Sobre el buen planteamiento del problema de Cauchy asociado a una ecuación del tipo seno-Hilbert

Víctor Helman Rodríguez Cárdenas

Universidad Nacional de Colombia
Facultad de Ciencias
Departamento de Matemáticas
Bogotá
2010

Sobre el buen planteamiento del problema de Cauchy asociado a una ecuación del tipo seno-Hilbert

Víctor Helman Rodríguez Cárdenas

Trabajo final presentado como requisito parcial para optar al título de

Magister en Matemáticas

Director
Guillermo Rodríguez Blanco

Universidad Nacional de Colombia
Facultad de Ciencias
Departamento de Matemáticas
Bogota
2010

Contenido

Introducción

Este trabajo pretende determinar el buen planteamiento local y global de la ecuación diferencial:

$$u_t = -Hu_x - sinu \tag{0.1}$$

Donde H representa la Transformada de Hilbert.

Más especificamente estudiaremos el problema de Cauchy asociado a tal ecuación, es decir;

$$\left.\begin{aligned} u_t &= -Hu_x - sinu \\ u(0) &= \varphi \in H^s(\mathbb{R}) \end{aligned}\right\} \tag{0.2}$$

La ecuación diferencial parcial (0.2) modela fenómenos que se presentan en electrodinámica [5].

El problema se aborda analizando inicialmente la parte lineal de la ecuación (0.2) y a partir de la solución de ésta y las propiedades del semigrupo continuo establecer la parte local del problema

Para el buen planteamiento global de (0.2) usaremos una ecuación integral equivalente que junto con estimaciones apriori de la solución hacen que se tenga el buen planteamiento global en $H^s(\mathbb{R})$ para $s > \frac{1}{2}$.

Finalmente determinaremos la buena colocacion de (0.2) en los espacios de Sobolev con pesos $\Im_{s,r}$.

Capítulo 1

Preliminares

En este capítulo daremos algunas definiciones y resultados básicos que posteriormente se utilizaran en éste trabajo.

Definición 1.1. *Si X y Y son espacios de Banach, denotaremos por $B(X,Y)$ el espacio de todas las transformaciones lineales y acotadas $T : X \to Y$*

Definición 1.2. *Sea H_j, $j = 1,2$ un Espacio de Hilbert. Un operador $U \in B(H_1, H_2)$ es una isometría si $||Uh||_{H_1} = ||h||_{h_2}$ para todo $h \in H_1$. Si U es unitario se trata de una isometría en H_2*

Definición 1.3. *Sea H un espacio de Hilbert. un grupo unitario fuertemente continuo en H es una aplicación $t \in \mathbb{R} \to U(t) \in B(H)$ tal que:*

U *es unitario para todo* $t \in \mathbb{R}$,

$U(t + t') = U(t)U(t')$ *para todo* $t, t' \in \mathbb{R}$,

$\lim_{t\to t'} ||U(t)\phi - U(t')\phi||_H = 0$ *para todo* $t \in \mathbb{R}$,

Definición 1.4. *Sea* $s \in \mathbb{R}$. *Los espacios de Sobolev* $H^s(\mathbb{R})$ *son la colección de todas las funciones tales que:*

$$f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}) : (1+\xi^2)^{s/2}\hat{f} \in L^2(\mathbb{R}, d\xi)$$

es decir, $\hat{f}$ *es una función medible*

$$||f||_s^2 = \int_{\mathbb{R}} (1+\xi^2)^s |\hat{f}(\xi)|^2 \, d\xi < +\infty.$$

Teorema 1.5. *Sea* $s \in \mathbb{R}$. *Entonces,* $H^s(\mathbb{R})$ *es un espacio de Hilbert con respecto al producto interno*

$$(f|g)_s = \int_{\mathbb{R}} (1+\xi^2)^s \hat{f}(\xi)\overline{\hat{g}(\xi)} \, d\xi.$$

Además Cumple:

$H^s(\mathbb{R}) \hookrightarrow H^r(\mathbb{R})$ para todo $s \geq r$, donde $\hookrightarrow$ denota, como es usual, contenido densa y continuamente.

Definición 1.6. *Sea* $s \in \mathbb{R}$. *El espacio de Sobolev* $H^s(\mathbb{T})$ *es el conjunto de todas las* $f \in P'$ *tal que:*

$$||f||_s^2 = 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} (1+|k|^2)^s |\widehat{f}(k)|^2 < \infty$$

En otras palabras, una distribución periódica $f \in H^s$ *si y solo si* $((1+|k|^2)^{s/2}\widehat{f}(k))_{k\in\mathbb{Z}} \in \ell^2$ *en donde* ℓ^2 *denota el espacio de todas las sucesiones* $\alpha = (\alpha_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ *con*

$$||\alpha||_{\ell_s^2} = \left[2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} (1+|k|^2)^s |\alpha k|^2 \right]$$

esto es $f \in H^s(\mathbb{T})$ *si y solo si* $(\widehat{f}(k))_{k\in\mathbb{Z}} \in \ell^2$

Definición 1.7. *Sea* $(\wedge, d)$ *un espacio métrico. Una contracción en* $\wedge$ *es una aplicación*

$$\Psi : \wedge \to \wedge$$

tal que: $d(\Psi(x), \Psi(y)) \leq \alpha d(x, y)$ *para todo* $x, y \in \wedge$ *y algún* $\alpha \in [0, 1]$

Si $\alpha < 1$ decimos que $\wedge$ es una contracción estricta

Teorema 1.8. ***Teorema del punto fijo de Banach***

Sea $\wedge$ *un espacio métrico completo y supongamos que* $\Psi : \wedge \to \wedge$ *es una contracción estricta* $\wedge$ *tiene un único punto fijo esto es existe un único* $x_0 \in \wedge$ *tal que* $\Psi(x_0) = x_0$.

Definición 1.9. ***Desigualdad de Gronwall***

Sea $f, g \in C([a, b], \mathbb{R})$ *y* $\alpha \in L^1([a, b])$ *con* $\alpha \geq 0$ *tal que:*

$$f(x) \leq g(x) + \int_a^x \alpha(s)ds.$$

para $a \leq x \leq b$. *Entonces:*

$$f(x) \leq g(x) + \int_a^x \alpha(s)e^{\int_s^x \alpha(\tau)d\tau}g(s)ds.$$

para $a \leq x \leq b$. *Además si* g *es constante entonces:*

$$f(x) \leq ge^{\int_a^x \alpha(\tau)d\tau}$$

Definición 1.10. ***Desigualdad de Gagliardo-Nirenberg.***

Si $f \in H^k\mathbb{R}$ *donde* k *es un entero positivo, entonces existe* $C > 0$ *tal que:*

$$||\partial_x^n f||_{L^p} \leq C||\partial_x^m f||_{L^q}^{\theta}||f||_{L^r}^{1-\theta}$$

donde $n < m \leq k, C = C(n, m, p, q, r), \theta \in [\frac{n}{m}, 1]$ *y*

$$\frac{1}{p} - n = \theta(\frac{1}{q} - m) + (1 - \theta)\frac{1}{r}$$

Definición 1.11. ***Desigualdad de Young***

Si $f, g \geq 0, p, q > 1$ *y* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ *entonces:*

$$fg \leq \frac{f^p}{p} + \frac{g^q}{q}$$

Definición 1.12. ***Desigualdad de Hölder***

Sean $\alpha = (\alpha_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ *y* $\beta = (\beta_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ *tales que* $\sum_{n\in\mathbb{Z}} |\alpha_n|^p < \infty$ *y* $\sum_{n\in\mathbb{Z}} |\beta_n|^q < \infty$, *con* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ *entonces:*

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} |\alpha_n \beta_n| \leq [\sum_{n\in\mathbb{Z}} |\alpha_n|^p]^{\frac{1}{p}} + [\sum_{n\in\mathbb{Z}} |\beta_n|^q]^{\frac{1}{q}}$$

Capítulo 2

Solución Lineal de la Ecuación en $H^s(\mathbb{R}), s > \frac{1}{2}$

En este capítulo abordaremos el problema asociado a la parte lineal de la ecuación (0.2), es decir, consideramos el problema de valor inicial

$$\left.\begin{aligned} u_t &= -Hu_x \\ u(0) &= \varphi \in H^s(\mathbb{R}) \end{aligned}\right\} \tag{2.1}$$

dónde, $x \in \mathbb{R}$ y H corresponde a la transformada de Hilbert.
Usando la Transformada de Fourier se verifica que la solución de dicha ecuacion viene dada por:

$$u(t) = (e^{-t|\xi|}\widehat{\varphi})^{\vee} = e^{-tH\partial_x}\varphi \tag{2.2}$$

de esta manera para cada $t \geq 0$ y cada $\varphi \in H^s(\mathbb{R})$, definimos el operador

$$\mathbb{V}(t)\varphi = (e^{-t|\xi|}\widehat{\varphi})^{\vee}$$

Teorema 2.1. *La aplicación* $t \in [0,\infty) \longrightarrow \mathbb{V}(t) \in H^s(\mathbb{R})$ *es un grupo fuertemente continuo a un parámetro.*

Demostración. Este resultado es consecuencia de:

1. $\mathbb{V}(0) = 1$ puesto que $\mathbb{V}(0)\varphi = \varphi$

2. $\mathbb{V}(t+w)\varphi = [e^{(-(t+w)|\xi|)}]\hat{\varphi}]\check{} = [e^{-t|\xi|}e^{-w|\xi|}\hat{\varphi}]\check{} = \mathbb{V}(t)[\mathbb{V}(w)\varphi]$ para todo t, $w \in \mathbb{R}$, y toda $\varphi \in H^s(\mathbb{R})$

3. (límite por derecha) Sea $t \geq 0$ fijo y $h > 0$ entonces

$$\begin{aligned} ||e^{-(t+h)H\partial_x}\phi - e^{-tH\partial_x}\phi||_s^2 &= \int_{-\infty}^{+\infty}(1+\xi^2)^s|(e^{-(t+h)|\xi|} - e^{-t|\xi|})\hat{\phi}|^2 d\xi \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty}(1+\xi^2)^s|e^{-2t|\xi|}||e^{-h|\xi|} - 1||\hat{\phi}|^2 d\xi \\ &\leq 4||\phi||_s^2, \end{aligned}$$

para todo $t \in \mathbb{R}$, y toda $\phi \in H^s(\mathbb{R})$, Luego por el Teorema de la Convergencia Dominada de Lebesgue podemos concluir que:
$||e^{-(t+h)H\partial_x}\phi - e^{-tH\partial_x}\phi||_s^2 \to 0$ cuando $h \to 0$.
Sea $t > 0$ fijo y tomemos h tal que $0 < h < \frac{t}{2}$, esto es ; $0 < \frac{t}{2} - h < t - h$ luego:

$$\begin{aligned} ||e^{-tH\partial_x}\phi - e^{-(t-h)H\partial_x}\phi||_s^2 &= \int_{-\infty}^{+\infty}(1+\xi^2)^s|(e^{-t|\xi|} - e^{-(t-h)|\xi|})\hat{\phi}|^2 d\xi \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty}(1+\xi^2)^s|(e^{-\frac{t}{2}|\xi|} - e^{-(\frac{t}{2}-h)|\xi|})\hat{\phi}|^2 d\xi \\ &\leq C||\phi||_s^2 \end{aligned}$$

Luego el teorema de la convergencia dominada de Lebesgue nos permite concluir $||e^{-tH\partial_x}\phi - e^{-(t-h)H\partial_x}\phi||_s^2 \to 0$ si $h \to 0$.

De (1),(2)y (3) se concluye que $\mathbb{V}$ es un grupo fuertemente continuo a un parámetro.

Además

$$\begin{aligned}
||\mathbb{V}(t)\phi||_s^2 &= \int_{-\infty}^{+\infty}(1+\xi^2)^s|e^{-t|\xi|}||\hat{\phi}|^2 d\xi \\
&\leq \int_{-\infty}^{+\infty}(1+\xi^2)^s|\hat{\phi}|^2 d\xi \\
&= ||\phi||_s^2
\end{aligned}$$

esto es; el semigrupo $\mathbb{V}$ es de contracción

En adelante notaremos a $H^s(\mathbb{R})$ como H^s. ■

Teorema 2.2. *u dada por (2.2) es la única solución de (2.1). Es decir, $u \in C([0,T], H^s)$ es la única que satisface*

$$\lim_{h\to 0}\left\|\frac{u(t+h)-u(t)}{h}+Hu_x\right\|_{s-1}=0. \tag{2.3}$$

Demostración. Sea $t \geq 0$, $h > 0$ y definamos el operador $Q = q(D) = -H\partial_x$ esto es; $q(\xi) = -|\xi|$ Entonces:

$$\begin{aligned}
&\left\|\frac{u(t+h)-u(t)}{h}-q(D)u(t)\right\|_{s-1}^2 \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty}(1+\xi^2)^{s-1}\left|\frac{e^{-(t+h)|\xi|}\widehat{\varphi}-e^{-|\xi|t}\widehat{\varphi}}{h}-\left(-|\xi|e^{-|\xi|t}\widehat{\varphi}\right)\right|^2 d\xi \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty}(1+\xi^2)^{s-1}e^{-2|\xi|t}\left|\frac{e^{-|\xi|h}-1}{h}+|\xi|\right|^2|\hat{\varphi}(\xi)|^2 d\xi. \qquad (2.4)
\end{aligned}$$

Aplicando el teorema del valor medio se tiene:

$$\left|\frac{e^{-|\xi|h}-1}{h}\right| \leq |\xi|$$

luego (2.4) es acotado por

$$4\int_{-\infty}^{+\infty}(1+\xi^2)^s|\hat{\phi}|^2 d\xi = 4||\phi||_s^2$$

Así:

$$\left\|\frac{u(t+h)-u(t)}{h} - q(D)u(t)\right\|_{s-1}^2 \leq 4||\phi||_s^2 \tag{2.5}$$

La desigualdad (2.5) y $\lim\limits_{h\to 0}\left|\dfrac{e^{-|\xi|h}-1}{h}+|\xi|\right| = 0$ completan la demostración puesto que se satisfacen las condiciones del Teorema de la convergencia Dominada de Lebesgue.

Para el límite por la izquierda se procede en forma analoga con $t > 0$ fijo y $0 < h < \frac{t}{2}$. ∎

Capítulo 3

El problema local

En este capítulo abordaremos el buen planteamiento local del problema (0.2), es decir:

$$\left.\begin{aligned} u_t = -Hu_x - sinu \\ u(0) = \varphi \in H^s(\mathbb{R}) \end{aligned}\right\} \tag{3.1}$$

Antes se demostrará el siguiente resultado el cual utilizaremos posteriormente:

Teorema 3.1. *sinu satisface la condición local de Lipschitz, es decir:*

$$\|sinu - sinv\| \leq L(\|u\|_s, \|v\|_s)\|u - v\|_s \tag{3.2}$$

Con L un polinomio

Demostración.

$$\|sinu - sinv\|_s = \|(u - v) - \frac{1}{3!}(u^3 - v^3) + \frac{1}{5!}(u^5 - v^5) - \cdots\|_s$$

$$= \|(u-v) - \frac{1}{3!}(u-v)(u^2+uv+v^2) + \frac{1}{5!}(u-v)(u^4+\cdots$$

$$+ v^4) - \cdots \|_s$$

$$= \|u-v)\|_s \|1 - \frac{1}{3!}(u^2+uv+v^2) + \cdots \|_s$$

$$\leq \|u-v)\|_s \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!} P_{2n}(\|u\|_s, \|v\|_s)$$

Donde

$$P_{2n}(\|u\|_s, \|v\|)_s = \|u\|_s^{2n} + \|u\|_s^{2n-1}\|v\|_s + \cdots + \|v\|_s^{2n}$$

y

$$L(\|u\|_s, \|v\|_s) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!} P_{2n}(\|u\|_s, \|v\|_s),$$

en particular se tiene que

$$||sinu||_s \leq L(||u||_s, 0)||u||_s$$

■

Veamos ahora que el problema de valor inicial (3.1) es equivalente a la ecuación integral

$$u(t) = \mathbb{V}(t)\varphi - \int_0^t \mathbb{V}(t-\tau) sin(u(\tau)) d\tau \tag{3.3}$$

Teorema 3.2. *Si $s > 1/2$ entonces el problema (0.2) es equivalente a la ecuación integral (3.3) en el siguiente sentido: si $u \in C([0,T] : H^s)$ es una solución de (0.2) entonces u satisface (3.3). Recíprocamente, si $u \in C([0,T] : H^s)$ es una solución de (3.3) entonces $u \in C^1([0,T] : H^{s-1})$ y satisface (0.2) con derivada dada por*

$$\lim_{h \to 0} \left\| \frac{u(t+h) - u(t)}{h} + Hu_x + sin(u(t)) \right\|_{s-1} = 0.$$

.

Demostración. Supongamos que $u \in C([0,T]:H^s)$ es una solución de (0.2) en H^{s-1} entonces

$$\mathbb{V}(-t)u_t + \mathbb{V}(-t)H\partial_x u = -\mathbb{V}(-t)sen(u)$$

luego

$$\frac{d}{dt}(\mathbb{V}(-t)u) = -\mathbb{V}(-t)sin(u)$$

ahora integrando de 0 a t y ya que $\mathbb{V}(-t)$ es un operador acotado en H^{s-1} se tiene:

$$\begin{aligned}\mathbb{V}(-t)u - \mathbb{V}(0)u(0) &= -\int_0^t \mathbb{V}(-\tau)sin(u(\tau))d\tau\\ \mathbb{V}(-t)u - \varphi &= -\int_0^t \mathbb{V}(-\tau)sen(u(\tau))d\tau\\ u(t) &= \mathbb{V}(t)\varphi - \int_0^t \mathbb{V}(t-\tau)sin(u(\tau))d\tau\end{aligned}$$

■

Supongamos ahora que $u \in C([0,T]:H^s)$ es una solución de (0.2) en H^{s-1} entonces

$$\lim_{h\to 0}\left\|\frac{u(t+h)-u(t)}{h} + Hu_x + sin(u(t))\right\|_{s-1} = 0.$$

.

Demostración. En efecto:

$$\left\|\frac{u(t+h)-u(t)}{h} - Qu(t) + sin(u(t))\right\|_{s-1} \leq \left\|\mathbb{V}(t)\left(\frac{1-\mathbb{V}(h)}{h} - Q\right)\varphi\right\|_{s-1}$$

$$+\left\|\int_0^t \mathbb{V}(t-\tau)\left(\frac{\mathbb{V}(h)-1}{h}\right) sin(u(\tau))d\tau - Q(u-\mathbb{V}(t)\varphi)\right\|_{s-1}$$
$$+\left\|\frac{1}{h}\int_t^{t+h} \mathbb{V}(t+h-\tau)sin(u(\tau))d\tau + sin(u(t))\right\|_{s-1}$$

De la ecuación (2.3) tenemos:

$$\lim_{h\to 0}\left\|\mathbb{V}(t)\left(\frac{\mathbb{V}(h)-1}{h}-Q\right)\varphi\right\|_{s-1} = 0.$$

Falta ver que:

$$\lim_{h\to 0}\ \left\|\int_0^t \mathbb{V}(t-\tau)\left(\tfrac{1-\mathbb{V}(h)}{h}\right) sin(u(\tau))d\tau - Q(u-\mathbb{V}(t)\varphi)\right\|_{s-1} = 0 \qquad (3.4)$$

y

$$\lim_{h\to 0}\ \left\|\tfrac{1}{h}\int_t^{t+h} \mathbb{V}(t+h-\tau)sin(u(\tau))d\tau + sin(u(t))\right\|_{s-1} = 0 \qquad (3.5)$$

Nótese que para (3.4) se tiene:

$$\begin{aligned}
&\left\|\int_0^t \mathbb{V}(t-\tau)\left(\frac{1-\mathbb{V}(h)}{h}\right) sin(u(\tau))d\tau - Q(u-\mathbb{V}(t)\varphi)\right\|_{s-1}\\
&=\left\|\int_0^t \mathbb{V}(t-\tau)\left(\frac{\mathbb{V}(h)-1}{h}\right) sin(u(\tau))d\tau + Q\int_0^t \mathbb{V}(t-\tau)sin(u(\tau))d\tau\right\|_{s-1}\\
&=\left\|\int_0^t \mathbb{V}(t-\tau)sin(u(\tau))\left((\frac{\mathbb{V}(h)-1}{h}-Q)\right)d\tau\right\|_{s-1}\\
&\leq \int_0^t \|\mathbb{V}(t-\tau)sin(u(\tau))\left((\frac{\mathbb{V}(h)-1}{h}-Q)\right)\|_{s-1}d\tau
\end{aligned}$$

Nótese que:

$$\begin{aligned}
M &= \|\mathbb{V}(t-\tau)sin(u(\tau))(\frac{\mathbb{V}(h)-1}{h}-Q)\|_{s-1}\\
&\leq C\|\frac{\mathbb{V}(h)-1}{h}-Q\|_{s-1}\|sinu\|_{s-1}
\end{aligned}$$

$$\leq C\|sin(u)\|_{s-1}$$
$$\leq CL(\|u\|_{s-1},0)\|u\|_{s-1}$$
$$\leq C\sup_{\tau\in[0,T]}\{L(\|u\|_{s-1},0)\|u\|_{s-1}\}$$

Esto implica que M es integrable, luego:

$$\lim_{h\to 0}\int_0^t \left\|\mathbb{V}(t-\tau)sin(u(\tau))\left(\frac{\mathbb{V}(h)-1}{h}-Q\right)\right\|_{s-1} d\tau$$
$$= \int_0^t \lim_{h\to 0}\left\|\mathbb{V}(t-\tau)sin(u(\tau))\left(\frac{\mathbb{V}(h)-1}{h}-Q\right)\right\|_{s-1} d\tau = 0$$

Puesto que $\frac{1}{|h|}\int_t^{t+h}\mathbb{V}(t+h-\tau)sin(u(\tau))d\tau$ es el valor medio de una función continua que se reduce a cero conforme h tiende a cero entonces

$$\lim_{h\to 0}\left\|\frac{1}{|h|}\int_t^{t+h}\mathbb{V}(t+h-\tau)sin(u(\tau))d\tau + sin(u(t))\right\|_{s-1} = 0 \qquad (3.6)$$

para algun $\tau \in [t, t+h]$ ■

Teorema 3.3. *Sean* $\varphi,\psi \in H^s$ *y* $u,v \in C([0,T]:H^s(\mathbb{R}))$, $s > \frac{1}{2}$ *dos soluciones del problema (3.1)que satisfacen* $u(0)=\varphi$ *y* $v(0)=\psi$ *entonces* $\|u(t)-v(t)\|_s \leq \|\varphi-\psi\|_s e^{L(M_s,M_s)t}$ *en particular (3.1) tiene al menos una solución.*

Demostración. De la ecuación (3.3) se tiene:

$$u(t)-v(t) = \mathbb{V}(t)(\varphi-\psi) - \int_0^t \mathbb{V}(t-\tau)(sinu - sinv)d\tau$$

Como $\mathbb{V}(t)$ es un semigrupo de contracción entonces:

$$\begin{aligned}\|u(t)-v(t)\|_s &\leq \|\varphi-\psi\|_s + \int_0^t \|sinu - sinv\|_s d\tau \\ &\leq \|\varphi-\psi\|_s + \int_0^t L(\|u\|_s, \|v\|_s)\|u-v\|_s d\tau\end{aligned}$$

Escogemos

$$M_s = M_s(u,v) = max\{\sup_{\tau\in[0,T]} \|u\|_s, \sup_{\tau\in[0,T]} \|v\|_s\}$$

y así se tiene que

$$\|u(t)-v(t)\|_s \leq \|\varphi-\psi\|_s + L(M_s, M_s)\int_0^t \|u-v\|_s d\tau \tag{3.7}$$

y por la desigualdad de Gronwall concluimos que:

$$\|u(t)-v(t)\|_s \leq \|\varphi-\psi\|_s e^{L(M_s,M_s)t} \tag{3.8}$$

■

Teorema 3.4. *Sea $\phi \in H^s(\mathbb{R}))$ entonces existe $T > 0$ y una única $u \in ([0,T], H^s)$ que satisface la ecuación integral (3.3) con*

$$\lim_{h\to 0} \|\frac{u(t+h)-u(t)}{h} - Qu(t) + sinu\|_{s-1} = 0$$

Demostración. Sea $\gamma > 0$ fijo y sea

$$\Lambda(T,\gamma,\varphi) = \{v \in C([0,T], H^s) : \|v(t) - \mathbb{V}(t)\varphi\|_s \leq \gamma\} \tag{3.9}$$

y la distancia $d(v,w) = \sup_{\tau\in[0,T]} \|v(t)-w(t)\|_s$, asi, (Λ, d) es un espacio métrico completo.

Consideremos la aplicación

$$(Av)(t) = \mathbb{V}(t)\varphi - \int_0^t \mathbb{V}(t-\tau) sinv d\tau \tag{3.10}$$

con $v \in \Lambda(T,\gamma,\varphi)$.

Veamos que $Av \in \Lambda(T,\gamma,\varphi)$ para toda $v \in \Lambda(T,\gamma,\varphi)$ y $T > 0$.

$$\begin{aligned}
\|Av(t) - \mathbb{V}(t)\varphi\|_s &= \| \int_0^t \mathbb{V}(t-\tau) sinv d\tau \| \\
&\leq \int_0^t \|\mathbb{V}(t-\tau) sinv\|_s d\tau \\
&\leq \int_0^t \|sinv\|_s d\tau \\
&\leq \int_0^t L(\|v\|_s, 0)\|v(\tau)\|_s d\tau
\end{aligned}$$

como

$$\begin{aligned}
\|v(\tau)\|_s &\leq \|v(\tau) - \mathbb{V}(t)\varphi\|_s + \|\mathbb{V}(t)\varphi\|_s \\
&\leq \gamma + \|\varphi\|_s
\end{aligned}$$

asi; $\|v(\tau) - \mathbb{V}(t)\varphi\|_s \leq L(\gamma + \|\varphi\|_s, 0)(\gamma + \|\varphi\|)T$.

Luego $Av \in \Lambda(T,\gamma,\varphi)$ para toda $v \in \Lambda(T,\gamma,\varphi)$ siempre que $0 \leq T \leq \gamma\alpha(\gamma, \|\varphi\|_s)$ con

$$\alpha(\gamma, \|\varphi\|_s) = \frac{1}{L(\gamma + \|\varphi\|_s, 0)(\gamma + \|\varphi\|)}$$

Ahora probemos que existe $T > 0$ tal que A es una contracción en $\Lambda(T,\gamma,\varphi)$

Demostración. Sea $v, w \in \Lambda(T,\gamma,\varphi)$ entonces

$$\begin{aligned}
\|(Av)(t) - (Aw)(t)\|_s &= \| \int_0^t \mathbb{V}(t-\tau) sinv d\tau - \int_0^t \mathbb{V}(t-\tau) sinw d\tau \|_s \\
&= \| \int_0^t \mathbb{V}(t-\tau)(sinv - sinw) d\tau \|_s \\
&\leq \int_0^t \|sinv - sinw\|_s d\tau
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\leq \int_0^t L(\|v\|_s, \|w\|_s)\|v-w\|_s d\tau \\
&\leq L(\gamma + \|\varphi\|_s, \gamma + \|\varphi\|_s) \int_0^t \|v-w\|_s d\tau \\
&\leq L(\gamma + \|\varphi\|_s, \gamma + \|\varphi\|_s) T d(v,w)
\end{aligned}
$$

para todo $t \in [0,T]$

Asi $d(Av, Aw) \leq L(\gamma + \|\varphi\|_s, \gamma + \|\varphi\|_s)Td(v,w) < d(v,w)$ siempre que

$$0 < T < \frac{1}{L(\gamma + \|\varphi\|_s, \gamma + \|\varphi\|_s)} = \beta(\gamma, \|\varphi\|_s)$$

■

Concluimos que A es una contracción en $\in \Lambda(T, \gamma, \varphi)$ cuando

$$0 < T < \Upsilon = \Upsilon(\gamma, \|\varphi\|_s) = min\{\gamma\alpha(\gamma, |\varphi\|_s), \beta(\gamma, |\varphi\|_s)\}$$

■

Teorema 3.5. *La solución obtenida del teorema anterior es única y depende continuamente del dato inicial.*

Demostración. La desigualdad de Gronwall y el teorema (3.3) implican la unicidad como consecuencia de hacer $\varphi = \phi$ en $\|u(t) - v(t)\|_s \leq \|\varphi - \psi\|_s e^{L(M_s, M_s)t}$.

Para demostrar la dependencia continua nótese que según como se escogío T en el teorema (3.4) se observa que ésta es una fúncion continua de $\|\varphi\|_s$, lo cual implica que las soluciones u_n se pueden definir en un intervalo de la forma $[0,T]$ par n suficientemente grande.

Ya que H^s es un algebra de Banach, para $s > \frac{1}{2}$ entonces:

$$\begin{aligned}\|u_n(t) - u(t)\|_s &\le e^{-tH\partial_x}\|\phi_n - \phi\|_s + \int_0^t e^{-(t-\tau)H\partial_x}\|sinu_n(\tau) - sinu(\tau)\|_s d\tau \\ &\le C_1\|\phi_n - \phi\|_s + C_2\int_0^t \|u_n(\tau) - u(\tau)\|_s d\tau\end{aligned}$$

Por la desigualdad tipo Gronwall se tiene que

$$\|u_n(t) - u(t)\|_s \le C_1\|\phi_n - \phi\|_s e^{C_2 t}$$

Así:

$$\sup_{t\in[0,T]} \|u_n(t) - u(t)\|_s \le C_1\|\phi_n - \phi\|_s e^{C_2 T}$$

Con lo cual se demuestra la dependencia continua. ■

Teorema 3.6. *El problema de valor inicial (3.1) es localmente bien planteado en H^s para $s > \frac{1}{2}$*

Demostración. Se tiene de los teoremas (3.3), (3.4) y (3.5). ■

NOTA: De forma análoga al caso $s > \frac{1}{2}$ se puede demostrar que el problema de valor inicial (3.1) es localmente bien planteado en L^2, ya que si u es real tenemos que $\|senu\|_0 \le \|u\|_0$ pues $|senu| \le |u|$.

Capítulo 4

El problema Global

Lema 4.1. ***(Lema de regularización)***
Sea $\lambda \in [0, \infty)$, $\varphi \in H^s(\mathbb{R})$ *entonces*

$$\|e^{-tH\partial_x}\varphi\|_{s+\lambda} \leq C_\lambda(1 + \frac{1}{t^\lambda})\|\varphi\|_s$$

donde $e^{-tH\partial_x}\varphi \in B(H^s(\mathbb{R}), H^{s+\lambda}(\mathbb{R}))$ para todo $t > 0$, $s \in R$, C_λ es una constante que depende solo de λ

Demostración.

$$\begin{aligned}
\|e^{-tH\partial_x}\varphi\|_{s+\lambda}^2 &= \int_{-\infty}^{\infty} (1+\xi^2)^\lambda e^{-2t|\xi|}(1+\xi^2)^s \|\hat{\varphi}\|_s^2 d\xi \\
&\leq (\sup_\xi (1+\xi^2)^\lambda e^{-2t|\xi|})\|\varphi\|_s^2 \\
&\leq (1 + \sup_\xi \xi^{2\lambda} e^{-2t|\xi|})\|\varphi\|_s^2 \\
&\leq (1 + (\frac{\lambda}{t})^{2\lambda} e^{-2\lambda})\|\varphi\|_s^2
\end{aligned}$$

$$\leq C_\lambda(1+\frac{1}{t^{2\lambda}})\|\varphi\|_s^2$$

$\blacksquare$

Lema 4.2. *Sea* $\varphi \in H^1(\mathbb{R})$ *y* $u \in C([0,T], H^1(\mathbb{R}))$ *la solución de (3.1) con* $u(0) = \varphi$*. Entonces*

$$\|u\|_0 \leq \|\varphi\|_0 e^t$$

Demostración. Tenemos que

$$\begin{aligned}
\partial_t\|u\|_0^2 &= \partial_t \int_{-\infty}^{\infty} |u(x,t)|^2 dx \\
&= \partial_t \int_{-\infty}^{\infty} u(x,t)\overline{u(x,t)}dx \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} u_t(x,t)\overline{u(x,t)} + u(x,t)\overline{u_t(x,t)}dx \\
&= 2\int_{-\infty}^{\infty} Re(u_t(x,t)\overline{u(x,t)})dx \\
&= 2Re\int_{-\infty}^{\infty} u_t(x,t)\overline{u(x,t)}dx \\
&= 2Re\int_{-\infty}^{\infty} (-H\partial_x u - sinu)\overline{u}dx \\
&= -2Re\int_{-\infty}^{\infty} H\partial_x u\overline{u}dx - 2Re\int_{-\infty}^{\infty} \overline{u}sinudx \\
&= -2Re\int_{-\infty}^{\infty} |\xi|\hat{u}(\xi)\overline{\hat{u}(\xi)}dx - 2Re\int_{-\infty}^{\infty} \overline{u}sinudx \\
&= -2Re\int_{-\infty}^{\infty} (|\xi|^{\frac{1}{2}}|\hat{u}(\xi)|)^2 dx - 2Re\int_{-\infty}^{\infty} \overline{u}sinudx \\
&\leq -2\|D_x^{\frac{1}{2}}u\|_0^2 + 2\|u\|_0^2
\end{aligned}$$

Integrando de 0 a t se tiene:

$$\frac{1}{2}\|u(t,x)\|_0^2 - \frac{1}{2}\|u(0)\|_0^2 \leq \int_0^t \|u(\tau)\|_0^2 d\tau$$

esto es:

$$\|u\|_0^2 \leq \|\varphi\|_0^2 + 2\int_0^t \|u(\tau)\|_0^2 d\tau$$

Aplicando la Desigualdad de Gronwall se tiene:

$$\|u\|_0^2 \leq \|\varphi\|_0^2 e^{2t}$$

■

Lema 4.3. *Si* $\frac{1}{2} < s < 1$, *entonces* $\|u\|_s \leq C(s, \|\varphi\|_s, \|\varphi\|_0, T)$

Demostración. Como $\|sinu\|_0 \leq \|u\|_0$, el lema de regularización (4.1) implica que

$$\begin{aligned}
\|u\|_{0+s} &\leq \|e^{-tH\partial_x}\varphi\|_s + \int_0^t \|e^{-(t-\tau)H\partial_x} sinu(\tau)\|_s d\tau \\
&\leq \|\varphi\|_s + C_s\int_0^t (1+\frac{1}{(t-\tau)^s})\|sinu\|_0 d\tau \\
&\leq \|\varphi\|_s + C_s\int_0^t (1+\frac{1}{(t-\tau)^s})\|u(\tau)\|_0 d\tau \\
&\leq \|\varphi\|_s + C_s\int_0^t (1+\frac{1}{(t-\tau)^s})\|\varphi\|_0 e^T d\tau \\
&\leq \|\varphi\|_s + C(s, \|\varphi\|_0, T)(T + \frac{T^{1-s}}{1-s}) \\
&\leq C(s, \|\varphi\|_s, \|\varphi\|_0, T)
\end{aligned}$$

■

Es decir si $\frac{1}{2} < s < 1$ entonces el problema es globalmente bien planteado

Lema 4.4. *Si* $\frac{1}{2} < s < 1$ *y* $0 < \theta < 1$ *entonces:*

$$\|u\|_{\theta+s} \leq C(s, \theta, \|\varphi\|_{\theta+s}, \|\varphi\|_0, T)$$

Demostración.

$$\begin{aligned}
\|u\|_{\theta+s} &\leq \|\varphi\|_{\theta+s} + \int_0^t (1 + \frac{1}{(t-\tau)^\theta}) \|sinu\|_s d\tau \\
&\leq \|\varphi\|_{\theta+s} + \int_0^t (1 + \frac{1}{(t-\tau)^\theta}) \|u(\tau)\|_s d\tau \\
&\leq |\varphi\|_{\theta+s} + C(\theta, \|\varphi\|_\theta, \|\varphi\|_0, T) \int_0^t (1 + \frac{1}{(t-\tau)^\theta}) d\tau \\
&\leq C(s, \theta, \|\varphi\|_{\theta+s}, \|\varphi\|_0, T)
\end{aligned}$$

De manera análoga se procede cuando $\frac{1}{2} < s < 2$ y $0 < \theta < 1$.
En general, esto es cierto si $\frac{1}{2} < s < n$ con $n \geq 1$ y $0 < \theta < 1$ ■

Teorema 4.5. *El problema (0.2) es globalmente bien planteado en* H^s , $s > \frac{1}{2}$

Demostración. Es consecuencia de los lemas 4.2, 4.3 y 4.4 ■

Como consecuencia de la nota dada al final del capitulo 3 y del lema 4.2 tenemos:

Teorema 4.6. *El problema (0.2) es globalmente bieb planteado en* L^2.

Capítulo 5

Teoria en Espacios de Sobolev con pesos

Lema 5.1. *Sea* $F(t,\xi) = e^{-t|\xi|}$. *Entonces:*

$$\partial_\xi F(t,\xi) = -tsgn\xi F(t,\xi)$$

$$\partial_\xi^2 F(t,\xi) = -2t\delta + t^2 F(t,\xi)$$

$$\partial_\xi^3 F(t,\xi) = -2t\delta' - t^3 sgn\xi F(t,\xi)$$

$$\partial_\xi^4 F(t,\xi) = -2t\delta'' - 2t^3\delta + t^4 F(t,\xi)$$

Además para $j \geq 4$ *la* $j-esima$ *derivada de* $F(t,\xi)$ *tiene la forma:*

$$\partial_\xi^j F(t,\xi) = -2\sum_{k=1}^{j-4} t^{2k-1}\delta^{j-2k} + (-1)^j (tsgn\xi)^j F(t,\xi)$$

donde δ *es la función delta de Dirac*

Demostración. Es inmediata apartir de un cálculo directo y el principio de inducción

■

Teorema 5.2. *$E : [0,\infty) \to \mathbb{B}(\Im_{r,s})$ es un C^0 semigrupo para $s, r \in \mathbb{N}$, $s \geq r$ y satisface que:*

1. *Si $r = 0, 1$*
   $\|E(t)\phi\|_{\Im_{s,r}} \leq \Theta_r(t)\|\phi\|_{\Im_{s,r}}$ para todo $\phi \in \Im_{s,r}$. Donde $\Theta_r(t)$ es un polinomio de grado r

2. *Si $r \geq 2$ y $\phi \in \Im_{s,r}$, $E \in C([0,\infty); \Im_{s,r})$ si y solo si $(\partial_\xi^j \hat{\phi})(0) = 0$ $j = 0, 1, 2, ..., r-2$*

Para $s \in \mathbb{R}$, $r = 1, 2, ...$, el espacio $\Im_{r,s} := H^s\mathbb{R} \cap L_2^r(\mathbb{R})$, donde $L_2^r(\mathbb{R}) = \{f \in L^2(\mathbb{R}) | x^r f \in L^2(\mathbb{R})\}$ es un espacio de Banach con la norma $\|f\|_{s,r}^2 = \|f\|_s^2 + \|f\|_{L_2^r(\mathbb{R})}^2$

Demostración. Puesto que

$$\begin{aligned}
\|E(t)\phi\|_{\Im_{s,r}}^2 &= \|E(t)\phi\|_s^2 + \|E(t)\phi\|_{L_r^2}^2 \\
&\leq \|\phi\|_s^2 + \int_{-\infty}^{\infty} (1+x^2)^r |E(t)\phi|^2 dx \\
&\leq \|\phi\|_{\Im_{s,r}}^2 + K_r \int_{-\infty}^{\infty} |\partial_\xi^r (F(t,\xi)\hat{\phi}(\xi)|^2 d\xi
\end{aligned}$$

Si $r = 0$ entonces:

$$\|E(t)\phi\|_{\Im_{s,0}}^2 = \|E(t)\phi\|_s^2 + \|E(t)\phi\|_{L_0^2}^2$$

$$
\begin{aligned}
&\leq \|\phi\|_s^2 + \int_{-\infty}^{\infty} |E(t)\phi|^2 dx \\
&\leq \|\phi\|_s^2 + \int_{-\infty}^{\infty} |e^{-t|\xi|}\hat{\phi}|^2 d\xi \\
&\leq \|\phi\|_s^2 + \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{\phi}|^2 d\xi \\
&\leq \|\phi\|_s^2 + \|\phi\|_0^2
\end{aligned}
$$

Si $r = 1$ entonces:

$$
\begin{aligned}
\|E(t)\phi\|_{\Im_{s,1}}^2 &\leq \|\phi\|_s^2 + \int_{-\infty}^{\infty} |\partial_\xi(F(t,\xi)\hat{\phi})|^2 d\xi \\
&\leq \|\phi\|_s^2 + \int_{-\infty}^{\infty} |\partial_\xi F(t,\xi)\hat{\phi} + F(t,\xi)\partial_\xi\hat{\phi}|^2 d\xi \\
&\leq \|\phi\|_s^2 + \int_{-\infty}^{\infty} |-tsgn\xi F(t,\xi)\hat{\phi} + F(t,\xi)\partial_\xi\hat{\phi}|^2 d\xi \\
&\leq \|\phi\|_s^2 + \int_{-\infty}^{\infty} (t^2|\hat{\phi}|^2 + |\partial_\xi\hat{\phi}|^2) d\xi \\
&\leq \|\phi\|_s^2 + t^2\|\phi\|_0^2 + \|x\phi\|_0^2 \\
&\leq \|\phi\|_s^2 + (1+t^2)\|\phi\|_{L_1^2}^2
\end{aligned}
$$

Si $r = 2$ entonces:

$$
\begin{aligned}
\|E(t)\phi\|_{\Im_{s,2}}^2 &\leq \|\phi\|_s^2 + \int_{-\infty}^{\infty} |\partial_\xi^2(F(t,\xi)\hat{\phi})|^2 d\xi \\
&= \|\phi\|_s^2 + \int_{-\infty}^{\infty} |(-2t\delta + t^2 sgn\xi F(t,\xi))\hat{\phi} + (-tsgn\xi)F(t,\xi)\partial_\xi\hat{\phi} + F(t,\xi)\partial_\xi^2\hat{\phi}|^2 d\xi \\
&\leq \|\phi\|_s^2 + t^2\int_{-\infty}^{\infty} |\hat{\phi}|^2 d\xi + t\int_{-\infty}^{\infty} |\partial_\xi\hat{\phi}|^2 d\xi + \int_{-\infty}^{\infty} |\partial_\xi^2\hat{\phi}|^2 d\xi \\
&\leq \|\phi\|_s^2 + t^2\|\phi\|_0^2 + t\|x\phi\|_0^2 + \|x^2\phi\|_0^2 \\
&\leq \|\phi\|_s^2 + (t^2+t+1)\|\phi\|_{L_2^2}^2
\end{aligned}
$$

Siempre y cuando $t\delta\hat{\phi} = t\hat{\phi}(0) = 0$ es decir: $\hat{\phi}(0) = 0$

Si $r = 3$ se tiene:

$$\|E(t)\phi\|^2_{\Im_{s,3}} \leq \|\phi\|^2_s + (t^3 + t^2 + t + 1)\|\phi\|^2_{L^2_3}$$

Siempre que $t\delta'\hat{\phi} = t\hat{\phi}(0) = 0$ y $t\delta\partial_\xi\hat{\phi} = t\partial_\xi\hat{\phi}(0) = 0$, es decir: $\hat{\phi}(0) = 0$ y $\partial_\xi\hat{\phi}(0) = 0$

Procediendo de esta manera y aplicando inducción se tiene el resultado requerido. ■

Teorema 5.3. *Dada $\phi \in \Im_{s,1}$ entonces existe una única $u \in C([0,\infty), \Im_{s,1})$ tal que $\partial_t u \in C([0,\infty), L^2)$, siempre que $s > \frac{1}{2}$*

Demostración. La unicidad se tiene pues $\Im_{s,1} \subseteq H^s$.

Veamos que $u \in C([0,T], \Im_{s,1})$ es una contracción en el espacio métrico completo $\hbar_{s,1} = \{f \in C([0,T], \Im_{s,1}) / \|E(t)\phi - f(t)\|_{\Im_{s,1}} \leq \|\phi\|_{\Im_{s,1}}\}$.

En efecto:

Como

$$u(t) = e^{-tH\partial_x}\varphi - \int_0^t e^{-(t-\tau)H\partial_x} sin(u(\tau))d\tau$$

entonces

$$\begin{aligned}
\|u(t) - e^{-tH\partial_x}\varphi\|_{\Im_{s,1}} &\leq \int_0^t \|e^{-(t-\tau)H\partial_x} sin(u(\tau))\|_{\Im_{s,1}} d\tau \\
&\leq \int_0^t \|e^{-(t-\tau)H\partial_x} sin(u(\tau))\|_s d\tau + \int_0^t \|e^{-(t-\tau)H\partial_x} sin(u(\tau))\|_{L^2_1} d\tau
\end{aligned}$$

$$\leq \int_0^t \|u(\tau)\|_s d\tau + \int_0^t \|\partial_\xi e^{-(t-\tau)|\xi|} \hat{sinu}(\xi)\|_{L_1^2} d\tau$$

$$\leq \int_0^t \|u(\tau)\|_s d\tau + \int_0^t \|(t-\tau) sgn\xi e^{-(t-\tau)|\xi|} \hat{sinu}(\xi)\|_{L_1^2} d\tau +$$

$$\int_0^t \|e^{-(t-\tau)|\xi|} \partial_\xi \hat{sinu}(\xi)\|_{L_1^2} d\tau$$

Nótese que como $\tau \leq t$, entonces

$$\begin{aligned}
\|(t-\tau) sgn\xi e^{-(t-\tau)|\xi|} \hat{sinu}(\xi)\|_{L_1^2} &\leq (t-\tau)\|e^{-(t-\tau)H\partial_x} sinu\|_{L_1^2} \\
&\leq (t-\tau)\|u\|_0 \\
&\leq (t-\tau)\|u\|_s
\end{aligned}$$

Además:

$$\begin{aligned}
\|e^{-(t-\tau)|\xi|} \partial_\xi \hat{sinu}(\xi)\|_{L_1^2} &= \|e^{-(t-\tau)\partial_x} xsinu\|_{L_1^2} \\
&\leq \|xsinu\|_{L_1^2} \\
&= (\int_{-\infty}^{\infty} x^2 |sinu(x,t)|^2 dx)^{1/2} \\
&\leq (\int_{-\infty}^{\infty} x^2 |u(x,t)|^2 dx)^{1/2} \\
&= \|u(x,t)\|_{L_1^2}
\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\|u(t) - e^{-tH\partial_x}\varphi\|_{\Im_{s,1}} \leq \int_0^t (\|u\|_s + \|u\|_{L_1^2}) d\tau$$

$$
\begin{aligned}
&\leq \int_0^t \|u\|_{s,1} d\tau \\
&\leq \int_0^t (\|u(t) - e^{-tH\partial_x}\varphi\|_{s,1} + \|e^{-tH\partial_x}\varphi\|_{s,1}) d\tau \\
&\leq Mt + tC_0\|\varphi\|_s + tq(t)\|\varphi\|_{L_1^2} \\
&\leq t(M + h(t)\|\varphi\|_{s,1}) \\
&\leq T(M + h(t)\|\varphi\|_{s,1}) \\
&\leq M
\end{aligned}
$$

Siempre que $T \leq \frac{1}{(M+h(t)\|\varphi\|_{s,1})}$, así u es una contracción

De lo anterior se tiene la existencia y unicidad de la solución en $\Im_{s,1}$.

Nuestro próximo paso es obtener una estimación global para la norma de u en $\Im_{s,1}$.

En efecto:

$$\|u\|_{L_1^2}^2 = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 (u(x,t))^2 dx$$

Luego

$$
\begin{aligned}
\partial_t \|u\|_{L_1^2}^2 &= \partial_t \int_{-\infty}^{\infty} x^2 (u(x,t))^2 dx \\
&= 2\int_{-\infty}^{\infty} x^2 u_t(x,t) u(x,t) dx \\
&= 2\int_{-\infty}^{\infty} x^2 [-sinu - Hu_x] u(x,t) dx \\
&= -2\int_{-\infty}^{\infty} x^2 usinudx - 2\int_{-\infty}^{\infty} x^2 uHu_x dx \\
&= -2\int_{-\infty}^{\infty} xuxsinudx - 2\int_{-\infty}^{\infty} xuxH\partial_x udx \\
&\leq 2\|xu\|_0 \|xsinu\|_0 - 2\int_{-\infty}^{\infty} xuxH\partial_x udx
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\leq 2\|xu\|_0^2 - 2\int_{-\infty}^{\infty} xuH(x\partial_x u)dx \\
&\leq 2\|xu\|_0^2 - 2\int_{-\infty}^{\infty} xuH(\partial_x(xu) - u)dx \\
&\leq 2\|xu\|_0^2 - 2\int_{-\infty}^{\infty} xu(H\partial_x(xu) - Hu)dx \\
&\leq 2\|xu\|_0^2 - 2\int_{-\infty}^{\infty} xuH\partial_x(xu)dx + 2\int_{-\infty}^{\infty} xuHudx \\
&\leq 2\|u\|_{L_1^2}^2 + 2\|xu\|_0\|u\|_0 - 2\int_{-\infty}^{\infty} xuH\partial_x(xu)dx \\
&\leq 2\|u\|_{L_1^2}^2 + \|xu\|_0^2 + \|u\|_0^2 - 2\int_{-\infty}^{\infty} xuH\partial_x(xu)dx \\
&\leq 3\|u\|_{L_1^2}^2 + \alpha(T) - 2\int_{-\infty}^{\infty} xu|\partial_x|xudx \\
&\leq 3\|u\|_{L_1^2}^2 + \alpha(T) - 2\int_{-\infty}^{\infty} |\partial_x|^{1/2}(xu)|\partial_x|^{1/2}(xu)dx \\
&\leq 3\|u\|_{L_1^2}^2 + \alpha(T) - 2\||\partial_x|^{1/2}(xu)\|_0^2 \\
&\leq 3\|u\|_{L_1^2}^2 + \alpha(T)
\end{aligned}
$$

Integrando de 0 a t se tiene:

$$
\|u\|_{L_1^2}^2 - \|\phi\|_{L_1^2}^2 \leq t\alpha(T) + 3\int_0^t \|u(\tau)\|_{L_1^2}^2 d\tau
$$

Luego:

$$
\|u\|_{L_1^2}^2 \leq \|\phi\|_{L_1^2}^2 + T\alpha(T) + 3\int_0^t \|u(\tau)\|_{L_1^2}^2 d\tau
$$

Por la desigualdad tipo Gronwall se tiene:

$$
\|u\|_{L_1^2}^2 \leq (\|\phi\|_{L_1^2}^2 + T\alpha(T))e^{3T}
$$

De eta manera se obtiene la estimación global para la norma en $\Im_{s,1}$ pues basta con controlar la norma en L^2_1 $\blacksquare$

Nota:

Si $u \in C([0,T];\Im_{s,2})$ es solución de (0.2) no se tiene que $\hat{u}(t,0) = 0$, para todo $t \in [0,T]$ puesto que no se puede garantizar que $\widehat{sinu}(t,0) = 0$ para todo $t \in [0,T]$.

Bibliografía

[1] Yanping Cao, Ziad H Musslimani and Edriss S Titi, *"Nonlinear Schrödinger-Helmholtz equation as numerical regularizarion of the nonlinear Schröndinger equation"*, Nonlinearity, 21 2008, 879898

[2] Javier Duoandikoetxea, *Análisis de Fourier*, Ediciones de la Universidad Autonoma de Madrid, 1991.

[3] Rafael. J. Iório, Jr., Valèria de Magalhães Iório, *Fourier Analysis and Partial Differential Equations*, Cambridge studies in avanced mathematics, 70, (2001).

[4] Gustavo Ponce, *Introducción a las ecuaciones en derivadas parciales de evolución* Universidad del Valle, Escuela de verano en ecuaciones diferenciales, geometría diferencial y análisis numérico, 1993.

[5] Y.Matsuno, *Periodic solutions of a resistive model for non local Josepshon dynamics*, Yamaguchi U. Math. (2004), 1-9

[6] R. J. Iorio, *On the Cauchy problem for the Benjamin-Ono equation* Comm. P.D.E.,11(10), 1031-1081(1986)