Singularidades aisladas en funciones armónicas de valor complejo

Jheison Alfonso Rivera Serna

Universidad Nacional de Colombia
Sede Medellín
Facultad de Ciencias
Escuela de Matemáticas
2020

Singularidades aisladas en funciones armónicas de valor complejo

Jheison Alfonso Rivera Serna

Tesis presentada como requisito parcial para optar al título de:
Doctor en Ciencias-Matemáticas

Director:
Doctor Hugo Javier Arbeláez Pulgarín
Codirector:
Doctor Juan Humberto Arango Escalante

Línea de Investigación:
Variable Compleja

Universidad Nacional de Colombia
Sede Medellín
Facultad de Ciencias
Escuela de Matemáticas
2020

Agradecimientos

Durante el desarrollo de este trabajo, hubo personas que aportaron de una u otra forma para que el mismo llegara a término, ya fuera en lo académico o en lo personal, con sus aportes, observaciones, sugerencias o simplemente compañía y apoyo emocional.

Agradezco a mi familia por estar siempre presente, por la paciencia y comprensión ante el tiempo que este conlleva. En especial a mis padres por ser el pilar fundamental en todo lo que soy, en toda mi educación, más que académica, humana, social y moral; por su incondicional apoyo perfectamente mantenido a través del tiempo

A mis directores, los profesores Hugo Arbeláez y Juan Humberto Arango, cuya guía fue imprescindible en la estructuración de la tesis, gracias a sus aportes y sugerencias el trabajo logró tomar forma.

Al profesor Diego Mejía Duque, que comenzó a dirigirme el trabajo y trazó el curso inicial del mismo, además de estar siempre pendiente de mi progreso, brindándome observaciones y sugerencias que siempre fueron muy oportunas.

Resumen

Singularidades aisladas en funciones armónicas de valor complejo

El principal propósito de este trabajo es estudiar el concepto de orientación alrededor de una singularidad aislada en el contexto de funciones armónicas de valor complejo. Para ello, se empieza con un estudio sistemático del comportamiento de una función armónica alrededor de una singularidad, buscando hallar una representación compleja de la serie armónica de Laurent, lo cual se logra al encontrar una expresión sencilla en términos complejos para los polinomios armónicos homogéneos. Estos resultados se aprovechan para desarrollar un teorema del residuo para funciones armónicas. Luego, se investiga el concepto de orientación mediante el uso de la dilatación compleja, centrándose en aquellos puntos donde no se preserva ni se invierte la orientación, volviéndose fundamental el concepto de conjunto excepcional; en particular, obtenemos condiciones necesarias y suficientes para que una función armónica f no preserve ni invierta la orientación en ningún punto de su dominio. Como dicha investigación se enfoca en las singularidades aisladas, se hace necesario aumentar el conjunto excepcional a aquellos puntos y estudiar sus propiedades.

Palabras clave: Funciones armónicas, polinomios homogéneos, singularidades aisladas, serie de Laurent, residuo, dilatación compleja, orientación, conjunto excepcional.

Abstract

Isolated singularities in complex-valued harmonic functions

The main purpose of this work is to study the concept of orientation around an isolated singularity in the context of complex-valued harmonic functions. To do this, it begins with a systematic study of the behavior of a harmonic function around a singularity, seeking to find a complex representation of Laurent's harmonic series, which is achieved by obtaining a simple expression in complex terms for homogeneous harmonic polynomials. These results are used to develop a residue theorem for harmonic functions. Then, we investigate the concept of orientation through the use of complex dilatation, focusing on those points where orientation is not preserved or reversed, making the concept of exceptional set essential; in particular, we obtain necessary and sufficient conditions for a harmonic function f not to preserve nor reverse the orientation at any point in its domain. As this research focuses on the isolated singularities, it is necessary to increase the exceptional set to those points and to study their properties.

Keywords: Harmonic functions, homogeneous polynomials, isolated singularities, Laurent series, residue, complex dilatation, orientation, exceptional set.

Contenido

Introducción

Los mapeos armónicos fueron estudiados originalmente por geómetras diferenciales, ya que proporcionan parámetros isotermales (o conformes) para superficies minimales. Más recientemente, han sido activamente investigados por analistas complejos, como generalizaciones de funciones analíticas univalentes o mapeos conformes. El catalizador fue un artículo de referencia de James Clunie y Terry Sheil-Small en 1984 [CSS84], señalando que muchos de los resultados clásicos de mapeos conformes tienen análogos claros para mapeos armónicos. Desde entonces esta área de estudio ha sido desarrollada rápidamente, a pesar de que un gran número de problemas básicos de la teoría geométrica de funciones que se extienden a mapeos armónicos siguen sin resolverse. En muchas instancias, las propiedades de las funciones *analíticas* sirven como modelos para generalizaciones a funciones armónicas, pero otros resultados son peculiares a funciones analíticas y no se extienden a funciones armónicas más generales.

El principio del argumento es un importante y útil resultado para funciones meromorfas en dominios del plano. Duren, Hengartner y Laugesen obtuvieron un principio del argumento para mapeos armónicos en dominios de Jordan [DHL96]. Años después, Suffridge y Thompson probaron un principio del argumento para funciones armónicas que tienen singularidades aisladas [ST00]. Dicho artículo incluye una definición de *polo* en una singularidad aislada de una función armónica y un *teorema de partición* para el espacio imagen que produce componentes cuyos valores son alcanzados el mismo número de veces en la región apropiada.

Otra herramienta muy usada en la teoría de funciones de valor complejo, tanto meromorfas como armónicas, es el desarrollo en series de Laurent alrededor de una singularidad aislada. En [ABR01] se estudia el espacio de polinomios armónicos en $\mathbb{R}^n$, y se muestra cómo pueden usarse los polinomios armónicos homogéneos para el desarrollo en serie de Laurent de una función armónica. A partir de dicha serie, se define el tipo de singularidad alrededor de la cual se desarrolla según el número de términos en su parte principal, específicamente, se le llama *singularidad removible* si la parte principal es nula, *polo* si hay finitos términos no nulos en la parte principal, o *singularidad esencial* si hay infinitos términos no nulos. Esta definición de polo no corresponde a la dada en [ST00], la cual tiene que ver con el comportamiento geométrico de la función en las cercanías de la singularidad, mientras que en [ABR01] es una definición puramente analítica.

En los preliminares de este trabajo, capítulo 1, comenzamos introduciendo la definición de función armónica y se muestran algunas de sus propiedades, haciendo un comparativo con las propiedades de las funciones analíticas, destacando sus diferencias. Luego, para poder introducir el concepto de orientación, se muestra lo que es el Jacobiano de una función armónica y se ilustra, con los mapeos afines, que hay mapeos armónicos que no son conformes. Continuamos el capítulo con algunos hechos básicos para llegar a la noción de dilatación compleja de una función armónica, la cual será de gran importancia para la generalización de la orientación. Se finalizan los preliminares mostrando cuál es la representación canónica de una función armónica alrededor de un punto de su dominio.

En el capítulo 2 se empieza mostrando lo que es un polinomio homogéneo en $\mathbb{C}$ de grado m y se obtiene un resultado que caracteriza a los polinomios homogéneos que son armónicos mediante una sencilla representación compleja, la cual se utiliza para mostrar que estos polinomios son ortogonales, en la frontera del disco unitario, a cualquier otro polinomio de grado menor; más aún, para dar una representación compleja de la serie de Laurent de una función armónica en términos de z y $\overline{z}$; y también se da la representación particular de una función armónica real-valuada. Ya en la segunda sección, se clasifican las singularidades aisladas según el comportamiento geométrico de la función en las cercanías de la singularidad, y vemos que, de acuerdo a esta clasificación, la caracterización de las singularidades no depende completamente de su parte principal, mostrando que son los polos y las singularidades esenciales los que no dependen de si hay finitos o infinitos términos no nulos en su parte principal; y al final de la sección, se definen y caracterizan las singularidades en ∞. En la última sección del capítulo, se prueba una versión del teorema del residuo para funciones armónicas de valor complejo partiendo de la versión para funciones armónicas real-valuadas, y se ilustra con un ejemplo en el que se calcula la integral de una función de valor complejo usando dicho teorema del residuo.

En el capítulo 3, usamos la dilatación de una función armónica para generalizar la noción de orientación a puntos donde el Jacobiano es cero, y así poder definir el orden de los ceros no singulares; también se muestran ejemplos y propiedades. Continuamos definiendo el conjunto donde una función armónica no preserva ni invierte la orientación como su *conjunto excepcional* y mostramos algunas de sus propiedades, como por ejemplo, que este es un conjunto perfecto dentro del dominio de la función al cual divide en regiones, unas donde se preserva y otras donde se invierte la orientación, y que es una 1-variedad excepto tal vez en puntos aislados, además de no ser necesariamente conexo. En la última sección, definimos el concepto de orientación en singularidades aisladas, teniendo así un *conjunto excepcional aumentado* al agregar al conjunto excepcional las singularidades aisladas donde no se preserva ni se invierte la orientación, lo cual permite conseguir algunos resultados más generales que los que ya se conocen al respecto; luego, podemos definir la dilatación en las singularidades aisladas, con lo que obtenemos propiedades del conjunto excepcional aumentado, como por ejemplo, que no tiene puntos aislados. Finalizamos mostrando que en la mayoría de los casos las singularidades esenciales de una función armónica pertenecen al conjunto excepcional aumentado, excepto posiblemente bajo condiciones muy específicas.

1 Preliminares

1.1. Funciones armónicas

Una función real-valuada $u(x, y)$ es *armónica* si satisface la ecuación de Laplace:

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

Un mapeo uno a uno $f(x, y) = (u, v)$ de una región Ω en el plano xy a una región Θ en el plano uv es un *mapeo armónico* si las dos funciones coordenadas son armónicas. Es conveniente usar la notación compleja $z = x + iy,\ w = u + iv$ y escribir

$$w = f(z) = u(z) + iv(z).$$

Debe ser enfatizado que el término "mapeo armónico" siempre hará referencia a una función armónica complejo-valuada *univalente*.

Una función complejo-valuada $f = u + iv$ es *analítica* en un dominio $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ si tiene derivada $f'(z)$ en cada punto $z \in \Omega$. Las *ecuaciones de Cauchy-Riemann*

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \qquad \text{y} \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

son una consecuencia inmediata. Recíprocamente, si f tiene primeras derivadas parciales continuas y satisface las ecuaciones de Cauchy-Riemann, entonces f es analítica en Ω (ver [Ahl79] para información acerca de las funciones analíticas), en cuyo caso

$$f'(z) = f_x(z) = -if_y(z).$$

Se sigue de las ecuaciones de Cauchy-Riemann (y de la existencia de todas las derivadas de orden superior) que toda función analítica es armónica.

Un par de funciones (u, v) que satisface las ecuaciones de Cauchy-Riemann se dice ser un *par conjugado*, y v es llamada la *conjugada armónica* de u. Luego, $-u$ es la conjugada armónica de v. Dado un dominio Ω en el plano complejo, es cierto que toda función real-valuada que sea armónica en Ω posee una conjugada armónica en este dominio si y sólo si Ω es simplemente conexo [Pal91]. Pero, en general, en las funciones armónicas de valor complejo las partes real e imaginaria no son conjugadas; en otras palabras, las ecuaciones de Cauchy-Riemann no se satisfacen en general, y por tanto las funciones no tienen porqué ser analíticas. Si v es conjugada armónica de u, claramente $v+c$ también lo es para todo $c \in \mathbb{R}$. Estrictamente hablando, la función conjugada está determinada localmente salvo por una constante aditiva: sea v_1 otra conjugada armónica de u; por lo tanto, $f = u + iv$ y $f_1 = u + iv_1$ son analíticas; de donde, $g = f - f_1 = i(v - v_1)$ es una función analítica que toma sólo valores imaginarios; en consecuencia, g debe ser constante; es decir, $v - v_1 = c \in \mathbb{R}$.

Las funciones analíticas se preservan bajo composición, pero las funciones armónicas no lo hacen. Una función armónica de una función analítica es armónica, pero una función analítica de una función armónica no necesariamente es armónica. Las funciones analíticas forman un álgebra, pero las funciones armónicas no. Incluso el cuadrado o el recíproco de una función armónica no es necesariamente armónica. La inversa de un mapeo armónico biyectivo no resulta ser armónica en general.

Como nos interesa estudiar funciones armónicas que no son univalentes, el Jacobiano de dichas funciones resulta una herramienta útil. El *Jacobiano* de una función $f = u + iv$ es

$$J_f(z) = \begin{vmatrix} u_x & v_x \\ u_y & v_y \end{vmatrix} = u_x v_y - u_y v_x.$$

Si f es analítica, su Jacobiano toma la forma $J_f(z) = (u_x)^2 + (v_x)^2 = |f'(z)|^2$. Un resultado clásico para funciones analíticas f dice que $J_f(z) \neq 0$ si y sólo si f es localmente univalente en z. Hans Lewy mostró en 1936 [Lew36] que esto permanece cierto para funciones armónicas. En vista del teorema de Lewy, si una función armónica f es univalente en un dominio Ω, entonces o $J_f(z) > 0$ en todo Ω, en cuyo caso preserva la orientación, o $J_f(z) < 0$ en todo Ω, en cuyo caso invierte la orientación. Si f preserva orientación, entonces $\overline{f}$ invierte orientación, puesto que $J_{\overline{f}} = -J_f$.

Los ejemplos más simples de mapeos armónicos que no son necesariamente conformes, son los *mapeos afines* $f(z) = \alpha z + \gamma + \beta\overline{z}$ con $|\alpha| \neq |\beta|$, lo que garantiza que f sea univalente. Los mapeos afines con $\gamma = 0$ son *mapeos lineales*. En general, una transformación afín o aplicación afín consiste en una transformación lineal seguida de una traslación. Es importante observar que toda composición de una función armónica con un mapeo afín es de nuevo una función armónica: si f es armónica, entonces lo es $\alpha f + \gamma + \beta\overline{f}$.

En el estudio de funciones armónicas sobre dominios simplemente conexos en el plano, no hay pérdida de generalidad al tomar el disco unitario como dominio de definición. Para ser más precisos, supongamos que f es un mapeo armónico de algún dominio simplemente conexo $\Omega \subseteq \mathbb{C}$, con $\Omega \neq \mathbb{C}$. El teorema del mapeo de Riemann asegura la existencia de un mapeo conforme φ de $\mathbb{D}$ sobre Ω. Luego, la composición $F = f \circ \varphi$ es un mapeo armónico definido en $\mathbb{D}$. El mapeo original es $f = F \circ \psi$, donde ψ es la inversa de φ.

1.2. Algunos hechos básicos

Empezamos enunciando un resultado clásico que puede encontrarse en la página web `https://www.ugr.es/~rpaya/documentos/VariableCompleja/2014-15/Armonicas.pdf`. Acá presentamos una prueba de éste.

Teorema 1.1 (Principio de identidad para funciones armónicas real-valuadas)**.** *Sean φ y ψ funciones armónicas real-valuadas en un dominio Ω simplemente conexo. Si el conjunto*

$$A := \{z \in \Omega \mid \varphi(z) = \psi(z)\}$$

tiene interior no vacío, entonces $A = \Omega$.

Demostración. Sean f y g las respectivas completaciones analíticas de φ y ψ en Ω. Definamos $h := f - g$ en Ω, que claramente es analítica, y notemos que $\mathrm{Re}(h) = \mathrm{Re}(f) - \mathrm{Re}(g) = \varphi - \psi = 0$ en A, lo que implica, si $h = u + iv$, que $u_x(z) = u_y(z) = 0$ para todo z en el interior de A; por consiguiente, en virtud de las ecuaciones de Cauchy-Riemann, $v_x(z) = v_y(z) = 0$ para todo z en el interior de A; así pues, h es igual a una constante imaginaria en el interior de A. Puesto que obviamente el interior de A tiene puntos de acumulación en Ω, el principio de continuación analítica o principio de identidad para funciones analíticas, nos dice que h es igual a una constante imaginaria en todo Ω. En consecuencia, $\varphi = \psi$ en todo Ω, es decir, $A = \Omega$. ■

Consideremos dos operadores diferenciales que aparecen comúnmente en el análisis complejo y que son muy convenientes:

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right) \qquad \text{y} \qquad \frac{\partial}{\partial \overline{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right);$$

estos se pueden calcular derivando de la forma típica respecto a z y a $\overline{z}$, respectivamente, en lugar de usar las fórmulas. Para una función complejo-valuada $f(z)$, la ecuación $\partial f/\partial \overline{z} = 0$ es justo otra forma de escribir las ecuaciones de Cauchy-Riemann.

Un cálculo directo muestra que el Laplaciano de f es $\Delta f = 4\dfrac{\partial^2 f}{\partial z \partial \overline{z}}$. Luego, para las funciones f con segundas derivadas parciales continuas, es claro que f es armónica si y sólo si $\dfrac{\partial f}{\partial z}$ es analítica. Si f es analítica, entonces $\dfrac{\partial f}{\partial z} = \dfrac{\partial f}{\partial z} + \dfrac{\partial f}{\partial \overline{z}} = \dfrac{\partial f}{\partial x} = f'(z)$, la derivada ordinaria. Los operadores $\dfrac{\partial}{\partial z}$ y $\dfrac{\partial}{\partial \overline{z}}$ son lineales, y tienen las propiedades usuales de operadores diferenciales. Por ejemplo, las reglas del producto y del cociente se tienen. La propiedad especial

$\overline{\left(\dfrac{\partial f}{\partial z}\right)} = \dfrac{\partial \overline{f}}{\partial \overline{z}}$ conecta las dos derivadas.

Nótese que la siguiente expresión es igual al diferencial de f:

$$\frac{\partial f}{\partial z}dz + \frac{\partial f}{\partial \overline{z}}d\overline{z} = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy = df,$$

motivando así la notación $\dfrac{\partial}{\partial z}$ y $\dfrac{\partial}{\partial \overline{z}}$. La notación de subíndice $f_z = \dfrac{\partial f}{\partial z}$ y $f_{\overline{z}} = \dfrac{\partial f}{\partial \overline{z}}$ es frecuentemente más conveniente.

La regla de la cadena para diferenciación de funciones compuestas puede ser obtenida (formalmente). Si $w = f(z)$ y $z = g(\zeta)$, entonces $w = h(\zeta)$, donde $h = f \circ g$. Se deduce que:

$$\frac{\partial h}{\partial \zeta} = \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial g}{\partial \zeta} + \frac{\partial f}{\partial \overline{z}}\overline{\frac{\partial g}{\partial \overline{\zeta}}} \qquad \text{y} \qquad \frac{\partial h}{\partial \overline{\zeta}} = \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial g}{\partial \overline{\zeta}} + \frac{\partial f}{\partial \overline{z}}\overline{\frac{\partial g}{\partial \zeta}}.$$

De esta forma, el Jacobiano de una función $f = u + iv$ puede ser expresado como

$$J_f = |f_z|^2 - |f_{\overline{z}}|^2.$$

Consecuentemente, f es localmente univalente y preserva la orientación cuando $|f_z(z)| > |f_{\overline{z}}(z)|$, e invierte la orientación cuando $|f_z(z)| < |f_{\overline{z}}(z)|$. Nótese que si $f_z(z) = 0$, entonces $J_f(z) = -|f_{\overline{z}}(z)| \leqslant 0$; por lo tanto $f_z(z) \neq 0$ cuando $J_f(z) > 0$. Para los mapeos $w = f(z)$ que preservan la orientación, como $dw = f_z dz + f_{\overline{z}} d\overline{z}$, se tiene que

$$(|f_z| - |f_{\overline{z}}|)|dz| \leqslant |dw| \leqslant (|f_z| + |f_{\overline{z}}|)|dz|.$$

Estas desigualdades son óptimas y tienen como interpretación geométrica que f mapea a una circunferencia infinitesimal sobre una elipse infinitesimal, con

$$D_f := \frac{|f_z| + |f_{\overline{z}}|}{|f_z| - |f_{\overline{z}}|}$$

como la razón entre el eje mayor y el eje menor. La cantidad $D_f = D_f(z)$ es llamada la *dilatación* de f en el punto z, y claramente $1 \leqslant D_f(z) < +\infty$. Notemos además que las funciones analíticas son aquellas cuya dilatación es idénticamente 1 en todo su dominio:

$$D_f = 1 \Leftrightarrow |f_z| + |f_{\overline{z}}| = |f_z| - |f_{\overline{z}}| \Leftrightarrow 2|f_{\overline{z}}| = 0 \Leftrightarrow f_{\overline{z}} = 0.$$

Frecuentemente, es más conveniente considerar la razón $\mu_f := f_{\overline{z}}/f_z$, llamada la *dilatación compleja* de f. Luego, $|\mu_f(z)| < 1$ si f preserva la orientación; y además, la función f es analítica si y sólo si $\mu_f \equiv 0$.

En la teoría de mapeos armónicos, la cantidad $\nu_f = \overline{f_{\overline{z}}}/f_z$, conocida como la *segunda dilatación compleja*, resulta ser más relevante que la primera dilatación compleja μ_f. Como $|\nu_f| = |\mu_f|$, de nuevo es claro que f es analítica si y sólo si $\nu_f \equiv 0$. Sea f una función complejo-valuada definida en un dominio $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ que tiene segundas derivadas parciales continuas. Supongamos que f es localmente univalente en Ω, con $J_f(z) > 0$. Sea $\omega = \overline{f_{\overline{z}}}/f_z$ su segunda dilatación compleja; entonces $|\omega(z)| < 1$ en Ω. Derivando la ecuación $\overline{f_{\overline{z}}} = \omega f_z$ con respecto a $\overline{z}$, obtenemos que

$$\overline{f_{\overline{z}z}} = f_{z\overline{z}}\omega + f_z\omega_{\overline{z}}.$$

Ahora, si f es armónica en Ω, entonces $f_{z\overline{z}} = \frac{1}{4}\Delta f = 0$ allí; de donde $0 = f_z\omega_{\overline{z}}$, y como $J_f > 0$ entonces $f_z \neq 0$. Se sigue que $\omega_{\overline{z}} = 0$ en Ω, por lo que ω es analítica. Recíprocamente, si ω es analítica entonces $\overline{f_{\overline{z}z}} = f_{z\overline{z}}\omega$; pero como $|\omega(z)| < 1$, esto implica que $f_{z\overline{z}} = 0$, y por lo tanto f es armónica. En conclusión, f es armónica si y sólo si ω es analítica. En particular, la segunda dilatación compleja ω de un mapeo armónico f que preserva la orientación es siempre una función analítica de módulo menor que uno. Esta función ω será llamada la *dilatación analítica* de f, o simplemente la dilatación cuando el contexto no de lugar a confusiones. Notemos que $\omega(z) \equiv 0$ si y sólo si f es analítica.

En un dominio simplemente conexo $\Omega \subseteq \mathbb{C}$, una función armónica complejo-valuada f tiene la representación $f = h + \overline{g}$ [Dur04, pág. 7], donde h y g son analíticas en Ω; esta representación es única salvo una constante aditiva. Para demostrarlo, recordemos que f_z es analítica si f es armónica, y como Ω es simplemente conexo, existe una primitiva h de f_z en Ω; es decir, h es analítica y $h' = f_z$. Ahora, sea $g = \overline{f} - \overline{h}$ y notemos que

$$g_{\overline{z}} = \overline{f}_{\overline{z}} - \overline{h}_{\overline{z}} = \overline{f_z} - \overline{h_z} = \overline{h'} - \overline{h'} = 0 \quad \text{en} \quad \Omega.$$

Luego, g es analítica en Ω. La unicidad de la representación depende del hecho de que una función que sea tanto analítica como anti-analítica debe ser constante (una *función anti-analítica* está definida como la conjugada de una función analítica).

Si f es real-valuada, como Ω es simplemente conexo, existe una armónica conjugada g de f en Ω. Tomemos $2h := f + ig$ como la *completación analítica* de f en Ω, que es única salvo adición de una constante imaginaria. Así, la representación de f se reduce a $f = \mathrm{Re}\{2h\} = h + \overline{h}$. Para un mapeo armónico f del disco unitario $\mathbb{D}$, es conveniente escoger la constante aditiva tal que $g(0) = 0$. La representación $f = h + \overline{g}$ es entonces única y es llamada la *representación canónica* de f.

2 Series armónicas de Laurent

En [ABR01] se introduce una representación en serie de Laurent para una función armónica en $\mathbb{R}^n$. En este capítulo llevamos dicha representación a notación compleja para el caso $n = 2$, hallando una forma general para los polinomios armónicos homogéneos, e investigamos las funciones armónicas cuyo rango tiene interior vacío. Luego, a partir de esta representación, estudiamos las singularidades aisladas de estas funciones, incluyendo el caso en el que la singularidad es el infinito. Finalmente, mostramos una versión del teorema del residuo para funciones armónicas con singularidades aisladas.

2.1. Representación compleja

Un *multi-índice* α es una n-tupla de enteros no negativos $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$. La siguiente notación [ABR01, pag. 19] será conveniente cuando tratemos con series de potencias múltiples: para $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ y $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ un multi-índice, definimos

$$x^\alpha = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \cdots x_n^{\alpha_n} \qquad \text{y} \qquad |\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n.$$

Un polinomio en $\mathbb{C}$ es, por definición, una combinación lineal finita de monomios x^α con coeficientes en $\mathbb{C}$. Un polinomio p de la forma

$$p(x) = \sum_{|\alpha|=m} c_\alpha x^\alpha$$

se dice ser *homogéneo* de *grado* m; aquí permitimos que m sea cualquier entero no negativo. Equivalentemente, un polinomio p es homogéneo de grado m si y sólo si

$$p(tx) = t^m p(x)$$

para todo $t \in \mathbb{R}$ y todo $x \in \mathbb{R}^n$.
En el siguiente teorema mostramos que la escritura estándar para un polinomio armónico homogéneo se puede llevar a notación compleja, lo cual nos permite probar algunos resultados más fácilmente.

Teorema 2.1. *Para $z = x + iy \in \mathbb{C}$, todo polinomio homogéneo de grado m*

$$p(z) = \sum_{\alpha_1+\alpha_2=m} c_{\alpha_1,\alpha_2} x^{\alpha_1} y^{\alpha_2}, \quad m, \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{Z}^+ \cup \{0\}$$

es armónico si y sólo si existen únicos $a, b \in \mathbb{C}$ tales que

$$p(z) = az^m + b\overline{z}^m.$$

Demostración. " $\Leftarrow$ " Supongamos que $p(z) = az^m + b\overline{z}^m$ para algún par de constantes $a, b \in \mathbb{C}$, y veamos que p es un polinomio armónico homogéneo de grado m. Para empezar, si escribimos $z = x + iy$, nos queda que

$$p(x, y) = a(x + iy)^m + b(x - iy)^m,$$

que es claramente un polinomio de grado m en las variables x y y. Además, p tiene la forma $p(z) = h(z) + \overline{g(z)}$ con h y g analíticas, y por lo tanto es armónico. Por otro lado,

$$p(tz) = a(tz)^m + b(\overline{tz})^m = t^m(az^m + b\overline{z}^m) = t^m p(z)$$

para todo $t \in \mathbb{R}$; es decir, p es homogéneo.
" $\Rightarrow$ " Inicialmente notemos que todos los polinomios homogéneos de grado 0 y de grado 1 son armónicos. En efecto, los polinomios de grado 0 son de la forma $p_0(z) = c_{0,0} \in \mathbb{C}$ y los de grado 1 de la forma $p_1(z) = c_{1,0}x + c_{0,1}y$, por lo que claramente $\Delta p_0(z) = \Delta p_1(z) \equiv 0$. Además, si hacemos $a = c_{0,0}$ y $b = 0$, nos queda que $p_0(z) = az^0 + b\overline{z}^0$. Por otro lado, haciendo $a = (c_{1,0} - ic_{0,1})/2$ y $b = (c_{1,0} + ic_{0,1})/2$, obtenemos que

$$az + b\overline{z} = \frac{c_{1,0} - ic_{0,1}}{2}(x + iy) + \frac{c_{1,0} + ic_{0,1}}{2}(x - iy) = c_{1,0}x + c_{0,1}y = p_1(z).$$

Supongamos ahora que $p(z)$ es un polinomio homogéneo armónico de grado $m \geq 2$, entonces

$$p(z) = c_{0,m}y^m + c_{1,m-1}xy^{m-1} + \cdots + c_{m,0}x^m = \sum_{n=0}^{m} c_{n,m-n}x^n y^{m-n} = \sum_{n=0}^{m} c_{m-n,n}x^{m-n}y^n;$$

de donde,

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2}(x, y) = \sum_{n=2}^{m} n(n-1)c_{n,m-n}x^{n-2}y^{m-n} \quad \text{y} \quad \frac{\partial^2 p}{\partial y^2}(x, y) = \sum_{n=2}^{m} n(n-1)c_{m-n,n}x^{m-n}y^{n-2};$$

y por lo tanto,

$$\Delta p(x, y) = \frac{\partial^2 p}{\partial x^2}(x, y) + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2}(x, y) = \sum_{n=2}^{m} n(n-1)(c_{n,m-n}x^{n-2}y^{m-n} + c_{m-n,n}x^{m-n}y^{n-2}).$$

Dado $n \in \{2, \ldots, m\}$, definimos $k = m - (n-2) \in \{2, \ldots, m\}$; de donde, $x^{k-2}y^{m-k} = x^{m-n}y^{n-2}$. Así, $\Delta p(x, y) \equiv 0$ si y sólo si $k(k-1)c_{k,m-k} + n(n-1)c_{m-n,n} = 0$ para todo $n \in \{2, \ldots, m\}$, y por lo tanto

$$c_{m-n,n} = -\frac{k!}{n(n-1)(k-2)!}c_{k,m-k} = -\frac{[m-(n-2)]!}{n(n-1)(m-n)!}c_{m-(n-2),n-2}. \tag{2-1}$$

Veamos que si n es par,

$$c_{m-n,n} = (-1)^{\frac{n}{2}} \frac{m!}{n!(m-n)!} c_{m,0}; \tag{2-2}$$

y que si n es impar,

$$c_{m-n,n} = (-1)^{\frac{n-1}{2}} \frac{(m-1)!}{n!(m-n)!} c_{m-1,1}. \tag{2-3}$$

Razonemos por inducción. Supongamos que $n = 2$, entonces $k = m$; de donde, por (2-1),

$$c_{m-2,2} = -\frac{m!}{2!(m-2)!} c_{m,0} = (-1)^{\frac{n}{2}} \frac{m!}{n!(m-n)!} c_{m,0}.$$

Si $n = 3$, entonces $k = m - 1$; de donde, por (2-1)

$$c_{m-3,3} = -\frac{(m-1)!}{3!(m-3)!} c_{m-1,1} = (-1)^{\frac{n-1}{2}} \frac{(m-1)!}{n!(m-n)!} c_{m-1,1}.$$

Ahora, supongamos que el resultado es cierto para $n-2$ con $n > 3$; entonces:
Si n es par, $n-2$ es par, y por lo tanto, por (2-2)

$$c_{m-(n-2),n-2} = (-1)^{\frac{n-2}{2}} \frac{m!}{(n-2)![m-(n-2)]!} c_{m,0};$$

de donde, reemplazando la ecuación anterior en (2-1)

$$c_{m-n,n} = -\frac{[m-(n-2)]!}{n(n-1)(m-n)!} (-1)^{\frac{n-2}{2}} \frac{m!}{(n-2)![m-(n-2)]!} c_{m,0} = (-1)^{\frac{n}{2}} \frac{m!}{n!(m-n)!} c_{m,0}.$$

Si n es impar, $n-2$ es impar, y por lo tanto, por (2-3)

$$c_{m-(n-2),n-2} = (-1)^{\frac{n-3}{2}} \frac{(m-1!)}{(n-2)![m-(n-2)]!} c_{m-1,1};$$

de donde, reemplazando la ecuación anterior en (2-1)

$$c_{m-n,n} = -\frac{[m-(n-2)]!}{n(n-1)(m-n)!} (-1)^{\frac{n-3}{2}} \frac{(m-1!)}{(n-2)![m-(n-2)]!} c_{m-1,1} = (-1)^{\frac{n-1}{2}} \frac{(m-1)!}{n!(m-n)!} c_{m-1,1}.$$

Luego, si definimos

$$a = \frac{mc_{m,0} - ic_{m-1,1}}{2m} \quad \text{y} \quad b = \frac{mc_{m,0} + ic_{m-1,1}}{2m}$$

nos queda que $a + b = c_{m,0}$ y que $a - b = -ic_{m-1,1}/m$; o equivalentemente,

$$c_{m,0} = a + b \quad \text{y} \quad c_{m-1,1} = im(a-b).$$

Por lo que, si n es par, por (2-2)

$$c_{m-n,n} = (i^2)^{\frac{n}{2}} \frac{m!}{n!(m-n)!}(a+b) = \frac{m!}{n!(m-n)!}[i^n a + (-i)^n b];$$

y si n es impar, por (2-3)

$$c_{m-n,n} = (i^2)^{\frac{n-1}{2}} \frac{(m-1)!}{n!(m-n)!} im(a-b) = \frac{m!}{n!(m-n)!}[i^n a + (-i)^n b].$$

Entonces para todo $n \in \{2, \ldots, m\}$, independientemente de si n es par o impar, tenemos la misma ecuación para $c_{m-n,n}$; e incluso, podemos notar que también es cierta para $n = 0$ y $n = 1$. Lo que quiere decir que, en general,

$$\begin{aligned} p(z) &= \sum_{n=0}^{m} c_{m-n,n} x^{m-n} y^n = \sum_{n=0}^{m} \frac{m!}{n!(m-n)!}[i^n a + (-i)^n b] x^{m-n} y^n \\ &= a \sum_{n=0}^{m} \frac{m!}{n!(m-n)!} x^{m-n} (iy)^n + b \sum_{n=0}^{m} \frac{m!}{n!(m-n)!} x^{m-n} (-iy)^n \\ &= a(x+iy)^m + b(x-iy)^m = az^m + b\overline{z}^m. \end{aligned}$$

Para mostrar la unicidad, supongamos que $p(z) = az^m + b\overline{z}^m = cz^m + d\overline{z}^m$ para ciertas constantes $a, b, c, d \in \mathbb{C}$. Por lo tanto, $(a-c)z^m + (b-d)\overline{z}^m = 0$. Derivando esta última ecuación respecto a z obtenemos que $m(a-c)z^{m-1} = 0$; de donde, $a = c$, quedando así que $(b-d)\overline{z}^m = 0$, por lo que $b = d$. ■

A partir de esta representación podemos demostrar, de forma directa, que dos polinomios definidos en $\mathbb{C}$ que sean armónicos y homogéneos de diferente grado, son ortogonales en la frontera del disco unitario $\mathbb{T} = \partial\mathbb{D}$ [ABR01, pag. 79]. Tengamos que cuenta que en el espacio vectorial de las funciones continuas en $\mathbb{T}$ con valores complejos, se define un producto escalar (hermítico) por

$$\langle f, g \rangle := \int_{\mathbb{T}} f \; \overline{g} \; ds.$$

Sin embargo, el conjugado de un polinomio armónico homogéneo es un polinomio armónico homogéneo del mismo grado, por lo que no resulta necesario conjugar el segundo polinomio para mostrar dicha ortogonalidad.

Corolario 2.1. *Si p y q son polinomios homogéneos armónicos en $\mathbb{C}$ de diferente grado, entonces*

$$\int_{\mathbb{T}} p \; q \; ds = 0.$$

Debemos tener en cuenta que la integral (de linea) respecto a la longitud de arco ds del cálculo no corresponde a la integral sobre una curva del análisis complejo que se hace respecto a z (dz), sino que corresponde a la integral respecto a $|dz|$.

Demostración. Supongamos que p es de grado m y que q es de grado n, con $m > n \geq 0$. Entonces, por el teorema anterior, existen $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ tales que

$$p(z) = az^m + b\overline{z}^m \quad \text{y} \quad q(z) = cz^n + d\overline{z}^n.$$

Ahora bien, para todo $z \in \mathbb{T}$

$$(p\ q)(z) = (az^m + bz^{-m})(cz^n + dz^{-n}) = acz^{m+n} + adz^{m-n} + bcz^{-(m-n)} + bdz^{-(m+n)}.$$

Luego, para $\gamma(t) = e^{it}$, $0 \leq t \leq 2\pi$:

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{T}} p\ q\ ds &= \int_\gamma \left[acz^{m+n} + adz^{m-n} + bcz^{-(m-n)} + bdz^{-(m+n)}\right] |dz| \\
&= \int_0^{2\pi} \left[ace^{i(m+n)t} + ade^{i(m-n)t} + bce^{-i(m-n)t} + bde^{-i(m+n)t}\right] |ie^{it}| dt \\
&= \left.\frac{ace^{i(m+n)t}}{i(m+n)} + \frac{ade^{i(m-n)t}}{i(m-n)} - \frac{bce^{-i(m-n)t}}{i(m-n)} - \frac{bde^{-i(m+n)t}}{i(m+n)}\right|_0^{2\pi} \;=\; 0;
\end{aligned}$$

puesto que $m - n > 0$ y $e^{i(2\pi k)} = 1$ para todo $k \in \mathbb{Z}$. ■

El siguiente corolario es una versión más general del resultado anterior.

Corolario 2.2. *Si p y q son polinomios en $\mathbb{C}$ y q es armónico y homogéneo con grado mayor que el grado de p, entonces*

$$\int_{\mathbb{T}} p\ q\ ds = 0.$$

Demostración. Supongamos que p es de grado m y que q es de grado n, con $0 \leq m < n$. Digamos que

$$p(x, y) = \sum_{0 \leq \alpha+\beta \leq m} c_{\alpha,\beta} x^\alpha y^\beta.$$

Para $j \in \{0, 1, \ldots, m\}$, sean

$$p_j := p_j(x, y) = \sum_{\alpha+\beta=j} c_{\alpha,\beta} x^\alpha y^\beta.$$

Entonces, es claro que $p = p_0 + p_1 + \cdots + p_m$, siendo cada p_j un polinomio armónico homogéneo. Ahora bien, puesto que $m < n$, entonces $j \neq n$ para todo $j \in \{0, 1, \ldots, m\}$; y por lo tanto,

$$\int_{\mathbb{T}} p_j q\ ds = 0.$$

Así,

$$\int_{\mathbb{T}} p\ q\ ds = \int_{\mathbb{T}} \sum_{j=0}^m p_j q\ ds = \sum_{j=0}^m \int_{\mathbb{T}} p_j q\ ds = 0.$$

■

Sean $z_0 \in \mathbb{C}$, D un disco abierto centrado en z_0 y f una función armónica en el disco punzado $D^* = D \setminus \{z_0\}$; por lo que z_0 es una *singularidad aislada* de f. El siguiente teorema da la representación en serie de Laurent de f alrededor de z_0 en términos de z y $\overline{z}$.

Teorema 2.2. *Sea f una función armónica en el disco punzado D^*. Entonces, existen únicas constantes $a_m, b_m, A \in \mathbb{C}$, tales que*

$$f(z) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} [a_m(z - z_0)^m + \overline{b_m}(\overline{z - z_0})^m] + A \log |z - z_0| \tag{2-4}$$

en D^*. La serie converge absoluta y uniformemente en subconjuntos compactos de D^*.

Demostración. Supongamos, sin pérdida de generalidad, que $z_0 = 0$. Consideremos la función $\widehat{f}(z) := f(1/\overline{z})$, la cual es armónica en $\mathbb{C} \setminus r\overline{\mathbb{D}}$, siendo r el recíproco del radio de D. Por el Teorema de descomposición [ABR01, pág. 195] se tiene que $\widehat{f} = \widehat{h} + \widehat{g}$, donde $\widehat{h}$ es armónica en $\mathbb{C}$ y $\widehat{g}$ es una función armónica en $\mathbb{C} \setminus r\overline{\mathbb{D}}$ tal que $\lim_{z\to\infty}[\widehat{g}(z) + A \log |z|] = 0$ para alguna constante $A \in \mathbb{C}$. Como $\widehat{h}$ es armónica en $\mathbb{C}$, de acuerdo a un resultado en [ABR01, pág. 100], existen polinomios armónicos homogéneos q_m, $m \in \mathbb{N}$, tales que

$$\widehat{h}(z) = \sum_{m=0}^{\infty} q_m(z)$$

para todo $z \in \mathbb{C}$; dicha serie converge absoluta y uniformemente en subconjuntos compactos de $\mathbb{C}$ (converge absoluta y *normalmente* en $\mathbb{C}$). Por otro lado, si $g(z) := \widehat{g}(1/\overline{z})$, entonces $\lim_{z\to 0}[g(z) - A \log |z|] = 0$; por lo que la función $g(z) - A \log |z|$ resulta ser armónica en D, y por lo tanto, existen polinomios armónicos homogéneos p_m, $m \in \mathbb{N}$, tales que

$$g(z) - A \log |z| = \sum_{m=0}^{\infty} p_m(z)$$

para todo $z \in D$; dicha serie converge absoluta y normalmente en D. De esta forma, $f = h+g$, donde

$$h(z) := \widehat{h}(1/\overline{z}) = \sum_{m=0}^{\infty} q_m\left(\frac{z}{|z|^2}\right) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{q_m(z)}{|z|^{2m}}$$

para todo $z \in D^*$; dicha serie converge absoluta y normalmente en D^*. Luego, para todo $z \in D^*$,

$$f(z) = \sum_{m=0}^{\infty} p_m(z) + A \log |z| + \sum_{m=0}^{\infty} \frac{q_m(z)}{|z|^{2m}},$$

cuyas series convergen absoluta y normalmente en D^*. Por el Teorema 2.1, para cada $m \in \mathbb{Z}^+$, existen únicas constantes $a_m, b_m, a_{-m}, b_{-m} \in \mathbb{C}$ tales que

$$p_m = a_m z^m + \overline{b_m}\overline{z}^m \quad \text{y} \quad q_m = \overline{b_{-m}} z^m + a_{-m}\overline{z}^m.$$

Así, si tomamos $a_0 = p_0 + q_0$ y $b_0 = 0$, nos queda que para todo $z \in D^*$

$$\begin{aligned} f(z) &= \sum_{m=0}^{\infty}[a_m z^m + \overline{b_m}\overline{z}^m] + A\log|z| + \sum_{m=1}^{\infty}\frac{\overline{b_{-m}}z^m + a_{-m}\overline{z}^m}{z^m\overline{z}^m} \\ &= \sum_{m=0}^{\infty}[a_m z^m + \overline{b_m}\overline{z}^m] + A\log|z| + \sum_{m=1}^{\infty}[a_{-m}z^{-m} + \overline{b_{-m}}\overline{z}^{-m}] \\ &= \sum_{m=-\infty}^{\infty}[a_m z^m + \overline{b_m}\overline{z}^m] + A\log|z|; \end{aligned}$$

dicha serie converge absoluta y normalmente en D^*. ■

Si definimos h y g como las funciones

$$h(z) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} a_m(z - z_0)^m \qquad \text{y} \qquad g(z) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} b_m(z - z_0)^m,$$

las cuales son analíticas en D^*, entonces de la representación (2-4),

$$f(z) = h(z) + \overline{g(z)} + A\log|z - z_0|,$$

como se afirma, sin prueba, en [HS87]. A la función $h(z)$ la llamamos *la parte analítica* de f en z_0; a $g(z)$, *la parte coanalítica*; y a $A\log|z - z_0|$, *el término logarítmico.*

Teorema 2.3. *Sea f una función armónica con una singularidad aislada en un punto $z_0 \in \mathbb{C}$. Entonces, f es real-valuada en una vecindad de z_0 si y sólo si tiene alrededor de z_0 una representación de la forma*

$$f = H + \overline{H} + A\log|z - z_0|,$$

donde H es analítica en un disco D^* punzado en z_0 y A es una constante real.

Demostración. Como f tiene una singularidad aislada en z_0, existen h y g analíticas en un disco D^* punzado en z_0 y $A \in \mathbb{C}$ constante tales que

$$f = h + \overline{g} + A\log|z - z_0|.$$

Tomemos $h = u_h + iv_h$ y $g = u_g + iv_g$, entonces

$$\begin{aligned} f &= u_h + iv_h + u_g - iv_g + \mathrm{Re}\{A\}\log|z - z_0| + i\mathrm{Im}\{A\}\log|z - z_0| \\ &= (u_h + u_g + \mathrm{Re}\{A\}\log|z - z_0|) + i(v_h - v_g + \mathrm{Im}\{A\}\log|z - z_0|); \end{aligned}$$

es decir, f es real-valuada si y sólo si $v_h - v_g + \mathrm{Im}\{A\}\log|z - z_0| = 0$.
Sea $H = (h + g)/2$, que claramente es analítica en D^*. Ahora bien,

$$f = H + \overline{H} + \mathrm{Re}\{A\}\log|z - z_0|$$

si y sólo si

$$f = \frac{h+g}{2} + \frac{\overline{h}+\overline{g}}{2} + \mathrm{Re}\{A\}\log|z-z_0|$$

si y sólo si

$$h + \overline{g} + A\log|z-z_0| = \frac{u_h + iv_h + u_g + iv_g}{2} + \frac{u_h - iv_h + u_g - iv_g}{2} + \mathrm{Re}\{A\}\log|z-z_0|$$

si y sólo si

$$u_h + iv_h + u_g - iv_g + (\mathrm{Re}\{A\} + i\mathrm{Im}\{A\})\log|z-z_0| = u_h + u_g + \mathrm{Re}\{A\}\log|z-z_0|$$

si y sólo si

$$iv_h - iv_g + i\mathrm{Im}\{A\}\log|z-z_0| = 0$$

si y sólo si f es real-valuada. ■

Como en el Teorema 2.3, H es analítica en D^*, entonces H tiene una representación en serie de Laurent en D^* de la forma

$$H(z) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} a_m(z-z_0)^m.$$

Así, podemos dar una representación en serie de Laurent más específica para una función real-valuada f, como se indica en el siguiente corolario.

Corolario 2.3. *Sea f una función armónica con una singularidad aislada en un punto $z_0 \in \mathbb{C}$. Entonces, f es real-valuada en una vecindad de z_0 si y sólo si tiene una representación en serie de Laurent alrededor de z_0 de la forma*

$$f(z) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \left[a_m(z-z_0)^m + \overline{a_m}(\overline{z-z_0})^m\right] + A\log|z-z_0|,$$

con $a_m \in \mathbb{C}$ y $A \in \mathbb{R}$ constantes para todo $m \in \mathbb{Z}$.

2.2. Clasificación de las singularidades aisladas

Sean $z_0 \in \mathbb{C}$, D un disco abierto en $\mathbb{C}$ que contiene a z_0, y f una función armónica en $D^* = D \setminus \{z_0\}$; entonces f tiene una *singularidad aislada* en z_0. Clasificamos la singularidad de f en z_0 de la misma forma que se hace para funciones holomorfas; es decir, decimos que:

- z_0 es una *singularidad removible* de f si existe una función $\widehat{f}$ armónica en D tal que para todo $z \in D^*$, $f(z) = \widehat{f}(z)$.
- z_0 es un *polo* de f si $\lim_{z\to z_0} |f(z)| = +\infty$.

- z_0 es una *singularidad esencial* de f si no es un polo ni una singularidad removible.

A partir de la expansión en serie de Laurent de f alrededor de z_0, ecuación (2-4), llamamos a la expresión

$$\sum_{m=-\infty}^{-1}[a_m(z-z_0)^m+\overline{b_m}(\overline{z-z_0})^m]+A\log|z-z_0|$$

la *parte principal* de f en z_0.

2.2.1. Caracterización

Así como para funciones holomorfas, las singularidades removibles de las funciones armónicas se pueden caracterizar a partir de su expansión en serie de Laurent alrededor de la singularidad.

Proposición 2.1. *Sea f una función armónica con una singularidad aislada en z_0. Entonces, f tiene una singularidad removible en z_0 si y sólo si cada término en la parte principal de f en z_0 es cero.*

Demostración. "$\Rightarrow$" Si z_0 es una singularidad removible de f, entonces existe una función $\widehat{f}$, armónica en D, tal que para todo $z \in D^*$, $f(z)=\widehat{f}(z)$. Ahora bien, al ser $\widehat{f}$ armónica en D, existen funciones h y g holomorfas en D tales que $\widehat{f}=h+\overline{g}$. Como h y g son holomorfas en D, tienen expansión en serie de potencias en D de la forma

$$h(z)=\sum_{m=0}^{\infty}a_m(z-z_0)^m \quad \text{y} \quad g(z)=\sum_{m=0}^{\infty}b_m(z-z_0)^m;$$

y por lo tanto, para todo $z\in D^*$,

$$f(z)=\widehat{f}(z)=h(z)+\overline{g(z)}=\sum_{m=0}^{\infty}[a_m(z-z_0)^m+\overline{b_m}(\overline{z-z_0})^m].$$

Así, por la unicidad en la expansión en serie de Laurent de una función armónica, cada término en la parte principal de f en z_0 es cero.
"$\Leftarrow$" Si cada término en la parte principal de f en z_0 es cero, definimos a $\widehat{f}$ en D igual a la expansión en serie de Laurent de f alrededor de z_0; entonces $\widehat{f}$ es armónica en D y para todo $z\in D^*$, $f(z)=\widehat{f}(z)$. En conclusión, z_0 es una singularidad removible de f. ■

Teorema 2.4. *Si f es armónica con una singularidad aislada en z_0, entonces*

(a) *cada término en la parte principal de f en z_0 es cero si y sólo si*

$$\lim_{z\to z_0}\frac{f(z)}{\log|z-z_0|}=0;$$

(b) *la parte principal de f en z_0 es un múltiplo diferente de cero de* $\log|z-z_0|$ *si y sólo si*

$$0 < \lim_{z\to z_0}\left|\frac{f(z)}{\log|z-z_0|}\right| < +\infty;$$

(c) *existe un entero positivo M tal que en la parte principal de f en z_0, $a_{-M}\neq 0$ o $b_{-M}\neq 0$, y $a_{-m}=0=b_{-m}$ para todo $m>M$ si y sólo si*

$$0 < \limsup_{z\to z_0}|z-z_0|^M|f(z)| < +\infty;$$

(d) *la parte principal de f en z_0 tiene infinitos términos diferentes de cero si y sólo si*

$$\limsup_{z\to z_0}|z-z_0|^N|f(z)| = +\infty$$

para todo entero positivo N.

Demostración.

(a) " $\Rightarrow$ " Supongamos que cada término en la parte principal de f en z_0 es cero; por lo tanto, la expansión en serie de Laurent de f alrededor de z_0 queda de la siguiente forma:

$$f(z) = \sum_{m=0}^{\infty}[a_m(z-z_0)^m + \overline{b_m}(\overline{z-z_0})^m];$$

por lo que $\lim_{z\to z_0} f(z) = a_0 + \overline{b_0} \in \mathbb{C}$; pero $\lim_{z\to z_0}\log|z-z_0| = -\infty$, y en consecuencia

$$\lim_{z\to z_0}\frac{f(z)}{\log|z-z_0|} = 0. \tag{2-5}$$

(b) " $\Rightarrow$ " Supongamos que la parte principal de f en z_0 es un múltiplo diferente de cero de $\log|z-z_0|$; por lo tanto, la expansión en serie de Laurent de f alrededor de z_0 queda de la siguiente forma:

$$f(z) = \sum_{m=0}^{\infty}[a_m(z-z_0)^m + \overline{b_m}(\overline{z-z_0})^m] + A\log|z-z_0|,$$

con $A\neq 0$; de donde, por (2-5)

$$\lim_{z\to z_0}\left|\frac{f(z)}{\log|z-z_0|}\right| = \lim_{z\to z_0}\left|\frac{1}{\log|z-z_0|}\sum_{m=0}^{\infty}[a_m(z-z_0)^m + \overline{b_m}(\overline{z-z_0})^m] + \frac{A\log|z-z_0|}{\log|z-z_0|}\right| = |A|;$$

y claramente $0<|A|<+\infty$.

(c) " $\Rightarrow$ " La serie de Laurent de f en este caso queda de la forma

$$f(z) = \sum_{m=-M}^{\infty} [a_m(z-z_0)^m + \overline{b_m}(\overline{z-z_0})^m] + A \log|z-z_0|,$$

con $a_{-M} \neq 0$ o $b_{-M} \neq 0$. Sean $r(z) := |z-z_0|$ y $\zeta(z) = \dfrac{z-z_0}{r(z)} \in \mathbb{T}$; entonces

$$\begin{aligned} |z-z_0|^M |f(z)| &= r^M \left| \sum_{m=-M}^{\infty} [a_m(r\zeta)^m + \overline{b_m}(\overline{r\zeta})^m] + A \log r \right| \\ &= \left| \sum_{m=-M}^{\infty} \left[a_m r^{M+m}\zeta^m + \overline{b_m} r^{M+m}\overline{\zeta}^m\right] + A r^M \log r \right|. \end{aligned}$$

Ahora bien, si $z \to z_0$ entonces $r \to 0$, pero $r^M \log r$ tiende a 0 cuando $r \to 0$, al igual que la expresión $a_m r^{M+m}\zeta^m + \overline{b_m} r^{M+m}\overline{\zeta}^m$ cuando $m > -M$; sin embargo, cuando $m = -M$ nos queda que

$$a_m r^{M+m}\zeta^m + \overline{b_m} r^{M+m}\overline{\zeta}^m = a_{-M} r^0 \zeta^{-M} + \overline{b_{-M}} r^0 \overline{\zeta}^{-M} = a_{-M}\overline{\zeta}^M + \overline{b_{-M}}\zeta^M.$$

Llamemos $p(z) = |z-z_0|^M |f(z)|$, $q(z) = |a_{-M}\overline{\zeta(z)}^M + \overline{b_{-M}}\zeta(z)^M|$ y

$$s(z) = \left| \sum_{m=-M+1}^{\infty} \left[a_m r(z)^{M+m}\zeta(z)^m + \overline{b_m} r(z)^{M+m}\overline{\zeta(z)}^m\right] + A r(z)^M \log r(z) \right|;$$

así, $q(z) - s(z) \leq p(z) \leq q(z) + s(z)$. Luego, como $\limsup_{z\to z_0} s(z) = \lim_{z\to z_0} s(z) = 0$,

$$\begin{aligned} \limsup_{z\to z_0} q(z) &\leq \limsup_{z\to z_0} p(z) + \limsup_{z\to z_0} s(z) \\ &= \limsup_{z\to z_0} p(z) \\ &\leq \limsup_{z\to z_0} q(z) + \limsup_{z\to z_0} s(z) \\ &= \limsup_{z\to z_0} q(z); \end{aligned}$$

esto quiere decir que

$$\limsup_{z\to z_0} |z-z_0|^M |f(z)| = \limsup_{z\to z_0} |a_{-M}\overline{\zeta(z)}^M + \overline{b_{-M}}\zeta(z)^M|.$$

Sin embargo, $|a_{-M}\overline{\zeta}^M + \overline{b_{-M}}\zeta^M| \leq |a_{-M}| + |b_{-M}|$ para todo $\zeta \in \mathbb{T}$, por lo que

$$L := \sup_{\zeta\in\mathbb{T}} |a_{-M}\overline{\zeta}^M + \overline{b_{-M}}\zeta^M| = \max_{\zeta\in\mathbb{T}} |a_{-M}\overline{\zeta}^M + \overline{b_{-M}}\zeta^M| < +\infty;$$

y por lo tanto, existe $\zeta_0 \in \mathbb{T}$ tal que

$$q(z_0 + \zeta_0) = |a_{-M}\overline{\zeta_0}^M + \overline{b_{-M}}\zeta_0^M| = \sup_{\zeta\in\mathbb{T}} |a_{-M}\overline{\zeta}^M + \overline{b_{-M}}\zeta^M| = L.$$

Además, para todo $\zeta \in \mathbb{T}$ y todo $r > 0$,

$$\begin{aligned} q(z_0 + r\zeta) &= \left| a_{-M} \overline{\left(\frac{z_0 + r\zeta - z_0}{|z_0 + r\zeta - z_0|} \right)}^M + \overline{b_{-M}} \left(\frac{z_0 + r\zeta - z_0}{|z_0 + r\zeta - z_0|} \right)^M \right| \\ &= |a_{-M}\overline{\zeta}^M + \overline{b_{-M}}\zeta^M| \;=\; q(z_0 + \zeta). \end{aligned}$$

Veamos que $\limsup_{z \to z_0} q(z) = L$. En efecto, $\lim_{r\to 0} q(z_0 + r\zeta_0) = \lim_{r\to 0} q(z_0 + \zeta_0) = L$; y también, para todo $\zeta \in \mathbb{T}$ y todo $r > 0$,

$$q(z_0 + r\zeta) = q(z_0 + \zeta) \leq \sup_{\xi \in \mathbb{T}} q(z_0 + \xi) = q(z_0 + \zeta_0) = L;$$

y en consecuencia,

$$\limsup_{z \to z_0} |a_{-M}\overline{\zeta(z)}^M + \overline{b_{-M}}\zeta(z)^M| = \sup_{\zeta \in \mathbb{T}} |a_{-M}\overline{\zeta}^M + \overline{b_{-M}}\zeta^M| < +\infty.$$

Por otro lado, si fuera $\sup_{\zeta\in\mathbb{T}} |a_{-M}\overline{\zeta}^M + \overline{b_{-M}}\zeta^M| = 0$, se tendría que $a_{-M}\overline{\zeta}^M + \overline{b_{-M}}\zeta^M = 0$ para todo $\zeta \in \mathbb{T}$. Multiplicando la última expresión por ζ^M queda que

$$a_{-M}|\zeta|^{2M} + \overline{b_{-M}}\zeta^{2M} = a_{-M} + \overline{b_{-M}}\zeta^{2M} = 0$$

para todo $\zeta \in \mathbb{T}$. Evaluando en $\zeta = 1$ obtenemos que $a_{-M} + \overline{b_{-M}} = 0$; y evaluando en $\zeta = e^{i\frac{\pi}{2M}}$ obtenemos que $a_{-M} + \overline{b_{-M}}e^{i\pi} = a_{-M} - \overline{b_{-M}} = 0$. Al sumar y al restar las dos últimas ecuaciones se obtiene que $a_{-M} = 0$ y que $b_{-M} = 0$, lo que contradice la hipótesis. En conclusión,

$$0 < \limsup_{z \to z_0} |z - z_0|^M |f(z)| < +\infty.$$

(d) “ $\Rightarrow$ ” Probemos el contrarrecíproco; es decir, supongamos que para algún entero positivo N existe un real no negativo L tal que $\limsup_{z\to z_0} |z - z_0|^N |f(z)| = L < +\infty$, y veamos que la parte principal de f en z_0 tiene finitos términos diferentes de cero. Entonces, dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta \in (0, 1)$ tal que $|z - z_0|^N |f(z)| < L + \varepsilon$ para todo $z \in D^* = D(z_0, \delta) \setminus \{z_0\}$. Esto es,

$$\left| \sum_{m=-\infty}^{\infty} [a_m(z - z_0)^m + \overline{b_m}(\overline{z - z_0})^m] + A \log |z - z_0| \right| < \frac{L + \varepsilon}{|z - z_0|^N}.$$

Podemos tomar a δ lo suficientemente pequeño como para que la serie

$$\sum_{m=0}^{\infty} [a_m(z - z_0)^m + \overline{b_m}(\overline{z - z_0})^m]$$

resulte armónica en un disco que contenga a $\overline{D(z_0, \delta)}$. De esta forma, dicha serie es continua en $\overline{D(z_0, \delta)}$, por lo que su módulo alcanza un máximo absoluto en dicho compacto, llamémoslo c; es decir,

$$c := \sup_{z \in D(z_0, \delta)} \left| \sum_{m=0}^{\infty} [a_m(z - z_0)^m + \overline{b_m}(\overline{z - z_0})^m] \right| < +\infty.$$

Dado $z \in D^*$, tomamos $r = |z - z_0| \in (0, \delta)$ y $\zeta = (z - z_0)/r \in \mathbb{T}$. Así,

$$\begin{aligned} \frac{L+\varepsilon}{r^N} &> \left| \sum_{m=-\infty}^{-1} \left[a_m (r\zeta)^m + \overline{b_m} \left(\overline{r\zeta}\right)^m \right] \right| - \left| \sum_{m=0}^{\infty} \left[a_m (r\zeta)^m + \overline{b_m} \left(\overline{r\zeta}\right)^m \right] \right| - |A \log r| \\ &\geq \left| \sum_{m=-\infty}^{-1} r^m \left(a_m \zeta^m + \overline{b_m}\ \overline{\zeta}^m \right) \right| - c - |A \log r|. \end{aligned}$$

Por consiguiente,

$$\left| \sum_{m=1}^{\infty} r^{-m} \left(a_{-m} \zeta^{-m} + \overline{b_{-m}}\ \overline{\zeta}^{-m} \right) \right| < \frac{L+\varepsilon}{r^N} + c + |A \log r| = \frac{L + \varepsilon + r^N c + |A r^N \log r|}{r^N};$$

pero $r < \delta < 1$, por lo que $r^N c < c$; y como $r^N \log r \to 0$ cuando $r \to 0$, entonces $|A r^N \log r| < |A|$ para r suficientemente pequeño. Así,

$$\left| \sum_{m=1}^{\infty} \frac{a_{-m}\overline{\zeta}^m + \overline{b_{-m}} \zeta^m}{r^m} \right| < \frac{L + \varepsilon + c + |A|}{r^N} = \frac{C}{r^N},$$

para $C = L + \varepsilon + c + |A|$ y r suficientemente pequeño. Sea j un entero con $j > N$, entonces

$$\begin{aligned} \frac{1}{r^{2j}} \int_{\mathbb{T}} |a_{-j}\overline{\zeta}^j + \overline{b_{-j}}\zeta^j|^2 ds &\leq \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{r^{2m}} \int_{\mathbb{T}} |a_{-m}\overline{\zeta}^m + \overline{b_{-m}}\zeta^m|^2 ds \\ &= \int_{\mathbb{T}} \sum_{m=1}^{\infty} \left| \frac{a_{-m}\overline{\zeta}^m + \overline{b_{-m}}\zeta^m}{r^m} \right|^2 ds \\ &= \int_{\mathbb{T}} \left| \sum_{m=1}^{\infty} \frac{a_{-m}\overline{\zeta}^m + \overline{b_{-m}}\zeta^m}{r^m} \right|^2 ds \quad \text{(por el Corolario 2.1)} \\ &< \frac{C^2}{r^{2N}} \int_{\mathbb{T}} ds \ = \ \frac{2\pi C^2}{r^{2N}} \end{aligned}$$

para $r > 0$ suficientemente pequeño. Tenemos entonces que

$$\int_{\mathbb{T}} |a_{-j}\overline{\zeta}^j + \overline{b_{-j}}\zeta^j|^2 d\zeta < r^{2j} \frac{2\pi C^2}{r^{2N}} = 2\pi r^{2(j-N)} C^2.$$

Como esto es cierto para todo $r \in (0, \delta)$ suficientemente pequeño y como $j > N$, entonces

$$\int_{\mathbb{T}} |a_{-j}\overline{\zeta}^j + \overline{b_{-j}}\zeta^j|^2 d\zeta = 0.$$

De este modo, $a_{-j}\overline{\zeta}^j + \overline{b_{-j}}\zeta^j = 0$ para todo $\zeta \in \mathbb{T}$, y por lo tanto $a_{-j} = 0$ y $b_{-j} = 0$ para todo $j > N$. En conclusión, si $\limsup_{z \to z_0} |z - z_0|^N |f(z)| < +\infty$ para algún entero positivo N, entonces la parte principal de f en z_0 tiene finitos términos diferentes de cero; o lo que es lo mismo, si la parte principal de f en z_0 tiene infinitos términos diferentes de cero, entonces $\limsup_{z \to z_0} |z - z_0|^N |f(z)| = +\infty$ para todo entero positivo N.

(a) “ $\Leftarrow$ ” Supongamos que

$$\lim_{z\to z_0} \frac{f(z)}{\log|z-z_0|} = 0,$$

entonces la parte principal de f en z_0 no puede ser un múltiplo diferente de cero de $\log|z-z_0|$, pues como vimos en la implicación a derecha de (b), en ese caso se tendría que

$$0 < \lim_{z\to z_0} \left|\frac{f(z)}{\log|z-z_0|}\right| < +\infty.$$

Por otro lado, para cada entero $M > 0$ tenemos que

$$\limsup_{z\to z_0} |z-z_0|^M |f(z)| = \limsup_{z\to z_0} \left|\frac{f(z)}{\log|z-z_0|}\right| \left||z-z_0|^M \log|z-z_0|\right| = 0;$$

y por lo tanto, la parte principal de f en z_0 no puede tener infinitos términos diferentes de cero, pues como vimos en la implicación a derecha de (d), en ese caso se tendría que

$$\limsup_{z\to z_0} |z-z_0|^N |f(z)| = +\infty$$

para todo entero positivo N. Supongamos entonces que la parte principal de f en z_0 tiene finitos términos diferentes de cero; por lo tanto, existe un entero positivo M tal que en la parte principal de f en z_0, $a_{-M} \neq 0$ o $b_{-M} \neq 0$, y $a_{-m} = 0 = b_{-m}$ para todo $m > M$, y como vimos en la implicación a derecha de (c), en ese caso se tendría que

$$0 < \limsup_{z\to z_0} |z-z_0|^M |f(z)| < +\infty;$$

¡contradicción!, pues $\limsup_{z\to z_0} |z-z_0|^M |f(z)| = 0$. En conclusión, cada término en la parte principal de f en z_0 es cero.

(b) “ $\Leftarrow$ ” Supongamos que

$$0 < \lim_{z\to z_0} \left|\frac{f(z)}{\log|z-z_0|}\right| < +\infty;$$

entonces, debe existir algún término diferente de cero en la parte principal de f en z_0; ya que si todos fueran iguales a cero, como vimos en la implicación a derecha de (a), se tendría que

$$\lim_{z\to z_0} \frac{f(z)}{\log|z-z_0|} = 0.$$

Por otro lado, para cada entero $M > 0$ tenemos que

$$\limsup_{z\to z_0} |z-z_0|^M |f(z)| = \limsup_{z\to z_0} \left|\frac{f(z)}{\log|z-z_0|}\right| \left||z-z_0|^M \log|z-z_0|\right| = 0;$$

y por lo tanto, la parte principal de f en z_0 no puede tener infinitos términos diferentes de cero, pues como vimos en la implicación a derecha de (d), en ese caso se tendría que

$$\limsup_{z\to z_0} |z-z_0|^N |f(z)| = +\infty$$

para todo entero positivo N. Tenemos entonces que la parte principal de f en z_0 tiene finitos términos diferentes de cero. Supongamos que existe un entero positivo M tal que en la parte principal de f en z_0, $a_{-M} \neq 0$ o $b_{-M} \neq 0$, y $a_{-m} = 0 = b_{-m}$ para todo $m > M$; entonces, como vimos en la implicación a derecha de (c),

$$0 < \limsup_{z \to z_0} |z - z_0|^M |f(z)| < +\infty;$$

¡contradicción!, pues $\limsup_{z \to z_0} |z - z_0|^M |f(z)| = 0$. En conclusión, la parte principal de f en z_0 es un múltiplo diferente de cero de $\log |z - z_0|$.

(c) “ $\Leftarrow$ ” Supongamos que hay un entero positivo M tal que

$$0 < \limsup_{z \to z_0} |z - z_0|^M |f(z)| < +\infty.$$

Pero, si $\limsup_{z \to z_0} |z - z_0|^M |f(z)| < +\infty$, entonces $a_{-j} = 0$ y $b_{-j} = 0$ para todo $j > M$, como vimos en la prueba de la implicación a derecha del literal (d); y por lo tanto,

$$f(z) = \sum_{m=-M}^{\infty} [a_m (z - z_0)^m + \overline{b_m} (\overline{z - z_0})^m] + A \log |z - z_0|.$$

Esto quiere decir, como vimos en la prueba de la implicación a derecha del literal (c), que

$$\limsup_{z \to z_0} |z - z_0|^M |f(z)| = \sup_{\zeta \in \mathbb{T}} |a_{-M} \overline{\zeta}^M + \overline{b_{-M}} \zeta^M|;$$

pero $\limsup_{z \to z_0} |z - z_0|^M |f(z)| > 0$; por lo que, necesariamente $a_{-M} \neq 0$ o $b_{-M} \neq 0$.

(d) “ $\Leftarrow$ ” Supongamos que $\limsup_{z \to z_0} |z - z_0|^N |f(z)| = +\infty$ para todo entero positivo N, y veamos que la parte principal de f en z_0 tiene infinitos términos diferentes de cero. Razonemos por reducción al absurdo y supongamos que la parte principal de f en z_0 tiene finitos términos diferentes de cero, en cuyo caso, la expansión en serie de Laurent de f tiene la forma

$$f(z) = \sum_{m=-M}^{\infty} [a_m (z - z_0)^m + \overline{b_m} (\overline{z - z_0})^m] + A \log |z - z_0|,$$

siendo $M > 0$, con $a_{-M} \neq 0$ o $b_{-M} \neq 0$, ó $M = 0$. Si $M > 0$, por la implicación a derecha de (c), se tiene que

$$0 < \limsup_{z \to z_0} |z - z_0|^M |f(z)| < +\infty;$$

lo que contradice la hipótesis. Si $M = 0$, tomamos a $r := |z - z_0|$ y a $\zeta := (z - z_0)/r \in \mathbb{T}$; entonces

$$\begin{aligned} |z - z_0||f(z)| &= r \left| \sum_{m=0}^{\infty} [a_m (r\zeta)^m + \overline{b_m} (\overline{r\zeta})^m] + A \log r \right| \\ &= \left| \sum_{m=0}^{\infty} \left[a_m r^{m+1} \zeta^m + \overline{b_m} r^{m+1} \overline{\zeta}^m \right] + A r \log r \right|. \end{aligned}$$

Ahora bien, si $z \to z_0$ entonces $r \to 0$, pero $r \log r$ y r^{m+1} tienden a 0 cuando $r \to 0$ para todo $m \in \mathbb{Z}^+ \cup \{0\}$. Esto implica que

$$\limsup_{z \to z_0} |z - z_0||f(z)| = 0,$$

lo que contradice la hipótesis. En conclusión, la parte principal de f en z_0 tiene infinitos términos diferentes de cero. ∎

2.2.2. Polos y singularidades esenciales

En esta subsección veremos que hay singularidades que no se pueden determinar completamente a partir de la serie de Laurent de la función; es decir, ya sabemos que si la parte principal no es nula tenemos un polo o una singularidad esencial, pero hay casos en los que no se puede determinar a partir del número de términos en la parte principal de cual de los dos se trata; por ende, no definimos el orden de un polo a partir de la serie de Laurent.

Corolario 2.4. *Sea f una función armónica en un disco agujereado y centrado en z_0, $D^* = D(z_0, r) \smallsetminus \{z_0\}$. Si la parte principal de f en z_0 es un múltiplo diferente de cero de $\log |z - z_0|$, entonces f tiene un polo en z_0.*

Demostración. Por la parte (b) del teorema anterior, tenemos que

$$0 < \lim_{z \to z_0} \left| \frac{f(z)}{\log |z - z_0|} \right| < +\infty;$$

y en consecuencia,

$$\lim_{z \to z_0} |f(z)| = \lim_{z \to z_0} \left| \frac{f(z)}{\log |z - z_0|} \right| \big| \log |z - z_0| \big| = +\infty.$$

En conclusión, f tiene un polo en z_0. ∎

Definición 2.1. *Sea f una función armónica en un disco agujereado y centrado en z_0, $D^* = D(z_0, r) \smallsetminus \{z_0\}$. Si la parte principal de f en z_0 es un múltiplo diferente de cero de $\log |z - z_0|$, decimos que f tiene un **polo fundamental** en z_0.*

Sabemos por [ST00] que si z_0 es un polo de una función armónica f, existe un $\eta > 0$ tal que si $0 < r < \eta$ y γ es el círculo $\{z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| = r\}$, entonces $\Delta_\gamma \arg f(z)$ es independiente de r y es un múltiplo entero de 2π. Allí se define el *orden* de dicho polo por $-(1/2\pi)\Delta_\gamma \arg f(z) \in \mathbb{Z}$. Veamos que, por ejemplo, el orden de un polo fundamental es cero.

Ejemplo 2.1. Sea f una función armónica con un polo fundamental en un punto z_0. Entonces la expansión en serie de Laurent de f alrededor de z_0 tiene la forma

$$f(z) = \sum_{m=0}^{\infty} [a_m (z - z_0)^m + \overline{b_m} (\overline{z - z_0})^m] + A \log |z - z_0|,$$

con $A \neq 0$. Luego, dado $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que si $|z - z_0| = r < \delta$ entonces

$$\left| f(z) - A \log|z - z_0| - (a_0 + \overline{b_0}) \right| = \left| \sum_{m=1}^{\infty} [a_m (z - z_0)^m + \overline{b_m} (\overline{z - z_0})^m] \right| < \epsilon,$$

por la continuidad de dicha serie de potencias en z_0. En otras palabras, el círculo $\gamma := \{z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| = r\}$ es enviado por f a una distancia menor que ϵ del punto $A \log r + a_0 + \overline{b_0}$, el cual tiende a ∞ cuando r tiende a 0. De este modo, concluimos que $\Delta_\gamma \arg f(z) = 0$ y que por tanto, el orden del polo de f en z_0 es cero.

Sin embargo, como veremos a continuación, los polos fundamentales no son los únicos polos de orden cero.

Ejemplo 2.2. Sea

$$f(z) = \frac{1}{z^2} + \frac{1}{\bar{z}^2} + 2i \log|z|.$$

Notemos que f es armónica en $\mathbb{C}^* := \mathbb{C} \setminus \{0\}$, siendo $z = 0$ una singularidad aislada de f. Si $z = re^{i\theta}$, entonces

$$f(re^{i\theta}) = \frac{2}{r^2} \cos 2\theta + 2i \log r.$$

Así, para valores fijos de $r > 0$, la imagen de $\gamma = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = r\}$ es el segmento de recta entre los puntos $-2/r^2 + 2i \log r$ y $2/r^2 + 2i \log r$. Este segmento es horizontal y se ubica cada vez más abajo del plano, a una altura de $2 \log r$, a medida que r se aproxima a 0; por ende, 0 es un polo de f. Es claro que $\Delta_\gamma \arg f(z) = 0$ para todo $r > 0$, y por lo tanto 0 es un polo de orden cero.

Es conocido que si f es holomorfa alrededor de un punto z_0, se puede saber el tipo de singularidad de f en z_0 a partir de su expansión en serie de Laurent alrededor de z_0, o más concretamente, si la cantidad de términos en la parte principal de f en z_0 son finitos, infinitos o cero. Con las funciones armónicas no pasa igual, por lo menos para polos y singularidades esenciales. A continuación veremos un par de ejemplos que ilustran lo anteriormente dicho. En el primero veremos una función con una singularidad esencial en el origen teniendo finitos términos en su parte principal, mientras que en el segundo la función tiene un polo en el origen y sin embargo su parte principal tiene infinitos términos.

Ejemplo 2.3. Sean $z = x + iy$ y

$$f(z) = \frac{1}{z} + \frac{1}{\bar{z}} = \frac{2x}{x^2 + y^2}.$$

Como la parte principal de f en 0 tiene términos diferentes de cero, entonces, por la Proposición 2.1, 0 no es una singularidad removible de f. Si hacemos $y = mx$ entonces

$$f(z) = \frac{2x}{x^2 + m^2 x^2} = \frac{2}{x(1 + m^2)}.$$

Luego, $|f(z)|$ tiende a ∞ cuando z tiende a 0 a lo largo de cualquier recta de la forma $y = mx$ con $m \in \mathbb{R}$, pero $|f(z)| = 0$ si z es un imaginario puro. De modo que $|f(z)|$ no tiende a ∞ cuando z tiende a 0; es decir, no hay un polo en el origen. En conclusión, f tiene en el origen una singularidad esencial.

Ejemplo 2.4. Sea

$$f(z) = \frac{1}{z^2} + \cos\frac{i}{z} + \overline{\cos\frac{i}{z}}.$$

Veamos que la parte principal de f en 0 tiene infinitos términos diferentes de cero, mostrando que las partes analítica y co-analítica de f tienen singularidades esenciales en 0, no polos; y que, sin embargo, $|f|$ tiende a ∞ cuando z tiende a 0. Si tomamos $z = iy$ entonces

$$\lim_{y\to 0^+} \cos\frac{i}{z} = \lim_{y\to 0^+} \cos\frac{1}{y}$$

no existe; por ende, la parte co-analítica de f tiene una singularidad esencial en 0; por lo tanto, su parte principal en 0 tiene infinitos términos. Luego, la parte analítica de f también tiene infinitos términos diferentes de cero en su parte principal alrededor de 0; y en consecuencia, también tiene una singularidad esencial en 0.
Ahora veamos que $|f|$ tiende a $+\infty$ cuando z tiende a 0. Como

$$f(z) = \frac{1}{z^2} + 2\mathrm{Re}\left\{\cos\frac{i}{z}\right\},$$

entonces $\mathrm{Im}\{f(z)\} = \mathrm{Im}\{1/z^2\}$. Sea $z = re^{i\theta}$, entonces $\dfrac{1}{z^2} = \dfrac{1}{r^2}e^{-2i\theta} = \dfrac{1}{r^2}(\cos 2\theta - i\,\mathrm{sen}\, 2\theta)$. Luego

$$|\mathrm{Im}\{f(re^{i\theta})\}| = \left|\frac{1}{r^2}\,\mathrm{sen}\, 2\theta\right|.$$

Si tomamos $\theta \in [\pi/6, \pi/3]$, se tiene que $2\theta \in [\pi/3, 2\pi/3]$; por lo que $\mathrm{sen}\, 2\theta \geq \mathrm{sen}\,\dfrac{\pi}{3} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$. Luego

$$|\mathrm{Im}\{f(re^{i\theta})\}| = \frac{1}{r^2}\,\mathrm{sen}\, 2\theta \geq \frac{\sqrt{3}}{2r^2} \xrightarrow[r\to 0]{} +\infty.$$

Ahora tomemos $\theta \in [0, \pi/6]$ y $r \leq \theta$. Como $\mathrm{sen}\, 2\theta = 2\,\mathrm{sen}\,\theta\cos\theta \geq 2\,\mathrm{sen}\, r\cos\dfrac{\pi}{6} = \sqrt{3}\,\mathrm{sen}\, r$, entonces

$$|\mathrm{Im}\{f(re^{i\theta})\}| = \frac{1}{r^2}\,\mathrm{sen}\, 2\theta \geq \frac{\sqrt{3}\,\mathrm{sen}\, r}{r^2} \xrightarrow[r\to 0]{} +\infty.$$

Para $\theta \in [\pi/3, \pi/2]$, tomamos $\alpha = \pi/2 - \theta \in [0, \pi/6]$; de donde, $\mathrm{sen}\, 2\alpha = \mathrm{sen}(\pi - 2\theta) = \mathrm{sen}\, 2\theta$; así, cuando $r \leq \alpha$,

$$|\mathrm{Im}\{f(re^{i\theta})\}| = \frac{1}{r^2}\,\mathrm{sen}\, 2\alpha \geq \frac{\sqrt{3}\,\mathrm{sen}\, r}{r^2} \xrightarrow[r\to 0]{} +\infty.$$

Hasta ahora tenemos que $|f|$ tiende a $+\infty$ cuando z tiende a 0 en la clausura del primer cuadrante. Si z está en la clausura del tercer cuadrante, entonces $-z$ está en la clausura del primer cuadrante, y por lo tanto $|f(-z)| \to +\infty$ cuando z tiende a 0; pero

$$|f(z)| = \left| \frac{1}{z^2} + \cos\frac{i}{z} + \overline{\cos\frac{i}{z}} \right| = \left| \frac{1}{(-z)^2} + \cos\frac{i}{-z} + \overline{\cos\frac{i}{-z}} \right| = |f(-z)|;$$

por lo que $|f|$ también tiende a $+\infty$ cuando z tiende a 0 en la clausura del tercer cuadrante. Si z está en la clausura del cuarto cuadrante, entonces $\overline{z}$ está en la clausura del primer cuadrante, y por lo tanto $|f(\overline{z})| \to +\infty$ cuando z tiende a 0; pero

$$|f(z)| = \left|\overline{f(z)}\right| = \left| \overline{\frac{1}{z^2}} + \overline{\cos\frac{i}{z}} + \cos\frac{i}{z} \right| = \left| \frac{1}{\overline{z}^2} + \cos\frac{i}{\overline{z}} + \overline{\cos\frac{i}{\overline{z}}} \right| = |f(\overline{z})|;$$

por lo que $|f|$ también tiende a $+\infty$ cuando z tiende a 0 en la clausura del cuarto cuadrante. Finalmente, si z está en la clausura del segundo cuadrante, entonces $-z$ está en la clausura del cuarto cuadrante; y por lo tanto $|f(-z)| \to +\infty$ cuando z tiende a 0. Pero $|f(z)| = |f(-z)|$, y en consecuencia $|f|$ también tiende a $+\infty$ cuando z tiende a 0 en la clausura del segundo cuadrante.

2.2.3. Singularidades en ∞

Denotemos por $\widehat{\mathbb{C}} := \mathbb{C} \cup \{\infty\}$. Dado un compacto K en $\mathbb{C}$, decimos que $\widehat{\mathbb{C}} \setminus K$ es una *vecindad de infinito* y que $\mathbb{C} \setminus K$ es una *vecindad agujereada de infinito*. Si una función f es armónica en una vecindad agujereada de ∞, entonces la singularidad de f en ∞ es clasificada como el mismo tipo de singularidad que tenga la función $f(1/z)$ en 0; por ejemplo, si $f(1/z)$ tiene un polo en 0 de orden m entonces decimos que f tiene un polo de orden m en ∞.

Teorema 2.5. *Si f es una función armónica en una vecindad agujereada de ∞, entonces*

(a) *f tiene una singularidad removible en ∞ si y sólo si*

$$\lim_{z\to\infty} \frac{f(z)}{\log|z|} = 0;$$

(b) *f tiene un polo fundamental en ∞ si y sólo si*

$$0 < \lim_{z\to\infty} \left| \frac{f(z)}{\log|z|} \right| < +\infty;$$

(c) *existe un entero positivo M tal que en la parte principal de $f(1/z)$ en 0, $a_{-M} \neq 0$ o $b_{-M} \neq 0$, y $a_{-m} = 0 = b_{-m}$ para todo $m > M$ si y sólo si*

$$0 < \limsup_{z\to\infty} \frac{|f(z)|}{|z|^M} < +\infty;$$

(d) *la parte principal de $f(1/z)$ en 0 tiene infinitos términos diferentes de cero si y sólo si*

$$\limsup_{z\to\infty} \frac{|f(z)|}{|z|^N} = +\infty$$

para todo entero positivo N.

Demostración. Sea $z = 1/w$, entonces:

(a) f tiene una singularidad removible en ∞ si y sólo si $f(1/w)$ tiene una singularidad removible en 0, si y sólo si

$$\lim_{w\to 0} \frac{f(1/w)}{\log|w|} = 0,$$

si y sólo si

$$\lim_{z\to\infty} \frac{f(z)}{\log|1/z|} = 0,$$

si y sólo si

$$\lim_{z\to\infty} \frac{f(z)}{\log|z|} = 0.$$

(b) f tiene un polo fundamental en ∞ si y sólo si $f(1/w)$ tiene un polo fundamental en 0, si y sólo si

$$0 < \lim_{w\to 0} \left|\frac{f(1/w)}{\log|w|}\right| < +\infty,$$

si y sólo si

$$0 < \lim_{z\to\infty} \left|\frac{f(z)}{\log|1/z|}\right| < +\infty,$$

si y sólo si

$$0 < \lim_{z\to\infty} \left|\frac{f(z)}{\log|z|}\right| < +\infty.$$

(c) Existe un entero positivo M tal que en la parte principal de $f(1/w)$ en 0, $a_{-M} \neq 0$ o $b_{-M} \neq 0$, y $a_{-m} = 0 = b_{-m}$ para todo $m > M$ si y sólo si

$$0 < \limsup_{w\to 0} |w|^M |f(1/w)| < +\infty,$$

si y sólo si

$$0 < \limsup_{z\to\infty} |1/z|^M |f(z)| < +\infty,$$

si y sólo si

$$0 < \limsup_{z\to\infty} \frac{|f(z)|}{|z|^M} < +\infty.$$

(d) La parte principal de $f(1/w)$ en 0 tiene infinitos términos diferentes de cero si y sólo si

$$\limsup_{w\to 0} |w|^N |f(1/w)| = +\infty$$

para todo entero positivo N, si y sólo si

$$\limsup_{z\to\infty} \frac{|f(z)|}{|z|^N} = +\infty$$

para todo entero positivo N. ■

2.3. Teorema del residuo

El teorema del residuo es un resultado importante en funciones analíticas puesto que brinda un método para el cálculo de integrales. Para dicho teorema se requiere de la definición del residuo en una singularidad aislada y brinda una solución para la integral de una función analítica sobre una curva cerrada que no pasa por ninguna singularidad de la función y que encierra una cantidad finita de singularidades de ésta. Para un estudio más amplio de este teorema en el contexto de las funciones analíticas ver por ejemplo [Pal91] y [Ahl79]. Aquí se presenta una versión en el contexto de funciones armónicas.

Sea f una función armónica real-valuada y supongamos que tiene una singularidad aislada en z_0, con expansión en serie de Laurent alrededor de z_0 dada por

$$f(z) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} [a_m(z-z_0)^m + \overline{a_m}(\overline{z-z_0})^m] + A\log|z-z_0|.$$

Decimos que la constante $A \in \mathbb{R}$ es el *residuo* de f en z_0, y escribimos $\operatorname{Res}(f, z_0) = A$. El siguiente resultado justifica esta terminología.

Proposición 2.2. *Si f es armónica real-valuada en $\overline{D}(z_0, r) \setminus \{z_0\}$, entonces*

$$\operatorname{Res}(f, z_0) = \frac{1}{2\pi}\int_{\partial D(z_0,r)} \mathrm{D}_{\mathbf{n}} f \; ds,$$

donde $\mathrm{D}_{\mathbf{n}}$ denota la derivada respecto a la normal exterior $\mathbf{n}$.

Demostración. Sabemos que $\mathrm{D}_{\mathbf{n}} f = \mathbf{n}\cdot\nabla f$; siendo

$$\mathbf{n} = \frac{z-z_0}{|z-z_0|}, \qquad \text{con} \qquad z \in \partial D(z_0, r).$$

Ahora bien, como

$$\frac{\partial f}{\partial \overline{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} + i\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{1}{2}\nabla f;$$

entonces,

$$\nabla f = 2\frac{\partial f}{\partial \overline{z}} = 2\left(\sum_{m=-\infty}^{\infty} m\overline{a_m}(\overline{z-z_0})^{m-1} + \frac{A}{|z-z_0|}\frac{z-z_0}{2|z-z_0|}\right).$$

Puesto que si $z, w \in \mathbb{C}$, entonces $z \cdot w = \mathrm{Re}\{\overline{z}w\}$, se sigue que

$$\begin{aligned}
\mathrm{D}_{\mathbf{n}}f(z) &= \mathrm{Re}\{\overline{\mathbf{n}}\nabla f\} = \mathrm{Re}\left\{\frac{\overline{z-z_0}}{|z-z_0|}\left(2\sum_{m=-\infty}^{\infty} m\overline{a_m}(\overline{z-z_0})^{m-1} + \frac{A}{\overline{\overline{z-z_0}}}\right)\right\} \\
&= \frac{2}{|z-z_0|}\mathrm{Re}\left\{\sum_{m=-\infty}^{\infty} m\overline{a_m}(\overline{z-z_0})^{m}\right\} + \frac{A}{|z-z_0|} \\
&= \frac{2}{|z-z_0|}\mathrm{Re}\left\{\sum_{m=1}^{\infty} \frac{-m\overline{a_{-m}}(z-z_0)^m}{|z-z_0|^{2m}} + \sum_{m=0}^{\infty} m\overline{a_m}(\overline{z-z_0})^{m}\right\} + \frac{A}{|z-z_0|} \\
&= \frac{2}{|z-z_0|}\mathrm{Re}\left\{\sum_{m=1}^{\infty} m\left[\overline{a_m}(\overline{z-z_0})^{m} - \frac{\overline{a_{-m}}(z-z_0)^m}{|z-z_0|^{2m}}\right]\right\} + \frac{A}{|z-z_0|}.
\end{aligned}$$

Así,

$$\begin{aligned}
\int_{\partial D(z_0,r)} \mathrm{D}_{\mathbf{n}}f\ ds &= \frac{2}{r}\mathrm{Re}\left\{\sum_{m=1}^{\infty} m\int_{\partial D(z_0,r)}\left[\overline{a_m}(\overline{z-z_0})^{m} - \frac{\overline{a_{-m}}}{r^{2m}}(z-z_0)^m\right]ds\right\} + \frac{A}{r}\int_{\partial D(z_0,r)} ds \\
&= \frac{2}{r}\mathrm{Re}\left\{\sum_{m=1}^{\infty} m\left[\overline{a_m}(\overline{z-z_0})^{m} - \frac{\overline{a_{-m}}}{r^{2m}}(z-z_0)^m\right]_{z=z_0}\right\} + \frac{A}{r}2\pi r = 2\pi A,
\end{aligned}$$

ya que la función entre corchetes es armónica en $\mathbb{C}$, y por el teorema del valor medio para funciones armónicas, su integral sobre $\partial D(z_0,r)$ es igual al valor de la función en el centro de $D(z_0,r)$, el cual es 0. En conclusión,

$$\mathrm{Res}(f, z_0) = \frac{1}{2\pi}\int_{\partial D(z_0,r)} \mathrm{D}_{\mathbf{n}}f\ ds.$$

■

El siguiente lema es una versión del teorema del residuo para funciones armónicas real-valuadas.

Lema 2.1. *Sea $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ un conjunto abierto acotado con frontera suave y sean $z_1, \ldots, z_k$ puntos distintos en Ω. Si u es una función real-valuada, armónica en $\Omega \setminus \{z_1, \ldots, z_k\}$, entonces*

$$\int_{\partial\Omega} \mathrm{D}_{\mathbf{n}}u\ ds = 2\pi\sum_{j=1}^{k}\mathrm{Res}(u, z_j).$$

Demostración. Escojamos $r > 0$ tal que los discos $\overline{D}(z_1, r), \ldots, \overline{D}(z_k, r)$ sean disjuntos dos a dos y estén todos contenidos en Ω. Sea $\Lambda := \Omega \setminus \left(\bigcup_{j=1}^{k} \overline{D}(z_j, r)\right)$. Entonces,

$$\int_{\partial\Lambda} \mathrm{D}_{\mathbf{n}} u \; ds = \int_{\partial\Omega} \mathrm{D}_{\mathbf{n}} u \; ds - \sum_{j=1}^{k} \int_{\partial D(z_j, r)} \mathrm{D}_{\mathbf{n}} u \; ds.$$

Dado que u es armónica en Λ, tomando $v \equiv 1$ en la identidad de Green, nos queda que

$$\int_{\partial\Lambda} \mathrm{D}_{\mathbf{n}} u \; ds = \int_{\partial\Lambda} (v \mathrm{D}_{\mathbf{n}} u - u \mathrm{D}_{\mathbf{n}} v) ds = \int_{\Lambda} (v \Delta u - u \Delta v) dS = 0.$$

Así,

$$\int_{\partial\Omega} \mathrm{D}_{\mathbf{n}} u \; ds = \sum_{j=1}^{k} \int_{\partial D(z_j, r)} \mathrm{D}_{\mathbf{n}} u \; ds = 2\pi \sum_{j=1}^{k} \mathrm{Res}(u, z_j).$$

■

A continuación, supongamos que $f = u + iv$ es una función armónica de valor complejo con una singularidad aislada en z_0. Entonces, f, u y v tienen representaciones en serie de Laurent alrededor de z_0 de la forma:

$$f(z) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} [a_m (z - z_0)^m + \overline{b_m} (\overline{z - z_0})^m] + A \log |z - z_0|,$$

$$u(z) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} [c_m (z - z_0)^m + \overline{c_m} (\overline{z - z_0})^m] + A_u \log |z - z_0|,$$

$$v(z) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} [d_m (z - z_0)^m + \overline{d_m} (\overline{z - z_0})^m] + A_v \log |z - z_0|,$$

donde $A, a_m, b_m, c_m, d_m \in \mathbb{C}$ y $A_u, A_v \in \mathbb{R}$ son constantes para todo $m \in \mathbb{Z}$. Luego,

$$f(z) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} [(c_m + i d_m)(z - z_0)^m + (\overline{c_m} + i \overline{d_m})(\overline{z - z_0})^m] + (A_u + i A_v) \log |z - z_0|.$$

Así, por la unicidad de la representación para f se tiene que

$$a_m = c_m + i d_m, \quad b_m = c_m - i d_m \quad \text{ y } \quad A = A_u + i A_v.$$

Tenemos entonces que podemos hallar la expansión en serie de Laurent de f a partir de las expansiones en serie de Laurent de u y v. Veamos que lo contrario también es cierto; es decir, que podemos hallar las expansiones en serie de Laurent de u y de v a partir de la expansión en serie de Laurent de f. En efecto, notemos que

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty}\left[\frac{a_m+b_m}{2}(z-z_0)^m+\overline{\frac{a_m+b_m}{2}}(\overline{z-z_0})^m\right]+\operatorname{Re}\{A\}\log|z-z_0|+$$
$$+\,i\left(\sum_{m=-\infty}^{\infty}\left[\frac{a_m-b_m}{2i}(z-z_0)^m+\overline{\frac{a_m-b_m}{2i}}(\overline{z-z_0})^m\right]+\operatorname{Im}\{A\}\log|z-z_0|\right)=$$
$$=\sum_{m=-\infty}^{\infty}[a_m(z-z_0)^m+\overline{b_m}(\overline{z-z_0})^m]+A\log|z-z_0|=f(z);$$

de donde,

$$u(z)=\operatorname{Re}\{f(z)\}=\sum_{m=-\infty}^{\infty}\left[\frac{a_m+b_m}{2}(z-z_0)^m+\overline{\frac{a_m+b_m}{2}}(\overline{z-z_0})^m\right]+\operatorname{Re}\{A\}\log|z-z_0|$$

y

$$v(z)=\operatorname{Im}\{f(z)\}=\sum_{m=-\infty}^{\infty}\left[\frac{a_m-b_m}{2i}(z-z_0)^m+\overline{\frac{a_m-b_m}{2i}}(\overline{z-z_0})^m\right]+\operatorname{Im}\{A\}\log|z-z_0|;$$

y en consecuencia, por la unicidad de las representaciones para u y v, para cada $m\in\mathbb{Z}$

$$c_m=\frac{a_m+b_m}{2}\quad \text{y}\quad d_m=\frac{a_m-b_m}{2i},$$

mientras que

$$A_u=\operatorname{Re}\{A\}=\frac{A+\overline{A}}{2}\quad \text{y}\quad A_v=\operatorname{Im}\{A\}=\frac{A-\overline{A}}{2i}.$$

Definamos el residuo de f en z_0 por

$$\operatorname{Res}(f,z_0):=A=A_u+iA_v=\operatorname{Res}(u,z_0)+i\operatorname{Res}(v,z_0) \tag{2-6}$$

y definamos también

$$\mathrm{D}_{\mathbf{n}}f:=\mathrm{D}_{\mathbf{n}}u+i\mathrm{D}_{\mathbf{n}}v. \tag{2-7}$$

Luego, si f es armónica en $\overline{D}(z_0,r)\setminus\{z_0\}$, entonces

$$\begin{aligned}\operatorname{Res}(f,z_0) &= \frac{1}{2\pi}\int_{\partial D(z_0,r)}\mathrm{D}_{\mathbf{n}}u\,ds+\frac{i}{2\pi}\int_{\partial D(z_0,r)}\mathrm{D}_{\mathbf{n}}v\,ds\\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{\partial D(z_0,r)}[\mathrm{D}_{\mathbf{n}}u+i\mathrm{D}_{\mathbf{n}}v]\,ds\\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{\partial D(z_0,r)}\mathrm{D}_{\mathbf{n}}f\,ds.\end{aligned}$$

En particular, se sigue que si f es armónica en una vecindad de z_0, entonces

$$\int_{\partial D(z_0,r)} \mathrm{D}_{\mathbf{n}} f \; ds = 0$$

para todo r suficientemente pequeño.

Ahora podemos probar, como consecuencia del lema anterior, una versión del teorema del residuo para funciones armónicas de valor complejo.

Teorema 2.6. (Teorema del residuo) *Sea $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ un conjunto abierto acotado con frontera suave y sean $z_1, \ldots, z_k$ puntos distintos en Ω. Si f es una función de valor complejo, armónica en $\Omega \setminus \{z_1, \ldots, z_k\}$, entonces*

$$\int_{\partial\Omega} \mathrm{D}_{\boldsymbol{n}} f \; ds = 2\pi \sum_{j=1}^{k} \mathrm{Res}(f, z_j).$$

Demostración. Tomemos $f = u + iv$ e integremos a $\mathrm{D}_{\mathbf{n}} f$ sobre la frontera de Ω haciendo uso de las ecuaciones (2-7) y (2-6) y del Lema 2.1, así:

$$\begin{aligned}
\int_{\partial\Omega} \mathrm{D}_{\mathbf{n}} f \; ds &= \int_{\partial\Omega} [\mathrm{D}_{\mathbf{n}} u + i\mathrm{D}_{\mathbf{n}} v] \; dz \\
&= \int_{\partial\Omega} \mathrm{D}_{\mathbf{n}} u \; dz \; + \; i \int_{\partial\Omega} \mathrm{D}_{\mathbf{n}} v \; dz \\
&= 2\pi \sum_{j=1}^{k} \mathrm{Res}(u, z_j) \; + \; i2\pi \sum_{j=1}^{k} \mathrm{Res}(v, z_j) \\
&= 2\pi \sum_{j=1}^{k} [\mathrm{Res}(u, z_j) + i\mathrm{Res}(v, z_j)] \\
&= 2\pi \sum_{j=1}^{k} \mathrm{Res}(f, z_j),
\end{aligned}$$

como se quería demostrar. ■

Ejemplo 2.5. Supongamos que queremos usar el anterior teorema del residuo para calcular la siguiente integral

$$\int_{\partial\mathbb{D}} \left[\frac{(\sqrt{3} + \pi x)|z|^2 - \pi x}{\pi |z|^3} + i \frac{(1 + 2y)|z|^2 - 2y}{2|z|^3} \right] |dz|,$$

pero esto únicamente es posible si existe una función $f = u + iv$ armónica en $\mathbb{D}$, excepto tal vez por algunas singularidades, tal que

$$\mathrm{D}_{\mathbf{n}} f = \frac{(\sqrt{3} + \pi x)|z|^2 - \pi x}{\pi |z|^3} + i \frac{(1 + 2y)|z|^2 - 2y}{2|z|^3};$$

es decir,

$$\mathrm{D}_{\mathbf{n}}u = \frac{(\sqrt{3}+\pi x)|z|^2 - \pi x}{\pi |z|^3} \quad \text{y} \quad \mathrm{D}_{\mathbf{n}}v = \frac{(1+2y)|z|^2 - 2y}{2|z|^3}.$$

Es importante notar que para $\partial\mathbb{D}$ se tiene que

$$\mathbf{n} = \frac{z}{|z|} = \frac{x+iy}{\sqrt{x^2+y^2}} = \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right);$$

por lo que

$$\begin{aligned}\frac{xu_x + yu_y}{\sqrt{x^2+y^2}} &= \nabla u \cdot n \;=\; \mathrm{D}_{\mathbf{n}}u \;=\; \frac{(\sqrt{3}+\pi x)(x^2+y^2) - \pi x}{\pi(x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2}} \\ &= \frac{(\sqrt{3}+\pi x)(x^4+2x^2y^2+y^4) - \pi x(x^2+y^2)}{\pi(x^2+y^2)^2\sqrt{x^2+y^2}}\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}\frac{xv_x + yv_y}{\sqrt{x^2+y^2}} &= \nabla v \cdot n \;=\; \mathrm{D}_{\mathbf{n}}v \;=\; \frac{(1+2y)(x^2+y^2) - 2y}{2(x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2}} \\ &= \frac{(1+2y)(x^4+2x^2y^2+y^4) - 2y(x^2+y^2)}{2(x^2+y^2)^2\sqrt{x^2+y^2}}.\end{aligned}$$

Escogemos entonces

$$xu_x = \frac{\sqrt{3}(x^4+x^2y^2) + \pi x(x^4+2x^2y^2+y^4-x^2+y^2)}{\pi(x^2+y^2)^2},$$

$$yu_y = \frac{\sqrt{3}(x^2y^2+y^4) - 2\pi xy^2}{\pi(x^2+y^2)^2},$$

$$xv_x = \frac{x^4+x^2y^2-4x^2y}{2(x^2+y^2)^2},$$

$$yv_y = \frac{2y(x^4+2x^2y^2+y^4-y^2) + x^2y^2+y^4+2x^2y}{2(x^2+y^2)^2}.$$

De esta forma,

$$u = \int u_y dy = \int \frac{\sqrt{3}y(x^2+y^2) - 2\pi xy}{\pi(x^2+y^2)^2} dy = \frac{\sqrt{3}}{2\pi}\log|x^2+y^2| + \frac{x}{x^2+y^2} + g(x);$$

de donde,

$$\frac{\sqrt{3}x(x^2+y^2) + \pi(x^4+2x^2y^2+y^4-x^2+y^2)}{\pi(x^2+y^2)^2} = u_x = \frac{\sqrt{3}x}{\pi(x^2+y^2)} + \frac{-x^2+y^2}{(x^2+y^2)^2} + g'(x);$$

por lo tanto, $g'(x) = 1$; es decir, $g(x) = x$. Por otro lado,

$$v = \int v_x dx = \int \frac{x(x^2 + y^2 - 4y)}{2(x^2 + y^2)^2} dx = \frac{1}{4} \log |x^2 + y^2| + \frac{y}{x^2 + y^2} + h(y);$$

de donde,

$$\frac{2(x^4 + 2x^2y^2 + y^4 - y^2) + x^2y + y^3 + 2x^2}{2(x^2 + y^2)^2} = v_y = \frac{y}{2(x^2 + y^2)} + \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} + h'(y);$$

por lo tanto, $h'(y) = 1$; es decir, $h(y) = y$. Finalmente,

$$f = u + iv = x + iy + \frac{x + iy}{x^2 + y^2} + \left(\frac{\sqrt{3}}{\pi} + \frac{i}{2} \right) \log \sqrt{x^2 + y^2} = z + \frac{1}{\bar{z}} + \left(\frac{\sqrt{3}}{\pi} + \frac{i}{2} \right) \log |z|.$$

Claramente f es armónica en $\mathbb{D} \setminus \{0\}$, y dada su expresión, concluimos a partir del Teorema 2.6 que

$$\int_{\partial \mathbb{D}} \left[\frac{(\sqrt{3} + \pi x)|z|^2 - \pi x}{\pi |z|^3} + i \frac{(1 + 2y)|z|^2 - 2y}{2|z|^3} \right] |dz| = 2\sqrt{3} + i\pi.$$

3 Funciones armónicas de orientación variable

Cuando se investigan las funciones armónicas, generalmente se supone que éstas preservan la orientación. Como una función que invierte la orientación es la conjugada de una que la preserva, da lo mismo investigar unas u otras. Estudiaremos entonces las funciones armónicas en torno a los puntos donde éstas no preservan ni invierten la orientación.

3.1. Orientación generalizada y ceros singulares

Sea f una función armónica en un dominio simplemente conexo Ω del plano complejo, por lo que podemos representar a f en Ω de la forma $f = h + \overline{g}$ donde h y g son analíticas, y su Jacobiano se puede escribir como $J_f(z) = |h'(z)|^2 - |g'(z)|^2$; luego, f preserva la orientación en z cuando $|h'(z)| > |g'(z)|$ y la invierte cuando $|h'(z)| < |g'(z)|$; lo que implica que la dilatación de f, la cual toma la forma

$$\omega = \frac{\overline{f_{\overline{z}}}}{f_z} = \frac{g'}{h'},$$

es tal que $|\omega(z)| < 1$ si f preserva la orientación en z, y tal que $|\omega(z)| > 1$ si f invierte la orientación en z. Claramente, f invierte la orientación si y sólo si $\overline{f}$ la preserva.
Ahora bien, puede darse que $|\omega(z_0)|$ sea diferente de uno en un punto z_0, sin que necesariamente $J_f(z_0)$ sea diferente de cero, siendo $h'(z_0) = g'(z_0) = 0$ y $|\omega(z_0)| \neq 1$. En efecto, supongamos que

$$h(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k \quad \text{y} \quad g(z) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k (z - z_0)^k$$

para algún $z_0 \in \Omega$. Si a_n es el primer a_k diferente de 0 y b_m el primer b_k diferente de 0 para $k \geq 1$, entonces $h(z) = a_0 + (z - z_0)^n H(z)$ y $g(z) = b_0 + (z - z_0)^m G(z)$, donde H y G son analíticas y no se anulan en una vecindad de z_0. Luego,

$$\omega(z) = \frac{g'(z)}{h'(z)} = \frac{(z - z_0)^{m-1}[mG(z) + (z - z_0)G'(z)]}{(z - z_0)^{n-1}[nH(z) + (z - z_0)H'(z)]}.$$

Así,

$$\omega(z_0) = \begin{cases} 0, & \text{si } n < m \\ b_n/a_n, & \text{si } n = m \\ \infty, & \text{si } n > m\ . \end{cases} \tag{3-1}$$

De esta forma, si $n > 1$ y $m > 1$, entonces $h'(z_0) = g'(z_0) = 0$, por lo que $J_f(z_0) = 0$. Sin embargo, de acuerdo a (3-1), $|\omega(z_0)| < 1$ si $n < m$ o si $n = m$ y $|b_n| < |a_n|$; o por el contrario, $|\omega(z_0)| > 1$ si $n > m$ o si $n = m$ y $|b_n| > |a_n|$. Esto nos permite definir de forma más general la orientación de f en z_0.

Definición 3.1. *Sea f una función armónica en una vecindad de $z_0 \in \mathbb{C}$. Decimos que f preserva la orientación en z_0 si $|\omega(z_0)| < 1$ y que f invierte la orientación en z_0 si $\overline{f}$ preserva la orientación en z_0, o de manera equivalente, si $|\omega(z_0)| > 1$.*

El siguiente ejemplo ilustra como, en efecto, la definición de orientación que se hace usando la dilatación ω es más general que la que se tiene con el Jacobiano.

Ejemplo 3.1. Sea

$$f(z) = z^2 - 2z + 3\overline{z} - \overline{z}^3.$$

Luego, $f = h + \overline{g}$ con $h(z) = z^2 - 2z$ y $g(z) = 3z - z^3$; de donde,

$$J_f(z) = |2z-2|^2 - |3-3z^2|^2 \quad \text{y} \quad \omega(z) = \frac{3-3z^2}{2z-2} = -\frac{3}{2}(1+z);$$

así, $J_f(1) = 0$ pero $|\omega(1)| = 3 > 1$. En consecuencia, f invierte la orientación en 1.

El siguiente teorema muestra una forma equivalente a esta nueva definición de orientación pero usando únicamente el Jacobiano, aunque no en el punto en cuestión como en la definición original sino en una vecindad agujereada del punto.

Teorema 3.1. *Sean f una función armónica en un dominio Ω del plano complejo y $z_0 \in \Omega$.*

(i) $|\omega(z_0)| < 1$ *si y sólo si existe $r > 0$ tal que $J_f(z) > 0$ para todo $z \in D(z_0, r) \setminus \{z_0\}$.*

(ii) $|\omega(z_0)| > 1$ *si y sólo si existe $r > 0$ tal que $J_f(z) < 0$ para todo $z \in D(z_0, r) \setminus \{z_0\}$.*

Demostración. Para todo $r > 0$, llamaremos $D_r := D(z_0, r)$ y $D_r^* := D(z_0, r) \setminus \{z_0\}$.
(i) " $\Rightarrow$ " Supongamos que $|\omega(z_0)| < 1$; luego, por la continuidad de ω, existe $r_0 > 0$ tal que $|\omega(z)| < 1$ para todo $z \in D_{r_0}$. Si tenemos que

$$f(z) = a_0 + \sum_{k=n}^{\infty} a_k(z-z_0)^k + \overline{b_0} + \sum_{k=m}^{\infty} \overline{b_k}(\overline{z-z_0})^k = a_0 + (z-z_0)^n H(z) + \overline{b_0} + (\overline{z-z_0})^m \overline{G(z)}$$

en D_{r_0}; donde H y G son analíticas, $H(z_0) = a_n \neq 0$, $G(z_0) = b_m \neq 0$, $n, m \geq 1$; entonces

$$\omega(z) = \frac{\overline{f_{\overline{z}}}(z)}{f_z(z)} = \frac{(z - z_0)^{m-1}[mG(z) + (z - z_0)G'(z)]}{(z - z_0)^{n-1}[nH(z) + (z - z_0)H'(z)]}.$$

Pero $nH(z) + (z - z_0)H'(z)$ es una función continua y

$$[nH(z) + (z - z_0)H'(z)]_{z=z_0} = nH(z_0) = na_n \neq 0;$$

y por lo tanto, existe $r \in (0, r_0)$ tal que $nH(z) + (z - z_0)H'(z) \neq 0$ para todo $z \in D_r$. Así, como $|\omega(z)| < 1$ y $(z - z_0)^{n-1}[nH(z) + (z - z_0)H'(z)] \neq 0$ en D_r^*, entonces allí

$$|(z - z_0)^{m-1}[mG(z) + (z - z_0)G'(z)]| < |(z - z_0)^{n-1}[nH(z) + (z - z_0)H'(z)]|.$$

De esta forma, tenemos que $|f_z(z)|^2 > |f_{\overline{z}}(z)|^2$ para todo $z \in D_r^*$; es decir, $J_f(z) > 0$ para todo $z \in D_r^*$.
" $\Leftarrow$ " Supongamos que existe $r > 0$ tal que $J_f(z) > 0$ para todo $z \in D_r^*$. Por lo tanto, $|f_z(z)| > |f_{\overline{z}}(z)|$ para todo $z \in D_r^*$; de donde, $|\omega(z)| < 1$ para todo $z \in D_r^*$; luego, por continuidad, $|\omega(z_0)| \leq 1$. Si $|\omega(z_0)| = 1$, entonces $|\omega(z)| \leq 1$ para todo $z \in D_r$; pero ω es meromorfa, y por lo tanto, ω es analítica en D_r. De esta forma, como z_0 es un punto interior de D_r, por el principio del módulo máximo, ω debe ser constante en D_r y de módulo 1, lo que contradice el hecho que $|\omega(z)| < 1$ para todo $z \in D_r^*$. Concluimos que $|\omega(z_0)| < 1$.

(ii) Como el conjugado de una función armónica también es una función armónica, le aplicamos el literal anterior a $\overline{f}$, quedando así que $|\omega_{\overline{f}}(z_0)| < 1$ si y sólo si existe $r > 0$ tal que $J_{\overline{f}}(z) > 0$ para todo $z \in D_r^*$, pero $\omega_{\overline{f}}(z) = 1/\omega(z)$ y $J_{\overline{f}}(z) = -J_f(z)$. En consecuencia, $|\omega(z_0)| > 1$ si y sólo si $|\omega_{\overline{f}}(z_0)| < 1$ si y sólo si existe $r > 0$ tal que $J_{\overline{f}}(z) > 0$ para todo $z \in D_r^*$ si y sólo si existe $r > 0$ tal que $J_f(z) < 0$ para todo $z \in D_r^*$. ■

Sea f una función armónica en una vecindad de $z_0 \in \mathbb{C}$. En [DHL96] se dice que z_0 es un *cero singular* de f si $f(z_0) = 0$ y f no preserva ni invierte la orientación en z_0; es decir, si $f(z_0) = 0$ y $|\omega(z_0)| = 1$ de acuerdo a la definición 3.1. Si $f(z_0) = 0$ y $|\omega(z_0)| \neq 1$, se dice que z_0 es un *cero no singular* de f.

A partir de la igualdad (3-1), se puede definir el orden de un cero no singular de la siguiente forma: sea z_0 un cero no singular de una función armónica f, si $|\omega(z_0)| < 1$ entonces $n \leq m$ y decimos que z_0 es un *cero de orden* n, si $|\omega(z_0)| > 1$ entonces $n \geq m$ y decimos que z_0 es un *cero de orden* $-m$.

Ejemplo 3.2. Consideremos una función armónica f con Jacobiano diferente de 0 en un cero z_0, por lo tanto $|\omega(z_0)| \neq 1$ y z_0 es un cero no singular de f. Si $J_f(z_0) > 0$, entonces $|h'(z_0)| > |g'(z_0)|$; es decir, $|a_1| > |b_1| \geq 0$; de donde, $a_1 \neq 0$; por lo tanto $n = 1 \leq m$ y $|\omega(z_0)| = |b_1/a_1| < 1$; por lo que z_0 es un cero de orden 1. Si $J_f(z_0) < 0$, concluimos de forma análoga que z_0 es un cero de orden -1.

Ejemplo 3.3. Ahora ilustraremos lo del orden de un cero no singular z_0 con tres funciones armónicas f para las cuales $J_f(z_0) = 0$.

1. Sea $f(z) = z^5+\overline{z}^3$, por lo tanto, $h(z) = z^5$, $g(z) = z^3$ y $f(0) = 0$. Luego, $J_f(z) = |5z^4|^2 - |3z^2|^2$ y $\omega(z) = 3z^2/5z^4$, de donde, $J_f(0) = 0$ pero $|\omega(0)| = +\infty$. Por consiguiente, f invierte la orientación en 0 y $z_0 = 0$ es un cero de orden -3.

2. Sea $f(z) = 2z^2 + \overline{z}^2$, por lo tanto, $h(z) = 2z^2$, $g(z) = z^2$ y $f(0) = 0$. Luego, $J_f(z) = |4z|^2 - |2z|^2$ y $\omega(z) = 2z/4z$, de donde, $J_f(0) = 0$ pero $|\omega(0)| = 1/2$. Por consiguiente, f preserva la orientación en 0 y $z_0 = 0$ es un cero de orden 2.

3. Sea $f(z) = z^2 - 2\overline{z}^2$, por lo tanto, $h(z) = z^2$, $g(z) = -2z^2$ y $f(0) = 0$. Luego, $J_f(z) = |2z|^2 - |-4z|^2$ y $\omega(z) = -4z/2z$, de donde, $J_f(0) = 0$ pero $|\omega(0)| = 2$. Por consiguiente, f invierte la orientación en 0 y $z_0 = 0$ es un cero de orden -2.

Podemos ver, dentro del contexto más general de orientación, que los ceros no singulares de una función armónica son aislados [Dur04].

Proposición 3.1. *Los ceros de una función armónica f que no son singulares, son ceros aislados de f.*

Demostración. Sea z_0 un cero de f que no es singular. Supongamos inicialmente que f preserva la orientación en z_0, es decir, que $|\omega(z_0)| < 1$. Entonces, z_0 es un cero de f de orden positivo, digamos $n \geq 1$. Por consiguiente, es posible escribir a f en la forma:

$$f(z) = \sum_{k=n}^{\infty} a_k(z - z_0)^k + \sum_{k=m}^{\infty} \overline{b_k}(\overline{z} - \overline{z_0})^k$$

para z cerca de z_0, con $n \leq m$. Como $a_n \neq 0$, podemos definir para z en una vecindad de z_0, $z \neq z_0$, la función

$$\psi(z) := \frac{f(z)}{a_n(z - z_0)^n} - 1 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_{n+k}}{a_n}(z - z_0)^k + \sum_{k=m}^{\infty} \frac{\overline{b_k}}{a_n} \frac{(\overline{z} - \overline{z_0})^k}{(z - z_0)^n}.$$

Es claro que $|\psi(z)| < 1$ para z suficientemente cercano a z_0, puesto que $m \geq n$ y $|b_n/a_n| < 1$ si $m = n$. Ahora bien, $f(z) = a_n(z-z_0)^n\{1+\psi(z)\}$, de donde, $|f(z)| \geqslant |a_n||z-z_0|^n\{1-|\psi(z)|\} > 0$. Por lo tanto, $f(z) \neq 0$ para todo z en un disco agujereado D^* centrado en z_0.
Ahora supongamos que f invierte la orientación en z_0, y por ende $\overline{f}$ preserva la orientación en z_0; luego, del razonamiento anterior, $\overline{f(z)} \neq 0$ para todo z en un disco agujereado D^* centrado en z_0, lo que equivale a tener que $f(z) \neq 0$ para todo $z \in D^*$. En conclusión, z_0 es un cero aislado de f. ∎

Sin embargo, no podemos decir lo mismo de los ceros singulares de una función armónica, como lo ilustra el siguiente ejemplo.

Ejemplo 3.4. Sea
$$f(z) = \frac{1}{z} - \overline{z}.$$
Como $f(e^{i\theta}) = 0$ para todo $\theta \in \mathbb{R}$, se sigue que $f(\mathbb{T}) = \{0\}$ donde $\mathbb{T} := \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$. Como los ceros no singulares deben estar aislados, se concluye que f tiene ceros singulares en todo $\mathbb{T}$.

3.2. El conjunto excepcional

Dada una función armónica f en un dominio Ω del plano complejo, el subconjunto $X \subseteq \Omega$ donde f no preserva ni invierte la orientación se denomina en [ABR01] el *conjunto excepcional* de f en Ω; es decir, $X = \{z \in \Omega : |\omega(z)| = 1\}$.
Para ilustrar, consideremos la misma función f del ejemplo 3.4, y notemos que para esta función su dilatación es $\omega(z) = z^2$; por lo que $|\omega(z)| = 1$ si y sólo si $|z| = 1$, lo cual significa que $X = \mathbb{T}$. Por otro lado, el conjunto de ceros singulares de una función armónica siempre va a estar contenido en su conjunto excepcional; pero en este caso observamos que ambos conjuntos coinciden.
Ahora bien, se podría pensar que un cero de una función armónica es aislado si y sólo si es no singular, o que si hay un cero singular aislado, es porque el conjunto excepcional colapsa a dicho punto. Sin embargo, el siguiente ejemplo muestra que ninguna de estas dos afirmaciones es verdadera.

Ejemplo 3.5. Sea
$$f(z) = \frac{z}{1-z} - \frac{\overline{z}}{1+\overline{z}}.$$
Notemos que f es armónica en $\mathbb{C} \setminus \{-1, 1\}$ y que $f(z) = 0$ si y sólo si $z = 0$. Por otro lado,
$$\omega(z) = -\left(\frac{1-z}{1+z}\right)^2;$$
de donde, $\omega(0) = -1$. Más aun, $|\omega(z)| = 1$ si y sólo si $\mathrm{Re}\{z\} = 0$. En conclusión, el conjunto excepcional X es todo el eje imaginario y contiene al único cero de f en el origen, lo que implica que este cero es singular y está aislado.

Definición 3.2. *Sea f una función armónica no constante en un dominio Ω del plano complejo, definimos $\Omega_p := \{z \in \Omega : |\omega(z)| < 1\}$ y $\Omega_i := \{z \in \Omega : |\omega(z)| > 1\}$. Además, si $\Theta \subseteq \Omega$, consideraremos Θ' como el conjunto de puntos de acumulación de Θ pertenecientes a Ω; es decir, $\Theta' = \{z \in \Omega : (\forall r > 0)(D^*(z,r) \cap \Theta \neq \emptyset)\}$.*

En los ejemplos 3.4 y 3.5 vemos que X divide al dominio en dos componentes, en una f preserva la orientación mientras que en la otra la invierte. El siguiente teorema muestra que, de hecho, cuando el conjunto excepcional de una función armónica no constante no es vacío ni todo el dominio, se tiene que un punto del dominio de dicha función pertenece al conjunto excepcional si y sólo si toda vecindad de este punto contiene puntos donde la función preserva la orientación y puntos donde la invierte.

Teorema 3.2. *Sea f una función armónica no constante en un dominio Ω del plano complejo, y sea X el conjunto excepcional de f en Ω. Si $X \neq \emptyset$ y $X \neq \Omega$, entonces $X = \Omega'_p \cap \Omega'_i$.*

Demostración. Razonemos por reducción al absurdo.
“ $\subseteq$ ” Supongamos que existe un $z_0 \in X$ tal que $z_0 \notin \Omega'_p \cap \Omega'_i$. Si $z_0 \notin \Omega'_i$, debe existir una vecindad V de z_0 tal que $|\omega(z)| \leq 1$ para todo $z \in V$; por lo tanto, ω es analítica en V. Pero z_0 es un punto interior de V y $|\omega(z_0)| = 1$; luego, por el principio del módulo máximo, ω es constante en V; y en consecuencia, por el principio de identidad para funciones meromorfas, ω es constante en Ω; de donde, $|\omega(z)| = 1$ para todo $z \in \Omega$; esto es, $X = \Omega$, contradiciendo la hipótesis inicial. Si $z_0 \notin \Omega'_p$, debe existir una vecindad V donde f no preserva la orientación, lo que equivale a decir que $\overline{f}$ no invierte la orientación en V; pero el conjunto excepcional de $\overline{f}$ es el mismo de f, pudiendo aplicar el mismo razonamiento anterior a $\overline{f}$, concluyendo así que $X = \Omega$, la misma contradicción anterior. En conclusión, $X \subseteq \Omega'_p \cap \Omega'_i$.
“ $\supseteq$ ” Ahora, supongamos que existe $z_0 \in \Omega'_p \cap \Omega'_i$ tal que $z_0 \notin X$; es decir, tal que $|\omega(z_0)| \neq 1$. Podemos suponer sin pérdida de generalidad que $|\omega(z_0)| < 1$, pero sabemos que $|\omega|$ es una función continua, y por lo tanto, debe existir una vecindad V de z_0 tal que $|\omega(z)| < 1$ para todo $z \in V$. Pero $z_0 \in \Omega'_i$, por lo que debería existir $z \in V$ tal que $|\omega(z)| > 1$, ¡absurdo!. En consecuencia, z_0 debe estar en X. Se concluye que $X \supseteq \Omega'_p \cap \Omega'_i$. ■

A continuación, veremos que una consecuencia directa del Teorema 3.2 es que el conjunto excepcional de una función armónica no tiene componentes discretas; sin embargo, no contiene todos sus puntos de acumulación en $\mathbb{C}$, pero sí los que están en el dominio de la función; es decir, es un conjunto perfecto dentro del dominio de la función.

Corolario 3.1. *Sea f una función armónica no constante en un dominio Ω del plano complejo y sea X el conjunto excepcional de f en Ω. Entonces $X = X' \cap \Omega$.*

Demostración. Si $X = \emptyset$ ó $X = \Omega$, el resultado es inmediato. Supongamos entonces que $X \neq \emptyset$ y $X \neq \Omega$.
“ $\subseteq$ ” Por el Teorema 3.2, dados un punto $z_0 \in X$ y $r > 0$ tales que $D := D(z_0, r) \subseteq \Omega$, existen $z_1, z_2 \in D$ tales que f preserva la orientación en z_1 y la invierte en z_2. Claramente, existe un camino Γ en D que une a z_1 con z_2 y que no pasa por z_0. Luego, como $|\omega|$ es una función continua, $|\omega(z_1)| < 1$ y $|\omega(z_2)| > 1$, debe existir $z_3 \in \Gamma$ tal que $|\omega(z_3)| = 1$. Claramente $z_3 \in \Omega$ y $z_3 \neq z_0$. De esta forma, concluimos que cada punto de X es un punto de acumulación del mismo X; es decir, X no tiene puntos aislados.
“ $\supseteq$ ” Sea $z_0 \in \Omega \setminus X$, por lo tanto $|\omega(z_0)| \neq 1$. Pero $|\omega|$ es una función continua, y por ende, debe existir una vecindad V de z_0 tal que $|\omega(z)| \neq 1$ para todo $z \in V$; es decir, $V \subseteq \Omega \setminus X$. De esta forma, concluimos que $\Omega \setminus X$ es abierto en $\mathbb{C}$; o lo que es lo mismo, que X es cerrado en Ω; lo que significa que $X' \cap \Omega \subseteq X$. ■

Para ilustrar esto, tomemos en el ejemplo 3.5 al dominio Ω de f como el semiplano superior. Tendríamos así que $X = \{ir \mid r > 0\}$, por lo que $\Omega \setminus X$ consta de los dos primeros cuadrantes del plano complejo, los cuales son abiertos. Sin embargo, aunque X sí es cerrado en Ω, no lo es en $\mathbb{C}$, puesto que 0 es un punto de acumulación de X en $\mathbb{C}$ pero $0 \notin X$.

No hay nada hasta el momento que nos indique que no pueda existir una función armónica f con un dominio Ω que contenga al intervalo real $[0, 1]$ y cuyo conjunto excepcional X sea el conjunto de Cantor sobre el eje real; pero de ser así, $\Omega \setminus X$ sería arcoconexo y por lo tanto conexo. La siguiente proposición muestra que esto no es posible.

Corolario 3.2. *Sea f una función armónica no constante en un dominio Ω del plano complejo, y sea X el conjunto excepcional de f en Ω. Si $X \neq \emptyset$ y $X \neq \Omega$, entonces el conjunto $\Omega \setminus X$ es disconexo.*

Demostración. Dado que ω es meromorfa en Ω, se tiene que $\Omega \setminus X = \Omega_p \cup \Omega_i$, siendo ambos conjuntos abiertos y disjuntos. Además, como $X \neq \emptyset$ y $X \neq \Omega$, por el Teorema 3.2, en cualquier vecindad de un punto de X existen puntos donde f preserva la orientación y puntos donde f invierte la orientación; es decir, $\Omega_p \neq \emptyset$ y $\Omega_i \neq \emptyset$. Se concluye así que el conjunto $\Omega \setminus X$ es disconexo. ■

Se tiene, entonces, que aunque el conjunto excepcional es un conjunto perfecto dentro del dominio de la función, no puede ser algo como el conjunto de Cantor que es disconexo. Sin embargo, esto no significa que el conjunto excepcional deba ser conexo, como muestra el siguiente ejemplo de una función armónica periódica.

Ejemplo 3.6. Sea

$$f(z) = \operatorname{sen} z + \overline{\cos z},$$

que es armónica y periódica en $\mathbb{C}$. Como $\omega(z) = -\tan z$, el conjunto excepcional es

$$X = \{z \in \mathbb{C} : |\tan z| = 1\} = \left\{ z \in \mathbb{C} : z = \frac{\pi}{4} + n\frac{\pi}{2} + iy; n \in \mathbb{Z}, y \in \mathbb{R} \right\};$$

es decir, X es un conjunto de rectas verticales que aparecen periódicamente cada $\pi/2$. De esta forma, el plano complejo $\mathbb{C}$ queda dividido por X en infinitas franjas verticales, pero como alrededor de cada punto de X deben existir puntos donde se preserve la orientación y puntos donde se invierta, queda claro que las franjas quedan intercaladas en cuanto a orientación; y por lo tanto, Ω_p y Ω_i son disconexos.

Proposición 3.2. *Sea f una función armónica no constante en un dominio Ω del plano complejo, y sea X el conjunto excepcional de f en Ω. Si $X \neq \emptyset$ y $X \neq \Omega$, entonces X es una 1-variedad excepto tal vez en un conjunto discreto.*

Demostración. Como $|\omega(z)| = 1$ para todo $z \in X$, se tiene que $\omega[X] \subseteq \mathbb{T}$. Sea Λ el conjunto de polos de ω y ceros de ω', el cual es un subconjunto discreto de Ω, y consideremos $\Omega \setminus \Lambda$.

Tomemos $z_0 \in X \setminus \Lambda$, por lo tanto $\omega'(z_0) \neq 0$, y como además Λ es discreto, existe una vecindad V_0 de z_0 donde ω es localmente inyectiva y tal que $V_0 \subseteq \Omega \setminus \Lambda$; pero ω es meromorfa y Λ contiene todos los polos de ω, por lo que ω es analítica en V_0. Luego, existe otra vecindad V de z_0 contenida en V_0 tal que $\widehat{\omega} = \omega|_V$ es univalente. Si $W = \widehat{\omega}[V]$, entonces $\widehat{\omega}^{-1} : W \to V$ es analítica y biyectiva; y por lo tanto, $\widehat{\omega}^{-1}[W \cap \mathbb{T}]$ es una 1-variedad y $\widehat{\omega}^{-1}[W \cap \mathbb{T}] = X \cap V$. Tenemos entonces que para todo $z \in X \setminus \Lambda$ existe una vecindad $V \subseteq \Omega \setminus \Lambda$ a la cual pertenece tal que $X \cap V$ es una 1-variedad, concluyéndose así que X es una 1-variedad excepto tal vez en aquellos puntos de X que pertenecen a Λ, los cuales son puntos aislados. ■

Si en la proposición anterior agregamos en la hipótesis las condiciones que ω es inyectiva en un abierto que contiene a X y que $\omega(X) = \mathbb{T}$, entonces, por el teorema de la función inversa, ω^{-1} es analítica en un abierto que contiene a $\mathbb{T}$; así, $t \mapsto \omega^{-1}(e^{2\pi i t})$, $t \in [0, 1]$, es una parametrización para X; es decir, X es una curva cerrada simple en $\mathbb{C}$.
Vemos que en el ejemplo 3.5, X es todo el eje imaginario, que aunque no es una curva cerrada simple en $\mathbb{C}$, en $\widehat{\mathbb{C}}$ sí es una curva cerrada; después de todo, se cumple que $\omega(X) = \mathbb{T}$ pero ω no es inyectiva en X. En efecto,

$$\omega(z) = e^{i\theta} \Leftrightarrow z = \frac{1 - \sqrt{-e^{i\theta}}}{1 + \sqrt{-e^{i\theta}}};$$

esto es, todo punto de $\mathbb{T}$ es alcanzado dos veces por ω, puesto que $-e^{i\theta}$ siempre tiene dos raíces; en particular, $\omega(z) = -1$ si y sólo si $\sqrt{-e^{i\theta}} = \pm 1$, si y sólo si $z = 0$ o $z = \infty$.

Ejemplo 3.7. Consideremos la función

$$f(z) = z + \overline{\frac{1}{3}z^3 + z}.$$

En este caso, $\omega(z) = z^2 + 1$. Luego, $|\omega(z)| = 1$ si y sólo si $z^2 = e^{i\theta} - 1$ para algún $\theta \in [0, 2\pi)$. La figura 3-1 nos muestra la gráfica de esta última ecuación hecha en MatLab.

Notemos que $\omega(0) = 1$, y por lo tanto $0 \in X$. Además, $\omega'(z) = 0$ si y sólo si $z = 0$; por lo que, de acuerdo a la proposición anterior, X es una 1-variedad excepto tal vez en $z = 0$. De hecho, en la gráfica vemos que X se cruza en $z = 0$, lo que quiere decir que, en efecto, X no es una 1-variedad alrededor de dicho punto.

Consideremos $z_0 \in \mathbb{C}$, D un disco abierto centrado en z_0 y f una función armónica en el disco agujereado $D^* = D \setminus \{z_0\}$. Si $f = H + \overline{H} + A \log|z - z_0|$, con H analítica en D^* y $A \in \mathbb{R}$, entonces f es real-valuada y por lo tanto tiene rango con interior vacío. Notemos además que su Jacobiano es nulo en todo $z \neq z_0$:

$$J_f(z) = |f_z(z)|^2 - |f_{\overline{z}}(z)|^2 = \left| H'(z) + \frac{A}{2(z - z_0)} \right|^2 - \left| \overline{H'(z)} + \frac{A}{2\overline{(z - z_0)}} \right|^2 = 0.$$

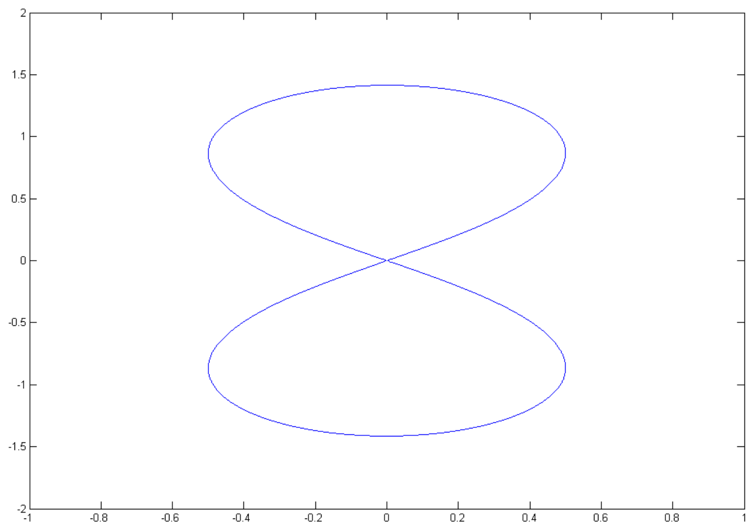

Figura 3-1: $z^2 = e^{i\theta} - 1$, $\theta \in [0, 2\pi)$

Veamos que esto es equivalente a decir que f no preserva ni invierte la orientación en ningún punto del dominio; es decir, que el conjunto excepcional X contiene todo el dominio de f.

Teorema 3.3. *Sea f una función armónica no constante con dominio Ω. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(a) *El rango de f tiene interior vacío.*

(b) $J_f(z) = 0$ *para todo* $z \in \Omega$.

(c) $X = \Omega$.

Demostración. "$(a) \Rightarrow (b)$" Demostremos el contrarrecíproco: Supongamos que existe un punto z_0 en el dominio de f tal que $J_f(z_0) \neq 0$ y veamos que el interior del rango de f es diferente de vacío. En efecto, al ser J_f una función continua, existe una vecindad V de z_0 donde J_f es siempre positiva o siempre negativa. En cualquier caso, por la propiedad del mapeo abierto para funciones armónicas, f envía a V sobre un conjunto abierto. Esto significa que el interior del rango de f no es vacío.

"$(b) \Rightarrow (c)$" Supongamos que $J_f \equiv 0$ en Ω y consideremos dos casos:
Caso 1: Primero supongamos que $f_z(z) = 0$ para todo $z \in \Omega$, pero $J_f(z) = 0$ para todo $z \in \Omega$; y por ende, también se tiene que $f_{\overline{z}}(z) = 0$ para todo $z \in \Omega$. Así, como f_z y $f_{\overline{z}}$ son nulas, entonces f es constante, lo que contradice la hipótesis.
Caso 2: Ahora, supongamos que existe un $z_0 \in \Omega$ tal que $f_z(z_0) \neq 0$. Por la continuidad de f_z, existe $r > 0$ tal que $f_z(z) \neq 0$ para todo $z \in D(z_0, r)$. Como $J_f \equiv 0$, entonces

$|f_{\overline{z}}| = |f_z| \neq 0$ en $D(z_0, r)$; de donde, $\omega = \overline{f_{\overline{z}}}/f_z$ es analítica en $D(z_0, r)$ y $|\omega(z)| = 1$ para todo $z \in D(z_0, r)$; por lo tanto, ω es constante en $D(z_0, r)$; pero ω es meromorfa en todo Ω, y en consecuencia, por el principio de identidad para funciones meromorfas, ω es constante en todo Ω. En particular, $|\omega(z)| = 1$ para todo $z \in \Omega$; es decir, $X = \Omega$.

"$(c) \Rightarrow (a)$" Supongamos que $X = \Omega$, lo que quiere decir que $|\omega(z)| = 1$ para todo $z \in \Omega$. Definimos

$$\Lambda := \{D(p + iq, r) \subseteq \Omega \mid p, q, r \in \mathbb{Q}, r > 0\}.$$

Notemos que $\Omega = \bigcup_{D \in \Lambda} D$ y que Λ es equipotente a un subconjunto de $\mathbb{Q}^3$, y por ende Λ es contable. Tomemos $D \in \Lambda$, entonces $f = h + \overline{g}$ con h y g analíticas en D; de donde, $\omega = g'/h'$ es meromorfa en D, pero $|\omega(z)| = 1$ para todo $z \in D$; por lo tanto, ω es constante en D; digamos que $\omega = e^{i\theta}$ con $\theta \in [0, 2\pi)$ constante. Tenemos entonces que $g'(z) = \omega h'(z) = e^{i\theta} h'(z)$ para todo $z \in D$; de donde, al integrar sobre D, $g(z) = e^{i\theta} h(z) + k$ con $k \in \mathbb{C}$ constante. En conclusión, $f(z) = h(z) + e^{-i\theta}\overline{h}(z) + \overline{k}$ para todo $z \in D$.
Recordemos que toda función de la forma $T(z) = \alpha z + \beta \overline{z}$ es una transformación lineal de $\mathbb{C}$ en $\mathbb{C}$ con determinante $\det T = |\alpha|^2 - |\beta|^2$. Luego, T es univalente si y sólo si $|\alpha| \neq |\beta|$; por lo que, cuando $|\alpha| = |\beta|$, el rango de T es una recta que pasa por el origen ó es $\{0\}$. En nuestro caso, tomemos $T(z) = z + e^{-i\theta}\overline{z}$ cuyo determinante es cero, y reescribamos a f en la forma

$$f(z) = T(h(z)) + \overline{k}$$

para todo $z \in D$. Como $T[\mathbb{C}]$ es una recta que pasa por el origen o es $\{0\}$, la gráfica de $f[D]$ está contenida en dicha recta trasladada por $\overline{k}$ o es $\{\overline{k}\}$; y por lo tanto, $f[D]$ tiene medida cero en $\mathbb{C}$. Ahora bien, $f[\Omega] \subseteq \bigcup_{D \in \Lambda} f[D]$; pero la unión contable de conjuntos de medida cero tiene medida cero; y en consecuencia, el rango de f tiene interior vacío. ■

3.3. Orientación en singularidades aisladas

De ahora en adelante, para $z \in \mathbb{C}$ y $r > 0$, tendremos que $D^*(z, r) := D(z, r) \setminus \{z\}$.
Dado que, en un principio, una función armónica no está definida sobre ninguna de sus singularidades aisladas, tampoco existen el Jacobiano ni la dilatación compleja de la función sobre estas; y por ende, no hay una orientación definida sobre dichas singularidades aisladas. Sin embargo, el hecho de ser una singularidad *aislada* garantiza la existencia del Jacobiano y la dilatación en una vecindad agujereada, por lo que, haciendo alusión al Teorema 3.1, hacemos la siguiente definición:

Definición 3.3. *Sea z_0 una singularidad aislada de una función armónica f.*

(i) *Decimos que f preserva la orientación en z_0 si existe $r > 0$ tal que $|\omega(z)| < 1$ para todo $z \in D^*(z_0, r)$.*

(ii) *Decimos que f invierte la orientación en z_0 si $\overline{f}$ preserva la orientación en z_0, o equivalentemente, si existe $r > 0$ tal que $|\omega(z)| > 1$ para todo $z \in D^*(z_0, r)$.*

Ejemplo 3.8. Sea
$$f(z) = \frac{z}{(1-z)^2} - \frac{\overline{z}}{1+\overline{z}}.$$
Luego, f tiene singularidades aisladas en 1 y -1; y además,
$$\omega(z) = -\frac{(1-z)^3}{(1+z)^3}.$$
Se tiene entonces que, dado $z \in \mathrm{Dom}(f) = \mathbb{C} \setminus \{-1, 1\}$, $|\omega(z)| < 1$ si $\mathrm{Re}(z) > 0$, $|\omega(z)| > 1$ si $\mathrm{Re}(z) < 0$, y $|\omega(z)| = 1$ si $\mathrm{Re}(z) = 0$; es decir, f preserva la orientación en el semiplano derecho quitando el punto $z = 1$, la invierte en el semiplano izquierdo quitando el punto $z = -1$, y el conjunto excepcional X es el eje imaginario. De esta forma, de acuerdo a la definición 3.3, concluimos que f preserva la orientación en 1 y la invierte en -1.

3.3.1. El conjunto excepcional aumentado

Notemos que la definición 3.3 también aplica para cualquier $z_0 \in \mathrm{Dom}(f)$, puesto que si f preserva la orientación en z_0, entonces $|\omega(z_0)| < 1$, y por la continuidad de ω, existe $r > 0$ tal que $|\omega(z)| < 1$ para todo $z \in D^*(z_0, r)$. De igual forma ocurre si f invierte la orientación en z_0; es decir, existe $r > 0$ tal que $|\omega(z)| > 1$ para todo $z \in D^*(z_0, r)$. Podemos entonces definir conjuntos más generales que los conjuntos Ω_p y Ω_i del Teorema 3.2.

Definición 3.4. *Dada una función armónica f definida en un dominio Ω del plano complejo, llamaremos al conjunto*
$$\widehat{\Omega} := \{z \in \mathbb{C} \mid D^*(z, r) \subseteq \Omega \text{ para algún } r > 0\}$$
*el **dominio aumentado** de f.*

Es importante notar que el dominio aumentado de f está compuesto por el dominio de f junto con las singularidades aisladas de f.

Definición 3.5. *Dada una función armónica f definida en un dominio Ω del plano complejo, definimos $\widehat{\Omega}_p$ como el conjunto de puntos en $\widehat{\Omega}$ donde f preserva la orientación, y definimos $\widehat{\Omega}_i$ como el conjunto de puntos en $\widehat{\Omega}$ donde f invierte la orientación; es decir, si D_z^* denota a un disco agujereado arbitrario centrado en z, entonces*
$$\widehat{\Omega}_p := \{z_0 \in \widehat{\Omega} \mid \text{ existe } D_{z_0}^* \subseteq \Omega \text{ tal que } |\omega(z)| < 1 \text{ para todo } z \in D_{z_0}^*\}$$
y
$$\widehat{\Omega}_i := \{z_0 \in \widehat{\Omega} \mid \text{ existe } D_{z_0}^* \subseteq \Omega \text{ tal que } |\omega(z)| > 1 \text{ para todo } z \in D_{z_0}^*\}.$$

En el ejemplo 3.8 se tiene que $\Omega := \mathrm{Dom}(f) = \mathbb{C} \setminus \{-1, 1\}$, mientras que $\widehat{\Omega}_p$ es el semiplano derecho y $\widehat{\Omega}_i$ es el semiplano izquierdo; lo que muestra que $\widehat{\Omega}_p$ y $\widehat{\Omega}_i$ no están necesariamente contenidos en el dominio de f, aunque siempre sea cierto que $\Omega_p \cup \Omega_i \subseteq \Omega$. También es claro que para cualquier función armónica $\Omega_p \subseteq \widehat{\Omega}_p$ y $\Omega_i \subseteq \widehat{\Omega}_i$.
Para hacer una extensión del conjunto excepcional X similar a las hechas para los conjuntos Ω_p y Ω_i, recordemos que $X = \Omega \setminus (\Omega_p \cup \Omega_i)$ como se indica en la demostración del Corolario 3.2, lo que da pie a la siguiente definición:

Definición 3.6. *Dada una función armónica f definida en un dominio Ω del plano complejo, definimos el* ***conjunto excepcional aumentado*** *de f por*

$$\widehat{X} := \widehat{\Omega} \setminus (\widehat{\Omega}_p \cup \widehat{\Omega}_i).$$

Veamos que esta definición, como lo dice el nombre de $\widehat{X}$, efectivamente expande la definición del conjunto excepcional $X = \{z \in \Omega : |\omega(z)| = 1\}$; es decir, que $X \subseteq \widehat{X}$. Además, que aquellos elementos que están en $\widehat{X}$ y no en X tienen que ser singularidades aisladas de f.

Teorema 3.4. *Si f es una función armónica en un dominio Ω, entonces*

$$\widehat{X} = \{z \in \widehat{\Omega} \mid \text{ para todo } D_z^* \subseteq \Omega \text{ existen } z_1, z_2 \in D_z^* \text{ tales que } |\omega(z_1)| \leq 1 \text{ y } |\omega(z_2)| \geq 1\}.$$

Más aun, $\widehat{X}$ está compuesto por los $z \in \Omega$ tales que $|\omega(z)| = 1$ y por las singularidades aisladas donde f no preserva ni invierte la orientación.

Demostración. Para empezar, veamos que $\widehat{X} = \Lambda$, donde

$$\Lambda := \{z \in \widehat{\Omega} : \text{ para todo } D_z^* \subseteq \Omega \text{ existen } z_1, z_2 \in D_z^* \text{ tales que } |\omega(z_1)| \leq 1 \text{ y } |\omega(z_2)| \geq 1\}.$$

Tomemos $z \in \widehat{X}$, lo que significa que $z \in \widehat{\Omega} \setminus (\widehat{\Omega}_p \cup \widehat{\Omega}_i)$. Como $z \notin \widehat{\Omega}_p \cup \widehat{\Omega}_i$, por la definición 3.5, para todo $D_z^* \subseteq \Omega$ existen $z_1, z_2 \in D_z^*$ tales que $|\omega(z_1)| \leq 1$ y $|\omega(z_2)| \geq 1$. De esta forma, concluimos que $z \in \Lambda$.
Ahora, tomemos $z \in \Lambda$, lo que significa que $z \in \widehat{\Omega}$ y que para todo $D_z^* \subseteq \Omega$ existen $z_1, z_2 \in D_z^*$ tales que $|\omega(z_1)| \leq 1$ y $|\omega(z_2)| \geq 1$; pero esto último indica, por la definición 3.5, que $z \notin \widehat{\Omega}_i$ y que $z \notin \widehat{\Omega}_p$. En conclusión, $z \in \widehat{\Omega} \setminus (\widehat{\Omega}_p \cup \widehat{\Omega}_i) = \widehat{X}$.
Para la última parte, dado $z \in \widehat{X}$ se tiene que $z \in \widehat{\Omega}$ y que para todo $D_z^* \subseteq \Omega$ existen $z_1, z_2 \in D_z^*$ tales que $|\omega(z_1)| \leq 1$ y $|\omega(z_2)| \geq 1$. Ahora bien, si $z \notin \Omega$ entonces $z \in \widehat{\Omega} \setminus \Omega$; es decir, z es una singularidad aislada de f; y por la hipótesis y la definición 3.3, f no preserva ni invierte la orientación en z. Por otro lado, si $z \in \Omega$ entonces ω está definida en z. Supongamos que $|\omega(z)| \neq 1$; así, por la continuidad de ω, no puede existir alguno de los anteriormente mencionados z_1 y z_2 para algún D_z^*, y en consecuencia tiene que ser $|\omega(z)| = 1$; es decir, $z \in X$.
Si $z \in \Omega$ y $|\omega(z)| = 1$, entonces $z \in X \subseteq \widehat{\Omega}$; luego, por el Teorema 3.2, para todo $D_z^* \subseteq \Omega$ existen $z_1, z_2 \in D_z^*$ tales que $|\omega(z_1)| \leq 1$ y $|\omega(z_2)| \geq 1$; en consecuencia, $z \in \widehat{X}$. Si z es una singularidad aislada donde f no preserva ni invierte la orientación, entonces $z \in \widehat{\Omega}$ y, por la definición 3.3, para todo $D_z^* \subseteq \Omega$ existen $z_1, z_2 \in D_z^*$ tales que $|\omega(z_1)| \leq 1$ y $|\omega(z_2)| \geq 1$; por lo que, de nuevo, tenemos que $z \in \widehat{X}$. ■

Es importante notar que aunque digamos que f preserva o invierte la orientación en una singularidad aislada z_0, f no necesariamente está definida en z_0; y por tanto, si $z_0 \in \widehat{X}$ entonces $\widehat{X}$ no está contenido en el dominio de f. Los siguientes dos ejemplos ilustran esto.

Ejemplo 3.9. Consideremos la función

$$f(z) = \frac{1}{z} + \frac{1}{\overline{z}} + \sqrt{3}\log|z|,$$

que tiene una singularidad aislada en el origen. Claramente f es real-valuada y por lo tanto tiene rango con interior vacío; así, por el Teorema 3.3, $\mathrm{Dom}(f) = X$; es decir, $|\omega(z)| = 1$ para todo $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$; y por consiguiente, f no preserva ni invierte la orientación en 0. En consecuencia, $0 \in \widehat{X}$ aunque $0 \notin \mathrm{Dom}(f)$, concluyéndose que $\widehat{X} \nsubseteq \mathrm{Dom}(f)$.

Ejemplo 3.10. Retomando la función del Ejemplo 2.2,

$$f(z) = \frac{1}{z^2} + \frac{1}{\overline{z}^2} + 2i\log|z|,$$

que tiene un polo de orden cero en $z = 0$, notamos que

$$f_z(z) = -\frac{2}{z^3} + \frac{i}{z} \quad \text{y} \quad f_{\overline{z}}(z) = -\frac{2}{\overline{z}^3} + \frac{i}{\overline{z}};$$

y por tanto,

$$\omega(z) = \frac{2 + iz^2}{2 - iz^2}.$$

De esta forma, $|\omega(z)| = 1$ si y sólo si $|2 + iz^2|^2 = |2 - iz^2|^2$, si y sólo si $z^2 = \overline{z}^2$, si y sólo si $\arg(z) = n\pi/2, n \in \mathbb{Z}$; es decir, $|\omega(z)| = 1$ si y sólo si z es un real o un imaginario puro.
Por otro lado,

$$\left|\omega(e^{i\pi/4})\right| = \left|\frac{2 + ie^{i\pi/2}}{2 - ie^{i\pi/2}}\right| = \frac{1}{3} < 1,$$

lo que indica que f preserva la orientación en el primer cuadrante. Luego, por el Teorema 3.2, podemos aseverar que f invierte la orientación en el segundo y cuarto cuadrante, mientras que la preserva en el tercer y primer cuadrante. En consecuencia, cualquier vecindad del origen contiene puntos donde se preserva y puntos donde se invierte la orientación; es decir, f no preserva ni invierte la orientación en 0; y por ende, $0 \in \widehat{X}$. Notemos que $\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ y por lo tanto $\widehat{X}$ no está contenido en el dominio de f.

3.3.2. La dilatación en una singularidad

En el ejemplo 3.10, es evidente que ω se extiende continuamente a $z = 0$ de forma tal que $\omega(0) = 1$, lo que reafirma el hecho que $0 \in \widehat{X}$, en el sentido que $|\omega(z)| = 1$ para todo $z \in \widehat{X}$, así como en X. Esto nos lleva a pensar que puede ocurrir, en general, con la dilatación alrededor de una singularidad.

Teorema 3.5. *Si f es una función armónica con finitos términos no nulos en la parte principal de su serie de Laurent alrededor de una singularidad aislada z_0, entonces su dilatación ω extiende continuamente a z_0. Más aun, si a_{-n} es el coeficiente del primer término no nulo de la parte analítica y $\overline{b_{-m}}$ es el coeficiente del primer término no nulo de la parte coanalítica, entonces ω se puede definir de forma continua en z_0 así:*

$$\omega(z_0) = \begin{cases} 0, & si\ m < n \\ b_{-m}/a_{-n}, & si\ m = n \\ \infty, & si\ m > n\ . \end{cases} \tag{3-2}$$

Demostración. De acuerdo a las hipótesis del teorema, podemos escribir a f en la forma

$$f(z) = \sum_{k=-n}^{\infty} a_k(z-z_0)^k + \sum_{k=-m}^{\infty} \overline{b_k}(\overline{z-z_0})^k + A\log|z-z_0|, \tag{3-3}$$

donde $a_{-n} \neq 0$ y $b_{-m} \neq 0$. De este modo, $f = h + \overline{g}$, siendo

$$h(z) = \sum_{k=-n}^{\infty} a_k(z-z_0)^k + \frac{A}{2}\log(z-z_0) = (z-z_0)^{-n}H(z) + \frac{A}{2}\log(z-z_0)$$

y

$$g(z) = \sum_{k=-m}^{\infty} b_k(z-z_0)^k + \frac{A}{2}\log(z-z_0) = (z-z_0)^{-m}G(z) + \frac{A}{2}\log(z-z_0),$$

donde

$$H(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_{k-n}(z-z_0)^k \quad \text{y} \quad G(z) = \sum_{k=0}^{\infty} b_{k-m}(z-z_0)^k$$

son analíticas y no se anulan cerca de z_0. Luego, tenemos que

$$\omega(z) = \frac{g'(z)}{h'(z)} = \frac{(z-z_0)^n[-2mG(z) + 2(z-z_0)G'(z) + A(z-z_0)^m]}{(z-z_0)^m[-2nH(z) + 2(z-z_0)H'(z) + A(z-z_0)^n]}.$$

Así, podemos observar que si $m < n$, $\lim_{z\to z_0}\omega(z) = 0$; si $m = n$, $\lim_{z\to z_0}\omega(z) = b_{-m}/a_{-n}$; y si $m > n$, $\lim_{z\to z_0}\omega(z) = \infty$. Entonces, se puede definir ω continua en z_0 como se indica en la igualdad (3-2). ■

De acuerdo a (3-2), si $m < n$ ó $m = n$ con $|b_{-m}| < |a_{-n}|$, entonces $|\omega(z_0)| < 1$; luego, por la continuidad de ω en z_0, $|\omega(z)| < 1$ para todo z suficientemente cercano a z_0; y concluimos a partir de la definición 3.3 que f preserva la orientación en z_0. De forma análoga se concluye que si $m > n$ ó $m = n$ con $|b_{-m}| > |a_{-n}|$, entonces f invierte la orientación en z_0.
Ahora, supongamos que $m = n$ con $|b_{-m}| = |a_{-n}|$, por lo que $|\omega(z_0)| = 1$; existe entonces una vecindad V de z_0 tal que ω es analítica en V. Luego, por el principio del módulo máximo, ω es constante en V e igual a $\omega(z_0)$, ó existen puntos donde f preserva la orientación y

puntos donde la invierte tan cerca de z_0 como queramos. En cualquier caso, se tiene que f no preserva ni invierte la orientación en z_0; es decir, $z_0 \in \widehat{X}$.
Recordemos que la ecuación (3-1) extiende continuamente a ω en puntos donde $f_z = f_{\overline{z}} = 0$; es decir, puntos donde f existe pero ω no, siendo estos singularidades removibles de ω. Por otro lado, (3-2) extiende continuamente a ω en puntos donde f tiene una singularidad aislada con finitos términos en la parte principal. Sin embargo, si tomamos m y n negativos en (3-2) obtenemos (3-1), pues como vemos en el enunciado del Teorema 3.5, en ningún momento se especifica que m y n tengan que ser positivos, y su demostración tiene total sentido aunque alguno sea negativo. En síntesis, (3-2) es una generalización de (3-1).

Proposición 3.3. *Sea f una función armónica definida en un dominio Ω del plano complejo y sea z_0 una singularidad aislada de f. Entonces:*

a) $z_0 \in \widehat{\Omega}_p$ *si y sólo si* $\lim_{z\to z_0} |\omega(z)| < 1$.

b) $z_0 \in \widehat{\Omega}_i$ *si y sólo si* $\lim_{z\to z_0} |\omega(z)| > 1$.

c) $z_0 \in \widehat{X}$ *si y sólo si* $\lim_{z\to z_0} |\omega(z)|$ *no existe en* $\mathbb{R}^+ \cup \{0, +\infty\}$ *o es igual a* 1.

Demostración. Primero, supongamos que $\lim_{z\to z_0} |\omega(z)| < 1$ y veamos que $z_0 \in \widehat{\Omega}_p$. Sea $L := \lim_{z\to z_0} |\omega(z)|$; entonces, para $\varepsilon := 1 - L > 0$; existe $r > 0$ tal que $|\omega(z)| < \varepsilon + L = 1$ para todo $z \in D(z_0, r)$; lo que significa que $z_0 \in \widehat{\Omega}_p$.
Si $\lim_{z\to z_0} |\omega(z)| > 1$, entonces $\lim_{z\to z_0} |\omega_{\overline{f}}(z)| < 1$; luego, por lo probado en el párrafo anterior, $z_0 \in (\widehat{\Omega}_{\overline{f}})_p$; y en consecuencia, $z_0 \in \widehat{\Omega}_i$.
A continuación, supongamos que $z_0 \in \widehat{X}$, y veamos que $\lim_{z\to z_0} |\omega(z)|$ no existe en $\mathbb{R}^+ \cup \{0, +\infty\}$ o es igual a 1. De hecho, por lo probado en los dos párrafos anteriores el contrarrecíproco es cierto; es decir, si $\lim_{z\to z_0} |\omega(z)|$ existe y es diferente de 1, entonces $z_0 \in \widehat{\Omega}_p$ ó $z_0 \in \widehat{\Omega}_i$, o lo que es lo mismo, $z_0 \notin \widehat{X} := \widehat{\Omega} \setminus (\widehat{\Omega}_p \cup \widehat{\Omega}_i)$.
Probemos ahora que si $\lim_{z\to z_0} |\omega(z)|$ no existe en $\mathbb{R}^+ \cup \{0, +\infty\}$ entonces $z_0 \in \widehat{X}$. En efecto, como ω es analítica en una vecindad agujereada de z_0, que dicho límite no exista en $\mathbb{R}^+ \cup \{0, +\infty\}$ significa que ω tiene una singularidad esencial en z_0. Luego, por el teorema de Casorati–Weierstrass, la imagen de cualquier vecindad agujereada de z_0 bajo ω es densa en $\mathbb{C}$, por lo que existen puntos donde $|\omega| < 1$ y puntos donde $|\omega| > 1$ en cualquier vecindad agujereada de z_0; es decir, f no preserva ni invierte la orientación en z_0; y en consecuencia, $z_0 \in \widehat{X}$.
Supongamos ahora que $z_0 \in \widehat{\Omega}_p$ y veamos que $\lim_{z\to z_0} |\omega(z)| < 1$. De hecho, $\lim_{z\to z_0} |\omega(z)|$ debe existir, porque de lo contrario se tendría por el párrafo anterior que $z_0 \in \widehat{X}$; sea entonces $L := \lim_{z\to z_0} |\omega(z)|$. Como $z_0 \in \widehat{\Omega}_p$, por la definición 3.3, existe un disco $D \subseteq \Omega$ centrado en z_0 tal que $|\omega(z)| < 1$ para todo $z \in D^*$; y por ende, $L \leq 1$. De esta forma, $\lim_{z\to z_0} |z - z_0||\omega(z)| = 0$; y en consecuencia, $\lim_{z\to z_0}(z - z_0)\omega(z) = 0$, lo que implica que z_0 es una singularidad removible de ω, por lo que ω se puede definir de forma continua en z_0; y por lo tanto, ω resulta analítica en todo D; luego, por el principio del módulo máximo, ω

es constante en D ó existe $z \in D$ tal que $|\omega(z_0)| < |\omega(z)|$; en cualquier caso, $L < 1$.
Si $z_0 \in \widehat{\Omega}_i$, entonces $z_0 \in (\widehat{\Omega}_{\overline{f}})_p$; luego, por lo probado en el párrafo anterior, $\lim\limits_{z \to z_0} |\omega_{\overline{f}}(z)| < 1$; y por lo tanto, $\lim_{z \to z_0} |\omega(z)| > 1$.
Por último, veamos que si $\lim_{z \to z_0} |\omega(z)| = 1$ entonces $z_0 \in \widehat{X}$. Como por hipótesis z_0 es una singularidad aislada, entonces $z_0 \in \widehat{\Omega}$; por ende, decir que $z_0 \notin \widehat{X} := \widehat{\Omega} \setminus (\widehat{\Omega}_p \cup \widehat{\Omega}_i)$ equivale a decir que $z_0 \in \widehat{\Omega}_p \cup \widehat{\Omega}_i$. Ahora bien, por lo probado en los dos párrafos anteriores, si $z_0 \in \widehat{\Omega}_p \cup \widehat{\Omega}_i$ entonces $\lim_{z \to z_0} |\omega(z)| \neq 1$, que es precisamente el contrarrecíproco de lo que pretendíamos demostrar. ■

La siguiente proposición muestra que los puntos en $\widehat{X}$ que no están en X (i.e. las singularidades aisladas de f donde no se preserva ni se invierte la orientación) son puntos de acumulación de X; lo cual significa, junto al Corolario 3.1, que no hay puntos de $\widehat{X}$ que estén aislados de X.

Proposición 3.4. *Sea f una función armónica definida en un dominio Ω del plano complejo y sea z_0 una singularidad aislada de f. Entonces, $z_0 \in \widehat{X}$ si y sólo si $z_0 \in \overline{X}$.*

Demostración. " $\Rightarrow$ " Supongamos que $z_0 \in \widehat{X}$, entonces por la parte (c) de la Proposición 3.3, $\lim_{z \to z_0} |\omega(z)|$ no existe en $\mathbb{R}^+ \cup \{0, +\infty\}$ o es igual a 1.
Si $\lim_{z \to z_0} |\omega(z)|$ no existe en $\mathbb{R}^+ \cup \{0, +\infty\}$, es porque ω tiene una singularidad esencial en z_0; luego, por el teorema de Casorati–Weierstrass, la imagen bajo ω de cualquier disco agujereado centrado en z_0 es densa en $\mathbb{C}$; así, para cualquier disco agujereado D^* centrado en z_0, existen $z_1, z_2 \in D^*$ tales que $|\omega(z_1)| < 1$ y $|\omega(z_2)| > 1$. Claramente, podemos trazar un camino Γ en D^* que une a z_1 con z_2 y que, por supuesto, no pasa por z_0. Pero ω es analítica en D^*; por lo tanto, $|\omega|$ es una función continua en Γ tal que $|\omega(z_1)| < 1$ y $|\omega(z_2)| > 1$; y en consecuencia, existe $z \in \Gamma$ tal que $|\omega(z)| = 1$ por el teorema del valor intermedio.
Si en cambio tenemos que $\lim_{z \to z_0} |\omega(z)| = 1$, entonces $\lim_{z \to z_0} |z - z_0||\omega(z)| = 0$; y en consecuencia, $\lim_{z \to z_0}(z - z_0)\omega(z) = 0$, lo que implica que z_0 es una singularidad removible de ω, por lo que ω se puede definir de forma continua en z_0; y por lo tanto, ω resulta analítica en todo disco $D \subseteq \Omega$ centrado en z_0; luego, por el principio del módulo máximo, ω es constante en D ó existen $z_1, z_2 \in D$ tales que $|\omega(z_1)| < |\omega(z_0)| < |\omega(z_2)|$. Como $|\omega(z_0)| = 1$, si ω es constante en D entonces $|\omega(z)| = 1$ para todo $z \in D$, pero si existen $z_1, z_2 \in D$ tales que $|\omega(z_1)| < |\omega(z_0)| < |\omega(z_2)|$, entonces $z_1, z_2 \in D^*$ y $|\omega(z_1)| < 1 < |\omega(z_2)|$; y como en el caso en el que $\lim_{z \to z_0} |\omega(z)|$ no existe en $\mathbb{R}^+ \cup \{0, +\infty\}$, se obtiene que existe un $z \in D^*$ tal que $|\omega(z)| = 1$.
En cualquier caso, $X \cap D^* \neq \emptyset$ para todo disco agujereado D^* centrado en z_0; lo que significa que $z_0 \in \overline{X}$, o más concretamente, que z_0 es un punto de acumulación de X.
" $\Leftarrow$ " Supongamos que $z_0 \in \overline{X} = X \cup X'$, pero z_0 es una singularidad aislada de f y por lo tanto $z_0 \notin X \subseteq \Omega$, por lo que $z_0 \in X'$. Existe entonces una sucesión $\{z_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ de puntos de X tal que $\lim_{n \to +\infty} z_n = z_0$; luego, como $|\omega(z_n)| = 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$, entonces $\lim_{n \to +\infty} |\omega(z_n)| = 1$; de esta forma, si $\lim_{z \to z_0} |\omega(z)|$ existe debe ser igual a 1. Se sigue que

$\lim_{z \to z_0} |\omega(z)|$ no existe en $\mathbb{R}^+ \cup \{0, +\infty\}$ o es igual a 1; lo que significa, por la parte (c) de la Proposición 3.3, que $z_0 \in \widehat{X}$. ■

Esta proposición no nos está diciendo que $\widehat{X} = \overline{X}$, pues z_0 es una singularidad aislada de f y no un punto cualquiera. Para ilustrar esto, tomemos en el Ejemplo 3.5 al dominio Ω de f como el semiplano superior; tendríamos así que $\widehat{\Omega} = \Omega$ y por ende $\widehat{X} = X = \{ir \mid r > 0\}$. Sin embargo, $\overline{X} = \{ir \mid r \geq 0\}$; es decir, 0 es un punto de acumulación de X en $\mathbb{C}$ pero $0 \notin \widehat{X}$.

3.3.3. Singularidades esenciales en $\widehat{X}$

Veremos que son pocos los casos en los que se preserva o se invierte la orientación en una singularidad esencial, puesto que en la mayoría de casos dichas singularidades pertenecen a $\widehat{X}$.

Definición 3.7. *Dada una función armónica f, diremos que f es una* ***función armónica pura*** *si f no es analítica ni antianalítica.*

Consideremos $z_0 \in \mathbb{C}$, D un disco abierto centrado en z_0 y f una función armónica en el disco agujereado $D^* = D \setminus \{z_0\}$; por lo que z_0 es una singularidad aislada de f. Por la Proposición 2.2, f tiene en D^* una representación en serie de Laurent dada por la ecuación (2-4); por lo tanto,

$$f_z(z) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} m a_m (z - z_0)^{m-1} + \frac{A}{2(z - z_0)} \quad \text{y} \quad f_{\overline{z}}(z) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} m\overline{b_m}(\overline{z - z_0})^{m-1} + \frac{A}{2(\overline{z - z_0})}.$$

Así, una expresión para la dilatación compleja de f en términos de los coeficientes de su serie de Laurent sería

$$\omega(z) = \frac{2\sum_{m=-\infty}^{\infty} m b_m (z - z_0)^m + \overline{A}}{2\sum_{m=-\infty}^{\infty} m a_m (z - z_0)^m + A}. \tag{3-4}$$

Teorema 3.6. *Sea $f = h + \overline{g} + A \log|z - z_0|$ una función armónica pura definida en un dominio Ω del plano complejo, donde A es una constante compleja, h y g son funciones analíticas y z_0 es una singularidad esencial de f. Si al menos una entre h y g no tiene una singularidad esencial en z_0, entonces $z_0 \in \widehat{X}$.*

Demostración. Sabemos que para $A \neq 0$, la función $A \log|z - z_0|$ tiene un polo fundamental en z_0, pero z_0 es una singularidad esencial de f; por lo tanto, h y g no pueden ser ambas nulas. Supongamos que h es nula, pero f es armónica pura y z_0 es una singularidad esencial de f; por lo que $A \neq 0$, g no es nula y tiene una singularidad esencial en z_0. Así,

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \overline{b_k}(\overline{z - z_0})^k + A \log|z - z_0|,$$

siendo $b_k \neq 0$ para infinitos $k \in \mathbb{Z}^-$. Luego, a partir de la ecuación (3-4) se desprende que

$$\omega(z) = \frac{2\sum_{k=-\infty}^{\infty} kb_k(z-z_0)^k + \overline{A}}{A}.$$

Vemos que ω tiene infinitos términos no nulos en su parte principal; y en consecuencia, tiene una singularidad esencial en z_0; es decir, $\lim_{z\to z_0}|\omega(z)|$ no existe en $\mathbb{R}^+ \cup \{0,+\infty\}$. Luego, por la parte (c) de la Proposición 3.3, $z_0 \in \widehat{X}$.

Si ahora fuese g la que es nula, se tendría la misma situación anterior pero esta vez para $\overline{f}$; por lo que se obtendría que $z_0 \in \widehat{X}_{\overline{f}}$, lo que equivale, por la parte (c) de la Proposición 3.3, a que $\lim_{z\to z_0}|\omega_{\overline{f}}(z)|$ no existe en $\mathbb{R}^+ \cup \{0,+\infty\}$ o es igual a 1; pero como $\omega_{\overline{f}} = 1/\omega$, eso es equivalente a tener que $\lim_{z\to z_0}|\omega(z)|$ no existe en $\mathbb{R}^+ \cup \{0,+\infty\}$ o es igual a 1; y se concluye como antes.

Ahora supongamos que ni h ni g son nulas. Además, supongamos que es h la que no tiene una singularidad esencial en z_0 mientras que g sí la tiene; es decir, h tiene finitos términos no nulos en su parte principal alrededor de z_0 mientras g tiene infinitos. Entonces, la expansión en serie de Laurent de f alrededor de z_0 es de la forma

$$f(z) = \sum_{k=-n}^{\infty} a_k(z-z_0)^k + \sum_{k=-\infty}^{\infty} \overline{b_k}(\overline{z-z_0})^k + A\log|z-z_0|,$$

donde $a_{-n} \neq 0$ y $b_k \neq 0$ para infinitos $k \in \mathbb{Z}^-$. Así, por (3-4) tenemos que

$$\omega(z) = \frac{2\sum_{k=-\infty}^{\infty} kb_k(z-z_0)^k + \overline{A}}{2\sum_{k=-n}^{\infty} ka_k(z-z_0)^k + A}.$$

Si $n \leq 0$ y $A \neq 0$, el denominador tiende a A cuando z tiende a z_0.

Si $n < 0$ y $A = 0$, ω queda de la siguiente forma:

$$\omega(z) = \frac{\sum_{k=-\infty}^{\infty} kb_k(z-z_0)^k}{\sum_{k=-n}^{\infty} ka_k(z-z_0)^k} = \frac{\sum_{k=-\infty}^{\infty} kb_k(z-z_0)^{k+n}}{\sum_{j=0}^{\infty}(j-n)a_{j-n}(z-z_0)^j};$$

cuyo denominador tiende a $-na_{-n}$ cuando z tiende a z_0.

Si $n = 0$ y $A = 0$, tomamos $m := \min\{k \in \mathbb{Z} : k > -n \text{ y } a_k \neq 0\}$ y notamos que $m > -n = 0$, con lo que ω queda de la siguiente forma:

$$\omega(z) = \frac{\sum_{k=-\infty}^{\infty} kb_k(z-z_0)^k}{\sum_{k=m}^{\infty} ka_k(z-z_0)^k} = \frac{\sum_{k=-\infty}^{\infty} kb_k(z-z_0)^{k-m}}{\sum_{j=0}^{\infty}(j+m)a_{j+m}(z-z_0)^j};$$

cuyo denominador tiende a ma_m cuando z tiende a z_0.

Si $n > 0$, podemos escribir a ω de la forma

$$\omega(z) = \frac{2\sum_{k=-\infty}^{\infty} kb_k(z-z_0)^{k+n} + \overline{A}(z-z_0)^n}{2\sum_{j=0}^{\infty}(j-n)a_{j-n}(z-z_0)^j + A(z-z_0)^n};$$

cuyo denominador tiende a $-2na_{-n}$ cuando z tiende a z_0.
En cualquier caso, el denominador tiende a una cantidad diferente de cero cuando z tiende a z_0; mientras que el numerador tiene una singularidad esencial en z_0; y por lo tanto, ω tiene una singularidad esencial en z_0; es decir, $\lim_{z\to z_0}|\omega(z)|$ no existe en $\mathbb{R}^+\cup\{0,+\infty\}$. Luego, por la parte (c) de la Proposición 3.3, $z_0\in\widehat{X}$.
Si por el contrario, tenemos que es g la que no tiene una singularidad esencial en z_0 mientras que h sí la tiene; estaríamos de nuevo ante la situación anterior pero esta vez para $\overline{f} = g+\overline{h}+\overline{A}\log|z-z_0|$; por lo que se obtendría que $z_0\in\widehat{X}_{\overline{f}}$, que como vimos antes, equivale a tener que $z_0\in\widehat{X}$.
Por último, supongamos que ni h ni g tienen una singularidad esencial en z_0; por lo tanto, ambas tienen finitos términos no nulos en su parte principal alrededor de z_0. Podemos suponer entonces que la representación en serie de Laurent de f alrededor de z_0 está dada por (3-3); por lo tanto, de acuerdo al Teorema 3.5, la dilatación en z_0 está dada por (3-2). Razonemos por reducción al absurdo: Supongamos que $z_0\notin\widehat{X} := \widehat{\Omega}\setminus(\widehat{\Omega}_p\cup\widehat{\Omega}_i)$; pero z_0 es una singularidad esencial de f por hipótesis; y por lo tanto, $z_0\in\widehat{\Omega}$; se desprende entonces que $z_0\in\widehat{\Omega}_p$ ó $z_0\in\widehat{\Omega}_i$.
Si $z_0\in\widehat{\Omega}_p$, entonces $|\omega(z_0)|<1$; de donde, ó $m<n$ ó bien $m=n$ y $|b_{-n}|<|a_{-n}|$. Sin embargo, cuando $m<n$ se tiene que $|b_{-n}|<|a_{-n}|$ puesto que $b_{-n}=0$. Luego, $|b_{-n}|<|a_{-n}|$ en cualquier caso. Si $n\le 0$, entonces la parte principal de f en z_0 consta únicamente del término logarítmico; por lo tanto z_0 es un polo fundamental de f si $A\neq 0$ ó z_0 es una singularidad removible de f si $A=0$, lo que contradice en ambos casos el hecho de que z_0 es una singularidad esencial de f. Si $n>0$, podemos escribir a f en la forma

$$f(z)=\frac{a_{-n}}{(z-z_0)^n}(1+\Psi_0(z));$$

donde,

$$\begin{aligned}\Psi_0(z) &= \sum_{k=-n+1}^{\infty}\frac{a_k(z-z_0)^{k+n}}{a_{-n}}+\sum_{k=-m}^{\infty}\frac{\overline{b_k}(\overline{z-z_0})^k(z-z_0)^n}{a_{-n}}+\frac{A(z-z_0)^n\log|z-z_0|}{a_{-n}}\\ &= \frac{\overline{b_{-n}}(z-z_0)^n}{a_{-n}(\overline{z-z_0})^n}+\frac{\Phi(z-z_0)}{a_{-n}},\end{aligned}$$

siendo

$$\Phi(z-z_0)=\sum_{j=1}^{\infty}[a_{j-n}(z-z_0)^j+\overline{b_{j-n}}(\overline{z-z_0})^{j-n}(z-z_0)^n]+A(z-z_0)^n\log|z-z_0|,$$

que claramente tiende a 0 cuando z tiende a z_0. De esta forma, $|\Psi_0(z)|$ tiende a $|b_{-n}|/|a_{-n}|$ cuando z tiende a z_0. Ahora bien, dado que $|b_{-n}|<|a_{-n}|$, se tiene que

$$\varepsilon := \frac{1}{2}(1-|b_{-n}|/|a_{-n}|)>0;$$

por lo que $|\Psi_0(z)| < |b_{-n}|/|a_{-n}| + \varepsilon = 1 - \varepsilon$ para z suficientemente cercano a z_0; en cuyo caso, $|1 + \Psi_0(z)| \geq 1 - |\Psi_0(z)| > \varepsilon$. Luego,

$$\lim_{z \to z_0} |f(z)| = \lim_{z \to z_0} \frac{|a_{-n}|}{|z - z_0|^n} |1 + \Psi_0(z)| = +\infty.$$

Se sigue que z_0 es un polo de f, ¡absurdo!, pues por hipótesis z_0 es una singularidad esencial de f.
Si $z_0 \in \widehat{\Omega}_i$, entonces $|\omega(z_0)| > 1$; de donde, $|\omega_{\overline{f}}(z_0)| < 1$. Luego, por el razonamiento anterior, z_0 no puede ser una singularidad esencial de $\overline{f}$; y por ende, tampoco de f, contradiciendo dicha hipótesis. Así; concluimos con esta última parte que si f tiene finitos términos no nulos en la parte principal de su serie de Laurent alrededor de z_0, siendo z_0 una singularidad esencial de f, entonces $z_0 \in \widehat{X}$. ■

Nótese que en el teorema no se está diciendo que toda singularidad esencial de una función armónica está en el conjunto excepcional aumentado, pues hay excepciones. En sí, en el teorema se pide que $f = h + \overline{g} + A \log |z - z_0|$ sea una función armónica pura, donde al menos una entre h y g no tiene una singularidad esencial en z_0; lo cual significa que se omiten los casos en los que f es analítica o antianalítica, y también cuando tanto la parte analítica como la coanalítica de f tienen ambas infinitos términos no nulos en su parte principal. En efecto, si f es analítica, preserva la orientación en todo Ω; de donde, $z_0 \in \widehat{\Omega}_p$; y si f es antianalítica, invierte la orientación en todo Ω; de donde, $z_0 \in \widehat{\Omega}_i$. En el caso en el que tanto la parte analítica como la coanalítica de f tienen ambas infinitos términos no nulos en su parte principal, puede ocurrir cualquier cosa con z_0, como se ilustra en el siguiente ejemplo:

Ejemplo 3.11. Consideremos la función

$$\begin{aligned} f(z) = \cos \frac{i}{z} + c\, \overline{\cos \frac{i}{z}} &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(i/z)^{2n}}{(2n)!} + c\, \overline{\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(i/z)^{2n}}{(2n)!}} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{0} \frac{z^{2n}}{(-2n)!} + c\, \overline{\sum_{n=-\infty}^{0} \frac{z^{2n}}{(-2n)!}}, \end{aligned}$$

donde c es una constante real positiva. Como podemos ver, tanto la parte analítica como la coanalítica de f tienen infinitos términos no nulos en sus partes principales alrededor de 0, por lo que $z = 0$ es una singularidad aislada de f que no es removible.
Por otro lado, si tomamos $z = iy$ entonces

$$f(iy) = \cos \frac{1}{y} + c\, \overline{\cos \frac{1}{y}} = (1 + c) \cos \frac{1}{y} \in [-(1 + c), 1 + c];$$

y por lo tanto, f no tiende a ∞ cuando z tiende a 0 por el eje imaginario. De este modo, f no tiene un polo en $z = 0$; y en consecuencia, $z = 0$ es una singularidad esencial de f.

Como $\overline{f_{\overline{z}}} = cf_z$, se tiene que $\omega(z) = c$ para todo $z \neq 0$. Tenemos entonces que f preserva la orientación en todo su dominio si $c < 1$, la invierte si $c > 1$; y no la preserva ni la invierte si $c = 1$. Concluimos que si $c \neq 1$, entonces $z = 0$ es una singularidad esencial de f que no pertenece a $\widehat{X}$.

Bibliografía

[ABR01] S. Axler, P. Bourdon, and W. Ramey. *Harmonic function theory.* Springer-Verlag, New York, second edition, 2001.

[Ahl79] L. V. Ahlfors. *Complex analysis.* McGraw-Hill, New York, third edition, 1979.

[CSS84] J. Clunie and T. Sheil-Small. Harmonic univalent functions. *Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A.I.*, 9:3–25, 1984.

[DHL96] P. Duren, W. Hengartner, and R. Laugesen. The argument principle for harmonic functions. *Amer. Math. Monthly.*, 103:411–415, 1996.

[Dur04] P. Duren. *Harmonic mappings in the plane.* Cambridge University Press, Cambridge, N.Y., 2004.

[HS87] W. Hengartner and G. Schober. Univalent harmonic functions. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 299:1–31, 1987.

[Lew36] H. Lewy. On the non-vanishing of the jacobian in certain one-to-one mappings. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 42:689–692, 1936.

[Pal91] B. P. Palka. *An introduction to complex function theory.* Springer-Verlag, New York, second edition, 1991.

[ST00] T. J. Suffridge and J. W. Thompson. Local behavior of harmonic mappings. *Complex Variables Theory Appl.*, 41:63–80, 2000.