

Observemos que la suma de las columnas 3 y 4 de la matriz $\beta(\tilde{K})$ es igual al vector $\alpha(\tilde{K})$.

El siguiente ejemplo nos da una idea de que el vector α y la matriz β no varían bajo movimientos de Reidemeister de Tipo III.

Ejemplo 3.1.6 Sean $K = ((1, 2, -4, -2, -3, 4, -1, 3), (-1, -1, -1, -1))$ y $\tilde{K} = ((2, 1, -4, -3, -2, 4, 3, -1), (-1, -1, -1, -1))$. Entonces

$$\alpha(K) = \alpha(\tilde{K}) = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \quad y \quad \beta(K) = \beta(\tilde{K}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & -2 \\ -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ya tenemos algunas reglas de comportamiento que tienen el vector α y la matriz β . A partir de ellas derivamos la siguiente asignación.

Definición 3.1.3 Sea $K = ((i_1, \dots, i_{2n}), (e_1, \dots, e_m))$ un código nudal no trivial. Una **tripleta** para K es una tripla de la forma $(E(K), \alpha(K), \beta(K))$, donde $E(K) = (e_1, \dots, e_m)^T$, $\alpha(K)$ y $\beta(K)$ como en la Definición 3.1.2.

Estas tripletas tienen una característica especial, y es que la matriz $\beta(K)$ es antisimétrica.

Como ya vimos, esta tripleta no es un invariante, pero tiene un comportamiento que nos permite definir una relación de equivalencia adecuada, de tal forma que obtengamos un invariante. El método que usamos es de la misma familia del que se usa cuando se define la relación de equivalencia entre las matrices asociadas a las superficies de Seifert de un nudo en el caso clásico, [3].

Proposición 3.1.8 La matriz $\beta(K)$ es antisimétrica.

Prueba. Sea K un código nudal y sean a_i, a_j cruces de K . Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que $a_i = i$ y $a_j = j$. Ahora bien, por definición $x \in \bar{S}_i \cap \bar{S}_j^{-1}$ si y sólo si $-x \in \bar{S}_j \cap \bar{S}_i^{-1}$, ya que que $(\bar{S}_j^{-1})^{-1} = \bar{S}_j$. Entonces:

$$\sum_{w \in \bar{S}_i \cap \bar{S}_j^{-1}} \varepsilon_w = - \sum_{w \in \bar{S}_j \cap \bar{S}_i^{-1}} \varepsilon_w.$$

Por otro lado, $\bar{S}_i \cap \bar{S}_j^{-1} = (\bar{S}_i \cap S_j^{-1}) \cup (S_i^{-1} \cap \{j, -j\})$ y $\bar{S}_j \cap \bar{S}_i^{-1} = (\bar{S}_j \cap S_i^{-1}) \cup (S_j^{-1} \cap \{i, -i\})$, con lo que

$$\sum_{w \in S_{ij}} \varepsilon_w + \sum_{w \in \bar{S}_i \cap \{j, -j\}} \varepsilon_w = \sum_{w \in \bar{S}_i \cap \bar{S}_j^{-1}} \varepsilon_w = - \sum_{w \in \bar{S}_j \cap \bar{S}_i^{-1}} \varepsilon_w = - \sum_{w \in S_{ji}} \varepsilon_w - \sum_{w \in \bar{S}_j \cap \{i, -i\}} \varepsilon_w,$$

de donde

$$\beta_{ij}(K) + \beta_{ji}(K) = - \sum_{w \in \overline{S}_i \cap \{j, -j\}} \varepsilon_w - \sum_{w \in \overline{S}_j \cap \{i, -i\}} \varepsilon_w.$$

Veamos ahora que

$$\sum_{w \in \overline{S}_i \cap \{j, -j\}} \varepsilon_w = - \sum_{w \in \overline{S}_j \cap \{i, -i\}} \varepsilon_w. \quad (3.6)$$

Sean i y j cruces de K y consideremos los siguientes esquemas para la lista de cruces de K :

(1) $((-e_i i, A, \pm j, B, \mp j, C, e_i i, D), (e_1, \dots, e_m))$ ó $((-e_i i, A, e_i i, B, \pm j, C, \mp j, D), (e_1, \dots, e_m))$.

(2) $((-e_i i, A, j, B, e_i i, C, -j, D), (e_1, \dots, e_m))$ y

(3) $((-e_i i, A, -j, B, e_i i, C, j, D), (e_1, \dots, e_m))$

En (1) tenemos que $\overline{S}_i \cap \{j, -j\} = \{j, -j\}$, y $\overline{S}_j \cap \{i, -i\} = \emptyset$ o $\overline{S}_j \cap \{i, -i\} = \{i, -i\}$. Con lo que $\sum_{w \in \overline{S}_i \cap \{j, -j\}} \varepsilon_w = 0$ y $\sum_{w \in \overline{S}_j \cap \{i, -i\}} \varepsilon_w = 0$. La otra posibilidad del (1) se hace de forma análoga.

En (2) tenemos dos posibilidades, la primera que $e_j = 1$, con lo que $-e_i i \in \overline{S}_j$, pero $e_i i \notin \overline{S}_j$, por lo tanto

$$\sum_{w \in \overline{S}_j \cap \{i, -i\}} \varepsilon_w = \varepsilon_{-e_i i} = 1 = -(-e_j) = - \sum_{w \in \overline{S}_i \cap \{j, -j\}} \varepsilon_w.$$

La segunda que $e_j = -1$, entonces $e_i i \in \overline{S}_j$, pero $-e_i i \notin \overline{S}_j$, con lo que

$$\sum_{w \in \overline{S}_j \cap \{i, -i\}} \varepsilon_w = \varepsilon_{e_i i} = -1 = -(-e_j) = - \sum_{w \in \overline{S}_i \cap \{j, -j\}} \varepsilon_w.$$

De la misma forma se prueba para (3) que $\sum_{w \in \overline{S}_i \cap \{j, -j\}} \varepsilon_w = - \sum_{w \in \overline{S}_j \cap \{i, -i\}} \varepsilon_w$. ■

En la siguiente sección estudiaremos estas tripletas independientemente del hecho de si provienen o no de códigos nudales. Definiremos sobre ellas una relación de equivalencia basándonos en los comportamientos intuitivos mostrados en los ejemplos dados en esta sección, y probaremos algunas propiedades importantes. Más adelante probaremos que la clase de equivalencia, bajo la relación dada, de una tripleta asociada a un código nudal es un invariante muy fuerte de nudos virtuales. También daremos condiciones necesarias para determinar cuándo una tripleta (E, A, B) , donde E y A son vectores de orden n y B es una matriz antisimétrica de orden $n \times n$, es la tripleta de un código nudal.

3.2 Tripletas

En esta sección estudiaremos el concepto de tripleta y probaremos algunas de sus propiedades. Consideraremos la siguiente notación: Para una matriz B , $B^{(i)}$ y $B_{(j)}$ representarán, respecti-

vamente, la i -ésima columna y la j -ésima fila de B .

En el resto de este capítulo, para $n \geq 1$, $T_n = \mathbb{Z}_2^n \times \mathbb{Z}^n \times sk(n, \mathbb{Z})$, donde \mathbb{Z}_2 es pensado como el grupo multiplicativo $\{1, -1\}$ y $sk(n, \mathbb{Z})$ denota el conjunto de todas las matrices antisimétricas de orden n con entradas enteras, $T_0 = \{((), (), ())\}$ y $T = \cup_{n \in \mathbb{N} \cup \{0\}} T_n$.

Definición 3.2.1 Una **tripleta** (E, A, B) de orden $n \geq 1$ es un elemento del conjunto T_n . Definimos la tripleta de orden 0 o la **tripleta vacía** como $((), (), ())$.

Algunas veces las tripletas serán escritas en la forma abreviada $(E, A, B) = ((e_i), (a_i), (b_{ij}))$. A continuación definiremos transformaciones sobre el conjunto T , que nos permitirá relacionar tripletas, incluso de ordenes diferentes.

Definición 3.2.2 (Δ -movidas básicas) Las Δ -**movidas básicas** es un conjunto formado por tres tipos de transformaciones dadas a continuación:

Transformaciones tipo Δ_0 : es un conjunto formado por movimientos de la forma

$$(E, A, B) \rightarrow (PE, PA, PBP^T),$$

donde P es una matriz de permutación.

Transformaciones tipo Δ_1 : es un conjunto formado por movimientos de la forma

$$(E, A, B) \rightarrow \left(\left(\begin{array}{c} E \\ e \end{array} \right), \left(\begin{array}{c} A \\ 0 \end{array} \right), \left(\begin{array}{cc} B & C \\ -C^T & 0 \end{array} \right) \right),$$

donde $C^T = (0, \dots, 0)$ o $C = A$ y $e \in \{1, -1\}$.

Transformaciones tipo Δ_2 : es un conjunto formado por movimientos de la forma

$$(E, A, B) \rightarrow \left(\left(\begin{array}{c} E \\ e \\ -e \end{array} \right), \left(\begin{array}{c} A \\ d \\ -d \end{array} \right), \left(\begin{array}{ccc} B & C_1 & C_2 \\ -C_1^T & 0 & d \\ -C_2^T & -d & 0 \end{array} \right) \right),$$

donde $C_1 + C_2 = A$, $e \in \{1, -1\}$ y $d \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$.

Por comodidad, a las transformaciones de tipo Δ_0 las llamaremos *permutaciones*. Notemos que la transformación inversa de una permutación es nuevamente una permutación. Otro aspecto que hay que resaltar es que las permutaciones, así definidas, sólo relacionan tripletas del mismo orden. En la siguiente sección exploraremos, con mas detalle, esta transformación probando que está relacionada con los movimientos de Tipo B, pero no los determina completamente, ya que al realizar una reenumeración es posible que se necesite, además de una permutación, una simplificación o ampliación.

A las transformaciones de tipo Δ_1 y Δ_2 las llamaremos *transformaciones de ampliación*, y a sus respectivos inversos *transformaciones de simplificación* de tipo Δ_1 y Δ_2 , respectivamente. Antes de continuar estudiaremos el efecto de aplicar una permutación sobre una tripleta.

Sea P_τ la matriz asociada a la permutación τ de un conjunto de n elementos. La prueba del siguiente lema es inmediata de la definición de matriz de permutación, por tal motivo la omitimos.

Lema 3.2.1 *Sea $(E, A, B) = ((e_i), (a_i), (b_{ij}))$ una tripleta de orden n , y sea τ una permutación del conjunto $\{1, 2, \dots, n\}$, si $P = P_\tau$ entonces*

$$(PE, PA, PBP^T) = ((e_{\tau(i)}), (a_{\tau(i)}), (b_{\tau(i)\tau(j)})).$$

Motivados por los ejemplos estudiados en la sección anterior definiremos una relación de equivalencia sobre el conjunto T de tal forma que la clase de equivalencia de una tripleta de un código nudal K sea un invariante de $[K]$.

Definición 3.2.3 *Diremos que dos tripletas (E, A, B) y (E', A', B') son Δ -equivalentes, denotado $(E, A, B) \asymp (E', A', B')$, si (E, A, B) puede ser transformada en (E', A', B') por medio de un número finito de las Δ -movidas básicas y sus inversos.*

La relación \asymp es, en efecto, una relación de equivalencia sobre el conjunto T . A la clase de equivalencia de la tripleta (E, A, B) la denotaremos por $[E, A, B]$.

Definición 3.2.4 *Sea (E, A, B) una tripleta de orden n . Diremos que (E, A, B) es **trivial** si es equivalente a $((), (), ())$. Diremos que (E, A, B) es **reducible** si satisface alguna de las siguientes dos condiciones:*

- (1) *Existe $j \in \{1, \dots, n\}$ tal que $a_j = 0$ y $(B^{(j)} = (0)_{n \times 1}$ ó $B^{(j)} = A)$.*
- (2) *Existen $r, t \in \{1, \dots, n\}$ tales que $e_r = -e_t$, $A_r = -A_t$ y $B^{(r)} + B^{(t)} = A$.*

*En caso contrario diremos que es **irreducible**.*

El siguiente lema es una consecuencia directa del hecho de que toda permutación es un producto de transposiciones; por tal motivo omitiremos su prueba.

Lema 3.2.2 *Sea (E, A, B) una tripleta de orden n y sea $(E', A', B') = (PE, PA, PBP^T)$, donde P es una matriz de permutación. Entonces (E, A, B) es reducible si y sólo si (E', A', B') lo es.*

Consideremos la siguiente generalización de la Definición 3.2.2.

Definición 3.2.5 Las Δ -movidas generalizadas es un conjunto formado por dos tipos de transformaciones obtenidas al combinar ampliaciones y permutaciones, como sigue:

Transformaciones Δ_1 generalizadas: es un conjunto de movimientos de la forma

$$(E, A, B) \Rightarrow (E', A', B'),$$

donde (E', A', B') se obtiene al aplicar una transformación Δ_1 básica sobre (E, A, B) seguida de una permutación asociada a $\tau = (j \ n \ n-1 \ \cdots \ j+1)$, $j \in \{1, 2, \dots, n-1\}$, donde n es el orden de (E, A, B) .

Transformaciones Δ_2 generalizadas: es un conjunto de movimientos de la forma

$$(E, A, B) \Rightarrow (E', A', B'),$$

donde (E', A', B') se obtiene al aplicar una transformación Δ_2 básica sobre (E, A, B) seguida de una de tipo Δ_0 asociada a una permutación τ , donde τ es la permutación dada a continuación.

$$\tau(k) = \begin{cases} k & \text{si } 1 \leq k < i \\ n-1 & \text{si } k = i \\ k-1 & \text{si } i+1 < k < j-1 \\ n & \text{si } k = j \\ k-2 & \text{si } j+1 < k \leq n \end{cases},$$

tomando $i < j$.

Ahora bien, ¿qué significa el inverso de una Δ -movida generalizada?

Supongamos que (E, A, B) es reducible, entonces satisface alguna de las siguientes dos condiciones:

- (1) Existe $j \in \{1, \dots, n\}$ tal que $a_j = 0$ y $(B^{(j)} = (0)_{n \times 1}$ o $B^{(j)} = A)$ ó
- (2) existen $r, t \in \{1, \dots, n\}$ tales que $e_r = -e_t$, $A_r = -A_t$ y $B^{(r)} + B^{(t)} = A$.

Si estamos en la condición (1), la simplificación Δ_1 generalizada permite eliminar, de los vectores E y A , e_j y a_j , respectivamente, y eliminar de la matriz B la columna $B^{(j)}$ y la fila $B_{(j)}$.

Si estamos en la condición (2), la simplificación Δ_2 generalizada permite eliminar, de los vectores E y A , las componentes e_r y e_t , a_r y a_t , respectivamente, y eliminar de la matriz B las columnas $B^{(r)}$ y $B^{(t)}$, y las filas $B_{(r)}$ y $B_{(t)}$.

El teorema siguiente es inmediato de la definición anterior.

Teorema 3.2.3 Dos tripletas son Δ -equivalentes si una de ellas se puede transformar en la otra por medio de un número finito de permutaciones, Δ -movidas generalizadas o de sus respectivos inversos.

De ahora en adelante trabajaremos con permutaciones y las Δ -movidas generalizadas. Por tanto, para que la notación no sea recargada, llamaremos a las transformaciones de tipo Δ_1 y Δ_2 generalizadas *transformaciones de ampliación*, y a sus respectivos inversos *transformaciones de simplificación*.

Definición 3.2.6 Una *sucesión finita de tripletas* es un conjunto de la forma $\{(Y_i, Z_i, W_i)\}_{i=1}^k$, donde (Y_i, Z_i, W_i) es una tripleta de orden n_i de la forma $((y_j^i), (z_j^i), (w_{jr}^i))$, $j = 1, 2, \dots, n_i$. Sea (E, A, B) una tripleta de orden m , y sea $\{(Y_i, Z_i, W_i)\}_{i=1}^k$ una sucesión de tripletas. Diremos que $\{(Y_i, Z_i, W_i)\}_{i=1}^k$ es una *sucesión válida*, de longitud k , de (E, A, B) si

$$(E, A, B) \asymp (Y_1, Z_1, W_1) \asymp \cdots \asymp (Y_k, Z_k, W_k),$$

y donde $(Y_{i+1}, Z_{i+1}, W_{i+1})$ se obtiene al aplicar sobre (Y_i, Z_i, W_i) una única transformación, bien sea de permutación, ampliación o de simplificación, para $i = 0, 1, \dots, k-1$, donde $(Y_0, Z_0, W_0) = (E, A, B)$.

Con la notación anterior podemos enunciar el siguiente teorema.

Teorema 3.2.4 Sea $(E, A, B) = ((e_i), (a_i), (b_{ij}))$ una tripleta irreducible de orden m . Si $\{(Y_i, Z_i, W_i)\}_{i=1}^k$ es una sucesión válida de (E, A, B) , donde (Y_i, Z_i, W_i) es de orden n_i , entonces, para todo $i = 1, 2, \dots, k$,

$$n_i \geq m,$$

y existen $\{t_1, \dots, t_m\} \subset \{1, 2, \dots, n_i\}$ tales que para todo j y r en $\{1, 2, \dots, m\}$,

$$y_{t_j}^i = e_j, \quad z_{t_j}^i = a_j \quad \text{y} \quad w_{t_j t_r}^i = b_{jr}. \quad (3.7)$$

Prueba. La prueba la haremos por inducción sobre la longitud, digamos k , de sucesiones válidas de (E, A, B) . En efecto, sea $\{(Y, Z, W)\}$ una sucesión válida de (E, A, B) , entonces $(E, A, B) \asymp (Y, Z, W)$. Puesto que (E, A, B) es irreducible, entonces (Y, Z, W) debe ser o una permutación o una ampliación de (E, A, B) . Ahora bien, si (Y, Z, W) es una ampliación de (E, A, B) , se toma $t_j = j$, $j = 1, 2, \dots, m$. Por otro lado, si (Y, Z, W) es una permutación, digamos τ , de (E, A, B) , se toma $t_j = \tau(j)$, $j = 1, 2, \dots, m$. Por tanto, el teorema se cumple para $k = 1$.

Supongamos que el resultado es cierto para toda sucesión válida de (E, A, B) de longitud k , y sea $\{(Y_i, Z_i, W_i)\}_{i=1}^{k+1}$ una sucesión válida de (E, A, B) , entonces debemos probar que $n_{k+1} \geq m$ y que existe $\{\tilde{t}_1, \dots, \tilde{t}_m\} \subset \{1, 2, \dots, n_{k+1}\}$ que satisface (3.7). En efecto, $\{(Y_i, Z_i, W_i)\}_{i=1}^k$ es una sucesión válida, de longitud k , de (E, A, B) . Así, por hipótesis de inducción, para todo $i =$

$1, 2, \dots, k$, $n_i \geq m$ y existen $\{t_1, \dots, t_m\} \subset \{1, 2, \dots, n_i\}$ tales que para todo j y r en $\{1, 2, \dots, m\}$

$$y_{t_j}^i = e_j, \quad z_{t_j}^i = a_j \quad \text{y} \quad w_{t_j t_r}^i = b_{jr}.$$

Analicemos las posibilidades para $(Y_{k+1}, Z_{k+1}, W_{k+1})$.

Si $n_k = m$, entonces $\{t_1, \dots, t_m\} = \{1, 2, \dots, m\}$. Así, al tomar P_τ , donde $\tau = (1 \ t_1)(2 \ t_2) \cdots (m \ t_m)$, entonces por el Lema 3.2.1, tenemos que

$$\begin{aligned} (P_\tau Y_k, P_\tau Z_k, P_\tau W P_\tau^T) &= ((y_{\tau(j)}^k), (z_{\tau(j)}^k), (w_{\tau(j)\tau(r)}^k)) = ((y_{t_j}^k), (z_{t_j}^k), (w_{t_j t_r}^k)) \\ &= ((e_j), (a_j), (b_{jr})) = (E, A, B). \end{aligned}$$

Por tanto (Y_k, Z_k, W_k) es irreducible. Luego, $(Y_{k+1}, Z_{k+1}, W_{k+1})$ debe ser o una permutación o una ampliación de (E, A, B) . Haciendo un análisis similar al hecho en el primer paso de inducción, se tiene el resultado para $k+1$.

Supongamos ahora que $n_k > m$. Si $(Y_{k+1}, Z_{k+1}, W_{k+1})$ es una permutación, asociada a τ , de (Y_k, Z_k, W_k) entonces $n_{k+1} = n_k > m$, y si tomamos $\tilde{t}_j = \tau(t_j)$, $j = 1, 2, \dots, m$, vemos que el teorema se cumple para $k+1$. Por otro lado, si $(Y_{k+1}, Z_{k+1}, W_{k+1})$ es una ampliación de (Y_k, Z_k, W_k) , entonces $n_{k+1} > n_k > m$, y si tomamos $\tilde{t}_j = t_j$, $j = 1, 2, \dots, m$, vemos que el resultado es válido para $k+1$.

Consideremos el caso en el que $(Y_{k+1}, Z_{k+1}, W_{k+1})$ es una simplificación de (Y_k, Z_k, W_k) . Para considerar este caso, debemos suponer que $n_k \geq m+1$ o que $n_k \geq m+2$ si tenemos una de tipo Δ_1 ó Δ_2 , respectivamente.

Supongamos que tenemos una simplificación asociada a una transformación de tipo Δ_1 entonces existe $g \in \{1, 2, \dots, n_k\}$ tal que

$$z_g^k = 0 \quad \text{y} \quad \left(w_{jg}^k = 0 \text{ o } w_{jg}^k = z_j^k, \text{ para } j = 1, 2, \dots, n_k \right). \quad (3.8)$$

Supongamos que existe $r \in \{1, 2, \dots, m\}$, tal que $g = t_r$, entonces, de (3.8), para todo j y r en $\{1, 2, \dots, m\}$,

$$a_r = z_{t_r}^k = z_g^k = 0 \quad \text{y} \quad \left(b_{jr} = w_{t_j t_r}^k = w_{t_j g}^k = 0 \text{ o } b_{jr} = w_{t_j t_r}^k = w_{t_j g}^k = z_{t_j}^k = a_j \right),$$

lo que implicaría que (E, A, B) es reducible, por tanto $g \notin \{t_1, \dots, t_r\}$. Luego, $n_{k+1} = n_k - 1 \geq m$, y al tomar $\tilde{t}_j = t_j$, $j = 1, 2, \dots, m$, el teorema se cumple para $k+1$.

Supongamos ahora que tenemos una simplificación asociada a una transformación de tipo Δ_2 , entonces existen g y h en $\{1, 2, \dots, n_k\}$ tales que

$$y_g^k = -y_h^k, \quad z_g^k = -z_h^k \quad \text{y} \quad w_{jg}^k + w_{jh}^k = z_j^k, \quad j = 1, 2, \dots, n_k.$$

Entonces $\{g, h\} \not\subseteq \{t_1, \dots, t_m\}$, pues de lo contrario (E, A, B) sería reducible, por tanto el teorema se cumple para $k + 1$ si $\tilde{t}_j = t_j$, para $j = 1, 2, \dots, m$. ■

El siguiente teorema garantiza que toda clase de equivalencia $[E, A, B]$ contiene un único elemento irreducible, salvo permutaciones.

Teorema 3.2.5 *Sea $[E, A, B] \in T/\simeq$, entonces existe $(E', A', B') \in [E, A, B]$, tal que (E', A', B') es irreducible. Es más, si (E'', A'', B'') es otro elemento irreducible en $[E, A, B]$, entonces existe una matriz P de permutación tal que $(PE', PA', PB'P^T) = (E'', A'', B'')$, y por tanto todos los irreducibles de $[E, A, B]$ tienen el mismo orden.*

Prueba. Sea (E, A, B) una tripleta de orden n y sea G el conjunto formado por todos los $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ tales que $T_m \cap [E, A, B] \neq \phi$. Ahora bien, $G \subset \mathbb{N} \cup \{0\}$ y $G \neq \phi$, así, por el principio del buen orden, existe un elemento minimal $m_0 \in G$. Sea $(E', A', B') \in T_{m_0} \cap [E, A, B]$, entonces por la minimalidad de m_0 , (E', A', B') es irreducible.

Sea (E'', A'', B'') otro elemento irreducible en $[E, A, B]$ de orden m , puesto que $m \in G$, se tiene que, $m_0 \leq m$.

Puesto que (E', A', B') y (E'', A'', B'') son elementos de la clase de equivalencia $[E, A, B]$, entonces existe una sucesión finita de tripletas $\{(Y, Z, W)_i\}_{i=1}^k$ tales que

$$(E'', A'', B'') \simeq (Y_1, Z_1, W_1) \simeq \dots \simeq (Y_k, Z_k, W_k) \simeq (E', A', B'),$$

sin pérdida de generalidad podemos suponer que la sucesión $\{(Y_i, Z_i, W_i)\}_{i=1}^{k+1}$, donde $(Y_{k+1}, Z_{k+1}, W_{k+1}) = (E', A', B')$, es válida para (E'', A'', B'') , así por el Teorema 3.2.4 tenemos que $m_0 \geq m$, de donde $m_0 = m$, y además existe una matriz P de permutación tal que $(PE'', PA'', PB''P^T) = (E', A', B')$. ■

Por el teorema anterior tiene sentido la siguiente definición.

Definición 3.2.7 *Sea $[S, A, B] \in T/\simeq$. El **Orden** de $[S, A, B]$, denotado por **Ord** $[S, A, B]$, lo definimos como el orden de alguno de sus irreducibles.*

3.3 Definición de Λ

En esta sección mostraremos que la asignación $\lambda : CN \rightarrow T$, $\lambda(K) = (E(K), \alpha(K), Z(K))$, donde NC es el conjunto de los códigos nudales, se extiende, de manera natural, a una función de CN/\approx en T/\simeq .

Antes de afrontar tal demostración, primero estudiaremos el comportamiento de la tripleta $\lambda(K)$ con respecto a transformaciones de Tipo B. Esto lo hacemos con el objetivo de tener control, en el momento de realizar un análisis, del cambio de las tripletas de códigos cuando estos son afectados por reenumeraciones.

El Ejemplo 3.1.3 nos dice que en algunos casos reenumeración de códigos lleva a permutación de triplas, o que reenumeración de códigos lleva a permutaciones y simplificaciones de triplas. Consideremos la siguiente proposición:

Proposición 3.3.1 *Sea $K = ((i_1, \dots, i_{2n}), (e_1, \dots, e_m))$ un código nudal con cruces a_1, \dots, a_n . Sean $b_1, \dots, b_n \in \mathbb{Z}^+$ y consideremos la reenumeración dada por $\varphi : \{a_1, \dots, a_n\} \cup \{-a_1, \dots, -a_n\} \rightarrow \{b_1, b_2, \dots, b_n\} \cup \{-b_1, \dots, -b_n\}$, donde $\varphi(a_i) = b_i$ y $\varphi(-a_i) = -b_i$, para todo $i = 1, 2, \dots, n$. Sea \tilde{K} el código nudal obtenido al aplicarle tal reenumeración a K . Entonces $\alpha_{a_j}(K) = \alpha_{b_j}(\tilde{K})$ y $\beta_{a_i a_j}(K) = \beta_{b_i b_j}(\tilde{K})$, para todo $i, j \in \{1, \dots, n\}$.*

Prueba. Puesto que \tilde{K} es un código nudal obtenido a partir de K usando la reenumeración φ , entonces

$$\tilde{K} = ((\varphi(i_1), \dots, \varphi(i_{2n})), (\tilde{e}_1, \dots, \tilde{e}_t)),$$

donde, para $j = 1, 2, \dots, t > \max\{b_1, \dots, b_n\}$,

$$\tilde{e}_{b_j} = \begin{cases} e_{a_j} & \text{para } j = 1, 2, \dots, n \\ 1 & \text{en otros casos} \end{cases}.$$

Es inmediato, de la definición de φ , que $S_{b_j}(\tilde{K}) = \varphi(S_{a_j}(K))$. Puesto que $\tilde{\varepsilon}_{\varphi(i_r)} = \varepsilon_{i_r}$, para todo $r \in \{1, 2, \dots, n\}$, entonces

$$\alpha_{b_j}(\tilde{K}) = \sum_{w \in S_{b_j}(\tilde{K})} \tilde{\varepsilon}_w = \sum_{x \in S_{a_j}(K)} \tilde{\varepsilon}_{\varphi(x)} \sum_{x \in S_{a_j}(K)} \varepsilon_x = \alpha_{a_j}(K).$$

Similarmente se demuestra que $\beta_{a_i a_j}(K) = \beta_{b_i b_j}(\tilde{K})$, para todo $i, j \in \{1, \dots, n\}$. ■

Corolario 3.3.2 *Sean K_1 y K_2 códigos nudaes con cruces a_1, \dots, a_n y b_1, \dots, b_n , respectivamente. Supongamos que \tilde{K} se obtuvo al aplicar una reenumeración sobre K .*

- (1) *Si $\max\{a_1, \dots, a_n\} = \max\{b_1, \dots, b_n\}$, entonces $\lambda(K_1)$ se puede transformar en $\lambda(K_2)$ mediante permutaciones.*
- (2) *Si $\max\{a_1, \dots, a_n\} < \max\{b_1, \dots, b_n\}$, entonces $\lambda(K_1)$ se puede transformar en $\lambda(K_2)$ mediante permutaciones y simplificaciones de tipo Δ_1 .*
- (3) *Si $\max\{a_1, \dots, a_n\} > \max\{b_1, \dots, b_n\}$, entonces $\lambda(K_1)$ se puede transformar en $\lambda(K_2)$ mediante permutaciones y ampliaciones de tipo Δ_1 .*

Por el corolario anterior, podemos de ahora en adelante suponer que los códigos nudaes se encuentran en forma estándar. Así, si K_1 y K_2 son códigos en forma estándar de n cruces, y K_1 se puede transformar en K_2 mediante reenumeración, entonces $\lambda(K_1)$ es una permutación de $\lambda(K_2)$.

Teorema 3.3.3 *La asignación $\Lambda : CN/\approx \rightarrow T/\simeq$, definida por $\Lambda([K]) = [\lambda(K)]$, donde $\lambda(K) = (E(K), \alpha(K), \beta(K))$, es un invariante de nudos combinatorios.*

Prueba. Debemos probar que Λ es una función. Por el Corolario 3.3.2, $\Lambda([K])$ no depende de transformaciones Tipo B , y puesto que las transformaciones de Tipo A ó C no alteran la tripleta $\lambda(K)$, entonces sólo debemos analizar cada movimiento de Reidemeister por separado. No perdemos generalidad, si en todos los casos, el código K_1 está en forma estándar.

Tipo I: Supongamos que $K_1 = ((n, -n, A), (e_1, \dots, e_n))$ y $K_2 = ((A), (e_1, \dots, e_n))$. Ahora bien, sea $j \in \{1, \dots, n-1\}$, entonces $S_j(K_1) = S_j(K_2)$ ó $S_j(K_1) = S_j(K_2) \cup \{n, -n\}$, en ambos casos $\alpha_j(K_1) = \alpha_j(K_2)$. Por otro lado, si $e_n = 1$ ó $e_n = -1$, entonces $S_n(K_1) = \{A\}$ ó $S_n(K_1) = \emptyset$, respectivamente, con lo que $\alpha_n(K_1) = 0$.

Supongamos que $r, t \in \{1, \dots, n-1\}$, entonces $S_{rt}(K_1) = S_{rt}(K_2)$ ó $S_{rt}(K_1) = S_{rt}(K_2) \cup \{n, -n\}$, con lo que $\beta_{rt}(K_1) = \beta_{rt}(K_2)$.

Sea $j \in \{1, \dots, n-1\}$. Si $e_n = 1$, entonces $S_n(K_1) = \{A\}$, y por tanto $S_j^{-1}(K_1) \subset \overline{S}_n(K_1)$, con lo que

$$\beta_{nj}(K_1) = \sum_{w \in S_j^{-1}(K_1)} \varepsilon_w = -\alpha_j(K_1) = -\alpha_j(K_2), \quad \text{para todo } j = 1, \dots, n-1.$$

Si $e_n = -1$, entonces $S_n(K_1) = \emptyset$. Por tanto $S_{nj}(K_1) = \emptyset$ ó $S_{nj}(K_1) = \{n, -n\}$, en ambos casos, tenemos $\beta_{nj}(K) = 0$.

De lo anterior, si hacemos $C^T = (\beta_{n1}(K_1), \dots, \beta_{n, n-1}(K_1), 0)$, entonces:

$$E(K_1) = \begin{pmatrix} E(K_2) \\ e_n \end{pmatrix}, \quad \alpha(K_1) = \begin{pmatrix} \alpha(K_2) \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \beta(K_1) = \begin{pmatrix} \beta(K_2) & C \\ -C^T & 0 \end{pmatrix}, \quad (3.9)$$

donde $C = \alpha(K_2)$ si $e_n = 1$ ó $C^T = (0, \dots, 0)$ si $e_n = -1$. En el movimiento de tipo Δ_1 no se involucra el primer vector, entonces, de (3.9), $\lambda(K_1)$ se puede transformar en $\lambda(K_2)$ mediante una movida de tipo Δ_1 .

La otra posibilidad del movimiento Tipo I es similar.

Tipo II: Sin pérdida de generalidad podemos tomar el movimiento de Reidemeister de Tipo II como $K_1 = ((n-1, n, A, -(n-1), -n, B), (e_1, \dots, e_n))$ y $K_2 = ((A, B), (e_1, \dots, e_{n-2}))$, con $e_{n-1} = -e_n$. Vamos a probar que se tienen las siguientes dos afirmaciones.

$$\alpha(K_1) = \begin{pmatrix} \alpha(K_2) \\ \alpha_{n-1}(K_1) \\ -\alpha_{n-1}(K_1) \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \beta(K_1) = \begin{pmatrix} \beta(K_2) & C_1 & C_2 \\ -C_1^T & 0 & \alpha_{n-1}(K_2) \\ -C_2^T & -\alpha_{n-1}(K_2) & 0 \end{pmatrix}, \quad (3.10)$$

donde $C_1 + C_2 = \alpha(K_2)$.

Para todo $j \in \{1, \dots, n-2\}$, $S_j(K_1)$ puede tomar alguno de los valores

$$S_j(K_2) \text{ ó } S_j(K_2) \cup \{-(n-1), -n\} \text{ ó } S_j(K_2) \cup \{n-1, n\} \text{ ó } S_j(K_1) \cup \{n-1, n, -(n-1), -n\}.$$

En cada uno de esos casos, tenemos las igualdades $\alpha_j(K_1) = \alpha_j(K_2)$ y $\beta_{ij}(K_1) = \beta_{ij}(K_2)$, para todo $i, j \in \{1, \dots, n-2\}$.

Por otro lado, por definición, si $e_{n-1} = 1$, entonces $S_{n-1}(K_1) = \{B\} \cup \{-n\}$ y $S_n(K_1) = A \cup \{-(n-1)\}$. Por el Lema 3.1.4 y el hecho de que $\varepsilon_{-n} + \varepsilon_{-(n-1)} = 0$, tenemos que $\alpha_{n-1}(K_1) + \alpha_n(K_1) = 0$. Para $e_{n-1} = -1$ hacemos un análisis similar y tenemos la prueba del lado izquierdo de (3.10).

Sea $t = 1, 2, \dots, n$. Si $e_{n-1} = 1$, entonces $S_{n-1}(K_1) = \{B\} \cup \{-n\}$ y $S_n(K_1) = A \cup \{-(n-1)\}$. Tenemos que

$$\beta_{n-1\ t}(K_1) + \beta_{n\ t}(K_2) = \sum_{w \in S_{n-1\ t}(K_1)} \varepsilon_w + \sum_{w \in S_{nt}(K_2)} \varepsilon_w.$$

Por otro lado $\bar{S}_{n-1}(K_1) \cap \bar{S}_n(K_1) = \{n, n-1\}$, mas aún, tenemos que $S_t(K_1) \cap \{n-1, n\} = \{n-1, n\}$ ó $S_t(K_1) \cap \{n-1, n\} = \emptyset$, y debido a que $\varepsilon_n + \varepsilon_{n-1} = 0$, entonces

$$\beta_{(n-1)\ t}(K_1) + \beta_{n\ t}(K_1) = \sum_{w \in (\bar{S}_{n-1}(K_1) \cup \bar{S}_n(K_1)) \cap S_t^{-1}(K_1)} \varepsilon_w = \sum_{w \in S_t^{-1}(K)} \varepsilon_w = -\alpha_t(K).$$

Si $e_{n-1} = -1$, hacemos un análisis similar, entonces $\beta_{n-1\ t}(K_1) + \beta_{n\ t}(K_1) = -\alpha_t(K_1)$, para todo $t = 1, 2, \dots, n$.

Sea $C_1^T = (\beta_{n-1\ 1}(K_1), \dots, \beta_{n-1\ n-2}(K_1))$ y $C_2^T = (\beta_{n\ 1}(K_1), \dots, \beta_{n\ n-2}(K_1))$, entonces $C_1^T + C_2^T = -\alpha(K_2)$, más aún, $\beta_{n\ n-1}(K_1) = -\alpha_{n-1}(K_1)$ y $\beta_{n-1\ n}(K_1) = -\alpha_n(K_1) = \alpha_{n-1}(K_1)$, con lo que tenemos la parte derecha de (3.10). Puesto que $e_{n-1} = -e_n$, $\lambda(K_1)$ se puede transformar en $\lambda(K_2)$ mediante una movida de Tipo Δ_2 .

Las otras posibilidades para el movimiento Tipo II son similares.

Tipo III: El movimiento de Reidemeister III es más complicado de analizar que los movimientos I y II debido a que éste tiene 16 posibilidades; y si no tenemos mucho cuidado con los signos de los cruces involucrados, podríamos caer en el error de considerar un movimiento que luzca igual, pero que no sea una de las posibilidades del movimiento de Tipo III.

Para no alargar la prueba probaremos la invariancia de Λ bajo el caso R3-1, vease Tabla 1.1, del movimiento de Reidemeister III. Los otros casos se analizan de forma análoga, pero de nuevo repetimos, en cada caso hay que ser muy rigurosos con los signos de los cruces involucrados.

En efecto, sean

$$K_1 = ((-(n-2), -(n-1), A, \mp n, n-1, B, \pm n, n-2, C), (e_1, \dots, e_n)) \text{ y}$$

$$K_2 = ((-(n-1), -(n-1), A, n-1, \mp n, B, n-2, \pm n, C), (e_1, \dots, e_n))$$

con $e_{n-2} = e_{n-1} = 1$ y $e_n = \mp 1$.

Por definición, para todo $j \in \{1, 2, \dots, n-3\}$, $S_j(K_1) = S_j(K_2)$, por tanto $\alpha_j(K_1) = \alpha_j(K_2)$ y $\beta_{ij}(K_1) = \beta_{ij}(K_2)$, para todo $i, j \in \{1, 2, \dots, n-3\}$.

Ahora bien, $S_{n-2}(K_1) = \{C\}$ y $S_{n-2}(K_2) = \{C\} \cup \{\pm n, -(n-1)\}$ y puesto que estamos en el caso $R3-1$, entonces $\varepsilon_{\pm n} = \mp(\mp 1) = 1$, por tanto $\varepsilon_{\pm n} + \varepsilon_{-(n-1)} = \mp e_n + e_{n-1} = 0$, y así $\alpha_{n-2}(K_1) = \alpha_{n-2}(K_2)$. Por otro lado $S_{n-1}(K_1) = \{\pm n, n-2, -(n-2)\} \cup \{B\} \cup \{C\}$ y $S_{n-1}(K_2) = \{\mp n, n-2, \pm n\} \cup \{B\} \cup \{C\}$, y como estamos en el caso $R3-1$, $\varepsilon_{\mp n} = \varepsilon_{n-2}$, con lo que $\varepsilon_{\pm n} + \varepsilon_{n-2} + \varepsilon_{-(n-2)} = \varepsilon_{\mp n} + \varepsilon_{n-2} + \varepsilon_{\pm n}$ y así $\alpha_{n-1}(K_1) = \alpha_{n-1}(K_2)$. Por último $S_n(K_1) = \{n-2, -(n-2), -(n-1)\} \cup \{A\} \cup \{C\}$ y $S_n(K_2) = \{-(n-1), -(n-2), n-1\} \cup \{A\} \cup \{C\}$, nuevamente, puesto que $\varepsilon_{n-2} + \varepsilon_{-(n-2)} + \varepsilon_{-(n-1)} = \varepsilon_{-(n-1)} + \varepsilon_{-(n-2)} + \varepsilon_{n-1}$, se tiene que $\alpha_n(K_1) = \alpha_n(K_2)$.

De lo anterior, los vectores $\alpha(K_1)$ y $\alpha(K_2)$ son iguales.

Sea $j \in \{1, 2, \dots, n-3\}$, y sea $S_j = S_j(K_1) = S_j(K_2)$. Puesto que $S_{n-1}(K_1) = \{\pm n, n-2, -(n-2)\} \cup \{B\} \cup \{C\}$ y $S_{n-1}(K_2) = \{\mp n, n-2, \pm n\} \cup \{B\} \cup \{C\}$, entonces $\beta_{n-1 j}(K_1) = \beta_{n-1 j}(K_2)$ si y sólo si se satisface la siguiente igualdad

$$\sum_{w \in \{\pm n, n-2, -(n-2)\} \cap S_j^{-1}} \varepsilon_w = \sum_{w \in \{\mp n, n-2, \pm n\} \cap S_j^{-1}} \varepsilon_w,$$

Y esta se satisface debido a que $\varepsilon_{\pm n} + \varepsilon_{n-2} + \varepsilon_{-(n-2)} = \varepsilon_{\mp n} + \varepsilon_{-(n-2)} + \varepsilon_{\pm n} = 0$.

$S_{n-2 j}(K_1) = (\{C\} \cap S_j^{-1}) \cup (\{n-2, -(n-2)\} \cap S_j^{-1})$ y $S_{n-2 j}(K_2) = (\{C\} \cap S_j^{-1}) \cup (\{\pm n, -(n-1), n-2, -(n-2)\} \cap S_j^{-1})$. Luego $\beta_{n-2 j}(K_1) = \beta_{n-2 j}(K_2)$ si y sólo si se satisface la siguiente igualdad

$$\sum_{w \in \{n-2, -(n-2)\} \cap S_j^{-1}} \varepsilon_w = \sum_{w \in \{\mp n, n-1, n-2, -(n-2)\} \cap S_j^{-1}} \varepsilon_w.$$

Pero esta se cumple debido a que $\varepsilon_{\pm n} + \varepsilon_{-(n-1)} = 0$, ya que por estar en el caso $R3-1$, $\varepsilon_{\pm n} = \mp(\mp 1) = 1$.

De una manera similar se prueba que $\beta_{nj}(K_1) = \beta_{nj}(K_2)$.

Por otro lado $S_{n-1 n-2}(K_1) = \{B\} \cap \{C\}^{-1}$, y $S_{n-1 n-2}(K_2) = (\{B\} \cap \{C\}^{-1}) \cup \{\mp n, n-1\}$.

Como $\varepsilon_{\mp n} + \varepsilon_{n-1} = 0$, entonces $\beta_{n-1 n-2}(K_1) = \beta_{n-1 n-2}(K_2)$.

Ahora bien, $S_{n-1 n}(K_1) = (\{B\} \cap (\{C\} \cup \{A\})^{-1}) \cup \{-(n-2), n-2, n-1\}$ y $S_{n-1 n}(K_2) = (\{B\} \cap (\{C\} \cup \{A\})^{-1}) \cup \{-(n-1), n-2, n-1\}$, puesto que $\varepsilon_{n-2} = \varepsilon_{n-1}$ entonces $\beta_{n-1 n}(K_1) = \beta_{n-1 n}(K_2)$. Por último $S_{n-2 n}(K_1) = (\{C\} \cap \{A\}^{-1}) \cup \{n-2, -(n-2)\}$ y $S_{n-2 n}(K_2) = (\{C\} \cap \{A\}^{-1} \cup \{-(n-1), n-2\})$, puesto que $\varepsilon_{n-2} + \varepsilon_{-(n-2)} = \varepsilon_{-(n-1)} + \varepsilon_{n-2}$, entonces $\beta_{n-2 n}(K_1) = \beta_{n-2 n}(K_2)$. De lo anterior las matrices $\beta(K_1)$ y $\beta(K_2)$ son iguales. Además $E(K_1) = E(K_2)$, luego $\lambda(K_1) = \lambda(K_2)$.

La prueba para las otras posibilidades de movimiento Tipo III son similares. ■

El siguiente teorema nos muestra la utilidad del invariante Λ a la hora de determinar cuándo un nudo combinatorio no es clásico.

Teorema 3.3.4 *Si $[K]$ es un nudo combinatorio clásico, entonces $\Lambda([K]) = [(), (), ()]$. Y por tanto $\text{Ord}(\Lambda([K])) = 0$.*

Prueba. Use Teorema 3.3.3 y Corolario 3.1.6. ■

Ejemplo 3.3.1 *Consideremos los nudos virtuales K y K' mostrados en la Figura 3-1. $K =$*

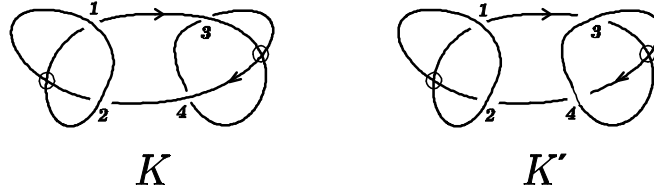


Figura 3-1: Nudos de Kishino

$((1, 2, -1, 3, -4, -3, 4, -2), (1, -1, 1, -1))$. Por definición $S_1 = \{3, -4, -3, 4, -2\}$, $S_2 = \{-1, 3, -4, -3, 4\}$, $S_3 = \{4, -2, 1, 2, -1\}$ y $S_4 = \{-2, 1, 2, -1, 3\}$. Entonces $S_{12} = \{1, 3, -4, -3, 4\}$, $S_{13} = \{-4, -2, 1, -1\}$, $S_{14} = \{-2, 1, -1, -3\}$, $S_{23} = \{-4, -2, 2, -1\}$, $S_{24} = \{2, -2, -1, -3\}$, $S_{34} = \{-2, 1, 2, -1, -3\}$, vease Definición 3.1.1. Por tanto tenemos que

$$\lambda(K) = \left(\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \right) \right).$$

Notemos que ninguna columna, ni la suma de dos de ellas, de la matriz $\beta(K)$ es igual a $\alpha(K)$. Con lo que $\lambda(K)$ es irreducible, y así $\text{Ord}\Lambda([K]) = 4$, de donde $[K]$ no es un nudo combinatorio clásico. En forma similar,

$$\lambda(K') = \left(\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \right) \right).$$

Luego, $\lambda(K')$ es irreducible y por ende $\text{Ord}\Lambda([K']) = 4$, con lo que $[K']$ no es un nudo combinatorio clásico. Adicionalmente, note que aunque $\alpha(K) = \alpha(K')$ y $\beta(K) = \beta(K')$, $E(K) \neq E(K')$ con lo que $\Lambda(K) \neq \Lambda(K')$ y por ende dichos nudos no son equivalentes.

El siguiente ejemplo muestra un nudo virtual K , que no es clásico, pero $\Lambda([K]) = [(0), (0), (0)]$.

Ejemplo 3.3.2 Consideremos el nudo virtual K mostrado en la Figura 3-2.

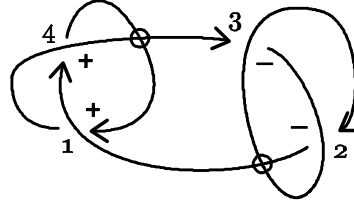


Figura 3-2: Ejemplo de un nudo virtual, no clásico, con Λ trivial

Puesto que

$$\Lambda(K) = \left[\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \right].$$

Entonces

$$\Lambda(K) = \left[\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right] = [(0), (0), (0)].$$

Por otro lado, K es la suma conexa de los nudos K_1 y K_2 mostrados, respectivamente, en la Figura 3-3. Por computo directo se prueba que

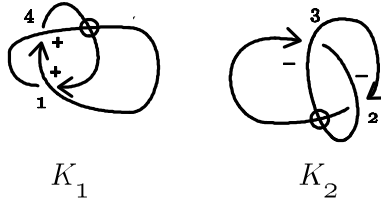


Figura 3-3: Dos nudos con Λ no trivial

$$\Lambda([K_1]) = \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right] = \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right]$$

y

$$\Lambda([K_2]) = \left[\left(\begin{array}{c} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{array} \right), \left(\begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{array} \right), \left(\begin{array}{cccc} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \right] = \left[\left(\begin{array}{c} -1 \\ -1 \end{array} \right), \left(\begin{array}{c} 1 \\ -1 \end{array} \right), \left(\begin{array}{cc} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{array} \right) \right].$$

Con lo que $[K_1]$ y $[K_2]$ no son nudos clásicos, luego, por el Corolario 2.1.2, $g_v[K_1] \geq 1$ y $g_v[K_2] \geq 1$, y por el Teorema 2.2.1 $g_v[K] \geq g_v[K_1] + g_v[K_2] - 1 \geq 1$, con lo que $[K]$ no es clásico.

3.4 ¿Cuándo una tripleta (S, A, B) es la tripleta de un código nudal?

Sea (E, A, B) una tripleta de orden $n \geq 1$. En esta sección nos preguntaremos acerca de las condiciones que debe satisfacer (E, A, B) para que exista un código K tal que $\lambda(K) = (E, A, B)$. Es posible que tales condiciones no se puedan extender a la clase de equivalencia $\Lambda(K) = [E, A, B]$. Antes de iniciar la búsqueda de tales condiciones consideremos la siguiente definición.

Definición 3.4.1 (Grafo de entrelazamiento) Sea K un código nudal con cruces a_1, \dots, a_n . Definimos el **grafo de entrelazamiento** de K , denotado por I_K , como la pareja ordenada $(V(I_K), E(I_K))$ consistente de un conjunto $V(I_K) = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ de vértices y un conjunto $E(I_K)$ de aristas de la forma $a_i a_j$, donde $a_i a_j \in E(I_K)$ si y sólo si se cumple alguna de las siguientes dos condiciones: $(a_i \in S_{a_j}(K)$ y $-a_i \notin S_{a_j}(K))$ o $(-a_i \in S_{a_j}(K)$ y $a_i \notin S_{a_j}(K))$.

Sea m un cruce de K , definimos la estrella de m en I_K , denotada por $star(m)$, como el subgrafo de I_K inducido por m y sus vecinos. Usaremos la siguiente notación: $V_m = V(star(m))$ y $E_m = E(star(m))$.

Clasificaremos los elementos de V_m y E_m , respectivamente, en dos conjuntos como sigue: $V_m^+ = \{t \in V_m : m \in S_t(K)\}$, $V_m^- = \{t \in V_m : -m \in S_t(K)\}$, $E_m^+ = \{mj : -e_j j \in S_m(K)\}$ y $E_m^- = \{mj : e_j j \in S_m(K)\} = E_m \setminus E_m^+$.

Lema 3.4.1 Sea K un código nudal y sea $a = a_j \in \{a_1, \dots, a_n\}$. Entonces $\alpha_a(K) = |E_a^+(K)| - |E_a^-(K)|$, donde $|E_a^+(K)|$ y $|E_a^-(K)|$ denotan las cardinalidades de $E_a^+(K)$ y $E_a^-(K)$, respectivamente.

Prueba. Supongamos que $V_a(K) = \{b_1, \dots, b_r\} \cup \{a\}$, entonces $E_a(K) = \{ab_j : j = 1, \dots, r\}$. Con esta notación $E_a^+(K) = \{ab_j : -e_{b_j} b_j \in S_a(K)\}$ y $E_a^-(K) = \{ab_j : e_{b_j} b_j \in S_a(K)\}$.

Sabemos que $\alpha_a(K) = \sum_{w \in N_a} \varepsilon_w$, donde N_a y S_a son los conjuntos definidos en la Sección 3.1.1. Ahora bien, sea $w \in N_a$.

Si $e_{|w|} = 1$ y $w > 0$, entonces $aw \in E_a^-(K)$ y $\varepsilon_w = -1$.

Si $e_{|w|} = 1$ y $w < 0$, entonces $a|w| \in E_a^+(K)$ y $\varepsilon_w = 1$.

Si $e_{|w|} = -1$ y $w > 0$, entonces $aw \in E_a^+(K)$ y $\varepsilon_w = 1$.

Si $e_{|w|} = -1$ y $w < 0$, entonces $a|w| \in E_a^-(K)$ y $\varepsilon_w = -1$.

Sean $A = \{w \in N_a : \varepsilon_{|w|} = 1\}$ y $B = \{w \in N_a : \varepsilon_{|w|} = -1\}$, entonces tenemos que $\sum_{w \in A} \varepsilon_w = |E_a^+(K)|$ y $\sum_{w \in B} \varepsilon_w = -|E_a^-(K)|$. Puesto que, $\alpha_a(K) = \sum_{w \in A} \varepsilon_w + \sum_{w \in B} \varepsilon_w$, entonces, $\alpha_a(K) = |E_a^+(K)| - |E_a^-(K)|$. ■

El siguiente teorema resume las condiciones que debe cumplir una tripleta para ser la tripleta de un código nudal. ¿Serán dichas condiciones suficientes? Esta pregunta esta pendiente para un próximo trabajo.

Teorema 3.4.2 *Sea K un código nudal con conjunto de cruces $\{a_1, \dots, a_n\}$. Entonces*

(1) $\sum_{j=1}^n \alpha_{a_j}(K) = 0$,

(2) $\alpha_{a_i}(K) \in [-(n-1), n-1] = \{-(n-1), -(n-2), \dots, 0, 1, 2, \dots, n-2, n-1\}$, para todo $i = 1, 2, \dots, n$ y

(3) $\beta_{a_i a_j}(K) \in [-(n-1), n-1] = \{-(n-1), -(n-2), \dots, 0, 1, 2, \dots, n-2, n-1\}$, para todo $i, j = 1, 2, \dots, n$.

Prueba. No perdemos generalidad si suponemos que los códigos están en forma estándar.

(1) Por el Lema 3.4.1 es suficiente probar que $\sum_{j=1}^n \left(|E_j^+(K)| - |E_j^-(K)| \right) = 0$. Consideremos la estrella en el vértice a . Ahora bien, si $V_a(K) = \{a\}$, entonces $E_a^+(K) = E_a^-(K) = \phi$, de donde $|E_a^+(K)| - |E_a^-(K)| = 0$. Supongamos ahora que $V_a(K) \neq \{a\}$. Por reenumeración, podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que $at \in E_a^+(K)$, $t = 1, 2, \dots, j$ y $as \in E_a^-(K)$, $s = j+1, \dots, r$. Se cumple que $at \in E_a^+(K)$ si y sólo si $-e_t t \in S_a(K)$ si y sólo si $K = ((C, -e_a a, D, -e_t t, P, e_a a, Q, e_t t), (e_1, \dots, e_n))$ si y sólo si $e_a a \in S_t(K)$ si y sólo si $at \in E_t^-(K)$. Como at pertenece sólo a dos estrellas, entonces se cumple que

$$\sum_{j=1}^n |E_j^+(K)| = \sum_{j=1}^n |E_j^-(K)|,$$

por tanto se cumple el resultado.

(2) Sea \mathcal{K}_n al conjunto de todos los códigos nudales, en forma estándar, de n cruces. Sea $K \in \mathcal{K}_n$ y sea j un cruce de K . Si $K = ((-e_j j, i_2, \dots, i_t, e_j j, i_{t+2}, \dots, i_{2n}), (e_1, \dots, e_n))$, entonces $S_j(K) = \{i_2, \dots, i_t\}$. Sean $\{a_1, \dots, a_p\}$, $\{b_1, \dots, b_q\}$ y $\{c_1, \dots, c_s\}$ subconjuntos disjuntos de $\{1, 2, \dots, n\} \setminus \{j\}$ tales que

$$S_j(K) = \{a_1, \dots, a_p\} \cup \{-b_1, \dots, -b_q\} \cup \{c_1, -c_1, \dots, c_s, -c_s\}.$$

Entonces

$$\alpha_j(K) = -e_{a_1} - \dots - e_{a_p} + e_{b_1} + \dots + e_{b_q}.$$

Puesto que $a_t \neq b_r$, para todo $t \in \{1, \dots, p\}$ y $r \in \{1, \dots, q\}$, entonces $p + q \leq n - 1$, de donde α_j tomaría su valor máximo cuando $p + q = n - 1$, $e_{a_1} = \dots = e_{a_p} = -1$ y $e_{b_1} = \dots = e_{b_q} = 1$, con lo que $\alpha_j(K) \leq n - 1$, para todo $K \in \mathcal{K}_n$. Por otro lado, α_j obtendría su valor mínimo cuando $p + q = n - 1$, $e_{a_1} = \dots = e_{a_p} = 1$ y $e_{b_1} = \dots = e_{b_q} = -1$, con lo que $\alpha_j(K) \geq -(n - 1)$, para todo $K \in \mathcal{K}_n$.

(3) Se hace un argumento similar al hecho en la prueba de (2) y se obtiene (3). ■

El siguiente ejemplo muestra que las cotas dadas en el teorema anterior se alcanzan.

Ejemplo 3.4.1 Sea n un entero positivo mayor o igual a 2, y sea $K_n = ((1, 2, \dots, n, -1, -2, \dots, -n), (1, 1, \dots, 1))$. Entonces $S_i(K_n) = \{-(i+1), -(i+2), \dots, -n, 1, 2, \dots, i-1\}$, para todo $i = 1, 2, \dots, n$, de donde $\alpha_i(t) = n - 2i + 1$. Por otro lado $\overline{S}_i(K_n) \cap S_j^-(K_n) = \{j+1, \dots, i\}$, con lo que, $\beta_{ij}(K_n) = j - i$ para $i > j$. Este ejemplo prueba también que estos nudos virtuales de 1 puente no son triviales, como se afirmó en el Ejemplo 2.5.4

3.5 Existencia de nudos virtuales chirales y no invertibles

En esta sección estudiaremos el problema de cómo saber cuándo un nudo virtual, no clásico, es chiral $*$, chiral $\#$ y no invertible. Para ello probaremos que el invariante Λ es sensible con respecto a la imagen espejo $*$ y $\#$, y al inverso. Vease Sección 2.1.

Teorema 3.5.1 Sea K un código nudal, entonces $\alpha_j(K) = \alpha_j(K^*)$ y $\beta_{ij}(K) = \beta_{ij}(K^*)$, para todo $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$. Por tanto, si $\Lambda([K]) = [E(K), \alpha(K), \beta(K)]$ entonces $\Lambda([K^*]) = [-E(K), \alpha(K), \beta(K)]$.

Prueba. Por definición, $S_j(K^*) = S_j^{-1}(K)$, para todo $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$. Ahora bien, $\varepsilon_w^* = -\varepsilon_w$, para todo $w \in \{1, 2, \dots, n\} \cup \{-1, -2, \dots, -n\}$, por tanto

$$\alpha_j(K^*) = \sum_{w \in S_j(K^*)} \varepsilon_w^* = - \sum_{w \in S_j^{-1}(K)} \varepsilon_w = \sum_{w \in S_j(K)} \varepsilon_w = \alpha_j(K).$$

Por otro lado, $S_{ij}(K^*) = \overline{S}_i(K^*) \cap S_j^{-1}(K^*) = \left(\overline{S}_i(K) \cap S_j^{-1}(K) \right)^{-1}$, luego

$$\beta_{ij}(K^*) = \sum_{w \in S_{ij}(K^*)} \varepsilon_w^* = - \sum_{w \in S_{ij}^{-1}(K)} \varepsilon_w = \beta_{ij}(K). \quad \blacksquare$$

Teorema 3.5.2 Sea $K = ((i_1, \dots, i_{2n}), (e_1, \dots, e_n))$ un código nudal, entonces $\alpha_j(K^\#) = \alpha_j(K^*)$ para todo $j \in \{1, 2, \dots, n\}$.

Prueba. No es difícil verificar que, para todo $j \in \{1, 2, \dots, n\}$

$$S_j(K^\#) \cup S_j(K) = \{i_1, \dots, i_{2n}\} \setminus \{j, -j\} \quad \text{y} \quad S_j(K^\#) \cap S_j(K) = \emptyset.$$

$$\begin{aligned} \text{Luego, } 0 &= \sum_{w \in S_j(K^\#) \cup S_j(K)} \varepsilon_w = \sum_{w \in S_j(K^\#)} \varepsilon_w + \sum_{w \in S_j(K)} \varepsilon_w = - \sum_{w \in S_j(K^\#)} \varepsilon_w^\# + \sum_{w \in S_j(K)} \varepsilon_w = \\ &= -\alpha_j(K^\#) + \alpha_j(K). \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Hasta este momento no hemos encontrado una relación simple entre las matrices $\beta(K)$ y $\beta(K^\#)$. Pero sí encontramos una relación entre $\Lambda[-K]$ y $\Lambda[K^\#]$, como ilustramos en el siguiente teorema.

Teorema 3.5.3 *Sea K un código nudal, entonces $\alpha_i(-K) = -\alpha_i(K^\#)$ y $\beta_{ij}(-K) = -\beta_{ij}(K^\#)$, para todo $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$. Luego $\Lambda([-K]) = [-E(K^\#), -\alpha(K^\#), -\beta(K^\#)] = -\Lambda([K^\#])$.*

$$\begin{aligned} \text{Prueba.} \text{ Para todo } j \in \{1, 2, \dots, n\}, S_j(K^\#) = S_j(-K). \text{ Así que } \alpha_j(K^\#) &= \sum_{w \in S_j(K^\#)} \varepsilon_w^\# = \\ - \sum_{w \in S_j(-K)} \varepsilon_w &= -\alpha_j(-K), \text{ y } \beta_{ij}(K^\#) = \sum_{w \in S_{ij}(K^\#)} \varepsilon_w^\# = - \sum_{w \in S_{ij}(-K)} \varepsilon_w = -\beta_{ij}(-K). \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Ejemplo 3.5.1 *Para $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, sea $K_n = ((1, 2, \dots, n, -1, -2, \dots, -n), (1, 1, \dots, 1))$. Entonces K_n no es un nudo combinatorio clásico. Además no es chiral $*$, chiral $\#$ y no es invertible. En efecto, puesto que $S_i(K_n) = \{-(i+1), -(i+2), \dots, -n, 1, 2, \dots, i-1\}$, para todo $i = 2, \dots, n$, $\alpha_i(t) = n - 2i + 1$. Por otro lado, si $i > j$ entonces $\overline{S}_i(K_n) \cap S_j^-(K_n) = \{j+1, \dots, i\}$, por tanto, $\beta_{ij}(K_n) = j - i$ para $i > j$. Luego*

$$\Lambda[K_n] = \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} n-1 \\ n-3 \\ \vdots \\ -n+1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & n-1 \\ -1 & 0 & \dots & n-2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1-n & 2-n & \dots & 0 \end{pmatrix} \right].$$

Debido a que todas las entradas del primer vector de $\Lambda[K_n]$ tienen el mismo signo no podemos aplicar simplificación de Tipo Δ_2 sobre $\Lambda[K_n]$. Por otro lado, ninguna columna de la matriz de $\Lambda[K_n]$ es igual al segundo vector de $\Lambda[K_n]$, con lo que no podemos aplicar simplificaciones tipo Δ_1 sobre $\Lambda[K_n]$, por tal motivo $\Lambda[K_n]$ es irreducible, lo que implica que $\Lambda[K_n] \neq [(\), (\), (\)]$. Por otro lado, $K_n^* = K_n^\#$, con lo que

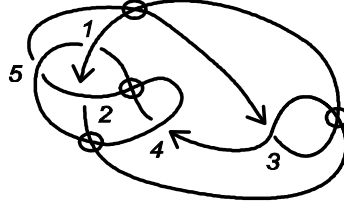
$$\Lambda[K_n^*] = \Lambda[K_n^\#] = \left[\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ \vdots \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} n-1 \\ n-3 \\ \vdots \\ -n+1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & n-1 \\ -1 & 0 & \dots & n-2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1-n & 2-n & \dots & 0 \end{pmatrix} \right],$$

entonces $\Lambda[K_n^*] = \Lambda[K_n^\#] \neq \Lambda[K_n]$, así que K_n es chiral $*$ y $\#$. Por último

$$\Lambda[-K_n] = \left[\left(\begin{array}{c} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{array} \right), \left(\begin{array}{c} -(n-1) \\ -(n-3) \\ \vdots \\ -(-n+1) \end{array} \right), \left(\begin{array}{cccc} 0 & -1 & \dots & -(n-1) \\ 1 & 0 & \dots & -(n-2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ n-1 & n-2 & \dots & 0 \end{array} \right) \right],$$

de donde K_n no es invertible.

Ejemplo 3.5.2 Consideremos el nudo virtual mostrado en la Figura 3-4.



$$((1,-2,3,-4,-1,5,4,2,-5,-3),(1,1,1,1,-1))$$

Figura 3-4: Ejemplo de un nudo virtual K que es chiral $*$ y chiral $\#$ y no invertible.

Puesto que

$$\Lambda(K) = \left[\left(\begin{array}{c} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{array} \right), \left(\begin{array}{c} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 0 \\ -2 \end{array} \right), \left(\begin{array}{ccccc} 0 & 2 & -1 & 1 & 2 \\ -2 & 0 & -2 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ -2 & -2 & -1 & -1 & 0 \end{array} \right) \right],$$

entonces K es chiral $*$.

Por otro lado

$$\Lambda(K^\#) = \left[\left(\begin{array}{c} 1 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{array} \right), \left(\begin{array}{c} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 0 \\ -2 \end{array} \right), \left(\begin{array}{ccccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -3 & -1 & 0 \end{array} \right) \right],$$

con lo que K es chiral $\#$ y no invertible. Además, en este caso, K^* no es equivalente a $K^\#$.

3.6 La tripleta Λ de virtualizaciones de un nudo clásico

En la Sección 2.4 definimos el proceso de virtualización de un cruce clásico. Esta modificación local llevo a Dye y Kauffman [12] a proponer el siguiente interrogante, que en términos de códigos es: *Sea K un código nudal geométrico. ¿Qué condiciones debe cumplir un cruce m de K para que $[K_v^m]$ ó $[K_{sv}^m]$ ó $[K^m]$ sean nudos combinatorios clásicos?* Este problema ha sido estudiado por varios especialistas en el tema, vease [12] y [39].

En esta sección estudiaremos el comportamiento del invariante Λ con respecto a los tres tipos de virtualizaciones dadas en la Definición 2.4.10. Con base en eso daremos condiciones necesarias para determinar cuándo una virtualización de un diagrama de un nudo clásico no es un nudo clásico.

Con la idea de simplificar la notación supondremos que los códigos estarán en forma estándar (vease Definición 1.2.1) y que las virtualizaciones siempre se realizan sobre el cruce n .

Recordemos los tres tipos de virtualización dados en la Sección 2.4. Sea $K = ((A, n, B, -n), (e_1, \dots, e_n))$, $n > 0$, un código nudal. Entonces $K_v^n = ((A, n, B, -n), (e_1, \dots, e_{n-1}, -e_n))$, $K_{sv}^n = ((A, -n, B, n), (e_1, \dots, e_n))$ y $K^n = ((A, B), (e_1, \dots, e_n))$.

Recordemos, ver Sección 3.4, que si m es un cruce de K , V_m representará el conjunto de vértices de la estrella de m en I_K y E_m el conjunto de aristas de la estrella de m en I_K . Además, clasificamos los elementos de V_m y E_m , respectivamente, en dos conjuntos como sigue: $V_m^+ = \{t \in V_m : m \in S_t(K)\}$, $V_m^- = \{t \in V_m : -m \in S_t(K)\}$, $E_m^+ = \{mj : -e_j \in S_m(K)\}$ y $E_m^- = \{mj : e_j \in S_m(K)\} = E_m \setminus E_m^+$.

Proposición 3.6.1 *Sea K un código nudal geométrico. Si $V_n = \{n\}$, entonces $[K_v^n]$, $[K_{sv}^n]$ y $[K^n]$ son nudos combinatorios clásicos.*

Prueba. Supongamos que $e_n = -1$, el caso $e_n = 1$ es similar. Ahora bien, si $V_n = \{n\}$, entonces un diagrama esquemático para K , K_v^n , K_{sv}^n y K^n se muestra en la Figura 3-5.

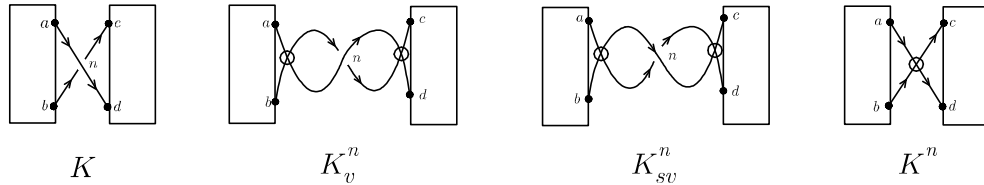


Figura 3-5: Diagrama esquemático para K , K_v^n , K_{sv}^n y K^n en el caso de que $V_n = \{n\}$

La prueba de que cada uno de ellos es clásico se muestra en la Figura 3-6. ■

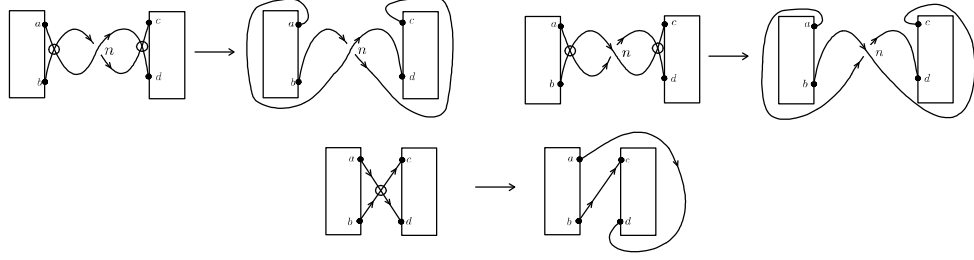


Figura 3-6: Prueba de que K_v^n , K_{sv}^n y K^n son clásicos

Proposición 3.6.2 Sea K un código nudal, entonces $\alpha_j(K_v^n) = \alpha_j(K_{sv}^n)$ y $\beta_{ij}(K_v^n) = \beta_{ij}(K_{sv}^n)$ para todo $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$.

Prueba. Por definición, si $K = ((A, n, B, -n), (e_1, \dots, e_n))$, entonces $K_v^n = ((A, n, B, -n), (\tilde{e}_1, \dots, \tilde{e}_n))$, donde $\tilde{e}_j = e_j$, $j = 1, \dots, n-1$ y $\tilde{e}_n = -e_n$, y $K_{sv}^n = ((A, -n, B, n), (e_1, \dots, e_n))$. Sea r un cruce de K distinto de n , entonces $S_r(K)$ puede ser igual a uno de los siguientes conjuntos $\{C, n\}$, $\{D, -n\}$, $\{E, n, -n\}$, $\{F\}$, donde C, D, E y F son subconjuntos de $\{A\} \cup \{B\}$, que no contienen ni a n ni a $-n$. Por definición $S_r(K_v^n) = S_r(K)$, y $S_r(K_{sv}^n)$ es igual a uno de los conjuntos $\{C, -n\}$, $\{D, n\}$, $\{E, n, -n\}$, $\{F\}$. Ahora bien:

(1) Si $S_r(K) = \{C, n\}$, es decir, $r \in V_n^+$, entonces $S_r(K_v^n) = \{C, n\}$ y $S_r(K_{sv}^n) = \{C, -n\}$.

(2) Si $S_r(K) = \{D, -n\}$, es decir, $r \in V_n^-$, entonces $S_r(K_v^n) = \{D, -n\}$ y $S_r(K_{sv}^n) = \{D, n\}$.

(3) Si $S_r(K) = \{E, n, -n\}$ ó $S_r(K) = \{F\}$, es decir, $r \notin V_n$, entonces $S_r(K_v^n) = S_r(K_{sv}^n)$.

De (1), $\alpha_r(K_v^n) = \sum_{w \in \{C\}} \tilde{\varepsilon}_w + \tilde{\varepsilon}_n = \sum_{w \in \{C\}} \varepsilon_w - \varepsilon_n = \sum_{w \in \{C\} \cup \{-n\}} \varepsilon_w - \varepsilon_{-n} - \varepsilon_n = \alpha_r(K_{sv}^n)$.

De (2), $\alpha_r(K_v^n) = \sum_{w \in \{C\}} \tilde{\varepsilon}_w + \tilde{\varepsilon}_{-n} = \sum_{w \in \{C\}} \varepsilon_w - \varepsilon_{-n} = \sum_{w \in \{C\} \cup \{n\}} \varepsilon_w - \varepsilon_n + \varepsilon_n = \alpha_r(K_{sv}^n)$.

De (3), $\alpha_r(K_v^n) = \alpha_r(K_{sv}^n)$.

Sean r y t cruces de K distintos de n . Ahora bien, si $t \notin V_n$ y $r \notin V_n$, entonces por (3) tenemos que $\beta_{rt}(K_v^n) = \beta_{rt}(K_{sv}^n)$.

Supongamos que $t \in V_n^+$ y que $r \notin V_n$, entonces, por (1), $S_t(K_v^n) = \{C, n\}$ y $S_t(K_{sv}^n) = \{C, -n\}$, y por (3), $S_r(K_v^n) = S_r(K_{sv}^n) = \{E, n, -n\}$ ó $S_r(K_v^n) = S_r(K_{sv}^n) = \{F\}$. Si $S_r(K_v^n) = S_r(K_{sv}^n) = \{E, n, -n\}$, entonces $S_{tr}(K_v^n) \setminus \{n\} = S_{tr}(K_{sv}^n) \setminus \{-n\}$, luego $\beta_{tr}(K_v^n) = \beta_{tr}(K_{sv}^n)$. Por otro lado, si $S_r(K_v^n) = S_r(K_{sv}^n) = \{F\}$, entonces $S_{tr}(K_v^n) = S_{tr}(K_{sv}^n)$, con lo que $\beta_{tr}(K_v^n) = \beta_{tr}(K_{sv}^n)$.

Supongamos ahora que $t \in V_n^-$ y $r \notin V_n$, entonces por (2), $S_t(K_v^n) = \{D, -n\}$ y $S_t(K_{sv}^n) = \{D, n\}$ y por (3) $S_r(K_v^n) = S_r(K_{sv}^n) = \{E, n, -n\}$ ó $S_r(K_v^n) = S_r(K_{sv}^n) = \{F\}$. Luego, si $S_r(K_v^n) = S_r(K_{sv}^n) = \{E, n, -n\}$, entonces $S_{tr}(K_v^n) \setminus \{-n\} = S_{tr}(K_{sv}^n) \setminus \{n\}$, luego $\beta_{tr}(K_v^n) = \beta_{tr}(K_{sv}^n)$. Por otro lado, si $S_r(K_v^n) = S_r(K_{sv}^n) = \{F\}$, entonces $S_{tr}(K_v^n) = S_{tr}(K_{sv}^n)$, con lo que $\beta_{tr}(K_v^n) = \beta_{tr}(K_{sv}^n)$.

Supongamos que $t \in V_n^+$ y $r \in V_v^+$, entonces, por (1), $S_t(K_v^n) = \{C, n\}$ y $S_t(K_{sv}^n) = \{C, -n\}$ y $S_r(K_v^n) = \{\tilde{C}, n\}$ y $S_r(K_{sv}^n) = \{\tilde{C}, -n\}$, luego $S_{tr}(K_v^n) = S_{tr}(K_{sv}^n)$, así que $\beta_{tr}(K_v^n) = \beta_{tr}(K_{sv}^n)$.

Supongamos que $t \in V_n^+$ y $r \in V_n^-$, entonces por (1) y (2) $S_t(K_v^n) = \{C, n\}$, $S_t(K_{sv}^n) = \{C, -n\}$, $S_r(K_v^n) = \{D, -n\}$ y $S_r(K_{sv}^n) = \{D, n\}$, luego $S_{tr}(K_v^n) \setminus \{n\} = S_{tr}(K_{sv}^n) \setminus \{-n\}$, de donde $\beta_{tr}(K_v^n) = \beta_{tr}(K_{sv}^n)$.

Supongamos ahora que $t = n$. No es difícil verificar que $S_n(K_v^n) = S_n(K_{sv}^n)$. Ahora bien, si $r \notin V_n$, por (3), $S_r(K_v^n) = S_r(K_{sv}^n) = \{E, n, -n\}$ ó $S_r(K_v^n) = S_r(K_{sv}^n) = \{F\}$. En ambos casos $\beta_{tr}(K_v^n) = \beta_{tr}(K_{sv}^n)$. Por otro lado, si $r \in V_n^+$. Entonces $S_{nr}(K_v^n) \setminus \{-n\} = S_{nr}(K_{sv}^n) \setminus \{n\}$, con lo que $\beta_{tr}(K_v^n) = \beta_{tr}(K_{sv}^n)$. Si $r \in V_n^-$, se procede de forma análoga. ■

Los siguientes teoremas nos dan una forma de computar $\Lambda(K_{sv}^n)$ a partir de $\Lambda(K)$.

Primero analizaremos el caso en el que $j \notin V_n$, es decir que $\{n, -n\} \cap S_j(K) = \emptyset$ ó $\{n, -n\} \subset S_j(K)$, el cual se resume en el Teorema 3.6.3. Después analizaremos, por separado, los casos en el que $j \in V_n^+$ o $j \in V_n^-$, es decir $\{n, -n\} \cap S_j(K) = \{n\}$ ó $\{n, -n\} \cap S_j(K) = \{-n\}$, respectivamente, que se presentan en el Teorema 3.6.4.

Teorema 3.6.3 *Sea K un código nudal de n cruces en forma estándar, y sea j un vértice de I_K tal que $j \notin V_n$, entonces:*

- (1) $\alpha_j(K_{sv}^n) = \alpha_j(K)$.
- (2) Si $\{n, -n\} \cap S_j(K) = \emptyset$, entonces $\beta_{ij}(K_{sv}^n) = \beta_{ij}(K)$, para todo $i = 1, 2, \dots, n$,
- (3) Si $\{n, -n\} \subset S_j(K)$, entonces:
 - (a) $\beta_{jt}(K_{sv}^n) = -\beta_{jt}(K) - 2e_n$ si $t \in V_n^+$.
 - (b) $\beta_{jt}(K_{sv}^n) = -\beta_{jt}(K) + 2e_n$ si $t \in V_n^-$.
 - (c) $\beta_{jt}(K_{sv}^n) = \beta_{jt}(K)$ si $t \notin V_n$ y $t \neq n$.
 - (d) $\beta_{jn}(K_{sv}^n) = \alpha_j(K) - \beta_{jn}(K)$.

Prueba. Supongamos que $K = ((A, n, B, -n), (e_1, \dots, e_n))$, entonces $K_{sv}^n = ((A, -n, B, n), (e_1, \dots, e_n))$

(1) Sea j un cruce de K tal que $j \notin V_n$, entonces $S_j(K_{sv}^n) = S_j(K) = \{C, n, -n\}$ o $S_j(K_{sv}^n) = S_j(K) = \{D\}$, donde $\{C\}$ y $\{D\}$ son subconjuntos de $\{A, B\}$. En cada una de ellas se tiene que $\alpha_j(K_{sv}^n) = \alpha_j(K)$.

(2) Supongamos que $S_j(K_{sv}^n) = S_j(K) = \{D\}$, y sea $i \in \{1, \dots, n\}$. Entonces $S_{ij}(K_{sv}^n) = S_{ij}(K)$. Así que $\beta_{ij}(K_{sv}^n) = \beta_{ij}(K)$.

(3) Supongamos que $\{n, -n\} \subset S_j(K)$.

(a) Si $t \in V_n^+$, entonces $n \in S_t(K)$ y $-n \notin S_t(K)$, por tanto $-n \in S_t(K_{sv}^n)$ y $n \notin S_t(K_{sv}^n)$.

De lo anterior $S_{jt}(K) \setminus \{-n\} = S_{jt}(K_{sv}^n) \setminus \{n\}$ de donde

$$\beta_{jt}(K_{sv}^n) = \sum_{w \in S_{jt}(K_{sv}^n) \setminus \{n\}} \varepsilon_w + \varepsilon_n = \sum_{w \in S_{jt}(K) \setminus \{-n\}} \varepsilon_w + \varepsilon_n = \beta_{jt}(K) - 2e_n.$$

(b) Supongamos que $t \in V_n^-$, entonces $-n \in S_t(K)$ y $n \notin S_t(K)$, luego $n \in S_t(K_{sv}^n)$ y $-n \notin$

$S_t(K_{sv}^n)$. Por tal motivo $S_{jt}(K) \setminus \{n\} = S_{jt}(K_{sv}^n) \setminus \{-n\}$, con lo que

$$\beta_{jt}(K_{sv}^n) = \sum_{w \in S_{jt}(K_{sv}^n) \setminus \{-n\}} \varepsilon_w + \varepsilon_{-n} = \sum_{w \in SS_{jt}(K) \setminus \{n\}} \varepsilon_w + \varepsilon_{-n} = \beta_{jt}(K) + 2e_n.$$

(c) Si $t \notin V_n$, tenemos dos casos: que $\{n, -n\} \cap S_j(K) = \emptyset$ o $\{n, -n\} \subset S_t(K)$, en cada uno de ellos se cumple $S_t(K_{sv}^n) = S_t(K)$ y, debido a que $S_j(K_{sv}^n) = S_j(K)$, entonces $\beta_{jt}(K_{sv}^n) = \beta_{jt}(K)$.

(d) Puesto que $S_j(K_{sv}^n) = S_j(K)$ y además, $S_n(K_{sv}^n) \cup S_n(K) = \{A, B\}$, entonces

$$(S_n^{-1}(K_{sv}^n) \cup S_n^{-1}(K) \cup \{n, -n\}) \cap \bar{S}_j(K) = \bar{S}_j(K),$$

entonces $\alpha_j(K) = \beta_{jn}(K_{sv}^n) + \beta_{jn}(K)$. ■

En el siguiente teorema analizaremos el caso en el que $j \in V_n$.

Teorema 3.6.4 *Sea K un código nudal de n cruces en forma estándar, y sea j un vértice de I_K tal que $j \in V_n$.*

I. Si $j \in V_n^+$, entonces $\alpha_j(K_{sv}^n) = \alpha_j(K) + 2e_n$ y $\beta_{jn}(K_{sv}^n) = -\beta_{jn}(K) + e_n + \alpha_j(K)$. Mas aún, para $i = 1, \dots, n-1$,

(1) Si $i \in V_n^-$, entonces $\beta_{ij}(K_{sv}^n) = \beta_{ij}(K) - 2e_n$ y

(2) si $i \in V_n^+$, entonces $\beta_{ij}(K_{sv}^n) = \beta_{ij}(K)$.

II. Si $j \in V_n^-$, entonces $\alpha_j(K_{sv}^n) = \alpha_j(K) - 2e_n$ y $\beta_{jn}(K_{sv}^n) = \beta_{jn}(K) + e_n - \alpha_j(K)$. Más aún, para $i = 1, \dots, n-1$,

(1) Si $i \in V_n^+$, entonces $\beta_{ij}(K_{sv}^n) = \beta_{ij}(K) + 2e_n$ y

(2) si $i \in V_n^-$, entonces $\beta_{ij}(K_{sv}^n) = \beta_{ij}(K)$.

Prueba. I. Si $j \in V_n^+$, entonces $S_j(K) = \{C, n\}$ y $S_j(K_{sv}^n) = \{C, -n\}$. Como consecuencia

$$\begin{aligned} \alpha_j(K_{sv}^n) &= \sum_{w \in S_j(K_{sv}^n)} \varepsilon_w = \sum_{w \in \{C\}} \varepsilon_w + \varepsilon_{-n} = \sum_{w \in \{C, n\}} \varepsilon_w - \varepsilon_n + \varepsilon_{-n} = \sum_{w \in S_j(K)} \varepsilon_w + 2e_n \\ &= \alpha_j(K) + 2e_n. \end{aligned}$$

Por otro lado $(S_n^{-1}(K_{sv}^n) \cup S_n^{-1}(K) \cup \{n, -n\}) \cap \bar{S}_j(K) = \bar{S}_j(K)$. Puesto que $\bar{S}_j(K) \cap S_n^{-1}(K_{sv}^n) = \bar{S}_j(K_{sv}^n) \cap S_n^{-1}(K_{sv}^n)$, entonces $(S_j(K_{sv}^n) \cap S_n(K_{sv}^n)) \cup (\bar{S}_j(K) \cap S_n^-(K)) \cup \{n\} = \bar{S}_j(K)$, así que

$$\beta_j(K_{sv}^n) + \beta_j(K) - e_n = \alpha_j(K).$$

(1) Supongamos que $-n \in S_i(K)$ y $n \notin S_i(K)$, entonces $n \in S_i(K_{sv}^n)$ y $-n \notin S_i(K_{sv}^n)$, con lo

que $-n \in S_{ji}(K_{sv}^n)$ y $n \notin S_{ji}(K_{sv}^n)$. Por tanto $S_{ji}(K) \setminus \{n\} = S_{ji}(K_{sv}^n) \setminus \{-n\}$, y así

$$\begin{aligned} \beta_{ji}(K_{sv}^n) &= \sum_{w \in S_{ji}(K_{sv}^n) \setminus \{-n\}} \varepsilon_w + \varepsilon_{-n} = \sum_{w \in S_{ji}(K) \setminus \{n\}} \varepsilon_w + e_n \\ &= \sum_{w \in S_{ji}(K)} \varepsilon_w - \varepsilon_n + \varepsilon_{-n} = \beta_{ji}(K) + 2e_n. \end{aligned}$$

Entonces, $\beta_{ij}(K_{sv}^n) = -\beta_{ji}(K_{sv}^n) = -\beta_{ji}(K) - 2e_n = \beta_{ij}(K) - 2e_n$.

(2) Supongamos que $n \in S_i(K)$ y $-n \notin S_i(K)$, entonces $-n \in S_i(K_{sv}^n)$ y $n \notin S_i(K_{sv}^n)$, entonces $S_{jn}(K_{sv}^n) = S_{jn}(K)$, con lo que $\beta_{ij}(K_{sv}^n) = \beta_{ij}(K)$.

La prueba de II es similar a la de I. ■

Nota 3.6.1 Sea K un código nudal. No es difícil ver que existen enteros positivos t, s y r , que nos permiten aplicar transformaciones de Tipo B sobre K tal que:

- (1) $\{n, -n\} \subset S_i(K)$, para todo $i = 1, 2, \dots, t$,
- (2) ni n ni $-n$ estén en $S_i(K)$, para todo $i = t + 1, \dots, s$,
- (3) $i \in V_n^+$, para todo $i = s + 1, \dots, r$ y
- (4) $i \in V_n^-$, para todo $i = r + 1, \dots, n - 1$.

El siguiente teoremas es inmediato de los resultados anteriores.

Teorema 3.6.5 Con la notación anterior, si K es código geométrico, entonces $\alpha(K_{sv}^n)$ y $\beta(K_{sv}^n)$ son iguales, respectivamente, a

$$\begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 2e_n \\ \vdots \\ 2e_n \\ -2e_n \\ \vdots \\ -2e_n \\ 0 \end{bmatrix} y \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & -2e_n & \cdots & -2e_n & 2e_n & \cdots & 2e_n & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & -2e_n & \cdots & -2e_n & 2e_n & \cdots & 2e_n & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 2e_n & \cdots & 2e_n & 0 & \cdots & 0 & 2e_n & \cdots & 2e_n & e_n \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 2e_n & \cdots & 2e_n & 0 & \cdots & 0 & 2e_n & \cdots & 2e_n & e_n \\ 0 & \cdots & 0 & -2e_n & \cdots & -2e_n & -2e_n & \cdots & -2e_n & 0 & \cdots & 0 & -e_n \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & -2e_n & \cdots & -2e_n & -2e_n & \cdots & -2e_n & 0 & \cdots & 0 & -e_n \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & -e_n & \cdots & -e_n & e_n & \cdots & e_n & 0 \end{bmatrix} \quad (3.11)$$

Corolario 3.6.6 Sea L un nudo combinatorio, entonces existe un código nudal geométrico K tal que $L = K_{sv}^n$ si $\lambda(K) = (E, P\alpha(K_{sv}^m), P\beta(K_{sv}^m)P^T)$.

Corolario 3.6.7 Si K es un código geométrico tal que $V_n \neq \{n\}$, y Γ es la tripleta

$$\Gamma = \left(\left(\begin{pmatrix} e_{s+1} \\ \vdots \\ e_r \\ e_{r+1} \\ \vdots \\ e_{n-1} \\ e \end{pmatrix} \right), \left(\begin{pmatrix} 2e_n \\ \vdots \\ 2e_n \\ -2e_n \\ \vdots \\ -2e_n \\ 0 \end{pmatrix} \right), \left(\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 2e_n & \cdots & 2e_n & e_n \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 2e_n & \cdots & 2e_n & e_n \\ -2e_n & \cdots & -2e_n & 0 & \cdots & 0 & -e_n \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ -2e_n & \cdots & -2e_n & 0 & \cdots & 0 & -e_n \\ -e_n & \cdots & -e_n & e_n & \cdots & e_n & 0 \end{pmatrix} \right),$$

entonces $\Lambda(K_{sv}^n)$ es Δ -equivalente a la tripleta Γ con $e = e_n$ y $\Lambda(K_v^n)$ es Δ -equivalente a la tripleta Γ con $e = -e_n$, donde $e \in \{1, -1\}$.

Sea K un código geométrico y consideremos los siguientes conjuntos:

$$S_{++}(n) = \{j : nj \in E_n^+ \text{ y } e_j = 1\}, S_{+-}(n) = \{j : nj \in E_n^+ \text{ y } e_j = -1\}, S_{-+}(n) = \{j : nj \in E_n^- \text{ y } e_j = 1\} \text{ y } S_{--}(n) = \{j : nj \in E_n^- \text{ y } e_j = -1\}.$$

Corolario 3.6.8 Con la notación anterior. Si K es un código geométrico tal que $|S_{++}| \neq |S_{--}|$ ó $|S_{+-}| \neq |S_{-+}|$ entonces $[K_{sv}^n]$ y $[K_v^n]$ son nudos combinatorios no clásicos.

Prueba. Si alguna de las dos condiciones se cumple, entonces $\text{Ord}\Lambda(K_{sv}^n) = \text{Ord}\Lambda(K_v^n) \geq 3$, por tanto $[K_{sv}^n]$ y $[K_v^n]$ no son clásicos. ■

Con un procedimiento similar al hecho para conseguir la prueba del Corolario 3.6.7, se demuestra el siguiente teorema.

Teorema 3.6.9 Sea K un código geométrico, entonces $\Lambda(K^n)$ es Δ -equivalente a la tripleta

$$\left(\left(\begin{pmatrix} e_{s+1} \\ \vdots \\ e_r \\ e_{r+1} \\ \vdots \\ e_{n-1} \end{pmatrix} \right), \left(\begin{pmatrix} e_n \\ \vdots \\ e_n \\ -e_n \\ \vdots \\ -e_n \end{pmatrix} \right), \left(\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & e_n & \cdots & e_n \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & e_n & \cdots & e_n \\ -e_n & \cdots & -e_n & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -e_n & \cdots & -e_n & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \right).$$

Por tanto, si $|S_{++}| \neq |S_{--}|$ ó $|S_{+-}| \neq |S_{-+}|$, entonces $[K^n]$ no es clásico.

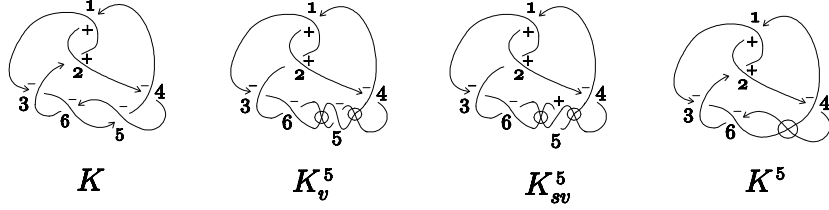


Figura 3-7: Ejemplo de diagramas de nudos clásicos con un cruce virtualizado.

Ejemplo 3.6.1 Consideremos el nudo clásico K mostrado en la Figura 3-7. Sus virtualizaciones K_v^5 , K_{sv}^5 y K^5 se muestran, respectivamente, en la misma figura.

El grafo de entrelazamiento I_K se muestra en la Figura 3-8. Vease Definición 3.4.1

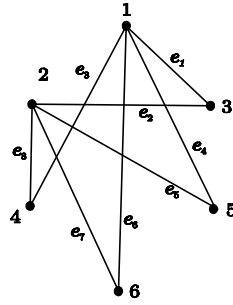


Figura 3-8: El grafo de entrelazamiento para el nudo mostrado en la Figura 3-7

Por tanto tenemos que $E_5^+(K) = \{e_5\}$ y $E_5^- = \{e_4\}$, entonces $S_{+-}(K) = \emptyset$ y $S_{-+}(K) = \{2\}$. Luego, por los Corolarios 3.6.8 y 3.6.9, K_v^5 , K_{sv}^5 y K^5 no son nudos virtuales clásicos. Por otro lado

$$\Lambda([K_v^5]) = \left[\left(\begin{array}{c} 1 \\ 1 \\ -1 \end{array} \right), \left(\begin{array}{c} -2 \\ 2 \\ 0 \end{array} \right), \left(\begin{array}{ccc} 0 & -2 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{array} \right) \right],$$

$$\Lambda([K_{sv}^5]) = \left[\left(\begin{array}{c} 1 \\ 1 \\ 1 \end{array} \right), \left(\begin{array}{c} -2 \\ 2 \\ 0 \end{array} \right), \left(\begin{array}{ccc} 0 & -2 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{array} \right) \right] \text{ y}$$

$$\Lambda([K^5]) = \left[\left(\begin{array}{c} 1 \\ 1 \end{array} \right), \left(\begin{array}{c} -1 \\ 1 \end{array} \right), \left(\begin{array}{cc} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{array} \right) \right].$$

Con lo que K_v^5 , K_{sv}^5 y K^5 son nudos virtuales diferentes y no clásicos.

Capítulo 4

Otros invariantes de nudos virtuales

En este capítulo estudiaremos algunos invariantes de nudos virtuales que nos ayudarán en el problema de determinar si un nudo virtual es clásico o no y en el problema de clasificación de nudos virtuales.

Estos invariantes han sido estudiados, en detalle, por sus respectivos autores. Nosotros utilizaremos los nudos combinatorios para darles una definición alternativa y reafirmar que el uso de nudos combinatorios es una herramienta muy apropiada para estudiar nudos virtuales, ya que simultáneamente permite desarrollar conceptos teóricos y algoritmos que son fácilmente programables. La independencia de diagramas es una gran fortaleza, por supuesto no se puede desconocer que trabajar con diagramas es mas intuitivo y algunas pruebas pueden ser mas simples.

En la primera sección estudiamos el grupo de un nudo virtual, por la importancia que ha tenido en el estudio de la teoría clásica de nudos. Las propiedades del grupo de un nudo en el caso clásico son en general muy diferentes a las propiedades del grupo de un nudo virtual no clásico. En esta sección nos concentramos en mostrar algunas de las diferencias. En el resto del capítulo presentamos una colección de polinomios invariantes. Algunos de ellos son nuevos y definidos por nosotros a partir del invariante Λ y otros, como el polinomio de Jones, que son muy conocidos y son extensiones naturales de polinomios ya conocidos.

4.1 El grupo de un nudo virtual

Kauffman [25] y Kim [30] definieron el grupo de un nudo virtual extendiendo, en forma natural, la presentación de Wirtinger del grupo fundamental del complemento de un nudo clásico. En esta sección definiremos el grupo de un nudo virtual usando el concepto de nudo combinatorio. Mostraremos algunas ventajas de esta aproximación y presentaremos ejemplos de nudos combinatorios cuyos grupos tienen propiedades que son falsas o desconocidas en la categoría de los nudos clásicos.

Utilizaremos algunas propiedades que cumple el grupo de un nudo combinatorio clásico para mostrar algunos ejemplos de nudos combinatorios que no son clásicos. En esta sección daremos la prueba de que, como categorías, los nudos clásicos están estrictamente contenidos en el conjunto de los nudos virtuales, ver [25]. Presentaremos el resultado de Kim [30], en el que

da condiciones para determinar cuándo un grupo G es el grupo de un nudo virtual. En el caso de que G corresponda al grupo de un nudo virtual, nosotros mostraremos un algoritmo para construir un nudo combinatorio a partir de la presentación del grupo. Nuestra prueba de este resultado y el algoritmo que damos, muestran las ventajas de trabajar con los nudos combinatorios.

Por comodidad en la presentación de los resultados de esta sección nos concentraremos en nudos combinatorios de una sola componente, el lector puede verificar que tales resultados se extienden de manera natural a códigos enlaces. Además, utilizaremos la notación y^w para indicar la conjugación $w^{-1}yw$. Una interesante construcción asociada al grupo de un nudo virtual es denominada quandles, [25] y [18], es muy fácil de realizar vía nudos combinatorios, pero no la estudiaremos aquí.

4.1.1 El grupo de un nudo combinatorio

En esta sección estudiaremos el grupo de un nudo combinatorio. Probaremos algunas de sus propiedades más relevantes y daremos la definición de grupo por encima y grupo por debajo. Usaremos el hecho de que las presentaciones por encima y por debajo del grupo de un nudo clásico son iguales para determinar cuándo un nudo virtual no es clásico. Esta herramienta no es muy eficiente, pero es un aporte al problema de detectar nudos virtuales que no son clásicos.

4.1.1.1 Definición del grupo de un nudo combinatorio

Definición 4.1.1 *Sea K un código, tal que $K \neq ((), ())$, y sean x_1, \dots, x_n sus arcos. Definimos el grupo de K como*

$$G(K) = \langle x_1, x_2, \dots, x_n : r_1, r_2, \dots, r_n \rangle,$$

donde $r_1 = x_{t_1}^{-e_{a_1}} x_n x_{t_1}^{e_{a_1}} x_1^{-1}$, $r_j = x_{t_j}^{-e_{a_j}} x_{j-1} x_{t_j}^{e_{a_j}} x_j^{-1}$, para $j = 2, \dots, n$, y $a_j \in x_{t_j}$, $j = 1, 2, \dots, n$. Si $K = ((), ())$, definimos el grupo de K como $G(K) = \mathbb{Z}$.

Es inmediato que el grupo que definimos anteriormente es invariante bajo las transformaciones de Tipo A, B y C.

Para simplificar la notación, en el resto de la sección todos los códigos estarán en forma de puentes.

La definición de grupo dada anteriormente coincide con las dadas en [25], [29] y [37]. La demostración de que es un invariante es igual a la hecha para el caso clásico, por tal motivo la omitimos.

Teorema 4.1.1 *Sean K_1 y K_2 códigos. Si $K_1 \approx K_2$, entonces $G(K_1)$ es isomorfo a $G(K_2)$.*

Del teorema anterior tiene sentido la siguiente definición.

Definición 4.1.2 *El grupo de un nudo combinatorio $[K]$ lo definimos por $G([K]) = G(K)$.*

4.1.1.2 Propiedades del grupo de un nudo combinatorio

En esta sección daremos algunas propiedades del grupo de un nudo combinatorio y daremos, también, varios ejemplos.

Lema 4.1.2 *Sea $[K]$ un nudo combinatorio. Si $G = G(K)$ entonces $G_{ab} \cong \mathbb{Z}$, donde G_{ab} denota la abelianización de G .*

Prueba. Sabemos que si $[K]$ es un nudo combinatorio entonces $G(K)$ tiene la presentación

$$G(K) = \langle x_1, x_2, \dots, x_n : r_1, r_2, \dots, r_n \rangle,$$

donde $r_j = x_{t_j}^{-e_j} x_{j-1} x_{t_j}^{e_j} x_j^{-1}$, $j = 2, \dots, n$ y $r_1 = x_{t_1}^{-e_1} x_n x_{t_1}^{e_1} x_1^{-1}$. Una presentación para G_{ab} es

$$\langle x_1, x_2, \dots, x_n : r_1, r_2, \dots, r_n, [x_i, x_j], i, j = 1, 2, \dots, n \rangle,$$

donde $[x_i, x_j] = x_i x_j x_i^{-1} x_j^{-1}$. por tanto,

$$\begin{aligned} G_{ab} &\cong \langle x_1, x_2, \dots, x_n : r_1, r_2, \dots, r_n, x_i x_j = x_j x_i, i, j = 1, 2, \dots, n \rangle \\ &\cong \langle x_1, x_2, \dots, x_n : x_1 = x_2, x_2 = x_3, \dots, x_{n-1} = x_n \rangle \cong \langle x_i \rangle, i = 1, 2, \dots, n. \end{aligned}$$

■

Para un nudo combinatorio clásico K , el grupo $G(K)$ tiene una interpretación topológica dada en el siguiente teorema.

Teorema 4.1.3 [8] *Si $[K]$ es un nudo combinatorio clásico y K es un nudo en S^3 que realiza a $[K]$, entonces $G(K)$ es el grupo fundamental $\Pi_1(S^3 - K)$.*

El grupo fundamental $\Pi_1(S^3 - K)$ de un nudo clásico juega un papel muy importante en el problema de la clasificación de nudos ya que es un invariante poderoso y es capaz, en muchos casos, de distinguir dos nudos clásicos. Gracias a este invariante se clasificaron los nudos clásicos primos, salvo orientación e imagen espejo.

En el resto de esta sección no distinguiremos entre un nudo combinatorio clásico y el correspondiente nudo en S^3 .

El siguiente resultado es central en la teoría clásica de nudos, pero no es cierto en la teoría de los nudos combinatorios, como mostraremos en el Ejemplo 4.1.1.

Teorema 4.1.4 [8] *Si $[K]$ es un nudo combinatorio clásico tal que $G(K)$ es isomorfo a \mathbb{Z} , entonces $[K]$ es trivial.*