

Multiescalamiento de Valores Extremos, detección de intermitencia usando onditas y evidencias de caos determinístico en la dinámica del viento en la Amazonía Central

Germán Poveda, Jorge M. Ramírez, John F. Mejía, Carlos D. Hoyos

*Posgrado en Aprovechamiento de Recursos Hidráulicos
Universidad Nacional de Colombia, Sede Medellín*

Palabras Clave: Multiescalamiento, caos, turbulencia, Lyapunov, Ley de Kolmogorov, Intermitencia, Onditas.

Keywords: Multiscaling, chaos, turbulence, Lyapunov, Kolmogorov's law, Intermittency, Wavelets.

Resumen

Se estudian diferentes rasgos de la alta variabilidad temporal de la turbulencia en series de viento de alta resolución (60 Hz), obtenidos en la selva Amazónica por el proyecto LBA (Large-Scale Atmosphere-Biosphere Experiment in Amazonia). Se estudian las propiedades de escalamiento de la distribución de los eventos extremos en series de velocidad del viento y se analizan las propiedades de escala para valores extremos de las series a en una escala temporal fija y diferentes escalas de tiempo. Se calculan las relaciones de escalamiento entre las colas de la función de densidad de probabilidad suavizada para diferentes escalas, y se hacen predicciones de las funciones de densidad para una escala particular. Se usa la transformada de onditas ("wavelets") para detectar intermitencia en la tasa de disipación de energía a partir de los registros de viento, puesto que tal fenómeno, asociado en ocasiones con procesos de transferencia de momento y calor, es responsable por la insuficiencia de la teoría de Kolmogorov en algunas escalas. Se utiliza el método de los falsos vecinos y la información mutua de Shannon para reconstruir el atractor del sistema dinámico, y se realiza una estimación de los exponentes de Lyapunov para detectar caos de baja dimensionalidad en la turbulencia Amazónica.

Abstract

Different characteristics from the high temporary variability of turbulence in high resolution (60 Hz) series of wind and temperature are studied. Data was obtained in the Amazonian forest by project LBA (Large-Scale Atmosphere-Biosphere Experiment in Amazonia) on March 1999. The scaling properties of the extreme events distribution are studied, and analysis of the properties of scale for extreme values is performed, for both, fixed and different time scales. The relations of scaling between the tails of the probability density function are calculated, and upon these relations, predictions are done for the functions of density for a particular scale. The wavelet analysis is used in order to detect intermittency in the energy dissipation rates. Such a phenomenon, associated sometimes with processes of momentum and heat transfer, is responsible for the insufficiency of Kolmogorov's theory in some scales. It is used the method of the false neighbours and the Shannon mutual information to reconstruct the attractor of the wind dynamics, moreover, estimation of the Lyapunov exponents is made to detect low dimensionality chaos in the Amazonian turbulence.

1 INTRODUCCIÓN

Existe un obvio y amplio interés en predecir eventos hidro-meteorológicos extremos en diferentes contextos. También hay gran variedad de metodologías que se enfocan en los estadísticos de dichos eventos, cuyo principal objetivo es estudiar su Función de Densidad de Probabilidad (FDP). Si se puede modelar apropiadamente la FDP, se pueden predecir al menos las frecuencias de ocurrencia de los eventos extremos, si se acepta una hipótesis de estacionariedad, es decir que la FDP no cambia con el tiempo.

El objetivo de la primera parte de este trabajo, es presentar un análisis detallado de las fluctuaciones en un sistema dinámico turbulento que muestre las propiedades de escalamiento de los eventos extremos, a partir de la teoría de turbulencia y datos de alta resolución temporal. En este trabajo se comparan las características encontradas en la turbulencia Amazonica con aquellas del trabajo de *L'vov et al.* (2000). Este análisis revela las propiedades de escalamiento de la dinámica de los valores extremos y permite hacer estimaciones de las colas de la FDP, para diferentes escalas de resolución temporal, sin necesidad de utilizar los estadísticos de la función a estimar. La comparación de estos exponentes del escalamiento de extremos con los valores teóricos correspondientes a diferentes modelos, ha sido una forma tradicional para estudiar la validez de los modelos turbulentos invariantes con la escala, *Schertzer* (1997).

La teoría de Kolmogorov (K 41 – Kolmogorov, 1941) establece que el promedio de la diferencia de velocidad de n -ésimo orden entre dos puntos separados por una distancia espacial r , en el subrango inercial y para números de Reynolds altos, está dado por $\langle |\Delta u|^n \rangle = K_n (\langle \varepsilon \rangle)^{n/3} r^{n/3}$, donde ε es la tasa de disipación de energía; n es el orden de la función de estructura, ν es la viscosidad cinemática, K_n es una constante universal dependiente de n . Las leyes de escalamiento de la ecuación de Kolmogorov se han confirmado en gran cantidad de experimentos para $n=2$, es decir, se ha confirmado la existencia de la ley 2/3 en la función de estructura y la ley -5/3 en el espectro de potencias. Sin embargo, en otros experimentos se ha mostrado que para $n>2$, las leyes de escalamiento de la teoría de Kolmogorov no son apropiadas. En general, las desviaciones de las leyes de escalamiento han sido atribuidas a la intermitencia en Landau (1986) y Katul et.al. (1994). Es importante mencionar que varios procesos físicos en la capa límite atmosférica tales como el transporte de momento y calor, están asociados con eventos intermitentes tal como ascenso convectivo debido a calentamiento localizado. La caracterización de la física de los eventos intermitentes a través de observaciones, y su comportamiento ante condiciones variantes han sido desde tiempo atrás un tema de estudio continuado (Bergstrom y Hogstrom, 1989). En este trabajo se exploran las técnicas propuestas por Katul et. al. (1994, 1998) y Hagelberg y Gamage (1994), utilizando el análisis continuo y discreto en onditas para la detección de intermitencia en la tasa de disipación de energía

La turbulencia atmosférica exhibe rasgos de caos determinístico de baja dimensionalidad (*Lorenz*, 1963; *Poveda y Puente*, 1993). El caos es una propiedad de las ecuaciones diferenciales no lineales, y es detectable a partir del comportamiento de las trayectorias de sus soluciones (*Glendinning*, 1994). Las trayectorias en el espacio de fases responden a la dinámica de un sistema de ecuaciones conocidas, y una vez garantizada la existencia de una solución, su trayectoria queda totalmente determinada por su condición inicial. La divergencia entre las trayectorias resulta ser exponencial para la mayoría de sistemas físicos y se traduce en una alta sensibilidad a las condiciones iniciales, la cual está caracterizada por medio de los exponentes de Lyapunov; cualquier sistema que contenga por lo menos un exponente de Lyapunov positivo se define como caótico (*Wolf et al.*, 1985). Aquí nos proponemos analizar los datos observados de la velocidad del viento y la temperatura del aire sobre la Amazonía, para determinar la existencia o no, de caos determinístico en la dinámica de la turbulencia atmosférica, en términos de los exponentes de Lyapunov.

En el numeral 2 se describen los datos utilizados para la aplicación de la teoría del numeral 3, la cual está dividida en tres partes. En la sección 3.1 se hace un análisis general de la variabilidad temporal y de la forma de los eventos extremos, investigando el comportamiento de las amplitudes y los valores extremos con la escala temporal, además se estudia la relación de las colas de las FDP's a diferentes escalas temporales. En la sección 3.2 se utiliza el análisis en ondas para detectar la presencia de intermitencia y su relación con la teoría de Kolmogorov. En la sección (3.2) se usan técnicas de reconstrucción de espacios de fase para detectar la presencia de caos determinístico a partir de los exponentes de Lyapunov. Por último se dan algunas conclusiones y se discuten los resultados.

2 Datos usados.

Para este trabajo se contó con la información para velocidad del viento en las tres direcciones y temperatura del aire de la torre meteorológica en la región brasilera de Rondonia en el Amazonas central. Estos datos fueron tomados dentro del marco del proyecto LBA y tienen una resolución $\tau_s = 1/60$ s para diferentes alturas (21 y 66 metros sobre el nivel del piso). En este trabajo se estudiarán, para ambas alturas, dos períodos de duración de una hora del día 7 de marzo de 1999 (216000 registros por hora), ver Tabla 1. En adelante, se denotará por u , v , w y T a la velocidad zonal, velocidad meridional, velocidad vertical y temperatura del aire, respectivamente.

Tabla 1. Especificación conjuntos de datos analizados

Muestra	LTC (Hora: minutos)	Altura (m)
1	11:12	21
2	17:30	21
3	11:12	66
4	17:30	66

3 METODOLOGÍA Y RESULTADOS.

3.1 Escalamiento de Valores Extremos.

El propósito de esta parte del trabajo es mostrar que los valores extremos de las fluctuaciones turbulentas poseen propiedades de escalamiento dinámico y que estas afectan crucialmente las colas de la FDP, haciéndolas más anchas y variantes con la escala. En la teoría de turbulencia se entiende que la energía de un sistema es inyectada por el forzamiento a escalas más grandes y transferida en promedio a las escalas más pequeñas. Esto proporciona la ventaja de analizar eventos extremos de una escala dada τ_s^k y además, seguir la cascada de eventos extremos de escala a escala. Se considerará primero el análisis para una escala fija.

Aquí se enfoca el trabajo en la dinámica detallada de los eventos más grandes para una misma escala $\tau_s^k = 2^k \tau_s$, para $k=0$. Se toman los 40 eventos más grandes (en términos de su amplitud) y se define un ancho de banda hacia la izquierda y derecha (se toma el valor máximo y sus vecinos). En primer lugar se normaliza estos eventos por la amplitud de su máximo (colapso de amplitud). Luego, se resta el tiempo de su máximo para centrarlos los datos a su alrededor (colapso de posición). El resultado de estos colapsos para cada conjunto de registros se muestra en la primera columna de gráficos de la Figura 1. El siguiente paso del análisis es colapsar el eje de las abscisas para cada evento y así colapsar cada valor pico hasta aproximarse al pico con menor amplitud (aproximarse en términos de minimizar su diferencia cuadrática media), ver segunda columna de gráficos de la Figura 1.

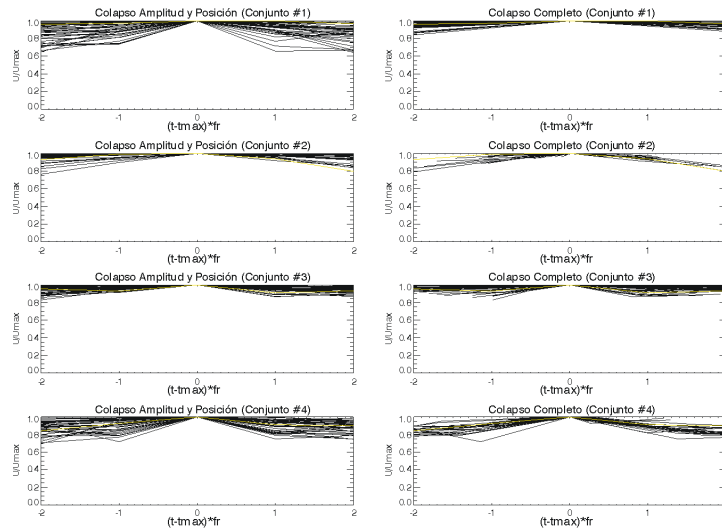


Figura 1. En la izquierda, picos colapsados en amplitud y posición para los 40 máximos de la componente U del viento. En la derecha, los picos completamente colapsados. De arriba hacia abajo se tienen los diferentes conjuntos de registros.

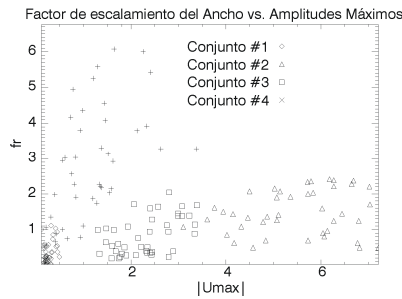


Figura 2. Factores de escala para los diferentes conjuntos de registros colapsados en la Figura 1.

Obviamente, cada evento requiere de un factor de escalamiento diferente, denotado aquí por f_r . El hecho que tal factor de escalamiento exista, y que ellos conduzcan al colapso completo, tal como se muestra con los modelos teóricos en *L'vov et al. (2000)*, puede servir como un punto de partida para diversas consideraciones de escalamiento dinámico, así como

$$f_r = U_{\max}^{f(x)}$$

Sin embargo, las relaciones encontradas entre cada uno de los conjuntos de registros, no muestran una tendencia clara, ver Figura 2. Especificar relaciones cuantitativas de escalamiento para el factor de escala f_r en estas condiciones es algo ambiguo y arriesgado. En particular, los valores de f_r para el conjunto #1 son los más altos, indicando hasta factores de 6.

Una característica muy importante en la dinámica de eventos extremos puede ser obtenida a partir de la relación entre valores extremos que ocurren a diferentes escalas. Básicamente, esto se obtiene superponiendo el mismo pico para cada escala con su máximo centrado alrededor de un mismo instante. Se reescalan todos los máximos respecto a un valor pico en la escala m . Se denota por $K_{am}(k,m)$ a la relación entre los picos a escala m con las diferentes escalas $k=0,1,2,3,\dots$. En este caso ilustrativo, se selecciona $m = 6$. Luego, se busca un exponente de escalamiento simple o de multiescalamiento $f(y)$ tal que

$$K_{am}(k,6) = \frac{U_{k,\max}}{U_{6,\max}} = \tau_s^{ky}$$

donde y puede ser hallado con la relación entre $g_{am}(k)$ y k , dada por

$$g_{am} = \frac{\ln[K_{am}(k,6)]}{\ln \tau_s} = yk$$

Para buscar estas relaciones se colapsan los picos respecto al pico de referencia a escala m , tal como se mostró en el numeral 3.1. El factor f_r en este caso es remplazado por $K_w(k,6)$. Así se espera como ley de escalamiento $K_w(k,6) = \tau_s^{kz}$.

En la Figura 3 se muestran los resultados de aplicar esta metodología a dos picos o valores máximos del conjunto de datos #1. Allí se observa que no hay una relación lineal generalizada (o escalamiento simple) en ambos factores de reescalamiento de los valores (NO CAUDALES) pico para diferentes escalas. Este análisis no es suficiente ante las posibilidades de realizar los cálculos para un rango de escalas más amplio, con una mayor cantidad de picos, y para los diversos conjuntos. Sin embargo, el propósito de este numeral es EL DE mostrar la metodología y efectuar unos primeros estimativos de estas funciones para la búsqueda de los exponentes de multiescalamiento o escalamiento simple que relacionan los valores extremos para diferentes escalas temporales.

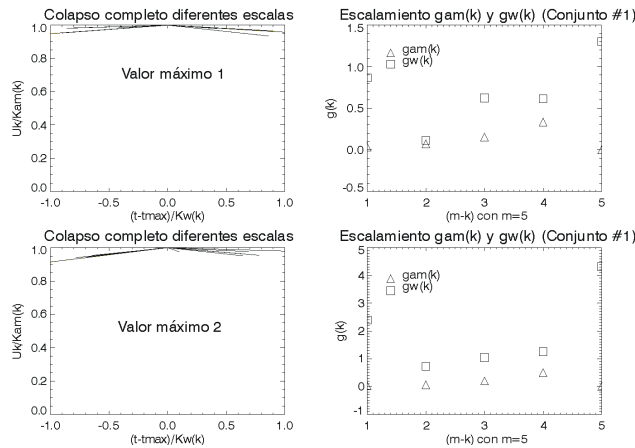


Figura 3. Colapso completo para dos valores máximos del conjunto #1 de datos de diferentes escalas sobre la escala m . En la izquierda se muestran los picos colapsados. En la derecha, valores de los factores de escala para la amplitud y el ancho de los picos colapsados.

Asumiendo que las colas de las distribuciones están dominadas por picos bien separados y con una evolución autosemejante, situación válida según los resultados obtenidos arriba, se hará la predicción de la FDP para una escala determinada dentro del rango de escalas trabajadas.

Se conoce que las FDP's en sistemas que presenten multiescalamiento no son invariantes con la escala. Se examina la posibilidad de encontrar en la parte intermedia de la distribución factores de escalamiento diferente con respecto a las colas de las FDP's, esto está relacionado con la función de estructura de los datos ($S_p(\tau) = \langle \tau^{2p} \rangle$), los cuales tiene exponentes de escalamiento en la vecindad de los valores de $K41$, con $K41 = p/3$, para p lo suficientemente pequeños ($p < 6$). Para valores grandes de p ($p > 12$), la teoría de Kolmogorov llamada $K41$ tiene una pendiente diferente. Esas diferencias resultan de la intermitencia que se da para los valores extremos (Schertzer, 1997). Lo anterior es ilustrado en la Figura 4, donde se muestran las FDP's de los diferentes conjuntos para diferentes escalas ($k=0, 4, 6, 8$ y 10). Allí, se muestran fuertes discrepancias entre las colas con respecto a la semejanzas que se tienen entre los valores intermedios de la distribución. Los valores por debajo de 1 m s^{-1} están prácticamente colapsados en la FDP del conjunto 1, mientras que su cola derecha presenta un amplio rango de valores (cola ancha).

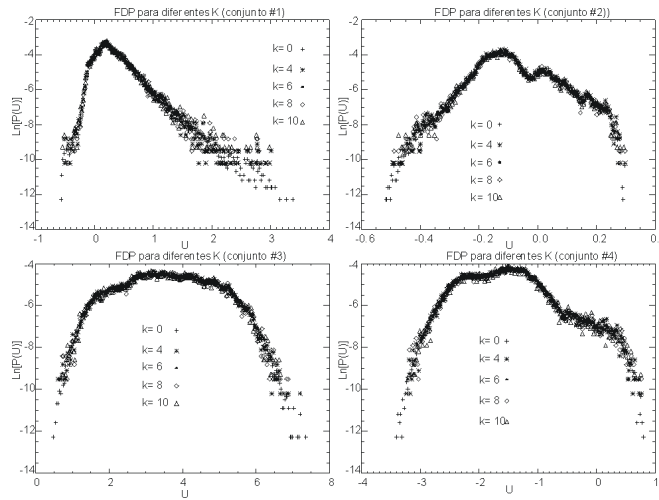


Figura 4. FDP's empíricas de los conjuntos de registros para diferentes escalas para u .

El objetivo es entonces probar las predicciones para las colas de las FDP's. Las colas anchas dificultan el análisis para los cambios de escala. Luego, se propone ajustar una función que permita analizar las condiciones promediadas en esta parte de la distribución. Las funciones ajustadas se proponen de la forma

$$\ln[P(U_k)] = a_k + b_k U_k^{c_k}$$

donde a_k , b_k y c_k son parámetros de ajuste. Los resultados encontrados para el modelo teórico explicado en *L'vov et al. (2000)* muestran consistencia para todas las escalas con el parámetro $c_k=1/2$. En contraste, los resultados para el conjunto #1 no muestran esa misma tendencia. ver . Los ajustes de las colas de las FDP's para parámetros de ajuste de en la Tabla 2.

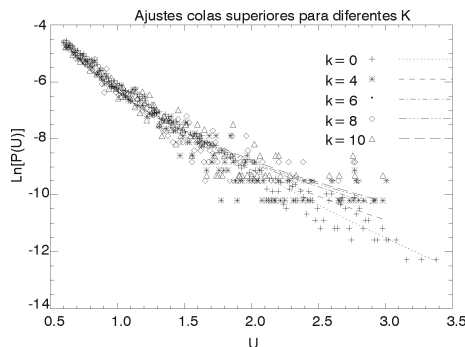


Figura 5. Ajustes de las colas de las series agregadas del conjunto de datos #1 para diferentes k . Los puntos representan los valores muestrales y las líneas los ajustes potenciales.

Tabla 2. Parámetros de ajuste para las colas de la FDP del conjunto 1 a diferentes escalas de las líneas ajustada en la Figura 5.

k	a_k	b_k	c_k
0	7.19	-6.73	0.542
4	10.8	-17.15	0.213
6	12.02	-18.37	0.183
8	27.08	-33.42	0.102
10	26.3	-32.6	0.104

La relación con el grado de agregación temporal de los parámetros de ajuste de las colas de las FDP's es clara. *L'vov et al. (2000)* propone linearizar estos parámetros y relacionarlos con el factor de escala tal como se muestra en la Figura 6.

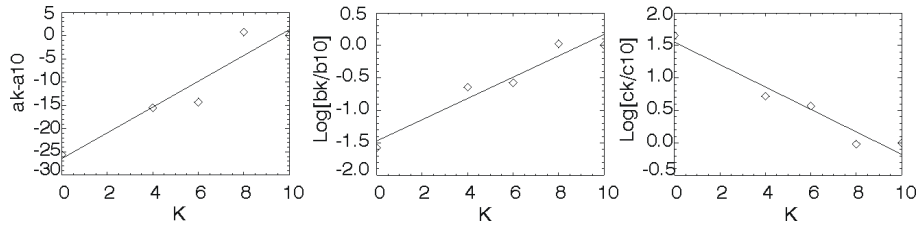


Figura 6. Ajustes linealizados de los parámetros de ajuste de la función $\ln[P(U_k)]$

Dados los ajustes de la Figura 6, se pueden predecir las colas de la FDP de la serie número 1, basándose en la información de la cola de la FDP con menor resolución, para este caso $k = 10$.

3.2 Intermitencia y leyes de Kolmogorov.

Las caracterización de los eventos intermitentes a partir de los datos observados se usando metodologías con onditas. En particular, la aplicación del análisis continuo se utilizaron las onditas de Morlet y Paul por sus características en la localización frecuencial y temporal; en el análisis discreto, se utilizaron las onditas de Haar y Daubechies 4 (ver detalles en Hoyos, 1999; Daubechies, 1992 y Torrence, 1998). Al utilizar el análisis de Fourier en el estudio de datos turbulentos, es fundamental caracterizar la turbulencia mediante el análisis de la función de densidad espectral ($E(K)$, con K representando cada escala o período). $E(K)$ se calcula como el cuadrado del valor absoluto de los coeficientes de la transformada de Fourier. La transformada en onditas (WT), por su parte arroja varios coeficientes para cada escala o período, los cuales informan sobre la cantidad de energía que aporta dicha escala en cada instante del tiempo y permiten calcular la varianza de dicha energía, la cual es de vital importancia para identificar la cantidad de intermitencia en una escala determinada. La función de densidad espectral usando onditas está dada por:

$$E_W(K) = C \left\langle (WT^{(m)}(i))^2 \right\rangle$$

donde C es una constante que depende de la ondita utilizada en el cálculo de los coeficientes y puede incluir la conversión de frecuencia (Hz) a número de onda ($1/m$); y $\langle \bullet \rangle$ representa el promedio sobre todos los coeficientes $i=1,2,\dots$ para una escala m . La desviación estándar se puede calcular como:

$$SD(K) = C \left[\left\langle (WT^{(m)}(i))^4 \right\rangle - \left\langle (WT^{(m)}(i))^2 \right\rangle^2 \right]^{\frac{1}{2}}$$

Katul y Parlange (1994) proponen el coeficiente de variación de la energía $CV_E(K) = SD(K)/E_W(K)$ como un mejor indicador de la concentración de actividad turbulenta en diferentes escalas. Katul et. al (1994) proponen, bajo algunas hipótesis, una relación entre los coeficientes de la transformada de onditas y las funciones de estructura de n -ésimo orden, para una variable de flujo cualquiera $\phi(x)$ y una separación r , así:

$$\langle |\phi(x+r) - \phi(x)|^n \rangle \sim \frac{\langle (WT^{(m)}(i))^n \rangle}{(2^{\frac{m}{2}} dy)^n}$$

donde $dy=1/fs$, y fs es la frecuencia de muestreo (60 Hz).

Para estudiar los efectos de la intermitencia, Katul et al (1994, 1998) proponen la construcción de la función de estructura usando un muestreo condicional en los coeficientes de la transformada en onditas. La característica de la intermitencia en una serie es la presencia de eventos aislados de alta disipación. La filosofía de la metodología consiste en clasificar los coeficientes en onditas como pasivos o disipativos. Los coeficientes disipativos serán aquellos directamente influenciados por los eventos localizados de disipación. Esta diferenciación se hace definiendo un umbral mínimo de disipación y definiendo una función $I(m)$ así,

$$I^{(m)} = \begin{cases} 0 & \text{Si } [WT^{(m)}(i)]^2 > F [WT^{(m)}(i)]^2 \\ 1 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

donde F es un criterio que permite la discriminación entre los coeficientes pasivos y activos. Katul et al. interpretan F como la relación entre la disipación a la escala m y la posición i , y la disipación media. Cuando se detecta un coeficiente activo, se hace cero en el espectro. Usando el espectro modificado se construyen las funciones de estructura condicionales como se definió anteriormente.

Un factor importante en la medición del comportamiento Gaussiano de las mediciones es el factor de aplanamiento de onditas. Dicho factor (FF) se calcula como

$$FF = \frac{\langle (WT^{(m)}(i))^4 \rangle}{\langle (WT^{(m)}(i))^2 \rangle^2}$$

Cuando hay comportamiento Gaussiano, FF debe ser aproximadamente igual a 3.

En la Figura 7 se muestran las funciones de densidad espectral para cada una de las series y la relación entre el coeficiente de variación espacial y los números de onda. La línea continua por encima de los espectros, responde a la ley de Kolmogorov para $n=2$; los puntos sobre el espectro corresponden al cálculo de $E_w(K)$ para diferentes tipos de onditas (Morlet, Daubechies 4, Paul y Haar). En general, se observa un buen ajuste de la ley de Kolmogorov, especialmente para las mediciones realizadas por encima del dosel (66 m). Con respecto a los coeficientes de variación espacial, se observa el incremento de la actividad turbulenta en las pequeñas escalas, para cada uno de los tipos de onditas y series usadas; siendo éste incremento mucho mayor a 21 m sobre la superficie. Este incremento está relacionado con la intermitencia en la tasa de disipación de la energía.

En la Figura 8 se muestra las funciones de estructura para $n=2$ y $n=6$ estimadas con la ondita Haar, y las funciones de estructura condicionales para $F = 6$. Además se presenta la variación del Factor de Aplanamiento $FF(r)$ con la separación. En general, se observa un comportamiento similar de la pendiente en la función de estructura de orden 2 (entre 0.65 y 0.68, es decir cercana a los $2/3$ -K41), tanto para la función condicional como para la no condicional. Este resultado indica que los efectos de la intermitencia no son significativos para $n = 2$. Katul et al. En la función de estructura de orden 6 aparece claramente el efecto de la intermitencia, el cual se observa en la diferencia de pendientes entre la función de estructura y la función de estructura condicional, la cual tiene una pendiente muy cercana a 2 como establece la teoría (CUAL???) . Las gráficas de factor de aplanamiento, permiten observar cómo para todos los casos condicionales, el valor de la función es cercano a 3, señalando un comportamiento cerca al Gaussiano. En general el factor de aplanamiento en el caso no condicionado decrece con la separación. Este análisis indica que la teoría de Kolmogorov está asociada con fenómenos de estadística Gaussiana y que los efectos de la intermitencia resultan en muestras no Gaussianas.

Las metodologías usadas para determinar la existencia ó no de caos determinístico en las series observadas, están contenidas y explicadas en detalle en Abarbanel (1996); un tratamiento completo de los conceptos básicos sobre sistemas dinámicos, trayectorias y espacios de fase, que se mencionan en este análisis, se puede encontrar en Smale (1974), Verhulst (1980) y Farkas (1994). Por definición, la presencia de caos determinístico involucra la presencia de comportamiento no periódico y divergencia exponencial entre las trayectorias.

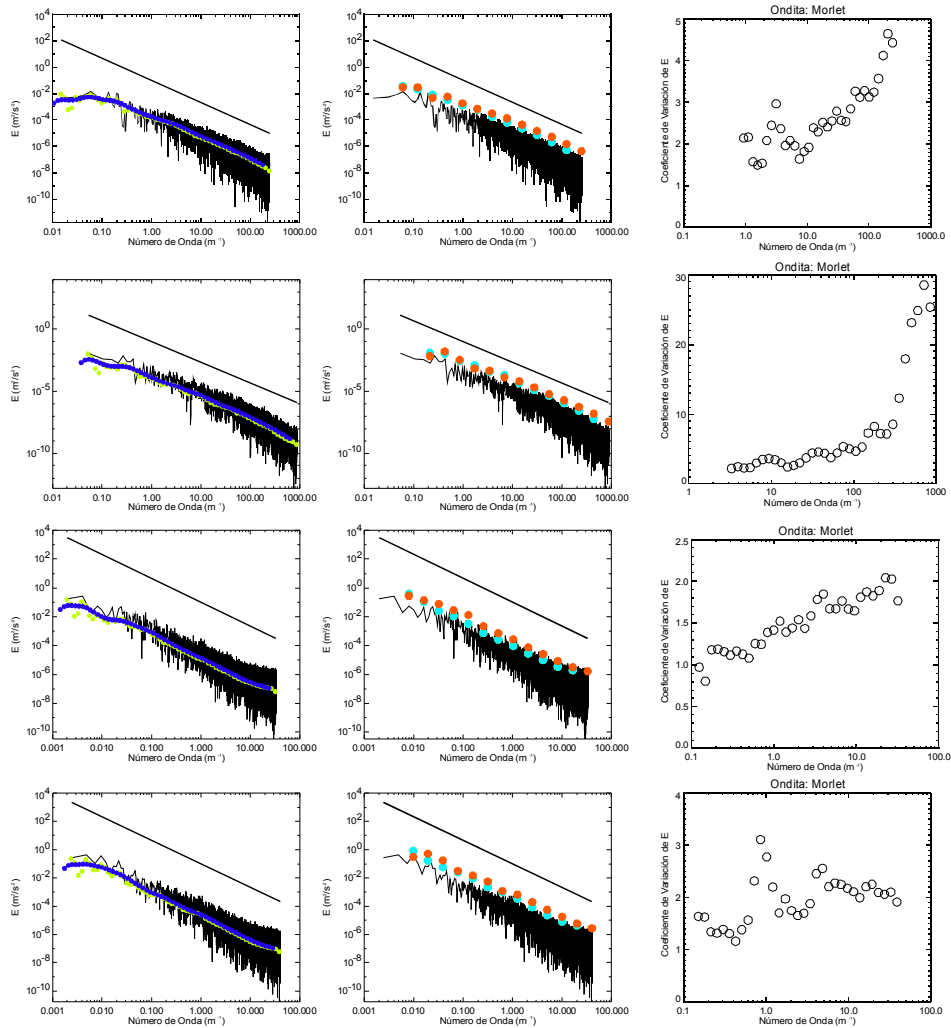


Figura 7. Funciones de densidad espectral y coeficiente de variación en función del número de onda, para el viento zonal u de cada uno de las series de la Tabla 1. Los círculos sobre las funciones de densidad marcan la estimación usando onditas (la primera columna muestra onditas continuas y la segunda las onditas discretas). La tercera columna muestra las relaciones del coeficiente de variación para la ondita reconstruida de Morlet.

La ausencia de picos dominantes en el espectro de Fourier es condición necesaria para la existencia de caos. Los espectros de Fourier se calcularon para un rango de periodos entre 2/60 s y 30 min. En la Figura 9 se muestran las dos formas típicas encontradas. En ellos, el eje horizontal representa el periodo en segundos, y el vertical muestra, en escala logarítmica, el porcentaje de la varianza de la serie que explica cada periodo. El espectro de la Figura 9(a) tiene la forma típica de una serie caótica, no presenta picos notorios y la distribución es uniforme en todo los periodos. La Figura 9(b) por su parte, muestra un espectro con máximos en los periodos extremos y una variación suave para los periodos intermedios, este comportamiento se observó en todas las series de temperatura y en algunas series correspondientes a la velocidad del viento a 66m de altura. Estos periodos están cercanos a la resolución máxima de los equipos de medición y pueden ser causados por problemas de precisión. En general, no se puede rechazar la presencia de comportamiento caótico en ninguna de las series.

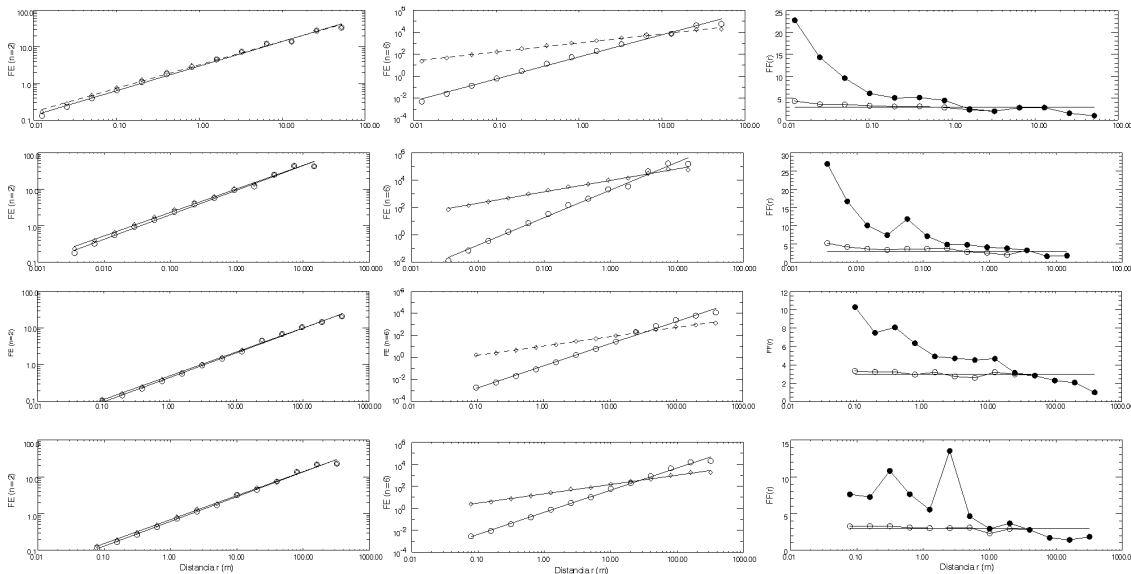


Figura 8. Funciones de estructura y aplanamiento para el viento zonal u de cada uno de las series de la Tabla 1. De izquierda a derecha se muestra: Funciones de estructura para $n = 2$, funciones de estructura para $n = 6$ y las funciones de aplanamiento.

3.3 Caos Determinístico.

Por su parte, la divergencia entre las trayectorias queda en evidencia con la estimación del mayor exponente de Lyapunov, ya que este estima la tasa a la cuál divergen exponencialmente las órbitas en el espacio de fase, para esto se debe reconstruir el atractor del sistema físico a partir de las series de tiempo observadas. Denótese por $\mathbf{x}(t) \in \mathbf{R}^D$, $t > 0$ una trayectoria del sistema físico real en el espacio de fase d -dimensional del cual se tienen las observaciones. Sea $s(n)$ a la n -ésima observación escalar. La pregunta de cómo utilizar la secuencia de vectores observados $s(n)$ para estudiar la dinámica de las trayectorias reales $\mathbf{x}(t)$, fue resuelta por el teorema de embebimiento atribuido a Takens y Mañé (Takens, 1981). Este teorema considera una cantidad escalar observada $h(\bullet)$ de alguna función vectorial de las variables dinámicas $\mathbf{g}(\mathbf{x}(t))$, luego genera un nuevo espacio de fase reconstruido a partir de la aplicación de $h(\bullet)$ sobre potencias P_1, \dots, P_{d-1} de $\mathbf{g}(\mathbf{x}(t))$, de manera tal que los vectores resultantes $\mathbf{y}(n) = [h(\mathbf{x}(t_n)), h(\mathbf{g}^{P_1}(\mathbf{x}(t_n))), h(\mathbf{g}^{P_2}(\mathbf{x}(t_n))), \dots, h(\mathbf{g}^{P_{d-1}}(\mathbf{x}(t_n)))]$ definen un trayectorias en el espacio d -dimensional. El teorema garantiza, bajo ciertas condiciones de suavidad de las funciones $h(\bullet)$ y $\mathbf{g}(\mathbf{x})$ y para d suficientemente grande, que muchas de las propiedades geométricas de la variable original $\mathbf{x}(t)$ son reproducidas en el nuevo espacio de vectores $\mathbf{y}(n)$. Para implementar este teorema, defínase, $h(\mathbf{x}(t_n)) = s(n)$; y $\mathbf{g}(\mathbf{x}(t)) = \mathbf{x}(t + \tau_s)$, donde $\tau_s = 1/60$ s. Así, los vectores del espacio de fase reconstruido son de la forma $\mathbf{y}(n) = [s(n), s(n+P_1\tau_s), s(n+P_2\tau_s), \dots, s(n+P_{d-1}\tau_s)]$; si además escogemos un rezago común T de manera que $P_k\tau_s = kT$, los vectores finales quedan $\mathbf{y}(n) = [s(n), s(n+T), s(n+2T), \dots, s(n+(d-1)T)]$ (Abarbanel 1996).

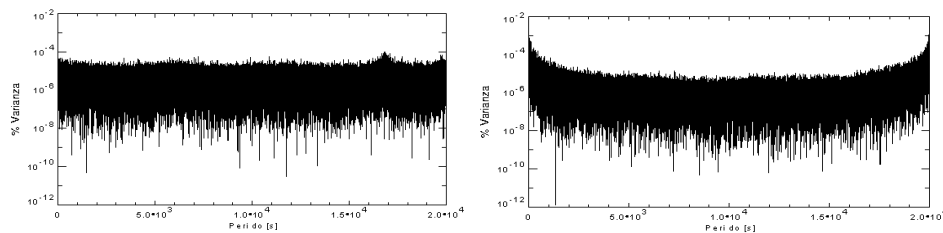


Figura 9. Espectros de Fourier para: (a) u a 21 m de altura en las horas de la mañana, y (b) en la tarde.

El primer paso para la reconstrucción del espacio de fase es, entonces, la escogencia de un rezago T apropiado. Para esto se utilizó el concepto de información mutua de Shannon. Sea T un rezago fijo y considérese los conjuntos $S=\{s(n)\}_{n=0,1,\dots}$ y $S_T=\{s(n+T)\}_{n=0,1,\dots}$ de observaciones consecutivas. La información mutua promedio, o la información de Shannon entre S_T y S , se define como

$$I(T) = \sum_{n=0,1,\dots} P(s(n),s(n+T)) \log_2 \left[\frac{P(s(n),s(n+T))}{P(s(n))P(s(n+T))} \right]$$

donde $P(s(n),s(n+T))$ denota la probabilidad conjunta de ocurrencia de la pareja $(s(n),s(n+T))$; y $P(s(n))$ y $P(s(n+T))$ son las probabilidades de las observaciones $s(n)$ y $s(n+T)$ en S y S_T respectivamente. $I(T)$ estima el valor promedio de la información que las observaciones de $s(n+T)$ brindan sobre las observaciones $s(n)$. La regla general dice que T se debe escoger como el primer mínimo de la función $I(T)$, de manera que S_T y S no tengan información redundante, y que además no sean totalmente independientes. El cálculo de $I(T)$ se realizó sobre las series completas. En la Figura 10 se muestran los resultados obtenidos cada una de las series con rezagos $T=1,\dots,9$ datos. En todos los casos se encontró que el primer mínimo estaba ubicado en $T=2$; y por tanto este valor se usó como rezago para la reconstrucción del espacio de fase en todas las series.

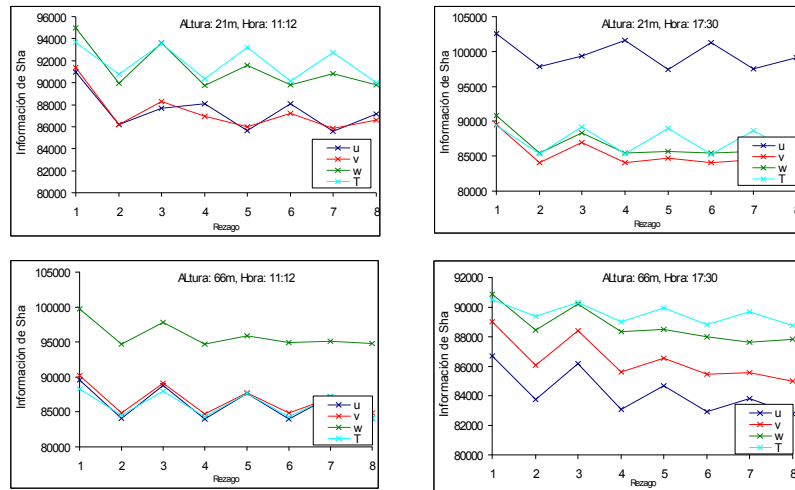


Figura 10. Funciones de información mutua de cada una de las series para rezagos $T=1,2,\dots,9$.

Existen varias metodologías para estimar la dimensión d para la reconstrucción del espacio de fase, una de ellas fue introducida por Abarbanel (1994) y consiste en la búsqueda y remoción de los “falsos vecinos”. Supóngase que se reconstruyó el espacio de fase en un R^d y sea $\mathbf{y}(n)=[s(n), s(n+T), s(n+2T), \dots, s(n+(d-1)T)]$ uno de sus vectores, sea $\mathbf{y}^{NN}(n)=[s^{NN}(n), s^{NN}(n+T), s^{NN}(n+2T), \dots, s^{NN}(n+(d-1)T)]$ el vector más cercano a $\mathbf{y}(n)$ en el espacio de fase. Si la dimensión d del atractor no es la apropiada, el punto $\mathbf{y}^{NN}(n)$ podría estar cerca de $\mathbf{y}(n)$ simplemente por la proyección de una trayectoria desde una dimensión mayor a d ; en este caso se dice que $\mathbf{y}^{NN}(n)$ es un falso vecino. Un método para detectar estos falsos vecinos consiste en comparar la distancia euclídea entre $\mathbf{y}^{NN}(n)$ y $\mathbf{y}(n)$ en los espacios de dimensión d y $d+1$, esto se hace evaluando el cociente

$$R(n,T) = \frac{|s(n+dT) - s^{NN}(n+dT)|}{|\mathbf{y}(n) - \mathbf{y}^{NN}(n)|}$$

y comparándolo con umbral ad-hoc alrededor de 15. Cuando $R(n,T)$ supere este umbral, se habrá detectado un falso vecino. Si se repite esta operación para dimensiones consecutivas, se llegará a un valor d en el cual no se detecten falsos vecinos y se podrá decir que el espacio de

fase ha sido “desdoblado”. Para este procedimiento se realizó la búsqueda sobre 200000 datos de cada una de las series y un umbral de 15 para la decisión. En la Tabla 3 se detalla la menor dimensión en la cual se removieron todos los falsos vecinos.

Tabla 3. Dimensiones de desdoblamiento para cada serie.

Altura	Hora	u	v	w	T
21 m	11:12	9	9	7	11
	17:30	7	6	6	7
66 m	11:12	14	11	12	15
	17:30	12	16	14	16

Para estimar el mayor exponente de Lyapunov a partir de los datos observados, es apropiado realizar una verificación explícita de la presencia de divergencia exponencial entre las trayectorias. Sea $\mathbf{y}(n)$ un punto en el espacio de fase reconstruido y considérese una ε -vecindad $U_{n,\varepsilon} \subset \mathbf{R}^d$ alrededor de $\mathbf{y}(n)$; denótese por $\mathbf{y}'_i(n)$, $i=1,2,\dots$ los puntos distintos a $\mathbf{y}(n)$ y pertenecientes a la vecindad $U_{n,\varepsilon}$, sea t suficientemente grande y considérese la cantidad:

$$S(\varepsilon, t) = \left\langle \ln \left(\frac{1}{\varepsilon} \right) \sum_{i=1,2,\dots} |\mathbf{y}(n+t) - \mathbf{y}'_i(n+t)| \right\rangle_n$$

donde el operador $\langle \bullet \rangle_n$ significa el valor esperado tomado sobre todos los n . Si para valores razonables del diámetro inicial ε , $S(\varepsilon, t)$ exhibe un comportamiento lineal con t , entonces la pendiente de la recta resultante es una estimación del exponente máximo de Lyapunov λ_1 . El cálculo de $S(\varepsilon, t)$ para las series observadas se hizo con un radio inicial ε igual a la milésima parte del rango de los datos, en el caso de no encontrar puntos vecinos $\mathbf{y}'_i(n)$ para hacer el promedio, se duplica el radio y se repite la operación (Hegger et.al. 1999). El tiempo durante el cual se mide la trayectoria se hizo igual a $t=10s$.

En la Figura 11 se muestran los resultados de la estimación de $S(\varepsilon, t)$ para cada una de las series observadas. Varias características deben ser resaltadas. Primero, no en todas las series se encontró un tramo de crecimiento lineal en la curva de $S(\varepsilon, t)$; en algunos casos como el de la temperatura del aire T a 21m de altura en las horas de la mañana, la curva crece suavemente pero sin tramos lineales distinguibles, esto es, las trayectorias divergen pero no lo hacen a una tasa exponencial constante, esto puede indicar la presencia de procesos difusivos (Hegger et.al. 1999); para otras variables, como la velocidad longitudinal del viento u a 66m de altura en las horas de la tarde, se observan períodos de convergencia y divergencia que ocurren a una escala temporal menor de la estudiada, estos puede ser debido a no-estacionariedad de las series y el análisis debería hacerse a escala temporal más fina, también se podría conjeturar la presencia de fractalidad en la dinámica de la variable observada. Otro aspecto sobresaliente en la mayoría de las curvas $S(\varepsilon, t)$, es la presencia de un primer tramo muy pendiente y de tramos con pequeñas oscilaciones; la primera característica es debida al acercamiento de las trayectorias a los punto localmente más inestables, las oscilaciones por su parte, responden a problemas de medición que generan pequeñas pulsaciones evidenciadas en los picos para períodos pequeños en los espectros de Fourier. La hipótesis de caos determinístico se puede descartar en aquellas series que no tienen tramos lineales distinguibles en la curva de $S(\varepsilon, t)$; en presencia oscilaciones pequeñas, la hipótesis sólo puede ser descartada cuando el crecimiento global de la curva no sea lineal en todos los tramos (Hegger et al., 1999). La Tabla 4 resume las estimaciones del exponente mayor de Lyapunov λ_1 para cada serie, calculado como la pendiente de la curva $S(\varepsilon, t)$ durante un periodo de comportamiento lineal.

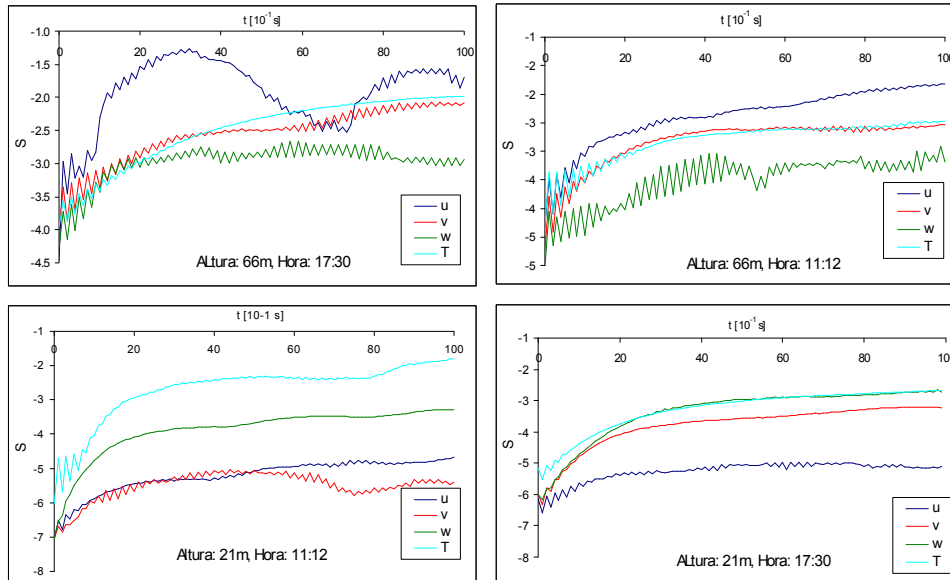


Figura 11. Estimación del mayor exponente de Lyapunov mediante la Función $S(\varepsilon, t)$ para t entre 0 y 10s. La pendiente de los tramos rectos de cada curva, es un estimador del exponente máximo de Lyapunov.

Tabla 4. Exponentes de Lyapunov y coeficiente R^2 del ajuste al tramo lineal de la curva $S(\varepsilon, t)$ para cada serie.

Altura 21 m, Hora 11:12			Altura 21 m, Hora 17:30		
Variable	λ_1	R^2	Variable	λ_1	R^2
u	0.0121	0.936	u	0.0084	0.817
v	x	x	v	0.0097	0.987
w	0.016	0.9024	w	0.006	0.931
T	x	x	T	0.0101	0.931
Altura 66 m, Hora 11:12			Altura 66 m, Hora 17:30		
Variable	λ_1	R^2	Variable	λ_1	R^2
u	0.0107	0.978	u	x	x
v	x	x	v	x	x
w	0.0283	0.731	w	0.009	0.912
T	0.0395	0.909	T	0.077	0.947

4 CONCLUSIONES

Se ha demostrado la existencia de propiedades de escalamiento de los eventos extremos de las fluctuaciones de la turbulencia en la Amazonia central, las cuales producen colas anchas en la FDP. Se aplican esas propiedades para la predicción de la forma de los picos y su distribución de probabilidad obteniendo resultados aceptables. Se mostró que la forma, amplitud y ancho de los picos de las series son diferentes tanto para una misma escala como para escalas diferentes. Se han encontrado las características dinámicas de estos picos a partir de evaluación numérica. Se recomienda un análisis más detallado de estas series de alta resolución y buscar las propiedades dinámicas para un espectro de escalas temporales más amplio.

El análisis de espectros mediante la transformada de ondas, permitieron revelar el crecimiento de la intermitencia asociada a los eventos disipativos locales, con la disminución del tamaño de los vórtices (números de onda mayores). Las funciones de estructura condicionales demostraron que las diferencias con la teoría de Kolmogorov K-41 se deben a la intermitencia, que a su vez se traduce en estadística no Gaussiana. Específicamente, se observó que la intermitencia no influye en la función de estructura de segundo orden, obteniendo pendientes cercanas a 2/3 como lo señala K41. Los resultados sugieren la existencia de un ciclo diario de la magnitud de

la intermitencia el cual debe estar asociado a la evaporación y a la convección y a sus propios ciclos diurnos.

Por medio del cálculo de los exponentes de Lyapunov, se encontró caos determinístico de baja dimensionalidad en 10 de las 16 series estudiadas, tanto por debajo del dosel de la vegetación, como en las capas bajas de la atmósfera. Esto concuerda con los resultados obtenidos por Poveda y Puente (1993) para la turbulencia de bosques de latitudes altas. Se encontraron mayores dimensiones de reconstrucción para los espacios de fase en la dinámica por encima del dosel. Los exponentes de Lyapunov presentan valores mayores en las series medidas por debajo del dosel, esto responde a una turbulencia más desarrollada en la dinámica del viento en capas bajas.

Agradecimientos. Los datos usados fueron suministrados amablemente por Carlos A. Nobre del proyecto "Large-Scale Atmosphere-Biosphere Experiment in Amazonia" (LBA).

Referencias

- Abarbanel, H. D., *Analysis of observed chaotic data*, Springer Verlag, New York, 1994.
- Bergstrom, H. y Hogstrom, U., *Turbulent exchange above a pine forest II. Organized structures*. Boundary-layer Meteorology, 49, 231-263, 1989.
- Daubechies, I., *Ten lectures on wavelets*. SIAM, 357 pp., 1992.
- Farkas, M. *Periodic Motions*, Springer Verlag, New York, 1994.
- Glendinning P., *Stability, Instability and Chaos*. Cambridge University Press., Cambridge, 1994.
- Hagelberg, C. R., y Gamage, N. K., *Application of structure preserving wavelet decompositions to intermittent turbulence: A case of study*. Wavelets in Geophysics, E. Foufoula-Georgiou y P. Kumar, Eds., Academic Press, 45-80., 1994.
- Hegger R., M. Kantz M., y T. Schreiber, *Practical implementation of nonlinear time series methods: The TISEAN package*. *Chaos*, 9, 413-435 (1999).
- Hirsch M., y S. Smale, *Differential Equations, Dynamical Systems and Linear Algebra*. Academic Press. San Diego, 1974.
- Hoyos, C. D., *Algunas aplicaciones de la transformada de Fourier y la descomposición en ondas en el análisis de señales hidrológicas y sísmicas*. Tesis de Pregrado para obtener el título de Ingeniero Civil. Universidad Nacional de Colombia, Facultad de Minas (PARH), 1999.
- Katul, G. G., M. B. Parlange, *On the active role of temperature in surface-layer turbulence*. *J. Atmos. Sci.*, 51, 2181-2195, 1994.
- Katul, G. G., J. D. Albertson, C. R. Chu, y M. B. Parlange, *Intermittency in atmospheric surface layer turbulence: The orthonormal wavelet representation*. Wavelets in Geophysics, E. Foufoula-Georgiou y P. Kumar, Eds., Academic Press, 81-105., 1994.
- Katul, G.G., y B. Vidakovic, *Identification of low-dimensional energy containing/flux transporting eddy motion in the atmospheric surface layer using wavelet thresholding methods*. *Jour. Atm. Sci.*, 55, 377-389, 1998.
- Kolmogorov, A. N., *The local structure of turbulence in incompressible viscous fluid for very large Reynolds numbers*, *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 4, 299-303, 1941.
- Landau, L. D. y E. M. Lifshitz, *Fluid Mechanics*, Pergamon Press, 536 pp., 1986.
- Lorenz, E. N., *Deterministic nonperiodic flow*, *J. Atmos. Sci.* 20, 130-141, 1963.
- L'vov, S., A. Pomyalov and I. Procaccia, *Outliers, Extreme Events and Multiscaling*, *Phys. Rev. E*, 63, 056118, 2001.
- Poveda, G., y C. E. Puente, *Strange attractors in atmospheric boundary-layer turbulence*, *Boundary-Layer Meteorology*, Vol. 64, No. 1-2, 1993.
- Schertzer, D., S. Lovejoy, F. Schmitt, Y. Chigirinskaya and D. Marsan, *Multifractal cascade dynamics and turbulent intermittency*, *Fractals*, Vol 5, 4, 427-471, 1997.
- Takens, F., *Detecting Strange Attractors in Turbulence*. Editado en Rand, D. y Young, L. S., *Dynamical Systems and Turbulence*. Warwick, 1980.
- Torrence, C., y G. P. Compo, *A practical guide to wavelet analysis*. *Bull. Amer. Meteor. Soc.*, 79, 61-78, 1998.
- Verhulst, F. *Nonlinear Differential Equations and Dynamical Systems*. Springer Verlag, New York, 1980.
- Wolf, A., J. B. Swift, H. Swinney, y J. A. Vastano, *Determining Lyapunov exponents from a time series*, *Physica D*, 16, 286-317, 1985.