

# Adaptación del Método del Multiescalamiento para la Estimación de Caudales Máximos en Colombia

*Oscar José Mesa Sánchez, Jaime Ignacio Vélez Upegui,  
Juan Diego Giraldo Osorio y Diana Isabel Quevedo Tejada*

Posgrado en Aprovechamiento de Recursos Hidráulicos  
Facultad de Minas, Escuela de Geociencia y Medio Ambiente  
Universidad Nacional de Colombia, Sede Medellín

**Palabras clave:** Caudales máximos, Multiescalamiento, Regionalización, Invarianza, Hidrología

## Resumen

La definición de subregiones hidrológicamente homogéneas supone invarianza en la distribución de probabilidad de las crecientes bajo una traslación de la escala, la cual puede ser indicada por el área de drenaje.

A diferencia del método de Escalamiento Simple, donde se supone que el coeficiente de variación  $C_V$  es constante para toda la subregión, el comportamiento del  $C_V$  en el método de Multiescalamiento permite la determinación del área crítica  $A_C$ , la cual define el rango de áreas donde se consideran cuencas pequeñas ( $A < A_C$ ) o grandes ( $A > A_C$ ). Esta división de las cuencas dentro de la subregión es conveniente y necesaria, dado que las propiedades de escalamiento de los caudales máximos presentan diferencias para cada uno de los rangos. El modelo considera estas diferencias y plantea las ecuaciones para cada intervalo de áreas. Además, es coherente con las observaciones empíricas que demuestran que los momentos de las series de caudales máximos son lineales log-log con el área, pero que las pendientes de estas rectas no crecen linealmente con el orden del momento, como si se evidencia en los modelos de escalamiento simple.

Se aplicó el modelo de Multiescalamiento, utilizando cinco diferentes distribuciones Lévy, en diferentes subregiones del país definidas ad hoc. En cada una de ellas se calcularon los parámetros para el modelo y se verificaron las propiedades de multiescalado de los caudales máximos. Se muestra la conexión de la teoría con el método de regresión de cuantiles desarrollado por el Servicio Geológico de los Estados Unidos (USGS), ampliamente utilizado en la regionalización de crecientes. Finalmente, se aplicó el modelo ajustado para cada subregión en estaciones de validación seleccionadas en cada rango de áreas; este procedimiento demostró que las propiedades de multiescalamiento son más fuertes en las cuencas más grandes y que el modelo se les ajusta mejor.

**Key words:** Peak floods, Multiscaling, Regional Analysis, Invariance, Hydrology

## Abstract

Definition of hydrologically homogenous regions supposes invariance of the probability distribution of peak floods under a scale translation, that could be indicated by the drainage area. In the simple scaling, one assumes that the coefficient of variation  $C_V$  is constant for all the subregion, while in the Multiscaling method the behavior of  $C_V$  allows the determination of the critical area  $A_C$ , which defines the range of areas where small river basins ( $A < A_C$ ) or large river basins ( $A > A_C$ ) are considered. This division of the river basins within the subregion is advisable and necessary, since the scaling properties of the crescents show differences for each one of the ranks. The model considers these differences and raises the equations for each interval of areas. In addition, it is coherent with the empirical observations showing that the moments of the maximum volumes series are linear log-log with the area, but the slopes of these straight lines do not grow linearly with the moment order, but they can be predicted by the simple scaling model. The multiscaling model was applied by using five different Lévy distributions, in different defined subregions of the country defined ad hoc. In each one of them, the parameters for the model were calculated and the multiscaling properties of maximum floods were verified. The connection of the theory with the quantiles regression method developed by the Geologic Service of the United States (USGS) widely used in the regionalization of crescents is shown. Finally, the fitted model for each subregion in selected stations of validation in each rank of areas was applied; this procedure demonstrated that the multiescaling properties are stronger in the greatest river basins and than the model fits better to them.

## 1. Introducción

Los caudales máximos son considerados como uno de los principales agentes geomorfológicos, los cuales forman los sistemas de drenaje y modelan la topografía (*Gupta, Mesa & Dawdy, 1994*). Particularmente en Colombia, no sólo su característica modeladora hace de estos eventos motivo de estudio y de implantación de nuevas metodologías para su estimación, sino también el enorme déficit en la cobertura de la red nacional de medición de caudales, presentándose zonas totalmente desprovistas de información.

En miras a compensar la escasez de información, se introduce el concepto de regionalización, donde se busca primordialmente dividir el país en regiones cuyas características topográficas, climáticas, orográficas, etc., sean similares. Esta calidad de "similar", se entiende como homogeneidad estadística, y significa que un proceso hidrológico es estadísticamente homogéneo, si su estructura espacial permanece similar a ella misma ante cambios de escala.

La teoría del Multiescalamiento introduce una nueva posibilidad en la estimación de caudales máximos, dado que su planteamiento matemático se acomoda a la estructura de variabilidad espacial de los datos, hecho de importancia fundamental en el modelamiento y

predicción. Es de interés particular en este estudio adaptar este método para la estimación de caudales máximos en Colombia, además de demostrar la conveniencia de su utilización ya que éste plantea diferentes tipos de ecuaciones de acuerdo a los rangos de áreas establecidos en cada subregión de acuerdo a la tendencia del coeficiente de variación ( $C_v$ ) de los datos con el área, definiéndose así un área crítica ( $A_c$ ) para cada una de dichas subregiones

## **2. Información y aspectos metodológicos**

La información de caudales máximos utilizada en el estudio fue suministrada principalmente por el IDEAM, entidad encargada de administrar la información de las estaciones hidrometeorológicas en todo el país. También se disponía de estaciones pertenecientes a la Corporación Autónoma Regional del Valle del Cauca (CVC), digitadas del Boletín Hidrológico 1991-1992, ubicadas en los departamentos del Cauca y el Valle del Cauca; estaciones de Empresas Públicas de Medellín (EMP) y de la Corporación Autónoma Regional de Cundinamarca (CAR), disponibles de trabajos desarrollados anteriormente en el Posgrado de Aprovechamiento de Recursos Hidráulicos, con estaciones en la región montañosa de Antioquia y sobre el altiplano de la cordillera oriental de los Andes colombianos, respectivamente. En total, se contó se realizó el estudio con 241 estaciones de caudal máximo distribuidas sobre todo el país (*Giraldo y Quevedo, 2001*).

### **2.1 Regionalización**

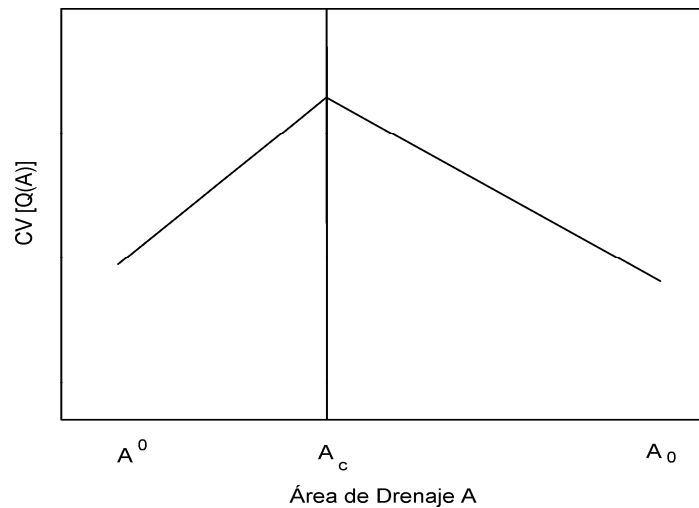
Los métodos de estimación de caudales máximos utilizados en zonas donde la información es escasa o nula, involucran el término de regionalización, que consiste en la división de la región de estudio en subzonas definidas por criterios que varían desde la contribución de los datos de los sitios de medición, aspectos del comportamiento de los caudales máximos que sean considerados homogéneos, o incluso regiones geográficamente contiguas. Todo esto con el fin de obtener subregiones estadísticamente homogéneas.

El concepto de homogeneidad o estacionaridad en la probabilidad, se refiere a una invarianza en las distribuciones de probabilidad de un proceso estocástico si el parámetro índice cambia a otro. El resultado de homogeneidad estadística de los caudales máximos puede estar físicamente motivado por la variabilidad inherente en las características de los caudales en cualquier región. Esto es, variabilidad en la humedad del suelo, en topografía, en precipitación, etc., donde todos o alguno de estos contribuye en las características de los caudales. Esta variabilidad es reflejada en la especificación de la distribución de frecuencia de los caudales. Si la variabilidad es similar sobre una región y sobre los efectos de los caudales, entonces la distribución de frecuencia de los caudales puede no depender de una ubicación particular dentro de la región; es decir, ésta distribución puede presentar dependencia con la magnitud y orden del vértice (*Gupta, et al, 1994*), donde se produce el evento (el orden lleva consigo el área aguas arriba de donde se produce la creciente).

En Colombia, se tiene alta variabilidad topográfica, de vegetación, de tipo de suelos, climatológica, etc. y es muy común encontrar que una corriente determinada, cruce de una o más regiones donde estas características varían ampliamente. La regionalización implementada para éste método fue muy gruesa, procurando tener además de un adecuado número de estaciones, zonas hdrológicas coherentes: Caribe, Pacífico y Cuenca del Río Atrato, Cauca, Magdalena y Llanos Orientales.

## 2.2 Método de Multiescalamiento

Este procedimiento considera que el comportamiento de los caudales máximos es diferente para las cuencas consideradas grandes y pequeñas. Esta división de las cuencas se da al observar el comportamiento del coeficiente de variación  $C_V$  con el área  $A$  que, en general para las cuencas pequeñas, tiende a crecer. La posibilidad de considerar un modelo para ambos rangos de áreas es discutida en *Gupta et al, 1994*; el  $C_V$  se puede tomar como una medida de la variabilidad espacial de las crecientes, y las suposiciones que sobre él hace el modelo se pueden visualizar en la figura (1); en esta figura,  $A_c$  es el área crítica que define una cuenca como grande o pequeña, y  $A_o$  y  $A^o$  son áreas de referencia tal que  $A_o$  es más grande que, y  $A^o$  es más pequeña que, todas las áreas de drenaje en la subregión, así:



**Figura 1** Variación del  $C_V$  regional con el área de drenaje

Las ecuaciones utilizadas para la aplicación del modelo están presentadas en (1) y (2). Una deducción detallada se encuentra en *Gupta et al, (1994)*

$$\ln q_p A = (a_0 - \mu_0 \ln A) + [b_0 - \sigma_0^\alpha \ln A]^{1/\alpha} w'_p \quad A_c < A < A_o \quad (1)$$

$$\ln q_p A = (\mu_1 \ln A - a_1) + [\sigma_1^\alpha \ln A - b_1]^{1/\alpha} w'_p \quad A^o < A < A_c \quad (2)$$

En (1), dadas las bases teóricas para la Regresión Empírica de Cuantiles desarrollada por el USGS (*Gupta et al, 1994, pág 3407*), se llega a una ecuación como la mostrada en (3)

$$q_p(A) = c(p)A^{\theta(p)} \quad (3)$$

Donde cada cuantil de los caudales pico es relacionado con el área de la cuenca en una regresión log-log (aunque se pueden incluir otros descriptores de la cuenca en la regresión, sin embargo, el área es un descriptor clave de sus características); el resultado es una ecuación donde los parámetros  $\theta()$  y  $c()$  dependen de la probabilidad de excedencia  $p$ .

La elección del área como descriptor de la cuenca no es arbitraria, dado que es un parámetro clave. En (3) los parámetros  $c(p)$  y  $\theta(p)$  son función de la probabilidad de excedencia  $p$ . Estas funciones empíricas se pueden derivar en términos de los parámetros del multiescalamiento  $a_0$ ,  $b_0$ ,  $\mu_0$ ,  $\sigma_0$  y  $w'_p$ . Utilizando algunas transformaciones matemáticas se puede llegar de (1) a

$$\begin{aligned} \ln q_p(A) &= (a_0 - \mu_0 \ln A) + b_0^{1/\alpha} w'_p - \frac{\sigma_0^\alpha}{\alpha b_0^{1-1/\alpha}} w'_p \ln A \\ &= \ln c(p) + \theta(p) \ln A \end{aligned} \quad (4)$$

donde el intercepto y el exponente de (3) están dados por

$$\ln c(p) = a_0 + b_0^{1/\alpha} w'_p \quad (5)$$

$$\theta(p) = -\mu_0 - \frac{\sigma_0^\alpha}{\alpha b_0^{1-1/\alpha}} w'_p \quad (6)$$

Estas expresiones de  $\ln c(p)$  y  $\theta(p)$  no son posibles para (2), excepto para el modelo de Cauchy donde  $\alpha = 1$ . Esto es debido a que no se puede llegar a una expresión en la que  $\ln q_p(A)$  y  $\ln(A)$  se relacionen linealmente.

Cualitativamente, el comportamiento del exponente que predice (5) es que un aumento de  $Tr$  implica que  $\theta(p)$  se haga más pequeño (si  $Tr$  aumenta,  $w'_p$  también lo hace). Esto significa que crecientes más grandes e infrecuentes tienen exponentes de escalado más pequeños que crecientes más frecuentes. Igualmente, el crecimiento de  $Tr$  implica que  $\ln c(p)$  en (6) también se incremente para los caudales más grandes.

Este comportamiento teórico está de acuerdo con las observaciones empíricas realizadas por la USGS utilizando el método de regresión de cuantiles, las cuales muestran que el comportamiento de los parámetros de (3) como función del periodo de retorno es el que predice la teoría del multiescalamiento.

En el caso  $A_C > A > A^0$ , la teoría predice que no se cumple la linealidad log-log entre los cuantiles y el área de drenaje a menos que se tome  $\alpha = 1$ .

### 3. Análisis y discusión de resultados

Para estimar los cuantiles para cada serie, se utilizó la fórmula de Weibull (Chow, 1994), para establecer las posiciones de los datos dentro de las muestras y luego, utilizando un procedimiento de interpolación lineal entre  $q_p(p)$  y  $p$ , se calcularon los cuantiles empíricos  $y_{p,i}$  para los siguientes probabilidades de excedencia en cada sitio  $i$  dentro de la subregión

Este procedimiento es arbitrario, sin embargo es menos sesgado que otro que se hubiese podido adoptar (Gupta, Mesa & Dawdy, 1994). Los cuantiles correspondientes a las crecientes más infrecuentes son dudosamente estimados, razón por la cual la probabilidad de excedencia se restringió a  $p \geq 0.03$ . En la estimación de los parámetros para cada subregión, inicialmente se aplicó (1) suponiendo que describía el comportamiento de todo el conjunto de cuencas. Los parámetros  $a_0$ ,  $b_0$ ,  $\mu_0$  y  $\sigma_0$  se estimaron entonces minimizando la suma del cuadrado de las diferencias entre los logaritmos de los cuantiles teóricos y empíricos

$$ss = \sum_i \sum_p (\log y_{p,i} - \log q_p(A_i)) \rightarrow \min \quad (7)$$

La suma se extiende sobre todas las estaciones de la subregión y sobre todos los cuantiles considerados. Este procedimiento se llevó a cabo para cada uno de los modelos listados en la tabla (1), los cuales se diferencian por valores fijos de  $\alpha$  y  $\beta$  y se identifican por  $d1$ ,  $d2$ ,  $d3$ ,  $d4$ ,  $d5$ .

**Tabla 1** Parámetros de las distribuciones Lèvy

Modelo	$\alpha$	$\beta$	Observación
d1	2.0	0	Normal
d2	1.5	1	
d3	1.5	0	
d4	1.5	-1	Cauchy
d5	1.0	0	

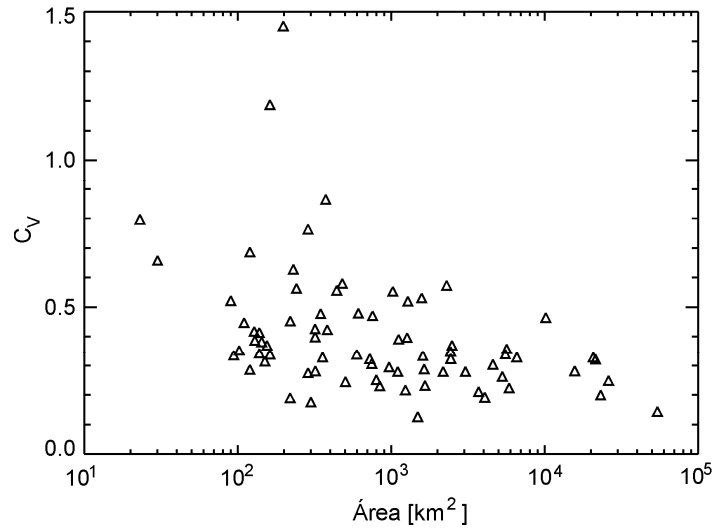
Para llevar a cabo la minimización es necesario especificar los valores de  $w'_p$  en (1). Los modelos normal  $d1$ ,  $d3$  y Cauchy  $d5$  son simétricos alrededor de 0. En consecuencia  $W^d = -W$  tienen los mismos cuantiles. Este no es el caso para  $d2$  y  $d4$ ; si  $g(w, a, b)$  denota la densidad de probabilidad de  $W$  y  $g(-w, a, b)$  de  $-W$  entonces

$$g(-w, \alpha, \beta) = g(w, \alpha, -\beta) \quad (8)$$

En el proceso de estimación de los parámetros para cuencas grandes y pequeñas, se hizo uso de las expresiones matemáticas planteadas anteriormente. Las áreas críticas se dedujeron de la observación del gráfico de  $C_v$  vs  $A$  para cada una de las subregiones. Los valores de  $A_c$  para las subregiones son: Llanos Orientales (900 km<sup>2</sup>), Pacífico y Cuenca del Atrato (1800 km<sup>2</sup>), Caribe (750 km<sup>2</sup>), Magdalena (290 km<sup>2</sup>), Cauca (230 km<sup>2</sup>) y para Colombia (260 km<sup>2</sup>). En la tabla (2) se muestran los resultados de estos procedimientos aplicando el modelo multiescalado Lognormal en todas las subregiones, donde  $i=0$  para  $A > A_c$  é  $i=1$  para  $A < A_c$

Con el fin de ilustrar la teoría, en las figuras siguientes se presentan gráficamente los resultados obtenidos para la subregión del Magdalena aplicando el modelo Lognormal. En la figura (2), se puede observar la tendencia decreciente del coeficiente de variación con el aumento en el área de drenaje; el área crítica asumida para ésta subregión, corresponde al punto donde se

consideró que cambia la tendencia general de la nube de puntos con respecto al área



**Figura 2**  $C_V$  vs  $A$ , subregión Magdalena

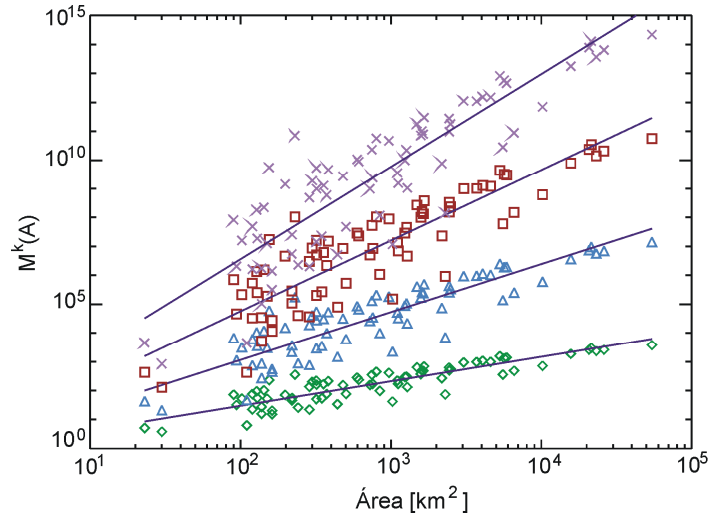
**Tabla 2** Parámetros ajustados al modelo multiescalado Lognormal

Subregión	Área	$a_i$	$\mu_i$	$b_i$	$\sigma_i$
Llanos Orientales		0.793	-0.754	0.253	0.018
	$A > A_c$	2.660	-0.542	0.221	0.016
	$A < A_c$	0.658	0.985	-0.159	0
Pacífico y Cuenca del Atrato		0.662	-0.782	0.163	0.013
	$A > A_c$	1.673	-0.653	0.190	0.015
	$A < A_c$	3.169	1.365	-0.063	0
Caribe		0.817	-0.670	0.511	0.035
	$A > A_c$	0.569	-0.696	0.215	0.015
	$A < A_c$	-0.367	0.757	-0.515	0
Magdalena		-0.705	-0.861	0.392	0.029
	$A > A_c$	0.171	-0.751	0.334	0.025
	$A < A_c$	2.664	1.239	-0.303	0
Cauca		0.591	-0.671	0.396	0.031
	$A > A_c$	0.552	-0.674	0.314	0.024
	$A < A_c$	-0.276	0.752	-0.286	0

De los parámetros obtenidos del ajuste de (1) y utilizando (9), se calcularon los momentos estimados por el modelo Lognormal tanto para el conjunto de datos completo (utilizando la fórmula correspondiente a las áreas mayores) como discretizado por áreas.

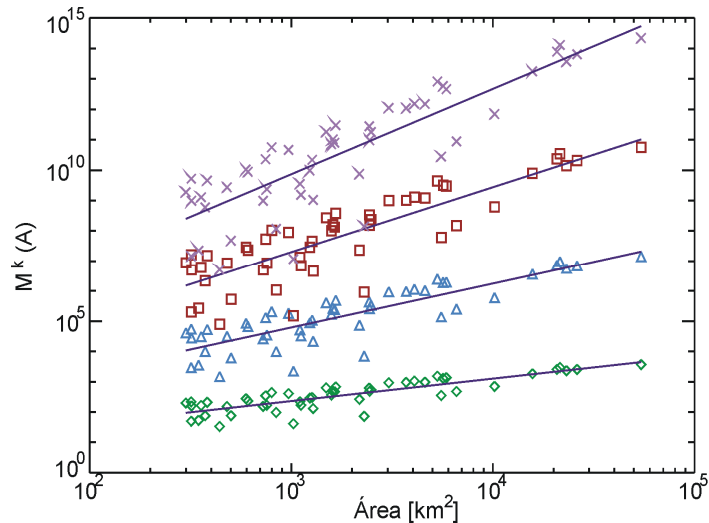
$$\log E[Q^n(A)] = a_0 n + \frac{1}{2} b_0 n^2 + \left( -\mu_0 n - \frac{1}{2} \sigma_0^2 n^2 \right) \log A \quad n = 1, 2, \dots \quad (9)$$

Se observa en la figura (3) que la estimación de los momentos es adecuada, a pesar de la dispersión de los puntos calculados en cada estación, esto debido seguramente a la gruesa regionalización utilizada para este método. La dispersión de los puntos para los dos primeros momentos es menor comparada con la del tercer y cuarto momento.



**Figura 3** Momentos vs Área de drenaje para todas las estaciones, subregión Magdalena

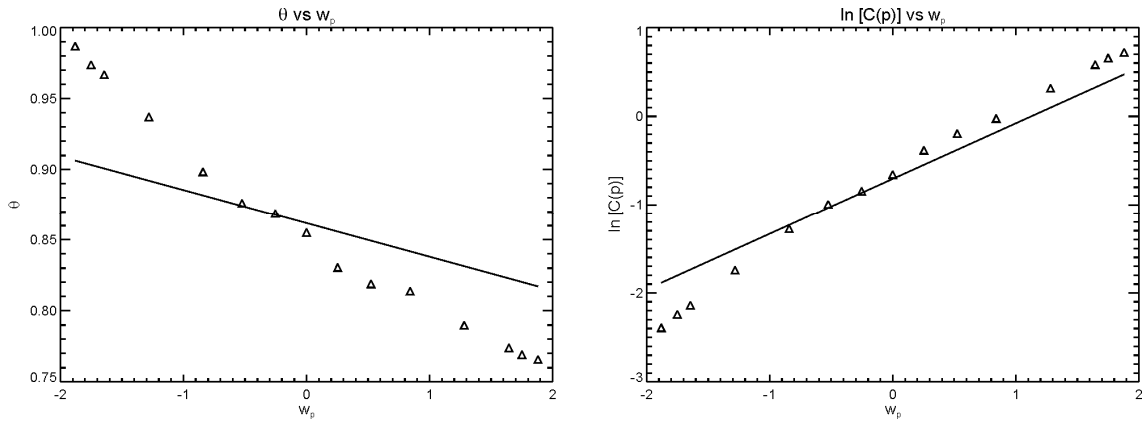
Al aplicar (9) sólo a las cuencas consideradas grandes, la predicción de los momentos por parte de los modelos mejora, como se puede observar en la figura (4)



**Figura 4** Predicción de los momentos para cuencas grandes en la subregión Magdalena, según modelo multiescalado Lognormal

Utilizando el método de regresión de cuantiles (RC) y el multiescalamiento (M) se obtuvieron los valores de  $\log c(p)$  y  $\theta(p)$ . Los resultados se muestran en los gráficos  $\theta(p)$  vs  $w_p$  y  $\log c(p)$  vs  $w_p$  de la figura (5), donde las líneas representan la estimación del modelo multiescalado de estos parámetros utilizando (9) y (10). Se observa que el modelo multiescalado respeta el comportamiento de estos parámetros con  $p$  a pesar de la dispersión. La relación entre el método de regresión de cuantiles y el multiescalamiento existe y es coherente.

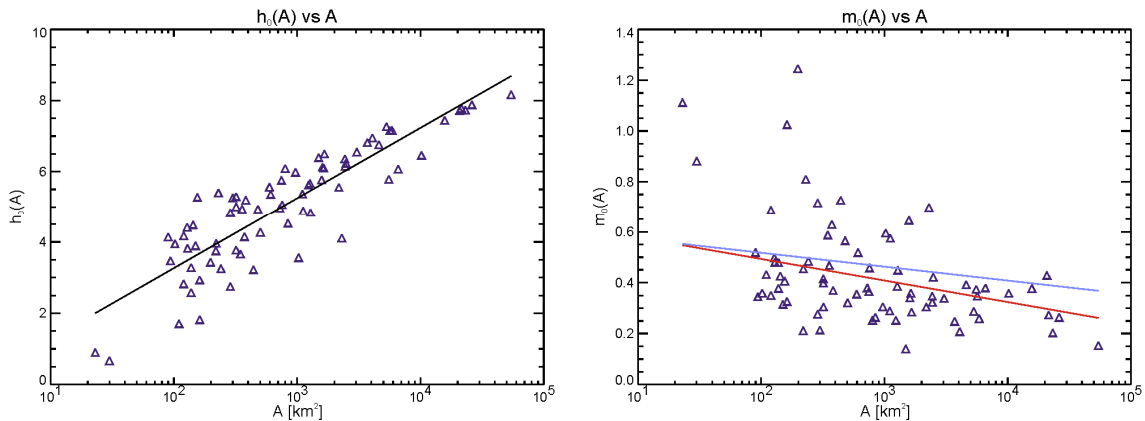




**Figura 5** Valores de  $\theta$  y  $\log c(p)$  calculados con el método de regresión de cuantiles. Las líneas continuas representan estos valores estimados con el modelo multiescalado Lognormal

Se realizaron pruebas adicionales para ilustrar la estructura de la teoría en relación con los datos; se estableció la relación lineal entre los cuantiles empíricos de los datos y los datos por los modelos mediante la expresión (10). El subíndice  $j=1$  se refiere a cuencas pequeñas, y  $j=0$  a cuencas grandes, para mayor ilustración ver Gupta, Mesa & Dawdy (1994)

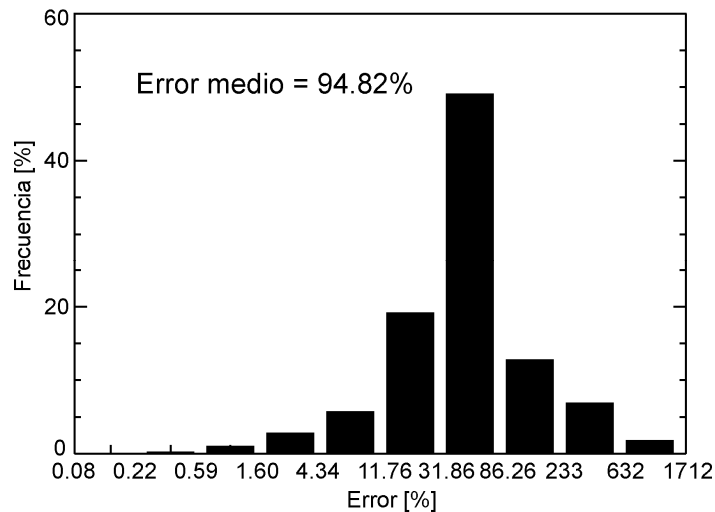
$$\log q_p(A_i) = h_j(A_i) + m_j(A_i)w'_p \quad j = 1,0 \quad (10)$$



**Figura 6** Valores de  $h$  y  $m$ , ( $\Delta$ ) calculados a partir de los datos, (línea continua) estimados con el modelo multiescalado Lognormal

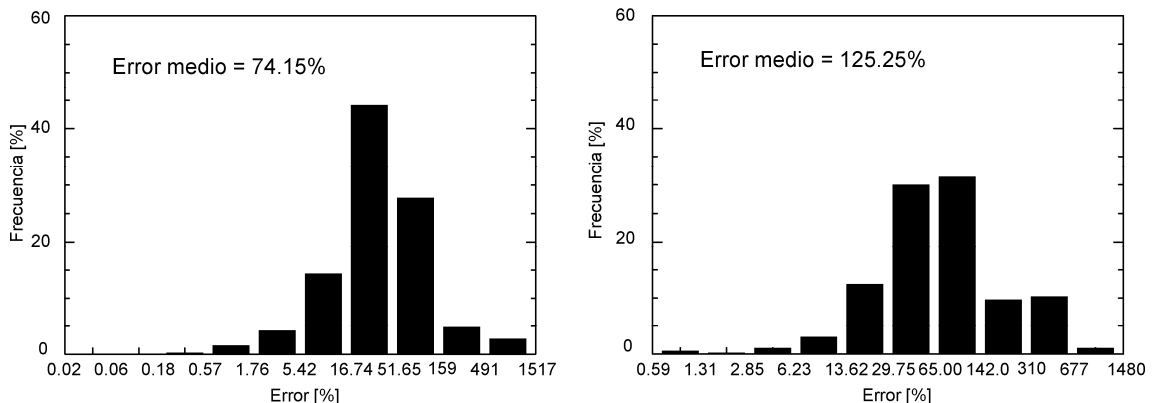
En la figura (6), se observa alta dispersión de los puntos en ambos gráficos; se tiene además una tendencia de  $m_0(A_i)$  a decrecer mientras que  $A$  aumenta (línea color rojo). En este mismo gráfico se introduce una linealización de esta ecuación por expansión en series de Taylor (línea color azul), se observa poca diferencia de la línea de color rojo; resultados que soportan la afirmación de la relación lineal log-log entre los cuantiles de caudales y el área de drenaje.

Finalmente, se muestra en la figura (7) el histograma de frecuencia de los errores relativos para la subregión Magdalena, indicando que la mayor frecuencia en el error (50% de las estaciones) presenta errores de estimación entre  $[31.86-86.26]\%$ , considerablemente altos.



**Figura 7** Histograma de errores para el modelo multiescalado Lognormal aplicado a la subregión Magdalena (todas las estaciones)

Los histogramas de errores considerando sólo las cuencas grandes o pequeñas se encuentra en la figura (8). El error relativo promedio para las cuencas grandes es menor comparado con el error de las cuencas pequeñas e incluso que para todo el conjunto de estaciones en la subregión (figura 8). Esto es debido a que en las cuencas grandes el modelo de multiescalamiento se ajusta mejor que en las cuencas pequeñas.



**Figura 8** Histograma de errores relativos (izq) cuencas grandes, (der) cuencas pequeñas

#### 4. Conclusiones

El método de Multiescalamiento involucra factores físicos en la estimación de los caudales al considerar comportamientos diferentes para las cuencas con áreas grandes y pequeñas. Inicialmente se consideró que el método describía el comportamiento general de las crecientes utilizando una sola ecuación para el conjunto de todas las estaciones de cada subregión, sin embargo los estimados mejoran para las cuencas grandes al definir el área crítica según el comportamiento del  $C_V$  con el área. Para las cuencas grandes el parámetro  $\sigma_i^\alpha$  es significativamente diferente de cero, lo que no ocurre para las cuencas más pequeñas; esto determina propiedades de multiescalamiento más fuertes para las cuencas más grandes, ya

que lleva consigo información de la variabilidad espacial de los caudales.

A pesar de su importancia en la definición de las características de escalamiento, aún no existen bases físicas ni teóricas firmes que apoyen la selección del área crítica  $A_c$  al observar el comportamiento del gráfico  $C_V$  vs  $A$ . Una mejor elección de este parámetro se haría al ajustar los parámetros del modelo con varios valores de  $A_c$  y obtener de esta manera el que menor error produzca en la estimación.

Se recomienda especial atención en los criterios de regionalización para éste método: deben tenerse en cuenta los requerimientos de longitud de información, variables geomorfológicas, ubicación geográfica, variabilidad climática, etc. La adecuada definición de las subregiones influye de manera decisiva en los resultados de los modelos.

La información sobre caudales máximos en Colombia, a pesar de no ser escasa, presenta serios problemas por la deficiencia de la calidad. La corta longitud de los registros y el alto porcentaje de datos faltantes hacen que las series pierdan valor. Además, los cortes en las series generalmente introducen cambios en los parámetros estadísticos que obligan en algunos casos a desechar la información.

La no linealidad del escalamiento de los caudales máximos se convierte en un obstáculo para cuencas grandes que no presentan homogeneidad hidroclimatológica en toda su extensión, ya que en las fronteras de las subregiones se presentan discontinuidades en los parámetros de los modelos. La integración de los parámetros al interior de la cuenca aún no es satisfactoria.

## **5. Referencias bibliográficas**

**BATES, B. C. & BURGESS, S. J.**, *A Review of regional Flood Frequency Estimation Techniques*

**CHOW, V. T., MAIDMENT, D. R. & MAYS, L.W.**, *Hidrología Aplicada*, McGraw Hill, 1a ed., Santafé de Bogotá, 1994, pags 391-406

**Corporación Autónoma Regional del Valle del Cauca**, *Boletín Hidrológico 1991-1992*

**GUPTA, V. K., & DAWDY, D. R.**, *Multiscaling and Skew Separation in Regional Floods*, *Water Resources Research*, vol 31, No.11, 1995, pags 2761-2767

**GUPTA, V. K., & DAWDY, D. R.**, *Physical Interpretations of Regional Variations in the Scaling Exponents of Flood Quantiles*, *Hydrologic Processes*, vol 9, No.3/4, august 1994, pags 347-361

**GUPTA, V. K., MESA, O. J. & DAWDY, D. R.**, *Multiscaling theory of flood peaks: regional quantile analysis*, *Water Resources Research*, vol. 30, No. 12, december 1994, pags 3405-3421.

**GUPTA, V. K., & WAYMIRE, E.**, *Multiscaling Properties of Spatial Rainfall and River Flow Distributions*, *Journal of Geophysical Research*, vol 95, No. D3, february 1990, pags 1999-2009

**GUPTA, V. K., & WAYMIRE, E.,** *Statical Self - Similarity in River Networks Parameterized by Elevation*, Water Resources Research, vol 25, No. 3, march 1989, pags 463-476

**INSTITUTO DE HIDROLOGÍA, METEOROLOGÍA Y ESTUDIOS AMBIENTALES IDEAM,** *Estadísticas Hidrológicas de Colombia 1990-1993*, Tomos I y II, Santafe de Bogotá, 1995.

**MANTILLA, R. I.,** *Análisis multiescala de propiedades morfométricas y de caudales máximos de cuencas hidrográficas de Colombia*, Trabajo dirigido de grado presentado como requisito parcial para optar por el título de ingeniero Civil, Universidad Nacional de Colombia, Facultad de Minas, Departamento de Ingeniería Civil, Medellín, 1999, pags 119-122

**GIRALDO, J. D. Y QUEVEDO, D. I.,** *Adaptación del Método de Multiescalamiento para la Estimación de Caudales Máximos en Colombia*, Trabajo dirigido de grado presentado como requisito parcial para optar por el título de Ingeniero Civil, Universidad Nacional de Colombia, Facultad de Minas, Escuela de Ingeniería Civil, Medellín, 2001

**SMITH, J. A.,** *Representation of Basin Scale in Flood Peak Distributions*, Water Resources Research, vol 28, No. 11, november 1992, pags 2993-2999

**SMITH, R, Y VÉLEZ, M. V.,** *Hidrología de Antioquia*, Universidad Nacional de Colombia, Facultad de Minas, Posgrado en Aprovechamiento de Recursos Hidráulicos, Medellín, 1997, pags 24-27, 30-33, 57-72, 118-119, 145-148

**VELEZ, J. I., POVEDA, G. Y MESA, O. J.,** *Balances Hidrológicos de Colombia*, Posgrado en Aprovechamiento de Recursos Hidráulicos, Facultad de Minas, Universidad Nacional de Colombia, Medellín, 2000, pags 6-8.

**VOGEL, R. M. & SANKARASUBRAMANIAN, A.,** *Spatial Scaling Propierties of Annual Streamflow in the United States*, Hydrological Sciences, vol 45, No. 3, june 2000, pags 465-476

<http://poseidon.unalmed.edu.co/hidrosig>

[www.cas.american.edu/~jpnolan](http://www.cas.american.edu/~jpnolan)