SOBRE EL TEOREMA $p^a q^b$ DE BURNSIDE

Carolina Puerta González
Matemática.
Código: 830261

Universidad Nacional de Colombia
Facultad de Ciencias
Departamento de Matemáticas
Bogotá, D.C.
Junio de 2011

SOBRE EL TEOREMA $p^a q^b$ DE BURNSIDE

Carolina Puerta González
Matemática.
Código: 830261

Director
John Jaime Rodríguez, Ph.D.
Doctor en Matemáticas

Universidad Nacional de Colombia
Facultad de Ciencias
Departamento de Matemáticas
Bogotá, D.C.
Junio de 2011

Título en español

Sobre el teorema $p^a q^b$ de Burnside

Title in English

On Burnside's other $p^a q^b$ theorem

Resumen: Utilizando herramientas de la teoría de representación de grupos finitos se muestra una interesante proposición sobre grupos de automorfismos de p-grupos abelianos elementales; con ayuda de este resultado presentamos una demostración del siguiente resultado de Burnside: Sea p y q dos números primos distintos y G un grupo finito de orden $p^a q^b$. Si $p^a > q^b$, entonces con un limitado y explícito número de excepciones, G debe tener un p-subgrupo normal no trivial.

Abstract: Using the tools of representation theory of finite groups shows an interesting proposition on groups of automorphisms of elementary abelian p-groups, with the help of this result we present a proof of the following result of Burnside: Let p and q two distinct prime numbers and G a finite group of order $p^a q^b$. If $p^a > q^b$, then with an explicit limited number of exceptions, G should have a normal p-subgroup is not trivial.

Palabras clave: Grupos nilpotentes, p-grupos, teorema de Burnside.

Keywords: Nilpotent groups, p-groups, Burnside's theorem.

Nota de aceptación

Trabajo de tesis
Aprobado

"Mención Meritoria o Laureada"

Jurado
Victor Samuel Albis González

Director
John Jaime Rodríguez

Bogotá, D.C., Julio de 2011

Dedicado a

Amara y Manuel.

Índice general

Introducción

Sea G un grupo finito de orden $p^a q^b$, donde p y q son primos distintos y $p^a > q^b$. Un famoso teorema de Burnside afirma que G debe ser soluble; en un menos famoso teorema Burnside dio condiciones suficientes para que G tenga un $p-$subgrupo normal maximal.

En este trabajo se presenta la demostración dada en [3] del resultado menos famoso de Burnside. Las ideas básicas utilizadas en esta prueba hacen parte de la teoría de los grupos nilpotentes.

El teorema menos famoso de Burnside afirma lo siguiente:

Teorema 1 (Burnside)**.** *Sea G un grupo finito de orden $p^a q^b$ donde p y q son primos distintos. Supongamos además que $p^a > q^b$. Entonces G posee un $p-$subgrupo normal maximal no trivial, excepto en los 2 siguientes casos:*

(1) $p = 2$ y q es un primo de Fermat.

(2) $q = 2$ y p es un primo de Mersenne.

Para un grupo finito G, notaremos con $e(G)$ a el máximo de los órdenes de los subgrupos nilpotentes de G que tienen clase de nilpotencia a lo sumo dos y notaremos a $\mathscr{B}(G)$ como el conjunto de todos los subgrupos nilpotentes de G de orden $e(G)$ (Véase capítulo 2).

Sea p un número primo, diremos que G es un p-grupo si el orden de G, denotado con $|G|$, es de la forma p^r. También diremos que G es un p'-grupo si $|G|$ no es divisible por p; diremos también que G es un p-grupo abeliano elemental si el orden de cada elemento de G es p. Si $|G| = p^a q^b$ con $p^a > q^b$, notaremos con $O_p(G)$ al único p-subgrupo normal maximal de G.

El objetivo principal de este trabajo es demostrar el siguiente resultado, análogo al resultado de Burnside y que además cubre todos los casos.

Teorema A (Glauberman)**.** *Sea G un grupo finito de orden $p^a q^b$ donde p y q son primos distintos. Supongamos además que $p^a > q^b$. Sea S un $p-$subgrupo de Sylow de G y T un $q-$subgrupo de Sylow de G. Supongamos que $e(S) > e(T)$. Entonces G posee un $p-$subgrupo normal maximal no trivial.*

El teorema anterior lo obtendremos como corolario del siguiente resultado.

Teorema B. *Sea G un grupo finito, A un subgrupo nilpotente de G cuya clase de nilpotencia es a lo sumo dos, y $|A| = e(G)$. Supongamos además que A normaliza un subgrupo nilpotente B de G. Entonces AB es nilpotente.*

La demostración que presentaremos del Teorema B depende de la siguiente interesante proposición sobre grupos de automorfismos.

Proposición 1. *Sea p un número primo y V un $p-$grupo Abeliano elemental no trivial. Supongamos que A es un $p'-$grupo nilpotente de automorfismos de V que tiene clase de nilpotencia a lo sumo dos. Entonces $|A| < |V|$.*

Este trabajo contiene dos capítulos. En el primero de ellos expondremos los resultados preliminares principales usados en este trabajo así como la notación y definiciones usadas, entre ellas conceptos básicos de automorfismos de p-grupos, tópicos básicos de representación de grupos finitos y grupos nilpotentes. En el segundo capítulo presentaremos el resultado principal del trabajo el cual es una interesante proposición sobre grupos de automorfismos nilpotentes de p-grupos, (Proposición 1), la cual es la base de la demostración que presentamos del teorema de Burnside.

Cabe notar que M. Coates, M. Dwan y J. Rose encontraron y corrigieron un error en la demostración original dada por Burnside [6]. También debemos notar aquí que el resultado principal de Glauberman sobre grupos de automorfismos nilpotentes, nuestra proposición 1 del capítulo 2, ha sido extendido en [7] y [1].

CAPÍTULO 1

Resultados preliminares

1.1. Notación

Sea G y X un subconjunto de G, notaremos con $C_G(X)$ y $N_G(X)$ al centralizador y al normalizador de X en G respectivamente. Si H es un subgrupo normal de G escribimos $H \lhd G$. El centro de G lo notaremos con $Z(G)$.

Si $x, y \in G$, notaremos por $[x, y]$ su conmutador $x^{-1}y^{-1}xy$. Si X, Y son subconjuntos de G, designamos $[X, Y] = \langle [x, y] | \, x \in X, \, y \in Y \rangle$. Además $[X, Y]$ es siempre un subgrupo de G. Notaremos con G' a $[G, G] = G'$ y lo llamaremos el grupo derivado de G. Sean $x^y = y^{-1}xy$ y A^y el subgrupo conjugado igual a $y^{-1}Ay$.

Teorema 2. *(Lagrange) El orden de un subgrupo H de un grupo G es divisor de el orden de G.*

1.2. Automorfismos como transformaciones lineales

Teorema 3 (Teorema 1.3.2 de [4])**.** *Un p-grupo abeliano elemental G de orden p^n es isomorfo a un espacio vectorial de dimensión n sobre el cuerpo de p elementos $\mathbb{F}_p$*

Demostración. Si definimos, en G, la adición $\oplus$ como $x \oplus y = xy$, para todo $x, y \in G$, y la multiplicación por un escalar c, mediante la concatenación, $cx = x^c$, con $c \in F$ y $x \in G$, tenemos que G tiene una estructura de espacio vectorial sobre F y lo denotamos con $\mathscr{G}$. También tenemos que los subgrupos de G corresponden a los subespacios de $\mathscr{G}$. Además, si G es finito, entonces $\mathscr{G}$ tendrá una base finita y dimensión finita m. Además, los automorfismos de G corresponden a las aplicaciones lineales en $\mathscr{G}$; y así se deduce que $\operatorname{Aut} G \simeq GL_m(p)$. Terminando así la demostración.

Recordemos que las transformaciones lineales no singulares son transformaciones lineales invertibles, es decir, sean V y W dos espacios vectoriales sobre el mismo cuerpo $\mathbb{K}$. Una transformación lineal T de V en W se llama invertible si existe una transformación lineal U de W en V tal que $UT = I_V$ y $TU = I_W$.

Teorema 4 (Teorema 2.6.1 de [4]). *Si un $p-$grupo abeliano elemental H se considera como un espacio vectorial sobre $\mathbb{F}_p$, entonces el grupo $\operatorname{Aut} H$, es isomorfo al grupo de las transformaciones lineales no singulares de H.*

Sea G un grupo de transformaciones lineales de un espacio vectorial V, notaremos por $C_v(G) = \{v \in V | x(v) = v$ para todo x en $G\}$. Diremos que $C_v(G)$ es el centralizador de G en V. No es difícil ver que $C_v(G)$ es un subespacio de V.

Si π es un conjunto de números primos. Se dice que el elemento x de G es un $\pi - elemento$ si el orden de x, denotado con $|x|$, es divisible solo por los primos en π. En particular, se tiene la notación de $p - elemento$, p es un primo. De la misma forma, un grupo G es llamado $\pi - grupo$ si $|G|$ es divisible solo por los primos en π. Adicionalmente, con $\pi(G)$ designamos al conjunto de primos que dividen $|G|$. Es evidente que G es un $\pi(G)-grupo$; por otra parte, si G es un $\pi-grupo$, entonces $\pi(G) \subseteq \pi$.

El conjunto complementario de primos del conjunto π se denota con π'. Por lo tanto se tiene la notación de $\pi'-$ y $p'-$ elementos, así como también $\pi'-$ y $p'-$ grupos.

1.3. Tópicos básicos de representación de grupos

Si V es un espacio vectorial de dimensión n sobre el cuerpo F. Denotaremos con $GL(V, F)$ al grupo de todas las transformaciones lineales no singulares de V y con $GL(n, F)$ al grupo de todas las matrices invertibles de tamaño $n \times n$ con coeficientes en F. Como es usual, dada una base $(v) = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ de V sobre F, podemos asociar a cada T en $GL(V, F)$ una matriz de representación con respecto a la base (v). En este caso tenemos un isomorfismo entre $GL(V, F)$ y $GL(n, F)$. (Véase [5], capítulo VII)

Un homomorfismo ϕ de un grupo G en $GL(V, F)$ se llama una representación de G. Se dice también que ϕ es una *representación* de G sobre F. El núcleo K de ϕ se llama el *núcleo* de la representación. Si ϕ es uno a uno, entonces G se aplica isomorfamente en $GL(V, F)$ y en este caso diremos que ϕ es una representación *fiel*. Por otro lado, diremos que ϕ es *trivial* si $K = G$. También denotaremos con V/F al grupo de las transformaciones lineales no singulares de V sobre F.

La imagen $\phi(G)$ de G es un grupo de transformaciones lineales de V y tenemos las siguientes relaciones:

$$\phi(xy) = \phi(x)\phi(y) \qquad x, y \in G.$$
$$\phi(x)(a_1v_1 + a_2v_2) = a_1\phi(x)(v_1) + a_2\phi(x)(v_2) \qquad a_1, a_2 \in F \text{ y } v_1, v_2 \in V.$$

Existen dos tipos importantes de representaciones: las irreducibles y las indescomponibles. Una representación ϕ de G sobre V/F es llamada *irreducible* si 0 y V son los únicos subespacios $\phi(G)-$invariantes de V, es decir, su imagen está contenida en V. En el caso contrario diremos que ϕ es *reducible*. Diremos que ϕ es *indescomponible* si no es posible escribir a V como la suma directa de dos subespacios no triviales $\phi(G)-$invariantes. En el caso contrario diremos que ϕ es *descomponible*. Claramente irreductibilidad implica indescomponibilidad, pero el recíproco no es cierto en general.

Tenemos los siguientes resultados:

Teorema 5 (Teorema 3.3.1 de [4]). *(Mashke) Sea ϕ una representación de G sobre V/F y supongamos que F tiene característica 0 o prima relativa con el orden de G. Entonces $V = V_1 \oplus V_2 \cdots \oplus V_r$, donde cada V_i es un subespacio no trivial $\phi(G)-$invariante de V.*

Como corolario tenemos

Teorema 6. *Sea G un p'-grupo de un automorfismo de un p-grupo abeliano V y supongamos que V_1 es un subgrupo $G-$invariante no trivial. Entonces $V = V_1 \times V_2$, donde V_2 es también G-invariante.*

Dada una representación ϕ de G en V/F es muy conveniente darle una estructura de G-módulo a derecha a V de la siguiente manera

$$ux = \phi(x)(u) \qquad u \in V \text{ y } x \in G$$

; de esta manera un subespacio $\phi(G)$ invariante de V se convierte en un G-submódulo de G, V es un G módulo irreducible si 0 y V son los únicos G submódulos de V. Así, las nociones de representación de G y de G-módulo son equivalentes y pueden ser intercambiadas. En un contexto dado utilizaremos la que sea más conveniente. Afirmaciones sobre grupos de transformaciones lineales pueden expresarse como resultados sobre representaciones de grupos, como las siguientes.

Teorema 7 (Teorema de Clifford, Teor 3.4.1 de [4]). *Sea V/F un $G-$módulo irreducible y sea H un subgrupo normal de G. Entonces V es la suma directa de subespacios $H-$invariante V_i, $1 \leq i \leq r$, los cuales satisfacen las siguientes condiciones:*

i. $V_i = X_{i1} \oplus X_{i1} \oplus \cdots \oplus X_{it}$, donde cada X_{ij} es un H-submódulo irreducible, $1 \leq i \leq r$, t es independiente de i y X_{ij}, $X_{i'j'}$ son H-submódulos isomorfos si y solo si $i = i'$.

ii. Para cualquiera $H-$submódulo U de V, tenemos $U = U_1 \oplus U_2 \oplus \cdots U_r$, donde $U_i = U \cap V_i$, $1 \leq i \leq r$. En particular, cualquier $H-$submódulo irreducible de V es subconjunto de alguno de los V_i.

iii. Para x en G, la aplicación $\pi(x) : V_i \to V_i x$, $1 \leq i \leq r$ es una permutación del conjunto $S = \{V_1, V_2, \ldots V_r\}$ y π induce una representación G en S. Además, $C_G(H)$ está contenido en el kernel de π.

1.3.1. G-Homomorfismos

Sean V/F y W/F dos G-módulos. Diremos que ψ un homomorfismo de V en W tal que

$$\psi(v)x = \psi(vx))$$

es un G-homomorfismo. El conjunto de todos los G-homomorfismos de V en W será denotado por $\mathrm{Hom}_G(V, W)$.

Teorema 8 (Teorema 3.5.2 de [4]). *(Schur) Sea V/F un G-módulo irreducible, entonces $\mathrm{Hom}_G(V, V)$ es un álgebra con división y contiene a F en su centro. En particular, todo elemento de $\mathrm{Hom}_G(V, V)$ es un G-isomorfismo.*

1.4. Grupos Nilpotentes

Un serie normal para G

$$< e >= H_0 \lhd H_1 \lhd \ldots \lhd H_n = G$$

es una serie central para G si para cada $0 \leq i \leq n-1$, tenemos $H_{i+1}/H_i \leq Z(G/H_i)$. Diremos que G es nilpotente si tiene una serie central.

A continuación enunciaremos algunos resultados básicos de grupos nilpotentes. ([8])

Definición 1. *El i-ésimo subgrupo conmutador superior $\mathcal{D}_i(G)$ de G se define de manera inductiva por*

$$\mathcal{D}_1(G) = G, \qquad \mathcal{D}_{i+1}(G) = [\mathcal{D}_i(G), G].$$

Definición 2. *El i-ésimo centro superior $\mathcal{Z}_i(G)$ de G se define inductivamente como sigue. $\mathcal{Z}_0(G) =< e >$. Si $\mathcal{Z}_i(G)$ se ha definido y η_i es el homomorfismo canónico de G en $G/\mathcal{Z}_i(G)$, entonces $\mathcal{Z}_{i+1}(G)$ es la preimagen de $Z(G/\mathcal{Z}_i(G))$.*

Definición 3. *La serie central menor de un grupo G es la serie:*

$$G = \mathcal{D}_i(G) \rhd \mathcal{D}_2(G) \rhd \cdots \rhd < e >$$

y la serie central mayor de G es la serie:

$$< e >= \mathcal{Z}_0(G) \lhd \mathcal{Z}_1(G) \lhd \cdots \lhd G$$

Teorema 9 (Teorema 10.4 de [8])**.** *Si $\mathcal{Z}_s(G) = G$, para algún entero s, entonces $\mathcal{D}_{s+1} = \langle e \rangle$ y*

$$\mathcal{D}_{s+1} \leq \mathcal{Z}_{r-s} \text{ para } r = 0, ..., s.$$

Recíprocamente, si $\mathcal{D}_{s+1}(G) = \mathcal{D}_{s+1} = \langle e \rangle$, para algún entero s, entonces $\mathcal{Z}_s = G$ y

$$\mathcal{Z}_{s+1} \leq \mathcal{D}_{r-s} \text{ para } r = 0, ..., s.$$

también se cumple.

Definición 4. *Un grupo G se llama nilpotente de clase r si r es el menor entero que satisface $\mathcal{D}_{r+1}(G) = \langle e \rangle$.*

Teorema 10 (Teorema 10.6 de [8])**.**

i. Todos los grupos abelianos son nilpotentes de clase 1.

ii. Todos los p-grupos finitos son nilpotentes.

iii. Un subgrupo de un grupo nilpotente es nilpotente.

iv. Un grupo factor de un grupo nilpotente es nilpotente.

v. Si G y H son nilpotentes, entonces también lo es $G \times H$.

Teorema 11 (Teorema 10.9 de [8])**.** *Para un grupo finito G las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(i) *G es nilpotente.*

(ii) *Para algún entero positivo r, $\mathcal{D}_r(G) =< e >$.*

(iii) *Para algún entero positivo s, $\mathcal{Z}_s(G) = G$.*

(iv) *Si $H < G$ entonces $H < N_G(H)$.*

(v) *Todos los subgrupos maximales de G son normales en G.*

(vi) *Todos los subgrupos de Sylow de G son normales en G.*

(vii) *G es isomorfo al producto directo de sus subgrupos de Sylow.*

(viii) *El subgrupo derivado G' de G es un subgrupo del subgrupo de Frattini $\Phi(G)$ de G. (Véase adelante la definición de subgrupo de Frattini)*

Teorema 12. *El centro de un producto particular es el producto directo de los centros: $Z(G_1 \times \cdots \times G_k) = Z(G_1) \times \cdots \times Z(G_k)$. El producto directo de grupos es abeliano si y sólo si cada uno de los factores es abeliano.*

Demostración. Procedemos por inducción sobre k.

Para el caso base $k = 2$, sean G y H grupos.

$\subseteq$) Sea $(g, h) \in Z(G \times H)$. Entonces para todo $(a, b) \in G \times H$, $(ga, hb) = (g, h)(a, b) = (a, b)(g, h) = (ag, bh)$. Así $ag = ga$ y $bh = hb$ para todos los $a \in G$ y $B \in H$, por lo que $g \in Z(G)$ y $h \in Z(H)$. Así, $(g, h) \in Z(G) \times Z(H)$.

$\supseteq$) Sea $(g, h) \in Z(G) \times Z(H)$. Ahora para todos los $a \in G$ y $H \in H$, $(g, h)(a, b) = (ga, hb) = (g, bh) = (a, b)(g, h)$. Así, $(g, h) \in Z(G \times H)$. Por lo tanto $Z(G \times H) = Z(G) \times Z(H)$.

Ahora supongamos que la conclusión es válida para cualquier producto de los grupos k para algún $k \geq 2$. Entonces $Z(\prod_{i=1}^{k+1} G_i) = Z(\prod_{i=1}^{k} G_i \times G_{k+1}) = Z(\prod_{i=1}^{k} G_i) \times Z(G_{k+1}) = \prod_{i=1}^{k} Z(G_i) \times Z(G_{k+1}) = \prod_{i=1}^{k+1} G_i$. Por inducción, el resultado es válido para cualquier producto directo finito.

Ahora, sea $G = \prod_{i=1}^{k} G_i$ un producto directo de grupos finitos.

Si cada factor G_i es abeliano, $Z(G) = Z(\prod_{i=1}^{k} G_i) = \prod_{i=1}^{k} Z(G_i) = \prod_{i=1}^{k} G_i = G$, por lo que G es abeliano.

Si G es abeliano, entonces $\prod_{i=1}^{k} Z(G_i) = Z(\prod_{i=1}^{k} G_i) = Z(G) = G = \prod_{i=1}^{k} G_i$. Si dejamos que π_i denote la i-ésima coordenada de proyección, tenemos $G_i = \pi_i[G] = Z(G_i)$. Por lo tanto, G_i es abeliano para cada i.

1.5. Subgrupos de Fitting y de Frattini

Definición 5. *El subgrupo de G generado por todo los subgrupos nilpotentes normales es un subgrupo nilpotente normal de G. Este grupo es el único subgrupo nilpotente normal maximal de G y se denota con $F(G)$ y se llama el subgrupo de Fitting de G.*

Definición 6. *Dado G, la intersección de todos los subgrupos maximales de G se llama el subgrupo de Frattini de G y se denota por $\Phi(G)$.*

Lema 1 (Lema 6.1.1 de [4])**.** *Si H y K son subgrupos nilpotentes de G, entonces HK también lo es.*

Teorema 13 (Teorema 6.1.2 de [4])**.** *El subgrupo de G generado por todos sus subgrupos nilpotentes normales es un subgrupo nilpotente normal de G.*

Teorema 14 (Teorema 6.1.3 de [4])**.** *Si G es soluble entonces $C_G(F(G)) \subseteq F(G)$*

Teorema 15 (Teorema 6.3.2 de [4])**.** *Si G es $\pi-$separable y $\overline{G} = G/O_{\pi'}(G)$, entonces*

$$C_{\overline{G}}(O_\pi(\overline{G})) \subseteq O_\pi(\overline{G}).$$

En particular si $O_{\pi'}(G) = 1$, entonces $C_G(O_\pi(G)) \subseteq O_\pi(G)$.

CAPÍTULO 2

Teorema de Burnside

2.1. Grupos de automorfismos nilpotentes

Proposición 1. *Sea p un primo y V un p-grupo abeliano elemental distinto de $\{e\}$. Suponga que A es un p'-grupo nilpotente de automorfismos de V que tiene clases de nilpotencia a lo sumo 2. Entonces $|A| < |V|$.*

DEMOSTRACIÓN. La demostración se hará por inducción sobre $|V|$.

Por el problema 4,18 de [8], podemos considerar a V como un espacio vectorial sobre $\mathbb{F}_p$ y a A como un grupo de transformaciones lineales de V sobre $\mathbb{F}_p$.

i. Supongamos primero que V es reducible bajo A.
Por el teorema 3.1(Maschke) de [4], se tiene que Φ es una representación de A en $V|_F$. Entonces Φ es completamente reducible. Luego $V = V_1 \oplus V_2 \oplus ... \oplus V_r$, donde V_i es un subespacio Φ-invariante no nulo de V y $\Phi|_{V_i}$ es irreducible entonces $V = V_1 \oplus V_2$ por teorema 3.2 de [4].

Sea $A_i = A/C_A(V_i)$ entonces por inducción $|A_i| < |V_i|$ para todo i, y así

$$|A| \leq |A_1||A_2| < |V_1||V_2| = V.$$

ii. Tomemos ahora a V irreducible sobre A.

Sea C el centralizador de A en el anillo de endomorfismos de V. Sea F un subanillo de C generado por los elementos de $Z(A)$. Como $\mathrm{Hom}_A(V,V) = \{\varphi : V \longrightarrow V / x\varphi(V) = \varphi x(V)\} = C$ con $x \in A$, por el Lema de Schur (Teorema 3.5.2 de [4]) se tiene que C es un álgebra de división.

Como $Z(A) \subset C$ entonces F es subanillo de C y como C es álgebra de división entonces F es un dominio de integridad finito y, por tanto F es un cuerpo. Consideremos a V un espacio vectorial sobre F y A un grupo de transformaciones lineales de V sobre F. Definamos

$$|F| = q = p^m \text{ y } \dim_F V = d.$$

Dado que $Z(A)$ es un grupo multiplicativo del grupo $F - \{0\}$,

$$Z(A) \text{ es cíclico y } |Z(A)| \leq q - 1. \tag{2.1}$$

(a) Asumamos ahora que, para todo primo r que divide a $|A|$, todo subgrupo abeliano de $O_r(A)$ es cíclico. Entonces, por el teorema 5.4.10(ii) de [4], $O_r(A)$ es un grupo cíclico o un grupo de cuaterniones generalizado, es decir, un grupo de la forma $Q_r = \langle h, k : h^{2r-1} = k^2 = m, m^2 = 1, k^{-1}hk = h^{-1}\rangle$ por cada primo r. Como A tiene grado de nilpotencia de a lo sumo 2 entonces tenemos dos casos: si es de clase 1 entonces $\langle e\rangle \subset Z(A) = A$ y $|A| = Z(A) \leq q - 1 < q \leq |V|$. Si es de clase 2 entonces $O_2(A)$ es cíclico y se tiene que $|Z(A)| = |A|$, o el grupo de los cuaterniones de orden 8, es decir, Q_3 entonces $O_2(A) = Q_3$ entonces $|Z(O_2(A))| = 2$. Ahora, podemos tomar $|A| = 2^m q_1^{m_1} \cdots q_r^{m_r}$ con $q_i \neq 2$ y $|O_{q_i}(A)| = q_i^{m_i}$. Como A en nilpotente entonces por teorema 10.9(viii) de [8], $|A| = |O_2(A) \times O_{q_1}(A) \times \cdots \times O_{q_r}(A)|$ y además $Z(A) = |Z(O_2(A)) \times Z(O_{q_1}(A)) \times \cdots \times Z(O_{q_r}(A))|$ por teorema 12. Entonces tenemos que

$$\begin{aligned} |A/Z(A)| &= \frac{|O_2(A) \times O_{q_1}(A) \times \cdots \times O_{q_r}(A)|}{|Z(O_2(A)) \times Z(O_{q_1}(A)) \times \cdots \times Z(O_{q_r}(A))|} \\ &= \frac{8 \times q_1^{m_1} \times \cdots \times q_r^{m_r}}{2 \times q_1^{m_1} \times \cdots \times q_r^{m_r}} = 4 \end{aligned}$$

y por lo tanto V no es unidimensional y, como $Z(A)$ es cíclico y $|Z(A)| \leq q - 1$ entonces, como $2 \leq |Z(A)|$, entonces

$$\begin{aligned} 3 \leq |Z(A)| + 1 \leq q \Rightarrow 4 \leq |Z(A)| \leq q + 1 \Rightarrow 4(q-1) \leq (q+1)(q-1) \\ \Rightarrow |A| = 4|Z(A)| \leq (q+1)(q-1) < q^2 \leq q^d = |V|. \end{aligned}$$

(b) Ahora supongamos que existe r primo tal que divide a $|A|$ y $O_r(A)$ tiene un subgrupo abeliano no cíclico.

Es conocido el resultado que dice que el centro de un p-grupo finito no trivial es no trivial. Por ejemplo, véase corolario 2.5.4 de [5]. Por tanto, $Z(O_r(A)) \neq 2$ y como $O_r(Z(A)) = Z(O_r(A))$, entonces

$$r \Big| |Z(A)|. \tag{2.2}$$

Existe $g \in O_r(A)$ tal que g tiene orden r y $g \notin Z(A)$. En efecto, existe H no cíclico tal que $H \subset O_r(A)$ y $r \Big| |H|$. Entonces por teorema de Cauchy (teorema 2.5.2 de [5]), $g \in H$ y g tiene orden r. Como $O_r(A)$ no es cíclico y $Z(A)$ es cíclico entonces $g \notin Z(A)$.

Sea $B_1 = \langle g, Z(A)\rangle$. Entonces

$$B_1 \text{ es abeliano pero no cíclico.} \tag{2.3}$$

Tenemos que $A' \subseteq B_1$ y $B_1 \lhd A$. Sea U_1 un B_1-módulo irreducible de V sobre F y sea V_1 la suma de todos los B_1-submódulos de V sobre F que son isomorfos a U_1. Como B_1 es abeliano pero no cíclico, entonces

$$C_{B_1}(V_1) = C_{B_1}(U_1) \neq \{e\}.$$

Como A actúa fielmente sobre V por hipótesis, $V \neq V_1$. Como $B_1 \lhd A$ y A actúa irreduciblemente de V sobre F, el teorema de Clifford (teorema 3.4.1(i) de [5]) afirma que existe algún número natural n y algunos B_1-submódulos $V_2, \cdots, V_n$ sobre F tales que

$$V = V_1 \oplus \cdots \oplus V_n,$$

A permuta $V_1, \cdots, V_n$ transitivamente, y $C_A(B_1)$ fija a $V_1 \oplus \cdots \oplus V_n$.

Sea $B = C_A(B_1)$ y $K = C_B(V_1)$. Dado $\omega_1(O_r(B_1)) \simeq \mathbb{F}_p \times \mathbb{F}_p$, $B_1 = \omega_1(O_r(B_1))Z(A)$, y A es nilpotente, de esto se sigue que $A/B \cong \mathbb{F}_p$. Así $n = r$ y A/B actúa regularmente en $V_1, \cdots, V_r$. Tomemos $x \in A - B$. Entonces $\langle x\rangle$ permuta los subespacios V_i transitivamente. Así $C_K(x)$ actúa trivialmente en todos ellos, y

$$C_K(x) = \{e\}. \tag{2.4}$$

Dado que $K \lhd B$, se produce que

$$[B, K] \subseteq K \cap A' \subseteq K \cap Z(A) = \{e\} \text{ y } K \subseteq Z(B). \tag{2.5}$$

Tomemos $y \in K$. Sea $z = [y, x]$. Entonces

$$y^x = yz, \quad y^{x^2} = yz^2, \cdots, y^{x^r} = yz^r.$$

por (2.5), $y = y^{x^r} = yz^r$. Por lo tanto,

$$\text{para cada } y \in K, \quad [y, x] \in \omega_1(O_r(Z(A))). \tag{2.6}$$

Ahora definimos $\phi : K \longrightarrow \omega_1(O_r(Z(A)))$ por $\phi(y) = [y, x]$. Un cálcuo fácil prueba que ϕ es un homomorfismo. Por (2.4), ϕ es uno a uno. Así

$$|K| \leq |\omega_1(O_r(Z(A)))| \leq r.$$

Sea $c = \dim_F V_1$. Entonces $d = cr$. Como B/K actúa fielmente en V_1, por inducción tenemos que

$$|B/K| \leq |V_1| - 1 = q^c - 1.$$

De esta forma,

$$|A| = |A/B||B/K||K| \leq r^2(q^2 - 1). \tag{2.7}$$

Por (2.2) y (2.1),

$$r \leq q - 1 \leq q^c - 1. \tag{2.8}$$

Si $r = 2$, entonces por (2.7) y (2.8) tenemos que

$$|A| \leq 4(q^c - 1) \leq (q^c + 1)(q^c - 1) < q^{2c} = q^d = |V|.$$

Si $r > 2$, entonces por (2.7) y (2.8) tenemos que

$$|A| \leq (q^c - 1)^3 < q^{3c} \leq q^d = |V|.$$

Terminamos así la demostración.

2.1.1. Resultado principal

Teorema B. *Sea G un grupo finito, A un subgrupo nilpotente de G cuya clase de nilpotencia es a lo sumo dos, y $|A| = e(G)$. Supongamos además que A normaliza a un subgrupo nilpotente B de G. Entonces AB es nilpotente.*

Demostración. Supongamos que el teorema es falso y deduzcamos una contradicción. Escojamos G, A y B de tal forma que violen el teorema y de forma que $|G|+|B|$ sea mínimo.

En este caso, $G = AB$. Escojamos un primo p tal que $O_p(A) \nsubseteq F(G)$, donde $F(G)$ es el producto de todos los subgrupos normales nilpotentes de G. Entonces $O_p(A)O_p(B)$ no es un subgrupo normal de G. Como A normaliza a $O_p(A)O_p(B)$, entonces B no lo hace. Escojamos un primo q tal que $O_q(B)$ no normalice a $O_p(A)O_p(B)$, entonces el conmutador de $O_p(A)$ y $O_q(B)$ no es trivial. Por lo tanto, $AO_q(B)$ no es nilpotente. Por la minimalidad de G y B, tenemos que $B = O_Q(B)$. Sean $A_q = O_q(A)$, $A^* = O_{q'}(A)$ y $V = B/\Phi(B)$.

En este caso por teorema 5.2.3 de [4] tenemos que $V = C_V(A^*) \times [V, A^*]$ y A^* no centraliza B. Ahora, por teorema 5.1.4 de [4], el conmutador de $[V, A^*]$ es no trivial. Por consiguiente, la elección minimal de G y B muestra que A^* debe centralizar a $\Phi(B)$, que $C_V(A^*) = \{e\}$ y que, además, A actúa de manera irreducible en V. Luego

$$C_B(A^*) = \Phi(B) \tag{2.9}$$

y, por el Teorema 3.1.3 de [4],

$$A_q \text{ debe centralizar a } V. \tag{2.10}$$

Ya que el conmutador entre V y A^* es V tenemos que $B = [B, A^*]\Phi(B)$. Por Teorema 5.1.1 de [4] y por (2.9), debemos tener lo siguiente

$$B = [B, A^*] \text{ y } C_G(B') \subset \langle A^{*g} | g \in G\rangle \supseteq [B, A^*] = B. \tag{2.11}$$

Luego por (2.9) y (2.10), tenemos

$$[A_q, B], A^*] \subseteq [\Phi(B), A^*] = \{e\} = [\{e\}, B] = [A^*, A_q, B]. \tag{2.12}$$

Por (2.11) y el Lema 2.2.3 de [5],

$$\{e\} = [[B, A^*], A_q] = [B, A_q]. \tag{2.13}$$

Sea $\overline{A} = A/C_A(B)$ and $C = BC_A(B)$. Entonces A es un q'-grupo. Por el teorema 5.1.4, de [5], A actúa fielmente sobre V. Luego por la Proposición 1,

$$|\overline{A}| < |V| \tag{2.14}$$

pero por (2.11), $B' \subseteq Z(B)$. Ya que $C = B'(C_A(B))' \subseteq Z(C)$ y $A \in \mathscr{B}$, $|A| \geq |C|$, por (2.9) y (2.14), debemos tener

$$\begin{aligned} |A| \geq |C| &= |BC_A(B)| = |B/(B \cap C_A(B))||C_A(B)| \\ \geq |B/\Phi(B)||C_A(B)| &= |V||C_A(B)| > |\overline{A}||C_A(B)| = |A|, \end{aligned}$$

Lo que es una contradicción. Terminamos así la demostración.

Corolario 1. *Sean π un conjunto de primos, G un grupo finito π-soluble, y suponga que $O_{\pi'}(G) = \{e\}$. Entonces π contiene todos los primos divisores de $e(G)$.*

Demostración. Sea $H = O_\pi(G)$ y tomemos la $A \in \mathscr{B}(G)$. Entonces A normaliza H y $C_G(H) \subseteq H$, por el Lema de Hall y Higman. Por lo tanto, AH es un grupo ya que H es normal. Como H es subgrupo de A y A es nilpotente entonces H es nilpotente y por tanto H es soluble, y así AH es soluble. De

$$[O_\pi(AH), H] \subseteq O_{\pi'}(AH) \cap H) = \{e\},$$

tenemos $O_{\pi'}(AH) = \{e\}$. Por lo tanto, $F(AH)$ es un π-grupo. Por el teorema anterior, $AF(AH)$ es nilpotente y soluble. Así $O_{\pi'}(A)$ centraliza a $F(AH)$. Por el teorema 6.1.3 de [5], tenemos

$$C_{AH}(F(AH)) \subseteq F(AH).$$

Por lo tanto, $O_{\pi'}(A) = \{e\}$. Esto demuestra el Corolario 1.

Corolario 2. *Suponga p un primo, G un grupo finito p-soluble, y $O_{p'}(G) = \{e\}$. Entonces $e(G)$ es una potencia de p.*

Demostración. El corolario 2 es un caso especial del corolario 1.

Corolario 3. *Suponga G un grupo finito soluble. Entonces los divisores primos de $e(G)$ son los mismos que los divisores primos de $|F(G)|$.*

Demostración. Sea π es el conjunto de todos los divisores primos de $|F(G)|$ y sea σ el conjunto de todos los divisores primos de $e(G)$. Entonces, $F(O_{\pi'}G)) \subseteq O_{\pi'}(F(G)) = \{e\}$. Por lo tanto $O_{\pi'}(G) = \{e\}$. Por el Corolario 2, σ es un subconjunto de π. Tomemos un $A \in \mathscr{B}(G)$ y sea $Z = Z(O_\sigma(F(G)))$. Según el teorema B, AZ es nilpotente. Por lo tanto, $AZ = A \times Z$. En la elección de A, $\supseteq Z$. Por lo tanto $Z = \{e\}$. En consecuencia, $O_\sigma(F(G)) = \{e\}$y $\sigma = \pi$.

Los resultados anteriores nos conducen al siguiente resultado, el cual extiende el Teorema menos conocido de Burnside.

Teorema A (Glauberman)**.** *Sea G un grupo finito de orden $p^a q^b$ donde p y q son primos distintos. Supongamos además que $p^a > q^b$. Sean S un $p-$subgrupo de Sylow de G y T un $q-$subgrupo de Sylow de G. Supongamos que $e(S) > e(T)$. Entonces G posee un $p-$subgrupo normal maximal no trivial.*

Demostración. El Corolario 3 nos da que, si $O_p(G) = \{e\}$ en el Teorema A, $e(G)$ es una potencia de q. Pero entonces, según el segundo teorema de Sylow (teorema 6.9, página 123, de [8]) y la definición de $e(G)$,

$$e(G) \leq e(T) < e(S) \leq e(G),$$

lo que es una contradicción. Esto demuestra el Teorema A.

Ejemplo 1. *Sea q un primo de Fermat y V un grupo abeliano elemental de orden q^2. Entonces* $\operatorname{Aut} V$ *contiene un 2-subgrupo de Sylow A de orden $2(q-1)^2$, y*

$$|A| = 2(q-1)^2 > q^2 = |V|.$$

Ejemplo 2. *Sea p un primo de Mersenne. Sea $2^n = p+1$ y V un grupo abeliano elemental de orden 2^{np}. Entonces un pequeño cálculo muestra que*

$$|\operatorname{Aut} V|_p \geqslant |GL(p, 2^p)|_p = p^{p+1} > V.$$

Bibliografía

[1] A. Bialostocki. On the other $p^{\alpha}q^{\beta}$ theorem of burnside. *Proc. Edinburgh. Math. Soc (2)*, 30(1):41–49, 1987.

[2] Charles W. Curtis and Irving Reiner. *Representation theory of finite groups and associative algebras.* John Wiley & Sons. Inc, New York,USA, first edition, 1962.

[3] G. Glauberman. On burnside's other $p^a q^b$ theorem. *Pacific Journal of Mathematics*, 56(2), 1975.

[4] D. Gorenstein. *Finite Groups.* Chelsea Publishing Company, New York,USA, second edition, 1980.

[5] Thomas W. Hungerford. *Algebra.* Springer-Verlag. Inc, New York, USA, first edition, 1974.

[6] M.Dwan & J.Rose M. Coates. A note on burnside's other $p^a q^b$ theorem. *J. London Math. Soc. (2)*, 14(2):160–166, 1976.

[7] P. Pálfy. Small groups of automorphisms. *Bull. London Math. Soc.*, 30(4):386–390, 1998.

[8] Harvey E. Rose. *A course on finite groups.* Springer-Verlag, London, UK, first edition, 2009.

[9] Richard L. Roth. *Representación de grupos finitos. Monografías Matemáticas 8, Revista Colombiana de Matemáticas.* Universidad Nacional de Colombia, Bogotá, 1969.