



UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA

Medición de la eficiencia en costos a través de fronteras estocásticas: una aplicación al sistema bancario colombiano

Maria Isabel Estrada Ospina

Universidad Nacional de Colombia
Facultad de Ciencias, Escuela de Estadística
Medellín, Colombia
2022

Medición de la eficiencia en costos a través de fronteras estocásticas: una aplicación al sistema bancario colombiano

Maria Isabel Estrada Ospina

Trabajo final presentado como requisito parcial para optar al título de:
Magister en Ciencias-Estadística

Director:

Ph.D., Carlos M. Lopera - Gómez

Línea de Investigación:

Estadística aplicada

Grupo de Investigación:

Estadística Universidad Nacional de Colombia Sede Medellín

Universidad Nacional de Colombia
Facultad de Ciencias, Escuela de Estadística
Medellín, Colombia

2022

Dedicatoria

Este trabajo está dedicado a Edilma Ospina y Liz Ospina porque de una manera muy especial han sido las personas que más han creído en mí y quienes más me han inspirado en este proceso. Y al profesor Carlos Mario, mi tutor, por todo el apoyo y aprendizaje que me ha brindado en todo este tiempo.

Resumen

La eficiencia en costos es un indicador altamente utilizado por las grandes, medianas y pequeñas empresas del mercado, ya que por medio de este indicador es posible determinar cuánto de los ingresos que las empresas obtienen se destina a cubrir los costos derivados de la operación de la misma. Sin embargo, existen factores que pueden influir en el nivel de eficiencia, los cuales no se consideran a la hora de calcularla de la forma convencional, entendida como la razón entre los egresos y los ingresos de cada una de las empresas, por este motivo, en este trabajo final de maestría, se espera llevar a cabo la medición de la eficiencia en costos del sistema bancario colombiano desde una mirada paramétrica, por medio de fronteras estocásticas, en donde se estiman diferentes modelos estadísticos de costos que pueden llegar a explicar el nivel de eficiencia de las unidades de producción incorporando tanto los factores aleatorios externos a la misma como las decisiones atribuibles de forma directa los cuales impactan el nivel de eficiencia.

Palabras clave: Frontera estocástica, error compuesto, costos, eficiencia.

Abstract:

Measurement of cost efficiency through stochastic frontiers: an application to the Colombian banking system

Cost efficiency is an indicator highly used by large, medium and small companies in the market, since by means of this indicator it is possible to determine how much of the income that companies obtain is destined to cover the costs derived from its operation. However, there are factors that can influence the level of efficiency, which are not considered when calculating it in the conventional way, understood as the ratio between the expenses and the income of each of the companies, for this reason, In this final master's project, it is expected to carry out the measurement of the cost efficiency of the Colombian banking system from a parametric perspective, through stochastic frontiers, where different statistical models of costs are estimated. Such models might explain the level of efficiency of the production units incorporating both the random external factors and directly attributable decisions which impact the level of efficiency.

Keywords: Stochastic frontier, compound error, costs, efficiency.

Contenido

Resumen	VII
Abstract	IX
Lista de figuras	XIII
Lista de tablas	XV
1 Introducción	1
2 Marco Teórico y especificación de los modelos	3
2.1 Eficiencia en costos	3
2.2 Análisis de frontera estocástica de costos	6
2.2.1 Definición	6
2.2.2 Especificación de la frontera estocástica	6
2.2.3 Funciones de costos	7
2.3 Especificación de modelos de frontera estocástica de costos	9
2.3.1 Forma funcional Cobb Douglas (CD)	9
2.3.2 Forma funcional Translogarítmica (TL)	12
2.4 Datos de panel y modelos estimados.	14
2.4.1 Definición - Datos de panel	14
2.4.2 Especificación - Datos de panel	16
2.4.3 Especificación Cobb Douglas con cambio tecnológico	16
2.4.4 Especificación Cobb Douglas sin cambio tecnológico	17
2.4.5 Especificación Translogarítmica con cambio tecnológico	17
2.4.6 Especificación Translogarítmica sin cambio tecnológico	18
2.5 Comparación de modelos para la estimación de la eficiencia	18
3 Medición de la eficiencia en costos en el sistema bancario colombiano	21
3.1 Descripción de los datos	21
3.2 Estimaciones	26
3.2.1 Estimación del modelo de frontera estocástica de costos bajo la especificación Cobb Douglas con cambio tecnológico	27
3.2.2 Estimación del modelo de frontera estocástica de costos bajo la especificación Cobb Douglas sin cambio tecnológico	29

3.2.3	Estimación del modelo de frontera estocástica de costos bajo la especificación Translogarítmica con cambio tecnológico	31
3.2.4	Estimación del modelo de frontera estocástica de costos bajo la especificación Translogarítmica sin cambio tecnológico	33
3.2.5	Comparación y elección del modelo	37
3.2.6	Estimación de la eficiencia en costos del sistema bancario colombiano bajo la especificación translogarítmica con cambio tecnológico.	40
3.3	Conclusiones y recomendaciones	42
3.3.1	Conclusiones	42
3.3.2	Recomendaciones	42
	Bibliografía	45

Lista de Figuras

2-1	Descomposición de la ineficiencia. <i>Fuente: Hernández, Díaz & Martínez (2001)</i>	4
2-2	Estructura de datos de panel	15
3-1	Normalidad en los errores. <i>Fuente: Construcción propia.</i>	39
3-2	Eficiencia en costos - especificación Translogarítmica con cambio tecnológico. <i>Fuente: Construcción propia.</i>	41

Lista de Tablas

3-1	Clasificación de los bancos	24
3-2	Estructura de base de datos	25
3-3	Resumen descriptivo de variables	26
3-4	Modelo estimado Cobb Douglas con cambio tecnológico	28
3-5	Modelo estimado Cobb Douglas sin cambio tecnológico	30
3-6	Modelo estimado Translogarítmico con cambio tecnológico	32
3-7	Modelo estimado Translogarítmico sin cambio tecnológico	35
3-8	Prueba de razón de verosimilitud - modelos con especificación Cobb Douglas	37
3-9	Prueba de razón de verosimilitud - modelos con especificación Translogarítmica	38
3-10	Prueba de razón de verosimilitud - especificación Cobb Douglas - Translogarítmica	38
3-11	Eficiencia en costos - especificación Translogarítmica con cambio tecnológico.	40

1 Introducción

La medición de la eficiencia en costos tiene una gran importancia en todas las empresas de servicios o unidades de producción, pues es la manera en que se puede establecer de forma directa si los costos en los que estas empresas incurren por medio de la operación del negocio están consumiendo una alta o una baja proporción de los ingresos generados. Se espera que dadas las técnicas de operación utilizadas por cada una de ellas, impacten de manera positiva este indicador, entendiendo este impacto positivo como una menor asignación de los ingresos a cubrir los costos.

Cuando se habla del término eficiencia en la historia, encontramos que diferentes autores han tratado de realizar una aproximación a su definición, como Hanushek (1995) que asocia el significado de eficiencia con la capacidad que desarrollan las empresas para obtener un mayor número de productos con determinada combinación de insumos, o una menor utilización de insumos. Cohen & Franco (2000) definen la eficiencia como la utilización óptima de unos recursos. Dadas estas definiciones, se puede decir que la eficiencia determina la capacidad de las empresas de soportar sus costos, utilizando de manera adecuada los insumos, desde la mejor combinación y utilización de ellos, derivando en un menor costo para la empresa.

Para llevar a cabo la medición de la eficiencia en costos, las fronteras estocásticas han representado una técnica paramétrica de gran preferencia. Aigner, Lovell & Schmidt (1977) fueron los primeros en intentar aproximar una definición de fronteras estocásticas a partir de la brecha observada entre la concepción teórica ideal y las funciones reales alcanzadas por las empresas, donde la brecha es explicada por la existencia de factores aleatorios que la empresa no puede controlar y decisiones propias de la empresa.

En la banca colombiana, encontramos diferentes trabajos enfocados en medir la eficiencia en costos, como el trabajo desarrollado por Herrera & Bernal (1983), el cual parte del objetivo de estudiar y determinar la existencia o no de economías de escala, en donde los costos en los que incurren los bancos empiezan a jugar un papel determinante. Suescun & Melo (1996) abordan la eficiencia desde las economías de escala y desde el cambio tecnológico en dónde encontraron que la mayor fuente de ineficiencia es atribuida a la sobreutilización de los factores de producción. Castro (2001) evalúa la respuesta de las instituciones bancarias a las reformas en el sistema y cambios en la industria bancaria en

sus niveles de eficiencia. Martínez, Zuleta, Misas, Jaramillo et al. (2016) han manifestado que los niveles de eficiencia en el sistema bancario colombiano están poco desarrollados, lo cual implica que aún existe un trabajo extenso para realizar por los bancos en este tema, hallazgo que fue apoyado por (Gandur 2003).

Este trabajo tiene como propósito calcular la eficiencia en costos del sistema bancario colombiano por medio de fronteras estocásticas, para la cual se desarrollan diferentes planteamientos de modelos de costos bajo especificaciones Cobb Douglas y Translogarítmica los cuales serán expuestos ante criterios estadísticos que permitirán elegir el modelo que mejor ajuste presente a los datos analizados para explicar la eficiencia en costos.

El trabajo se desarrolla de la siguiente manera: en el Capítulo 2 se presenta el marco teórico que pretende dar claridad sobre los conceptos y especificaciones de la medición de eficiencia, el análisis de fronteras estocásticas, las funciones de costos, la estructura de datos de panel y la prueba de razón de verosimilitud. El Capítulo 3 presenta todo el desarrollo de la estimación de la eficiencia en costos en el sistema bancario colombiano, en donde se analiza la base de datos usada, se estiman los diferentes modelos candidatos para explicar la eficiencia en costos, se selecciona el modelo con mejor ajuste a los datos analizados, se estiman los niveles de eficiencia en el sistema bancario colombiano y finalmente se mencionan las conclusiones finales, producto de los resultados obtenidos y las recomendaciones para posibles trabajos futuros.

2 Marco Teórico y especificación de los modelos

A continuación se abordan los conceptos, descripciones, especificaciones o formas funcionales de los modelos de estimación de eficiencia usando el análisis fronteras estocásticas que se usaron e implementaron en este trabajo.

2.1. Eficiencia en costos

Al hablar de la medición de la eficiencia en costos, es importante mencionar el aporte realizado por Farrell (1957) y retomado por Díaz Quevedo (2009) en donde explican que la ineficiencia de las unidades de producción está explicada básicamente por dos componentes, los cuales son la ineficiencia técnica y la ineficiencia asignativa.

Cuando hablamos del primer componente de ineficiencia, nos referimos a determinar si las unidades de producción bajo estudio operan a niveles eficientes de producto. Poroma Mamani (2012) establece que las economías de escala hacen referencia a la capacidad que tienen las empresas de incrementar su nivel de producción, aumentando sus costos en menor proporción, lo cual hace que la relación entre el costo promedio de las empresas y el nivel de producción determine el nivel de eficiencia de escala de cada una de ellas y por lo tanto la eficiencia técnica.

Cuando nos referimos al segundo componente de ineficiencia, hablamos de la incapacidad de las unidades de producción de ofrecer eficientemente un conjunto de productos, es decir, el foco se encuentra ubicado en la utilización eficiente de los insumos. Poroma Mamani (2012) define este concepto como la capacidad de obtener costos menores por la producción conjunta y no de manera independiente.

Gráficamente, podemos ilustrar la descomposición de la ineficiencia en costos anteriormente descrita de la siguiente manera:

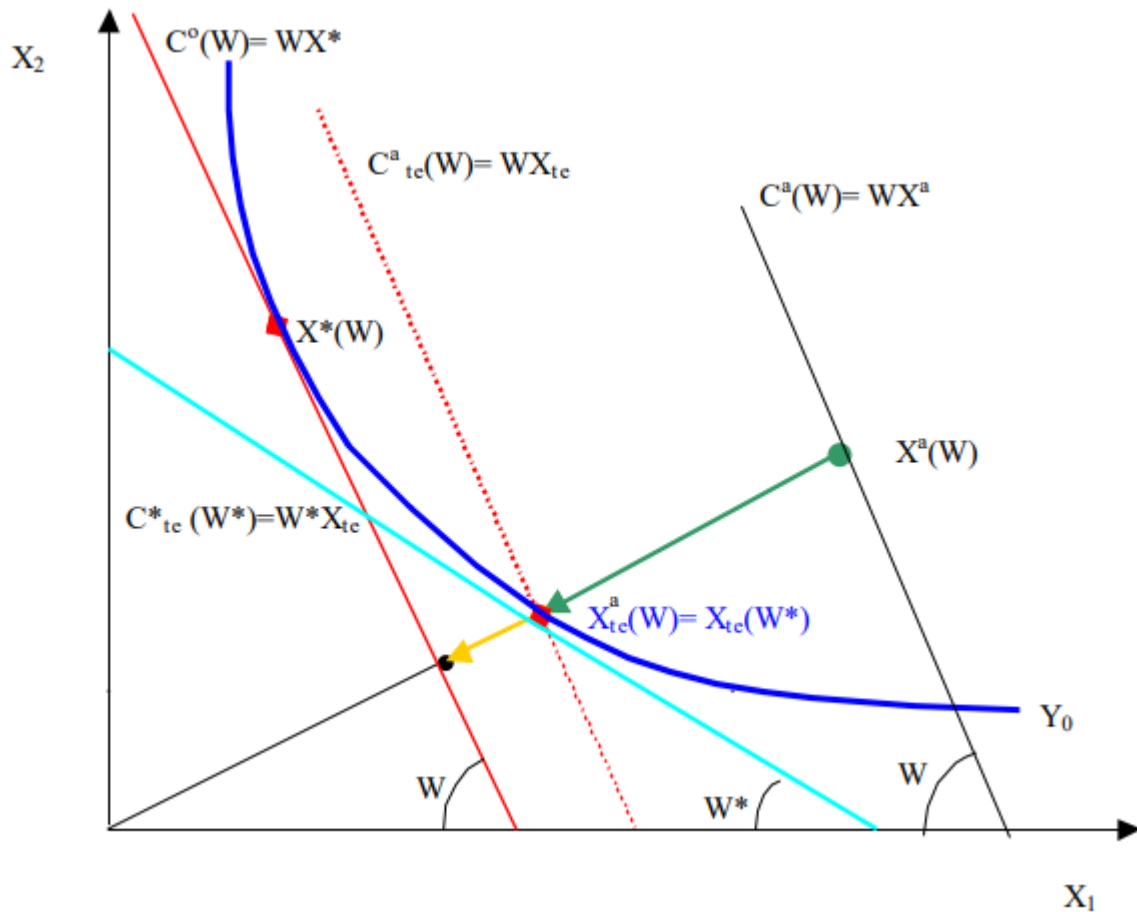


Figura 2-1: Descomposición de la ineficiencia. *Fuente: Hernández, Díaz & Martínez (2001)*

A partir de la Figura 2.1 tenemos que Y_0 representa el nivel de producción que se pretende alcanzar a partir de los insumos de producción X_1 y X_2 los cuales tienen precios observados W_1 y W_2 respectivamente. Todas las infinitas combinaciones que se pueden obtener a partir de los insumos de producción X_1, X_2 para obtener el nivel de producto Y_0 son combinaciones técnicamente eficientes y representan la curva isocuanta. El punto $X^*(W)$ hace referencia a la combinación de insumos que representa el menor costo, el cual se encuentra sobre la recta que representa todas las posibles combinaciones de los factores de producción que tienen el mismo costo para llevar a cabo el nivel de producto Y_0 , es decir, el menor costo se encuentra sobre la isocostos $C^0(W)$. Si nos ubicamos sobre el punto $X^a(W)$ obtenemos un punto que representa la ineficiencia técnica y asignativa, y si nos ubicamos sobre el punto $X_{te}^a(W^*)$ obtenemos un punto con eficiencia técnica obtenida por la reducción radial del vector $X^a(W)$ pero este punto representa una combinación sin eficiencia asignativa, debido a que el costo $C_{te}^a(W)$ se encuentra por encima del menor costo $C^0(W)$.

Será objeto de este trabajo la medición de la eficiencia en costos a través de diferentes estructuras funcionales paramétricas, a partir de especificaciones Cobb Douglas y trans-logarítmicas, para determinar cuáles de estos modelos explican de manera más acertada el comportamiento de las unidades de producción bajo estudio.

2.2. Análisis de frontera estocástica de costos

2.2.1. Definición

El término frontera estocástica se viene acuñando desde 1957, ya que desde este momento Farrell empezó a introducir el término de frontera eficiente, en donde lo que pretendía era emplear una curva representada por empresas con los mejores comportamientos en cuanto a eficiencia, dados unos estudios empíricos que realizó. En este método, se analiza de manera relativa el nivel de eficiencia de cada empresa, en donde las empresas o la empresa que se encuentre más próxima a esta curva (frontera) será la empresa más eficiente bajo estudio y de esta manera la empresa que más se aleje de la misma curva representará la empresa más ineficiente.

2.2.2. Especificación de la frontera estocástica

Cuando hablamos de la frontera estocástica de costos, de manera general se puede representar de la siguiente manera (Henningesen 2020):

$$\log c = \log c(w, y) + \epsilon, \epsilon = u + v \quad (2-1)$$

En donde ϵ es el error compuesto, u representa la ineficiencia atribuida a la empresa o unidad de producción y v representa el ruido estadístico. Por tanto, se debe de garantizar que $u \geq 0$. En este sentido, la frontera de costos también la podemos escribir de la siguiente manera:

$$c = c(w, y)e^u e^v \quad (2-2)$$

En donde se tienen los siguientes supuestos (Vergara 2006):

$$v \sim N(0, \sigma_v^2), \quad (2-3)$$

$$u \sim N^+(0, \sigma_u^2) \quad (2-4)$$

En el análisis de fronteras estocásticas que representa una de las técnicas de estimación más implementadas (Buchelli Lozano & Marín Restrepo 2012), dada su mayor proximidad a la realidad, encontramos algunas características relevantes en esta metodología paramétrica entre las que podemos mencionar las siguientes:

- **Supuestos estadísticos:** hace referencia al conjunto de condiciones necesarias que se deben de cumplir en los datos para tener resultados adecuados.
- **Significación estadística de las variables:** al ser una medida de fiabilidad en los resultados, permite tomar decisiones de confianza con un respaldo estadístico.
- **Imposición de forma funcional en frontera:** se impone una estructura en la función econométrica a estimar, que hace referencia a la estructura que mejor se ajusta a los datos bajo análisis.
- **Error compuesto:** tal como lo menciona Díaz Quevedo (2009) en su trabajo, y tal como se evidencia en (2-1) y (2-2) a la hora de querer explicar y medir la eficiencia en costos de cualquier unidad productiva, es necesario hacer la distinción del error estadístico del modelo econométrico, ya que acontecimientos como falta de comunicación, errores a nivel administrativo y operativo, despliegues lentos de procesos, toma tardías de decisiones, fallas humanas y contexto de incertidumbre pueden llegar a ser las razones por las cuales las empresas produzcan a niveles muy ineficientes, lo cual implicaría que las condiciones fortuitas y de poco control para la unidad productiva no sean la principal fuente de ineficiencia.

2.2.3. Funciones de costos

De manera muy simple, empezamos definiendo las funciones de costos como una expresión matemática que se encarga de obtener el valor derivado al relacionar insumos y productos obtenidos por determinada entidad, lo cual indica el costo de producción. Yendo en línea con la racionalidad de los individuos, las entidades de producción buscan minimizar sus costos de producción, lo cual, de cumplirse esta premisa, convierte a estas entidades en entidades eficientes, ya que destinan la menor cantidad posible de sus costos a cubrir su producción. A continuación, se presentará la especificación de las funciones de costos y sus propiedades apoyados en el trabajo realizado por Henningsen (2020).

Especificación de las funciones de costos

La forma funcional de los costos totales de una entidad de producción la podemos definir de la siguiente manera:

$$c = \sum_i w_i x_i \quad (2-5)$$

En donde c representa el costo de producción, w el precio de los insumos y x los inputs de producción. Estos costos los podemos presentar en forma de función, siendo ésta una expresión que busca minimizar los costos al producir determinada cantidad y .

$$c(w, y) = \min_x \sum_i w_i x_i \quad (2-6)$$

Propiedades de las funciones de costos

Todas las funciones de costos deben de cumplir ciertas propiedades para poderlas denominar como funciones bien comportadas. Las propiedades se presentan a continuación:

- **No negatividad:** para producir una determinada cantidad se deben de utilizar cantidades positivas de inputs de producción, por lo tanto el precio de los inputs es positivo.

$$c(w, y) \geq 0, \forall w \geq 0, y \geq 0$$

- **No decreciente en el precio de los inputs de producción:** si se obtiene una cantidad producida mayor, se espera que la combinación en el precio de los inputs producción sean mayor.

$$\partial c(w, y) / \partial w_i \geq 0, \forall i$$

- **Homogeneidad lineal en precios:** en este caso, se presenta que un cambio proporcional en el precio de los inputs de producción representa un cambio proporcional en los costos para llevar a cabo la cantidad producida.

$$c(kw, y) = kc(w, y), \forall k > 0$$

- **No decreciente en la cantidad producida:** si aumenta la cantidad producida, aumenta el costo.

$$\partial c(w, y) / \partial y \geq 0$$

- **Sin costos fijos:** si no se está produciendo, se esperaría que la entidad no tenga costos.

$$c(w, 0) = 0$$

2.3. Especificación de modelos de frontera estocástica de costos

Los modelos que se presentan a continuación, representan claramente los posibles enfoques metodológicos o especificaciones de modelos, que pudiesen llegar a representar la frontera idónea para explicar el comportamiento del nivel de eficiencia de las unidades de producción bajo estudio. Se plantean dos modelos cada uno bajo dos formas funcionales, en donde se pretende incorporar el cambio tecnológico y el impacto en la eficiencia de las unidades de producción al no contemplarse este cambio tecnológico bajo las especificaciones Cobb Douglas y Translogarítmica respectivamente. En este orden de ideas, se plantean cuatro estimaciones para eficiencia en costos. A continuación se describe cada uno de los modelos y las formas funcionales mencionadas anteriormente que se pueden implementar para estimar la eficiencia en costos bajo fronteras estocásticas.

2.3.1. Forma funcional Cobb Douglas (CD)

Esta forma funcional suele implementarse, dada la capacidad de interacción que se presenta entre el producto y los inputs de producción.

Para el caso de los costos tenemos que la función Cobb Douglas es de la siguiente manera (Henningsen 2020):

$$c = A \left(\prod_{i=1} w_i^{\alpha_i} \right) y^{\alpha_y}, \quad (2-7)$$

En donde A representa la productividad total de los factores ($A = \exp(\alpha_0)$), α el peso de los precios de los inputs (w) de producción y la producción (y).

Y de manera lineal podemos escribir (2-7) como:

$$\log c = \alpha_0 + \sum_i \alpha_i \log w_i + \alpha_y \log y \quad (2-8)$$

Como la estimación de eficiencia bajo el análisis de fronteras estocásticas tiene por objeto funciones de costos, en el caso de la función Cobb Douglas se debe de cumplir que los precios de los inputs de producción deben de ser no negativos cumpliéndose de esta manera que nos encontremos frente a una función de costos monótona no decreciente en el precio de los inputs. Adicionalmente, se debe cumplir con la linealidad en los precios de los inputs y la condición de homoteticidad en la función.

Para que se garantice la linealidad en la función, se debe de cumplir que:

$$\begin{aligned}
tc(w, y) &= c(tw, y) \\
\log(tc) &= \alpha_0 + \sum_i \alpha_i \log(tw_i) + \alpha_y \log(y) \\
\log(t) + \log(c) &= \alpha_0 + \sum_i \alpha_i \log t + \sum_i \alpha_i \log w_i + \alpha_y \log(y) \\
\log(t) + \log(c) &= \alpha_0 + \log t \sum_i \alpha_i + \sum_i \alpha_i \log w_i + \alpha_y \log(y) \tag{2-9} \\
\log(t) + \log(c) &= \log(c) + \log t \sum_i \alpha_i \\
\log(t) &= \log(t) \sum_i \alpha_i \\
1 &= \sum_i \alpha_i
\end{aligned}$$

Dicho esto, al modelo econométrico estimado, se le debe de imponer la linealidad en el precio de los inputs o lo que algunos autores llaman normalizar de la siguiente manera:

$$\log \frac{c}{w_N} = \alpha_0 + \sum_{i=1}^{N-1} \alpha_i \log \frac{w_i}{w_N} + \alpha_y \log y \tag{2-10}$$

En donde lo que se hace es tomar el precio de alguno de los inputs del modelo (w_N) y dividir los costos totales y los otros inputs restantes por éste. Esto queda demostrado por Henningsen (2020) de la siguiente manera.

$$\alpha_N = 1 - \sum_{i=1}^{N-1} \alpha_i \tag{2-11}$$

Reemplazando en (2-11) que corresponde al coeficiente del precio del input que se seleccionó para imponer la homogeneidad lineal en (2-8), tenemos:

$$\begin{aligned}\log c &= \alpha_0 + \sum_{i=1}^{N-1} \alpha_i \log w_i + (1 - \sum_{i=1}^{N-1} \alpha_i) \log w_N + \alpha_y \log y \\ \log c &= \alpha_0 + \sum_{i=1}^{N-1} \alpha_i (\log w_i - \log w_N) + \log w_N + \alpha_y \log y \\ \log c - \log w_N &= \alpha_0 + \sum_{i=1}^{N-1} \alpha_i (\log w_i - \log w_N) + \alpha_y \log y \\ \log \frac{c}{w_N} &= \alpha_0 + \sum_{i=1}^{N-1} \alpha_i \log \frac{w_i}{w_N} + \alpha_y \log y\end{aligned}\tag{2-12}$$

Ahora, al hablar de la homoteticidad en la función de costos con especificación Cobb Douglas, es necesario garantizar que las funciones presentadas en las ecuaciones (2-7) y (2-8) se pueden descomponer como se presenta a continuación. (Henningsen 2020):

$$c(w, y) = c_0(c_1(w), c_2(y))\tag{2-13}$$

En donde descomponemos la función de costos en funciones c_1 y c_2 que agregan a nivel de precios de los insumos o inputs (w) y a nivel de producto (y) respectivamente. De manera simple, podemos decir que una función cumple con la condición de homoteticidad si no se presentan interacciones entre los precios individuales de los insumos y la cantidad producida, lo cual implica que al cambiar la cantidad de producto la función de costos no se ve afectada en su estructura o forma (Henningsen 2020). De esta manera, podemos concluir que la función de costos Cobb Douglas siempre es homotética dado que se cumple la descomposición presentada en la ecuación (2-13), como se muestra a continuación:

$$c_0(c_1, c_2) = A c_1(w), c_2(y)\tag{2-14}$$

$$c_1(w) = \prod_i w_i^{\alpha_i}\tag{2-15}$$

$$c_2(y) = y^{\alpha_y}\tag{2-16}$$

Posterior a detallar la forma funcional Cobb Douglas, se detalla la segunda forma funcional, forma funcional translogarítmica, abordada en el desarrollo de este trabajo.

2.3.2. Forma funcional Translogarítmica (TL)

Esta forma funcional es altamente usada dado su relevancia en el uso económico y econométrico y la flexibilidad de la misma. Pizarro & Loreto (2011) precisan sobre la importancia de esta función desde la información de la conducta de los insumos, la producción estimada y elasticidades obtenidas.

Para el caso de los costos tenemos que la función Translogarítmica se puede expresar de la siguiente manera (Henningsen 2020):

$$\begin{aligned} \log c(w, y) = & \alpha_0 + \sum_{i=1}^N \alpha_i \log w_i + \alpha_y \log y + \\ & \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \alpha_{ij} \log w_i \log w_j + \frac{1}{2} \alpha_{yy} (\log y)^2 \\ & + \sum_{i=1}^N \alpha_{iy} \log w_i \log y \end{aligned} \quad (2-17)$$

Como la estimación de eficiencia bajo el análisis de frontera estocástica tiene por objeto funciones de costos, en el caso de la función Translogarítmica se debe cumplir que los precios de los inputs de producción sean no negativos lo cual implica que la función de costos sea monótonamente no decreciente en el precio de los inputs de producción. Adicionalmente se debe de cumplir el principio de homoteticidad en la función y al igual que en la forma funcional CD se debe cumplir la linealidad en los precios de los inputs. Para que se garantice esta última condición se debe de cumplir lo siguiente (Henningsen 2020):

$$\begin{aligned} \alpha_N &= 1 - \sum_{i=1}^{N-1} \alpha_i \\ \alpha_{Nj} &= - \sum_{i=1}^{N-1} \alpha_{ij} \forall j \\ \alpha_{iN} &= - \sum_{j=1}^{N-1} \alpha_{ij} \forall i \\ \alpha_{Ny} &= - \sum_{i=1}^{N-1} \alpha_{iy} \end{aligned} \quad (2-18)$$

Ahora si tomamos todas las expresiones en (2-18) a las que se encuentran igualados los α 's y las reemplazamos en (2-17), al reordenar las expresiones tenemos (Henningsen 2020):

$$\begin{aligned}
\log \frac{c(w, y)}{w_N} &= \alpha_0 + \sum_{i=1}^{N-1} \alpha_i \log \frac{w_i}{w_N} + \alpha_y \log y \\
&+ \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{N-1} \sum_{i=1}^{N-1} \alpha_{ij} \log \frac{w_i}{w_N} \log \frac{w_j}{w_N} + \frac{1}{2} \alpha_{yy} (\log y)^2 \\
&+ \sum_{i=1}^{N-1} \alpha_{iy} \log \frac{w_i}{w_N} \log y.
\end{aligned} \tag{2-19}$$

En donde se sobre entiende por medio de la ecuación (2-19) que la imposición lineal se logra normalizando tanto los costos como los precios de los inputs de producción de la ecuación bajo análisis, dividiéndolos por el precio de uno de los inputs de producción.

Al hablar de la condición de homoteticidad en la función de costos Translogarítmica, nos encontramos ante la capacidad de descomponer esta función como sucede en (2-13) pero para el caso bajo estudio, lo cual equivale a decir que $\alpha_{iy} = 0 \forall i$ (Henningsen 2020). Tenemos lo siguiente:

$$\begin{aligned}
c_0(c_1, c_2) &= \exp(\alpha_0 + c_1(w) + c_2(y)) \\
c_1(w) &= \sum_{i=1}^N \alpha_i \log w_i + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \alpha_{ij} \log w_i \log w_j \\
c_2(y) &= \alpha_y \log y + \frac{1}{2} \alpha_{yy} (\log y)^2
\end{aligned} \tag{2-20}$$

2.4. Datos de panel y modelos estimados.

2.4.1. Definición - Datos de panel

Los modelos econométricos de datos de panel son aquellos modelos que incluyen en su análisis una muestra de agentes económicos que pueden ser individuos, empresas, países, bancos los cuales son analizados en un intervalo de tiempo, es decir, en este tipo de modelos se relacionan los datos de corte transversal en el cual se obtiene información de múltiples fenómenos y la dimensión temporal en donde la información relevante de los fenómenos estudiados es proporcionada por su evolución en el tiempo. Estos modelos son de gran importancia cuando se pretende capturar la heterogeneidad no observada en los datos a analizar (Mayorga 2000).

A continuación, en la figura 2.4.1 se puede observar la estructura de un conjunto de datos de panel balanceado, basado en una base de datos donde la variable individuo (A, \dots, D) representa los datos de corte transversal, la variable periodo (2001, \dots , 2007) representa la dimensión temporal, y las variables ingreso, edad y sexo son incluidas en el análisis como posibles variables explicativas. En este ejemplo ilustrativo se define la notación N para representar el número de individuos en el conjunto de datos de panel y T representa el número de periodos de tiempo en que se observa cada individuo del conjunto de datos de panel.

Individuo	Periodo	Ingreso	Egresos	Sexo
A	2001	\$ 1.561	\$ 648	1
A	2002	\$ 1.016	\$ 514	1
A	2003	\$ 1.066	\$ 571	1
A	2004	\$ 1.746	\$ 626	1
A	2005	\$ 1.460	\$ 682	1
A	2006	\$ 1.958	\$ 596	1
A	2007	\$ 1.595	\$ 700	1
B	2001	\$ 1.190	\$ 694	1
B	2002	\$ 1.517	\$ 660	1
B	2003	\$ 1.879	\$ 547	1
B	2004	\$ 1.201	\$ 595	1
B	2005	\$ 1.261	\$ 652	1
B	2006	\$ 1.938	\$ 675	1
B	2007	\$ 1.201	\$ 629	1
C	2001	\$ 1.651	\$ 656	2
C	2002	\$ 1.860	\$ 549	2
C	2003	\$ 1.198	\$ 568	2
C	2004	\$ 1.646	\$ 629	2
C	2005	\$ 1.191	\$ 504	2
C	2006	\$ 1.408	\$ 568	2
C	2007	\$ 1.546	\$ 538	2
D	2001	\$ 1.389	\$ 567	1
D	2002	\$ 1.809	\$ 653	1
D	2003	\$ 1.489	\$ 566	1
D	2004	\$ 1.107	\$ 564	1
D	2005	\$ 1.280	\$ 679	1
D	2006	\$ 1.208	\$ 631	1
D	2007	\$ 1.092	\$ 695	1

Figura 2-2: Estructura de datos de panel

Estos conjuntos de datos de panel pueden estar clasificados como:

- **Largos:** un conjunto de panel de datos es largo cuando su dimensión transversal es mayor a su dimensión temporal ($N > T$), es decir, existe un mayor número de individuos que periodos de tiempo.
- **Cortos:** un conjunto de datos de panel corto tiene como característica una dimensión transversal menor a la dimensión temporal ($N < T$).
- **Balanceado:** en el conjunto de datos de panel balanceado implica que cada individuo i es observado en T periodos.
- **No balanceado** en el conjunto de datos de panel no balanceado implica que cada individuo i es observado en T_i periodos.

2.4.2. Especificación - Datos de panel

La ecuación que veremos a continuación, ilustra la especificación general para un modelo de regresión para datos de panel, de manera que esta se puede generalizar a las formas lineales de los modelos de costos con especificación Cobb Douglas y Translogarítmica vistos anteriormente.

$$Y_{it} = \alpha_{it} + X_{it}\beta + U_{it} \quad (2-21)$$

con $i = 1, \dots, N; t = 1, \dots, T$.

Donde i hace referencia al individuo analizado, es decir, a los datos de corte transversal y t representa la dimensión temporal analizada, Y_{it} representa el valor de la variable dependiente del individuo i en el periodo t , α_{it} es el vector de los interceptos, X_{it} es la i -ésima observación en el momento t de las variables explicativas del modelo (Mayorga 2000).

Es interesante poder abordar el análisis de la eficiencia por medio de fronteras estocásticas para las diferentes unidades de producción en un rango del tiempo en la historia, en donde se deja de suponer la misma tecnología disponible para todas las entidades como se supone bajo una estructura de datos de corte transversal y se empieza a ahondar en la posibilidad de diferentes tecnologías disponibles para las mismas en los diferentes periodos de tiempo, por lo cual esta variable tecnología empieza a tomar relevancia en los diferentes modelos empleados. Es normal encontrar en los diferentes análisis de eficiencia la tendencia temporal como un buen indicador que recoge el cambio tecnológico a través del tiempo (Henningsen 2020). Se pretende determinar el impacto que este cambio tecnológico evidencia o no en la eficiencia en costos.

A continuación se presentan los modelos econométricos bajo especificaciones Cobb Douglas y Translogarítma con y sin cambio tecnológico.

2.4.3. Especificación Cobb Douglas con cambio tecnológico

Ahora para determinar si el cambio tecnológico bajo la especificación CD impacta el nivel de eficiencia en costos de las unidades de producción analizadas, partimos del siguiente modelo a estimar, en donde se incluye una variable de cambio tecnológico representado en (2-22) por CT .

$$\log \frac{c_{it}}{w_N} = \alpha_0 + \sum_{i=1}^{N-1} \alpha_i \log \frac{w_{it}}{w_N} + \alpha_y \log y_{it} + \alpha_t CT_{it} \quad (2-22)$$

Como se observa en la especificación detallada en (2-22), explicado en detalle en la sección 2.3.1, se está garantizando la linealidad en el precio de los inptus w . Por su parte CT_{it} recoge el impacto del cambio tecnológico de la unidad de producción i en el momento t , es decir, intenta explicar cómo posiblemente las tecnologías disponibles impactan en los niveles de eficiencia de las unidades de producción.

2.4.4. Especificación Cobb Douglas sin cambio tecnológico

Es de interés determinar si el cambio tecnológico si tiene un impacto importante en la medición de la eficiencia, como ya se mencionó anteriormente, también se lleva a cabo la estimación del modelo de panel de datos para la especificación Cobb Douglas sin cambio tecnológico, el cual coincide con el modelo presentado en la sección 2.3.1 y cuya expresión fue dada en (2-10), pero se expresa esta expresión bajo una estructura de datos de panel como se muestra a continuación:

$$\log \frac{c_{it}}{w_N} = \alpha_0 + \sum_{i=1}^{N-1} \alpha_i \log \frac{w_{it}}{w_N} + \alpha_y \log y_{it} \quad (2-23)$$

2.4.5. Especificación Translogarítmica con cambio tecnológico

Al igual que en el caso de la especificación Cobb Douglas, nos interesa determinar si el cambio tecnológico bajo la especificación Translogarítmica impacta el nivel de eficiencia en costos de las unidades de producción analizadas, partimos del siguiente modelo a estimar, en donde se incluye una variable de cambio tecnológico en el modelo de datos de panel:

$$\begin{aligned} \log \frac{c(w_{it}, y_{it})}{w_N} &= \alpha_0 + \sum_{i=1}^{N-1} \alpha_i \log \frac{w_{it}}{w_N} + \alpha_y \log y_{it} \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{N-1} \sum_{i=1}^{N-1} \alpha_{ij} \log \frac{w_{it}}{w_N} \log \frac{w_{jt}}{w_N} + \frac{1}{2} \alpha_{yy} (\log y_{it})^2 \\ &+ \sum_{i=1}^{N-1} \alpha_{iy} \log \frac{w_{it}}{w_N} \log y + \alpha_t CT_{it}. \end{aligned} \quad (2-24)$$

En (2-24), también se garantiza la linealidad en el precio de los inptus w , lo cual se encuentran explicado en la sección 2.3.2 para esta especificación. Como en la especificación Cobb Douglas CT_{it} recoge el impacto del cambio tecnológico de la unidad de producción i

en el momento t , es decir, intenta explicar cómo posiblemente las tecnologías disponibles impactan en los niveles de eficiencia de las unidades de producción.

2.4.6. Especificación Translogarítmica sin cambio tecnológico

Para este caso, se reitera el interés determinar si el cambio tecnológico tiene un impacto importante en la medición de la eficiencia, como ya se mencionó anteriormente, también se lleva a cabo la estimación del modelo de datos de panel para la especificación Translogarítmica sin cambio tecnológico, el cual se presentó en (2-19) de la sección 2.3.2. A continuación presentaremos el modelo para un conjunto de datos de panel:

$$\begin{aligned} \log \frac{c(w_{it}, y_{it})}{w_N} &= \alpha_0 + \sum_{i=1}^{N-1} \alpha_i \log \frac{w_{it}}{w_N} + \alpha_y \log y_{it} \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{N-1} \sum_{i=1}^{N-1} \alpha_{ij} \log \frac{w_{it}}{w_N} \log \frac{w_{jt}}{w_N} + \frac{1}{2} \alpha_{yy} (\log y_{it})^2 \\ &+ \sum_{i=1}^{N-1} \alpha_{iy} \log \frac{w_{it}}{w_N} \log y_{it}. \end{aligned} \quad (2-25)$$

2.5. Comparación de modelos para la estimación de la eficiencia

Comprendiendo la importancia de realizar la elección acertada de un modelo que explique adecuadamente la eficiencia en costos de las unidades de producción y presente un buen ajuste a los datos analizados, la prueba de razón de verosimilitud es una herramienta estadística de gran importancia de la cual nos podemos valer para realizar esta elección con respaldo estadístico.

Esta prueba en el contexto estadístico determina la comparación de dos modelos, la cual tiene como objetivo determinar cuál de estos presenta mejor ajuste a los datos bajo estudio de acuerdo con la razón de sus probabilidades. Para llevar a cabo esta comparación de modelos es necesario que existan dos modelos donde uno de ellos está encajado en el otro, al primero de estos modelos se le conoce como modelo anidado¹ y al otro se le conoce como modelo completo. A continuación se ilustra este concepto con modelos de regresión:

¹Modelo que comprende un subconjunto de las variables predictoras contenidas en un modelo con mayor detalle o lo que se llama modelo completo

$$M1 : Y = \beta_0 + \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2 + \beta_3 X_3 + \beta_4 X_4 + \epsilon \quad (2-26)$$

$$M2 : Y = \beta_0 + \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2 + \epsilon \quad (2-27)$$

Observe que M1 en (2-26) representa el modelo de regresión completo con cuatro variables predictoras y M2 en (2-27) representa el modelo de regresión anidado, el cual contiene solo dos de las variables predictoras contempladas en el modelo completo.

Para llevar a cabo esta comparación, se parte de un análisis de punajes (scores) de probabilidades de los modelos comparados $LR = -2(\log(L(M1)) - \log(L(M2)))$ para determinar si estas dos probabilidades son estadísticamente diferentes, posterior a esto se analizan los grados de libertad, siendo estos grados de libertad iguales a el número de parámetros adicionales incluidos en el modelo completo y con esta información se obtiene el valor crítico por medio del cual se rechaza o no la hipótesis nula de la prueba.

$H_0 : \beta_3 = \beta_4 = 0$ (el modelo M2 presenta el mismo ajuste que el modelo M1, se debe de usar el modelo M2.)

$H_1 : \beta_3 \neq 0$ o $\beta_4 \neq 0$ (el ajuste del modelo M1 es significativamente mejor que el ajuste del modelo M2, se debe de usar el modelo M1)

Si el valor-p que arroja la prueba realizada se encuentra por debajo de un nivel de significancia dado, digamos 0.05, se rechaza la hipótesis nula y se concluye que el modelo completo ofrece un ajuste de los datos significativamente mejor que el modelo anidado. En caso contrario, se prefiere usar el modelo anidado en lugar del modelo completo.

3 Medición de la eficiencia en costos en el sistema bancario colombiano

En este capítulo se aborda el análisis y descripción de la base de datos, los modelos estimados, los criterios de selección y todo el trabajo desarrollado por el investigador.

Como ya se mencionó en el capítulo anterior y de manera reiterativa, a la hora de llevar a cabo la medición de la eficiencia en costos de los bancos seleccionados por el tamaño de sus activos, podemos encontrarnos con que el cambio tecnológico es un factor determinante a la hora de hacer más eficientes a las empresas o que por el contrario este no presenta mayor impacto, lo cual puede ser demostrado a partir de los modelos desarrollados para la estimación de la eficiencia por medio de fronteras estocásticas (Henningsen 2020).

Por lo cual, este criterio será muy importante a la hora de determinar el modelo que mejor se ajuste a los datos bajo estudio para llevar a cabo la medición de la eficiencia en costos de las entidades productivas para un periodo de interés.

3.1. Descripción de los datos

La base de datos¹ utilizada en este estudio recopila información del sistema bancario colombiano, particularmente de los trece bancos más representativos que consolidan alrededor del 97 % del total de los activos² del sistema bancario colombiano, para el periodo comprendido entre enero de 2015 y diciembre de 2020 con periodicidad mensual, con la cual se llevará a cabo la construcción de las diferentes estimaciones de las funciones de costos para los bancos seleccionados. Para este estudio, partiremos de la premisa de que los préstamos y las inversiones constituyen el producto de los bancos, los costos de capital o generales, los costos laborales y los depósitos son los precios de los insumos, es decir, estos últimos representan los precios de los inputs para la producción y el costo total de

¹La construcción de la base fue llevada a cabo por el autor del trabajo en cuestión, tomando información publicada por las diferentes entidades bancarias en la página de la Superintendencia financiera: Entidad u organización Colombiana fundada en 1991 con el fin de vigilar e inspeccionar las actividades financieras en el país. <https://www.bnamericas.com/es/perfil-empresa/superintendencia-financiera-de-colombia>

²Bienes y recursos de los que cuenta una empresa con los que se esperan tener beneficios futuros

cada entidad serán la suma los costos operativos y los costos por intereses.

A continuación se definen brevemente las variables que componen la base de datos empleada para la estimación de los diferentes modelos de costos bajo sus diferentes especificaciones:

- **Créditos:** fue tomado del estado del balance de cada entidad, y representa la cantidad de dinero puesto a disposición de los agentes deficitarios por parte de cada entidad bancaria, el cual es retornado en su totalidad en un término de tiempo establecido, acompañado de un retorno positivo para la entidad bancaria.
- **Inversiones:** tomado también del estado del balance de cada entidad, y representan los activos derivados del negocio tradicional de cada banco, es decir, acá encontramos los préstamos a los clientes, a otras entidades y los créditos. Esta transaccionalidad refleja un valor positivo para el banco dueño de la inversión.
- **Costos generales:** datos tomados del estado de pérdidas y ganancias (PyG) de cada banco y representan la suma de diferentes conceptos como honorarios, pérdida por siniestros, impuestos y tasas, arrendamientos, mantenimientos, adecuaciones, depreciación, entre otros.
- **Costos laborales:** también tomados del (PyG) de cada banco y representan los costos que los bancos pagan a sus empleados básicamente por concepto de salario, bonificaciones y contribuciones.
- **Depósitos:** hacen referencia a las captaciones a término fijo y a la vista. Estos productos financieros tienen la característica de ser custodiados por parte de una entidad financiera por un determinado tiempo y posteriormente son reintegrados en su totalidad acompañados de un interés.
- **Costo total:** esta variable fue construida por el autor con información propia de los bancos y representa la suma de dos de los principales rubros antes descritos, los cuales representan los costos de operación que equivalen a la suma de los costos laborales y los costos generales, acompañados estos de un tercer componente llamado costos por interés, los cuales equivalen a los costos pagados por valoración de inversiones, reajustes, intereses pagados por los depósitos e intereses pagados a otros bancos principalmente. De esta misma manera se estima el costo total en Castro (2001).

En la base construida, los trece bancos analizados se encuentran categorizados de forma alfabética en donde cada banco es identificado por una letra, por lo tanto, en los resultados se evidencia información desde el banco A hasta el banco M. Esta decisión se

tomó para no comprometer de manera directa a ninguno de los bancos con los resultados obtenidos, práctica que es muy usada en este tipo de trabajos, como Castro (2001), Carvallo (2012), Badel (2002), en donde no se menciona ningún banco por nombre propio.

En el total de la muestra analizada, encontramos que ocho de los trece bancos, es decir, 61,54 % del total de los bancos son de orden nacional, lo cual implica que se rigen por la regulación y normativa nacional, y su domicilio social lo tienen en Colombia, el otro 38,46 % de los bancos son de origen extranjero. Con respecto a la cartera de los bancos³, podemos determinar que para este ejercicio los bancos seleccionados, se pueden clasificar como principalmente dedicados a las siguientes carteras:

- **Cartera de microcrédito:** en esta se encuentran los bancos que dedican la mayor parte de su cartera a préstamos de baja cuantía y corta duración.
- **Cartera de consumo:** en esta se encuentran los bancos que dedican la mayor parte de su cartera a préstamos que son realizados a personas, comúnmente, el objetivo principal es el préstamo personal.
- **Cartera de vivienda:** acá se encuentran los bancos que dedican la mayor parte de su cartera a los préstamos orientados a financiar la compra de vivienda.
- **Cartera comercial:** acá se encuentran los bancos que dedican la mayor parte de su cartera a préstamos en donde la naturaleza del financiamiento es para cualquier propósito relacionado con la empresa, por ejemplo, comprar inventario, pagar nómina, adquirir activos, etc, es decir, crecimiento de negocio.

Estas clasificaciones de cartera fueron realizados por el autor tomando la participación en cada una de las carteras con respecto al total de la cartera de cada banco. En el total de la muestra encontramos que el 53.85 % de los bancos entran en la clasificación de cartera comercial, el 30.77 % en la clasificación de cartera de consumo, 7.69 % cartera de microcrédito y 7.69 % cartera de vivienda.

³Hace referencia a los productos compuestos por diferentes valores y títulos que determinan el nivel de rentabilidad y el nivel de riesgo de los diferentes bancos

En la Tabla **3-1** presentada a continuación, se muestra el resumen de las principales clasificaciones de los bancos.

Característica	n = 13
Propiedad	
Extranjero	38.46 %
Nacional	61.54 %
Tipo de Cartera	
Comercial	53.85 %
Consumo	30.77 %
Microcrédito	7.69 %
Vivienda	7.69 %

Tabla 3-1: Clasificación de los bancos

En las Tablas **3-2** y **3-3** presentadas a continuación se puede observar la estructura de la base de datos tomando como referencia los primeros treinta registros de la base de datos empleada y su respectivo resumen descriptivo.

Fecha	Banco	Inversiones	Créditos	Depositos	Generales	Laborales	Costo Total	Propiedad	Tipo de Cartera
Ene-2015	A	18.18	42.37	40.24	0.10	0.05	0.40	Nacional	Comercial
Ene-2015	B	2.47	13.01	11.19	0.09	0.02	0.20	Nacional	Consumo
Ene-2015	C	5.43	19.61	17.83	0.04	0.02	0.18	Extranjero	Comercial
Ene-2015	D	20.88	70.17	53.37	0.15	0.11	0.68	Nacional	Comercial
Ene-2015	E	1.58	6.39	7.55	0.04	0.02	0.15	Extranjero	Consumo
Ene-2015	F	6.24	6.97	11.81	0.01	0.01	0.06	Extranjero	Consumo
Ene-2015	G	6.86	30.98	31.79	0.06	0.04	0.32	Extranjero	Comercial
Ene-2015	H	6.13	21.67	19.71	0.05	0.03	0.22	Nacional	Comercial
Ene-2015	I	1.04	8.91	9.11	0.03	0.03	0.15	Nacional	Vivienda
Ene-2015	J	9.13	41.52	33.82	0.08	0.06	0.44	Nacional	Comercial
Ene-2015	K	2.38	16.90	14.41	0.05	0.02	1.83	Extranjero	Comercial
Ene-2015	L	9.61	10.58	8.07	0.09	0.02	0.23	Nacional	Microcrédito
Ene-2015	M	2.29	7.21	7.99	0.02	0.01	0.10	Nacional	Consumo
Feb-2015	A	18.01	43.32	42.72	0.20	0.10	0.83	Nacional	Comercial
Feb-2015	B	2.45	13.20	12.05	0.06	0.04	0.29	Nacional	Consumo
Feb-2015	C	5.80	19.86	18.60	0.09	0.05	0.36	Extranjero	Comercial
Feb-2015	D	21.50	71.02	54.52	0.31	0.23	1.34	Nacional	Comercial
Feb-2015	E	1.63	6.31	7.36	0.08	0.04	0.29	Extranjero	Consumo
Feb-2015	F	5.84	7.04	11.91	0.03	0.02	0.12	Extranjero	Consumo
Feb-2015	G	5.98	31.22	33.13	0.13	0.08	0.64	Extranjero	Comercial
Feb-2015	H	6.13	21.97	20.14	0.09	0.06	0.42	Nacional	Comercial
Feb-2015	I	1.13	9.03	9.37	0.06	0.06	0.31	Nacional	Vivienda
Feb-2015	J	9.31	41.84	35.36	0.17	0.13	0.88	Nacional	Comercial
Feb-2015	K	2.34	17.28	14.60	0.09	0.05	3.72	Extranjero	Comercial
Feb-2015	L	9.75	10.69	8.98	0.13	0.04	0.40	Nacional	Microcrédito
Feb-2015	M	2.11	7.40	8.13	0.05	0.03	0.20	Nacional	Consumo
Mar-2015	A	18.42	44.37	43.61	0.29	0.15	1.23	Nacional	Comercial
Mar-2015	B	2.41	13.30	11.96	0.09	0.06	0.43	Nacional	Consumo
Mar-2015	C	5.14	20.18	18.66	0.14	0.08	0.55	Extranjero	Comercial
Mar-2015	D	23.99	71.91	55.24	0.48	0.36	2.03	Nacional	Comercial

Tabla 3-2: Estructura de base de datos

La Tabla **3-2** corresponde a la estructura de datos de panel especificado en la sección 2.4 desarrollada en el marco teórico, en donde la variable **Fecha** representa la dimensión temporal y por cada banco se comprende un total de $T = 72$ periodos analizados y la variable **Banco** representa los datos de corte transversal que presenta una dimensión de $N = 13$ bancos. Las demás variables se incluyen en el modelo con estructura de datos de panel para explicar los costos y la eficiencia estimada.

Banco	Inversiones	Cartera	Depositos	Generales	Laborales	Costo Total
A	23.69 (4.86)	53.39 (4.92)	51.74 (6.34)	0.79 (0.45)	0.38 (0.21)	2.88 (1.58)
B	3.12 (0.55)	17.50 (2.47)	15.94 (2.65)	0.29 (0.17)	0.17 (0.10)	1.14 (0.65)
C	5.74 (0.82)	20.89 (0.58)	17.84 (1.71)	0.35 (0.22)	0.19 (0.11)	1.26 (0.68)
D	28.25 (5.84)	104.93 (19.49)	83.51 (19.10)	1.42 (0.82)	1.07 (0.58)	6.49 (3.72)
E	2.90 (1.51)	5.44 (2.14)	7.29 (1.38)	0.22 (0.17)	0.11 (0.08)	0.82 (0.52)
F	7.13 (1.54)	8.37 (0.97)	13.67 (2.21)	0.10 (0.05)	0.06 (0.04)	0.42 (0.23)
G	8.70 (2.47)	42.70 (6.05)	43.30 (6.25)	0.50 (0.28)	0.30 (0.16)	2.50 (1.40)
H	5.65 (1.03)	26.66 (2.37)	22.41 (2.55)	0.40 (0.23)	0.23 (0.13)	1.65 (0.89)
I	1.35 (0.28)	10.57 (0.72)	10.72 (1.05)	0.25 (0.14)	0.23 (0.13)	1.16 (0.62)
J	11.32 (2.31)	62.94 (12.84)	49.39 (9.33)	0.75 (0.44)	0.54 (0.30)	3.92 (2.24)
K	2.60 (0.75)	23.07 (4.35)	20.57 (4.78)	0.41 (0.28)	0.24 (0.15)	2.45 (2.35)
L	9.92 (0.65)	12.93 (1.12)	8.58 (0.84)	0.32 (0.18)	0.19 (0.11)	1.30 (0.71)
M	1.79 (0.41)	10.01 (1.47)	10.33 (1.46)	0.22 (0.12)	0.12 (0.07)	0.83 (0.47)

Tabla 3-3: Resumen descriptivo de variables

La Tabla 3-3 presenta los valores promedio de las diferentes variables cuantitativas que serán implementadas en los modelos a estimar con sus respectivas desviaciones estándar. Como se puede observar, los valores promedio en las variables Inversiones, Cartera y Depósitos presentan grandes diferencias entre los bancos, en donde los bancos con mayor valor promedio en dichas variables presentan mayores desviaciones en sus datos. Por su parte, en las variables Generales, Laborales y Costo Total los bancos presentan tanto valores promedios como desviaciones estándar más homogéneas.

3.2. Estimaciones

En esta sección se presentarán los resultados que se obtuvieron a partir de los diferentes modelos establecidos en la Sección 2.4 del marco teórico, que fueron estimados usando el paquete SFA del Software estadístico R para después de la comparación de los modelos y selección de aquel que da el mejor ajuste se estima la eficiencia en costos de los bancos más representativos del sistema bancario colombiano en el periodo 2015 - 2020. Los resultados se presentarán de la siguiente manera: 1. Estimación del modelo de frontera estocástica de costos bajo las especificaciones: a) Cobb Douglas con cambio tecnológico, b) Cobb Douglas sin cambio tecnológico, c) Translogarítmica con cambio tecnológico y d) Translogarítmica sin cambio tecnológico. 2. Comparación y elección del modelo y 3. Estimación de la eficiencia en costos para el sistema bancario colombiano bajo el modelo seleccionado.

Todos los modelos estimados objeto de este capítulo se hacen bajo modelos Log-Log, en donde la variable $\ln v$ es el logaritmo de las inversiones, $\ln c$ el logaritmo de la cartera, $\ln g$ el logaritmo de los costos generales, $\ln l$ el logaritmo de los costos laborales, $\ln d$ el logaritmo de los depósitos, Δ representa el cambio tecnológico, γ representa el término de ineficiencia y σ son las varianzas.

Conociendo la importancia de la linealidad en el precio de los inputs para garantizar la correcta especificación de los modelos a estimar, concepto que fue explicado en la Sección 2.3, la variable depósitos fue la seleccionada para garantizar dicha condición en los modelos estimados en este trabajo. Lo que implica, que el coeficiente atribuido a la variable depósitos se obtendrá a partir de los coeficientes estimados para la variable **Generales** y **Laborales** de la siguiente manera:

$$\alpha_N = 1 - \sum_{i=1}^{N-1} \alpha_i \quad (3-1)$$

Donde (3-1) fue explicada en la Sección 2.3.1 para los modelos con especificación Cobb Douglas y para el caso de los modelos con especificación Translogarítmica en la Sección 2.3.2.

Como lo plantea Castro (2001) en la estructura de datos de panel el no cumplimiento de la condición de normalidad no causa afectación significativa en los resultados obtenidos por la metodología de frontera estocástica.

3.2.1. Estimación del modelo de frontera estocástica de costos bajo la especificación Cobb Douglas con cambio tecnológico

Para la estimación del modelo econométrico bajo la especificación Cobb Douglas con cambio tecnológico, las variables que se consideran son los créditos, las inversiones, depósitos, costo general, costo laboral, costos totales y la componente tecnológico.

En (3-2) se detalla el modelo planteado con cambio tecnológico para la especificación Cobb Douglas que sirve para explicar el nivel de eficiencia en costos de los bancos.

$$\begin{aligned} \ln \left(\frac{\text{Costo Total}}{\text{Depositos}} \right) = & \alpha_0 + \alpha_1 \text{Inversiones} + \alpha_2 \text{Cartera} \\ & + \alpha_3 \ln \left(\frac{\text{Generales}}{\text{Depositos}} \right) + \alpha_4 \ln \left(\frac{\text{Laborales}}{\text{Depositos}} \right) \\ & + \alpha_5 \text{Tecnologia} + \text{error.} \end{aligned} \quad (3-2)$$

Los resultados obtenidos al ajustar el modelo antes descrito se presentan a continuación en la Tabla 3-4.

	Estimate	Std. Error	z value	Pr(> z)
(Intercept)	-0.19	0.03	-7.32	0.00
linv	0.28	0.04	7.18	0.00
lcart	0.06	0.07	0.89	0.37
lgen	0.47	0.05	8.58	0.00
llab	0.50	0.06	8.82	0.00
mMes	0.01	0.00	5.21	0.00
sigmaSq	0.12	0.03	3.47	0.00
gamma	0.64	0.11	6.10	0.00
sigmaSqU	0.07	0.03	2.22	0.03
sigmaSqV	0.04	0.00	21.76	0.00
sigma	0.34	0.05	6.94	0.00
sigmaU	0.27	0.06	4.44	0.00
sigmaV	0.20	0.00	43.52	0.00
lambdaSq	1.79	0.82	2.18	0.03
lambda	1.34	0.31	4.37	0.00
varU	0.03			
sdU	0.16			
gammaVar	0.39			

Tabla 3-4: Modelo estimado Cobb Douglas con cambio tecnológico

Con base en los resultados obtenidos a partir de la especificación objeto de este apartado, que se presentan en la Tabla **3-4** podemos concluir que la función de costos estimada es linealmente homogénea ya que la sumatoria de los coeficientes de los inputs de producción general, laborales y depósitos suman uno ($0.47 + 0.50 + 0.03 = 1$), monótonamente creciente en el precio de los insumos ya que los coeficientes de los inputs de producción son positivos ($0.47, 0.50, 0.03 \geq 0$) y por lo tanto, se cumple la condición de no negatividad en precios ($0 \leq 0.47, 0.50, 0.03 \leq 1$). Para el término de ineficiencia del modelo estimado (gammaVar), se evidencia que presenta gran relevancia en los resultados y que las desviaciones presentadas por parte de los bancos analizados con respecto a la frontera eficiente de costos se encuentran impactadas tanto por factores externos a los bancos, como por decisiones propias de los mismos que los ubican en condiciones de ineficiencia, ya que aproximadamente 39% de la desviación o varianza por parte de los bancos de la frontera eficiente es explicada por la ineficiencia o las decisiones propias de los bancos, lo que explica que el 61% de la desviación sea atribuida a variables exógenas a los bancos. Los coeficientes estimados para el modelo nos indican que las elasticidades obtenidas para los costos generales, costos laborales y costos de los depósitos son 0.47%, 0.50% y 0.03% respectivamente, lo que implica que un aumento del 1% en la cantidad producida aumenta en promedio un 0.37% al costo estimado. Con respecto a la tasa de cambio

tecnológico mensual (mMes) se evidencia que representa alrededor 1 %, y encontramos que la única variable no significativa para el modelo estimado es la cartera, pues todas las demás variables aportan información relevante a la función de costos estimada.

3.2.2. Estimación del modelo de frontera estocástica de costos bajo la especificación Cobb Douglas sin cambio tecnológico

Para este caso, la estimación del modelo econométrico de frontera estocástica bajo esta especificación para estimar la eficiencia en costos de los bancos en el periodo en cuestión considera las variables créditos, inversiones, depósitos, costo general, costo laboral, costos totales y se elimina en este modelo el componente tecnológico.

A continuación se presenta el modelo ajustado sin cambio tecnológico para la especificación Cobb Douglas para explicar el nivel de eficiencia en costos de los bancos.

$$\begin{aligned} \ln \left(\frac{\text{Costo Total}}{\text{Depositos}} \right) = & \alpha_0 + \alpha_1 \text{Inversiones} + \alpha_2 \text{Cartera} \\ & + \alpha_3 \ln \left(\frac{\text{Generales}}{\text{Depositos}} \right) + \alpha_4 \ln \left(\frac{\text{Laborales}}{\text{Depositos}} \right) \\ & + \text{error.} \end{aligned} \quad (3-3)$$

Los resultados obtenidos al ajustar el modelo (3-3) se presentan a continuación en la Tabla 3-5.

	Estimate	Std. Error	z value	Pr(> z)
(Intercept)	-0.18	0.03	-5.99	0.00
linv	0.27	0.04	6.01	0.00
lcart	0.11	0.07	1.51	0.13
lgen	0.54	0.05	10.00	0.00
llab	0.42	0.05	7.70	0.00
sigmaSq	0.11	0.03	3.63	0.00
gamma	0.60	0.11	5.44	0.00
sigmaSqU	0.06	0.03	2.18	0.03
sigmaSqV	0.04	0.00	21.46	0.00
sigma	0.33	0.05	7.26	0.00
sigmaU	0.25	0.06	4.37	0.00
sigmaV	0.21	0.00	42.93	0.00
lambdaSq	1.51	0.70	2.17	0.03
lambda	1.23	0.28	4.33	0.00
varU	0.02			
sdU	0.15			
gammaVar	0.35			

Tabla 3-5: Modelo estimado Cobb Douglas sin cambio tecnológico

Para este caso, los resultados obtenidos a partir de la especificación Cobb Douglas sin cambio tecnológico presentados en la Tabla **3-5** nos permiten concluir que la función de costos estimada es linealmente homogénea ya que también se cumple que la sumatoria de los coeficientes de los inputs de producción general, laborales y depósitos suman uno ($0.54 + 0.42 + 0.04 = 1$), monótonamente creciente en el precio de los insumos ya que los coeficientes de los inputs de producción son positivos ($0.54, 0.42, 0.04 \geq 0$) y por lo tanto, se cumple la condición de no negatividad en precios ($0 \leq 0.54, 0.42, 0.04 \leq 1$). Con respecto al término de ineficiencia del modelo estimado (gammaVar), se evidencia que presenta gran relevancia en los resultados y que las desviaciones presentadas por parte de los bancos analizados con respecto a la frontera eficiente de costos se encuentran impactadas tanto por factores externos a los bancos, como por decisiones propias de los mismos que los ubican en condiciones de ineficiencia. Aproximadamente 35% de la desviación o varianza por parte de los bancos de la frontera eficiente es explicada por la ineficiencia o las decisiones propias de los bancos, lo que explica que el 65% de la desviación sea atribuida a variables exógenas a los bancos.

Los coeficientes estimados para el modelo nos indican que las elasticidades obtenidas para los costos generales, costos laborales y costos de los depósitos son 0.54%, 0.42% y 0.04% respectivamente, lo que implica que un aumento del 1% en la cantidad producida

aumenta en promedio un 0.38% al costo estimado. Para este caso, encontramos que la única variable no significativa para el modelo estimado es la cartera, pues todas las demás variables aportan información relevante a la función de costos estimada.

3.2.3. Estimación del modelo de frontera estocástica de costos bajo la especificación Translogarítmica con cambio tecnológico

Para la especificación translogarítmica con cambio tecnológico la estimación del modelo econométrico de frontera estocástica para estimar la eficiencia en costos de los bancos en el periodo en cuestión considera las variables créditos, inversiones, depósitos, costo general, costo laboral, costos totales y la variable de cambio tecnológico, así como la transformación de las variables antes mencionadas expresadas al cuadrado, multiplicadas por un escalar y la interacción entre ellas mismas.

A continuación se presenta el modelo ajustado con cambio tecnológico para la especificación Translogarítmica para explicar el nivel de eficiencia en costos de los bancos.

$$\begin{aligned}
 \ln \left(\frac{\text{Costo Total}}{\text{Depositos}} \right) = & \alpha_0 + \alpha_1 \ln (\text{Inversiones}) + \alpha_2 \ln (\text{Cartera}) + \alpha_3 \ln \left(\frac{\text{Generales}}{\text{Depositos}} \right) \\
 & + \alpha_4 \ln \left(\frac{\text{Laborales}}{\text{Depositos}} \right) + \frac{1}{2} \alpha_5 \ln (\text{Inversiones})^2 + \frac{1}{2} \alpha_6 \ln (\text{Cartera})^2 \\
 & + \frac{1}{2} \alpha_7 \ln \left(\frac{\text{Generales}}{\text{Depositos}} \right)^2 + \frac{1}{2} \alpha_8 \ln \left(\frac{\text{Laborales}}{\text{Depositos}} \right)^2 \\
 & + \alpha_9 \ln (\text{Inversiones}) * \ln (\text{Cartera}) + \alpha_{10} \ln (\text{Inversiones}) * \ln \left(\frac{\text{Generales}}{\text{Depositos}} \right) \\
 & + \alpha_{11} \ln (\text{Inversiones}) * \ln \left(\frac{\text{Laborales}}{\text{Depositos}} \right) + \alpha_{12} \ln (\text{Cartera}) * \ln \left(\frac{\text{Generales}}{\text{Depositos}} \right) \\
 & + \alpha_{13} \ln (\text{Cartera}) * \ln \left(\frac{\text{Laborales}}{\text{Depositos}} \right) + \alpha_{14} \ln \left(\frac{\text{Generales}}{\text{Depositos}} \right) * \ln \left(\frac{\text{Laborales}}{\text{Depositos}} \right) \\
 & + \alpha_{15} \text{Tecnologia} + \text{error}.
 \end{aligned}
 \tag{3-4}$$

Los resultados obtenidos al ajustar el modelo (3-4) se presentan a continuación en la Tabla 3-6.

	Estimate	Std. Error	z value	Pr(> z)
(Intercept)	-0.15	0.02	-7.41	0.00
log(inv)	0.12	0.09	1.35	0.18
log(cart)	0.49	0.21	2.35	0.02
log(gen)	0.72	0.07	10.12	0.00
log(lab)	0.21	0.08	2.84	0.00
I(0.5 * log(inv)^2)	-0.85	0.24	-3.58	0.00
I(0.5 * log(cart)^2)	0.54	0.81	0.67	0.50
I(0.5 * log(gen)^2)	-0.23	0.23	-0.98	0.33
I(0.5 * log(lab)^2)	-0.16	0.23	-0.71	0.48
I(log(inv) * log(cart))	-1.01	0.39	-2.58	0.01
I(log(inv) * log(gen))	0.12	0.14	0.84	0.40
I(log(inv) * log(lab))	-0.15	0.14	-1.06	0.29
I(log(cart) * log(gen))	1.48	0.29	5.15	0.00
I(log(cart) * log(lab))	-1.54	0.31	-4.92	0.00
I(log(gen) * log(lab))	0.18	0.23	0.77	0.44
mMes	0.01	0.00	6.35	0.00
sigmaSq	0.09	0.02	3.86	0.00
gamma	0.57	0.11	5.09	0.00
sigmaSqU	0.05	0.02	2.21	0.03
sigmaSqV	0.04	0.00	20.43	0.00
sigma	0.29	0.04	7.72	0.00
sigmaU	0.22	0.05	4.41	0.00
sigmaV	0.19	0.00	40.87	0.00
lambdaSq	1.35	0.62	2.17	0.03
lambda	1.16	0.27	4.33	0.00
varU	0.02			
sdU	0.13			
gammaVar	0.33			

Tabla 3-6: Modelo estimado Translogarítmico con cambio tecnológico

Con base en los resultados obtenidos a partir de la especificación objeto de este apartado, los cuales se presentan en la Tabla 3-6 podemos concluir que la función de costos estimada es linealmente homogénea ya que la sumatoria de los coeficientes de los inputs de producción general, laborales y depósitos suman uno ($0.72 + 0.21 + 0.07 = 1$), monótonamente creciente en el precio de los insumos ya que los coeficientes de los inputs de producción son positivos ($0.72, 0.21, 0.07 \geq 0$) y por lo tanto, se cumple la condición de

no negatividad en precios ($0 \leq 0.72, 0.21, 0.07 \leq 1$). Para el término de ineficiencia del modelo estimado (gammaVar), se evidencia que presenta gran relevancia en los resultados y que las desviaciones presentadas por parte de los bancos analizados con respecto a la frontera eficiente de costos se encuentran impactadas tanto por factores externos a los bancos, como por decisiones propias de los mismos que los ubican en condiciones de ineficiencia. Aproximadamente 33 % de la desviación o varianza por parte de los bancos de la frontera eficiente es explicada por la ineficiencia o las decisiones propias de los bancos, lo que explica que el 67 % de la desviación sea atribuida a variables exógenas a los bancos.

Los coeficientes estimados para el modelo nos indican que las elasticidades obtenidas para los costos generales, costos laborales y costo de los depósitos son 0.72 %, 0.21 % y 0.07 % respectivamente, lo que implica que un aumento del 1 % en la cantidad producida aumenta en un 0.61 % al costo estimado. Con respecto a la tasa de cambio tecnológico mensual (mMes) se evidencia que representa alrededor 1 %. Para este caso nos encontramos que la mayoría de las variables son significativas siendo variables que aportan información relevante a la función de costos estimada y que la variable inversiones hace parte de las variables que no son significativas.

3.2.4. Estimación del modelo de frontera estocástica de costos bajo la especificación Translogarítmica sin cambio tecnológico

En este apartado, se realiza la estimación de la eficiencia en costos por medio de un modelo econométrico bajo especificación translogarítmica sin cambio tecnológico, en donde las variables contempladas en el modelo son los créditos, inversiones, depósitos, costo general, costo laboral, costos totales y la transformación de las variables antes mencionadas expresadas al cuadrado, multiplicadas por un escalar y la interacción entre ellas mismas.

A continuación se presenta el modelo ajustado sin cambio tecnológico para la especificación Translogarítmica que explica el nivel de eficiencia en costos de los bancos.

$$\begin{aligned}
\ln \left(\frac{\text{Costo Total}}{\text{Depositos}} \right) &= \alpha_0 + \alpha_1 \ln (\text{Inversiones}) + \alpha_2 \ln (\text{Cartera}) + \alpha_3 \ln \left(\frac{\text{Generales}}{\text{Depositos}} \right) \\
&+ \alpha_4 \ln \left(\frac{\text{Laborales}}{\text{Depositos}} \right) + \frac{1}{2} \alpha_5 \ln (\text{Inversiones})^2 + \frac{1}{2} \alpha_6 \ln (\text{Cartera})^2 \\
&+ \frac{1}{2} \alpha_7 \ln \left(\frac{\text{Generales}}{\text{Depositos}} \right)^2 + \frac{1}{2} \alpha_8 \ln \left(\frac{\text{Laborales}}{\text{Depositos}} \right)^2 \\
&+ \alpha_9 \ln (\text{Inversiones}) * \ln (\text{Cartera}) + \alpha_{10} \ln (\text{Inversiones}) * \ln \left(\frac{\text{Generales}}{\text{Depositos}} \right) \\
&+ \alpha_{11} \ln (\text{Inversiones}) * \ln \left(\frac{\text{Laborales}}{\text{Depositos}} \right) + \alpha_{12} \ln (\text{Cartera}) * \ln \left(\frac{\text{Generales}}{\text{Depositos}} \right) \\
&+ \alpha_{13} \ln (\text{Cartera}) * \ln \left(\frac{\text{Laborales}}{\text{Depositos}} \right) + \alpha_{14} \ln \left(\frac{\text{Generales}}{\text{Depositos}} \right) * \ln \left(\frac{\text{Laborales}}{\text{Depositos}} \right) \\
&+ \text{error.}
\end{aligned}
\tag{3-5}$$

Los resultados obtenidos al ajustar el modelo (3-5) se presentan a continuación en la Tabla 3-7.

	Estimate	Std. Error	z value	Pr(> z)
(Intercept)	-0.16	0.03	-6.20	0.00
log(inv)	0.01	0.09	0.17	0.87
log(cart)	0.27	0.21	1.32	0.19
log(gen)	0.80	0.07	11.19	0.00
log(lab)	0.11	0.08	1.53	0.13
I(0.5 * log(inv)^2)	-1.09	0.23	-4.69	0.00
I(0.5 * log(cart)^2)	-0.30	0.80	-0.38	0.71
I(0.5 * log(gen)^2)	-0.44	0.23	-1.89	0.06
I(0.5 * log(lab)^2)	-0.37	0.23	-1.56	0.12
I(log(inv) * log(cart))	-1.33	0.39	-3.46	0.00
I(log(inv) * log(gen))	0.12	0.14	0.87	0.38
I(log(inv) * log(lab))	-0.16	0.15	-1.07	0.29
I(log(cart) * log(gen))	1.24	0.29	4.25	0.00
I(log(cart) * log(lab))	-1.28	0.32	-4.04	0.00
I(log(gen) * log(lab))	0.38	0.23	1.64	0.10
sigmaSq	0.09	0.02	3.81	0.00
gamma	0.59	0.11	5.54	0.00
sigmaSqU	0.06	0.02	2.27	0.02
sigmaSqV	0.04	0.00	21.46	0.00
sigma	0.31	0.04	7.62	0.00
sigmaU	0.24	0.05	4.53	0.00
sigmaV	0.20	0.00	42.93	0.00
lambdaSq	1.47	0.65	2.24	0.02
lambda	1.21	0.27	4.49	0.00
varU	0.02			
sdU	0.14			
gammaVar	0.35			

Tabla 3-7: Modelo estimado Translogarítmico sin cambio tecnológico

Si observamos los resultados obtenidos a partir de la especificación objeto de este apartado, que se presentan en la Tabla **3-7** podemos concluir que la función de costos estimada es linealmente homogénea ya que la sumatoria de los coeficientes de los inputs de producción general, laborales y depósitos suman uno ($0.80 + 0.11 + 0.09 = 1$), monótonamente creciente en el precio de los insumos, ya que los coeficientes de los inputs de producción son positivos ($0.80, 0.11, 0.09 \geq 0$) y por lo tanto, se cumple la condición de no negatividad en precios ($0 \leq 0.80, 0.11, 0.09 \leq 1$). Para el término de ineficiencia del modelo estimado (γVar), se evidencia que presenta gran relevancia en los resultados y que las desviaciones presentadas por parte de los bancos analizados con respecto a la frontera

eficiente de costos se encuentran impactadas tanto por factores externos a los bancos, como por decisiones propias de los mismos que los ubican en condiciones de ineficiencia. Aproximadamente 35 % de la desviación o varianza por parte de los bancos de la frontera eficiente es explicada por la ineficiencia o las decisiones propias de los bancos, lo que explica que el 65 % de la desviación sea atribuida a variables exógenas a los bancos.

Los coeficientes estimados para el modelo nos indican que las elasticidades obtenidas para los costos generales, costos laborales y costo de los depósitos son 0.80 %, 0.11 % y 0.09 % respectivamente, lo que implica que un aumento del 1 % en la cantidad producida aumenta en promedio un 0.29 % al costo estimado. Para este caso nos encontramos con algunas variables significativas siendo variables que aportan información relevante a la función de costos estimada y que la variable inversiones, cartera y laborales hacen parte de las variables que no son significativas.

3.2.5. Comparación y elección del modelo

Las estimaciones realizadas en la sección anterior nos permiten evidenciar todos los posibles modelos y estructuras por las cuales podemos estimar los niveles de eficiencia de nuestra muestra de bancos en el periodo 2015 - 2020, por tal motivo nuestro propósito ahora es seleccionar el modelo que mejor se ajusta a los datos analizados y de una manera más exacta a las necesidades planteadas. En este orden de ideas, para llevar a cabo la elección del modelo es necesario tener evidencia estadística que respalde dicha elección. La prueba de razón de verosimilitud será el criterio estadístico empleado, como fue introducido en la Sección 2.5

Lo primero que haremos es elegir entre los modelos bajo especificación Cobb Douglas si el modelo con cambio tecnológico se ajusta mejor a nuestros datos o por el contrario es el modelo sin cambio tecnológico el que mejor lo hace. Posteriormente realizaremos el mismo análisis antes descrito para la especificación translogarítmica y finalmente, elegiremos entre especificaciones resultado de los dos procesos antes descritos y de esta manera tendremos el modelo más apropiado para el caso de aplicación objeto de este trabajo.

Elección de modelo Cobb Douglas.

En este apartado realizaremos la elección del modelo bajo especificación Cobb Douglas que mejor se ajusta a los datos, es decir, veremos si el modelo con cambio tecnológico es el modelo con mejor ajuste, o por el contrario es el modelo estimado sin cambio tecnológico.

	#Df	LogLik	Df	Chisq	Pr(>Chisq)
1	8	138.38			
2	7	125.61	1	25.53	0.0000

Tabla 3-8: Prueba de razón de verosimilitud - modelos con especificación Cobb Douglas

Considerando los resultados obtenidos en la Tabla **3-8** en donde tenemos que el valor p arrojado de la prueba realizada es menor que 0.05 se puede rechazar la hipótesis nula de la prueba y concluir que el mejor ajuste a los datos se presenta en el modelo completo, es decir, el mejor ajuste lo arroja el modelo Cobb Douglas en donde se incluye el cambio tecnológico como una variable del modelo estimado.

Elección de modelo Translogarítmico.

En este apartado realizaremos la elección del modelo bajo especificación Translogarítmica que mejor se ajusta a los datos, es decir, veremos si el modelo con cambio tecnológico es el modelo con mejor ajuste, o por el contrario es el modelo estimado sin cambio tecnológico.

	#Df	LogLik	Df	Chisq	Pr(>Chisq)
1	18	197.95			
2	17	176.50	1	42.90	0.0000

Tabla 3-9: Prueba de razón de verosimilitud - modelos con especificación Translogarítmica

Considerando los resultados obtenidos en la Tabla 3-9 en donde se evidencia que el valor p es menor que 0.05 se puede rechazar la hipótesis nula de la prueba analizada y concluir que el mejor ajuste a los datos se presenta en el modelo completo, es decir, el mejor ajuste lo arroja el modelo Translogarítmico en donde se incluye el cambio tecnológico como una variable del modelo estimado.

Elección de modelo entre especificaciones Cobb Douglas - Translogarítmica.

Partiendo del pleno conocimiento de que en el análisis de especificaciones separadas, en ambos casos los modelos que mejor se ajustan a los datos analizados son los modelos en los cuales el cambio tecnológico se estima como una variable adicional, se pretende determinar entre ambas especificaciones cuál de estos dos modelos previamente seleccionados se ajusta mejor al ser comparados, en donde asumiremos que el modelo completo en este caso es el modelo de especificación translogarítmica y el modelo anidado es representado por el modelo de especificación Cobb Douglas.

	#Df	LogLik	Df	Chisq	Pr(>Chisq)
1	18	197.95			
2	8	138.38	10	119.15	0.0000

Tabla 3-10: Prueba de razón de verosimilitud - especificación Cobb Douglas - Translogarítmica

Finalmente, considerando los resultados obtenidos en la Tabla 3-10 en donde se evidencia que el valor p es menor que 0.05 se puede rechazar la hipótesis nula de la prueba analizada y concluir que el mejor ajuste a los datos se presenta con el modelo bajo especificación Translogarítmica con cambio tecnológico, presentado en la sección 3.2.3.

Prueba de normalidad en los errores del modelo Translogarítmico con cambio tecnológico.

Como se expresa en (2-3) y (2-4) los modelos de fronteras estocásticas requieren algunos supuestos de distribución en los términos de error ($\epsilon = u + v$). Por tanto, con estas suposiciones se tiene como resultado una distribución sesgada hacia la izquierda del

término de error compuesto ϵ (Henningsen 2020). Dicho esto, se puede esperar que el comportamiento del error ϵ no cumpla la condición de normalidad. Lo cual se puede verificar en la prueba gráfica de normalidad en los errores que se presenta a continuación:

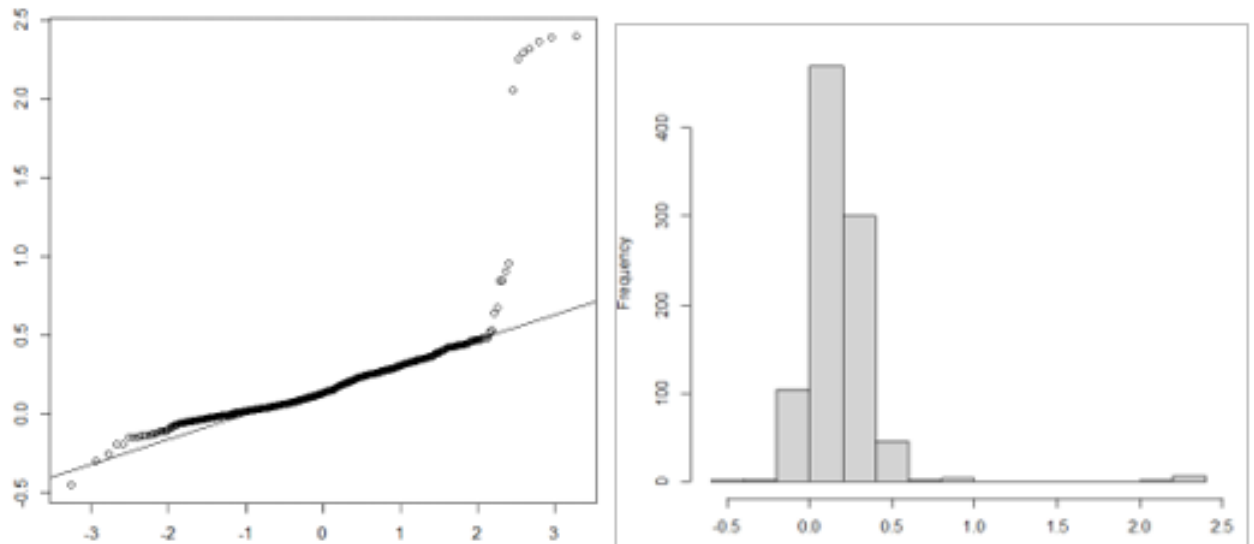


Figura 3-1: Normalidad en los errores. *Fuente: Construcción propia.*

En el histograma de los errores se observa que la distribución de los mismos se ve aproximadamente simétrica con una mayor desviación a la derecha, al igual que la presencia de algunos datos atípicos.

Como se mencionó en la Sección 3.2, en la estructura de datos de panel el no cumplimiento de la condición de normalidad no causa afectación significativa en los resultados obtenidos por la metodología de frontera estocástica. (Castro 2001)

3.2.6. Estimación de la eficiencia en costos del sistema bancario colombiano bajo la especificación translogarítmica con cambio tecnológico.

Conociendo que el modelo con mejor ajuste a los datos analizados es el modelo Translogarítmico con cambio tecnológico, realizamos la estimación de la eficiencia en costos del sistema bancario colombiano. Los resultados se presentan a continuación en la Tabla 3-11:

Banco	Eficiencia
C	1
F	0.99
B	0.99
M	0.95
H	0.95
A	0.95
D	0.88
E	0.86
L	0.81
G	0.78
J	0.75
I	0.73
K	0.64

Tabla 3-11: Eficiencia en costos - especificación Translogarítmica con cambio tecnológico.

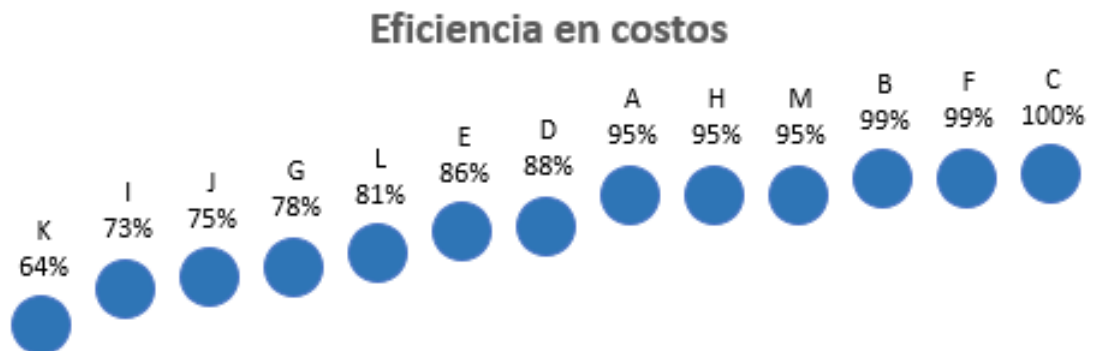


Figura 3-2: Eficiencia en costos - especificación Translogarítmica con cambio tecnológico. *Fuente: Construcción propia.*

En la Tabla 3-11 y Figura 3-2 derivadas de la especificación Translogarítmica con cambio tecnológico se evidencia que el banco más eficiente en la muestra es el banco C de orden extranjero que dedica su cartera principalmente a los créditos comerciales.

Los niveles de eficiencia evidenciados, muestran que algunos bancos presentan poca desviación de la práctica más eficiente de la muestra seleccionada, siendo estos bancos en su mayoría de orden nacional y los cuales enfocan su cartera principalmente a los créditos de consumo.

A partir de los valores promedio y desviaciones estándar de las variables presentados en la Tabla 3-3 se evidencia que los bancos con valores promedios más altos en sus variables cuantitativas, no son necesariamente los más eficientes.

3.3. Conclusiones y recomendaciones

3.3.1. Conclusiones

A continuación se presentan las conclusiones más relevantes derivadas de los resultados obtenidos en este trabajo para la estimación de la eficiencia en costos en el sistema bancario colombiano bajo la especificación translogarítmica con cambio tecnológico.

- Se evidencia que las decisiones tomadas por los bancos los impactan en gran medida en sus niveles de ineficiencia, lo que hace que estos se alejen de la práctica más óptima en cuanto a costos se refiere, esto es, que los costos derivados de su producción no sean óptimos, lo cual quedó evidenciado en que el 33% de la varianza de los bancos de la llamada frontera eficiente es atribuida a sus propias decisiones.
- La mayor desviación de los bancos con respecto a la frontera eficiente de costos es atribuida a decisiones externas o aleatorias que pueden ser de carácter macroeconómico, condiciones de mercado, condiciones naturales, pero no son el único motivo de desviación, los bancos en su propia operación son ineficientes.
- Entre los cinco bancos más eficientes de la muestra analizada, se encuentra que la mayoría de estos bancos son de orden nacional y que la dedicación de su cartera se encuentra dirigida principalmente a los créditos de consumo.
- Los bancos con mayores valores promedios en las variables que representan el producto y los precios de los inputs de producción en el modelo estimado, no son los bancos más eficientes, al igual que los bancos con menores valores promedios en las variables ya mencionadas no son los bancos más ineficientes del sistema bancario colombiano.

3.3.2. Recomendaciones

En este apartado, se mencionarán aspectos de relevancia que pueden complementar el trabajo desarrollado quizá como trabajos futuros.

- El análisis que se abordó en el presente trabajo podría complementarse con otras medidas paramétricas como fronteras gruesas (TFA) y aproximaciones de distribuciones libre (DFA), para determinar si se presentan cambios significativos en los resultados obtenidos para la estimación de la eficiencia en costos.
- En el presente trabajo se tomó el periodo de tiempo comprendido entre 2015 - 2020 para estimar las eficiencias en costos, sería interesante poder tomar un periodo de tiempo más largo en donde se han presentado cambios normativos y grandes impactos económicos para evidenciar si los resultados cambian de manera significativa.

- Los datos de corte transversal se pueden segmentar a nivel de otro criterio como tipo de cartera, orden, antigüedad, para realizar la estimación de la eficiencia en costos.

Bibliografía

- Aigner, D., Lovell, C. K. & Schmidt, P. (1977), 'Formulation and estimation of stochastic frontier production function models', *Journal of econometrics* **6**(1), 21–37.
- Almanza-Ramírez, C. (2012), 'Eficiencia en costos de la banca en Colombia, 1999-2007: una aproximación no paramétrica', *INNOVAR. Revista de Ciencias Administrativas y Sociales* **22**(44), 67–78.
- Badel, A. (2002), Sistema bancario colombiano: ¿Somos eficientes a nivel internacional?, Technical report, Departamento Nacional de Planeación.
- Buchelli Lozano, G. A. & Marín Restrepo, J. J. (2012), 'Estimación de la eficiencia del sector metalmeccánico en Colombia: análisis de la frontera estocástica', *Cuadernos de Economía* **31**(58), 257–286.
- Carvallo O.; Alvarado M., (2012), 'Eficiencia, economías de escala y economías de alcance en el sistema bancario venezolano (2004 - 2012)', *Banco Central de Venezuela*.
- Castro, C. (2001), 'Eficiencia-x en el sector bancario colombiano', *Revista desarrollo y sociedad* (48), 1–52.
- Christensen, L. R., Jorgenson, D. W. & Lau, L. J. (1973), 'Transcendental logarithmic production frontiers', *The review of economics and statistics* pp. 28–45.
- Cohen, E. & Franco, R. (2000), *Evaluación de proyectos sociales*, Siglo XXI.
- Díaz Quevedo, O. A. (2009), '¿Cuán eficiente es la banca boliviana? una aproximación mediante fronteras estocásticas', *Revista de Análisis del Banco Central de Bolivia* **11**, 46.
- Estrada, D. & Osorio, P. (2004), 'Efectos del capital financiero en la eficiencia del sistema bancario colombiano', *Borradores de Economía* **292**.
- Gandur, M. J. (2003), 'Eficiencia en costos, cambios en las condiciones generales del mercado y crisis en la banca colombiana: 1992-2002', *Borradores de Economía; No. 260*.
- Hanushek, E. A. (1995), 'Interpreting recent research on schooling in developing countries', *The world bank research observer* **10**(2), 227–246.

- Hernández, J., Díaz, S., Martínez, E. (2001), ‘Una descomposición exacta de la ineficiencia técnica y asignativa usando una especificación cuadrática’.
- Henningsen, A. (2020), *Introduction to Econometric Production Analysis with R (Fifth Draft Version)*, LeanPub.com.
- Herrera, S. & Bernal, O. (1983), ‘Producción, costos y economías de escala en el sistema bancario colombiano’, *Revista ESPE-Ensayos sobre Política Económica* **2**(3), 7–36.
- Kumbhakar, S.C. & Lovell C.A.K. (2000), *Cambridge university press*.
- Martínez, A., Zuleta, L. A., Misas, M., Jaramillo, L. et al. (2016), ‘La competencia y la eficiencia en la banca colombiana’.
- Mayorga M.; Muñoz E., (2000), ‘La técnica de datos de panel, una guía para su uso e interpretación’, *Banco Central de Costa Rica. Departamento de investigaciones económicas*,1–4.
- Mendoza Arregocés, L. & Gómez Palacios, J. F. (n.d.), ‘Eficiencia y productividad del sector bancario colombiano: una aproximación con data envelopment analysis’.
- Pizarro, P., Loreto, A. (2011), ‘Construcción de una función de costos operacionales para la producción de cobre’.
- Poroma Mamani, V. H. (2012), Análisis de la eficiencia en costos del sistema bancario boliviano: economías de escala, economías de alcance y eficiencia-X, PhD thesis.
- Pérez Cárceles, M. C. (2013), ‘Modelos de frontera estocástica. distribución de la ineficiencia.’, *Proyecto de investigación: .*
- Suescun, R., Misas, M. (1996), ‘Cambio tecnológico, ineficiencia de escala e ineficiencia-x en la banca colombiana’, *Borradores de Economía* (59), 1–34.
- Vergara, M. (2006), ‘Nota técnica para estimar fronteras estocásticas: una aplicación a la banca chilena.’, *Estudios de Administración* **13**(2).
- Vigoya Ramírez, A. (2015), ‘Ajuste de una función de producción al sector financiero en colombia’, *Revista de la Facultad de Ciencias Económicas: Investigación y Reflexión* **23**(1), 141–156.