que u_0 es un punto crítico de J. Denotemos como $D^2J(u_0) : H \to H$ a la segunda derivada vista como operador acotado y autoadjunto en H.

Si existe un entero m tal que existe un subespacio m-dimensional de H sobre el cual $D^2J(u_0)$ es definido no positivo, y m es maximal respecto a esta propiedad, decimos que m es el **índice de Morse** de J en u_0 y denotará $m(J, u_0)$.

En el capitulo 2 se hará uso de la versión del Teorema del Paso de la Montaña que se recordará a continuación (Véase [H]), se introducirá primero la noción de punto crítico de tipo paso montaña y luego se presentará este resultado.

Definición 1.19. Sea $u_0 \in H$ un punto crítico de J y sea $c = J(u_o)$. Se dice que u_0 es un punto crítico de tipo paso de montaña de J si existe una vecindad U de u_0 tal que, para toda vecindad $V \subset U$ de u_0, se tiene que

$$V \cap \{u \in H | J(u) < c\}$$

no es vacío ni es arco-conexo.

Teorema 1.30. (Teorema Paso de Montaña) Supongamos que J satisface la condición (PS). Sean u_1 y u_2 puntos distintos en H. Definimos

$$\Gamma := \{\sigma : [0,1] \to H | \sigma \text{ es continua}, \sigma(0) = u_1, \sigma(1) = u_2\} \text{ y}$$

$$c = inf_{\sigma\in\Gamma} sup_{t\in[0,1]} J(\sigma(t)).$$

Si $max\{J(u_1), J(u_2)\} < c$ entonces existe un punto crítico $u_0 \in H$ de J tal que $J(u_0) = c$. Si además $K_c := \{u \in H | DJ(u) = 0, J(u) = c\}$ consta sólo de puntos aislados, entonces K_c contiene al menos un punto crítico del tipo paso de montaña.

Consideremos el espacio de Sobolev $H_0^1(\Omega)$, en lo que sigue $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots$ es la sucesión de valores propios de $-\Delta$ en Ω con condición de Dirichlet cero en la frontera, y $\varphi_1, \ldots, \varphi_n, \ldots$ es una sucesión correspondientes de funciones propias, completa y ortogonal en el espacio de Sobolev $H_0^1(\Omega)$. En lo que sigue para $u \in H_0^1(\Omega)$ se tomará la norma definida por $||u||^2_{H^1_0(\Omega)} := \int_\Omega |\nabla u|^2$. Dado $k \geq 1$, consideremos los subespacios de $H^1_0(\Omega)$, $V := \{\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_k\}$ y $X := V^\perp = \overline{\{\varphi_{k+1}, \varphi_{k+2}, \ldots\}}$ cerrados tales que $dimV =: k < \infty$ y $H = V \oplus X$.

Se introduce una versión resumida del Teorema del Punto silla según Rabinowitz (la demostración se puede consultar en [Ra]), este teorema es el punto de partida del lema de Lazer y Solimini en [LS]. Intuitivamente, una consecuencia del teorema dice que si un funcional adecuado es coercivo sobre X y anticoercivo sobre V, entonces el funcional tiene al menos un punto crítico.

Teorema 1.31. (Teorema del Punto Silla) Sea $J \in C^1(H, \mathbb{R})$ un funcional que satisface la condición (PS) y que satisface las siguientes hipótesis

(S1) $inf\{J(x) : x \in X\} =: d > -\infty$,

(S2) $J(x) \to -\infty$ cuando $||x|| \to \infty$ con $x \in X$.

Entonces existe un punto crítico de J, es decir, existe un $u_0 \in H$ tal que $DJ(u_0) = 0$.

En [LS] los autores demuestran que bajo ciertas condiciones adicionales a las del Teorema del Punto Silla, al menos uno de los puntos críticos del funcional debe tener índice de Morse igual a $dimV$, ellos prueban el siguiente lema.

Lema 1.32. (Lazer-Solimini) Sea $J \in C^2(H, \mathbb{R})$ un funcional que satisface la condición (PS) y las hipótesis (S1) y (S2). Supongamos que J tiene solamente un número finito de puntos críticos y que todos ellos son no degenerados. Entonces existe un punto crítico de J que tiene índice de Morse igual a $k = dimV$.

CAPÍTULO 2

Soluciones para un problema de Dirichlet Semilineal

En este capítulo se estudia la existencia de soluciones múltiples para un problema semilineal de **Dirichlet**

$$\begin{cases} \Delta u + f(u) = 0 & \text{en } \Omega \\ u = 0 & \text{en } \partial\Omega, \end{cases} \tag{2.0.1}$$

donde $\varOmega$ es un abierto, acotado en $\mathbb{R}^N(N \geq 3)$ con frontera suave, y Δ un *operador Laplaciano* y $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ una función diferenciable tal que $f(0) = 0$ y asintóticamente lineal, es decir, $f'(\infty) = \text{lím}_{|t|\longrightarrow\infty} \dfrac{f(t)}{t} \in \mathbb{R}$.

Sea la sucesión de valores propios $0 < \lambda_1 < \lambda_2 \leq \cdots \leq \lambda_k \leq \cdots$ de $(-\Delta)$ con condición cero en la frontera de $\varOmega$ y $\{\varphi_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ la sucesión de funciones propias asociadas a cada valor propio de $(-\Delta)$.

Es bien conocido, que las soluciones de (2.0.1) son puntos críticos de el funcional

$J : H_0^1(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$J(u) = \int_{\Omega} \Big(\frac{1}{2} |\nabla u|^2 - F(u) \Big) dx,$$

donde $F(\xi) = \int_0^{\xi} f(s) ds$.

En este capítulo se demostrará el siguiente teorema

Teorema 2.1. Si $f'(0) < \lambda_1, f'(\infty) \in (\lambda_k, \lambda_{k+1})$ con $k \geq 2$ y todos los puntos críticos de J son no degenerados entonces (2.0.1) tiene al menos tres soluciones no triviales: $u_1 > 0 \in \Omega, u_2 < 0 \in \Omega$ y u_3.Uno de los índices de las soluciones es menor igual que 1, y u_3 tiene *índice Morse* mayor o igual a 2.

Se prueba este teorema usando el Teorema de paso de montaña, Teorema punto silla y argumentos del índice Morse del tipo Lazer-Solimini (ver [LS]).

Se conjetura que el Teorema (2.1) es válido sin la hipótesis que todos los puntos críticos de J son no-degenerados. El primer paso es probar es la existencia de u_1 y u_2, luego se prueba la existencia de u_3. La tercera solución obtenida por medio de un importante resultado de A. Lazer and S. Solimini (Ver[LS]) el cual muestra que si la hipótesis de el Teorema de punto silla se satisface entonces existe por lo menos un punto critico de Índice Morse mayor o igual a 2.

2.1. Existencia de soluciones con un signo

Sea $f^+ : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ una función definida por:

$$f^+(t) := \begin{cases} f(t), & t \geq 0 \\ f'(0)t, & t < 0 \end{cases}$$

y $F^+(t) = \int_0^t f^+(s) ds$. Sea H el espacio de Sobolev $H_0^1(\Omega)$ y sea $J^+ : H \longrightarrow \mathbb{R}$ un funcional definido por

$$J^+(u) = \int_{\Omega} \Big(\frac{1}{2} |\nabla u|^2 - F^+(u) \Big) dx.$$

Por hipótesis $f'(\infty) \in (\lambda_k, \lambda_{k+1})$, f es sublineal, es decir, denotemos $f'(\infty) = \alpha$ ahora

$$\forall \varepsilon > 0, \exists A > 0 \text{ tal que } |t| > A \longrightarrow \left| \frac{f(t)}{t} - \alpha \right| \leqslant \varepsilon$$

$$\Updownarrow$$

$$(|\alpha| - \varepsilon)|t| < |f(t)| < (\varepsilon + |\alpha|)|t|$$

$$|f(t)| < a_1|t| \text{ si } |t| \geq A$$

$$|f(t)| < m \text{ si } |t| < A$$

entonces existen dos constantes $0 < a_1 < \lambda_{k+1}$ y $a_2 > 0$ tal que

$$|f(t)| \leq a_1|t| + a_2 \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

Ya que f es sublineal, f^+ también lo es, y $J^+ \in C^1(H, \mathbb{R})$.

A continuación obtendremos la derivada del funcional J^+ ó derivada de Frechet, calculando su derivada direccional:

$$\begin{aligned}
DJ^+(u)v &= \lim_{t\to 0} \frac{J(u+vt) - J(u)}{t} \\
&= \lim_{t\to 0} \frac{\int_\Omega \Big(\frac{1}{2}|\nabla(u+tv)|^2 - F^+(u+tv)\Big)dx - \int_\Omega \Big(\frac{1}{2}|\nabla(u)|^2 - F^+(u)\Big)dx}{t} \\
&= \lim_{t\to 0} \frac{\int_\Omega \Big(\frac{1}{2}|\nabla u + t\nabla v)|^2 - F^+(u+tv)\Big)dx - \int_\Omega \Big(\frac{1}{2}|\nabla(u)|^2 - F^+(u)\Big)dx}{t} \\
&= \lim_{t\to 0} \frac{\int_\Omega \Big(\frac{1}{2}\big[|\nabla u|^2 + 2t\nabla u \cdot \nabla v) + t^2|\nabla v|^2\big] - F^+(u+tv)\Big)dx - \int_\Omega \Big(\frac{1}{2}|\nabla(u)|^2 - F^+(u)\Big)dx}{t} \\
&= \int_\Omega \nabla u \nabla v dx - \lim_{t\to 0} \frac{\int_\Omega \big(F^+(u+tv) - F^+(u)\big)dx}{t}
\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$DJ^+(u)v = \int_\Omega \Big(\nabla u \cdot \nabla v - F^+(u)v\Big)dx \quad \forall u, v \in H. \tag{2.1.2}$$

Una solución débil al problema de Dirichlet (2.0.1) es una función

$$u \in H_0^1 \Omega \quad \text{tal que} \quad \forall \varphi \in C_0^\infty, \text{es denso en} \quad H_0^1(\Omega).$$

Multiplicando a ambos lados por φ en (2.0.1) e integrando

$$\int_\Omega \varphi \Delta u + \varphi f(u) = \int_\Omega \varphi \Delta u + \int_\Omega \varphi f(u)$$

donde realizamos integración por partes y se usa la condición de frontera,

$$-\int_\Omega \nabla \varphi \nabla u + \int_\Omega f(u)\varphi$$

$$-\Big[\int_\Omega \nabla \varphi \nabla u - \int_\Omega f^+(u)\varphi\Big]$$

como u es solución débil (de 2.0.1), si $\forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ reemplazamos f por f^+ obtenemos:

$$\int_\Omega \Big(\nabla u \nabla \varphi - f^+(u)\varphi\Big) dx = 0,$$

si y sólo si u es un punto crítico de J^+.

La existencia de este punto crítico será probada usando el Teorema de Paso de Montaña (ver Teorema 1.30). Como H es un espacio de Banach, $J^+(0) = 0$ y $J^+ \in C^1(H, \mathbb{R})$, entonces:

Lema 2.2. Existe $\alpha, \rho > 0$ tales $\|u\|_H = \rho \Rightarrow J^+(u) > \alpha$

Demostración. Como $f'(0) < \lambda_1$ existen $\epsilon > 0$ y $\delta > 0$ tales que:

$$F^+(\xi) = \int_0^\xi f^+(s) ds \leq (\lambda_1 - \epsilon)\frac{\xi^2}{2}, \quad \forall \xi \in (-\delta, \delta) \tag{2.1.3}$$

como f es sublineal, existen constantes $a_1 > 0$ y $a_2 > 0$ tales que, si $\eta > 0$ entonces

$$|F^+(\xi)| \leq \left(\frac{a_1}{2\delta^\eta} + \frac{a_2}{\delta^{\eta+1}}\right)|\xi|^{2+\eta} := P(\delta, \eta)|\xi|^{2+n}, \quad \text{si } |\xi| \geq \delta \tag{2.1.4}$$

Sea $u \in H$, $A_1 := \{x \in \Omega \text{ tal que } |u(x)| < \delta\}$ y $A_2 := \{x \in \Omega \text{ tal que } |u(x)| \geq \delta\}$, usando (2.1.3) y (2.1.4) obtenemos

$$\begin{aligned} J^+(u) &= \frac{1}{2}\|u\|_H^2 - \int_{A_1} F^+(u)dx - \int_{A_2} F^+(u)dx \\ &\geq \frac{1}{2}\|u\|_H^2 - \frac{(\lambda_1 - \epsilon)}{2}\int_\Omega u^2 dx - P(\delta, \eta)\int_\Omega |u|^{2+\eta} dx \end{aligned} \tag{2.1.5}$$

Sea $0 < \eta < \dfrac{4}{N-2}$. De (2.1.5), usando la desigualdad de Poincaré (ver **Nota 2.1**) y el Teorema de Encaje de Sobolev (ver 1.25) de H en $L^{2+\eta}$ existe un $C > 0$ tal que

$$\begin{aligned} J+(u) &\geq \frac{1}{2}\|u\|_H^2 - \frac{(\lambda_1 - \epsilon)}{2\lambda_1}\|u\|_H^2 - CP(\delta, \eta)\|u\|_H^{2+\eta} \\ &= \|u\|_H^2\left(\frac{\epsilon}{2\lambda_1} - CP(\delta, \eta)\|u\|_H^\eta\right). \end{aligned} \tag{2.1.6}$$

□

Nota 2.1. Sea $u \in H$ y φ_i un conjunto ortonormal completo $\{\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n, \ldots\}$ en L^2. Ya que el conjunto $\{\varphi_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ es completo en L^2 y $H \subset L^2$, entonces existen constantes c_i tales que $u = \sum_{i=1}^{\infty} c_i\varphi_i$. Sea $u_N = \sum_{i=1}^{N} c_i\varphi_i$, entonces

$$\int_\Omega (\nabla u_N \cdot \nabla u_N)dx = \sum_{i=1}^{N} \lambda_i c_i^2 \geq \lambda_1 \int_\Omega u_N^2 dx.$$

Como las u_N convergen en $L^2(\Omega)$ a u, se tiene

$$\int_\Omega (\nabla u \cdot \nabla u)dx \geq \lambda_1 \int_\Omega u^2 dx,$$

cuando $u = \varphi_1$, se tiene la igualdad en la anterior ecuación, por lo tanto $c = \lambda_1$ en la desigualdad de Poincaré en su forma óptima. De manera análoga se demuestra que si $u \in H$ es ortogonal a $\{\varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_k\}$ entonces

$$\| u \|_H^2 \geq \lambda_{k+1} \int_\Omega u^2 dx.$$

En adelante, los anteriores λ_i denotarán los valores propios débiles del operador $-\Delta$, este conjunto es también conocido como el espectro de $-\Delta$.

Lema 2.3. Existe $\hat{u} \in H$ tal que

$$J^+(\hat{u}) < 0 \quad \text{y} \quad \|\hat{u}\| > \rho.$$

Demostración. Ya que $f'(\infty) > \lambda_1$, dado $\epsilon > 0$ existen $M \in \mathbb{N}$ y $a_4 > \lambda_1$, tal que si $t > M$ entonces $f(t) \geq a_4 t$; además como f es continua, existe a_3 tal que

$$F^+(\xi) = \int_0^M f(t)dt + \int_M^\xi f(t)dt \geq a_3 + a_4\frac{\xi^2}{2} \quad \text{para } \xi \geq 0.$$

Ahora como $\varphi_1 > 0$ (φ_1 es la primera función propia del operador $-\Delta$, con condición de Dirichlet cero en la frontera Ω por la definición del funcional J^+) para $t \geq 1$ se tiene

$$\begin{aligned} J^+(t\varphi_1) &= \int_\Omega \frac{1}{2}\Big(\nabla(t\varphi_1)\cdot\nabla(t\varphi_1) - F^+(t\varphi_1)\Big)dx \\ &\leq \frac{t^2}{2}\int_\Omega \|\nabla\varphi_1\|^2 dx - a_4\frac{t^2}{2}\int_\Omega \varphi_1^2 dx - a_3|\Omega| \end{aligned}$$

como $\int_\Omega \|\nabla\varphi\|^2 dx = \lambda_1 \int_\Omega \varphi^2 dx$ entonces

$$J^+(t\varphi_1) \leq \frac{t^2}{2}(\lambda_1 - a_4)\int_\Omega \varphi_1^2 dx - a_3|\Omega|$$

como $\lambda_1 < a_4$, la anterior desigualdad implica que $J^+(t\varphi_1) \longrightarrow -\infty,$ cuando $t \longrightarrow +\infty$; haciendo $v = t\varphi_1$ para t lo suficientemente grande, se obtiene lo deseado. (Ver [Ra]).

□

Ahora verificamos que el funcional J^+ satisface la condición de Palais-Smale (ver Definición 1.17).

Lema 2.4. Dada una sucesión $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ en H tal que $\{J^+(u_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ es acotada y su derivada $DJ^+(u_n) \longrightarrow 0$ cuando $n \longrightarrow \infty$, existe una subsucesión $\{u_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ convergente.

Demostración. Sea $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq H$ tal que $\{J^+(u_k)\}_{n\in\mathbb{N}}$ es acotada y

$$DJ^+(u_n) \to 0, \text{ cuando } n \to \infty.$$

Según la proposición B-35 en [Ra] basta probar que $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es acotada para obtener la condición (PS). Supóngase, razonando por el absurdo, que $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ no es acotada. Entonces, existe una subsucesión, que por abuso de notación llamaremos $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, tal que $\|u_n\|_H \longrightarrow +\infty$. Definamos la función $h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ como

$$h(t) = \begin{cases} f'(\infty)t, & t \geq 0, \\ f'(0)t, & t < 0. \end{cases}$$

Donde h es diferenciable y por tanto continua y, por la definición de f^+

$$f^+(t) = h(t) + \gamma(t) \tag{2.1.7}$$

Como f^+ y $h(t)$ son continuas, entonces $\gamma(t)$ también lo es, donde

$$\frac{\gamma(t)}{t} \to 0, \text{ cuando } |t| \to +\infty. \tag{2.1.8}$$

Por hipótesis $DJ^+(u_n) \longrightarrow 0$, cuando $n \longrightarrow \infty$ entonces $\frac{DJ^+(u_n)}{||u_n||}{}_H \to 0$, cuando $n \to \infty$, de (2.1.2) y (2.1.7) tenemos

$$\int_\Omega \left(\nabla \left(\frac{u_n}{||u_n||_H} \right) . \nabla v - \frac{h(u_n)}{||u_n||_H} v - \frac{\gamma(u_n)}{||u_n||_H} v \right) dx \to 0, \quad \forall v \in H. \tag{2.1.9}$$

Basta probar que

$$\int_\Omega \left(\frac{\gamma(u_n)}{||u_n||_H} v \right) dx \to 0, \quad \forall v \in H. \tag{2.1.10}$$

Dado $\epsilon > 0$ pero por (2.1.8), existe $M_2 > 0$ tal que si $|t| \geq M_2$ entonces

$$\left| \frac{\gamma(t)}{t} \right| < \varepsilon. \tag{2.1.11}$$

Por continuidad de γ, existe un $l > 0$ tal que

$$|\gamma(t)| \leq l, \quad \forall t \in [-M_2, M_2] \tag{2.1.12}$$

Sea $v \in H$, teniendo encuenta (2.1.11) y (2.1.12), aplicando la desigualdad de Hölder y el Teorema de Sobolev, vemos que

$$\begin{aligned} \left| \int_\Omega \left(\frac{\gamma(u_n)}{\|u_n\|_H} v \right) dx \right| &\leqslant \int_{|u_n| > M_2} \left| \frac{\gamma(u_n)}{\|u_n\|_H} v \right| dx + \int_{|u_n| \leqslant M_2} \left| \frac{\gamma(u_n)}{\|u_n\|_H} v \right| dx \\ &\leqslant \int_{|u_n| > M_2} \left| \frac{\gamma(u_n)}{\|u_n\|_H} \frac{\|u_n\|_H}{\|u_n\|_H} v \right| dx + \int_{|u_n| \leqslant M_2} \left| \frac{\gamma(u_n)}{\|u_n\|_H} v \right| dx \\ &\leqslant \frac{\varepsilon}{\|u_n\|_H} \|u_n\|_{L^2} ||v||_{L^2} + \frac{l}{\|u_n\|_H} \|v\|_{L^2} |\Omega|^{1/2} \\ &\leqslant \varepsilon C \|v\|_{L^2} + \frac{l|\Omega|^{1/2}}{\|u_n\|_H} \|v\|_{L^2}. \end{aligned} \tag{2.1.13}$$

Dado que $\varepsilon > 0$ y $\dfrac{\|u_n\|_{L^2}}{\|u_n\|_H} = C \leq \mathbb{R}$ entonces $\varepsilon C\|v\|_{L^2} \longrightarrow 0$ cuando $n \longrightarrow \infty$, por la continuidad de inclusión $H \hookrightarrow L^2(\Omega)$ existe tal C.

$\|u_n\|_H \to \infty$ entonces $\frac{l|\Omega|^{1/2}}{\|u_n\|_H}\|v\|_{L^2} \longrightarrow 0$ cuando $n \longrightarrow \infty$, luego se demuestra (2.1.10), es decir $||u_n||_H \to \infty$.

Ahora (2.1.9) y (2.1.10) implican que

$$\int_\Omega \left(\nabla\left(\frac{u_n}{||u_n||_H}\right).\nabla v - \frac{h(u_n)}{||u_n||_H}v\right)dx \longrightarrow 0 \quad \forall v \in H. \tag{2.1.14}$$

Ahora, puesto que $\left\{\frac{u_n}{||u_n||_H}\right\}$ es acotada en L^2 entonces existe una subsucesión que converge débilmente en H (Ver [Br]); aún más, ya que el encaje $H \hookrightarrow J^2(\Omega)$ es compacto, el teorema (1.23) implica que la convergencia es fuerte en L^2, nuevamente por abuso de notación, Supongamos que $\left\{\frac{u_n}{||u_n||_H}\right\}$ entonces $\exists\ \omega \in L^2(\Omega)$ tal que

$$\frac{u_n}{\|u_n\|_H} \longrightarrow \omega \in L^2. \tag{2.1.15}$$

Ahora se demuestra que $\omega \neq 0$. Supóngase que $\omega = 0$. Por la definición de derivada en sentido de Frechet, luego

$$\frac{DJ^+(u_n)}{\|u_n\|_H}\frac{(u_n)}{\|u_n\|_H} = \int_\Omega \left[\nabla\left(\frac{u_n}{\|u_n\|_H}\right)\nabla\left(\frac{u_n}{\|u_n\|_H}\right)\right] - f^+(u_n)\left(\frac{u_n}{\|u_n\|_H}\right)dx,$$

se tiene

$$\left|\frac{DJ^+(u_n)}{\|u_n\|_H}\frac{(u_n)}{\|u_n\|_H}\right| \leqslant \frac{\|DJ^+(u_n)\|_{H^*}}{\|u_n\|_H} \longrightarrow 0 \tag{2.1.16}$$

De (2.1.2) y (2.1.16) tenemos

$$\frac{DJ^+(u_n)}{\|u_n\|_H}\frac{(u_n)}{\|u_n\|_H} = \left|\left|\frac{u_n}{||u_n||_H}\right|\right|_H^2 - \int_\Omega \left[\frac{h(u_n)u_n}{\|u_n\|_H^2} + \frac{\gamma(u_n)u_n}{||u_n||_H^2}\right]dx \longrightarrow 0. \tag{2.1.17}$$

Razonando como en (2.1.10) debemos probar

$$\int_\Omega \frac{\gamma(u_n)u_n}{||u_n||_H^2}dx \longrightarrow 0. \tag{2.1.18}$$

Si $\omega = 0$, por (2.1.15) vemos que

$$\begin{aligned}
&\left|\int_{\Omega} \frac{h(u_n)u_2}{||u_n||_H^2} dx\right| \\
&\qquad \leqslant \left|\int_{u_n \geq 0} \left(\frac{h(u_n)u_n}{\|u_n\|_H^2}\right) dx\right| + \left|\int_{u_n<0} \left(\frac{h(u_n)u_n}{\|u_n\|_H^2}\right) dx\right| \\
&\qquad = \int_{u_n \geq 0} |f'(\infty)| \frac{u_n^2}{\|u_n\|_H^2} dx + \int_{u_n<0} |f'(0)| \frac{u_n^2}{\|u_n\|_H^2} dx \\
&\qquad = |f'(\infty)| \int_{u_n \geq 0} \frac{u_n^2}{\|u_n\|_H^2} dx + |f'(0)| \int_{u_n<0} \frac{u_n^2}{\|u_n\|_H^2} dx \\
&\qquad \leq |f'(\infty)| \left|\left|\frac{u_n}{||u_n||_H}\right|\right|_{L^2}^2 + |f'(0)| \left|\left|\frac{u_n}{\|u_n\|_H}\right|\right|_{L^2}^2 \longrightarrow 0
\end{aligned} \tag{2.1.19}$$

Por la ecuación (2.1.17) se convierte en

$$1 \leq \left|\left|\frac{u_n}{\|u_n\|_H}\right|\right|_{L^2}^2 \longrightarrow 0.$$

Esto es una contradicción, lo cual demuestra que $\omega \neq 0$ y que ω es una solución no trivial. Usando (2.1.14) y (2.1.15) junto con el Lema de Vainberg's (ver [Ra]) se tiene que

$$\int_{\Omega} (\nabla\omega \cdot \nabla v - h(\omega)v) dx = 0 \quad \forall v \in H.$$

Esto lleva a concluir que ω es solución débil no trivial del problema

$$\begin{cases} \Delta\omega + h(\omega) = 0 & \text{en } \Omega \\ \omega = 0 & \text{en } \partial\Omega \end{cases} \tag{2.1.20}$$

Dado que h es sublineal, por regularidad de los operadores elípticos (ver [A]), se concluye que ω es solución clásica de (2.1.20).

Sea $\Omega_1 := \{x \in \Omega : \omega(x) < 0\}$. Entonces por definición de h,

$$\begin{cases} \Delta\omega + f'(0)\omega = 0 & \text{en} \quad \Omega_1 \\ \omega = 0 & \text{en} \quad \partial\Omega_1 \end{cases}$$

Dado que $f'(0) < \lambda_1$ y el primer valor propio de $-\Delta$ en cualquier subregión de Ω es mayor o igual a λ_1 (ver [CH]), tenemos $\omega = 0$ en ω_1, $\omega_1 = \varnothing$. Esto es $\omega \geq 0$ en ω. Dado que ω satisface

$$\begin{cases} \Delta\omega + f'(\infty)\omega = 0 & \text{en } \Omega \\ \omega = 0 & \text{en } \partial\Omega \end{cases}$$

Lo cual es un contradicción porque $f'(\infty) > \lambda_1$. Esta contradicción muestra que $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es acotada. □

Por consiguiente, por el Teorema del paso de montaña (Ver Teorema (1.30)) el problema

$$\begin{cases} \Delta u + f'(u)\omega = 0 & \text{en } \Omega \\ u = 0 & \text{en } \partial\Omega \end{cases} \tag{2.1.21}$$

tiene una solución débil $u \neq 0$. Por regularidad de los operadores elípticos (ver [A]), u es una solución clásica de (2.1.21). Similarmente, hemos probado anteriormente que se puede mostrar que $u \geq 0$ en Ω. Esto es $f^+(u) = f(u)$ en Ω, lo cual implica que $J^+ = J$. Por consiguiente u es punto critico de J^+ también es punto critico de J, como u es solución al problema (2.1).

Reescribiendo (2.1) como

$$\begin{cases} \Delta(-u) + f_-(u) = \dfrac{f_+(u)}{u}u & \text{en } \Omega \\ u = 0 & \text{en } \partial\Omega \end{cases}$$

donde $\frac{f_+(\xi)}{\xi} := \frac{\text{máx}\{f(\xi),0\}}{\xi}$, $\frac{f_-(\xi)}{\xi} := \frac{\text{mín}\{f(\xi),0\}}{\xi}$ para cualquier $\xi > 0$ y si definimos $\dfrac{f_\pm(\xi)}{\xi}(0) := \{f'(0)\}\pm$, estas funciones son continuas en $[0, +\infty)$. El Principio del Máximo Fuerte implica que $u > 0$ en Ω. Se ha demostrado la existencia de una solución positiva u_1 de (2.1).

La solución negativa u_2 de (2.1) se prueba de manera similar.

2.2. Existencia de una tercera solución

Sea $J : H \to \mathbb{R}$ una funcional definido por

$$J(u) = \int_{\Omega} \left(\frac{1}{2} |\nabla u|^2 - F(u) \right) dx$$

donde f es continua y sublineal, $J \in C^1(H, \mathbb{R})$ y

$$DJ(u)v =< \nabla J(u), v >= \int_{\Omega} (\nabla u \cdot \nabla v - f(u)v) dx, \forall u, v \in H.$$

Sea $V :=< \varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_k >$ y $X := V^{\perp}$. Puesto que $H_0^1 = V \oplus X$.

Se mostrará que J satisface la hipótesis del Teorema de punto silla (se siguen los pasos del Teoremma (1.31)).

Basta probar,

$$J(u) \to -\infty \text{ cuando } \|u\| \to \|\infty; \ \forall u \in V. \tag{2.2.22}$$

Sea $u \in V$. Porque $f'(\infty) \in (\lambda_k, \lambda_{k+1})$ entonces, existe $K \in \mathbb{R}$ y $a > \lambda_k$ tal que

$$F(s) \geq \frac{a}{2} s^2 + K; \forall s \in \mathbb{R}.$$

Entonces

$$J(u) = \frac{1}{2} \|u\|_H^2 - \int_{\Omega} F(u) \leq \frac{1}{2} \|u\|_H^2 - \frac{a}{2} \int_{\Omega} u^2 dx - K|\Omega|.$$

Como $\|v\|^2 \leq \lambda_k \int_{\Omega} v^2; \forall v \in V$, se obtiene

$$J(u) \leq \frac{1}{2} \left(1 - \frac{a}{\lambda_k} \right) \leq \|u\|_H^2 - K|\Omega|.$$

Porque $a > \lambda_k$, J satisface (2.2.22).

Ahora podemos decir que:

$$J(x) \to \infty \text{ como } \|x\| \to \infty; \forall x \in X \tag{2.2.23}$$

Sea $x \in X$. Porque $f'(\infty) \in (\lambda_k, \lambda_{k+1})$ entonces, existe $a_1 < \lambda_{k+1}$ y $a_2 \in \mathbb{R}$ tal que

$$F(s) \leq \frac{a_1}{2}s^2 + a_2; \forall s \in \mathbb{R}.$$

Entonces

$$J(x) \geq \frac{1}{2}\|x\|_H^2 - \frac{a_1}{2}\int_\Omega x^2 dx - a_2|\Omega|.$$

Como $\|x\|^2 \geq \lambda_{k+1}\int_\Omega x^2; \forall x \in X$, se obtiene

$$J(x) \geq \frac{1}{2}\left(1 - \frac{a_1}{\lambda_{k+1}}\right)\|x\|_H^2 - a_2|\Omega|.$$

Porque $a_1 < \lambda_{k+1}$, J satisface (2.2.23)

De manera similar, una prueba del Lema 2.4, se puede hacer usando que J satisface la Condición de Palais-Smale (ver Definición (1.17)).

Por consiguiente, el funcional J satisface la hipótesis del Teorema del punto silla. Ahora, por el Lema (1.32), si el conjunto de puntos críticos de J es discreto, y todos son no degenerados, es decir $D^2J(u_n)$ es invertible, entonces existe un punto critico u_3 con índice de Morse igual a dim$V = k \geq 2$.

Se mostró anteriormente que J tiene una solución u_1 positiva y una solución u_2 negativa, y son dos puntos críticos, no degenerados de índice de Morse menor igual que 1; esto muestra que $u_3 \neq u_1$ y $u_3 \neq u_2$. Dando por terminada la prueba del Teorema 2.1. ∎

Bibliografía

[AF] R. Admas and J. Fournier, *Sobolev Spaces* Second Edition, Academic Press, 2003.

[A] S. Agmon, *The LP Approach to the Dirichlet problem.* Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa, Vol. 13, (1959), 405-448.

[Am] A. Ambrosetti and P. Rabinowitz, *Dual variational methods in critical point theory and Applications.* J. Funct. Anal., Vol. 14, (1973), 349-381.

[Bt] R. G., Bartle, *The elements of integration and Lebesgue measure*, John Wiley & sons, Inc, 1994.

[BW] T. Bartsch and Z. Q. Wang, *One the Existence of Sign changing Solutions for Semilinear Dirichlet Problems.* Topol. Methods Nonlinear Anal., Vol. 7 (1996), 115-131.

[Br] H. Brézis,*Análisis Funcional Teoría y aplicaciones.* Alianza Editorial, Madrid, 1984.

[BT] B. Buffoni, J. Toland, *Analytic theory of global*, http://books.google.com.co/books?id=PF51n-az6IkC&pg=PA104&lpg=PA104&

dq=&source=bl&ots=RTqqHbNC0f&sig=UnkFsphr3BfuLTlHLAgD96p2vxE #v=onepage&q=&f=false

[Cf-1] F. Caicedo, *Cálculo Avanzado Introducción*, Universidad Nacional de Colombia, sede Bogotá. 2000.

[Cf-2] F. Caicedo, *Notas de clase de Teoría de Grado*, Sin publicar, Universidad Nacional de Colombia, sede Bogotá.

[CC] A. Castro and J. Cossio, Multiple Solutions for a Nonlinear Dirichlet Problem, SIAM J. Math. Anal., Vol. 25 (1994), 1554 - 1561.

[CV] J. Cossio and C. Vélez, *Soluciones no Triviales para un Problema de Dirichlet Asintóticamente Lineal.* Rev. Colombiana Mat., Vol 37, No. 1 (2003), 25- 36.

[CH] J. Cossio and S. Herrón,*Nontrivial Solutions for a Semilinear Dirichlet Problem with Nonlinearity crossing Multiple Eigenvalues.*

[CH] R. Counrant and D. Hilbert, *Methods of Mathematical Physics*, volume I, New York, John Willey, 1989.

[Dk] K. Deimling, *Nonlinear Functional Analysis*, Springer-Varlag,1980.

[Ev] L. Evans, *Partial Differential Equations.* American Mathematical Society, 2000.

[G] M. García, *Acerca de la soluciones no triviales para un problema de Dirichlet asintóticamente lineal.* Tesis de Maestria, Universidad Nacional, 2010.

[H] H., Hofer, *Topological Degree at a Critical Point of Mountain Pass Type.* Proc. Sympos. Pure Math., Vol. 45, (1986), 501-509.

[LS] A. C. Lazer, S. Solimini.,*Nontrivial Solutions of Operator Equations and Morse Indices of Critical Points of Min-Max Type.* Nonlinear Anal., Vol. 12, 8 (1988), 761-775.

[La] Lang., *Real Analysis*, Second edition. Yale University, Addison-Wesley publishing Compana, 1983.

[L] Lloyd, *Degree theory*. University Press, 1978.

[Pa] F.O.V. De Paiva,*Multiple Solutions for Asymptotically Linear Resonant Elliptic Problems*. Topol. Methods Nonlinear Anal., Vol. 21 (2003), 227 - 247.

[Ra] P. Rabionowitz,*Minimax Methods in Critical Point Theory with Applications to Differential Equations*. Regional Conference Series in Mathematics, 65, Providence, R.I., AMS (1986).

[V] C. Velez, *Existencia y Propiedades Cualitativas de las soluciones para problemas elípticos no lineales*. Tesis Doctoral. Univesidad Nacional sede Medellín, 2008.

[Zha] Z. Zhang, S. Li, S. Liu and W. Feng,*On an Asymptotically Linear Elliptic Dirichlet Problem*. Abstr. Appl. Anal., 7, 10 (1002), 509 - 516.