UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA

La enseñanza de los números enteros desde la mirada de la teoría APOE, modalidades y métodos de enseñanza

David Esteban Tabares Cano

Universidad Nacional de Colombia

Facultad de Ciencias

Medellín, Colombia

2021

UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA

La enseñanza de los números enteros desde la mirada de la teoría APOE, modalidades y métodos de enseñanza

David Esteban Tabares Cano

Trabajo final de maestría presentado como requisito parcial para optar al título de:

Magister en Enseñanza de las Ciencias Exactas y Naturales

Director (a):

María Encarnación Ramírez Escobar
Magister en educación y desarrollo humano

Universidad Nacional de Colombia
Facultad de Ciencias
Medellín, Colombia
2021

Dedicatoria

A mi familia por apoyarme, comprenderme y ayudarme en este proceso de formación.

Agradecimientos

A la Universidad Nacional, por brindarme la oportunidad de cualificarme cada día más y poder ser un mejor profesional.

A María Encarnación Ramírez Escobar, directora de práctica, por el gran apoyo y acompañamiento que me brindó durante el desarrollo del trabajo final de la maestría.

A mis compañeros de maestría, Francy Palacio y Ernesto Zea, de quienes aprendí muchísimas cosas y quienes fueron de gran apoyo en este proceso de formación.

Resumen

La enseñanza de los números enteros desde la mirada de la teoría APOE, modalidades y métodos de enseñanza

La presente monografía de compilación hace referencia a la enseñanza de los números enteros a partir de métodos y modalidades de enseñanza, desde la mirada de la teoría Acción, Proceso, Objeto y Esquema (APOE). Esta teoría nace del trabajo de Dubinsky y su preocupación por los procesos de aprendizaje en matemáticas.

Para esto, se diseña una descomposición genética del concepto de número entero, haciendo hincapié en la modalidad de clases prácticas y desde la mirada de la teoría APOE, se resaltan métodos de enseñanza como; aprendizaje colaborativo y aprendizaje basado en problemas. La implementación de estos métodos de enseñanza tiene como finalidad, que los estudiantes realicen construcciones mentales, partiendo de la siguiente noción: El conocimiento se construye mediante acciones sobre los objetos, que al ser interiorizadas se constituyen en procesos, que mediante una forma de construcción se encapsulan en objetos. Con intención de que los estudiantes puedan hacer construcciones mentales adecuadas, basado en la descomposición genética del concepto de número entero.

Palabras clave: Números enteros, Teoría APOE, Modalidades de enseñanza, Métodos de enseñanza.

Abstract

The teaching of integers from the point of view of APOE theory, teaching methods and modalities

This compilation monograph refers to the teaching of integers from teaching methods and modalities, from the perspective of the Action, Process, Object and Scheme theory (APOS). This theory stems from Dubinsky's work and his concern with learning processes in mathematics.

For this, a genetic decomposition of the whole number concept is designed, emphasizing the modality of practical classes and from the point of view of APOS theory, teaching methods such as; collaborative learning and problem-based learning. The implementation of these teaching methods is intended for students to make mental constructions, starting from the following notion; Knowledge is built through actions on objects, which when internalized become processes, which through a form of construction are encapsulated in objects. With the intention that students can make adequate mental constructions, based on the genetic decomposition of the whole number concept.

Keywords: Whole numbers, APOS theory, teaching modalities, teaching methods.

Contenido

Lista de figuras

Lista de tablas

Introducción

Esta monografía se enfoca en modalidades y métodos de enseñanza que, a través de los mecanismos mentales, puedan favorecer el proceso de construcción del concepto de números enteros y sus operaciones. Partiendo de la teoría Acción, Proceso, Objeto y Esquema (APOE). Nace del trabajo de Dubinsky y su preocupación por los procesos de aprendizaje en matemáticas.

Apropiarse del concepto de números enteros es una gran preocupación de los docentes en la actualidad, las prácticas educativas no logran ser coherentes con los conceptos teóricos y pueden crear en el estudiante esquemas cognitivos y conceptuales inadecuados.

La enseñanza y el aprendizaje de los números enteros ha sido el objeto de múltiples estudios a nivel nacional e internacional, destacándose investigaciones que dan cuenta de diferentes dificultades en dichos procesos y la necesidad de generar estrategias que permitan mejorar su enseñanza y aprendizaje.

También se debe tener en cuenta que durante nuestra vida necesitamos constantemente realizar operaciones matemáticas básicas con números enteros en situaciones cotidianas como ir de compras, manejar la propia economía entre otras actividades. Por tal motivo es muy importante que todos los estudiantes en el transcurso de su vida escolar tengan dominio y comprendan el concepto de números enteros.

Los números enteros hacen parte de esos conceptos matemáticos que generan dificultad en su comprensión en el aula, a pesar de que de su conceptualización depende el manejo adecuado de diferentes expresiones algebraicas y de otro tipo de objetos matemáticos asociados a la disciplina. Es importante que el docente reflexione y analice cuales son los inconvenientes en el aprendizaje de estos y como solucionarlos.

Es probable que uno de los factores por los cuales los estudiantes presentan dificultades en el aprendizaje de los números enteros sea la forma descontextualizada en que se enseña. Sin tener en cuenta los diferentes métodos y metodologías de enseñanza que existen.

En la actualidad el estudiante ha evolucionado en su forma de aprender partiendo de sus propios intereses y mediados por el contexto, el estudiante ha incorporado la tecnología a su estilo de vida, las clases teóricas y métodos tradicionales de enseñanza de la matemática se han quedado atrás y los estudiantes las encuentran poco motivadoras y aburridas.

Se evidencia la necesidad de usar nuevas estrategias didácticas, que permitan desarrollar en los estudiantes las competencias necesarias para operar cantidades enteras sin mayores dificultades y lograr la comprensión del concepto de número entero.

Este trabajo se ha organizado por capítulos de la siguiente manera: El capítulo I hace referencia al diseño teórico con los siguientes componentes: Selección y delimitación del tema; Planteamiento del Problema; Descripción del problema y Formulación de la pregunta; Justificación; Objetivos, Objetivo General y Objetivos Específicos. En el capítulo II se puede encontrar el Marco referencial con los siguientes componentes: Referente Teórico; Referente Conceptual-Disciplinar; Referente Legal con sus contextos y Marco Espacial. Los cuales se centran en la La enseñanza para la comprensión del concepto de número entero y sus operaciones, a partir de la teoría APOE.

Se continúa con un Capítulo III que contiene el diseño metodológico para un tipo de investigación en profundización con los siguientes componentes: metodología de la escritura de la monografía. En el Capítulo IV y V denominado desarrollo y discusión monografía, se realiza un trabajo con el interés de identificar, analizar, valorar e interpretar el cuerpo de conocimientos sobre modalidades y métodos de enseñanza de operaciones con números enteros, enfocada en el constructivismo social específicamente en la teoría APOE de Dubinsky, la cual se basa en las ideas de abstracción reflexiva de Piaget. Aquí se realizará una revisión bibliográfica, que haga referencia a métodos y modalidades de enseñanza, pero restringiendo su examen a los procesos de enseñanza y aprendizaje de operaciones básicas con números enteros. Se pretende contrastar esos métodos y modalidades de enseñanza que puedan orientar la enseñanza de operaciones de los números enteros, que favorecen la adquisición de esquemas conceptuales, en el desarrollo de las operaciones básicas con números enteros.

1 CAPÍTULO I. DISEÑO TEÓRICO

1.1 Selección y delimitación del tema

La enseñanza para la comprensión del concepto de número entero y sus operaciones, a partir de la teoría APOE.

1.2 Planteamiento del problema

1.2.1 Descripción del Problema

Según el MEN el énfasis en el estudio de los números a cambiando a través de las diferentes propuestas curriculares. En la actualidad el enfoque en el estudio de los sistemas numéricos es el desarrollo del pensamiento numérico. Una de las herramientas para desarrollar dicho pensamiento son los conjuntos numéricos, en particular el conjunto de los números enteros.

Desde esta mirada Mcintosh (1992) contempla y afirma que; "el pensamiento numérico se refiere a la comprensión general que tiene una persona sobre los números, las operaciones, la habilidad y la inclinación a usar esta comprensión en formas flexibles para hacer juicios matemáticos, desarrollar estrategias útiles al manejar números y operaciones". Siendo así, se refleja una inclinación para el uso de números y métodos cuantitativos como medios para comunicar, procesar e interpretar información, se reconoce que los números enteros son útiles y necesarios en la vida cotidiana.

La manera como se han estado enseñando números enteros en las instituciones educativas podría contribuir o no a la adquisición del pensamiento numérico. Los estudiantes en los niveles de básica y media de bachillerato presentan dificultades en el desarrollo de pensamiento numérico, específicamente en las operaciones básicas con números enteros. Estas dificultades se fundamentan en los resultados deficientes en las pruebas de estado (Pruebas SABER) que se han realizado en los últimos años. Uno de los factores por los cuales los estudiantes podrían presentan estas dificultades en el aprendizaje de los números enteros es la forma tradicional en que se enseña.

Actualmente el estudiante ha incorporado la tecnología y la interacción con los demás, a su estilo de vida. Los dispositivos electrónicos se han convertido en una parte fundamental de su cotidianidad. Lo cual nos invita, en palabras de (Restrepo 2004), a transformar la práctica y buscar mejorarla permanentemente por medio de una deconstrucción, reconstrucción y evaluación de nuestra de práctica pedagógica. Lo anterior con ayuda del conocimiento disciplinar y pedagógico, basados en los Estándares Básicos de Competencias, Lineamientos Curriculares y los referentes de calidad.

Como ya se mencionó, los estudiantes han venido presentado dificultades en la comprensión y aplicación de operaciones con números enteros. Algunas de las dificultades que manifiestan los estudiantes se presentan a continuación:

- No diferencian entre la sustracción y el concepto de número negativo en su representación verbal y simbólica.
- Plantean inadecuadamente una expresión aritmética.
- Interpretan la resta de números negativos como la acción de quitar el sustraendo al minuendo.
- Pensar que siempre el minuendo debe ser mayor que el sustraendo.
- Asegurar que la respuesta a una operación no puede dar negativa.

Por lo anterior se evidencia la necesidad de usar nuevas estrategias didácticas, que permitan desarrollar en los estudiantes las competencias necesarias para operar cantidades enteras sin mayores dificultades y lograr la comprensión del concepto de número entero.

1.2.2 Formulación de la Pregunta

Por los motivos expuestos anteriormente, la presente monografía de compilación pretende establecer una propuesta didáctica en torno a la enseñanza de los números enteros, por ello, se plantea la siguiente pregunta:

¿Qué modalidades y métodos de enseñanza van a potenciar al desarrollo del pensamiento numérico para favorecer los procesos en el aprendizaje y comprensión del concepto de número entero y de sus operaciones básicas, desde la mirada de la teoría APOE?

1.3 Justificación

Existen diversas propuestas que promueven la enseñanza de operaciones con números enteros. Sin embargo, cuando se comienza a enseñar matemáticas quizás no se enfatiza en la importancia que tienen las operaciones de números enteros para poder resolver otro tipo de situaciones posteriores como ecuaciones algebraicas en octavo y cálculo en los últimos años de educación media.

Es evidente que en la actualidad el estudiante ha incorporado la tecnología y la interacción con los demás a su estilo de vida. Los dispositivos electrónicos se han convertido en parte fundamental de su cotidianidad.

Es probable que uno de los factores por los cuales los estudiantes presentan dificultades en el aprendizaje de los números enteros sea la forma descontextualizada en que se enseña. Sin tener en cuenta los diferentes métodos y metodologías de enseñanza que existen.

Se espera que este trabajo sirva para fortalecer la comprensión de las operaciones básicas en el conjunto de los números enteros desde la mirada de la teoría APOE. Favoreciendo el desarrollo de los procesos generales: formular y resolver problemas, usar diferentes registros de representación simbólica, usar la argumentación, la prueba y la refutación, dominar procedimientos y algoritmos y actitudes (aprecio, seguridad y confianza en la solución de problemas).

Por otro lado, esta monografía podrá contribuir enormemente en los procesos de enseñanza y aprendizaje de operaciones con números enteros, generando ambientes más acordes a la actualidad, que sean interesantes para los estudiantes y docentes.

1.4 Objetivos

1.4.1 Objetivo General

Elaborar una monografía de compilación sobre la enseñanza de los números enteros a partir de métodos y modalidades de enseñanza, desde la mirada de la teoría Acción, Proceso, Objeto y Esquema (APOE).

1.4.2 Objetivos Específicos

- Realizar una revisión bibliográfica que haga referencia a métodos y modalidades de enseñanza.

- Contrastar métodos y modalidades de enseñanza, que favorecen la adquisición de esquemas conceptuales, en el desarrollo de las operaciones básicas con números enteros.

- Construir una monografía que pueda ser divulgada como una herramienta para la enseñanza de los números enteros, la cual sirva como referente didáctico desde la mirada de la teoría (APOE).

2 CAPÍTULO II. MARCOS REFERENCIALES

2.1 Marco Teórico

Apropiarse del concepto de números enteros es de gran preocupación de los docentes en la actualidad, las prácticas educativas no logran ser coherentes con los conceptos teóricos y pueden crear en el estudiante esquemas cognitivos y conceptuales inadecuados.

Por lo dicho en el apartado anterior, esta monografía se enfoca en modalidades y métodos de enseñanza que, a través de los mecanismos mentales, puedan favorecer el proceso de construcción del concepto de números enteros y sus operaciones, partiendo de la teoría Acción, Proceso, Objeto y Esquema (APOE). Esta teoría nace del trabajo de Dubinsky y su preocupación por los procesos de aprendizaje en matemáticas.

Para el desarrollo de esta teoría, Dubinsky se ha basado en las ideas de abstracción reflexiva de Piaget. Estas ideas tratan del mecanismo de construcciones mentales en el desarrollo del pensamiento, por el cual las estructuras lógico-matemáticas se desarrollan en la mente del estudiante (reflexionar reorganizar y reconstruir). La abstracción reflexiva desde la mirada de Piaget puede dar a entender el desarrollo que tiene un nuevo concepto matemático, el cual es un proceso que conlleva la construcción de estructuras cognitivas a partir de estructuras previamente disponibles (conocimientos previos).

Se usa la abstracción reflexiva para describir cómo un individuo logra ciertas construcciones mentales sobre un concepto determinado, partiendo de la siguiente idea del conocimiento matemático: *"El conocimiento matemático de un individuo es su tendencia a responder a las situaciones matemáticas problemáticas en un contexto social, y construyendo acciones, procesos y objetos y organizándolos en esquemas con el fin de manejar las situaciones y resolver los problemas" (Dubinsky & McDonald, 2001, p. 276).*

En síntesis, las construcciones mentales (acción, proceso, objeto y esquema) y mecanismos mentales (interiorización, coordinación, encapsulación y generalización) permiten delimitar y describir, el camino hacia la construcción de un concepto matemático en la mente de un estudiante.

Siguiendo las ideas de la teoría APOE, a esas construcciones y mecanismos mentales se les denomina descomposición genética, la cual participa como eje central de dicha teoría pues describe las construcciones mentales y los mecanismos de construcción. Estos permiten estructurar el concepto matemático y también podrá orientar a los docentes en la organización del contenido a enseñar y en el diseño de actividades que puedan contribuir en la construcción de los esquemas mentales para que el estudiante desarrolle el concepto de números enteros y sus operaciones.

Por lo anterior se hace una breve descripción de dichos componentes:

2.1.1 Construcciones Mentales

Entendiendo las construcciones como esas transformaciones mentales que realizan los estudiantes cuando resuelven una tarea y las mismas les permiten obtener un significado de ellas.

Acción: Una acción es equivalente a una operación mental o física. Es esa transformación de objetos que percibe el estudiante. Cuando estas acciones se interiorizan a través de la repetición de la acción (podría ser algorítmica) esto deja de ser algo externo y se convierte en una construcción interna del estudiante, lo que podemos llamar proceso. Las acciones permiten que los estudiantes realicen un acercamiento con los objetos matemáticos de estudio, esto se logra a través de su experiencia manipulando el objeto matemático. El estudiante a través de la repetición de la acción tendrá la concepción del concepto de números enteros y sus operaciones, así al resolver una operación que involucre el manejo de números enteros, lo hace siguiendo los algoritmos correspondientes.

Proceso: Un proceso se da cuando el estudiante es capaz de reflexionar sobre el concepto matemático, quiere decir que es consciente de él y puede realizar acciones internas. Cuando el estudiante realice operaciones con números enteros él será capaz de romper con algunas ideas que se encuentran ligadas al conocimiento que posee de la aritmética práctica con números naturales. Así las cosas, realizar operaciones con cantidades negativas "*Cuando el estudiante puede reflejarse en un proceso y transformarlo por medio de una acción, el proceso se considera como encapsulado para convertirse en un objeto (Meel David E, 2003)*"

Objeto: Cuando un estudiante se da por enterado y es consciente del proceso en su totalidad y este logra reflexionar sobre los algoritmos presentados en determinado proceso, es capaz de observar las transformaciones que actúan sobre él. Entonces se puede decir, en términos de Dubinsky, que ha encapsulado tal proceso como un objeto cognitivo.

Ese objeto se construye a partir de un proceso cuando el estudiante se da cuenta del proceso en su totalidad, cuando reflexiona sobre las operaciones aplicadas a un determinado proceso y observa que las transformaciones pueden actuar sobre él, entonces ha encapsulado tal proceso como un objeto cognitivo.

Si un estudiante tiene la concepción del concepto de números enteros y sus operaciones puede enfrentarse a una situación problema, reconocerla y seleccionar una técnica apropiada, llegando a establecer relaciones entre procedimientos que le permitan encontrar la solución del problema. El ciclo de la teoría APOE se completa cuando las acciones, los procesos y los objetos se pueden organizar en ‘esquema’.

Esquema: Esta es la última construcción mental que hace el estudiante pues es la colección de acciones, procesos, objetos y otros esquemas que están vinculados por algunos principios generales o preconceptos. Lo anterior para formar un concepto en la mente del estudiante, el cual puede aplicarse a una situación problemática que involucra ese concepto.

Dubinsky propone que un ‘esquema’ es más que una entidad estática debido a que continúa siendo inseparable de su propia evolución continua y dinámica. La relación de estos permite que los estudiantes realicen una construcción mental para comprender un determinado concepto matemático. Cumpliendo con este ciclo los estudiantes podrían resolver problemas en los que intervienen cantidades positivas y negativas en procesos de comparación, transformación y representación.

2.1.2 Mecanismos Mentales

Interiorización: Esta se logra cuando se da la transferencia de algo externo a interno, en otras palabras, que el estudiante se apropie del proceso. Por medio de este mecanismo dos o más procesos pueden coordinarse para generar nuevos procesos

Coordinación: Cuando se logra la interiorización de los procesos se puede llegar a una coordinación de los mismos. La coordinación de los procesos múltiples relacionados da como resultado la construcción de nuevos procesos.

Encapsulación: Consiste en la conversión revertida que se puede dar de un esquema a un objeto. Dentro de la teoría APOE se presenta este mecanismo de encapsulación y también se puede presentar una desencapsulación. Lo que nos quiere decir es que cuando un estudiante puede reflejarse en un proceso y transformarlo por medio de una acción, dichos procesos se consideran como encapsulados para convertirse en un objeto. A partir de la encapsulación se presenta el proceso contrario: la reversión, que consiste en desencapsular un objeto invertir el mecanismo que lo generó, lo que permite que el estudiante pueda devolverse sobre el proceso siempre que lo requiera.

Generalización: Podemos entender la generalización como la capacidad que adquiere el estudiante para poner en práctica los esquemas que ha formado en su mente. En este mecanismo los esquemas no cambian, pero otros objetos se pueden asimilar por un esquema para poderlos contextualizar en otros contextos. En otras palabras, se lograría una abstracción reflexiva.

De acuerdo con los principios antes mencionados se presentan las siguientes actividades para la descomposición genética del concepto de números enteros.

2.2 Marco Conceptual

El concepto de número entero conlleva una serie de elementos epistemológicos que lo hacen complejo, entre ellos están: la aceptación de la existencia de las cantidades negativas, su comprensión y significación, y su tratamiento matemático. Existe una dificultad para dotar de significado a las cantidades negativas.

Se entiende entonces por este conjunto numérico la unión de los números naturales, el cero, y las cantidades negativas. Existen tres clases de enteros: Los enteros positivos; que equivalen a todos los naturales, el entero nulo igual al número cero, y los enteros negativos.

Cuando se comienza a enseñar matemáticas, probablemente no se enfatiza en la importancia de la negatividad, como elementos fundamentales en las construcciones mentales del concepto de número signado, siendo este, uno de los más difíciles de aprender por los estudiantes. Lo anterior tiene como resultado que los estudiantes tengan unas construcciones mentales limitadas del concepto de números enteros y sus operaciones básicas.

La enseñanza de los números enteros ha estado situada hacia los grados sexto o séptimo de la educación básica secundaria. Pero los estudiantes al iniciar el grado octavo aún no han comprendido en su totalidad el concepto de número entero. A pesar de que los estudiantes en su vida cotidiana se ven enfrentados a situaciones que implican una primera aproximación a este sistema numérico; cuando juegan a perder ganar y quedar debiendo, en las casas sus padres tienen deudas, hacen préstamos, pagan acreencias, en las noticias información estadística sobre la economía del país, las tasas de interés, etc.

Los números enteros son primordiales para conceptos de enseñanza posteriores como el algebra, cálculo, la trigonometría, entre otros. En general en la vida cotidiana los números enteros tienen alta aplicabilidad en aspectos como: las temperaturas, las ganancias y las pérdidas, ubicaciones sobre el mar y bajo el mar, líneas de tiempo, entre otras. Lo anterior también deja ver que los números enteros son aplicables a diferentes áreas el conocimiento como la física, biología, geografía etc.

Es común encontrar que los estudiantes al enfrentarse a situaciones que requieran del uso de los números enteros los asuman como si se tratara de números naturales. También la marcada dependencia de la ley de los signos es otro asunto que impide un manejo adecuado de las diferentes interpretaciones del signo menos. Por ejemplo: Para encontrar el resultado de -2 -3 algunos estudiantes no dudan en afirmar que es +6 luego de multiplicar los números dados y sus correspondientes signos.

El estudiante a través del tiempo ha tenido dificultades en la conceptualización y el dominio de los números enteros. Algunos de los interrogantes que pueden surgir por parte de los estudiantes ante el tratamiento de los números enteros, se dan en su mayoría al no entender el propósito del número signado. Parafraseando a Gonzales J.L 1990, existe incoherencia y disfunciones en la enseñanza de los números enteros, como un ejemplo se evidencia una insuficiencia del proceso didáctico del paso de la aritmética al algebra, en el sentido de contemplar adecuadamente las relaciones de los números enteros y las nociones algebraicas elementales.

Por último, desde un contexto nacional, los Lineamientos Curriculares (MEN, 1988), Estándares Básicos de Competencias (MEN, 2006), enfocados en el desarrollo de Competencias Matemáticas en los niños; el enfoque por procesos (formular, y resolver problemas; modelar procesos y fenómenos de la realidad; comunicar, razonar, y formular comparar y ejercitar procedimientos, y algoritmos), buscando desarrollar habilidades, más allá de contenidos, el planteamiento de cinco tipos de pensamiento matemático (pensamiento numérico y los sistemas numéricos, pensamiento espacial y los sistemas geométricos, pensamiento métrico y sistemas de medidas, pensamiento aleatorio y sistema de datos, pensamiento variacional y los sistemas algebraicos y analíticos) muestran que los números enteros se enmarcan en el fortalecimiento del pensamiento numérico.

Los números enteros, analizados desde los lineamientos curriculares permiten la comprensión de las relaciones entre los números, sus diferentes representaciones, el uso de los números y las operaciones en la resolución de problemas. También desde estos lineamientos, se deben tener presente en el aprendizaje de las matemáticas; la resolución y planteamiento de problemas, comparación y ejercitación de procedimientos, el razonamiento, la comunicación, la modelación. A todos ellos se les denomina procesos generales.

Desde los Derechos Básicos de Aprendizaje propuestos por el Ministerio de Educación Nacional de Colombia se pretende que el estudiante en sus primeros años de básica secundaria comprenda el significado de los números negativos en diferentes contextos, represente números positivos y negativos en la recta numérica, comprendiendo la simetría con respecto al 0, y que determine con números signados la posición relativa frente a un punto de referencia.

Se espera que los estudiantes utilicen los números enteros y sus operaciones para describir situaciones de su vida cotidiana, las cuales requieren ser representadas a partir de un punto de referencia.

2.3 Marco legal o normativo

Tabla 2.1

Normograma

En el siguiente normograma se presentan las normas, decretos, resoluciones, de local, regional, nacional e internacional que rigen actualmente en relación con la enseñanza de las Matemáticas.

	Norma	Contexto normativo
Decreto 1002 de 1984 .	Salen a la luz los programas de matemáticas de la renovación curricular, estructura el currículo alrededor de cinco sistemas: numéricos, geométricos, métricos, de datos y lógicos.	Con relación a esta propuesta se establece la importancia del sistema numérico para el aprendizaje de la matemática,
Artículo 1 Declaración Mundial sobre Educación para Todos. **Unesco 1990**	Cada persona deberá poder contar con posibilidades educativas para satisfacer sus necesidades de aprendizaje básico. Esto abarca tanto las herramientas esenciales para el aprendizaje (como la lectura y la escritura, la expresión oral, el cálculo, la solución de problemas), como los contenidos mismos del aprendizaje (conocimientos teóricos y prácticos, valores y actitudes) necesarios para que los seres humanos puedan sobrevivir, desarrollar plenamente sus capacidades, vivir y trabajar con dignidad, participar plenamente en el desarrollo, mejorar la calidad de vida, tomar decisiones fundamentales y continuar aprendiendo.	En concordancia con este artículo la propuesta busca satisfacer la necesidad de aprendizaje básico en el cálculo y la solución de problemas, necesarios para el desarrollo pleno, individual y social, la toma de decisiones asertivas y la construcción de país.
La Ley General de Educación en **1994**	Se reestructura y organiza el servicio educativo, se formulan los PEI, normativa frente a evaluación y la promoción La Ley General de Educación en 1994, se	Se establece la obligatoriedad de enseñanza de algunas áreas, incluida

	reestructura y organiza el servicio educativo, se formulan los PEI, normativa frente a evaluación y la promoción (Decreto 1860 de 1994)., **se dictan los Lineamientos Curriculares para cada una de las áreas.**	matemáticas. Se establece el cálculo y la solución de problemas, como aprendizajes mínimos que una persona requiere para el desarrollo pleno de sus capacidades.
Estándares Básicos de Competencias **(2006)**	Los Estándares Básicos de Competencias se expiden en el 2006, en los que se mantiene la estructura curricular propuesta en los lineamientos curriculares, se introduce la idea de competencia en contextos que pueden ser nuevos y retadores, que requieren de ambientes de aprendizaje enriquecidos por situaciones problema significativas y comprensivas" (Estándares Básicos de Competencias, p. 49).	Se busca aplicación de los contenidos en su entorno, ubicándolo en un contexto global, facilitando la asimilación y promoviendo la sana convivencia al realizar trabajos colaborativos. Desarrollo de razonamiento cuantitativo desde la aritmética de los números enteros
La Ley 1324 de julio 13 de **2009**	La Ley 1324 de julio 13 de 2009, por la cual se fijan los parámetros y criterios para organizar el sistema de evaluación de resultados de la calidad de la educación. Con el decreto 1290, incorpora las evaluaciones de las pruebas internacionales y nacionales.	Desde comienzos de la década del noventa, el Estado colombiano ha implementado la aplicación de evaluaciones masivas a través de las denominadas pruebas SABER.
Derechos Básicos de	El Ministerio de Educación Nacional (MEN) presenta los DBA como un conjunto de	Determinar los DBA que debe conocer y dominar

Aprendizaje (DBA)	aprendizajes estructurantes que han de aprender los estudiantes en cada uno de los grados de educación escolar, desde transición hasta once, en el área de matemáticas.	el estudiante de 8º en la resolución de problemas en el conjunto de los números enteros.

2.3 Marco espacial o contextual

Esta monografía se inspira en estudiantes del grado octavo de la **Institución Educativa Fe Y Alegría Granizal**, ubicada en el barrio Granizal del municipio de Medellín. Este barrio está estratificado en los niveles 0, 1 y 2. La Institución cuenta con una población superior a los 1000 estudiantes, ofreciendo educación preescolar, básica y media técnica para niños y jóvenes.

La Institución tiene como principio fundamental promover en los estudiantes el pensamiento autónomo y reflexivo, que posibilite el reconocimiento de sí mismo y del otro, para el fortalecimiento de los procesos de convivencia, competencias cognitivas y laboral.

Ofrece una educación integral e inclusiva que privilegia la construcción del pensamiento crítico basado en valores y generando un ambiente de sana convivencia, para una preparación académica y personal que contribuya a la formación de ciudadanos técnicos laborales competentes, con principios humanísticos acordes a las exigencias de nuestra sociedad.

Esta propuesta podría tener un impacto positivo en los resultados de los estudiantes en las pruebas saber, donde en el último cuatrienio han arrojado bajos resultados. Además podría contribuir en el aprendizaje de conceptos posteriores como el paso de la aritmética al algebra, en el sentido de contemplar adecuadamente las relaciones de los números enteros y las nociones algebraicas elementales.

3 CAPÍTULO III METODOLOGÍA.

Esta propuesta se presentará como una monografía de compilación, con el interés de identificar, analizar, valorar e interpretar el cuerpo de conocimientos sobre modalidades y métodos de enseñanza de operaciones con números enteros, enfocada en el constructivismo social específicamente en la teoría Apoe de Dubinsky, la cual se basa en las ideas de abstracción reflexiva de Piaget.

Se realizará una revisión bibliográfica que haga referencia a métodos y modalidades de enseñanza, restringiendo su examen a los procesos de enseñanza y aprendizaje de operaciones básicas con números enteros.

Se pretende contrastar esos métodos y modalidades de enseñanza que puedan orientar la enseñanza de operaciones de los números enteros, que favorecen la adquisición de esquemas conceptuales, en el desarrollo de las operaciones básicas con números enteros.

La enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en general han sido objeto de múltiples estudios, destacándose algunas investigaciones que dan cuenta de la necesidad de mejorar las estrategias de clase. Este escrito monográfico está centrado en la comprensión significativa del concepto de número entero y sus operaciones.

Se realizará un ejemplo de construcción de descomposición genética de los mismos, que permitan que los estudiantes construyan esquemas conceptuales a partir del ciclo APOE. Teniendo en cuenta la significación de los conceptos contextualizados a la cotidianidad, la importancia de los conocimientos previos, y la importancia del protagonismo compartido del docente y estudiante.

Posteriormente se hará la interpretación de los hallazgos, con el fin mostrar las relaciones existentes entre los hechos encontrados, las teorías, programas y bibliografía analizada. Se espera que lo expuesto en esta monografía, sirva para interpretar estrategias cognitivas en el aprendizaje de los procesos de generalización con ayuda de modalidades y métodos de enseñanza de operaciones con números enteros, que impacte positivamente en la enseñanza de los términos y conceptos básicos de los números enteros, enseñados en los primeros años de la educación básica secundaria y fortalecer el pensamiento numérico en los estudiantes.

También se espera que este trabajo contribuya a los propósitos de adaptar una nueva enseñanza de la matemática conforme a los retos del presente siglo, con el auge de las pedagogías emergentes, la cuales propician ese cambio que la escuela requiere y el presente exige.

4 CAPÍTULO IV DESARROLLO

4.1 Modalidades y métodos de enseñanza

4.1.1 Modalidades de enseñanza

Al hablar de Modalidad nos referimos a un procedimiento o una forma, aquello que es desarrollado bajo una determinada modalidad, respeta ciertas reglas y mecanismos.

Se pueden considerar como modalidades de enseñanza los distintos escenarios donde tienen lugar las actividades a realizar por el profesorado y el alumnado a lo largo de un curso, se diferencian entre sí, en función de los propósitos de la acción didáctica, las tareas a realizar y los recursos necesarios para su ejecución. (Mario de Miguel Díaz, 2005)

Conocer sobre modalidades de enseñanza se hace necesario en el ejercicio de la docencia desde el análisis del plan de estudios. Mario de Miguel Díaz junto a su equipo de investigación en la universidad de Oviedo, describen algunas modalidades de enseñanza que son utilizadas en las aulas de clase, sin embargo, en este escrito monográfico se hace hincapié en dos modalidades: clases teóricas y clases prácticas, que son comúnmente utilizadas en la enseñanza de las matemáticas, específicamente en la enseñanza de números enteros.

4.1.1.1 Clases teóricas

Las clases teóricas son muy comunes en la enseñanza sobre todo en la enseñanza de números enteros. Es una de las modalidades más utilizadas por los docentes, consciente o inconscientemente.

Se conoce como clase teórica; "*una modalidad organizativa de la enseñanza en la que se utiliza fundamentalmente como estrategia didáctica la exposición verbal, por parte del profesor de los contenidos sobre la materia objeto de estudio*". Esta estrategia didáctica puede ser utilizada de diferentes formas y medios según el contexto, pero en general su objetivo es hablar a los estudiantes de un determinado contenido, una acción donde su protagonista es el profesor.

Por lo dicho anteriormente resulta más cómodo para los docentes, sobre todo los de matemáticas utilizar esta modalidad para impartir sus cursos o clases, pues solo requieren de su oratoria y de muy pocos recursos. De ahí que sea común cuando se enseñan operaciones con números enteros caer en esta modalidad, sobre todo por la facilidad en recursos.

Entre los fines más representativos de las clases teóricas resaltan los siguientes: exponer los contenidos básicos relacionados con el tema objeto, explicar la relación entre los fenómenos para facilitar su comprensión y aplicación, efectuar demostraciones de hipótesis y teoremas, presentación de experiencias en las que se hace la ilustración de una aplicación práctica de los contenidos.

En conclusión, las clases teóricas son una estrategia organizativa para dar información a los estudiantes, entre otros fines didácticos.

Para impartir las clases teóricas es muy utilizado el método expositivo o lección magistral, como es mayormente conocido, pero no es la estrategia o método más utilizada en las clases teóricas, también se da; el estudio de casos y la resolución de problemas.

Desde la gestión de una clase teórica, cada docente es autónomo de esta, pero debe dar cumplimiento a unas intenciones u objetivos de clase, contenido expositivo por parte del docente, la *recepción y registro de la información por el alumno.* Y la Evaluación *del aprendizaje de los alumnos y de la actividad docente* (Mario de Miguel Díaz, 2005). Las clases teóricas con una adecuada organización y planificación sirven para activar procesos mentales en los estudiantes.

Es importante que el docente reflexione sobre su práctica para lograr un aprendizaje eficaz, algo que se da muy poco cuando se utiliza esta modalidad en la enseñanza de las operaciones básicas con números enteros. Las clases teóricas suelen ser muy cuestionadas por los estudiantes, no sólo por potenciar escasamente el aprendizaje, sino también por utilizar en el desarrollo de las mismas una metodología poco motivadora.

4.1.1.2 Clases prácticas

Las clases prácticas son una modalidad organizativa que a diferencia de la anterior se desarrollan actividades de aplicación de los conocimientos a situaciones concretas. Dentro de las clases prácticas se puede encontrar: las prácticas de laboratorio, prácticas de campo, clases de resolución de problemas, prácticas de informática, enfoque STEM, etc., en general tienen como finalidad mostrar a los estudiantes como deben actuar.

Las clases prácticas se pueden realizar tanto en aulas, laboratorios, o también en espacios externos. De ahí surgen unas submodalidades como: clases prácticas de aula, clases prácticas de laboratorio, y clases prácticas de campo. En las clases prácticas se hacen participes diferentes recursos didácticos audiovisuales y relacionados con las tics, lo cual da paso a aplicaciones prácticas y contextuales de los contenidos. Esta modalidad es poco utilizada, porque requiere una mayor planificación por parte del docente, y una mayor utilización de recursos de diferentes tipos.

En las clases teóricas el protagonismo siempre lo tiene el profesor, puesto que en la metodología didáctica más utilizada en esa modalidad son las clases expositivas, en contraste con las clases prácticas, existe un protagonismo compartido entre profesor y estudiante.

En estas clases el profesor puede adoptar diversos grados de participación: desde un mayor protagonismo si efectúa demostraciones de aplicaciones concretas de conocimientos previos, resuelve problemas o ejercicios modelo, muestra el funcionamiento y utilización de instrumentos o aparatos, etc., o de un menor protagonismo si su función es la de asesorar y supervisar el trabajo que desarrollan los estudiantes tras sus explicaciones. (Mario de Miguel Díaz, 2005)

Esta modalidad permite y es apropiada para desarrollar diversos métodos de enseñanza como la resolución de problemas, aprendizaje basado en problemas (ABP), estudios de caso, aprendizaje cooperativo, etc. Dependiendo del o los métodos que sean pertinentes para cada contexto, dependerán los roles que asuman tanto el profesor como el estudiante para la enseñanza aprendizaje de operaciones básicas con números enteros.

4.1.2 Métodos de enseñanza

Los métodos de enseñanza hacen referencia a el camino lógico para llegar al aprendizaje, se entiende ese método como el conjunto de decisiones sobre los procedimientos y recursos que se van a utilizar para dar una clase.

Los diferentes métodos de enseñanza están ligados a fases o pasos en una secuencia temporal ajustada según el contexto y finalidad de la clase. También intervienen en estos métodos, el contenido y las particularidades de los sujetos.

En conclusión, cuando hablamos de método nos referimos al accionar didáctico que debe ser coherente con los objetivos planteados para el desarrollo de una clase o curso. No obstante se debe responder como lo menciona Díaz, 2005 a intenciones explícitas: *"las competencias que el estudiante debe adquirir y/o desarrollar en el proceso enseñanza-aprendizaje a través de los contenidos pertinentes de la materia. Pero debe al mismo tiempo adecuarse a la situación real del estudiante, partiendo de su desarrollo cognitivo y promoviendo que aprenda significativamente".*

En la actividad docente es tan importante la modalidad como el métodos de enseñanza que se utilice. El desconocimiento de las modalidades y métodos de enseñanza llevan a los docentes inconsciente o conscientemente a las llamadas clases magistrales en todo momento de sus prácticas de aula.

4.1.2.1 Estudio de casos

El estudio de casos según su definición es el *análisis intensivo y completo de un hecho, problema o suceso real con la finalidad de conocerlo, interpretarlo, resolverlo, generar hipótesis, contrastar datos, reflexionar, completar conocimientos, diagnosticarlo y, en ocasiones, entrenarse en los posibles procedimientos alternativos de solución.* (Mario de Miguel Díaz, 2005)

El análisis de ejemplos tomados de la realidad permite una alianza entre la teoría y la práctica, mediante un proceso de reflexión que podría convertirse en un aprendizaje significativo. Con este método se busca una comprensión e interpretación del concepto a estudiar al igual que los posibles pasos o procedimientos para su solución.

El proceso en el estudio de casos consiste en la presentación de un caso concreto por parte del profesor para ser estudiado según una estructura organizativa previamente planeada. Trabajando con este método, los estudiantes desarrollan habilidades de trabajo en equipo, capacidad de trabajo autónomo y pensamiento crítico. Para la buena ejecución de este método de enseñanza los estudiantes deben hacer un estudio previo del caso y, durante el proceso, deben analizar los detalles del mismo, buscar alternativas de solución según el contexto. Así, a través del estudio del caso, desarrollan su capacidad de identificar situaciones problemáticas de la vida cotidiana, con la capacidad de buscar caminos para resolverlas.

4.1.2.2 Resolución de ejercicios y problemas

En este método tenemos que son situaciones en las que se les pide a los estudiantes que desarrollen las soluciones adecuadas mediante la ejercitación y las resoluciones de problemas mediante la aplicación de algoritmos aprendidos, aplicación de modelos matemáticos, e interpretación de resultados.

Se utiliza este método por la necesidad de ejercitar y poner en práctica los conocimientos previos en situaciones diferentes, sustentando que la puesta en práctica y la interacción entre los conocimientos previamente adquiridos y una nueva situación, puede permear un aprendizaje significativo, además de la aplicación de aprendizaje y evaluación del mismo.

Existen diferentes tipos de ejercicios y problemas que son utilizados para una solución, entre estos, los abiertos y cerrados, también hay de procedimiento, tarea, entre otros. De ahí, que tanto los ejercicios como los problemas pueden ser diversos en complejidad y cantidad de información.

En general, los problemas y ejercicios tienen como intención principal, aplicar lo que ya se ha aprendido para así afianzar conocimientos, este método se usa habitualmente por medio de la explicación del profesor, planteamiento de la situación y aplicación de lo aprendido para su resolución.

4.1.2.3 Aprendizaje basado en problemas

Este método de enseñanza parte de la hipótesis de que un estudiante logra aprender de una mejor manera cuando tiene la posibilidad de experimentar e indagar sobre actividades cotidianas. De ahí que las situaciones problema que son base del método se basan en diferentes situaciones contextuales de la cotidianidad.

Con este método no se enfoca en la repetición de un algoritmo y cuando se inicia no se da a los estudiantes toda la instrucciones o información para la solución del problema, ellos deben buscar la forma de identificar, encontrar los recursos necesarios para la solución del problema. El método ABP también parte de la idea del trabajo colaborativo, en que los problemas se resuelven mejor en cooperación con otras personas.

Es importante, a partir del avance de la ciencia y la tecnología, que los estudiantes desarrollen el pensamiento matemático. Una de las posibles vías, es la utilización intencional del método ABP, la aplicación de resolución de problemas para potenciar el desarrollo del pensamiento matemático hace que implícitamente los estudiantes desarrollen la capacidad de resolver problemas.

4.1.2.4 Aprendizaje cooperativo

Cuando se habla de aprendizaje cooperativo, se hace referencia a un trabajo en el aula, donde los estudiantes son en mayor medida responsables de su aprendizaje y del de sus compañeros, en una estrategia de corresponsabilidad para alcanzar aprendizajes grupales.

En este método de aprendizaje se prioriza en la adquisición de competencias respecto a la interacción entre iguales. Desde un enfoque cognitivo se enfatiza que con este método de interacción entre iguales es propicio para lograr aprendizajes activos y significativos. Para *Johnson y Holubec 1999* citados en (Mario de Miguel Díaz, 2005) *Los alumnos aprenderían mejor unos de otros precisamente por poseer niveles similares de competencia.*

Con este método los estudiantes tienen la posibilidad de una interdependencia positiva, donde cada miembro es responsable del éxito del grupo. También es posible una interacción cara a cara en la cual los estudiantes pueden dinamizar las tareas por medio de interacciones continuas entre los miembros y a partir de la responsabilidad de cada uno, de acuerdo a sus habilidades.

4.1.2.5 Enseñanza por diagnóstico

Este método implica el estudio de los preconceptos que los estudiantes tienen del tema o situación en cuestión. Es importante el diagnóstico Educativo como un ejercicio fundamental de aproximación entre docentes y estudiantes, en palabras de (Mario de Miguel Díaz, 2005) *"implica el descubrimiento de aspectos cognoscitivos, actitudinales y aptitudinales del grupo y de cada uno de sus integrantes. Una aproximación sobre la que el docente habrá de fundamentar su actuación y que le permitirá establecer la congruencia de su quehacer docente con los* *requerimientos actuales en educación al conocer las diferencias en los estilos de aprendizaje, las capacidades, las habilidades de cada estudiante y la diversidad socio-cultural de donde provienen con el propósito de desarrollar el máximo potencial en cada persona".*

El diagnóstico en la introducción de la enseñanza de números enteros constituye un ejercicio de aproximación, de descubrimiento de aspectos cognoscitivos de los estudiantes. Esta aproximación ayuda a los docentes a conocer bien el contexto y los diversos estilos de aprendizaje de sus estudiantes, que facilitará la realización del plan de clase.

4.1.2.6 Educación STEAM

El enfoque STEAM más que un método de enseñanza, es una estrategia de enseñanza. Es relevante cuando se habla de educación matemática en actualidad. Si los estudiantes no cambian su mirada sobre la matemática que la ven como algo aburrido y solo la conocen como aritmética obstinada en vez de algo que se usa y se aplica también en otras disciplinas, su punto de vista no podrá cambiar. A través de un aprendizaje interdisciplinario, los alumnos pueden darse cuenta que las matemáticas en general y las operaciones con números enteros van más allá y son necesarias en la vida real.

Cuando se habla de la educación en Ciencia, Tecnología, Ingeniería, arte y Matemáticas (en inglés, STEAM), es importante que los estudiantes también entiendan a nivel metacognitivo, que dos o más disciplinas están vinculadas. La responsabilidad del maestro es hacer que los alumnos tengan una conexión explícita entre la matemática y otras materias.

4.2 La enseñanza de los números enteros

En las instituciones educativas es donde los adolescentes pasan más tiempo después de su hogar, y este tiempo debe ser suficiente para que los estudiantes obtengan los recursos necesarios para desenvolverse en la vida, los cuales son acompañados en su ejecución por los docentes, pero estos últimos en la preparación de sus clases han caído en formas tradicionales que no trascienden y se convierten en poco motivacionales para los estudiantes.

A través de la historia en la educación matemática en general y específicamente en el trabajo de los números enteros, a partir de diversas investigaciones de la práctica educativa se ha evidenciado que la falta de motivación y las problemáticas de aprendizaje se le atribuyen en su mayoría a los estudiantes: porque no aprende, porque no escucha, porque no presta atención. En pocas ocasiones el docente reflexiona de su responsabilidad en su quehacer pedagógico. Parafraseando a vasco 2010, rara vez se cuestiona sobre el déficit metodológico del profesor y si está o no trabajando correctamente en la representación simbólica que se requiere para fortalecer las bases que sirvan para la construcción de nuevos conceptos y esquemas conceptuales.

En los docentes está la responsabilidad de romper los paradigmas de no entiendo, no puedo. En el trabajo de las operaciones con números enteros, que inclusive muchos estudiantes llegan a grado once con confusiones conceptuales, pues lo único que lograron fue realizar procesos de mecanización o memorización, para lograr mejorar los procesos de enseñanza el docente debe reflexionar desde su práctica educativa, tener claro el contenido, el cómo y para qué lo están enseñando.

También Las dificultades asociadas a los procesos de enseñanza tienen que ver con la institución, con el currículo de matemáticas, pero sobre todo los métodos y modalidades de enseñanza, los cuales deben ser acordes con la organización institucional escolar y la secuencia curricular.

Los métodos y modalidades de enseñanza deben estar ligadas a los elementos organizativos de la institución educativa, como el currículo. En palabras de Socas Robayna, 1997 "*varios son los aspectos a considerar; el lenguaje, que debe adaptarse a las capacidades y comprensión de los estudiantes y se debe tener en cuenta el contexto escolar en genera*l".

Un camino hacia la reflexión de la práctica docente para mejorar el proceso de enseñanza de las operaciones con números enteros, es contrastar métodos y modalidades de enseñanza que puedan favorecer la adquisición de esquemas conceptuales, desde la mirada de la teoría APOE.

A partir de la lectura de varios artículos que hacen referencia a modalidades y métodos de enseñanza, con relación a las modalidades, se hizo referencia de dos de estas: clases teóricas y clases prácticas. La primera tradicional de tipo conductista, donde los docentes desarrollan una clase magistral, propone algunas tareas, talleres y ejercicios. La segunda más de tipo aprender haciendo, aprender jugando, apoyados en el material educativo computarizado, aprendizaje multidisciplinario etc.

4.2.1 El número entero

Es común encontrar dificultades en el uso de procesos, que permitan a los estudiantes solucionar situaciones que involucren operaciones básicas con números enteros, ya sea porque los estudiantes dan interpretaciones inadecuadas o incorrectas de los enunciados propuestos por los docentes, o simplemente por la modalidad y métodos de enseñanza elegidos por el docente.

Durante años se han realizado investigaciones sobre cómo introducir el concepto de número entero, con la intención que el estudiante pueda crear esquemas, sea significativo y no solo lo memorice, sino que lo pueda utilizar en contexto. En algunos estudios se ha evidenciado que el concepto de entero para el estudiante, desde su misma escritura resulta complejo, principalmente cuando se trata de los negativos, se asocia el signo menos con una resta y genera un conflicto epistemológico. El número negativo se convierte en algo muy abstracto y a los estudiantes se les dificulta grandemente, y terminan solo aprendiendo algunas reglas, esto sumado a una gran desmotivación por la modalidad y metodología utilizada por la mayoría de los docentes.

Desde hace muchos años atrás se pueden encontrar reflexiones acerca de las dificultades que pueden generar la enseñanza y el aprendizaje de los números enteros, específicamente el concepto de negatividad para su aceptación y comprensión , como es citado (Abrate, Pochulu, & Vargas , 2006) en (Aponte; & Rivera, 2017) “*El reconocimiento y la legitimación de este campo numérico sufrió marchas y contramarchas durante un larguísimo proceso, requiriendo de mucho tiempo para que los matemáticos reconocieran, aceptaran y legitimaran los números negativos, por lo que no debería resultar tan extraño que los alumnos presenten dificultades a la hora de construir conocimientos en torno a ellos”.*

Como se viene hablando, aún las dificultades epistemológicas generadas por el concepto de número negativo, siguen vigentes en la práctica de la enseñanza de las matemáticas. Los docentes como ya se ha mencionado encuentran en los estudiantes resistencia y dificultades en el aprendizaje de los números enteros sobre todo por el concepto de negatividad. Como lo mencionan (Maz-Machado & Rico-Romero, 2009)*. “Los números negativos han llamado la atención de los investigadores en Educación Matemática dado que las dificultades manifiestas en los alumnos para su entendimiento repercuten tanto en la comprensión de otros conceptos como en la correcta interpretación de determinadas situaciones y la solución de problemas asociados a ellas”.*

Un camino para combatir la resistencia de los estudiantes hacia los números enteros es: Primero conocer el cómo se presenta en contextos reales el numero negativo, también es importante la historia de los números negativos, los obstáculos que se han presentado a través del tiempo y reflexionar sobre sus prácticas educativas según el contexto. A partir de eso, diseñar clases con fundamento y planeación, con la ayuda del estudio de modalidades y métodos de enseñanza. Para algunos autores la resistencia hacia los números negativos es porque dichos números no surgieron de las experiencias de conteo y de medición, sino de la resolución de ecuaciones.

Cuando se habla de operaciones de números enteros, la suma de enteros positivos es la operación que presenta menos dificultades, las dificultades aparecen con la resta o suma de expresiones negativas, más aún, si se realiza bajo el enfoque que tradicionalmente se le ha dado a este tema, establecer que, "restar es sumar el opuesto", lo que matemáticamente puede resultar correcto, pero didácticamente crea un inconveniente, puesto que no tiene ninguna significación para el alumno *(Abrate, Pochulu, & Vargas , 2006).*

En la multiplicación también se presentan dificultades por la significación del símbolo (-), puesto que tiene lugar como operación, signo de un número, o como indicador de opuesto de un número. Esto genera en los estudiantes grandes confusiones y equivocaciones cuando realizan operaciones con números enteros.

Algunos matemáticos como Euler intentaron realizar demostraciones de la ley de los signos, pero en ese intento daban argumentos confusos e inconsistentes. Hoy los estudiantes se encuentran con esta problemática y genera en ellos obstáculos sobre la operatividad con relación al signo menos y se convierte esto a la vez en una fuente de errores que cometen los estudiantes.

4.3 Obstáculos en el aprendizaje las matemáticas

Entre los obstáculos que se presentan en el aprendizaje de las matemáticas y el pensamiento numérico se pueden encontrar obstáculos epistemológicos, didácticos y ontogenéticos, como se describe a continuación.

4.3.1 Obstáculos epistemológicos

Brousseu en su teoría de situaciones didácticas postula que un estudiante adquiere un conocimiento cuando enfrenta una situación problema, cuya solución requiere de dicho conocimiento y es capaz de generarlo como estrategia de resolución de problemas. En conclusión, los conocimientos de un alumno sobre una noción matemática dependerán de la experiencia adquirida afrontando situaciones en las que dicha noción está implicada.

Siguiendo la línea de los obstáculos epistemológicos Gleaser 1981, manifiesta su intención de encontrar obstáculos que entorpecen la comprensión y el aprendizaje del concepto de número entero, en partícular el entero negativo. Este autor citado en (Aponte; Rivera, 2017) considera que, en la evolución histórica de la noción de número negativo desde sus primeras emergencias hasta el concepto actual, se pueden constatar los siguientes obstáculos:

- **Falta de aptitud para manipular cantidades negativas aisladas.** Gleaser 1981 citado en (Aponte; Rivera, 2017) "*Indica con esto el hecho, observable en la obra de Diofanto, de que la necesidad de efectuar cálculos algebraicos con diferencias y, en particular, la necesidad de multiplicar dos diferencias, le lleva a enunciar la regla de los signos y, sin embargo, no acepta la existencia de números negativos aislados".*

- **Dificultad para dar sentido a las cantidades negativas aisladas.** Gleaser 1981 citado en (Aponte; Rivera, 2017) menciona que, "*En la obra de algunos matemáticos (Stevin, D'Alembert, Carnot y, posiblemente, Descartes) se constata que conciben la existencia de soluciones negativas de las ecuaciones, las "ven" y las tienen en cuenta, pero no pueden aceptarlas como cantidades reales y las justifican diciendo, por ejemplo, que son cantidades ficticias que expresan un defecto en el enunciado del problema"*

- **Dificultad para unificar la recta real.** Gleaser 1981 citado en (Aponte; Rivera, 2017) menciona que; "*En el intento de sobrepasar el obstáculo anterior interpretando las cantidades negativas como cantidades reales, se observa que algunos matemáticos (McLaurin, D'Alembert, Carnot y Cauchy) concebían los negativos y los positivos en términos antinómicos: "lo negativo" neutralizaba, se oponía a "lo positivo", pero era de naturaleza distinta. Es decir, la cantidad negativa era tan real como la positiva, pero estaba tomada en un sentido opuesto. Esta heterogeneidad que se establecía entre* *negativos y positivos no facilitaba su unificación en una ´única recta numérica y, en cambio, favorecía el modelo de dos semirrectas opuestas funcionando separadamente"*

- **La ambigüedad de los dos ceros.** Gleaser 1981 citado en (Aponte; Rivera, 2017) *"se refiere con esto a las dificultades que hubo entre los matemáticos (Stevin, McLaurin, D'Alembert, Carnot, Cauchy y, quizá, Euler y Laplace) para pasar de un cero absoluto, un cero que significaba la ausencia de cantidad de magnitud, a un cero origen elegido arbitrariamente. Uno de los razonamientos más extendidos entre los matemáticos que se oponían a la consideración de las cantidades negativas como cantidades reales y no como meros artificios del cálculo, era que no se podía admitir la existencia de cantidades que fueran (menos que nada)"*

- ***El estancamiento en el estadio de las operaciones concretas.*** Gleaser 1981 citado en (Aponte; Rivera, 2017) menciona que; "*La superación de los obstáculos anteriores permite aceptar los números negativos como cantidades reales y justificar su estructura aditiva, pero no así la estructura multiplicativa. El problema de justificar la regla de los signos lo resolvió definitivamente Hankel en 1867, cuando propuso prolongar la multiplicación de R+ a R respetando un principio de permanencia que conservará determinadas "buenas propiedades" de la estructura algebraica de los reales positivos".*

La comunidad matemática a deseado encontrar algún modelo concreto que justifique la operatividad con los números enteros, la cual pueda ser comprendida fácilmente por los estudiantes, con la intención de superar los diferentes obstáculos expuestos y por exponer. Brouseau citado en (Aponte; Rivera, 2017) conceptualiza obstáculo epistemológico acercándose a las causas que conducen a errores: dice que un obstáculo se manifiesta por los errores que no nacen del azar. Son errores reconocibles y que aparecen constantemente, estos errores en un estudiante pueden estar ligados a una misma fuente, la cual puede ser un estilo de aprendizaje, o simplemente por preconceptos.

4.3.2 Obstáculos didácticos

Estos obstáculos provienen de los procesos de enseñanza y estos se deben evitar pues no permiten superar los obstáculos epistemológicos. El conocimiento de estos obstáculos por parte de los docentes puede hacer que los mismos los eviten, estos obstáculos pueden ser de origen metodológico curriculares o conceptuales.

Los obstáculos didácticos se evidencian a través de los errores más frecuentes que cometen los estudiantes, provenientes de dificultades cuyo origen es la enseñanza. Algunos ejemplos de un error metodológico es cuando el docente usa términos inadecuados, o enseña nociones falsas de un concepto. Todos estos errores se pueden superar a partir de la responsabilidad profesional de los docentes, reflexionando constantemente sobre sus prácticas docentes, capacitándose constantemente en el contenido científico a enseñar, y buscando estrategias de enseñanza que sean adecuadas para su contexto y logre una enseñanza eficaz.

4.3.3 Obstáculos ontogenéticos

Estos obstáculos provienen de condiciones específicas y/o genéticas de los estudiantes y por esta razón deben ser tratados de forma personalizada según cada diagnóstico y con ayuda profesional en la materia.

4.3.4 Obstáculos en el aprendizaje del número entero

En el transcurso de los grados de básica secundaria al momento de poner en funcionamiento las nociones algebraicas y orden numérico, se manifiestan en gran medida los obstáculos en el aprendizaje y aplicación de los números enteros uno de los más encontrados es lo real como un obstáculo.

4.3.5 Lo real como obstáculo

Los estudiantes inicialmente se habitúan a trabajar aritméticamente solo con símbolos numéricos, lo cual presenta inconvenientes más tarde, con la llegada de variables, símbolos algebraicos y diferentes representaciones entre lo real y lo concreto.

Uno de los grandes problemas que se presentan en el aprendizaje de los números enteros son las creencias y experiencias que han tenido los estudiantes durante el transcurso de su vida, que crean en ellos ideas como pensar que la suma es solo la acción de añadir una cantidad a otra. Es difícil concebir los números negativos, pues siempre los han considerado innecesarios. Los estudiantes andan muy ligados al concepto de los números naturales, argumentando que estos van en aumento a medida que se alejan del origen, trasladan esta idea a los números negativos continuando con la noción de que los números negativos entre más alejados estén del cero serán mayores. También ocurre que olvidan el signo y tratan de operar siempre los números enteros como naturales. Todas estas situaciones suscitan errores en el camino del aprendizaje de los números enteros.

4.4 Errores en el aprendizaje de las matemáticas

Socas citado en (Aponte; Rivera, 2017) considera que el error debe ser tomado como la presencia en el alumno de un esquema cognitivo inadecuado y no sólo la consecuencia de una falta específica de conocimiento o una distracción. En el transcurso del aprendizaje el error siempre va a estar involucrado, manifestando a partir de los obstáculos que se presentan en el aprendizaje de las matemáticas.

Mulhern citado en (Aponte; Rivera, 2017) señala las siguientes características de los errores:

- *Surgen, por lo general, de manera espontánea y sorprenden al profesor.*
- *Son persistentes y difíciles de superar, ya que requieren una reorganización de los conocimientos en el alumno.*
- *Pueden ser sistemáticos o por azar: los sistemáticos son más frecuentes y revelan los procesos mentales que han llevado al alumno a una comprensión equivocada, y los cometidos por azar son ocasionales.* Los errores presentados por los estudiantes pueden ser individuales o errores colectivos.

4.4.1 Características fundamentales de los errores

Existen diferentes motivos por los cuales se cometen los errores en el aprendizaje de la matemática, parafraseando a Brousseau, David y Werner estos errores se encaminan en concepciones inadecuadas del concepto en particular, aplicaciones de procedimientos sistematizados que se creen correctos o simplemente procedimientos y métodos inventados por los mismos estudiantes en la búsqueda de la solución de problemas. Rico citado en (Aponte; Rivera, 2017) pone como características generales de los errores cometidos por los estudiantes las siguientes:

- *Los errores surgen en la clase por lo general de una manera espontánea.*
- *Sorprenden al profesor, aunque pueden gestarse desde mucho antes*

- *Son persistentes y particulares de cada individuo.*
- *Son difíciles de superar porque requieren de una reorganización de los conocimientos en el alumno.*
- *Hay un predominio de los errores sistemáticos con respecto a los errores por azar u ocasionales.*
- *Los errores sistemáticos revelan los procesos mentales que han llevado al alumno a una comprensión equivocada. Los alumnos en el momento no toman conciencia del error, pues no cuestionan lo que les parece obvio y no consideran el significado de los conceptos, reglas o símbolos con que trabajan.*
- *Los errores sistemáticos son en general el resultado de concepciones inadecuadas de los fundamentos de la Matemática, reconocibles o no reconocibles por el profesor.*

Algunos errores se gestan en la comprensión o el procesamiento que hace el alumno de la información que da el profesor. Los alumnos, por ejemplo, recrean o inventan su propio método en base al método descrito por el profesor.

En general los errores son esa manifestación exterior de un proceso donde intervienen diferentes variables: el profesor, el estudiante, el currículo y el contexto sociocultural. Retomando las modalidades y métodos de enseñanza ahondaremos en la variable del profesor y su práctica educativa con relación a la enseñanza de números enteros.

La modalidad que brinda mejores posibilidades para romper esos obstáculos didácticos que se presentan en la enseñanza de los números enteros, son las clases prácticas. Por otro lado, los métodos que podrían ser un buen camino en esta modalidad son el aprendizaje basado en problemas, trabajo colaborativo, el enfoque STEM y las TICS, aunque los dos últimos no sean definidos como métodos de enseñanza, es importante tenerlos en cuenta por el contexto histórico en el que nos encontramos en este momento.

Además, para conseguir que un estudiante construya un esquema conceptual adecuado del número entero y sus operaciones, es necesario que los docentes estén dispuestos a reflexionar sobre sus prácticas docentes, revisar sus estrategias de enseñanza, (modalidades y métodos de enseñanza) y contextualizarse constantemente.

5 CAPÍTULO V DISCUSIÓN

5.1 Clases prácticas y la enseñanza de los números enteros

Las clases prácticas, como ya se ha mencionado, permiten desarrollar diversos métodos de enseñanza como la resolución de problemas, ABP, trabajo colaborativo, entre otros. Es importante así que los docentes conozcan diversas modalidades y métodos de enseñanza, como diría Miguel Zabalza Beraza que tengan clara su coreografía didáctica. Posiblemente así, se rompan obstáculos didácticos en la enseñanza de los números enteros, acompañado de un buen manejo del contenido a enseñar, en algunos estudios se evidencia que existen muchos docentes de matemáticas que no dominan el contenido, en este caso el concepto de número entero.

En las clases prácticas el proceso de enseñanza aprendizaje el protagonismo es compartido, donde participan activamente tanto el docente como el estudiante. Para algunos investigadores, mucho docentes manejan los números enteros desde los conceptos intuitivos, como se cita Zepeda en (Smith, 2016) "*El conocimiento que utilizamos en nuestra vida cotidiana y nos permite acceder al mundo que nos rodea, de forma inmediata a través de la experiencia, ordenando en hechos particulares, es decir, tratando de relacionarla con algún evento o experiencia que hallamos vivido y se relacione con lo que estamos apreciando".* Los conocimientos intuitivos nacen de construcciones individuales, de carácter perceptivo, pero es el mismo docente el que debe participar en transformación conceptual de los estudiantes, pero si su intervención se basa en esos conocimientos intuitivos, ese obstáculo no se podrá romper y el estudiante tendrá dificultades en la construcción del concepto de numero entero.

Las dificultades que poseen los docentes con respecto al concepto de números enteros, se reflejan directamente en la profundidad con que esta temática se desarrolla en el aula y en las estrategias didácticas que utiliza en la enseñanza de la misma, para lo que el profesor debe utilizar las metodologías adecuadas que le permitan no solo enseñar la materia, si no también atender la diversidad que se encuentran en el interior de las mismas *(Smith, 2016).*

Es importante que el docente reflexione sobre sus prácticas docentes y a partir de ahí construya un plan de clase adecuado para que sus estudiantes comprendan a partir de procesos y mecanismos mentales el concepto de número entero.

Las clases prácticas permiten la integración de diferentes métodos y estrategias de enseñanza en las que docente puede apoyarse, entendidas como todos los recursos y acciones utilizados por el docente con el fin que los estudiantes logren hacer una apropiada descomposición genética del concepto de número entero, que permita la adquisición de esquemas conceptuales por parte del estudiante, y a la vez desarrolle el pensamiento numérico.

5.2 Aprendizaje basado en problemas y la enseñanza de números enteros

El aprendizaje basado en problemas (ABP), es un método que le da más participación al estudiante, un método centrado en el aprendizaje la investigación y reflexión que hacen los estudiantes para solucionar un problema planteado por el profesor. Utilizar este método para la enseñanza de los números enteros favorece en los estudiantes su curiosidad y motivación por aprender, al ser un método que tiene como intención que los estudiantes adapten el conocimiento adquirido, lo transformen y lo compartan, es decir, contribuir a la conformación de un conocimiento colectivo a través del trabajo cooperativo.

Para Gutiérrez, De la Puente, Martínez y Piña (2012), citado en (GERARDO, 2018) las características del ABP son las siguientes:

- *Este modelo se enfoca en el estudiante, ya que se considera que los temas y contenidos a tratarse dentro del aula de clase deben captar la atención del estudiante, para que alcancen las metas de aprendizaje definidas para ellos.*
- *El aprendizaje se vuelve activo, los estudiantes adquieren responsabilidades siendo los protagonistas de la clase y mejorando sus actitudes ya que de ellos depende la construcción del conocimiento.*
- *El aprendizaje es colaborativo, ya que el método ABP supone un trabajo en equipo para que los estudiantes puedan intercambiar entre ellos los conocimientos, estrategias y caminos adquiridos.*

- *Promueve el trabajo en equipo, los estudiantes deben aportar con sus ideas, pensamiento y experiencias particulares para conseguir mejores resultados, ya que el conocimiento se construye de manera colaborativa.*
- *El razonamiento crítico, el método ABP busca en primera instancia que los estudiantes analicen, razonen y concluyan para obtener los resultados.*

Este método también permite integrar diferentes estrategias de enseñanza y la utilización de las nuevas tecnologías. Aquí lo importante es que el estudiante pueda construir esquemas conceptuales adecuados del concepto de número entero, como lo expresa Pozo citado en (Aponte; Rivera, 2017) una persona obtiene un concepto en el momento que puede otorgarle un significado o un sentido a la información que se le presenta.

5.3 Enfoque STEAM y la enseñanza de números enteros

El enfoque STEAM se está mencionando bastante a nivel educativo, a través de la integración de áreas, el uso de las TIC y metodologías activas como los métodos de enseñanza ABP y aprendizaje cooperativo, entre otros recursos y herramientas.

Se entiende este enfoque como integrador de aprendizaje abierto y flexible, para todo ámbito educativo, y en instituciones con realidades distintas, acompañando el aprendizaje de los números enteros a través de diferentes temáticas presentes en la vida; las ciencias en general, el arte, la era espacial, la robótica, las máquinas simples, la electrónica, la literatura de ficción y cómics, las biografía de célebres científicos e investigadores entre otras (Han & goleman, daniel; boyatzis, Richard; Mckee, 2019). Con ayuda del enfoque STEAM se podrían superar muchas de las barreras y obstáculos presentes en el aprendizaje de los números enteros.

Lo que deja entrever que, en la enseñanza de los números enteros, como ya se ha mencionado en varias ocasiones, es importante que el docente conozca las diferentes metodologías, (estrategias, modalidades, y métodos de enseñanza y/o alternativas) que permitan que en el proceso de enseñanza aprendizaje el estudiante, como se enuncia en la teoría APOE, pueda construir esquemas conceptuales adecuados de los números enteros. En palabras de (GERARDO, 2018) *"El cuidado que se tenga con la metodología que* *se use para enseñar, es la que hará que se superen las restricciones didácticas que se tengan y se desarrolle e intensifique la capacidad de comprensión y sentido que le den los estudiantes a los números enteros".*

5.4 la teoría APOE y la enseñanza de números enteros

Desde el marco teórico de esta monografía se introdujo sobre la teoría APOE y los números enteros. Esta teoría puede ser utilizada por medio de la atracción reflexiva para evidenciar el proceso que estudiante tiene en la adquisición de un concepto o tarea matemática con las construcciones mentales específicas que pueden haber logrado o no, entonces los estudiantes probablemente tendrán éxito usando ciertos conceptos matemáticos y en cierto problema con situaciones y descripciones detalladas, denominadas descomposiciones genéticas, las cuales tienen como componentes del modelo de comprensión APOE. Las formas de conocer: acción, proceso, objeto y esquema, y los mecanismos de construcción: interiorización, inversión, coordinación. La teoría luego hace predicciones comprobables sobre como un estudiante adquiere un concepto a partir de este ciclo APOE.

La enseñanza de los números enteros no es un problema actual, históricamente se pueden encontrar reflexiones acerca de las dificultades que genera la enseñanza de este concepto, principalmente los números enteros negativos. Solo el reconocimiento de este conjunto numérico ya venía con dificultades, los grandes matemáticos tardaron en reconocer los números negativos, ahora no es de extrañar que a los estudiantes de la actualidad les cueste aprenderlos y a los docentes enseñarlos.

Muchas de las dificultades que tienen los estudiantes para el aprendizaje de los números enteros se debe a que se ven inicialmente influenciados por la actitud que tienen hacia las matemáticas, esta actitud también se ve afectada por los docentes a causa de modalidades y métodos de enseñanza que utilizan, teniendo como resultado bajos rendimientos en el área de matemáticas, en gran parte de las instituciones educativas, lo cual es de preocupación para los países en desarrollo como Colombia.

Los estudiantes que terminan el bachillerato deberían poseer un conocimiento profundo de los números reales y dentro de estos los enteros sobre todo el manejo de los números negativos. Pero la realidad es que muchos estudiantes salen de las instituciones educativas sin comprender aún el concepto de números enteros y sus operaciones. Una de las causas puede ser, que algunos ellos no logran comprender los procedimientos, simplemente los aceptan como reglas sistemáticas, la regla de los signos es un claro ejemplo.

El hallazgo de Kloosterman (2012) citado en (Madihah Khalid, 2019) muestra que *"una cuarta parte de los estudiantes de 13 años no pudieron sumar números positivos y negativos correctamente, mientras que la mitad de ellos no pudieron dividir números enteros correctamente."* La causa de este fenómeno se debe gran parte a los docentes, les han enseñado a los estudiantes a seguir simplemente reglas y procedimientos sin entender y comprender los modelos matemáticos, sin lograr una adquisición conceptual.

La comprensión de los números enteros es importante para adquirir demás conocimientos del área. Muchos docentes en el caso de las operaciones con números enteros, como lo menciona (Madihah Khalid, 2019) en su investigación, " *los maestros prefieren proporcionar a los estudiantes reglas para que las memoricen y luego ejercitarlas con suficiente práctica para que se adhieran a las reglas. Esta práctica puede conducir a una comprensión deficiente y una mala aplicación de las reglas, ya que los estudiantes se confundirán con tantas reglas que deben recordar. Por ejemplo, quienes responden 6 + (–2) = - 8 argumentan que 2 sumado a 6 es 8, pero hay un signo menos que hace que la respuesta sea negativa.*

A partir del obstáculo didáctico mediado por los docentes, los estudiantes adquieren conceptos erróneos de los números enteros, los mismos docentes son los encargados de cambiar este fenómeno, partiendo de los conocimientos previos de los estudiantes Según Küçük y Demir (2009), citado en (Madihah Khalid, 2019), *el papel de los profesores en este proceso es ayudar a los estudiantes a imaginar, corregir y reconocer la relación entre los conceptos de matemáticas enseñados en un entorno de aula adecuadamente diseñado.*

Al trabajar la teoría APOE para la enseñanza de los números enteros, teniendo en cuenta las modalidades y métodos de enseñanza de los docentes, permite potenciar el aprendizaje de los estudiantes de manera significativa, se podría lograr que estos comprendan el concepto de números enteros, sin tener la necesidad de aprender reglas poco significantes y sin sentido para ellos.

5.5 Clases prácticas y teoría APOE

Las clases prácticas se prestan como un buen camino para romper obstáculos didácticos en la enseñanza del concepto de números enteros, sobre el cual los estudiantes de básica secundaria y media, e incluso profesores en formación tienen dificultades para conceptualizar.

En las mallas curriculares y planes de área en general de las instituciones educativas, los números enteros se abordan al final del grado sexto y principios del grado séptimo, pero se siguen utilizando en los siguientes grados, en contenidos como el algebra, el cálculo, etc.

La utilización de esta modalidad permite que los docentes integren diferentes métodos de enseñanza en sus clases, que conduzcan a romper la apatía que gran parte de los estudiantes sienten por las matemáticas, siempre y cuando el docente conozca el entorno en el que se encuentra, es recomendable hacer un debido diagnóstico general del contexto y sus estudiantes.

Desde la mirada de la teoría APOE las clases prácticas son una gran herramienta para su implementación, estas permiten comprensión y afianzamiento de los conceptos. La comprensión de los conceptos puede hacer que aumente la motivación del estudiante a partir de las actividades planeadas por el docente, por medio de la descomposición genética del concepto de número entero, para que el estudiante desde la atracción reflexiva siga el ciclo APOE, a partir de las formas de conocer: acción, proceso, objeto y esquema, y los mecanismos de construcción: interiorización, inversión, coordinación.

La amplia diversidad de actividades y métodos de enseñanza que se pueden realizar desde la modalidad de clases prácticas, permite que el estudiante a través del ciclo APOE y de la descomposición genética del concepto de número entero, adquiera esquemas conceptuales teniendo en cuenta que un esquema es: "*construcciones mentales que contienen la descripción, organización y ejemplificación de las estructuras mentales que un individuo ha construido en relación a un concepto matemático". (Jaimes Contreras et al., 2017),* en otras palabras, que el estudiante logre comprender realmente el concepto de número entero, y fortalezca en pensamiento numérico.

5.6 Métodos de enseñanza y teoría APOE

Para la enseñanza de los números enteros, a partir de la modalidad de clases prácticas y desde el la mirada de la teoría APOE, se resaltan métodos de enseñanza como; aprendizaje colaborativo y aprendizaje basado en problemas. Teniendo en cuenta las tics y el enfoque de enseñanza STEAM como se describe en los siguientes párrafos.

La implementación de estos métodos de enseñanza tiene como finalidad que los estudiantes realicen construcciones mentales, partiendo de la siguiente noción: el conocimiento se construye mediante acciones sobre los objetos, que al ser interiorizadas se constituyen en procesos que mediante una forma de construcción se encapsulan en objetos.

El Aprendizaje Colaborativo y el Aprendizaje Basado en Problemas, permiten crear situaciones problema, fundamentales para realizar actividades, discusiones en clase, ejercicios entre pares y grupos. Fomentando la creatividad, la curiosidad y el interés de los estudiantes, a través de situaciones que se asemejen a su realidad y donde puedan ver estructuras matemáticas en cada aspecto de sus vidas.

Permiten remplazar esas lecciones magistrales, ayudados de las tics, dado que estas tienen un lugar muy importante en la actualidad educativa y son un potencial significativo en el aprendizaje de las matemáticas. Además, la implementación del enfoque STEAM a través de la integración disciplinar convierten la realidad académica en más innovadora y actual. Con la intención, de que los estudiantes puedan hacer construcciones mentales adecuadas, basados en la descomposición genética del concepto de número entero.

Parafraseando a García 2018, a partir de estos métodos de enseñanza los estudiantes trabajarán en la realización de acciones y procesos que permitan establecer relaciones entre ellos y conseguir así que se pueda dar la interiorización del concepto y los procesos sean convertidos en acciones, a partir de situaciones problemas que permitan encapsular los procesos en objetos y la práctica de esas situaciones de aprendizaje promuevan construcciones mentales para el anhelado fin de esquematización del objeto matemático. Siendo en este caso la construcción y comprensión del concepto de número entero y sus operaciones, de tal forma que permita a los estudiantes la aplicación de dicha temática en su vida diaria y sean capaces de resolver algún problema que se les presente en su vida cotidiana, sin recurrir a la utilización de fórmulas mecánicas.

Lo anterior dado que, según la teoría APOE, las estructuras mentales necesarias para la construcción de un concepto matemático se dan en el siguiente orden: acción, proceso, objeto y esquema. Si los docentes logran identificar y utilizar las construcciones mentales que hacen los estudiantes al comprender un concepto, tanto ellos como sus estudiantes pueden cambiar la percepción negativa que sienten hacia las matemáticas, interpretando así, que los métodos de enseñanza tienen efectos significativos en el rendimiento de los estudiantes.

Sciullo (2017), citado en (Mehmood et al., 2019) afirma que: *“los métodos tradicionales de instrucción como el método de conferencias y otras metodologías centradas en el maestro, a partir de ahora no tienen ningún efecto. Los alumnos necesitan más metodologías centradas en el alumno para comprender y entremezclarse con el contenido. Los métodos como las* *conferencias y clases teóricas no pueden hacer mucho más. El aprendizaje apenas ocurre en situaciones de lectura, ya que los espectadores se sientan pasivamente en esta condición".*

5.7 Descomposición genética del concepto de número entero.

La descomposición genética dentro de la teoría APOE es una herramienta fundamental para analizar y describir de manera detallada el concepto matemático a estudiar y para establecer esas construcciones mentales que deben realizar las estudiantes acompañadas de los mecanismos mentales.

Son los docentes, convertidos en investigadores de sus propias prácticas educativas, quienes proponen desde sus experiencias y del saber mismo del contenido que poseen, el diseño de la descomposición genética del número entero. Esa descomposición permitirá identificar y utilizar esas construcciones mentales que hacen los estudiantes al comprender un concepto. La utilización de estas estrategias podría mejorar las prácticas docentes y transformar esa enseñanza tradicional de las matemáticas, específicamente del concepto de número entero.

La descomposición genética es el elemento principal de la teoría APOE, se puede considerar como una herramienta útil para aquellos profesionales de la educación que quieran mejorar sus prácticas de enseñanza (Jaimes Contreras et al., 2017). Como se ha mencionado antes en esta monografía, en muchas ocasiones la enseñanza de los números enteros y sus operaciones se convierte en una simple aplicación de algoritmos y reglas que ocultan la importancia de la comprensión de un objeto matemático.

Con relación a los números enteros, sabemos que, dentro de ellos, los que han tenido mayor dificultad a la hora de aprender son los números negativos, se tiene de ellos una concepción algo abstracta, pero lo complejo como tal no es el número, sino las operaciones entre los números negativos.

Es entendible que sea difícil comprender un concepto del cual no se tenga referente. Los investigadores del tema han realizado hallazgos como que el uso de calculadoras borra la importancia de comprender el concepto de número entero, lo importante es hallar el resultado correcto, la dependencia de las calculadoras hace que los estudiantes no razonen y evita que descubran y comprendan los conceptos (Madihah Khalid, 2019). La situación anterior se agrava cuando los estudiantes empiezan a trabajar nociones algebraicas y cálculo, pues los números enteros son base fundamental de estos otros contenidos.

Madihah Khalid, 2019 encuentra que en las aulas observadas en su investigación, el aprendizaje cooperativo, el ABP, aprendizaje activo, las tics, entre otros metodos de enseñanza, son mínimamente aplicados o inexistentes. Por lo tanto, no le sorprende que la mayoría de estudiantes no comprendan el concepto de número entero.

Madihah Khalid también menciona que esa es la razón por la que muchos profesores solo recurren a dar reglas a los estudiantes, las cuales se memorizan mecánicamente sin tener comprensión alguna del concepto de número entero. Afirma que*;*

> *"los estudiantes se confunden y aplican las reglas de multiplicación y división a la suma y la resta. Los errores son peores para los estudiantes que tienen un conocimiento básico deficiente, como el uso de paréntesis, factorización e incluso multiplicación y división básicas*". *La regla favorita es la regla para la multiplicación de números enteros que se memorizan de memoria "negativo y negativo dan positivo", "negativo y positivo o positivo y negativo dan negativo" que a menudo se aplica mal***.** *Otra mala aplicación es cuando el profesor dice que la respuesta debería llevar el signo del número más grande, que solo es correcto para ciertos casos. Un ejemplo para ilustrar esto sería -6 + 2 = -4. Pero cuando el problema es 2 - (- 6), la respuesta es 8 y no llevará el signo negativo de 6. Esto puede ser un recordatorio para los maestros, que no es para generalizar. Si bien este atajo probablemente sea introducido por maestros con buenas intenciones, no le brinda al estudiante el conocimiento conceptual para comprender por qué restar un número negativo da como resultado un valor positivo".*

La descomposición genética del número entero puede evidenciar que un objeto matemático por simple que pueda parecer, requiere de un conjunto de construcciones mentales y mecanismos de construcción desarrollados por los estudiantes para lograr su comprensión.

En síntesis, para que un estudiante pueda comprender un concepto matemático debe interactuar mediante acciones con un objeto previamente construido, mental o físico, con la repetición dichas acciones son interiorizadas en procesos y a la vez estos son encapsulados, coordinados y revertidos para formar objetos. Posteriormente estas también pueden ser de-encapsulado para generar nuevos procesos donde se repite el ciclo APOE, hacia acciones y procesos que ya fueron interiorizados e incluso organizados con otros objetos en esquemas.

García (1998), Citado en (García & 2018, 2018) menciona que "*la noción de esquema tiene como cualidad, la de ser construido, reconstruido y extendido con el objetivo preciso de dar sentido y resolver una situación problemática mediante su asimilación y acomodación a los esquemas existentes, la que consideramos importante y central en toda descomposición genética*"

De lo anterior se puede decir que una descomposición genética de un esquema conceptual, en este caso el concepto de número entero, se alimenta de otros esquemas conceptuales previos, siendo así, esa descomposición genética del concepto, un conjunto de estructuras mentales que describen como como se desarrolla un concepto en la mente del estudiante. Mediante estas descomposiciones genéticas se establecen conexiones entre esquemas conceptuales previos (conceptos previos o preconceptos) y las diferentes formas de coordinación, para lo que se hace necesario determinar el proceso APOE para el concepto de número entero. (García & 2018, 2018)

No existe un único modelo para la descomposición genética de un concepto, pero es un camino para construir conscientemente el concepto de número entero, para (Trigueros y Oktac, 2005) citado en (García & 2018, 2018), "*se aprueba la posibilidad de que varias descomposiciones genéticas coexistan para la construcción de un mismo concepto siempre que este instrumento describa las observaciones de los trabajos de los estudiantes*".

La construcción adecuada de un esquema conceptual es muy necesaria para que las prácticas docentes sean pertinentes y eficaces teniendo en cuenta las modalidades y métodos de enseñanza. Los factores del concepto a enseñar y describiendo las construcciones mentales (acciones, procesos, objetos y esquemas) y los mecanismos mentales (interiorización, coordinación, encapsulación, entre otras) que un estudiante puede realizar para construir el concepto de número entero.

Para la construcción de la descomposición genética del número entero es importante tener en cuenta esos esquemas conceptuales que el estudiante ya posee, (conocimientos previos), para observar sus estructuras cognitivas previas con relación a los números enteros, posteriormente a partir de la abstracción reflexiva, el docente debe realizarse cuestionamientos como: ¿Qué acciones se pueden elaborar, planear, estructurar para que un estudiante interiorice el concepto de número entero en un proceso? ¿Cómo hacer que los estudiantes coordinen los procesos para resolver problemas o situaciones con operaciones de números enteros? ¿Cómo hacer que los estudiantes encapsulen los procesos en objetos y también puedan generar nuevos procesos donde se repite el ciclo APOE, hacia acciones y procesos, que ya fueron interiorizados e incluso organizados con otros objetos en esquemas? Este ciclo se muestra en la siguiente figura

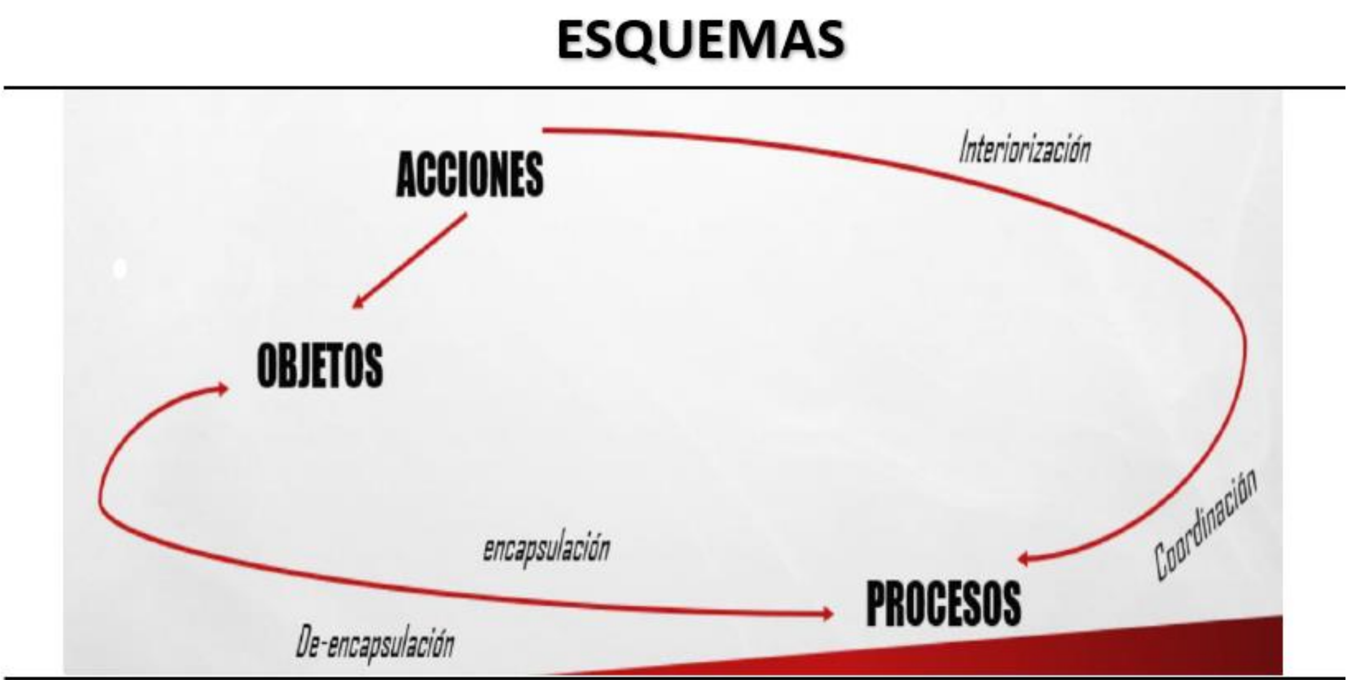


Figura 1. Construcciones y mecanismos mentales para la construcción del conocimiento matemático (Arnon et al., 2014, p. 18).

A continuación, se propone un ejemplo de una posible ruta para una descomposición genética del número entero. A través de la sugerencia de algunas actividades, mediadas por la modalidad de clases prácticas y haciendo uso de métodos de enseñanza como el aprendizaje colaborativo y el ABP, haciendo uso de las tics y el enfoque de enseñanza STEAM, que permitan inicialmente conocer los preconceptos o esquemas conceptuales previos que tiene el estudiante, hasta pasar por todo el ciclo APOE descrito en la *figura 1* para la comprensión del concepto de número entero.

Tabla 5.1

Descomposición genética del concepto de números enteros y sus operaciones básicas

DESCOMPOSICIÓN GENÉTICA DEL CONCEPTO DE NÚMEROS ENTEROS Y SUS OPERACIONES BÁSICAS.

Derecho básico de aprendizaje: Interpreta los números enteros, con sus operaciones, en diferentes contextos, al resolver problemas.

Modalidad de enseñanza: clases prácticas

Métodos y/o estrategias de enseñanza: Aprendizaje Basado en Problemas (ABP), Aprendizaje Cooperativo, las tics y enfoque STEAM

Actividades a desarrollar	Ciclo APOE
	Este ciclo de construcciones mentales se logra a través de los mecanismos mentales como se describe a continuación:
• **Prueba diagnóstica de números enteros.** Se realiza un ejercicio que evalúa los preconceptos que los estudiantes tienen sobre los números enteros a través de una prueba diagnóstica. **Anexo 2**	Antes de iniciar con el clico APOE es importante tener en cuenta aquellos esquemas que ya tienen los estudiantes pues de alguna manera el estudiante los utiliza para la fase de construcción de un nuevo esquema conceptual.

• **Demostraciones de las operaciones entre números negativos orientada a situaciones cotidianas.**	**Acción** Es importante que los estudiantes comprendan el origen de los números negativos. ¿se puede demostrar que - por - es +? Lo anterior muestra que los matemáticos así lo han creído, porque lo han intentado innumerables veces y de diversas formas. (GÓMEZ, n.d.)
• **Ejercicios y problemas interactivos y no interactivos Suma, resta, multiplicación y división de enteros.** • **Polinomios aritméticos con enteros, utilizando las tics y el enfoque STEAM.**	En la actualidad los docentes suelen indicar a sus estudiantes que la regla de las operaciones no se demuestra, que viene dada por simple definición de los números negativos, esta justificación no parece didácticamente la más adecuada, pues escasea la comprensión de numero entero negativo allí. IngE Darwin, un youtuber enseñante de las matemáticas, realiza tres demostraciones sencillas sobre la operatividad de los signos. https://youtu.be/XjCZt1SkHb8https://youtu.be/XjCZt1SkHb8 Demostraciones que muestran una aplicabilidad en la vida cotidiana de esa regla de los signos, que los docentes la enseñan memorística y mecánicamente, pero podemos ver que hay distintas formas de comprender la negatividad de los signos, y posterior a esto se pueden realizar ejercicios con un nivel de comprensión mayor.
• **Situaciones Problemas que puedan integrarse con otras áreas del conocimiento.** Se trabaja básicamente el concepto de suma, resta,	Cuando el estudiante trabaja en comprender la regla de las operaciones, realiza acciones, en este caso, operaciones utilizando los signos “positivo” y “negativo” para describir cantidades relativas. cuando los estudiantes repiten esas acciones y reflexionan, entra en juego el **mecanismo de interiorización** dando paso al proceso mental que el estudiante va construyendo. Sin embargo es muy importante mencionar que el dentro de su práctica las acciones pertinentes para que el estudiante evite aplicar la ley de signos

multiplicación y división con enteros. se inicia con actividades muy cotidianas, poco a poco se va aumentando el nivel de abstracción y finaliza con algunos problemas sobre estas operaciones. Donde se utilizan los signos "positivo" y "negativo" para describir cantidades relativas con números enteros. Utilizando los métodos de enseñanza como el aprendizaje colaborativo y El aprendizaje basado en problemas, que permiten crear situaciones problema, fundamentales, para realizar actividades, discusiones en clase, ejercicios entre pares y grupos. Fomentando la creatividad, la curiosidad y el interés de los estudiantes, a través de situaciones que se asemejen a su realidad y donde puedan ver estructuras matemáticas en cada aspecto de sus vidas. permiten remplazar esas lecciones magistrales, ayudados de las tics, dado que, tienen un lugar muy importante en la	de la multiplicación y la división en la suma o resta de números negativos o en la combinación de estos cuando son positivos con negativos en operaciones de suma y resta utilizando ejemplos de la vida cotidiana. Para las actividades que se realicen en esta fase del ciclo APOE se recomienda trabajar por medio de grupos colaborativos. **Proceso** Cuando el estudiante comprende la regla de los signos puede empezar a resolver problemas que involucren polinomios aritméticos, y los ve como un procedimiento dinámico. Donde el proceso también puede generarse por el **mecanismo mental de *coordinación*** de dos o más procesos como la utilización de cantidades negativas para la suma, resta multiplicación y división de números enteros en un solo problema de aprendizaje. **Objeto** Las acciones y procesos son transformaciones dinámicas que pueden transformar otro tipo de construcciones, denominadas *objetos*, que son estáticas como resultado del **mecanismo mental de la *encapsulación*** de un proceso. Cuando un estudiante piensa en el proceso como un todo, y realiza problemas con enteros entendiendo las operaciones que realiza al solucionarlos. Se puede decir que posee una concepción *objeto* al aplicar el mecanismo También es importante el **mecanismo mental de desencapsular,** que consiste en regresar sobre el proceso que determinó, permite la coordinación con otros procesos y la generación de nuevos procesos para la encapsulación en

actualidad educativa y son un potencial significativo en el aprendizaje de las matemáticas. Además, la implementación del enfoque STEAM a través de la integración diciplinar convierten la realidad académica en más innovadora y actual.	nuevos objetos. Y así el estudiante pode Interpretar y justificar cálculos numéricos al solucionar problemas con números enteros. **Esquemas** cuando el estudiante logra las primeras construcciones mentales puede generar esquemas. donde hace una reconstrucción de su conocimiento como resultado de la reflexión sobre las condiciones de los problemas planteados. En otras palabras, puede resolver problemas en los que intervienen cantidades positivas y negativas en procesos de comparación, transformación y representación. A través de este ciclo APOE construye significados a partir de las situaciones problemas. Con el esquema incorporado el estudiante por medio del **mecanismo mental de la generalización** puede realizar nuevas transformaciones (acciones y procesos). Como menciona Dubinsky (1994).

6. CONCLUSIONES

Es evidente que los malos resultados en el aprendizaje de los números enteros están asociados en buena parte a prácticas de enseñanza deficientes; reconocerlo y abordar el problema significa que los docentes deben ir en búsqueda de mejores procesos de enseñanza aprendizaje y en consecuencia obtener mejores resultados académicos. Para esto, este trabajo se enfocó en se realizar una revisión bibliográfica, que hiciera referencia a métodos y modalidades de enseñanza, pero restringiendo su examen a los procesos de enseñanza y aprendizaje de operaciones básicas con números enteros, en esta búsqueda se encuentra que, para la enseñanza de los números enteros, la modalidad de clases prácticas, desde la mirada de la teoría APOE, es una muy buena opción para mejorar las prácticas de aula. También se resaltan métodos de enseñanza como; aprendizaje colaborativo y aprendizaje basado en problemas, teniendo en cuenta las tics y el enfoque de enseñanza STEAM. La implementación de estos métodos de enseñanza tiene como finalidad, que los estudiantes realicen construcciones mentales.

Dentro del análisis expuesto, es posible vislumbrar que contrastar métodos y modalidades de enseñanza que favorecen la adquisición de esquemas conceptuales, en el desarrollo de las operaciones básicas con números enteros, sirve para interpretar estrategias cognitivas en el aprendizaje que impacten positivamente en la enseñanza de los términos y conceptos básicos de los números enteros, enseñados en los primeros años de la educación básica secundaria y así fortalecer el pensamiento numérico en los estudiantes.

Las clases prácticas que como se ha venido mencionando permiten desarrollar diversos métodos de enseñanza como la resolución de problemas, ABP, trabajo colaborativo, entre otros. Es importante así que los docentes conozcan diversas modalidades y métodos, rompiendo así, obstáculos didácticos en la enseñanza de los números enteros. A través de esta modalidad y métodos de enseñanza los estudiantes realizan construcciones mentales del concepto de número entero.

Finalmente, la construcción de esta monografía es con la intención de ser divulgada como una herramienta para la enseñanza de los números enteros, la cual pueda contribuir como un referente didáctico desde la mirada de la teoría APOE. Lo anterior, partiendo de la implementación de la descomposición genética, como una herramienta útil para aquellos profesionales de la educación que quieran mejorar sus prácticas de enseñanza y fortalecer en los estudiantes la comprensión de un objeto matemático, pues la construcción adecuada de un esquema conceptual es necesaria para que las prácticas docentes sean pertinentes y eficaces.

7. Recomendaciones

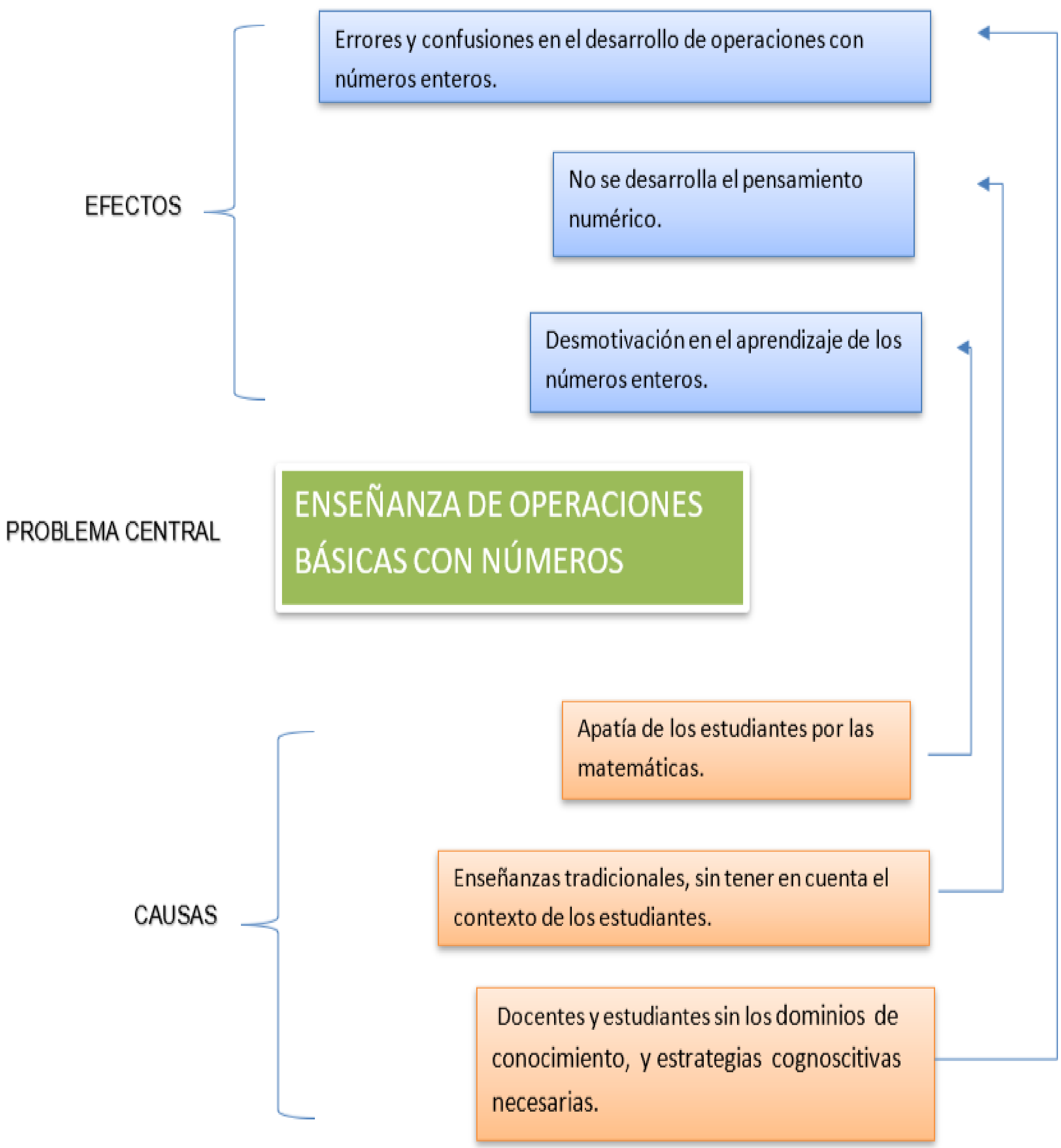
En las prácticas de aula, específicamente en la enseñanza de números enteros se hace necesario tener en cuenta los errores que se pueden presentar, las dificultades que se evidencian y los obstáculos que se deben superar a partir de la reflexión misma de las prácticas de aula, mejorando modalidades y métodos de enseñanza, para que nuestros estudiantes tengan un aprendizaje óptimo del objeto matemático a enseñar, en este caso el número entero.

El 2020 trajo consigo no solo una pandemia, sino también un gran desafío para los docentes. Hizo evidente la necesidad de evaluar y repensar en cuánto a modalidades y métodos de enseñanza. Ya se contaba con estudiantes nativos digitales, la falencia estaba o está en los docentes, el 2020 hizo evidente la necesidad de los docentes en involucrar las tecnologías en sus modalidades y métodos de enseñanza.

Esa monografía hace referencia a la enseñanza de los números enteros desde la mirada de la teoría APOE, modalidades y métodos de enseñanza, esta teoría nace del trabajo de Dubinsky y su preocupación por los procesos de aprendizaje en matemáticas. Pero abre la posibilidad a futuros lectores e investigadores a mirar esta temática desde otros referentes teóricos.

ANEXOS

Anexo A: Árbol de Problemas



Anexo B. Prueba diagnóstica

Tomado de: Prof. Roberto Carrasco F.

SELECCIÓN MÚLTIPLE:

Responde marcando la letra de la alternativa que consideres correcta y realiza los cálculos pertinentes que permitan determinar la respuesta.

01.- ¿Cuál es la cantidad que no puede expresarse con un número negativo?

a) un año antes de la era de Cristo
b) un desplazamiento hacia abajo
c) un depósito en un banco
d) un giro de una cuenta bancaria

02.- ¿Cuál de las siguientes sucesiones está ordenada correctamente de mayor a menor?

a) 7, 6, -5, -4
b) 10, 0, -1, -2
c) -3, -2, 1, 2
d) -4, -5, 2, 1

03.- Si un termómetro marca en la mañana una temperatura de -3º C y en la tarde marca 5 Grados más, ¿qué temperatura indica?

a) -8
b) 8
c) 5
d) 2

04.- Una sustancia que está a 8º C bajo cero se calienta hasta llegar a una temperatura de 15º C. ¿Cuál es la variación de su temperatura?

a) 7º C
b) 23º C
c) 15º C
d) 8º C

05.- El resultado de $-4 - (-7) + (-8) + (-11)$ es:

a) -16
b) 7
c) -30
d) -8

06.- Al resolver $(-18 - 2) \cdot (-7 + 8) + (-12 : 3)$ se obtiene:

a) -16

b) 24
c) 16
d) -24

07.- El valor que adquiere la expresión (d : e) + (a – b + c) + e , si se considera que a = -3 , b= -5 , c= 6, d= 8 , e= -4, es:

a) 2
b) 8
c) 6
d) 10

08.- Un ascensor que se encontraba en el piso 7, subió 3 pisos, luego bajó 6 y por último bajó 2. ¿En qué piso quedó finalmente el ascensor?

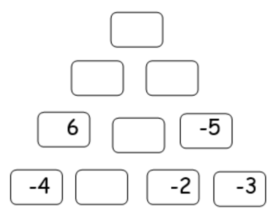
a) en el piso 4
b) en el piso 2
c) en el piso 5
d) en el piso 3

09.- De acuerdo al problema anterior, ¿cuántos pisos se desplaza el ascensor?

a) 4
b) 18
c) 16
d) 11

10.- Al completar la pirámide, el valor que se obtiene en el casillero superior es:

a) 21
b) 5
c) 17
d) 27



El valor de un casillero es la
Suma de los dos inferiores.

11.- Un submarino se demoró 5 horas en llegar a -250 m con respecto al nivel del mar. Si cada hora bajó la misma cantidad de metros, ¿cuántos metros se sumerge en 3 horas?

a) 150
b) -150
c) 50
d) -50

12.- Un termómetro marca -18º C a las 6 de la mañana. Si la temperatura aumenta 3º C cada Una hora, ¿cuánto marcará el termómetro al cabo de 9 horas?

a) -9
b) -45
c) 45
d) 9

13.- Si se multiplican cincuenta números negativos, siempre se obtiene un número:

a) par
b) impar
c) positivo
d) negativo

14.- Si **n** es un número negativo, entonces **n • n • n** es:

a) par
b) impar
c) positivo
d) negativo

15.- Si **n** y **m** son positivos con **m** mayor que **n**, entonces (**n – m**) es:

a) par
b) impar
c) positivo
d) negativo

Resuelve los siguientes problemas:

a. Un buzo encargado de fotografiar la fauna marina desciende a una profundidad de 8m con respecto al nivel del mar. Luego, sube 2m, vuelve a descender 3m y sube 4m ¿A qué profundidad se encuentra el buzo?

b. Un día de invierno amaneció a 3 grados bajo cero. A las doce del mediodía la temperatura había subido 8 grados, y hasta las cuatro de la tarde subió 2 grados más. Desde las cuatro hasta las doce de la noche bajó 4 grados, y desde las doce a las 6 de la mañana bajó 5 grados más. ¿Qué temperatura hacía a esa hora?

c. Pitágoras nació el año 585 a.C y murió el año 495 a.C ¿Cuántos años vivió Pitágoras?

Escribo el número entero que corresponde para cada caso:

a. $\frac{(\ -30\ )}{\quad} = \ 5$ porque ____× 5= -30 **b.** $\frac{(\ -21\ )}{3} =$ __ porque ____× 3= -21

c. $\frac{(\quad)}{-12} = \ 3$ porque (-12)× 3= ______ **d.** $\frac{(\ -40\ )}{\quad} =$ ___ porque 5× _____= -40

Bibliografía.

Jaimes Contreras, L. A., Chaves Escobar, R. F., & Vargas Hernández, J. (2018). La descomposición genética como herramienta para matemáticos, ingenieros y licenciados en la enseñanza del cálculo: Investigación en educación matemática. *Revista Boletín Redipe*, *6*(9), 73–78. Recuperado a partir de https://revista.redipe.org/index.php/1/article/view/351

Restrepo Gómez, B. (2002). Una variante pedagógica de la investigación-acción educativa. *Revista Iberoamericana De Educación*, *29*(1), 1-10. https://doi.org/10.35362/rie2912898

Aponte; Rivera. (2017). *DIFICULTADES, OBSTÁCULOS Y ERRORES EN EL APRENDIZAJE DEL NÚMERO ENTERO PRESENTADAS EN UN OBJETO VIRTUAL DE APRENDIZAJE*.

García, F., & 2018. (2018). *Comprensión del Concepto de Número Decimal en El Marco de la Teoría APOE*. 6.

GERARDO, M. E. W. (2018). PROPUESTA DIDÁCTICA DE APRENDIZAJE BASADO EN PROBLEMAS DIRIGIDA. *UNIVERSIDAD CATÓLICA DEL ECUADOR*, *2*, 227–249.

GÓMEZ, B. E. G. (n.d.). *LA JUSTIFICACIÓN DE LA REGLA DE LOS S IGNOS EN LOS LIBROS DE TEXTO : ¿ POR QUÉ MENOS POR MENOS ES MÁS ?* (p. C APÍTULO 18).

Han, E. S., & goleman, daniel; boyatzis, Richard; Mckee, A. (2019). STEAM COMO ENFOQUE INTERDISCIPLINARIO E INCLUSIVO PARA DESARROLLAR LAS POTENCIALIDADES Y COMPETENCIAS ACTUALES. *Journal of Chemical Information and Modeling*, *53*(9), 1689–1699.

Jaimes Contreras, L. A., Chavez Escobar, R. F., & Vargas Hernández, J. (2017). La descomposición genética como herramienta para matemáticos, ingenieros y licenciados en la enseñanza del cálculo: Investigación en educación matemática. *Revista Boletín Redipe*, *6*(9), 73–78.

https://revista.redipe.org/index.php/1/article/view/351

Madihah Khalid, Z. E. 2019. (2019). Sources and Possible Causes of Errors and Misconceptions in Operations of Integers. *International Electronic Journal of Mathematics Education*, *15*(2). https://doi.org/10.29333/iejme/6265

Mario de Miguel Díaz. (2005). *Modalidades de enseñanza*. http://www.uvic.es/sites/default/files/Ensenanza_para_competencias.PDF

Maz-Machado, A., & Rico-Romero, L. (2009). Números negativos en los siglos XVIII y XIX: Fenomenología y representaciones. *Electronic Journal of Research in Educational Psychology*, *7*(1), 537–554. https://doi.org/10.25115/ejrep.v7i17.1343

Mehmood, K., Parveen, Q., & Dahar, M. A. (2019). Effectiveness of Inquiry-Based Method for Teaching Mathematics at the Secondary Level. *Global Social Sciences Review*, *IV*(III), 181–187. https://doi.org/10.31703/gssr.2019(iv-iii).23

Smith, T. A. (2016). *ESTRATEGIAS LÚDICAS PARA LA ENSEÑANZA DE LAS OPERACIONES BÁSICAS CON NÚMEROS ENTEROS EN LOS ESTUDIANTES DE SEXTO GRADO DE LA INSTITUCIÓN EDUCATIVA TÉCNICA AGROPECUARIA LA BUENA ESPERANZA*. *August*.