# Hacia la búsqueda de contextos significativos para la enseñanza-aprendizaje de la ley de los signos


**Germán Darío Avendaño Ramírez**



Universidad Nacional de Colombia
Ciencias, Matemáticas
Bogotá, Colombia
2011

# Hacia la búsqueda de contextos significativos para la enseñanza-aprendizaje de la ley de los signos

**Germán Darío Avendaño Ramírez**

Tesis o trabajo de grado presentada(o) como requisito parcial para optar al título de:
**Magister en enseñanza de las ciencias exactas y naturales**

Directora:
Martha Cecilia Moreno Penagos

Línea de Investigación:
Educación matemática

Universidad Nacional de Colombia
Ciencias, Matemáticas
Bogotá, Colombia
2011

**Dedicatoria**

A Mis padres que fueron constante apoyo durante estos dos años de estudio, a mi hija Laurita por ser fuente de inspiración y a mi compañera inseparable Nanita.

# Agradecimientos

El autor expresa sus agradecimientos a todos aquellos que de una u otra forma han colaborado, contribuído o aportado en el desarrollo de este trabajo; a la profesora Myriam Acevedo quien alguna vez propuso el tema y a la profesora Martha Cecilia Moreno Penagos por su constante apoyo y revisiones

# Resumen

Este trabajo de postgrado se realizó con el objetivo de construir una propuesta didáctica que permitiera poner en contexto y dar significado a la ley de los signos en la multiplicación de números enteros, para ser aplicada en estudiantes de grado séptimo de educación básica secundaria. Para lograr este objetivo se profundizaron en el capítulo 2 los aspectos históricos relativos a la aparición de los números enteros, su aceptación e integración en la categoría de los sistemas numéricos. Así mismo, se estudiaron aspectos disciplinares concernientes a la construcción de los números enteros y sus operaciones en el capítulo 3 y a las justificaciones más relevantes desde el punto de vista formal y pedagógico de la regla de los signos en el capítulo 4. Posteriormente, en el capítulo 5 se presenta una propuesta didáctica que pretende remediar en parte la dificultad que representa el paso del estudio de la matemática práctica, de la que se hace uso cotidianamente, al estudio de la matemática formal necesaria en el abordaje de los números enteros.

**Palabras clave: (aritmética, educación matemática, matemáticas, teoría de números, números enteros, aprehensión)**.

# Abstract

This post-graduate work was made with the aim of building an educational proposal that would put into context and give meaning to the law of the signs in the multiplication of integers, to be applied in seventh grade of basic secondary education. To achieve this objective the historical aspects regarding the emergence of integer numbers, their acceptance and integration into the category of number systems were studied in a deeper way in Chapter 2. Likewise, disciplinary issues concerning to the construction of the integers and its operations were studied in Chapter 3. The relevant justifications from the formal and pedagogic point of view of the rule of signs were stated in Chapter 4. Finally, in Chapter 5 was presented a teaching proposal that seeks to solve partly the difficulty in passing from the practical mathematics study, which is used daily, into the study of formal mathematics needed in dealing with integer numbers.

**Keywords: arithmetic, maths, math's education, number theory, integer numbers, apprehension**

# Contenido


**Agradecimientos** vii

**Resumen** ix

**1. Introducción** 3

**2. Historia del origen y desarrollo de los números enteros negativos** 5

Etapa 1: Aparición y posterior reducción a la clandestinidad . . . . . . . . . . . . 5
Etapa 2: Reaparición de los negativos. Su aceptación como artificios de cálculo . . 6
Etapa 3: Intentos fallidos para su legitimación . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 8
Etapa 4: Legitimación e integración de los negativos en la jerarquía de los sistemas numéricos . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 10

**3. Números enteros** 11

3.1. Acceso a $\mathbb{Z}$ por métodos informales . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 11
3.1.1. Números enteros como operadores sobre segmentos orientados . . . . 11
3.1.2. Enteros negativos como opuestos de los naturales . . . . . . . . . . . 20
3.2. Construcción formal de $\mathbb{Z}$
Números enteros como clases de equivalencia del conjunto cociente $\mathbb{N} \times \mathbb{N}/\sim$ 24
3.2.1. Operaciones definidas en $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 25

**4. Algunas justificaciones de la ley de los signos** 31

4.1. Breve historia de algunas justificaciones de la regla de los signos . . . . . . . 31
4.2. Verificación de la regla de los signos usando rectas paralelas sobre el plano cartesiano [7] . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 34
4.3. Justificación de la regla de los signos mediante el uso de la composición de operadores sobre segmentos dirigidos . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 35
4.4. Justificación de la regla de los signos usando propiedades algebraicas . . . . 37
4.5. Justificación de la ley de los signos en el marco de la teoría de los pares ordenados 37

**5. Propuesta didáctica** 39

5.1. Taller 4 - Regla de los signos . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 41
5.1.1. Objetivos . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 41

**6. Conclusiones y recomendaciones** **47**
6.1. Conclusiones . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 47
6.2. Recomendaciones . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 48

**A. Anexo: Relación de equivalencia, clases de equivalencia y conjunto cociente** **49**
A.1. Producto cartesiano . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 49
A.2. Relaciones . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 49
A.2.1. Propiedades de las relaciones . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 50
A.2.2. Relación de orden . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 50
A.2.3. Relación de equivalencia . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 50
A.3. Partición de un conjunto en clases de equivalencia mediante una relación . . 51
A.4. Clases de equivalencia . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 51

**B. Anexo: Talleres y evaluaciones** **53**
B.1. Taller 1: Números enteros . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 53
B.1.1. OBJETIVOS . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 53
B.1.2. Evaluación del taller 1 . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 55
B.1.3. Análisis de resultados - Taller 1 . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 57
B.2. Taller 2 . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 58
B.2.1. Objetivos . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 58
B.2.2. Evaluación del taller 2 . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 64
B.2.3. Análisis de resultados - taller 2 . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 65
B.3. Taller 3: Refuerzo sobre talleres 1 y 2 e introducción a la multiplicación de enteros . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 65
B.3.1. Objetivos . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 65
B.3.2. Análisis de resultados - Taller 3 . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 68

**Bibliografía** **69**

# 1. Introducción

Este trabajo surge a raíz de la lectura que se hiciera del artículo de Bernardo Gómez "*La justificación de la regla de los signos en los libros de texto: ¿Por qué menos por menos es más?*" en el seminario de trabajo de grado, dirigido por la profesora Myriam Acevedo. A partir de ese momento, se emprende la tarea de consultar cómo evolucionó el concepto de número entero a través de las diferentes culturas, desde los indios [1] hasta nuestros días tomando como base los libros *Números enteros* de editorial Síntesis e *Historia de las matemáticas* de E. T. Bell.

Después de esta pequeña revisión histórica se evidencia que el desarrollo del concepto de número entero tardó más de un milenio en ser completamente asimilado e integrado al campo del saber matemático y esto estuvo directamente relacionado con la dificultad que tuvo la humanidad de pasar de la matemática práctica, la de uso cotidiano, a la matemática formal requerida para asimilar y entender los números enteros. Hasta que el ser humano no se despojó de ese "espíritu concreto" que gobernó durante mucho tiempo el quehacer matemático y científico no se pudo avanzar en el desarrollo, aceptación y legitimación de los números enteros. Hubo que dar un paso más allá de lo puramente concreto y aceptar que los números enteros como muchas de las teorías matemáticas son construcciones humanas que a veces poco o nada tienen que ver con la realidad, pero que en determinado momento nos sirven para entenderla, para que se superaran las dificultades y finalmente se les diera a los números enteros la estructura formal y se consideraran dentro del estatus de los sistemas numéricos.

Si el surgimiento, aceptación y posterior legitimación de los números enteros devino problemático, no es de extrañar que su enseñanza-aprendizaje sea problemática también. Habitualmente en la enseñanza de la matemática elemental, el maestro se encuentra con escasos elementos para introducir los números enteros y sus operaciones, en particular para introducir y justificar la regla de los signos. El paso de lo "concreto" representado por el manejo de los números naturales y sus operaciones a lo "abstracto" relacionado con el manejo de los enteros y sus operaciones requiere de un proceso de transición que sea lo menos "traumático" posible. Para ello es indispensable paradójicamente partir de lo concreto, para gradualmente avanzar hacia procesos que requieran mayores niveles de abstracción. Se necesita entonces, buscar entornos familiares, significativos y problemáticos donde el estudiante pueda eviden-

[1] Gentilicio para habitantes de la India; debe diferenciarse del término "hindúes" que se refiere a los practicantes del hinduismo

ciar la necesidad de operar con los números enteros y, con explicaciones lo suficientemente convincentes que permitan vislumbrar el sentido de éstos.

Para llevar a cabo lo que se propone, es necesario profundizar en los aspectos disciplinares que permitieron consolidar los números enteros como sistema numérico. Por tanto en el capítulo 3 se profundiza en el análisis del concepto de número entero y su estructura revisando diversas construcciones de los mismos; dos informales y una formal. Se estudian en detalle la introducción de los números enteros como operadores sobre segmentos orientados y la construcción formal de los números enteros como clases generadas por una relación de equivalencia definida sobre el conjunto $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$. Posteriormente en el capítulo 4 se presenta una breve reseña histórica de las diversas justificaciones de la regla de los signos dadas a través de la historia de las matemáticas. Luego se estudian algunas justificaciones de la misma regla que se consideran relevantes tanto desde el punto de vista disciplinar como desde el punto de vista pedagógico.

Finalmente en el capítulo 5 se hace una propuesta didáctica que pretende contribuir en el proceso de transición del estudio de los números naturales al estudio de los números enteros mediante el uso de contextos familiares, cotidianos y significativos para el estudiante que hagan este tránsito lo menos traumático de lo que inherentemente es. Se aclara que ésta propuesta aún está en etapa de implementación en estudiantes de grado 7° de la institución educativa distrital Arborizadora Baja jornada mañana (localidad 19, Ciudad Bolívar), por tanto las conclusiones sobre su aplicación motivarán un trabajo futuro.

# 2. Historia del origen y desarrollo de los números enteros negativos

Los números naturales y fraccionarios positivos al estar asociados a magnitudes desde su aparición, fueron fácilmente aceptados e integrados al saber matemático contrario a los enteros negativos. Éstos tardaron más de mil años desde su aparición, para ser aceptados e incorporados al campo del saber matemático; su proceso de aceptación y legitimación estuvo lleno de avances y retrocesos.

Según el libro *Números enteros*[5], la historia del desarrollo de los números enteros negativos se puede dividir en 4 etapas así:

## Etapa 1: Aparición y posterior reducción a la clandestinidad

Los griegos, debido a su propensión por la magnitud y la asociación del número con entidades geométricas fueron incapaces de concebir números negativos. El descubrimiento que hicieran de los números irracionales y su posterior rechazo, posiblemente fue la causa de su predilección por la geometría en detrimento de la aritmética y el álgebra. Ya en el período alejandrino que se inició hacia el año 300 a. c., los matemáticos griegos, influenciados por la civilización egipcia y babilónica, desarrollaron una matemática orientada a resolver problemas prácticos. En este contexto se destaca Diofanto, quien plantea una regla para el producto de diferencias (que en términos actuales se puede enunciar $(a-b)(c-d) = ac-ad-bc+bd$), que puede ser considerada como el inicio de lo que después se denominaría la regla de los signos. Esto no necesariamente quiere decir que Diofanto conociera y aceptara los números enteros negativos, ya que él en su regla se refiere al producto de diferencias positivas exclusivamente (es decir $a > b$ y $c > d$) y además él sólo consideró raíces positivas en la solución de ecuaciones.

Los matemáticos chinos al parecer consideraban números negativos y calculaban con ellos usando varillas rojas para representar los positivos y negras para representar los negativos. Es natural pensar que ellos tuvieran alguna idea del número negativo ya que en su cultura se ha considerado el «ying»y el «yang»como expresión de la relación entre los opuestos; por ejemplo para expresar la oposición y complementariedad entre el día y la noche, etc. Pero realmente son los indios quienes introducen los números negativos como objetos aislados, principalmente Brahmagupta, quien propone y explica algoritmos para efectuar sumas, restas, multiplicaciones, divisiones, potencias y extracción de raíces con lo que llamaba "los bienes", "las deudas" y "la nada" es decir con lo que hoy llamamos los números positivos, negativos y el cero. Brahmagupta, no solo utilizó los negativos en los cálculos, sino que los dotó de una aritmética concordante con la de los enteros. Tal vez lo que permite a los indios considerar cantidades negativas se deba a su idiosincrasia, es decir a su despreocupación por el rigor y la fundamentación lógica, a la orientación predominante de buscar soluciones a problemas de orden práctico; a su gusto por conjugar lo abstracto con lo poético, lo formal con lo lúdico, como quedó plasmado en el juego de ajedrez.

En los árabes se destaca como matemático Al-Kwarizmi, del cual se sabe que murió hacia el año 850 y fue quien escribió tratados sobre álgebra y aritmética. En el tratado de aritmética explica las reglas de cálculo de los indios y a él se debe el uso de la palabra algoritmo que hoy se usa para designar cualquier proceso operativo de resolución. Su obra tuvo gran influencia posterior en la matemática europea de la edad media y comienzos del renacimiento. Sin embargo los árabes no logran avanzar en el desarrollo del concepto de número entero, sino que mas bien ignoran los números negativos heredados de los hindúes, tal vez por la identificación que hacían del número con magnitud.

Durante la época medieval en Europa, predominantemente católica, se desechan los aportes de los «rivales», los musulmanes y de los indios y Europa entra en una etapa de letargo intelectual. Sin embargo el hijo de un comerciante que tuvo la oportunidad de viajar a Egipto, Siria, Grecia y Sicilia y conocer la matemática árabe hace aportes a la matemática del medioevo escribiendo su «Liber abaci»(libro del ábaco) que contrario a su título, expone en éste el sistema de numeración indio, explica los algoritmos de cálculo y desarrolla aplicaciones comerciales. Se trata de Leonardo de Pisa, mas conocido como *Fibonacci*, quien al parecer considera los números negativos como deudas pero no logra avanzar mas allá en la aceptación del número negativo al desechar las soluciones negativas en las ecuaciones.

En conclusión, durante la civilizaciones griega y árabe y la poca medieval no se avanzó en reconocer los negativos dentro de la categoría de números después de que los indios los inventaran, si no que mas bien hubo un retroceso y los números negativos estuvieron condenados a la clandestinidad.

# Etapa 2: Reaparición de los negativos. Su aceptación como artificios de cálculo

## Renacimiento

Con la invención y utilización de la imprenta, aunque se imprimieron muchos clásicos griegos traducidos, en el campo de la matemática se privilegió el trabajo de los matemáticos árabes tal vez por resultar mas asequibles por su practicidad. En esta época se facilitó el acceso a los tratados de aritmética y álgebra árabes lo que inclinó la balanza hacia el desarrollo del álgebra durante el renacimiento. Es así que los negativos reaparecen en la solución de muchos problemas algebraicos así sea como simples artificios de cálculo.

Parece ser que en la obra *Triparty* del matemático francés Nicolás Chuquet (1445-1500) aparece por primera vez un número negativo aislado en una ecuación algebraica de la forma $4x = -2$ (según la notación actual ya que para la época no se utilizaban los símbolos algebraicos "$x$", "$=$" y "$-$" y a que el álgebra heredada de los árabes era principalmente retórica).

Los símbolos "$+$" y "$-$" fueron popularizados gracias a la obra del algebrista alemán Michael Stifel (1847-1567), titulada *Aritmética Íntegra* publicada en 1544. En esta obra su autor considera los negativos como coeficientes en las ecuaciones y opera con ellos, aunque los rechaza como posibles raíces de una ecuación al considerarlos *numeri absurdi*

Posteriormente Giordano Cardano (1501-1576) en su obra «Ars magna», no admite a los negativos como coeficientes en las ecuaciones algebraicas pero si admite las raíces negativas de ecuaciones cúbicas aunque calificándolas como *ficticias*. Aún François Viête (1540-1603), considerado el padre del álgebra simbólica por haber sido el primero en introducir símbolos literales para los coeficientes y las incógnitas, no admitió a los negativos ni como coeficientes ni como raíces. Por otro lado, el matemático S. Stevin (1548-1620) acepta los negativos como raíces y como coeficientes. Los utiliza como herramientas de cálculo lo que lo lleva a considerarlos como símbolos independientes en un cálculo numérico. Stevin admite la adición de un positivo y un negativo en vez de considerarla como sustracción. También trató de justificar la ley de los signos haciendo uso de la identidad algebraica $(a-b)(c-d) = ac-bc-ad+bd$ a la que representaba mediante un rectángulo de lados $a-b$ y $c-d$, pero, Stevin carece de interpretación para los negativos y las raíces negativas de una ecuación.

En conclusión, durante el renacimiento los enteros negativos aparecen con fuerza aunque son rechazados por muchos matemáticos de la época, algunos los utilizan en sus cálculos imperando el rechazo hacia ellos tal vez porque éstos no tienen asidero en las prácticas cotidianas de conteo y medición, sino que aparecen como artificios en la manipulación algebraica de ecuaciones.

### En el siglo XVII

Durante este periodo se puede decir que inicia la ciencia moderna con los trabajos de Galileo Galilei (1564-1642) y René Descartes (1596-1650) que posteriormente irá a permitir el desarrollo de la matemática en los campos del cálculo infinitesimal, la teoría de números, el álgebra y por supuesto la geometría analítica, con lo que los números negativos aparecen con mas fuerza y se amplía su uso aunque sigan siendo rechazados. En este periodo el matemático flamenco Albert Girard (1590-1639) reconoce la utilidad algebraica de admitir raíces negativas porque ello permitía encontrar reglas. También el matemático John Wallis (1616-1703), aceptó los negativos e hizo uso de ellos y llegó a dar reglas para operar con potencias de exponentes negativos. Wallis llegó a concluir apresuradamente que los negativos podían llegar a ser más grandes que el infinito al considerar el cociente $a/0$ como infinito y luego sustituyendo 0 por un número $b$ menor que cero que tendría que ser negativo.

Pero no todos los matemáticos de la época aceptan los enteros negativos y los usan, sino que un gran número de ellos los rechazan, como por ejemplo Descartes afirma que no pueden haber números menores que la nada. Sin embargo es en esta época que aparecen los primeros intentos de legitimación al asociar los números a la recta numérica. Descartes y Fermat que habían empezado a trabajar con geometría analítica, no lograron apreciar la potencia de la misma porque no aceptaron los números negativos. Es Newton quien por primera vez propone en su tratado *Enumeratio linearum tertii ordinis* en 1676 un sistema coordenado tal como lo conocemos hoy en día, al considerar los negativos como coordenadas de puntos opuestos a otros puntos con coordenadas positivas.

## Etapa 3: Intentos fallidos para su legitimación

Durante el siglo XVIII, los matemáticos continúan pensando que su labor consiste en descifrar las verdades de la naturaleza escritas en lenguaje matemático. Al no comprender que el conocimiento matemático es construído por el hombre para entender la naturaleza, los grandes matemáticos del siglo XVIII fracasan en el intento por comprender las nuevas nociones surgidas y por ende los números negativos continúan siendo rechazados o ignorados.

### Los negativos continúan siendo rechazados

En el siglo XVIII aparecen D'Alembert y A. de Morgan evitando cuando es posible los negativos, aduciendo que aparecen cuando se hace una suposición falsa. Especialmente

D'Alembert cuando se enfrenta a problemas cuyo planteamiento lleva a expresiones del tipo $a + x = b$ (con $b < a$) siendo $a$, $b$ naturales y donde la incógnita $x$ resulta ser del tipo

$$x = -t \quad (t \in \mathbb{N})$$

prescinde de los negativos llevando el planteamiento a una expresión del tipo

$$a - t = b \qquad \text{y} \qquad a + t = b$$

siendo $t$ la incógnita. Así los negativos son eliminados.

La justificación que da D'Alembert de la regla de los signos se puede considerar un corolario del método que usó para evitar los negativos: $(-a)(-b)$ significa restar $b$ veces la cantidad negativa $-a$, pero como "adjuntar una cantidad negativa equivale a restar una positiva y restar una negativa equivale a adjuntar una positiva", el resultado es $+ab$, pues
$(-a)(-b) = -(-a) - (-a) - ... - (-a) = +(+a) + (+a) + ... + (+a) = +ab$.

L. Carnot (1753-1823) advierte apelando al sentido común sobre las contradicciones de los negativos; por ejemplo, argumenta que no puede ser que $-3$ siendo menor que 2 cuando se eleva a la potencia 2 resulta siendo que $(-3)^2$ es mayor que $2^2$, esto contradice al sentido común y a las leyes que gobiernan las cantidades. Precisamente este tipo de argumentos generó en la comunidad matemática la necesidad de fundamentar formalmente los números enteros.

## Surgen múltiples esfuerzos por legitimarlos

Aun en el siglo XVIII y parte del siglo XIX la idea que se tiene de que las matemáticas describen la "realidad", dificulta en gran medida que se avance en la legitimación y formalización de los números enteros. Muchos matemáticos de la época, importantes como Euler tratan de dar una significación "real" a los negativos.

Un paso importante en la interpretación de los negativos la da Girard al considerar el número negativo en un contexto relativo donde el cero deja su carácter absoluto para tomar un carácter relativo. Así los negativos se pueden considerar como extensión respecto al orden de los números enteros positivos.

Aunque impera un espíritu concreto en la época, algunos matemáticos como McLaurin, Euler y Cauchy lo abandonan en algunas ocasiones y tratan de justificar la regla de los signos usando métodos "cuasiformales". Por ejemplo Cauchy [2], designa los números precedidos del signo $+$ como cantidades positivas y los precedidos del signo $-$ como cantidades negativas y con esto establece las convenciones siguientes: Si $A$ representa un número $-A$ representará el opuesto y si $a$ representa una cantidad, la expresión $+a$ será equivalente y $-a$ será la opuesta. Teniendo la siguientes ecuaciones

$a = +A \quad \text{y} \quad b = -A$

se tendrá

$$+a = +A \quad , \quad +b = -A \tag{2-1}$$

$$-a = -A \quad \text{y} \quad -b = +A. \tag{2-2}$$

y si en las últimas cuatro ecuaciones se reemplaza $a$ y $b$ se obtiene

$$+(+A) = +A \quad , \quad +(-A) = -A \tag{2-3}$$

$$-(+A) = -A \quad \text{y} \quad -(-A) = +A \tag{2-4}$$

con esto concluye Cauchy en tres teoremas con la ley de los signos.

## Etapa 4: Legitimación e integración de los negativos en la jerarquía de los sistemas numéricos

Con el advenimiento de las geometrías no euclidianas y los trabajos de Hamilton, Wessel, Argand y Gauss sobre números complejos[1], durante el siglo XIX se rompe con la idea que prevalecía en la época de que las matemáticas constituyen un cuerpo de verdades acerca de la naturaleza. Ahora se dará prioridad al formalismo y al rigor sobre el fin y los usos de la matemática en la realidad. Esta nueva forma de concebir las matemáticas permite que Hamilton, proponga considerar los números complejos como parejas ordenadas y defina sobre éstas las operaciones de adición y multiplicación. Estos nuevos números no tienen que ver con la realidad inmediata, sino que se aceptan como construcciones humanas.

Así, con base en los trabajos de Hankel sobre enteros y números complejos, y de Hamilton sobre nḿeros complejos, O Stolz (1885) y Tannery (1886) proponen la teoría de los pares ordenados para construir los números enteros. Finalmente Richard Dedekind (1831-1916) formalizaría la teoría de los pares ordenados al proponer una relación de equisustratividad así: $a - b = c - d \Leftrightarrow a + d = b + c$ demuestra que esta es una relación de equivalencia y al conjunto de las clases de equivalencia respecto a la relación definida lo presentará como el conjunto de los números enteros. Define sobre las parejas ordenadas de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ las operaciones de adición y multiplicación y verifica que estas definiciones satisfacen las leyes usuales de la aritmética.

# 3. Números enteros

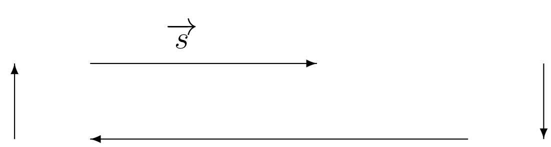
Se puede abordar la introducción de los números enteros desde dos perspectivas; una formal y otra informal. Desde cada una de estas perspectivas se pueden estudiar varias vías de acceso a los números enteros. Para los propósitos de este trabajo, se abordarán varios acercamientos informales y una construcción formal de los números enteros.

## 3.1. Acceso a $\mathbb{Z}$ por métodos informales

### 3.1.1. Números enteros como operadores sobre segmentos orientados

Una de las formas de introducir los números enteros, de manera informal, intuitiva, fácil de entender y por tanto pedagógica[9], es mediante el uso de la noción de segmento de recta dirigido. Inicialmente se pueden representar los segmentos mediante rayas de diferentes longitudes y direcciones. Debe observarse que un segmento puede estar orientado en un sentido determinado dentro de una dirección, o puede ser un segmento no orientado.

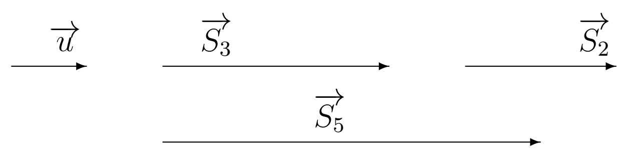
**Figura 3-1.**: Segmentos orientados




El segmento orientado se puede representar con una punta de flecha en un extremo. Para representar un segmento orientado se podrá utilizar preferiblemente una letra minúscula, por ejemplo la $s$, con una flecha encima $\overrightarrow{s}$.

Se puede ahora elegir un segmento orientado $\overrightarrow{u}$, que se designará como unidad y luego escoger un conjunto de segmentos que sean divisibles por esa unidad común $\overrightarrow{u}$ que se denotará por $S_d$. Habrán muchos segmentos congruentes, es decir que sean divisibles por la unidad un determinado número de veces. Esto permite clasificar los segmentos por congruencia y seleccionar un representante de cada clase denotado por $\overrightarrow{S_n}$ en donde $n$ es un número natural que indica el número de segmentos unitarios en que está dividido. Por ejemplo, si el segmento $\overrightarrow{q}$ mide 3 unidades, se dice que el segmento $\overrightarrow{q}$ es congruente con el representante de clase $\overrightarrow{S_3}$ de los segmentos que miden 3 unidades y se nota $\overrightarrow{q} \cong \overrightarrow{S_3}$.

**Figura 3-2**.: Segmentos orientados divisibles




### Adición de segmentos orientados:

Se selecciona un eje horizontal, y se establece un segmento unitario $\overrightarrow{u}$. Se consideran inicialmente segmentos en el mismo sentido (hacia la derecha) en dirección horizontal. Para sumar segmentos, se conviene en colocar un segmento a continuación de otro, es decir se ubica el origen de un segmento sobre la punta del otro. Por ejemplo si se suma el segmento $\overrightarrow{q} \cong \overrightarrow{S_3}$ con el segmento $\overrightarrow{r} \cong \overrightarrow{S_2}$, se obtiene el segmento $\overrightarrow{q} \boxplus \overrightarrow{r} \cong \overrightarrow{S_5}$ tal como aparece en la figura **3-2**. Nótese que se está tratando con una operación que no es precisamente la adición entre números naturales sino que se trata de una operación especial que se notará $\boxplus$.

Con el conjunto de segmentos divisibles $S_d$ y la operación de adición de segmentos $\boxplus$ se forma el sistema $(S_d, \boxplus)$ que goza de las siguientes propiedades:

(a) La adición de segmentos orientados divisibles es siempre un único segmento orientado divisible, es decir, si $\overrightarrow{s}, \overrightarrow{t} \in S_d$ entonces $\overrightarrow{s} \boxplus \overrightarrow{t} \in S_d$ . El sistema entonces es *cerrado* para la suma.

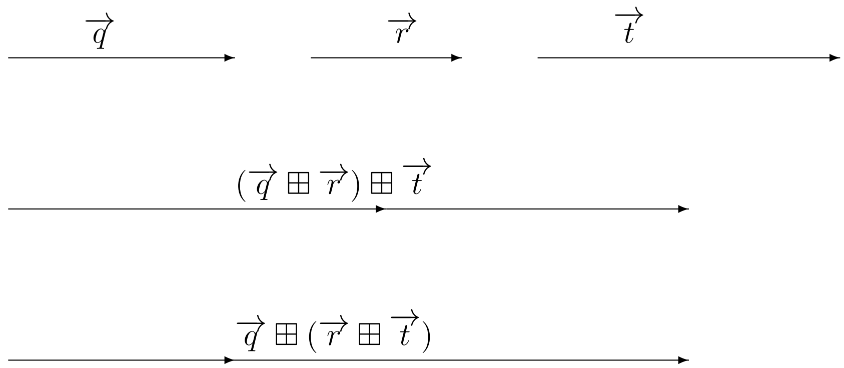
(b) Dados tres segmentos $\overrightarrow{q}, \overrightarrow{r}, \overrightarrow{t} \in S_d$, se cumple que $(\overrightarrow{q} \boxplus \overrightarrow{r}) \boxplus \overrightarrow{t} = \overrightarrow{q} \boxplus (\overrightarrow{r} \boxplus \overrightarrow{t})$. El sistema goza satisface la *propiedad asociativa.*

(c) Dados dos segmentos $\overrightarrow{r}, \overrightarrow{t} \in S_d$, se verifica que $\overrightarrow{r} \boxplus \overrightarrow{t} = \overrightarrow{t} \boxplus \overrightarrow{r}$. El sistema cumple la *propiedad conmutativa*

(d) Un punto sobre la recta se denotará por $\overrightarrow{S_0}$, tal que si $\overrightarrow{r} \in S_d$, entonces $\overrightarrow{r} \boxplus \overrightarrow{S_0} = \overrightarrow{S_0} \boxplus \overrightarrow{r} = \overrightarrow{r}$. El segmento $\overrightarrow{S_0}$ es el módulo de la operación $\boxplus$

Es claro que la propiedad (a) se verifica intuitivamente, ya que al sumar segmentos orientados en el mismo sentido en dirección horizontal se obtiene un nuevo segmento orientado en el mismo sentido y conservando la dirección horizontal como se observa en la figura **3-2**. La propiedad asociativa se verifica tomando tres segmentos cualesquiera $\overrightarrow{q}$, $\overrightarrow{r}$ y $\overrightarrow{t}$ y comprobando que $(\overrightarrow{q} \boxplus \overrightarrow{r}) \boxplus \overrightarrow{t} = \overrightarrow{q} \boxplus (\overrightarrow{r} \boxplus \overrightarrow{t})$, tal como aparece en la figura **3-3**.

**Figura 3-3**.: Propiedad asociativa




Para verificar la propiedad conmutativa se observa en la figura **3-4** que $\overrightarrow{q} \boxplus \overrightarrow{r} = \overrightarrow{r} \boxplus \overrightarrow{q}$

**Figura 3-4**.: Propiedad conmutativa

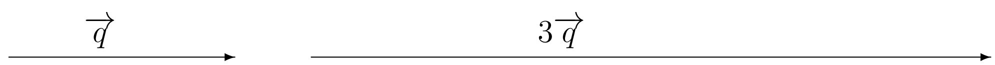

Luego el sistema $(S_d, \boxplus)$ es un semigrupo conmutativo con un elemento identidad, que resulta al aceptar la existencia de un segmento orientado divisible nulo $\overrightarrow{S_0}$ que corresponde a un punto matemático, con todos los problemas conceptuales que tal expresión implica. Aceptando el segmento $\overrightarrow{S_0}$, el sistema $(S_d, \boxplus)$ es un monoide conmutativo o abeliano.

Todas estas propiedades se pueden verificar fácilmente con estudiantes de básica secundaria usando segmentos de diferentes longitudes, palos de colombina, etc, que sean divisibles todos por alguna unidad común. Luego de realizar algunas actividades, los estudiantes se percatarán que es lo mismo que calcular las sumas usando los subíndices y la adición usual de números naturales.

### Números naturales como operadores sobre segmentos orientados

Sobre el sistema $(S_d, \boxplus)$ se ha definido el operador binario $\boxplus$ que representa la adición de segmentos; ahora, se definirá el operador unario $n(\,)$ sobre $S_d$ para cada número natural $n$ tal que dado $\overrightarrow{q} \in S_d$, al aplicarle el operador unario $n(\overrightarrow{q})$, transforma al segmento $\overrightarrow{q}$ en

**Figura 3-5**.: Operador unario aplicado a un segmento orientado




el segmento obtenido al sumar $n$ copias idénticas de $\overrightarrow{q}$. Por ejemplo el operador $3(\,)$ (tres veces) aplicado a $\overrightarrow{q}$ transforma $\overrightarrow{q}$ en el segmento que resulta de sumar tres copias idénticas de $\overrightarrow{q}$.
El operador unario $1(\,)$, aplicado sobre $\overrightarrow{q}$ que se lee "una vez…", deja intacto a $\overrightarrow{q}$; $1(\,)$ es entonces el operador idéntico sobre $S_d$. También se puede definir sobre $S_d$ el operador unario $0(\,)$ que se lee "0 veces…" que transforma a cualquier segmento $\overrightarrow{q}$ en el segmento nulo; el operador $0(\,)$ es el operador nulo sobre $S_d$.

Se obtiene así un conjunto de operadores unarios sobre segmentos, que se nota

$$Op_s = \{n(\,) : S_d \longrightarrow S_d | n \in \mathbb{N}\}$$

### Adición de operadores sobre segmentos

Parece natural definir la suma de "el doble más el triple" que obviamente será el "quíntuple". Es posible entonces definir la adición sobre operadores unarios usando la adición del sistema. Ésta suma se simbolizará con $\oplus$ para distinguirla de la suma de segmentos y de la suma de naturales. En general, se define el operador binario $[n(\,) \oplus m(\,)](\,)$ así:

$$[n(\,) \oplus m(\,)](\overrightarrow{q}) = n(\overrightarrow{q}) \boxplus m(\overrightarrow{q}) \tag{3-1}$$

el cual resulta equivalente a

$$[n(\,) \oplus m(\,)](\,) = (n+m)(\,), \tag{3-2}$$

donde $n+m$ es la suma usual en $\mathbb{N}$. Ésta equivalencia reduce la operación con segmentos a la operación con naturales.

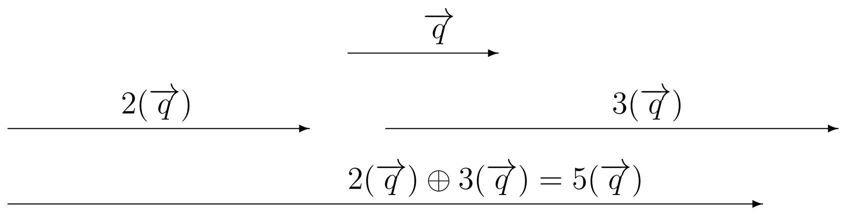
En el caso particular del ejemplo, se tendría:

$$2(\,) \oplus 3(\,) = 5(\,)$$

Ahora bien, si se aplica el operador $[2(\,) \oplus 3(\,)](\,)$ a cualquier segmento $\overrightarrow{q}$, se obtendrá por definición el segmento $2(\overrightarrow{q}) \oplus 3(\overrightarrow{q})$, que es $5(\overrightarrow{q})$ **3-6**.
La facilidad de calcular en otro sistema es una de las ventajas de la idea subyacente de isomorfismo:[1] el sistema de los operadores sobre segmentos con la adición de operadores

[1] Un isomorfimo es una biyección entre dos conjuntos que da cuenta de una estructura "similar" o "equivalente" de los mismos bajo unas operaciones definidas en cada conjunto.

**Figura 3-6**.: Adición de operadores




$(Op_s, \oplus)$ es isomorfo al sistema de los números naturales con la adición $(\mathbb{N}, +)$, si se asigna a cada operador $n(\,)$ de $Op_s$ el respectivo número natural $n$. Si se designa esta aplicación por $f$, se tendrá el diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{ccc} Op_s \times Op_s & \xrightarrow{\oplus} & Op_s \\ {\scriptstyle f}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle f} \\ \mathbb{N} \times \mathbb{N} & \xrightarrow{+} & \mathbb{N} \end{array}$$

que se aclara tomando elementos de los respectivos conjuntos:

$$\begin{array}{ccc} (n(\,), m(\,)) & \xrightarrow{\oplus} & [n(\,) \oplus m(\,)](\,) \\ {\scriptstyle f}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle f} \\ (n, m) & \xrightarrow{+} & n + m \end{array}$$

### Composición de operadores unarios sobre segmentos

Se define ahora la composición de operadores unarios de $Op_s$, notada $\circ$, y leída "… de …". Por ejemplo parece natural hablar de ‘ ‘el doble del triple" para hacer alusión a

$2(\,) \circ 3(\,) = 6(\,)$.

Se define el operador unario $[n(\,) \circ m(\,)](\,)$ así:

**Definición 3.1.**

$$[n(\,) \circ m(\,)](\overrightarrow{q}) = n(m(\overrightarrow{q})). \tag{3-3}$$

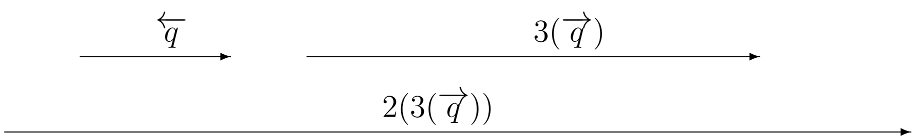
equivalente a:

$$[n(\,) \circ m(\,)](\,) = (n \times m)(\,), \tag{3-4}$$

De nuevo se reduce la operación "$\circ$" con operadores a la multiplicación con números naturales.

Por ejemplo, si se aplica el operador $[2(\,)\circ 3(\,)](\,)$ a cualquier segmento $\overrightarrow{q}$, se obtiene por definición el segmento $2(3(\overrightarrow{q}))$ que es $6(\overrightarrow{q})$.

**Figura 3-7.**: Composición de operadores




Otra vez se encuentra subyacente la idea de isomorfismo. El sistema de los operadores sobre segmentos con la composición de operadores, $(Op_s, \circ)$ es isomorfo al sistema de los números naturales con la multiplicación $(\mathbb{N}, \times)$. El diagrama conmutativo es el siguiente:

$$\begin{tikzcd}
Op_s \times Op_s \arrow[r, "\circ"] \arrow[d, "f"'] & Op_s \arrow[d, "f"] \\
\mathbb{N} \times \mathbb{N} \arrow[r, "\times"] & \mathbb{N}
\end{tikzcd}$$

o con elementos de los respectivos conjuntos:

$$\begin{tikzcd}
(n(\,), m(\,)) \arrow[r, "\circ"] \arrow[d, "f"'] & Op_s \arrow[d, "f"] \\
(n, m) \arrow[r, "\times"] & \mathbb{N}
\end{tikzcd}$$

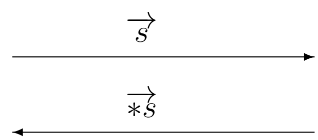
Éste tipo de isomorfismo no es tan trivial como el anterior, pues en los números naturales no existe la composición: *el tres del dos*. Como la aplicación $f$ es la misma en ambos casos, se puede decir que el sistema $(Op_s, \oplus, \circ)$ es isomorfo al sistema $(\mathbb{N}, +, \times)$.

### El operador cambio de orientación

Se habrá notado que al darle la vuelta a un segmento orientado, conservando su dirección horizontal, pero cambiándole el sentido, se ha hecho una operación manual práctica, que se representa por un operador $*(\,)$. Este operador es claramente un operador unario, y se lee "el opuesto de …".

Como ya se tiene un conjunto de operadores unarios, $Op_s$, se le puede añadir el nuevo operador $*(\,)$ y estudiar qué pasa si se hace la composición de $*(\,)$ con cualquier $n(\,)$; con el

**Figura 3-8.**: Operador cambio de orientación




sistema de lectura elegido se tendría simplemente que $[*(\ ) \circ 2(\ )](\ )$ podría leerse "el opuesto del doble", y esto siempre tiene sentido, (como también lo tendría "el doble del opuesto"). Para simplificar, se notará $*2(\ )$ al opuesto del doble, y en general:

$$*n(\ ) = [*(\ ) \circ n(\ )](\quad). \tag{3-5}$$

Se descubrirá fácilmente que

$$[*(\ ) \circ *(\ )](\quad) = 1(\ ) \tag{3-6}$$

Además: $\quad * 1(\ ) = *(\ )$ (3-7)

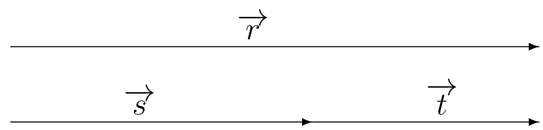
y: $\quad * 0(\ ) = 0(\ ).$ (3-8)

El operador nulo es el único operador de $Op_s$ correspondiente a un número natural que es igual a su opuesto. Si se añade ahora como nuevos operadores a $Op_s$ todos los opuestos de los originales $Op_s*$, se tendrá luego un conjunto mayor que se notará $\overline{Op_s} = Op_s \bigcup Op_s*$. Estos son todos operadores unarios sobre los segmentos orientados divisibles, $S_d$, en los cuales se puede considerar ahora que todos los segmentos horizontales, estén orientados hacia la derecha o hacia la izquierda. En este conjunto extendido $\overline{S_d}$ es posible la adición y la sustracción de cualquier pareja de segmentos. El sistema extendido $(\overline{S_d}, \boxplus)$ tiene ahora la propiedad invertiva: cualquier segmento dado tiene un inverso aditivo, es decir, un segmento que sumado con él da el segmento nulo. El inverso aditivo del segmento $\overrightarrow{q}$ es precisamente el opuesto de $\overrightarrow{q}$, $\overrightarrow{*q}$.
Se debe notar que a un segmento cualquiera $\overrightarrow{s}$ en el sistema extendido $\overline{S_d}$ no se le puede determinar su orientación. Por tanto $\overrightarrow{*s}$ no está necesariamente orientado hacia la izquierda, sólo se sabe que $\overrightarrow{*s}$ está orientado en sentido opuesto a $\overrightarrow{s}$ en caso de que $\overrightarrow{s}$ sea no nulo.

### Sustracción de segmentos orientados.

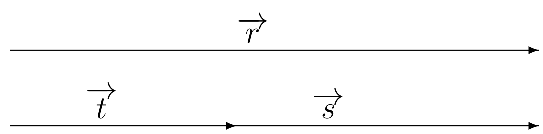
La sustracción de segmentos orientados divisibles por una unidad común se denotará $\boxminus$ para distinguirla de la sustracción de naturales. Ésta sustracción tiene sentido si a segmentos de "mayor longitud" restamos segmentos de "menor longitud". Es decir si a un segmento $\overrightarrow{r}$ restamos un segmento de menor longitud $\overrightarrow{s}$, se obtendrá intuitivamente como resultado el segmento que le haría falta a $\overrightarrow{s}$ para tener la misma longitud de $\overrightarrow{r}$: el resultado $\overrightarrow{t}$ de la operación $\overrightarrow{r} \boxminus \overrightarrow{s}$ es precisamente el segmento $\overrightarrow{t}$ tal que $\overrightarrow{s} \boxplus \overrightarrow{t} = \overrightarrow{r}$. La representación gráfica aparece en la figura **3-9**:

**Figura 3-9**.: Sustracción de segmentos




También se podría invertir el orden de $\overrightarrow{t}$ y $\overrightarrow{s}$:

**Figura 3-10**.: Sustracción invirtiendo los segmentos



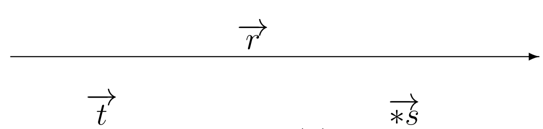

y así parece más natural la idea de cambiarle la orientación a $\overrightarrow{s}$ y seguir definiendo la adición de segmentos orientados con la idea intuitiva de colocar el origen del segundo segmento en la punta del primero.

El resultado de la sustracción $\overrightarrow{r} \boxminus \overrightarrow{s}$ sería pues el mismo de la adición $\overrightarrow{r} \boxplus \overrightarrow{*s}$.

$$\overrightarrow{r} \boxminus \overrightarrow{s} = \overrightarrow{r} \boxplus \overrightarrow{*s} \tag{3-9}$$

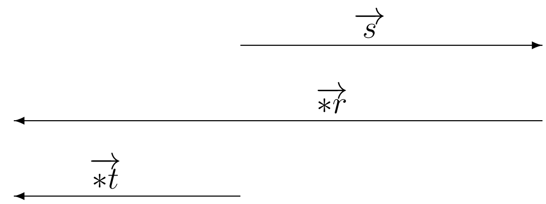
La representación gráfica en la figura **3-11**:

**Figura 3-11**.: Sustracción como adición cambiando la orientación de un segmento




Con la primera definición la sustracción no estaría definida si $\overrightarrow{r}$ es de menor longitud que $\overrightarrow{s}$ mientras que si se admiten segmentos en el otro sentido, no hay problema en hacer sustracciones en cualquier caso. Por ejemplo, con los mismos segmentos anteriores tendría sentido hablar de $\overrightarrow{s} \boxminus \overrightarrow{r}$, pues esto es simplemente $\overrightarrow{s} \boxplus *\overrightarrow{r}$, lo cual se representa en la gráfica **3-12**

**Figura 3-12**.: Adición de un segmento con el opuesto de otro




en donde se aprecia que $\overrightarrow{s} \boxminus \overrightarrow{r}$ es simplemente $*\overrightarrow{t}$

### El sistema $\overline{Op_s}$ y sus operaciones

Con el conjunto $\overline{Op_s}$, el operador unario $*$ y los operadores binarios $\oplus, \ominus$ y $\circ$, se forma el sistema $(\overline{Op_s}, *, \oplus, \ominus, \circ)$. Éste nuevo sistema no es isomorfo con los naturales pues éstos no tienen opuestos y no siempre se puede efectuar la sustracción. En el nuevo sistema, si es posible calcular el resultado de la adición o sustracción de operadores, aunque $m(\ )$ sea de menor longitud que $n(\ )$; por ejemplo

$$[m(\ ) \oplus *n(\ )](\overrightarrow{s}) = *(n - m)(\overrightarrow{s}). \tag{3-10}$$

Ahora se puede simplificar la notación y poner $-n(\ )$ en lugar de $*n(\ )$. Nótese que ahora la barra es un operador unario $-(\ )$ sobre los nuevos símbolos y que:

$$-(n) = -n \tag{3-11}$$
$$-(-n) = n \tag{3-12}$$

para todo número natural $n$.

Calculando ahora la suma, resta y composición de operadores con la notación simplificada, se obtiene:

$$(m + n)(\overrightarrow{s}) = (m + n)\overrightarrow{s} \tag{3-13}$$
$$(m - n)(\overrightarrow{s}) = \begin{cases} (m - n)\overrightarrow{s} & \text{si } m \geq n \\ -(n - m)\overrightarrow{s} & \text{si } m < n \end{cases} \tag{3-14}$$
$$(m \circ n)(\overrightarrow{s}) = m(n(\overrightarrow{s})) = mn(\overrightarrow{s}) = mn\overrightarrow{s} \tag{3-15}$$

en donde $mn$ es el producto de $m$ por $n$ en los naturales. Se puede entonces simplificar la notación de la composición de operadores utilizando también la mera yuxtaposición. Así se puede calcular:

$$(-m)n = -mn \tag{3-16}$$
$$m(-n) = -mn \tag{3-17}$$
$$(-m)(-n) = mn \tag{3-18}$$

Las ecuaciones 3-15 - 3-18 se justificarán en el capítulo siguiente.

Se tiene entonces un conjunto de símbolos de operadores que es cerrado con respecto a la operación unaria de cambio de orientación, notada $-$, y con respecto a las operaciones binarias de adición, notada $+$, sustracción, notada también $-$, pero con un puesto a cada lado, y composición o multiplicación, notada por simple yuxtaposición, en caso de duda, por un $\times$ o un punto. Al conjunto de símbolos con notación simplificada se le llama $\mathbb{Z}$ y se le da el nombre de conjunto de números enteros. La parte de los enteros que coincide con los naturales se les llama enteros positivos y se nota

$\mathbb{Z}_+ = \{n|n \in \mathbb{N}\} = \{n(\ )|n \in \mathbb{N}\}$,

considerando $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$ El conjunto de opuestos de $\mathbb{Z}_+$, se llamará los enteros negativos y se notará

$\mathbb{Z}_- = \{-n|n \in \mathbb{N}\} = \{*n(\ )|n \in \mathbb{N}\}$

es fácil ver que: $\mathbb{Z} = \mathbb{Z}_+ \cup \mathbb{Z}_-$ y que: $\mathbb{Z}_+ \cap \mathbb{Z}_- = \{0\}$
También se pueden introducir los enteros estrictamente positivos $\mathbb{Z}^+$ y los estrictamente negativos $\mathbb{Z}^-$, eliminando el cero de los originales:

$$\begin{aligned} \mathbb{Z}^+ &= \mathbb{Z}_+ - \{0\} \\ \mathbb{Z}^- &= \mathbb{Z}_- - \{0\} \end{aligned}$$

de donde $\mathbb{Z} = \mathbb{Z}^+ \cup \mathbb{Z}^- \cup \{0\}$.El conjunto $\mathbb{Z}$ con el operador unario $-$ y los operadores binarios $+, -, \times$ es un sistema que tiene la propiedad clausurativa con respecto a todas las operaciones señaladas. Así el sistema $(\mathbb{Z}, -, +, -, \times)$ es claramente isomorfo a $(\overline{Op_s}, *, \oplus, \ominus, \circ)$ que en realidad es el mismo con notación simplificada.

### 3.1.2. Enteros negativos como opuestos de los naturales

Se pueden definir los números simétricos a los números naturales respecto al origen como los enteros negativos y así definir los números enteros.

**Definición 3.2.** *Definición de los números enteros a partir de los naturales:*

$\mathbb{Z} = \mathbb{N} \cup \{-n : n \in \mathbb{N}\}$

En otras palabras, los enteros son los naturales más una copia de los números positivos $n$ poniéndoles una rayita antes para indicar que son negativos: así, por ejemplo, el $-3$ es la copia negativa del 3 [3]. Inmediatamente se nota que $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z}$.

### Orden en los enteros

**Definición 3.3.**

- *Entre números naturales el orden es el mismo que se tenía en* $\mathbb{N}$
- *Si $a$ es negativo y $b$ es un natural, $a < b$ (todo negativo es menor que todo positivo).*
- *Si $a, b$ son ambos negativos, donde $a = -n$ y $b = -m$ (con $n, m \in \mathbb{N}$), entonces $a < b$ si y sólo si $m < n$ (en negativos, el orden "se invierte").*

Esta definición se resume así: $-(n+1) < -n < \ldots < -3 < -2 < -1 < 0 < 1 < 2 < 3 < \ldots < n < n+1$.

### Suma en los enteros

**Definición 3.4.**

- *Para enteros naturales, la suma es la misma de los naturales*
- *Si $a, b$ son ambos negativos, donde $a = -n$ y $b = -m$ (con $n, m \in \mathbb{N} - \{0\}$), entonces $a + b$ se define como el número $-(n+m)$ (donde este último $+$ denota la suma de naturales). [Por ejemplo, $-4 + (-3) = -(4+3) = -7$]. Esta definición garantiza que la suma de negativos es negativo.*
- *Si $a$ es negativo y $b$ es positivo, donde $a = -n$ y $b = m$, con ($n, m \in \mathbb{N} - \{0\}$), entonces se tienen dos casos a considerar:*
  - *Si $m \geq n$ entonces $a + b = (m - n)$, donde este último $-$ indica la sustracción de naturales y se tiene que la suma $a + b$ es positiva.*
  - *Si $m < n$ entonces $a + b = -(n - m)$, donde $n - m$ está en los naturales y la suma $a + b$ será negativa.*

  *Para el caso que $a$ sea positivo y $b$ sea negativo se procede de manera análoga a la anterior.*

$(\mathbb{N}, +)$ es un monoide conmutativo ya que en él se verifica la propiedad asociativa, tiene un elemento neutro 0 y se cumple la propiedad conmutativa. Faltaría ver que propiedades adicionales se verifican en los enteros con la suma.

**Propiedad asociativa** No es necesario considerar el caso $a, b$ y $c$ naturales. En el caso que $a, b$ y $c$ sean negativos, donde $a = -m, b = -m$ y $c = -p$, con $m, n, p \in \mathbb{N}$, se tiene

$$a+(b+c) = a+(-(n+p)) = -(m+(n+p)) = -((m+n)+p) = -(m+n)+(-p) = (a+b)+c$$

En el caso que $a, b$ sean positivos y $c$ sea negativo, donde $a = m, b = n$ y $c = -p$, con $m, n, p, \in \mathbb{N}$ se tiene

$$a + (b + c) = m + (n - p) = m + n - p = (m + n) - p = (a + b) + c$$

siendo $n \geq p$. Se puede verificar considerando los otros casos también

**Propiedad conmutativa** Con $a$ y $b$ naturales se cumple. Al considerar el caso que $a$ y $b$ sean negativos, donde $a = -m$ y $b = -n$ con $m, n \in \mathbb{N}$ se tiene

$$a + b = -(m + n) = -(n + m) = b + a$$

Para el caso que $a$ sea positivo y $b$ sea negativo, con $a = m$, $b = -n$ y $m \geq n$, se tiene

$$b + a = -n + m = m + (-n) = m - n = a + b$$

Análogamente se prueba para el caso en que $m < n$.

**Propiedad modulativa** Considerando el caso que nos interesa, es decir haciendo $a$ negativo con $a = -n$, donde $n \in \mathbb{N} - \{0\}$ se tiene que:

$$a + 0 = -(n + 0) = -(0 + n) = -(n) = -n = a$$

**Existencia de inversos** Se cumple que para todo $a = m \in \mathbb{N}$, existe su inverso, notado $-a$ tal que

$$a + (-a) = (a - a) = -a + a = 0.$$

En el caso que $a$ sea negativo, donde $a = -m$, con $m \in \mathbb{N}$ se tiene

$$a + (-a) = -m + m = m - m = 0$$

Como los enteros así definidos cumplen con las anteriores propiedades para la suma, se dice que $(\mathbb{Z}, +)$ tiene estructura de grupo abeliano.

### Multiplicación en los enteros

En el conjunto $\mathbb{Z}$ de los números enteros puede definirse una operación llamada *multiplicación* y notada $\cdot$ que cumple con las siguientes propiedades:

Para todo $a, b, c \in \mathbb{Z}$, se tiene:

**Asociativa:** $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$.

**Conmutativa:** $a \cdot b = b \cdot a$.

**Existencia del elemento neutro:** Existe un número entero 1 que es elemento neutro de la *multiplicación*, es decir, para todo entero $a$ se verifica

$1 \cdot a = a \cdot 1 = a$

### Relación entre adición y multiplicación

Las operaciones $+$ y $\cdot$, se relacionan mediante la siguiente propiedad:

**Propiedad distributiva:** $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$

### Consecuencias de las propiedades algebraicas de los números enteros

De las propiedades de los números enteros con la adición y la multiplicación se derivan los siguientes teoremas [8]:

**Teorema 3.1.** *Propiedad cancelativa de la suma:* $a + b = a + c \Rightarrow b = c$

*Demostración.* Se tiene:

$$\begin{aligned} a + b = a + c &\Rightarrow (-a) + (a + b) = (-a) + (a + c) && \text{(3-19)} \\ &\Rightarrow (-a + a) + b = (-a + a) + c && \text{(3-20)} \\ &\Rightarrow 0 + b = 0 + c && \text{(3-21)} \\ &\Rightarrow b = c && \text{(3-22)} \end{aligned}$$

□

**Teorema 3.2.** *Ley de absorción del cero:*

$a \cdot 0 = 0$

*Demostración.*

$$\begin{aligned} a \cdot a + 0 &= a \cdot a = a \cdot (a + 0) \qquad \text{por propiedad modulativa de } + && \text{(3-23)} \\ &= a \cdot a + a \cdot 0 && \text{(3-24)} \end{aligned}$$

De $a \cdot a + 0 = a \cdot a + a \cdot 0$ por el teorema 3.1 se deduce 3.2. □

**Teorema 3.3.** $-(-a) = a$

*Demostración.* $a+(-a) = (-a)+a = 0$ por propiedad conmutativa de $+$, es decir el opuesto de $-a$, $-(-a)$ es $a$. □

Así, $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ es un *anillo conmutativo con unidad*, ya que $(\mathbb{Z}, +)$ es un grupo conmutativo y $(\mathbb{Z}, \cdot)$ es un semigrupo conmutativo con unidad. Además $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ es un dominio de integridad, ya que no tiene divisores de 0 como se verá en el capítulo 4.

**Teorema 3.4.**

$a \cdot (-b) = -(a \cdot b), \qquad (-a) \cdot b = -(a \cdot b)$

$(-a) \cdot (-b) = a \cdot b$

Las igualdades del teorema 3.4 serán demostradas en el capítulo 4.

## 3.2. Construcción formal de $\mathbb{Z}$ Números enteros como clases de equivalencia del conjunto cociente $\mathbb{N} \times \mathbb{N}/\sim$

En las ecuaciones del tipo $x + b = a$ con $a, b$ naturales, se observa que la solución se obtiene mediante la diferencia $x = a - b$, siempre y cuando $b \leq a$. En el caso $b > a$ la diferencia no estaría definida en los números naturales. Deberá entonces existir un conjunto numérico, en el cual las diferencias del tipo $x = a - b$ estén definidas aunque $b > a$.

Ahora bien, cualquier número natural se puede representar mediante la resta de dos naturales. Así, por ejemplo, el número natural 5, se puede representar así:

$5 = 5 - 0 = 6 - 1 = 7 - 2 = 8 - 3 = \ldots = (n + 5) - n = \ldots.$

Puede verse fácilmente que las diferencias $5 - 0, \quad 6 - 1, \quad 7 - 2$ y $8 - 3$ son equivalentes y además puede observarse que:

$5 + 1 = 0 + 6, \quad 6 + 2 = 1 + 7, \quad 7 + 3 = 2 + 8;$

es decir la diferencia $a - b$ es equivalente con la diferencia $c - d$ si y solamente sí $a + d = b + c$, para $a, b, c$ y $d$ naturales. Lo fundamental en la última igualdad es que se están considerando números naturales, sin mencionar para nada la sustracción. Esto sugiere que con parejas ordenadas de naturales y con la relación definida podrá reconstruirse la idea de sustracción usando la adición de naturales[11].

**Definición 3.5.** *Sobre $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ se define la relación $\sim$ tal que*

$(a, b) \sim (c, d) \Leftrightarrow a + d = b + c$

**Proposición 3.1.** *La relación $\sim$ es una relación de equivalencia*

*Demostración.* Sean $(a, b), (c, d)$ y $(e, f)$ elementos de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$.
$\sim$ *es reflexiva* ya que $a + b = b + a$ por conmutatividad de la adición en $\mathbb{N}$, entonces $(a, b) \sim (a, b)$.
$\sim$ *es simétrica.* Si $(a, b) \sim (c, d)$ se sigue que $a + d = b + c$ y por propiedad conmutativa de la adición en $\mathbb{N}$ y por simetría de la igualdad se tiene que $c + b = a + d$ luego se deduce que $(c, d) \sim (a, b)$.
$\sim$ *es transitiva.* Si $(a, b) \sim (c, d)$ y $(c, d) \sim (e, f)$ se tiene que $a + d = b + c$, $c + f = d + e$, sumando miembro a miembro: $a + d + c + f = b + c + d + e$ y cancelando $c + d$ se obtiene $a + f = b + e$, lo cual demuestra que $(a, b) \sim (e, f)$ □

### 3.2.1. Operaciones definidas en $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$

**Definición 3.6.** *Para cualesquiera $(a, b)$ y $(c, d) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ se definen las operaciones binarias*

$(a, b) \oplus (c, d) = (a + c,\ b + d) \qquad y \qquad (a, b) \odot (c, d) = (ac + bd,\ ad + bc)$

**Proposición 3.2.** *Las operaciones definidas $\oplus$ y $\odot$ son conmutativas en $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$*

*Demostración.* $(a, b) \oplus (c, d) = (a+c, b+d) = (c+a, d+b) = (c, d) \oplus (a, b)$ (la conmutatividad de $+$ en $\mathbb{N}$ hace válida la segunda igualdad.)
$(a, b) \odot (c, d) = (ac + bd,\ ad + bd) = (ca + db,\ da + db) = (c, d) \odot (a, b)$ (siendo verdadera la segunda igualdad por la conmutatividad de $+$ y $\cdot$ en $\mathbb{N}$). □

**Teorema 3.5.** *La relación $\sim$ es compatible con las operaciones $\oplus$ y $\odot$ definidas en $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$*

*Demostración.* Al ser conmutativas las operaciones $\oplus$ y $\odot$ basta probar que si $(a, b) \sim (c, d)$, entonces

$$\begin{aligned} (a, b) \oplus (e, f) &\sim (c, d) \oplus (e, f) \\ (a, b) \odot (e, f) &\sim (c, d) \odot (e, f) \end{aligned}$$

siendo $(a, b), (c, d)$ y $(e, f)$ elementos cualesquiera de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$

Por supuesto: Si $(a, b) \sim (c, d)$, entonces $a + d = b + c$; sumando $e + f$ a los dos miembros, conmutando y asociando convenientemente se obtiene

$$\begin{aligned} &(a + e) + (d + f) = (b + f) + (c + e) \quad \text{o sea} \\ &(a + e, b + f) \sim (c + e, d + f) \quad \text{esto es} \\ &(a, b) \oplus (e, f) \sim (c, d) \oplus (e, f) \end{aligned}$$

Análogamente, por hipótesis $(a,b) \sim (c,d)$ luego

$a+d=b+c \qquad \wedge \qquad b+c=a+d,$

de donde multiplicando por $e$ y $f$ respectivamente se obtiene

$ae+de=be+ce \qquad \wedge \qquad bf+cf=af+df$

y sumando miembro a miembro,

$$\begin{aligned} ae+de+bf+cf &= be+ce+af+df, &\quad& \text{o sea}\\ (ae+bf)+(de+cf) &= (af+be)+(ce+df) && \text{es decir}\\ (ae+bf, af+be) &\sim (ce+df, de+cf) && \text{esto es}\\ (a,b)\odot(e,f) &\sim (c,d)\odot(e,f) && \end{aligned}$$

□

La relación $\sim$ permite partir el conjunto $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ en clases disyuntas de equivalencia[2]. Se notará $[a,b]$ como el conjunto de todas las parejas equivalentes con $(a,b)$, es decir

$[a,b]=\{(x,y)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}|(x,y)\sim(a,b)\}$

El conjunto de clases de equivalencia se denotará por $\mathbb{Z}$ así:

$\mathbb{Z}=\{[(a,b)]_\sim \mid (a,b)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}\}$

Las clases de equivalencia determinadas por la relación $\sim$ pueden visualizarse al representarse gráficamente $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$
y se hallan sobre rectas paralelas a la diagonal $y=x$. En la figura **3-13** las parejas $\{(2,1),(3,2),(4,3)\}$ representan al entero 1 ya que $2-1=3-2=4-3=1$

Del teorema 3.5 se puede concluir que las operaciones $\oplus$ y $\odot$ se pueden pasar al conjunto cociente[3] $\mathbb{N}\times\mathbb{N}/\sim$, o sea que entre clases de equivalencia se pueden definir correctamente,

**Definición 3.7.**

$[(a,b)]+[(c,d)]=[(a,b)\oplus(c,d)] \qquad y \qquad [(a,b)]\cdot[(c,d)]=[(a,b)\odot(c,d)]$

El conjunto $\mathbb{N}\times\mathbb{N}/\sim$, es precisamente el conjunto de los números enteros, que ya se notó por $\mathbb{Z}$

[2]Ver secciones A.4 y A.3 del apéndice A
[3]Ver sección A.3 del apéndice A

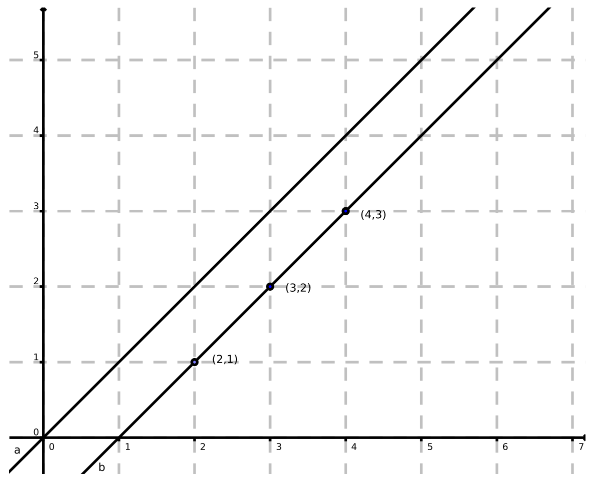



**Figura 3-13.**: Clases de equivalencia en $\mathbb{N} \times \mathbb{N}/\sim$ que representan a los enteros 0 y 1 respectivamente

**Teorema 3.6.** *Las operaciones $+$ y $\cdot$ (entre clases) definidas en $\mathbb{Z}$ tienen las siguientes propiedades:*

*(a) Las dos operaciones son asociativas y conmutativas.*

*(b) El módulo de $+$ es $[(a, a)]$ para cualquier $a \in \mathbb{N}$*

*(c) El módulo de $\cdot$ es $[(1, 0)]$*

*(d) El inverso de $[(a, b)]$ con respecto a $+$ es $[(b, a)]$*

*(e) La operación $\cdot$ es distributiva respecto a $+$*

*Demostración.*

$$\begin{aligned}
\{[(a,b)] + [(c,d)]\} + [(e,f)] &= [(a,b) \oplus (c,d)] + [(e,f)] \text{ por la definición 3.7} \\
&= [(a+c, b+d)] + [(e,f)] = [(a+c+e, b+d+f)] \\
&= [(a+(c+e), b+(d+f)] \text{ por asociatividad de} + \text{en } \mathbb{N} \\
&= [(a,b) \oplus (c+e, d+f)] = [(a,b)] + [(c,d) \oplus (e,f)] \\
&= [(a,b) + \{[(c,d)] + [(e,f)]\}
\end{aligned}$$

con lo cual queda demostrada la asociatividad de $+$ en $\mathbb{N} \times \mathbb{N}/\sim$

$$
\begin{aligned}
\{[(a,b)]\cdot[(c,d)]\}\cdot[(e,f)] &= [(a,b)\odot(c,d)][(e,f)] = [(ac+bd,ad+bc)\odot(e,f)]\\
&= [ace+bde+adf+bcf, acf+bdf+ade+bce]\\
&= [a(ce+df)+b(de+cf), a(df+de)+b(df+ce)]\\
&= [(a,b)\odot(ce+df,de+cf)] = [(a,b)]\cdot[(c,d)\odot(e,f)]\\
&= [(a,b)]\cdot\{[(c,d)]\cdot[(e,f)]\}
\end{aligned}
$$

los pasos anteriores se sustentan en la asociatividad y conmutatividad de la adición y la multiplicación y, en la propiedad recolectiva (factorización) en $\mathbb{N}$ con lo cual queda demostrada la asociatividad de $\cdot$ en $\mathbb{N}\times\mathbb{N}/\sim$

Por la proposición 3.2 y la definición 3.7 se sigue que $+$ y $\cdot$ son conmutativas en $\mathbb{N}\times\mathbb{N}/\sim$

Para probar *(b)* se observa que $(a,a)\sim(0,0)$ para cualquier $a\in\mathbb{N}$, luego $[(a,a)]=[(0,0)]$ y se tiene

$$[(c,d)]+[(0,0)] = [(c,d)\oplus(0,0)] = [(c,d)]$$

así que $[(a,a)]$ es módulo para $+$ y $[(0,0)]$ su representante canónico[4]

Para probar *(c)* se hace

$$
\begin{aligned}
[(a,b)]\cdot[(1,0)] &= [(a,b)\odot(1,0)] = [(a1+b0,a0+b1)]\\
&= [(1a+0b,1b+0a)] = [(1,0)\odot(a,b)] = [(1,0)]\cdot[(a,b)] = [(a,b)]
\end{aligned}
$$

Se probará *(d)* así:

$$
\begin{aligned}
[(a,b)]+[(b,a)] &= [(a,b)\oplus(b,a)] = [(a+b,b+a)]\\
&= [(a+b,a+b)] = [(0,0)]
\end{aligned}
$$

con lo cual queda demostrado *(d)*
Al efectuar

$$
\begin{aligned}
[(a,b)]+[(c,d)]\cdot[(e,f)] &= [(a,b)\oplus(c,d)]\cdot[(e,f)]\\
&= [(a+c,b+d)]\cdot[(e,f)] = [(a+c,b+d)\odot(e,f)]\\
&= [((a+c)e+(b+d)f,(a+c)f+(b+d)e)]\\
&= [(ae+ce+bf+df,af+cf+be+de)]\\
&= [(ae+bf,af+be)\oplus(ce+df,cf+de)]\\
&= [(a,b)\odot(e,f)]+[(c,d)\odot(e,f)]\\
&= \{[(a,b)]\cdot[(e,f)]\}+\{[(c,d)]\cdot[(e,f)]\}
\end{aligned}
$$

se demuestra *(e)* □

[4]En general, el representante canónico de una clase de la forma $[m+n,n]$ es $[m,0]$.

Se dice que el conjunto $\mathbb{Z}$ con las operaciones $+$ y $\cdot$ tiene estructura de anillo conmutativo con unidad por las propiedades que se verificaron en el teorema 3.6.

Un número entero tiene tres opciones de ser: o es positivo, o negativo o cero como puede verse en la siguiente proposición

**Proposición 3.3.** *Dado un entero* $[(a, b)]$*, existe un único natural* $n$ *tal que* $[(a, b)] = [(n, 0)]$ *ó bien* $[(a, b)] = [(0, n)]$

*Demostración.* Dado $[(a, b)]$, por la tricotomía del orden en $\mathbb{N}$, se cumple solamente una de las relaciones

$$a = b, \qquad a > b, \qquad a < b$$

Considerando el primer caso $[(a, b)] = [(a, a)] = [(0, 0)]$ y $n = 0$. En el segundo caso, existe un único $n$ tal que $a = n + b$ y se tiene

$$[(a, b)] = [(n + b, b)] = [(n, 0)]$$

ya que $(n + b, b) \sim ((n, 0)$

Finalmente, cuando $a < b$ existe $n \in \mathbb{N}^*, \quad \mathbb{N}^* = \mathbb{N} - \{0\}$ tal que $a + n = b$ y

$$[(a, b)] = [(a, a + n)] = [(0, n)]$$

□

Se define $\hat{\mathbb{N}}$ como el conjunto de los enteros de la forma $[(n, 0)]$. Este conjunto en nada se diferencia del conjunto $\mathbb{N}$ y por tanto se puede concluir que $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$ y en lugar de $[(n, 0)]$ podemos escribir simplemente $n$

Ahora bien como

$$[(0, n)] + n = [(0, n)] + [(n, 0)] = [(0, 0)] = 0$$

se concluye que $[(0, n)]$ es el inverso de $n$, es decir, $[(0, n)] = -n$; con esta notación se puede reducir la escritura de $\mathbb{Z}$ así:

$$\mathbb{Z} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$$

Como la adición en $\mathbb{Z}$ es conmutativa y todo elemento de $\mathbb{Z}$ tiene inverso (ver teorema 3.6) se puede definir la diferencia entre $a, b \in \mathbb{Z}$ así:

$$a - b = a + (-b) = -b + a \tag{3-25}$$

Ahora la diferencia que estaba parcialmente definida en $\mathbb{N}$, (cuando el sustraendo es menor o igual que el minuendo) pasa a estar totalmente definida en $\mathbb{Z}$

**Proposición 3.4.** ***(a)*** *$\forall n \in \mathbb{Z}$ se tiene $-(-n) = n$*

***(b)*** *$\forall n \in \mathbb{Z}^*, \mathbb{Z}^* = \mathbb{Z} - \{0\}$ se tiene $n \in \mathbb{N}^* \vee -n \in \mathbb{N}^*$*

***(c)*** *$(\forall m, n \in \mathbb{Z})(m(-n) = -(mn) = (-m)n)$*

***(d)*** *$(\forall m, n \in \mathbb{Z})((-m)(-n) = mn)$*

***(e)*** *$(\forall n \in \mathbb{Z})(n \cdot 0 = 0)$*

***(f)*** *$(\forall n \in \mathbb{Z}^*)(np = nq \Rightarrow p = q)$*

(a), (c) y (d) serán justificadas en el capítulo 4

*Demostración.* Por la proposición 3.3 se tiene que $n = [(a, b)]$, para cualesquiera $a, b \in \mathbb{N}^*$ y $a \neq b$ si $a < b$ entonces $-n \in \mathbb{N}^*$. En el otro caso, si $a > b$ entonces $n \in \mathbb{N}^*$.
Si $n \in \mathbb{Z}^*$,

$$\begin{aligned} np = nq &= [(n, 0)] \cdot [(p, 0)] = [(n, 0)] \cdot [(q, 0)] \\ &= [(np, 0)] = [(nq, 0)] \\ &= [(p, 0)] = [(q, 0)] \Rightarrow p = q \end{aligned}$$

$$n \cdot 0 = [(n, 0)] \cdot [(0, 0)] = [(n0 + 0, n0 + 0)] = [(0, 0)] = 0$$

así se demuestra (e) □

En $\mathbb{Z}$ se mantiene el orden total que poseen los naturales y que se define así:

$$m \leq n \quad \leftrightarrow \quad n - m \in \mathbb{N},$$

lo cual también se puede entender así: $m \leq n \quad \leftrightarrow \quad \exists r \in \mathbb{N}\ (m + r = n)$.

**Proposición 3.5.** *La relación $\leq$ es de orden total para $\mathbb{Z}$*

*Demostración. Propiedad reflexiva:* Como $n - n \in \mathbb{N}$ para todo $n \in \mathbb{Z}$ entonces $n \leq n$.

*Propiedad anti-simétrica:* Si $n \leq m$ y $m \leq n$ entonces se tiene que $m - n \in \mathbb{N}$ y $n - m \in \mathbb{N}$ lo cual implica por la propiedad (b) de la proposición 3.4 que $n = m$.

*Propiedad transitiva:* Si $m \leq n$ y $n \leq p$ entonces se tiene que existen $r$ y $r' \in \mathbb{N}$ tal que $m + r = n$ y $n + r' = p$; sumando miembro a miembro las dos igualdades, se tiene que $m + r + n + r' = n + p$, cancelando $n$, se obtiene $m + r + r' = p$ por tanto $m \leq p$ ya que $r + r' \in \mathbb{N}$ □

# 4. Algunas justificaciones de la ley de los signos

En la enseñanza de los números enteros, se suele justificar la aparición de cantidades negativas y positivas mediante el uso de estas en problemas donde aparecen deudas y abonos, temperaturas bajo cero y sobre cero, mediciones de altura y profundidad, etc. Con estos modelos se pueden explicar las leyes de la adición de enteros, pero, todos estos modelos fracasan cuando se intenta justificar la ley de los signos en la multiplicación, ya que es inverosímil por ejemplo, pensar que el producto de dos deudas sea una ganancia. La solución al problema de la enseñanza de esta regla brilla por su ausencia y simplemente se pide a los estudiantes que la acepten y memoricen para que la utilicen cuando sea necesario.

## 4.1. Breve historia de algunas justificaciones de la regla de los signos

Históricamente, se han dado variadas justificaciones a esta ley; por ejemplo, Diofanto menciona una regla que traducida al lenguaje de hoy diría:

> Lo que es lo que falta multiplicado por lo que es lo que falta da lo que es positivo; mientras que lo que es lo que falta multiplicado por lo que es positivo, da lo que es lo que falta. (Diofanto, libro I)

Dentro de las justificaciones de la ley de los signos realizadas a finales del siglo XVI y comienzos del XVII se destaca la de Stevin (1540-1620). Esta justificación se basa en una doble comprobación, una mediante un ejemplo del producto de dos sustracciones y otra, geométrica, usando básicamente el mismo argumento, es decir usando el producto de sustracciones representada por el área de un rectángulo. Stevin enuncia la regla como un teorema y luego, propone los ejemplos que la comprobarán así:

> **Teorema:**
> Más multiplicado por más, da producto más; menos multiplicado por menos, da producto más; más multiplicado por menos, o menos multiplicado por más, da

producto menos.

*Explicación:* Sea $8-5$ multiplicado por $9-7$, de esta manera: $-7$ veces $-5$ hacen $(+35)$, porque como dice el teorema $-$ por $-$ hace $+$. Después $-7$ veces 8 hace $-56$ (-56, porque como se dice en el teorema $-$ por $+$ hace $-$). Y análogamente sea $8-5$ multiplicado por el 9, dará como productos $72-45$. Después juntad $+71+35$, que son 107. Después juntad los $-56-45$, que son 101. Y sustrayendo el 101 del 107, que restan 6, se tiene el producto de la multiplicación dada. La disposición de caracteres de la operación es esta:

$$
\begin{array}{cccc}
 & 8 & - & 5 \\
 & 9 & - & 7 \\
\hline
 & -56 & + & 35 \\
72 & -45 & & \\
\hline
6 & & &
\end{array}
$$

*Explicación de la regla:* Hay que demostrar por lo enunciado que $+$ multiplicado por $+$ hace $+$, que $-$ por $-$ hace $+$, que $+$ por $-$, o $-$ por $+$, hace $-$.

*Demostración:* El número a multiplicar, $8-5$ vale 3, el multiplicador $9-7$ vale 2. Pero multiplicando 2 por 3 el producto es 6. Luego el producto de aquí también arriba también es 6, es el producto verdadero. Pero el mismo se ha obtenido por multiplicación, aquella donde hemos dicho que $+$ por $+$ da producto $+$, $-$ por $-$ da producto $+$, $+$ por $-$, o $-$ por $+$ da producto $-$, luego el teorema es verdadero.

*Otra demostración geométrica* Sea $AB(8-5)$ (a saber $AD(8)-DB(5)$). Después, $AC(9-7)$ (a saber $AE(9)-EC(7)$). Su producto será $CB$, o bien según la multiplicación $DE(72)-EF(56)-DG(45)+GF(35)$. Los cuales demostraremos que son iguales a $CB$ de esta forma. De todo el $ED+GF$, se sustrae $EF$ y $DG$, resta $CB$. [1] Figura **4-1**.

*Conclusión:* Luego más multiplicado por más, da producto más; menos multiplicado por menos, da producto más; más multiplicado por menos, o menos multiplicado por más, da producto menos, que era lo que había que demostrar.

Euler también hace su aporte en la justificación de la ley de los signos; propone, mediante ejemplos con deudas que más por menos y menos por más es menos, ya que por ejemplo, al triplicar una deuda, seguirá siendo ésta una deuda. Así que si menos por más, o más por

[1] La notación un poco confusa pertenece a la época en que vivió Stevin; sin embargo con un poco de esfuerzo, el lector podrá entenderla.

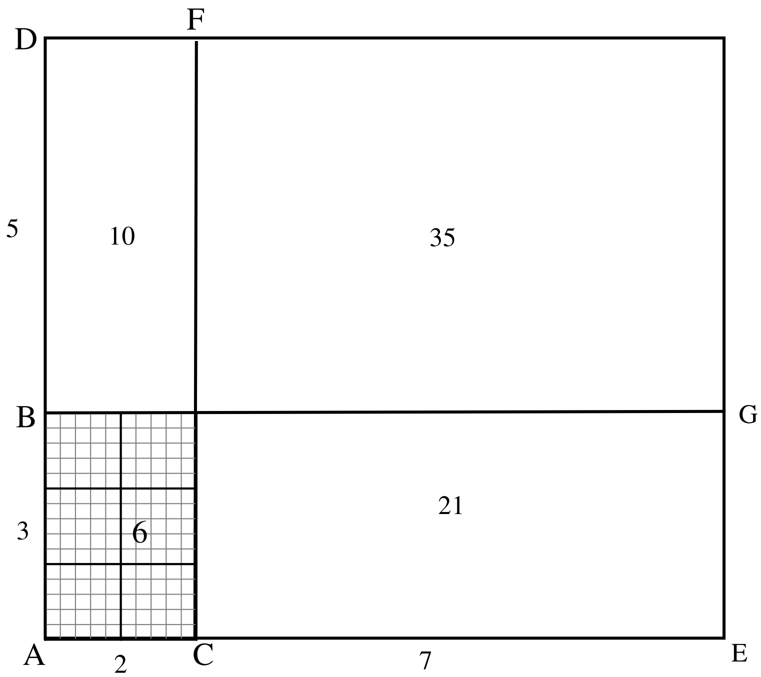



**Figura 4-1**.: Otra demostración

menos es menos, entonces por eliminación se debe tener que menos por menos es más ya que más por más es más. Así, de las cuatro posibilidades dos productos son negativos luego los otros dos deben ser positivos.

Mc-Laurin (1698-1746), propone una justificación de la regla de los signos que simplificada se puede expresar así: Considerando la diferencia $+a-a=0$, se puede multiplicar esta diferencia por cualquier número $n$ obteniéndose $n(+a-a)=+na-na=0$; el segundo término del segundo miembro de la igualdad es $-na$ ya que debe anularse con el primer término $na$ concluyendo que el producto de cantidades de signos distintos es negativo; así mismo se puede multiplicar la diferencia $+a-a$ por $-n$ obteniéndose $-n(+a-a)=-na+na=0$ siendo el segundo término del segundo miembro de la igualdad $na$ ya que debe anularse con $-na$; por tanto concluye que el producto de cantidades de signos iguales es positivo.

Algunos otros matemáticos propusieron justificaciones de la ley de los signos; por ejemplo Laplace (1749-1827) usó el argumento empleado por Euler en combinación con el argumento usado por Mac-Laurin para justificarla. También Cauchy intentó dar una justificación (ecuaciones 2-3 y 2-4). Una justificación más moderna[4], que merece ser mencionada, hace uso de la propiedad distributiva así:

$$\begin{aligned}(-1)(-1) &= (-1)(-1)+(0)(1)=(-1)(-1)+(-1+1)(1)=(-1)(-1)+(-1)(1)+(1)(1)\\ &= (-1)(-1+1)+(1)(1)=(-1)(0)+(1)(1)=(1)(1)\end{aligned}$$

con lo cual se verifica que $-$ por $-$ es lo mismo que $+$ por $+$.

En fin, la historia de los números negativos y en especial de la regla de los signos es larga y llena de dificultades y tropiezos, de ensayos y errores tal como se mencionó en el capítulo 2.

Ahora se intentará justificar la regla de los signos usando las construcciones expuestas en el capítulo 3.

## 4.2. Verificación de la regla de los signos usando rectas paralelas sobre el plano cartesiano [7]

Es posible presentar a los estudiantes formas de verificar la regla de los signos que estén al alcance de ellos, como la que se presenta a continuación. Si se desean multiplicar los números $-3$ por 2, se traza una recta que corte al eje "x" en el punto $-3$ correspondiente al primer factor, y al eje $y$ en la unidad. Luego, se traza otra recta paralela a la anterior que corte al eje $y$ por el punto correspondiente al segundo factor 2. El punto de corte con el eje $x$ de la segunda recta será el producto, es decir $-6$ (ver figura **4-2**). Con esto se verifica que $-$ por $+$ es $-$. Así mismo se pueden elegir otros pares de números y hacer la verificación para éste caso y los demás ($+$ por $-$ es menos; $+$ por $+$ es más y $-$ por $-$ es $-$).

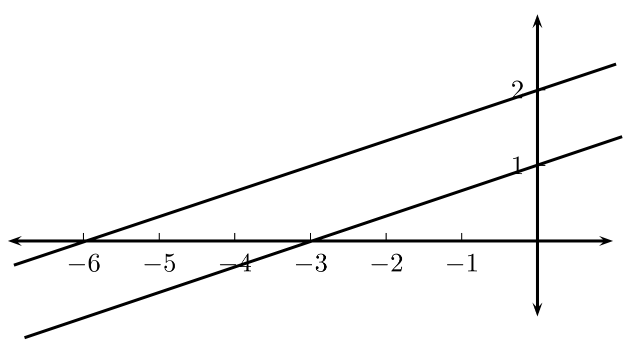



**Figura 4-2**.: Multiplicación de enteros usando rectas paralelas sobre el plano cartesiano

## 4.3. Justificación de la regla de los signos mediante el uso de la composición de operadores sobre segmentos dirigidos

Ahora, se justificarán las ecuaciones 3-15 - 3-18. Para ello se supondrá un segmento orientado $\overrightarrow{s}$ de cualquier longitud en dirección horizontal y orientado hacia la derecha (bien podría suponerse lo contrario e igual funcionaría).

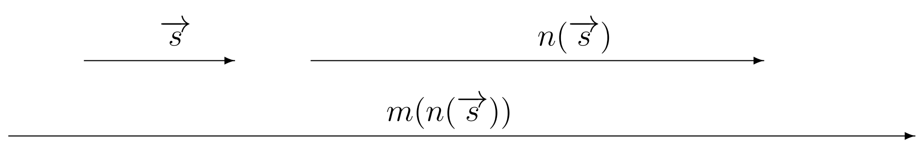
Se someterá el segmento $\overrightarrow{s}$ a la composición de los operadores $(m \circ n), (-m \circ n), (m \circ -n)$ y $(-m \circ -n)$, suponiendo $m, n \in \mathbb{N} - \{0\}$ para facilitar la tarea.

Por la definición 3.1,

$[m(\,) \circ n(\,)](\overrightarrow{s}) = m(n(\overrightarrow{s})) = mn(\overrightarrow{s})$

y aquí no hay nada que verificar, ya que el producto de naturales es un natural como se aprecia en la figura **4-3**. El segmento $m(n(\overrightarrow{s}))$ conserva su sentido, hacia la derecha, es decir el producto es positivo.

**Figura 4-3.**: Composición de los operadores m y n




Ahora tomando de la ecuación 3-16 el primer miembro $-m(n)$ y aplicándolo al segmento dirigido $\overrightarrow{s}$, por definición se tiene:

$[-m(\,) \circ n(\,)](\overrightarrow{s}) = -m(n(\overrightarrow{s}) = *mn(\overrightarrow{s})$

como se aprecia en la figura **4-4**, $-m(n) = -mn$ ya que el segmento $*m(n(\overrightarrow{s}))$ está orientado hacia la izquierda. Recuérdese que el operador $*(\,)$ cambia la orientación de un segmento.

Tomando el primer miembro de la ecuación 3-17, $m(-n)$ y aplicándolo al segmento $\overrightarrow{s}$ se obtiene por definición

$[m(\,) \circ -n(\,)](\overrightarrow{s}) = m(-n(\overrightarrow{s})) = m(*n(\overrightarrow{s})) = *mn(\overrightarrow{s})$

como se observa en la gráfica **4-5**.

**Figura 4-4**.: Composición de los operadores -m y n

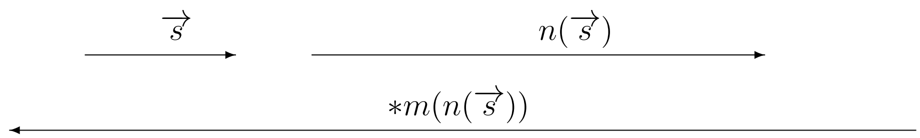
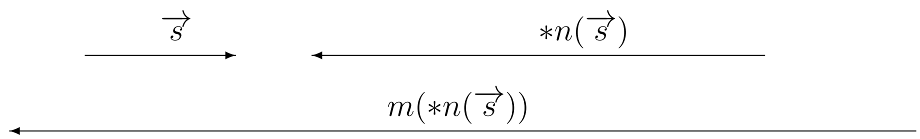



**Figura 4-5**.: Composición de los operadores m y -n



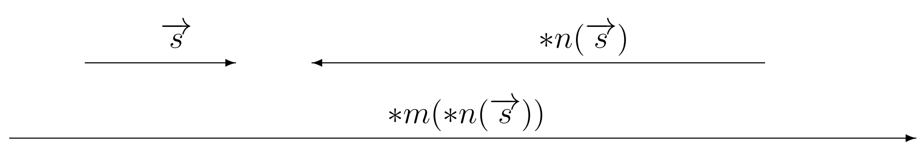

Se concluye entonces que $m(-n) = -mn$ y el segmento resultante está orientado hacia la izquierda, y de acuerdo a la convención hecha, el producto es negativo.

Tomando por último el primer miembro de la ecuación 3-18 $-m(-n)$ y aplicándolo como composición sobre el segmento $\overrightarrow{s}$ se tiene por definición:

$[-m(\,) \circ -n(\,)](\overrightarrow{s}) = -m(-n(\overrightarrow{s})) = -m(*n(\overrightarrow{s})) = *m(*n(\overrightarrow{s}))$

que en el gráfico **4-6** es igual al producto obtenido en la figura **4-3**, es decir es positivo.

**Figura 4-6**.: Composición de los operadores -m y -n



## 4.4. Justificación de la regla de los signos usando propiedades algebraicas

Se justificarán las ecuaciones del teorema 3.4 así:

*Demostración.*

$$
\begin{aligned}
& b+(-b)=0 \qquad \text{por propiedad invertiva de } + && \text{(4-1)}\\
\Rightarrow\ & a\cdot(b+(-b))=0 \qquad \text{por teorema 3.2} && \text{(4-2)}\\
\Rightarrow\ & a\cdot b+a\cdot(-b)=0 \qquad \text{Por propiedad distributiva} && \text{(4-3)}\\
\Rightarrow\ & a\cdot(-b)=-(a\cdot b) \qquad \text{por existencia de inversos} && \text{(4-4)}
\end{aligned}
$$

Para $(-a)\cdot(-b)$ se procede así:

$$
\begin{aligned}
(-a)\cdot(-b) &= -(a\cdot(-b)) = -(-(a\cdot b)) \qquad \text{por 4-4} && \text{(4-5)}\\
&= a\cdot b \qquad \text{por teorema 3.3} && \text{(4-6)}
\end{aligned}
$$

□

## 4.5. Justificación de la ley de los signos en el marco de la teoría de los pares ordenados

La ley de los signos se enunció en los items (a), (c) y (d) de la proposición 3.4, los cuales se probarán a continuación

*Demostración.*

$-(-n)+(-n) = -[(0,n)]+[(0,n)] = [(0,n)]-[(0,n)] = 0$

luego $n=-(-n)$ ya que este último es el inverso de $-n$ con lo cual queda demostrado *(a)*; para el caso $n<0$ se procede de manera análoga.

Para probar (c), se procede así:

$m(-n) = [(m,0)]\cdot[(0,n)] = [(m0+0n, mn+0\cdot 0)] = -mn$

(d) se prueba así:

$(-m)\cdot(-n) = [(0,m)]\cdot[(0,n)] = [(0+mn, 0n+m0)] = [(mn,0)] = mn$

□

# 5. Propuesta didáctica

Identificadas las dificultades históricas y epistemológicas relacionadas con el tránsito de la matemática práctica a la matemática formal y abstracta que implicó la introducción de los números enteros, tal como se evidenció en los capítulos 2 y 3 se proponen ahora algunos talleres y actividades que pretenden remediar en parte, algunas de estas dificultades. En relación a la ley de los signos, el problema radica en que generalmente se presenta a los estudiantes de grado séptimo de educación básica secundaria como regla que es necesario memorizar sin hacer el suficiente énfasis en la interpretación de su significado; luego, algunos estudiantes la memorizan, otros, ni siquiera ésto consiguen porque no significa nada para ellos. Esto conlleva a serias dificultades en el desarrollo de las matemáticas de cursos superiores.

Para llegar a presentar la regla de los signos, antes, se debe hacer una presentación de los números enteros que sea asequible a los estudiantes de éste nivel. En el libro "números enteros" [5] se plantean cinco etapas previas que permiten llegar a que el estudiante aprehenda el número entero como objeto matemático en una última etapa [1]. Así, a groso modo, en las primera etapas, se debe crear el ambiente propicio para introducir los números enteros mediante situaciones problemáticas cotidianas donde sean éstos necesarios.

> Las aplicaciones y problemas no se deben reservar para ser considerados solamente después de que haya ocurrido el aprendizaje, sino que ellas pueden y deben utilizarse como contexto dentro del cual tiene lugar el aprendizaje. El contexto tiene un lugar preponderante en todas las fases del aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas, es decir, no sólo en la fase de aplicación sino en la fase de

[1] Las seis etapas planteadas en el libro "Números enteros" son:

1. El número relativo como relación en contextos concretos
2. De la relación útil a la relación-objeto. Contextos concretos con el número natural implícito.
3. El número relativo como objeto contextualizado.
4. Del número relativo al número entero.
5. El número entero como útil matemático.
6. El número entero como objeto matemático.

exploración y en la de desarrollo, donde los alumnos descubren o reinventan las matemáticas [6].

Para cumplir con éste objetivo, luego de haber trabajado lo suficiente con números naturales, y haber detectado posibles dificultades en la aprehensión de los números enteros, se diseñó un primer taller (ver anexo B B.1. Con éste también se pretende ejercitar la lectura comprensiva, partiendo de un fragmento de la historia de los números enteros.

Este primer taller y el siguiente, se aplicaron a una población de aproximadamente 116 estudiantes repartidos en tres grupos, 701, 702 y 703 de la Institución Educativa Distrital Arborizadora Baja jornada mañana, ubicada en la localidad 19 "Ciudad Bolívar". La población se caracteriza por pertenecer a los estratos socio-económicos 1 y 2 mayoritariamente y algunos pocos al estrato 3, con poco interés por la academia ya que ésta no representa para ellos una forma inmediata de ascender socialmente.
Luego de socializado el taller 1, se hizo una evaluación escrita (ver anexo B sección B.1.2).Se observó en la evaluación que algunos pocos estudiantes continuaron presentando las dificultades evidenciadas en el desarrollo del taller.

Posteriormente, se aplicó un taller más sobre números enteros y la adición (ver anexo B **??**), para afianzar y poner en contexto una vez más el uso de los números enteros. La evaluación que se hizo de este taller luego de haber sido socializado se inserta en el anexo B B.2.2.

Después se aplicará un tercer taller (Ver anexo B.3). En este taller, se hace un refuerzo de los temas tratados en los dos talleres aplicados y se hace una introducción a la multiplicación de números enteros, especialmente a la regla de los signos. Para ello, se proponen problemas (problemas 1-3 de la segunda parte) relacionados con el movimiento de un ciclista que se desplaza con determinada rapidez hacia la izquierda o hacia la derecha. Por convención se adopta que la rapidez es positiva cuando el ciclista se desplaza hacia la derecha y negativa cuando se desplaza hacia la izquierda. En cuanto al tiempo, se conviene en aceptar que es positivo después de que el ciclista pasa por el origen y que es negativo antes de que pase por el origen.

En el problema 1 de la segunda parte del taller, se propone una situación con unas preguntas tendientes a que el estudiante determine el producto de dos enteros positivos. En el problema 2 se presenta la misma situación con algunas variantes y con preguntas dirigidas a que el estudiante llegue concluya con el producto de un entero positivo por un negativo. En el problema 3, se propone una situación en la que necesariamente se llega al producto de dos negativos como solución.

Para atacar el problema propuesto, el cual tiene que ver con proponer estrategias de aprendizaje para la enseñanza-aprendizaje de la ley de los signos, se diseña el taller $n^\circ$ 4.

## 5.1. Taller 4 - Regla de los signos

### 5.1.1. Objetivos

- Presentar a los estudiantes la regla de los signos en diferentes contextos que sean significativos para ellos.

- Hacer uso de los operadores sobre segmentos orientados divisible, para presentar la regla de los signos y además usar algunas justificaciones tratadas en el capítulo 4

**Multiplicación de números enteros**

1. Supongan que un atleta viaja hacia la derecha (sentido positivo) a 4 kilómetros por hora. Si se encuentra en el origen. ¿Dónde se encontrará dentro de 5 horas?
   *a*) Representen esta situación sobre la recta numérica.
   *b*) Para saber dónde se encuentra el ciclista dentro de tres horas. ¿Qué operación matemática realizan?

2. Supongan que el atleta viene viajando hacia la derecha (sentido positivo) a 4 kilómetros por hora. Si en este momento se encuentra en el origen. ¿Dónde se encontraba hace tres horas?
   *a*) Representen esta situación sobre la recta numérica.
   *b*) Como es necesario saber dónde se encontraba el ciclista hace tres horas, consideren este tiempo pasado como negativo.
   *c*) Para saber dónde se encontraba el ciclista hace tres horas. ¿Qué operación matemática realizan?

3. Supongan que el atleta viene viajando hacia la izquierda (sentido negativo). Recorre 4 kilómetros por hora. Si en este momento se encuentra en el origen. ¿Dónde se encontraba hace tres horas?
   *a*) Representen esta situación sobre la recta numérica.
   *b*) Para saber dónde se encontraba el ciclista hace tres horas, ¿qué operación matemática realizan?

   **Multiplicación de números enteros de forma gráfica**

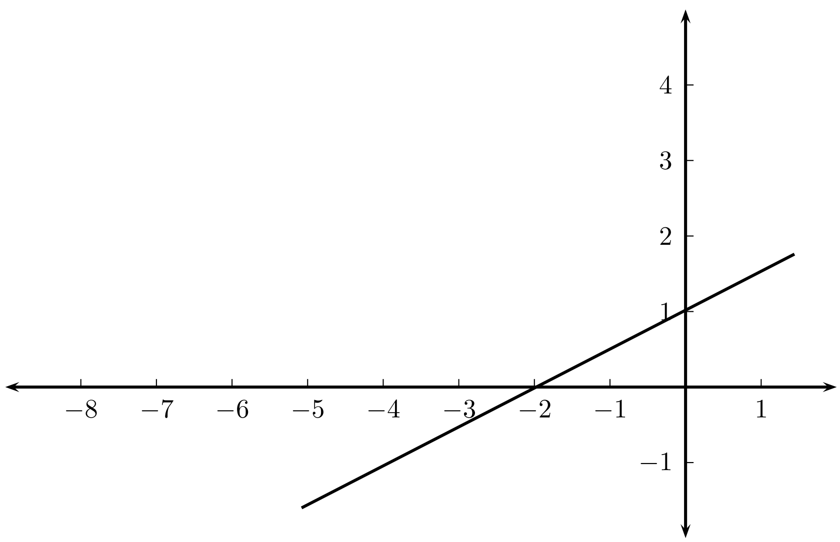
   Ahora bien, podemos multiplicar números enteros gráficamente. Para ello, se dibujan dos rectas numéricas perpendiculares que se corten en el origen de cada una. Las rectas numéricas perpendiculares se llaman ejes de coordenadas y el punto de corte también se llama origen. El eje horizontal también recibe el nombre de *eje $x$* o *eje de las abcisas* y el eje vertical *eje $y$* o *eje de las ordenadas*.

Un plano así construido con este marco referencial se llama *plano cartesiano*. Para multiplicar números enteros, solamente debemos saber ubicar los números involucrados sobre los ejes mencionados y trazar rectas paralelas como se muestra a continuación:

**Ejemplo 1**: Si queremos multiplicar el número entero $-2$ por el número entero 4, seguimos los siguientes pasos.

- Ubicamos el número $-2$ sobre el eje $x$, luego ubicamos la unidad sobre el eje $y$. (Figura **5-1**)
- Trazamos una recta que pase por $-2$ en el eje $x$ y por la unidad en el eje $y$.

**Figura 5-1**.: Recta que pasa por x=-2 y por y=1




- Ubicamos el número 4 que es el segundo factor sobre el eje $y$.
- Luego trazamos una recta paralela a la anterior que pase por el punto 4 ubicado sobre el eje $y$.
- El resultado se obtiene al verificar el punto de corte de la segunda recta trazada con el eje $x$ que en este caso se produce en $-8$. Luego el producto de $-2$ y 4 es $-8$ tal como aparece en la figura **5-2**

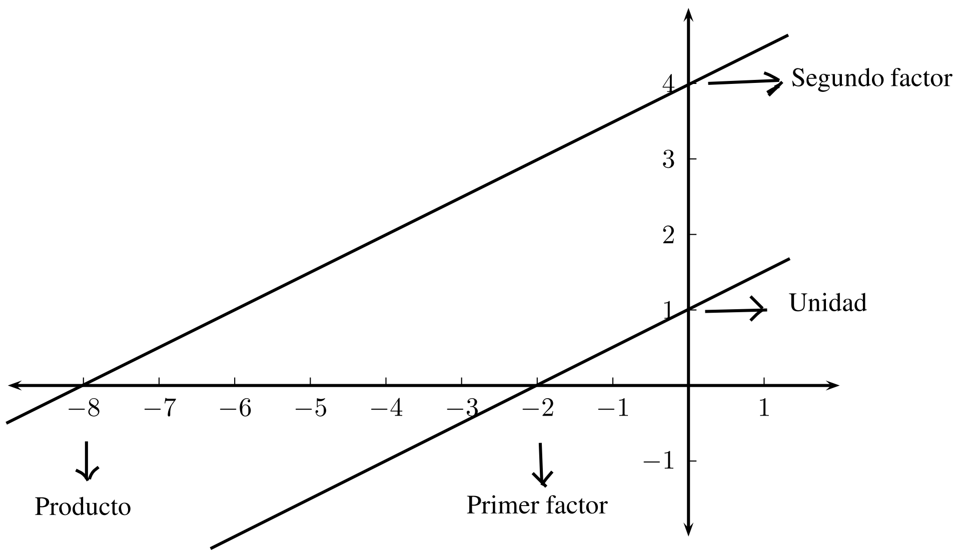
4. Usando el método expuesto anteriormente realice las siguientes multiplicaciones:

   *a*) $3 \times 4$ *c*) $3 \times -4$ *e*) $2 \times 3$ *g*) $2 \times -3$

   *b*) $-3 \times 4$ *d*) $-3 \times -4$ *f*) $-2 \times 3$ *h*) $-2 \times -3$

5. ¿Qué puedes concluir acerca del producto de dos números positivos?

**Figura 5-2**.: Ejemplo 1: Producto de -2 y 4




6. ¿Qué puedes concluir acerca del producto de un número positivo por un número negativo o viceversa?

7. ¿Qué puedes concluir acerca del producto de dos números enteros negativos?

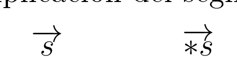
   **Otra manera de multiplicar enteros**

   Escogiendo un segmento horizontal orientado hacia la derecha de 1 cm, el cual vamos a designar como unidad y que simbolizaremos como $\overrightarrow{s}$, vamos a multiplicarlo por cualquier número natural, lo cual hará que el segmento se "estire" tanto como el número por el cual multiplicamos lo indique. Así como se observa en la gráfica **5-3**:

**Figura 5-3**.: Multiplicación del segmento unidad por 4

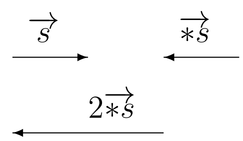

Ahora bien, si ese mismo segmento unidad se multiplica por $-1$ hará que el segmento unidad cambie de orientación; ahora estará orientado hacia la izquierda y lo simbolizaremos $\overrightarrow{*s}$.(figura **5-4**)

**Figura 5-4**.: Multiplicación del segmento unidad por $-1$



Se puede ahora multiplicar el segmento unidad dos veces o más por varios números así: $2(3(\overrightarrow{s}))$ con lo cual se obtiene el segmento $6\overrightarrow{s}$. Si multiplicamos el segmento unidad por $-1$ y luego por 2, se obtendrá el segmento $2(-1(\overrightarrow{s})) = 2(\overrightarrow{*s})$ es decir un segmento orientado hacia la izquierda.

**Figura 5-5.**: Multiplicación del segmento unidad por $-1$ y luego por 2




También se puede multiplicar el segmento unidad por 2 y luego por $-1$ con lo cual obtenemos el mismo resultado. Ahora si multiplicamos cualquier segmento por $-1$ hará que el segmento cambie de orientación no importando si está orientado hacia la derecha o hacia la izquierda, por ejemplo $-1(4(\overrightarrow{*s})) = 4(\overrightarrow{s})$ estará orientado hacia la derecha. Cualquier segmento multiplicado por un número negativo hará que éste cambie de orientación ya que un número negativo se puede considerar como el producto de un número positivo por $-1$. $(-3 = -1(3) = 3(-1))$ Por ejemplo el segmento $2\overrightarrow{*s}$ está orientado hacia la izquierda y al multiplicarlo por $-3$ se obtendrá el segmento $-3(2\overrightarrow{*s}) = -1(3(2\overrightarrow{*s})) = -1(6\overrightarrow{*s}) = 6\overrightarrow{s}$, orientado hacia la derecha.

8. Hacer los dibujos correspondientes a las siguientes situaciones:
   *a*) $2(3(\overrightarrow{s})$. ¿Hacia donde está orientado el segmento resultante?
   *b*) $-2(3\overrightarrow{s})$. ¿Hacia donde está orientado el segmento resultante?
   *c*) $2(-3\overrightarrow{s})$. ¿Hacia donde está orientado el segmento resultante?
   *d*) $-2(-3\overrightarrow{s})$. ¿Hacia donde está orientado el segmento resultante?
   *e*) $3(4\overrightarrow{*s})$. ¿Hacia donde está orientado el segmento resultante?
   *f*) $-3(4\overrightarrow{*s}$. ¿Hacia donde está orientado el segmento resultante?
   *g*) $3(4\overrightarrow{*s})$. ¿Hacia donde está orientado el segmento resultante?
   *h*) $-3(-4\overrightarrow{*s})$. ¿Hacia donde está orientado el segmento resultante?

9. ¿Que sucede si multiplicamos dos números enteros positivos?

10. ¿Qué signo tendrá el producto de dos números negativos?

11. ¿Qué signo tendrá el producto de un número entero positivo por un número entero negativo?

**Concluyamos**
El producto de dos números enteros es positivo si los dos factores tienen igual signo y es negativo si los dos factores tienen signos diferentes.

| | |
|---|---|
| $\mathbf{6 \times 3 = 18}$<br>$\mathbf{(-5) \times (-2) = 10}$ | El resultado es positivo porque los dos factores tienen igual signo |
| $\mathbf{4 \times (-7) = -28}$<br>$\mathbf{(-8) \times (3) = -24}$ | El resultado es negativo porque los dos factores tienen signos diferentes. |

**Tabla 5-1**.: Ejemplos

Este taller no se ha aplicado aún, pero se espera que los estudiantes logren dar significado a la regla de los signos en la multiplicación de números enteros y la sepan usar cuando la requieran.

# 6. Conclusiones y recomendaciones

## 6.1. Conclusiones

El desarrollo de este trabajo final de maestría complementa en gran medida la formación recibida durante estos dos años de estudio en la Universidad Nacional de Colombia en el programa de maestría en la "Enseñanza de las ciencias exactas y naturales", porque me permitió plasmar en éste una propuesta que venía madurando desde el semestre anterior sobre el proceso de enseñanza-aprendizaje de la ley de los signos. Ya desde el primer semestre me percaté de la importancia para la enseñanza, de la historia del desarrollo de los conceptos matemáticos, en el curso *historia y filosofía de las matemáticas* dictado por la profesora Clara Helena Sánchez.

El estudio que hice de la historia de los números enteros en el capítulo 2, me permitió entender la complejidad de lo que habitualmente se enseña en grado 7° y sobre lo cual poco se reflexiona. El desconocimiento de la historia ha sido un factor determinante en el anquilosamiento del profesor de secundaria, que encuentra más fácil apoyarse en los libros de texto tradicionales, que en las propias fuentes, donde tuvieron lugar el desarrollo de las ideas matemáticas, perdiéndose de la posibilidad de reconocer en este proceso histórico elementos que ayuden a mejorar su práctica.

También, el estudio de los aspectos disciplinares, junto con el estudio de los aspectos históricos relativos al tema de éste trabajo, me permitieron repensar y reflexionar sobre mi práctica diaria como maestro de matemáticas de nivel "elemental", al brindarme nuevos elementos que difícilmente se encuentran en los libros de texto usados tradicionalmente como apoyo. Con la ayuda de estos elementos nuevos recogidos y el entendimiento de la complejidad de los temas objeto de enseñanza elaboré la propuesta didáctica en el capítulo 5.

## 6.2. Recomendaciones

Como la propuesta didáctica se encuentra aún en etapa de implementación, las conclusiones derivadas de la aplicación de ésta, podrían dar lugar a un trabajo posterior. En cuanto a las estrategias de aprendizaje planteadas, éstas son susceptibles de mejora y de ampliación, ya que aquí, están restringidas principalmente a la enseñanza de la ley de los signos, y, para completar una unidad didáctica sobre los números enteros, debería prepararse un material similar para ser aplicado en una introducción más extensa de éstos y la adición, presentados en diferentes contextos, antes de pasar a abordar la multiplicación, como debe ser lo indicado, para que la transición del número natural al entero sea lo más cómoda posible para los estudiantes de grado 7°

# A. Anexo: Relación de equivalencia, clases de equivalencia y conjunto cociente

## A.1. Producto cartesiano

**Definición A.1.** *Dados dos conjuntos $A$ y $B$ se define el producto cartesiano $A \times B$ así:*

$A \times B = \{(x, y)|x \in A, y \in B\}$.

Para ilustrar, sean los conjuntos $N = \{2, 4, \}$ y $P = \{1, 3\}$ el producto cartesiano $N \times P$ estará conformado por 4 parejas donde las primeras componentes de cada pareja son elementos de $N$ y las segundas componentes son elementos de $P$. Es decir $N \times P = \{(2, 1), (2, 3), (4, 1), (4, 3)\}$.

## A.2. Relaciones

**Definición A.2.** *Se define una relación $R$ de un conjunto $A$ en un conjunto $B$ como un subconjunto del producto cartesiano $A \times B$; es decir*

*$R$ es una relación de $A$ en $B$ si $R \subseteq A \times B$.*

Como ejemplo, se tiene que el conjunto $R_1 = \{(2, 1), (4, 3), (2, 3)\}$ es un subconjunto de $N \times P$. y por tanto es una relación de $N$ en $P$. Se puede escribir que la pareja $(2, 1) \in R_1$ o simplemente $2\,R\,1$

Es posible definir una relación de $A$ en $A$. Una relación así definida, es un subconjunto del producto cartesiano $A \times A$ y se dice que la relación está definida en $A$. Si se toma el conjunto $D = \{0, 1, 2, 3, \ldots 8, 9\}$, el conjunto de dígitos, y se define la relación $R_2$ en $D \times D$ tal que $y = 2x$, se tiene que

$R_2 = \{(0, 0), (1, 2), (2, 4), (3, 6), (4, 8)\}$.

### A.2.1. Propiedades de las relaciones

**Definición A.3.** *Una relación definida en $A$ se llama reflexiva en $A$, si todo elemento de $A$ está relacionado mediante ella consigo mismo. Es decir:*

$R$ *es reflexiva en* $A \Leftrightarrow (\forall x \in A)(xRx)$

La relación $R_2$ definida en $D$, del ejemplo anterior no es reflexiva, en cambio la relación $R_3 = \{(x, y) \in D \times D \,|\, x \leq y\}$ si es reflexiva ya que para todo elemento $x \in D$, $x \leq x$.

**Definición A.4.** *Una relación definida en un conjunto $A$ es simétrica en $A$, si cada vez que un elemento está relacionado con otro, también el segundo lo está con el primero. Es decir:*

$R$ *es simétrica en* $A \Leftrightarrow (\forall x, y \in A)(xRy \to yRx)$

La relación $R_3$ no es simétrica ya que por ejemplo la pareja $(2, 4) \in R_3$ y la pareja $(4, 2) \notin R_3$. Si se define la relación $R_4 = \{(a, b), (a, c), (b, a), (c, a), (c, c)\}$ definida en $E = \{a, b, c\}$ se observa que si es simétrica.

**Definición A.5.** *Una relación definida en $A$ se dice que es transitiva si cada vez que un elemento esté relacionado mediante ella con un segundo y éste a su vez lo esté con un tercero, entonces también el primero está relacionado con el tercero; más precisamente:*

$R$ *es transitiva en* $A \Leftrightarrow (\forall x, y, z \in A)(xRy \text{ y } yRz \to xRz)$

Por ejemplo la relación $R_1$ no es transitiva, mientras que $R_3$ si es transitiva ya que si $x \leq y$ y $y \leq z$ entonces $x \leq z$.

### A.2.2. Relación de orden

Una relación $R$ definida en un conjunto $A$ es de orden si $R$ es reflexiva, antisimétrica y transitiva. La relación $\leq$ definida en los números naturales es una relación de orden porque verifica las tres propiedades mencionadas.

### A.2.3. Relación de equivalencia

Una relación definida en un conjunto A es de equivalencia si es reflexiva, simétrica y transitiva. Una relación de equivalencia típica es la igualdad. Por ejemplo si se define en $D$ la relación $R_5 = \{(x, y), x, y \in D \,|\, y = x\}$ la relación $R_5$ definida así es una relación de equivalencia porque satisface las propiedades reflexiva, simétrica y transitiva.

## A.3. Partición de un conjunto en clases de equivalencia mediante una relación

**Definición A.6.** *Dada una relación de equivalencia $R$ en un conjunto no vacío $A$, una "partición" de $A$ consiste en una colección no vacía $C$ de subconjuntos de $A$ con las propiedades siguientes:*

*(i)* $X \in C \to X \neq \emptyset$

*(ii)* $X, Y \in C \wedge X \neq Y \to X \cup Y = \emptyset$

*(iii)* $\bigcup_{X \in C} X = A$

*La propiedad (iii) indica que la unión de todos los subconjuntos $X \in C$ es igual a $A$*

## A.4. Clases de equivalencia

La relación $\sim$ definida en 3.5 es una relación de equivalencia y ésta relación genera un partición de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ en clases disyuntas dos a dos. En la figura 3-1, se observan dos clases disyuntas, la clase del 0 y la clase del 1. A la clase del 0 pertenecen todas las parejas de la forma $(a, a)$ y a la clase del 1 pertenencen todas las parejas de la forma $(a+1, a)$ con $a \in \mathbb{N}$.

**Definición A.7.** *Sea $R$ una relación de equivalencia definida en un conjunto $A$ no vacío y sea $a$ un elemento cualquiera de $A$; se llama clase de equivalencia de $a$ (con respecto a la relación $R$) al conjunto constituido por todos los elementos de $A$ que están relacionados con $a$ mediante $R$.*

La clase de $a$ según la relación $R$ se denota $[a]_R$ o simplemente $[a]$. Si se toma la relación $R_6 = \{(a, a), (a, b), (b, b), (b, a), (c, c)\}$ definida en $E = \{a, b, c\}$ las clases de equivalencia determinada por ella son:

$[a] = \{a, b\} = [b] \qquad \text{y} \qquad [c] = \{c\}.$

Se observa que la relación $R_6$ genera una partición de $E$ en dos clases disyuntas, la clase $[a] = [b]$ y la clase $[c]$, es decir la relación $R_6$ genera la partición

$E/R_6 = \{a, b, c\}/R_6 = \{\{a, b\}, \{c\}\}$

sobre el conjunto $E$. Al conjunto $E/R_6$ se le denomina conjunto cociente.

Las clases de equivalencia, gozan de propiedades interesantes. Por ejemplo son no vacías, ya que para todo $a \in A$, $a \in [A]_R$. Son recubridoras porque todo elemento de $A$ está en al menos una clase de equivalencia, a saber en la clase de el mismo ya que $a \in [A]_R$. Son disyuntas dos a dos, es decir, si $[a]_R \neq [b]_R$ entonces $[a]_R \cap [B]_R = \emptyset$. Efectivamente, suponiendo $[a]_R \neq [b]_R$, esto es equivalente a decir que "no" $aRb$. Ahora bien, por contradicción, se supone que $[a]_R \cap [b]_R \neq \emptyset$: entonces existe $x \in ([a]_R \cap [b]_R)$ y se tiene $xRa$ y $xRb$. Como $R$ es simétrica, de $xRa$ se deduce $aRx$, y como $R$ es transitiva, de $aRx$ y $xRb$ se deduce $aRb$, lo que resulta en contradicción (con "no" $aRb$).

# B. Anexo: Talleres y evaluaciones

## B.1. Taller 1: Números enteros

### B.1.1. OBJETIVOS

- Reforzar la comprensión lectora, necesaria en la metodología de resolución de problemas.
- Presentar a los estudiantes situaciones relativamente cercanas que requieren del uso de los números enteros.
- Indagar por preconceptos e ideas previas que puedan tener los estudiantes respecto a los números enteros.

**¿SABÍAS QUÉ...?**
Las actividades comerciales han estado presentes en el origen de muchas actividades matemáticas. ¿A quién podría interesar más saber de números que a un comerciante o a un prestamista? Se sabe que hace más de 4000 años los babilonios usaron sus conocimientos matemáticos para calcular los intereses que debía pagar alguien que recibía un préstamo. Por cierto, parece que eran bien usureros.
Durante siglos, los matemáticos fueron conscientes de que algunos problemas no podían resolverse sin recurrir a algún tipo de número que nadie había definido todavía y que son los que ahora llamamos *NEGATIVOS*.
Uno de los primeros europeos que fue capaz de dar algún significado a los números negativos ($Z^-$) fue Leonardo de Pisa, también conocido como Fibonacci. La idea surgió cuando trataba de resolver un problema económico imposible de solucionar si no se admitía como resultado un $Z^-$. "El problema - dijo - no tiene solución a menos que se admita que el primer hombre tenía una deuda".

Responde el cuestionario siguiendo la instrucción: encierra en un círculo la letra F, si la proposición es falsa, la letra V, si es verdadera y la letra N si no aparece en el texto.

1. Leonardo de Pisa fue un conocido prestamista italiano. F V N
2. Hace ya cuatro siglos que los babilonios usaban su conocimiento matemático para calcular los intereses que pagaba algún prestamista. F V N

3. Los babilonios fueron los creadores de los $Z^{-}$ F V N
4. A los comerciantes y prestamistas antiguos poco o nada les importó saber de números. F V N
5. Fibonacci dio un significado claro a los $Z^{-}$ F V N
6. Los prestamistas babilonios practicaron la usura. F V N
7. Muchas actividades matemáticas han estado ligadas al comercio.F V N
8. La actividad comercial, realmente es poco lo que ha contribuido al desarrollo de las matemáticas. F V N
9. El número negativo se puede expresar por ejemplo, que uno tiene una deuda. F V N
10. Los matemáticos antiguos tuvieron muchas dificultades para manejar los préstamos que hacían a las personas. F V N

**ACTIVIDADES PRÁCTICAS**

11. ¿Qué temperatura está marcando un termómetro si:
    *a*) Marcaba 15℃ y disminuyó 12℃?
    *b*) Marcaba 10℃ bajo cero y aumentó 7℃?
    *c*) Marcaba 18℃ y aumentó 7℃?
    *d*) Marcaba 6℃ bajo cero y disminuyó 5℃?
12. Escribe una situación que pueda representar cada número
    *a*) -12 m ______________________________
    *b*) 10 ℃ ______________________________
    *c*) 30 k/h ______________________________
    *d*) $ -586 ______________________________
13. Estima la temperatura de los elementos de la derecha y luego aparéalos con la temperatura aproximada, de la columna de la izquierda

| | |
|---|---|
| 1200℃ | Temperatura del cuerpo humano |
| -30℃ | temperatura de la superficie del sol |
| 3℃ | temperatura de un congelador |
| 5750℃ | temperatura en Siberia |
| 37℃ | temperatura de una nevera |
| -50℃ | temperatura de la lava de un volcán |

14. Analiza cuáles afirmaciones son verdaderas y cuáles son falsas. Explica cada caso sobre una recta numérica:
    *a*) 5 está a la derecha de -3
    *b*) -2 está a la izquierda de 6
    *c*) -6 está a la derecha de -4
    *d*) -7 está a la izquierda de -6
    *e*) Entre 5 y 3 hay 2 unidades de distancia.
    *f*) La distancia entre -2 y 2 es de 2 unidades.
    *g*) De cero a -5 la distancia es de 5 unidades.
    *h*) Entre -3 y 8 la distancia es de 5 unidades.

15. Observa los periodos en que se ubican las culturas antiguas y responde las preguntas
    - Grandes culturas de Mesopotamia: 200 a 500 a. de C.
    - Cultura superior egipcia: 1800 a 525 a. de C.
    - La civilización del oriente antiguo: 3000 a. de C. al 1000 d. de C.

    *a*) ¿Cuál es el punto de referencia para la ubicación de las culturas?
    *b*) ¿Qué año se encuentra después del 500 a. de C.?
    *c*) ¿Qué año está antes de 1326 a. de C.?
    *d*) ¿Qué puedes concluir al respecto del orden en los números $Z^-$?

16. Un gusano sube por una pared lisa. Si por cada 3 cm que avanza se desliza 2 cm, ¿al cabo de cuántos intentos logra trepar 5 cm?

17. Buscando una dirección, Luis caminó inicialmente 5 cuadras, pero como no la encontró retrocedió 3 cuadras y avanzó una más, ¿a cuántas cuadras quedó de donde inició su búsqueda?

18. A las 6:00 a.m. el termómetro marca -8°C. A las 10:00 a.m. la temperatura es 20°C más alta y después de esta hora hasta las 9:00 p.m. bajó 6°C. Expresa la temperatura a las 9:00 p.m.

### B.1.2. Evaluación del taller 1

Después de realizado el taller 1, se socializó con los estudiantes, se discutieron algunas soluciones a los problemas y/o ejercicios y luego de una retroalimentación, se aplicó la siguiente evaluación.

Nombre: .................................... Curso: ...... Fecha: ........................

1. ¿Qué temperatura está marcando un termómetro si:
   *a*) Marcaba 18℃ y disminuyó 12℃? ..........................................
   *b*) Marcaba 12℃ bajo cero y aumentó 5℃? ..................................
   *c*) Marcaba 25℃ y aumentó 4℃? ..............................................
   *d*) Marcaba 8℃ bajo cero y disminuyó 6℃? ..................................
2. Escribe una situación que pueda representar cada número
   *a*) -15 m ..........................................................................
   *b*) 12℃ ..........................................................................
   *c*) 30 k/h ........................................................................
   *d*) $ -5860 .......................................................................
3. Estima la temperatura de los elementos de la derecha y luego aparéalos con la temperatura aproximada, de la columna de la izquierda

| | |
|---|---|
| 1200℃ | Temperatura del cuerpo humano |
| -30℃ | temperatura de la superficie del sol |
| 3℃ | temperatura de un congelador |
| 5750℃ | temperatura en Siberia |
| 37℃ | temperatura de una nevera |
| -50℃ | temperatura de la lava de un volcán |

4. Analiza cuáles afirmaciones son verdaderas y cuáles son falsas. Explica cada caso sobre una recta numérica:
   *a*) 6 está a la derecha de -4 ..................................................
   *b*) -4 está a la izquierda de 3 ................................................
   *c*) -8 está a la derecha de -6 .................................................
   *d*) Entre 5 y 3 hay 2 unidades de distancia. ....................................
   *e*) La distancia entre -2 y 2 es de 2 unidades. .................................
   *f*) De cero a -5 la distancia es de 5 unidades. ..................................
   *g*) Entre -3 y 8 la distancia es de 5 unidades. ..................................
5. ¿Qué año se encuentra después del 600 a. de C.? ................................

6. ¿Qué año está antes de 1356 a. de C.? ..................................................

7. ¿Qué puedes concluir al respecto del orden en los números $Z^{-}$? ......................

8. Un gusano sube por una pared lisa. Si por cada 4 cm que avanza se desliza 2 cm, ¿al cabo de cuántos intentos logra trepar 7 cm? ........................................

9. Buscando una dirección, Luis caminó inicialmente 8 cuadras, pero como no la encontró retrocedió 4 cuadras y luego retrocedió 6 cuadras más, ¿a cuántas cuadras quedó de donde inició su búsqueda? ........................................................

10. A las 6:00 a.m. el termómetro marca -6°C. A las 10:00 a.m. la temperatura es 15°C más alta y después de esta hora hasta las 9:00 p.m. bajó 12°C. Expresa la temperatura a las 9:00 p.m. ..............................................................

### B.1.3. Análisis de resultados - Taller 1

Después de aplicado el taller, se observó que la mayoría de estudiantes tienen serias dificultades en la comprensión lectora, factor que dificulta el proceso de enseñanza-aprendizaje en todas las áreas de la educación básica y media. Esto es etendible en la medida en que muchos estudiantes del grado presentaron bajo rendimiento académico el año anterior al cambiarse de un sistema de evaluación permisivo que admitía la denominada "promoción automática" (Decreto 230 de 2002) [1] a un sistema de evaluación institucional, que acordado con la comunidad educativa elevó los niveles de exigencia, apoyados en el decreto 1290 [2]. El año escolar inmediatamente anterior se caracterizó por unos altos índices de repitencia no solamente a nivel institucional, sino también a nivel distrital y nacional.

Pese a las dificultades con la comprensión lectora, la mayoría de los estudiantes respondieron acertivamente al taller. Las dificultades se presentaron en determinados puntos; por ejemplo en el punto 11, en el cual había que indicar la temperatura que está marcando un termómetro después de ciertas variaciones en la temperatura (aquí se presenta de manera implícita la adición de enteros), muy pocos estudiantes tuvieron dificultades; por el contrario en el punto 12, donde se presentaban números enteros a los que había que asociarles situaciones, muchos estudiantes tuvieron dificultades. Se evidencia entonces que para ellos, es más difícil proponer situaciones que se puedan representar con números enteros y les es más fácil el proceso

[1] El decreto 230 de 2002 obligaba a las instituciones educativas a promover al 95 % de los estudiantes de una institución educativa

[2] El decreto 1290 expedido en el 2009, deroga en su artículo 19 el decreto 230 de 2002 y brinda la autonomía para que las instituciones educativas diseñen un sistema de evaluación institucional de acuerdo a sus necesidades y a su PEI (Proyecto Educativo Institucional)

inverso; es decir, dada una situación encontrar los números adecuados para describirla.

En el punto 15 no se presentaron mayores dificultades, en el cual se pide a los estudiantes determinar qué número está a la derecha o a la izquierda en la recta numérica, dados dos números enteros. Con relación a la pregunta 15 donde se indagaba por la relación de orden en los enteros usando la secuenciación de los años en dos eras, antes de Cristo y después de Cristo se observaron algunas dificultades ya que implícitamente se está trabajando con la relación de orden. Algunos estudiantes llegaron a conclusiones interesantes después de la socialización del taller. Hubo conclusiones del tipo: "El antes es el después y el después es el antes", refiriéndosen al orden en la secuenciación de los años en el período antes de Cristo y por tanto concluyendo que el orden en los negativos es completamente diferente al orden en los enteros positivos.

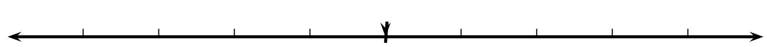
## B.2. Taller 2

### B.2.1. Objetivos

- Continuar familiarizando a los estudiantes con los números enteros y la adición presentados en diferentes contextos
- Presentar situaciones problemáticas relacionadas con la adición de números enteros.
- Trabajar la relación de orden en los números enteros.
- Enfatizar en las propiedades de los números enteros con la adición.

1. Ubica en la recta numérica los siguientes enteros: -1, 0, -3, 4, 2, 1, -2,

**Figura B-1**.: Recta numérica



2. Anota el opuesto simétrico de :

   *a*) -3 opuesto _____

   *b*) 8 opuesto _____

   *c*) -4 opuesto _____

   *d*) 15 opuesto _____

   *e*) -6 opuesto _____

   *f*) 0 opuesto _____

   *g*) $a$ opuesto _____

   *h*) $-b$ opuesto _____

3. Escribe el entero que representa las siguientes situaciones:

   *a)* 3 grados bajo cero: _____
   *b)* Debo \$ 2.000: _____
   *c)* 4 grados sobre cero: _____
   *d)* Tengo \$ 10000 en la cuenta: _____
   *e)* 25 metros de profundidad: _____
   *f)* 80 metros de altura: _____
   *g)* 6 metros a la derecha: _____
   *h)* 3.000 años antes de Cristo: _____
   *i)* 10 metros a la izquierda: _____
   *j)* 2011 después de Cristo: _____

4. Escribe el signo $<$, $>$ o $=$ según corresponda

   *a)* -3 _____ 3
   *b)* -6 _____ -1
   *c)* 5 _____ 0
   *d)* -2 _____ 0
   *e)* 6 _____ +6
   *f)* 0 _____ |-8|
   *g)* 0 _____ +8
   *h)* -4 _____ +4
   *i)* -9 _____ 0
   *j)* -1 _____ -1.000
   *k)* |-3| _____ |+3|
   *l)* |-6| _____ |+2|

5. Ordena de menor a mayor estos conjuntos:
   *a)* $A = \{-5, 4, 0, -7, 3\}$ $A = \{ \qquad \}$
   *b)* $B = \{-5, 4, 0, -7, 3\}$ $B = \{ \qquad \}$
   *c)* $C = \{-15, -6, -2, -100, -1\}$ $C = \{ \qquad \}$

6. Ordena de mayor a menor estos conjuntos:
   *a)* $D = \{18, -14, 26, -32\}$ $D = \{ \qquad \}$
   *b)* $E = \{-48, -35, -94, -76\}$ $E = \{ \qquad \}$

7. Dadas las siguientes temperaturas de cinco días de la semana registradas en cierta ciudad del Sur de Chile. Responde:

| Temperaturas | Lunes | Martes | Miércoles | Jueves | Viernes |
|---|---|---|---|---|---|
| Máxima ℃ | 8 | 10 | 0 | -3 | 15 |
| Mínima ℃ | 0 | 3 | -1 | -7 | 7 |

   *a)* ¿Qué día se produjo la menor de las temperaturas mínimas? ...................
   *b)* ¿Cuál fue la mayor de las temperaturas máximas? .............................
   *c)* Ordena las temperaturas mínimas de menor a mayor. ..........................
   *d)* Ordena las temperaturas máximas de mayor a menor. ..........................

8. Resuelve las siguientes adiciones:

a) 2 + 5 = ______________
b) -7 + -3 = ______________
c) 6 + -4 = ______________
d) -4 + 8 = ______________
e) -10 + -20 = ______________
f) 10 + -30 = ______________
g) -18 + 24 = ______________
h) 100 + -32 = ______________
i) 238 + 136 = ______________
j) -529 + -469 = ______________
k) 800 + -468 = ______________
l) 357 + -900 = ______________
m) 5 + -3 + 10 = ______________
n) -8 + -12 + 10 + -13 + -15 = ____________________________

9. Anota el número de la columna "A" que corresponda en la "B"

| | A | B |
|---|---|---|
| 1) | $5 + 0 = 5$ | ......Conmutativa |
| 2) | $2 + (-3) = -3 + 2$ | ......Asociativa |
| 3) | $7 + (-7) = -7 + 7 = 0$ | ......Neutro aditivo |
| 4) | $(-4 + 6) + (-2) = -4 + (6 + (-2))$ | ......Inverso aditivo |

10. Escribe el nombre de las siguientes propiedades de la adición:

a) $a + 0 = a$ ______________
b) $a + (b + c) = (a + b) + c$ ______________
c) $a + b = b + a$ ______________
d) $a + -a = 0$ ______________

11. Resuelve las siguientes adiciones usando la propiedad asociativa:

a) -3 + 4 + -8 = ________________________
b) 6 + -5 + -2 + 9 =________________________
c) -1 + 2 + -3 + -4 + 5 = ________________________
d) -10 + l5 + 34 + -28 + 60 = ________________________

12. Resuelve las siguientes proposiciones abiertas de adición:

a) $+9 + \square = 5$
b) $+1 + \square = -3$
c) $(-8) + \square = 0$
d) $\square + (-7) = -4$

13. Resuelve las siguientes sustracciones

a) 9 - 5 = ________________________
b) -6 - ( -4) = ________________________

c) -2 - 7 = ______________________

d) 5 - (-1) = ______________________

e) 18 - 30 = ______________________

f) -24 - ( -19) = ______________________

g) -89 -56 = ______________________

h) 67 - (-33) = ______________________

i) 234 - (-500) = ______________________

j) -538 - 700 = ______________________

k) -800 - ( -208) = ______________________

l) 600 - 209 = ______________________

m) -10 - (-8) - (-15) = ______________________

n) -7 - 3 - (-10) - 15 = ______________________

ñ) 12 - (-8) - (-3) - 5 - (-4) = ______________________

14. Resuelve estos ejercicios combinados de adición y sustracción:

a) 3 + 5 - 8 + 4 - 9 ______________________

b) 6 - 9 + 4 - 5 + 8 - 3 + 7 ______________________

c) 9 - 8 + 7 - 6 + 5 - 4 + 3 - 2 + 1 ______________________

15. Resuelve estos ejercicios combinados con uso de paréntesis:

a) $-6-(-2+1)+8=$ ______________________

b) $-8-[15-(3-7)-10]=$ ______________________

c) $-7-\{-3[-5(1-9)+4]-6\}+8=$ ______________________

16. Resuelve estos problemas, anotando la operación y la respuesta:

a) Si pierdes 15 láminas en un juego y 18 láminas en otro. ¿ Cuántas láminas has perdido en total?

b) Un equipo de fútbol tiene 8 goles a favor y en otro partido hizo 5 goles más ¿Cuántos goles tiene en total?

c) Un submarino descendió 46 metros y luego subió 18 metros. ¿ A qué profundidad se encuentra?

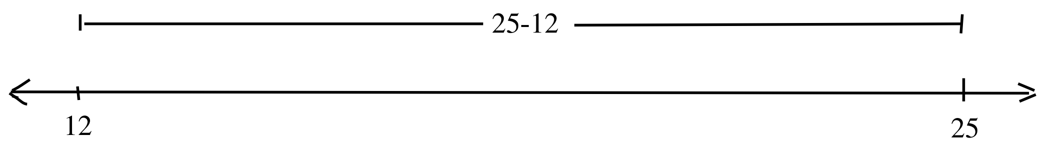
17. Las temperaturas máximas y mínimas de tres días fueron las siguientes:

| Día | temperatura mínima en ℃ | temperatura máxima en ℃ |
|---|---|---|
| 1 | 12 | 25 ℃ |
| 2 | 15 | 27 |
| 3 | 10 | 23 |

*a*) ¿Cómo se calcula habitualmente la diferencia de temperaturas en un día?

*b*) Representa en una recta numérica, como se muestra a continuación, el resultado de la diferencia de temperatura en cada día.

**Figura B-2.**: Diferencia de temperatura en el día 1




*c*) Escribe las operaciones aritméticas que permiten encontrar los resultados. Por ejemplo, en el primer caso $25 - 12 = 13$

*d*) Encuentra la diferencia entre la máxima y la mínima en los siguientes tres casos:

| Temperatura mínima | temperatura máxima |
|---|---|
| 0 | 10 |
| -4 | 5 |
| -8 | 3 |

*e*) Realiza los cálculos apoyándose en una representación gráfica en la recta numérica.

18. Resuelve los siguientes problemas

*a*) Santiago tuvo ayer una temperatura de 3℃ bajo 0 en la mañana y en la tarde subió 18℃. ¿Cuál fue la temperatura alcanzada.

*b*) Una sustancia química que está a 5℃ bajo cero se calienta en un mechero hasta que alcanza una temperatura de 12℃ sobre cero. ¿Cuántos grados subió?

*c*) María deposita el día lunes, en su libreta de ahorros, cuyo capital ascendía a \$123.000, la cantidad de \$12.670. El día miércoles por una urgencia, realiza un giro de \$ 56.000. ¿Cuál es el nuevo capital que posee?. Escribe la operación utilizando números enteros.

*d*) En invierno en cierto lugar del sur de Chile la temperatura a las 16 horas fue de 12℃. A las 3 de la mañana hubo un descenso de 17℃. ¿Cuál fue la temperatura registrada a esa hora?

*e*) Un submarino de la flota naval, desciende a 50 metros bajo el nivel del mar y luego desciende 20 metros más . Entonces queda a una profundidad de ________ *f*) Calcula tu edad hasta el año 2004

*g*) ¿Cuántos años transcurrieron desde la muerte de Julio César (año 44 A.de C.) hasta la caída del Imperio Romano de Occidente (año 395 D. de C.)

*h*) Euclídes, geómetra griego, nació en el año 306 A de C y murió en el año 283 A. de C. ¿Qué edad tenía cuando murió ?

*i*) La invención de la escritura data del año 3.000 A de C. ¿Cuántos años han transcurrido hasta hoy?

*j*) En cada una de las siguientes actividades imagina que partes del número cero y que cada paso avanzas un número entero:

1) Retrocedes 5 pasos y avanzas 3 pasos. ¿En qué punto te encuentras?
2) Avanzas 10 pasos y retrocedes 8 pasos. ¿En qué punto te encuentras?
3) Avanzas 2 pasos y retrocedes 2. ¿En qué punto te encuentras?
4) Si avanzas 13 pasos. ¿Cuántos pasos debes retroceder para llegar al punto $-5$?

*k*) ¿Cuál es la diferencia de nivel entre un punto que está a 1.500 metros sobre el nivel del mar y otro que está a 300 metros bajo el nivel del mar?

*l*) En Calama la temperatura de hoy fue de 8℃ sobre 0 en la tarde y 5℃ bajo 0 en la noche. ¿En cuántos grados varió la temperatura?

*m*) Un auto está ubicado a 7 m a la derecha de un punto A, luego avanza 23 m, retrocede 36 m, vuelve avanzar 19 m y retrocede 36 m. ¿A qué distancia del punto A se encuentra?

*n*) Dada la siguiente serie numérica: $\ldots -7, -4, -1, 2, 5, \ldots$ ¿Cuál es la suma del número entero anterior a $-7$ con 5?

*ñ*) En la primera parada de un bus suben 7 personas, en la segunda suben 5 y bajan 2, en la tercera suben 9 y baja 1, en la cuarta parada baja la mitad de los pasajeros. ¿Cuántos pasajeros quedan en el bus?

*o*) ¿Cuántos números enteros hay entre dos números enteros consecutivos?

*p*) Encuentra el valor de las siguientes expresiones, sabiendo que: $a = 2$, $b = -5$ y $c = 4$

1) $a + b + c$
2) $a - b + c$
3) $a - b - c$
4) $a + b - c$

Luego de socializar la solución a los problemas y/o ejercicios del taller, se aplicó una evaluación escrita que se presenta a continuación.

## B.2.2. Evaluación del taller 2

Nombre: ........................................Curso: ......Fecha: ..................

1. Escribe el entero que representa las siguientes situaciones:

   a) 50 m de altura _____
   b) Debo \$3.275 _____
   c) 13 grados bajo cero _____
   d) 450 años A.C. _____
   e) 2500 años D.C._____
   f) 28 m de profundidad _____

2. Escribe el signo $<$, $>$ ó $=$ según corresponda:

   a) 3 ___ 5
   b) 4 ___ 0
   c) 0 ___ 12
   d) -2 ___ 0
   e) 0 ___ -3
   f) -6 ___ -2
   g) -8 ___ -15
   h) $|-3|$ ___ $|3|$
   i) $|4|$ ___ $|-4|$

3. Ordena de menor a mayor los siguientes conjuntos

   a) $A = \{10, -10, 15, -2, 0, 30, -25\}$ ______________________________
   b) $B = \{-3, 5, 0, -12, 15, -18, 20\}$ ______________________________

4. Anota el opuesto simétrico de los siguientes enteros:

   a) 10 opuesto _____
   b) $-12$ opuesto _____
   c) 0 opuesto _____
   d) $|-3|$ opuesto _____
   e) $a$ opuesto _____
   f) $-x$ opuesto _____

5. Dadas las siguientes temperaturas de cinco días de la semana registradas en cierta ciudad del Sur de Argentina. Responde:

| Temperatura | Lunes | Martes | Miércoles | Jueves | Viernes |
|---|---|---|---|---|---|
| Máxima ℃ | 12 | 10 | 18 | 9 | -1 |
| Mínima ℃ | 0 | -2 | -5 | -8 | -10 |

   a) ¿Qué día se produjo la menor de las temperaturas mínimas? ______________
   b) ¿Cuál fue la mayor de las temperaturas máximas? ______________
   c) Ordena las temperaturas mínimas de menor a mayor. ______________
   d) Ordena las temperaturas máximas de mayor a menor. ______________
   e) Calcula la diferencia de temperaturas los días miércoles y viernes
      Miércoles: ______________
      Viernes: ______________

6. Resuelve estos problemas, anotando la operación y la respuesta:
   a) Si pierdes 13 láminas en un juego y 17 láminas en otro. ¿Cuántas láminas has perdido en total?
   :______________________________
   b) Un equipo de fútbol tiene 8 goles a favor y en otro partido recibió 15 y anotó 5 goles. ¿Cuántas goles tiene a favor en total?__________________
   c) Un submarino descendió 36 metros y luego subió 15 metros. ¿A qué profundidad se encuentra?
   :______________________________

7. Una sustancia química que está a 12℃ bajo cero se calienta en un mechero hasta que alcanza una temperatura de 25℃ sobre cero. ¿Cuántos grados subió? __________

8. ¿Cuántos años transcurrieron desde la muerte de Alejandro Magno (año 323 A.C.) hasta el nacimiento de Galileo Galilei (año 1564 D.C.)? _______________

9. Escribe un conjunto de números enteros negativos que sean menores que $-12$ y mayores o iguales que $-20$.______________________________

10. ¿Cuál es la diferencia de nivel entre un punto que está a 2.500 metros sobre el nivel del mar y otro que está a 145 metros bajo el nivel del mar? _______________

### B.2.3. Análisis de resultados - taller 2

La aplicación de este taller evidencia nuevamente la falta de comprensión lectora de la mayoría de los estudiantes. También se evidencian dificultades en hallar variaciones de temperatura, altura, etc en ciertos problemas, sobre todo cuando el dato inicial es menor que el dato final lo cual a su vez evidencia dificultades con el manejo de los números negativos.
En vista de las dificultades detectadas en la aplicación de los dos talleres anteriores, se propone un tercer taller de refuerzo que será aplicado posteriormente.

## B.3. Taller 3: Refuerzo sobre talleres 1 y 2 e introducción a la multiplicación de enteros

### B.3.1. Objetivos

- Hacer un refuerzo de los temas tratados en los talleres 1 y 2
- Presentar una introducción a la multiplicación de números enteros

- Mediante situaciones problemáticas, hacer una pequeña introducción a la regla de los signos.

Nombre: ................................... Curso: ...... Fecha: ........................

**REPASO DE NÚMEROS ENTEROS**

Al sumar dos números enteros debes tener presente:

- Si los dos enteros son positivos, el resultado de la suma es otro entero positivo.
- Si los dos enteros son negativos, deben sumar los valores absolutos de los números y colocar el signo negativo al resultado.
- Si los dos enteros tienen diferente signo, la suma se obtiene de sumar del entero de mayor valor absoluto, el entero de menor valor absoluto. En el resultado se escribe el signo del entero con mayor valor absoluto.

La adición de números enteros cumple las siguientes propiedades:

- *Clausurativa.* Si $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$ son números enteros

  $\boldsymbol{a+b}$

  es otro número entero.

- *Conmutativa.* Si $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$ son números enteros

  $\boldsymbol{a+b=b+a.}$

- *Asociativa.* Si $\boldsymbol{a,b,c}$ son números enteros

  $\boldsymbol{(a+b)+c=a+(b+c)}$

- *Modulativa.* Para todo entero $\boldsymbol{a}$, se cumple que:

  $\boldsymbol{a+0=0+a=a.}$

- *Inverso aditivo.* Para todo entero $\boldsymbol{a}$, existe $\boldsymbol{-a}$ tal, que:

  $\boldsymbol{a+(-a)=(-a)+a=0}$

1. Digan cuáles de las siguientes afirmaciones son verdaderas y cuáles falsas. En caso de ser falsas presenten un contra-ejemplo de la afirmación.
   *a*) La suma de dos enteros positivos es un número positivo. ..........
   *b*) La suma de dos enteros negativos es un número positivo. ..........
   *c*) La suma de dos enteros de diferente signo es un número positivo. . .
   *d*) La suma de dos enteros de diferente signo es un número negativo. .
   *e*) La suma de dos enteros negativos es un número negativo. .........
2. Reflexionen sobre los siguientes interrogatorios y contéstenlos con ejemplos que afirmen su respuesta:
   *a*) ¿La suma de dos números enteros será otro número entero? ........
   *b*) Si a un número entero cualquiera le suma el número cero, ¿cuál es el resultado? ......................
   *c*) ¿Qué entero deben sumar a 5 para obtener cero? ..................

d) ¿Qué entero deben sumar a -3 para obtener cero? ...................

e) ¿La suma de dos enteros será conmutativa? ......................

f) ¿La suma de dos enteros será asociativa? ........................

3. Completa los siguientes enunciados:

a) El inverso aditivo de $\mathbf{4}$ es: .......

b) El módulo de la adición en los números enteros es: .............

c) La propiedad que se cumple en

$$\mathbf{4 + 10 = 10 + 4}$$

es: ............................

## INTRODUCCIÓN A LA MULTIPLICACIÓN DE NÚMEROS ENTEROS

1. Supongan que un ciclista viaja hacia la derecha (sentido positivo) a 20 kilómetros por hora. Si se encuentra en el origen. ¿Dónde se encontrará dentro de 3 horas?

a) Representen esta situación sobre la recta numérica.

b) Para saber dónde se encuentra el ciclista dentro de tres horas. ¿Qué operación matemática realizan?

2. Supongan que el ciclista viene viajando hacia la derecha (sentido positivo) a 20 kilómetros por hora. Si en este momento se encuentra en el origen. ¿Dónde se encontraba hace tres horas?

a) Representen esta situación sobre la recta numérica.

b) Como es necesario saber dónde se encontraba el ciclista hace tres horas, consideren este tiempo pasado como negativo.

c) Para saber dónde se encontraba el ciclista hace tres horas. ¿Qué operación matemática realizan?

3. Supongan que el ciclista viene viajando hacia la izquierda (sentido negativo). Recorre 20 kilómetros por hora. Si en este momento se encuentra en el origen. ¿Dónde se encontraba hace tres horas?

a) Representen esta situación sobre la recta numérica.

b) Para saber dónde se encontraba el ciclista hace tres horas, ¿qué operación matemática realizan?

4. Analicen si los siguientes enunciados son falsos o verdaderos. De ser verdaderos ilustren con ejemplos e indiquen el nombre de la propiedad que se está cumpliendo. Si es falso den un contraejemplo.

a) El producto de dos números enteros es siempre otro número entero.

b) El orden de los factores en la multiplicación de enteros no altera el producto.

c) Al multiplicar cualquier entero por 1 el producto es igual al entero dado.

d) Al multiplicar tres enteros, el resultado no depende de la forma como se asocien los factores.

*e*) Si tengo un entero $\boldsymbol{a}$ cualquiera, puedo encontrar otro entero $\boldsymbol{b}$ tal que $\boldsymbol{a \cdot b = 1}$

*f*) El producto de un entero por una suma indicada, es igual a la suma de los productos parciales del entero por cada uno de los sumandos.

El producto de números enteros cumple las siguientes propiedades:

- *Clausurativa.* Si $\boldsymbol{a, b} \in \mathbb{Z}$, entonces

  $\boldsymbol{a \cdot b} \in \mathbb{Z}$

- *Conmutativa.* Si $\boldsymbol{a, b} \in \mathbb{Z}$, entonces

  $\boldsymbol{a \cdot b = b \cdot a}$

- *Asociativa.* Si $\boldsymbol{a, b, c} \in \mathbb{Z}$, entonces

  $\boldsymbol{(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)}$

- *Modulativa.* Si $\boldsymbol{a} \in \mathbb{Z}$, entonces

  $\boldsymbol{a \cdot 1 = 1 \cdot a = a}$

- *Distributiva.* Si $\boldsymbol{a, b, c} \in \mathbb{Z}$, entonces

  $\boldsymbol{a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c}$

1. Busca el número que reemplaza la letra m en cada igualdad.

   *a*) $\boldsymbol{3 \cdot m = 24}$, entonces $\boldsymbol{m = \ldots}$

   *b*) $\boldsymbol{(-5) \cdot m = (-20)}$, entonces $\boldsymbol{m = \ldots}$

   *c*) $\boldsymbol{m \cdot 7 = -35}$, entonces $\boldsymbol{m = \ldots}$

   *d*) $\boldsymbol{(-2) \cdot m = 16}$, entonces $\boldsymbol{m = \ldots}$

   *e*) $\boldsymbol{(4 + 5) \cdot m = -36}$, entonces $\boldsymbol{m = \ldots}$

   *f*) $\boldsymbol{(-10) \cdot m = 40}$, entonces $\boldsymbol{m = \ldots}$

   *g*) $\boldsymbol{1 \cdot m = 0}$, entonces $\boldsymbol{m = \ldots}$

2. Analiza y responde

   *a*) ¿Es posible encontrar un entero que multiplicado con 8 dé 20? ¿Por qué? ..........................

   *b*) ¿Es posible encontrar un entero que multiplicado por 5 dé 4? ¿Por qué? ..........................

   *c*) ¿Es posible encontrar un entero que multiplicado por 6 dé 42? ¿Por qué? ..........................

*"El sabio puede sentarse en un hormiguero, pero sólo el necio se queda sentado en él".* - Proverbio chino

### B.3.2. Análisis de resultados - Taller 3

Este taller, no se ha aplicado a todos los grupos, solamente se aplicó en el curso 701 j.m., sin embargo los resultados de la aplicación del taller, no son muy alentadores, algunos estudiantes presentan dificultades en la comprensión y utilización de la regla de los signos (naturalmente se esperaba que fuera así), por tanto se propone otro taller que luego será aplicado a los tres grupos de séptimo.

# Bibliografía


[1] Bell, E. T.: *Historia de las matemáticas.* Fondo de cultura económica, 1985

[2] Bradley, Robert E. ; Sandifer, C. E.: *Cauchy's Cours d'analyse.* Springer, 2009

[3] Forero Cuervo, Andrés ; Tello Lee, Sergio (Ed.): *Matemática estructural en `http://elcentro.uniandes.edu.co/cr/mate/estructural/`*. El centro, Universidad de los Andes

[4] Gómez, Bernardo: La justificación de la regla de los signos en los libros de texto: ¿Por qué menos por menos es más?

[5] González, José L. ; Iriarte, María ; otros: *Números enteros.* Síntesis, 1990

[6] MEN: *Lineamientos curriculares de matemáticas.* Cooperativa editorial magisterio, 1998

[7] Rojas Jiménez, Julian: *Matemática 1.* Universidad Pedagógica Experimental Libertador, 1990

[8] Trejo, César A. ; de asuntos científicos O.E.A., Departamento (Ed.): *El concepto de número.* Unión Panamericana, 1968

[9] Vasco, Carlos E.: Los números enteros. En: *Notas de matemática* (1975)

[10] Velasco Mosquera, James R. ; Rojas Morantes, Luis E. ; Gallardo de Parada, Yolanda: *Matemáticas 7.* MEN (Postprimaria)

[11] Zalamea, Fernando: *Fundamentos de matemáticas.* Universidad Nacional de Colombia, 2008