



UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA

Dinámica de un Biorreactor con Modelo de Crecimiento de Bacterias Lineal por Tramos

Luz Alba Melo Varela

Universidad Nacional de Colombia
Facultad Ciencias Exactas y Naturales, Departamento Matemáticas y Estadística
Manizales, Colombia
2011

Dinámica de un Biorreactor con Modelo de Crecimiento de Bacterias Lineal por Tramos

Luz Alba Melo Varela

Tesis o trabajo de grado presentada(o) como requisito parcial para optar al título de:
Magister en Ciencias — Matemática Aplicada

Director:
Doctor, Simeón Casanova Trujillo

Codirector:
Ph.D., Gerard Olivar Tost

Línea de Investigación:
Modelamiento Dinámico de Procesos Biológicos
Grupo de Investigación:
PCI Percepción y Control Inteligente

Universidad Nacional de Colombia
Facultad Ciencias Exactas y Naturales, Departamento Matemáticas y Estadística
Manizales, Colombia
2011

Dynamics of a Biorreactor with Bacterial Growth Model Piecewise Linear

Luz Alba Melo Varela

Tesis o trabajo de grado presentada(o) como requisito parcial para optar al título de:
Magister en Ciencias — Matemática Aplicada

Director:
Doctor, Simeón Casanova Trujillo

Codirector:
Ph.D., Gerard Olivar Tost

Línea de Investigación:
Modelamiento Dinámico de Procesos Biológicos
Grupo de Investigación:
PCI Percepción y Control Inteligente

Universidad Nacional de Colombia
Facultad Ciencias Exactas y Naturales, Departamento Matemáticas y Estadística
Manizales, Colombia
2011

Agradecimientos

En este trabajo se presenta agradecimientos a:

- El profesor Simeón Casanova Trujillo, por sus valiosos aportes a lo largo de la investigación.
- El profesor Gerard Olivert Tost, por su gran ayuda y valiosos aportes a lo largo de la investigación.
- El profesor Carlos Daniel Acosta, por su apoyo y gran colaboración a la realización de esta investigación.
- El profesor Gonzalo Medina Arellano, por sus invaluable aportes para el manejo del programa \LaTeX .
- El ingeniero Ludwing Torres, por su gran colaboración en la parte de simulación.
- A Fanny Janneth Sanchez, por su tiempo para escuchar mis adversidades y darme palabras de animo.
- A mi familia, porque sin ellos no hubiese podido obtener este gran logro, ya que me apoyaron en todo momento y me dieron las fuerzas para no desfallecer en los momentos difíciles.
- A mi tía Elizabeth por sus consejos y por su valiosa colaboración en la parte emocional y espiritual.
- A la Universidad Nacional de Colombia Sede Manizales, por brindarme la posibilidad y los espacios para hacer posible mi trayectoria profesional y académica.

Resumen

El presente trabajo trata sobre la dinámica de un bioreactor UASB (Reactor Anaeróbico de Flujo Ascendente y Manto de Lodos), ubicado en los Laboratorios de Procesos Productivos de la Universidad Nacional de Colombia Sede Manizales.

El modelo matemático de degradación de materia orgánica obtenido por Muñoz, 2006 [25] para la digestión anaerobia del reactor UASB, se varia realizando una aproximación por rectas al modelo de crecimiento bacteriano gobernado por la cinética de Monod. Por tanto el sistema originalmente suave se convierte en un sistema no suave, y queda modelado por un conjunto de ecuaciones diferenciales discontinuas. Para este proceso de aproximación por rectas se considera la zona de 0 a 6000 mg/l DQO en valores para la concentración del sustrato en el reactor (S), ya que además de haberse logrado una buena aproximación, en ésta zona los valores tienen sentido físico y están acordes con el diseño del prototipo del reactor.

Se hace un análisis de estabilidad en cada zona por medio del método indirecto de Lyapunov, con la variación de parámetros tales como el factor de dilución (D), deficiencia de sedimentación en el separador SLG (α) y coeficiente de rendimiento del sustrato (Y) encontrándose que para la zona uno y dos se presentan equilibrios positivos y estables para cada valor de los parámetros, mientras que para la zona tres se obtienen sólo equilibrios negativos, indicando esto que el reactor no puede procesar valores de concentración de sustrato superiores a 4000 mg/l DQO. Se muestra que el parámetro Y no afecta la dinámica del reactor.

Al aplicarle el método convexo de Filippov a las zonas uno y dos por tener una dinámica físicamente posible, se encontró que al variar los parámetros D y α se obtiene una bifurcación no suave del tipo nodo frontera, para valores de D hasta 2.45 y de α hasta 0.26 respectivamente, los cuales varían según los valores de concentración de la biomasa en la corriente de entrada, resultados obtenidos en forma analítica y numérica con un porcentaje de error menor al 0.02 %.

Palabras clave: Digestión, tratamiento de aguas residuales, sistemas dinámicos no lineales, Filippov.

Abstract

This work deals with the dynamics of a UASB bioreactor (Reactor and Upow Anaerobic Sludge Blanket) Laboratories located in Production Processes at Universidad Nacional de Colombia Sede Manizales.

The mathematical model of degradation of organic matter obtained by Muñoz, 2006 [25] for the UASB reactor anaerobic digestion, is varied by a straight approach to growth model bacterial governed by Monod kinetics. Therefore the system originally smooth becomes a non-smooth, and it is modeled by a set of discontinuous differential equations. For this Straight Approach process it is considered the area of 0 to 6000 mg/l DQO values for substrate concentration in the reactor S , as well as having achieved a good approximation, the values in this zone have the physical sense and are consistent with the design of the prototype reactor.

An analysis of stability in each area through the indirect method Lyapunov is carried out, with the variation of parameters such as the dilution factor D , sedimentation deficiency in SLG separator α and coefficient of substrate yield Y , found that for zone one and two have positive and stable equilibrium for each value of parameters while for zone three equilibria are obtained only negative indicating that the reactor can not process the concentration values of substrate over 4000 mg /l DQO. It shows that the parameter Y does not affect the dynamics of reactor.

By applying the Filippov convex method to zones one and two, for they have a physically possible dynamic, it was found that by varying the parameters D and α it is obtained a non-soft fork of node-border type for values from 2 to 2.45 and 0.146 to 0.26 respectively, which vary according to the values of biomass concentration in input current; such results were obtained in an analytical and numerical way, with an error rate under 0.02 %

Key words: Digestion, wastewater treatment, nonlinear dynamic systems, Filippov

Índice general

Agradecimientos	i
Resumen	ii
Abstract	iii
Índice de tablas	vi
Índice de figuras	vii
Lista de abreviaturas y símbolos	ix
1. Preliminares	1
1.1. Motivación	2
1.2. Descripción del trabajo	2
1.3. Contribuciones	2
2. Digestión Anaerobia	4
2.1. Reactor UASB	5
2.1.1. Etapa de arranque	8
2.1.2. Factores que afectan su arranque y operación	11
2.1.3. Ventajas del sistema UASB	13
2.2. Determinación de compuestos orgánicos en aguas residuales	13
2.3. Modelación matemática de procesos biológicos	14
2.3.1. Procesos biológicos de tratamiento	14
2.3.2. Componentes básicos de un modelo	16
2.3.3. Procesos cinéticos básicos	16
2.4. Desarrollo del modelo	17
3. Sistemas Dinámicos	20

3.1.	Definiciones	20
3.1.1.	Sistemas no-lineales	20
3.1.2.	Sistemas de segundo orden	21
3.2.	Teoría de estabilidad de Lyapunov	21
3.2.1.	Análisis dinámico mediante el método indirecto de Lyapunov	22
3.3.	Análisis matemático del modelo	23
3.3.1.	Cálculo de los puntos de equilibrio	24
3.3.2.	Análisis de los puntos de equilibrio	26
3.3.3.	Análisis de la estabilidad	36
3.4.	Bifurcaciones	37
3.4.1.	Bifurcación	37
3.4.2.	Análisis dinámico del sistema propuesto	37
4.	Teoría de Filippov	48
4.1.	División de los sistemas dinámicos discontinuos	48
4.2.	Generalidades de los sistemas de Filippov	48
4.2.1.	Estandarización de las soluciones deslizantes	49
4.2.2.	Puntos especiales de deslizamiento	50
4.3.	Bifurcaciones	51
4.3.1.	Bifurcaciones locales	51
4.4.	Análisis del sistema planteado	52
4.4.1.	Aplicación del método convexo de Filippov	52
4.4.2.	Obtención del campo de Filippov	54
4.4.3.	Obtención de los puntos de equilibrio	54
4.5.	Simulación numérica del sistema	67
4.5.1.	Comparación del método analítico con la aproximación numérica	88
5.	Conclusiones	89
A.	Exclusión de la zona tres en el análisis del método convexo de Filippov	91
B.	Descripción de Algoritmos	95
	Bibliografía	97

Índice de tablas

3.1. Estabilización de puntos de equilibrio variando condiciones iniciales	36
4.1. Comparación del método analítico con el numérico	88

Índice de figuras

2.1. Reactor UASB	6
2.2. Digestión anaerobia de materia orgánica	8
2.3. Factores que afectan el arranque y operación de un reactor anaerobio.	11
2.4. Esquema elemental de un proceso biológico de tratamiento.	15
2.5. Diagrama de modelo de Monod (azul) y modelo transformado (rojo)	17
3.1. Puntos de equilibrio variando α	27
3.2. Vistas de la zona uno de los puntos de equilibrio variando α	29
3.3. Puntos de equilibrio variando D	30
3.4. Vistas de los puntos de equilibrio de la zona uno variando D	32
3.5. Puntos de equilibrio variando Y	33
3.6. Vistas de la zona dos de los puntos de equilibrio variando Y	35
3.7. Diagramas de bifurcación para los tres parámetros analizados	38
3.8. Diagramas de bifurcación a diferentes D y tiempos	40
3.9. Diagramas de bifurcación de dos parámetros	42
3.10. Vistas de los diagramas de bifurcación de dos parámetros	44
3.11. Diagramas de fases a diferentes tiempos	46
3.12. Vista del diagrama de fases X vs S de la Figura 3.11(b)	47
4.1. Esquema Filippov.	50
4.2. Puntos de equilibrio con $X^{in} = 0$	58
4.3. Puntos de equilibrio con $X^{in} = 240$	61
4.4. Puntos de equilibrio con $X^{in} = 320$	64
4.5. Diagrama de fases con $X^{in} = 0$	68
4.6. Diagrama de fases con $X^{in} = 240$	71
4.7. Diagrama de fases con $X^{in} = 320$	74
4.8. Bifurcación nodo frontera	78
4.9. Deslizamiento estable condiciones de izquierda a derecha	81

4.10. Deslizamiento estable condiciones de derecha a izquierda	82
4.11. Deslizamiento inestable	84
4.12. Cuencas de atracción	86
A.1.	92
A.2.	93

Lista de abreviaturas y símbolos

Abreviatura	Significado
MOFBD	Materia orgánica fácilmente biodegradable
AGV	Ácidos grasos volátiles
DQO	Demanda Química de oxígeno
DBO	Demanda biológica de oxígeno
SSV	Sólidos solubles volátiles
SLG	Separador sólido líquido gas
MO	Materia orgánica

Lista de abreviaturas

Parámetro	Significado
S	Concentración del sustrato en el reactor [mg/l DQO]
S^{in}	Concentración del sustrato en la corriente de entrada [mg/l DQO]
X	Concentración de biomasa en el reactor [mg/l SSV]
X^{in}	Concentración de biomasa en la corriente de entrada [mg/l SSV]
α	deficiencia de sedimentación en el separador SLG
μ_i	Puntos de unión entre las rectas de aproximación a la curva de Monod
$\mu_{m\acute{a}x}$	Velocidad máxima específica de crecimiento de la biomasa [días ⁻¹]
D	Velocidad de dilución. [días ⁻¹] ($D = Q/V_R$).
Y	Coefficiente de rendimiento del sustrato [mg DQO/mg SSV]
Q	Caudal de la corriente de entrada al reactor [l/día].
V_R	Volumen del reactor [l]

Lista de símbolos

1. Introducción

En este trabajo se realiza un estudio de la dinámica del sistema que modela un reactor UASB (Reactor Anaeróbico de Flujo Ascendente y Manto de Lodos) como un sistema autónomo no lineal. Se realiza el estudio del sistema asumiendo que la velocidad de crecimiento microbiano se puede representar por una función lineal a tramos, lo cual convierte el sistema dinámico, que es originalmente suave, en un sistema dinámico no suave (SDNS). Cada zona está gobernada por una ecuación diferencial, presentándose discontinuidad en el límite de cada zona, en los cuales pueden aparecer zonas deslizantes, de acuerdo al método convexo de Filippov.

Toda industria que consume agua tendrá algún efluente líquido, sólido o gaseoso de desecho. La calidad de los efluentes puede variar mucho y dependerá completamente del proceso industrial. En el estudio de una planta depuradora de aguas residuales o de un sistema de depuración o descontaminación, deben coincidir muchos factores. El estudio debe ir precedido de una buena caracterización de los efluentes a tratar, de las posibilidades de reutilización y de un buen conocimiento del sector y tipos de residuos a ser tratados.

La digestión anaerobia se ha convertido en una alternativa de tratamiento ya que cuenta con muchas ventajas comparativas como la baja cantidad de lodos que genera, además de producir energía que puede solucionar parte de los requerimientos de una planta de tratamiento o de una comunidad.

El estudio de los procesos dinámicos y sus sistemas de control debe iniciarse con la obtención de una representación matemática de las relaciones existentes entre las diferentes variables involucradas en el proceso a controlar, a la que usualmente se denomina modelado del sistema, del cual puede obtenerse una representación por medio de ecuaciones diferenciales de orden alto, o un conjunto de ecuaciones diferenciales de primer orden no lineales, de las cuales en general, no es posible obtener sus soluciones analíticas, pero pueden usarse métodos numéricos para obtener su solución y poder así realizar el análisis de la dinámica del sistema.

1.1. Motivación

El presente trabajo se realiza en el marco del modelamiento dinámico de procesos biológicos de tratamiento de aguas residuales, tan importante actualmente debido a la gran contaminación que generan las empresas y que según las normas ambientales se debe buscar que el efluente de las industrias sea previamente tratado, para que así al llegar a los ríos su carga contaminante sea drásticamente reducida; y además para dar continuación a la investigación realizada por Muñoz (2007) [25], realizando el estudio de la dinámica del bioreactor UASB con modelo de crecimiento de bacterias lineal por tramos, por medio del estudio dinámico del sistema vía simulaciones numéricas con rutinas propias y/o adaptaciones de rutinas ya existentes, cálculo del diagrama de bifurcación suave y no suave, uno y dos paramétrico (bidimensional).

1.2. Descripción del trabajo

El presente trabajo está compuesto por cuatro capítulos como se describe a continuación:

Capítulo dos describe el marco teórico sobre el reactor UASB indicando como se realiza la digestión anaerobia, su etapa de arranque, ventajas y el desarrollo del modelo matemático. En el capítulo tres se realiza el estudio de la dinámica del bioreactor, analizando sus puntos de equilibrio, su estabilidad y obteniendo los diagramas de bifurcación variando uno y dos parámetros. En el capítulo cuatro se realiza el análisis del método convexo de Filippov, obteniendo sus puntos de equilibrio y su comportamiento por medio de calculos analíticos y aproximaciones numéricas, donde se puede evidenciar una bifurcación local de tipo nodo frontera para los parámetros α y D , al variar la concentración de bacterias a la entrada del reactor, un deslizamiento estable y otro inestable dependiendo de los valores del campo de Filippov y las condiciones iniciales de la concentración de bacterias y de sustrato. En el capítulo cinco se dan las conclusiones de la investigación según el análisis dinámico realizado.

1.3. Contribuciones

La investigación realizada es un aporte al estudio de la dinámica no lineal de los reactores UASB, tan usados actualmente en la industria debido a los productos que genera: biogás el cual es utilizado como

combustible y el desecho sólido (bio-fertilizante) que es vendido o aprovechado por los agricultores de la zona.

Presentación en eventos académicos.

- Melo, L; Casanova, S; Olivar, G; Torres, L; C, Acosta. Dinámica de un Bioreactor con Modelo de Crecimiento de Bacterias Lineal por Tramos. Ponencia aceptada en el 7º Congreso Latinoamericano de Biología Matemática. Universidad del Quindío, Agosto de 2011.

Publicaciones.

- Aplicación del Método Convexo de Filippov a la Dinámica de un Bioreactor con Modelo de Crecimiento de Bacterias Lineal por Tramos. En realización.

2. Digestión Anaerobia

La digestión anaerobia de la materia orgánica es la conversión directa de la biomasa en gas (biogás) el cual es una mezcla de metano, dióxido de carbono y otros compuestos orgánicos en ausencia de aire. Este tratamiento tiene una serie de desventajas de tipo operacional que lo llevan a presentar una tendencia a fallas de proceso debido a la inestabilidad de las variables y los rangos tan estrechos en que opera [7]. Es por esto que la modelación dinámica de variables tales como temperatura, pH, concentración de nutrientes, ácidos volátiles, cargas hidráulicas, etc., son de mucha importancia para establecer estrategias de control de las posibles fallas que pueda tener el proceso [27].

Las tecnologías clásicas para la remoción de materia orgánica, que como en el caso de los lixiviados es predominantemente materia orgánica disuelta, son los procesos biológicos de tratamiento. Para el caso de un lixiviado joven, en especial lixiviados de rellenos con altos contenidos de materia orgánica fácilmente biodegradable (MOFBD), los consecuentemente altos contenidos de materia orgánica (proteínas, carbohidratos, compuestos hidroxiaromáticos, alcoholes, y principalmente los ácidos grasos volátiles (AGV)) parecieran idealmente apropiados para la aplicación de los procesos anaerobios de tratamiento, al producir biogás con un contenido de energía entre 20 a 40 % del poder calorífico de la materia prima [1, 27].

De hecho existen numerosos reportes de trabajo de todo tipo de tecnologías anaerobias, desde las más simples lagunas anaerobias, hasta complicados sistemas de lecho fluidizado, pasando por filtros anaerobios y reactores UASB. En términos de las reducciones de DBO se reportan muy altas eficiencias a cargas razonables. Usualmente se usan para llegar a niveles de tratamiento secundario, pero cuando se requieren eficiencias superiores se utilizan como pretratamiento, precediendo a sistemas aerobios como los lodos activados.

Las principales ventajas que tienen los procesos anaerobios en este contexto son la mayor simplicidad en el sistema de tratamiento y la menor producción de lodos (fango meta-estabilizado y rico en nutrientes, este producto sirve de abono ya que es rico en nitrógeno y en fósforo) [1, 12]. Esto se refleja en menores costos de inversión de capital, de operación y mantenimiento, y en menores requisitos técni-

cos en el personal que opera el sistema. Sin embargo, existen varias precauciones que hay que tener en cuenta al aplicar este tipo de procesos. Los altos contenidos de amoníaco y de minerales disueltos pueden generar problemas de toxicidad para los microorganismos. Esto implicaría una remoción previa del amoníaco en caso de que este fuera el problema, o la aplicación de cargas de trabajo reducidas debido a las limitaciones en la actividad microbiana por motivo de la toxicidad. Por otra parte los investigadores que han trabajado con los sistemas de tratamiento anaerobio para lixiviados en rellenos sanitarios coinciden en indicar una acumulación muy significativa de material inorgánico precipitado dentro del reactor y en los lodos mismos del sistema anaerobio. La acumulación de material precipitado dentro del reactor termina por formar incrustaciones que limitan el volumen activo del reactor, limitan la actividad de los lodos, y taponan los sistemas de conducciones de los reactores acabando finalmente en un colapso del sistema de tratamiento, o alternativamente, en costos y complicaciones muy grandes en la operación y mantenimiento de las plantas. Con base en estas experiencias, se concluye que es necesario bien sea hacer pre-tratamientos que minimicen los efectos de la toxicidad y/o de los materiales incrustantes, o trabajar con diseños de reactores anaerobios que sean más resistentes a éstos fenómenos. Igualmente debe tenerse en cuenta que las variaciones de los caudales y cargas orgánicas en sistemas como los reactores UASB pueden fácilmente desestabilizar el proceso, y por lo tanto con frecuencia se puede requerir una homogenización de los caudales, si se esperan variaciones significativas en los flujos y cargas [12].

Lixiviados Los lixiviados (compuestos principalmente por: proteínas, carbohidratos, compuestos hidroxiaromáticos, alcoholes y principalmente los ácidos grasos volátiles AGV con gran cantidad de nitrógeno amoniacal) se originan por la circulación de agua entre la basura, la cual a su paso va disolviendo los elementos presentes en los residuos. El resultado es un líquido altamente agresivo al ambiente principalmente por sus elevadas cargas orgánicas representadas en parámetros de DQO en un rango de 10.000 a 30.000 mg/l, valor que depende del tipo de basura depositada y de la capacidad del relleno. Por esta razón los lixiviados representan el agente contaminante más significativo de un relleno sanitario. Adicionalmente estos líquidos no se quedan confinados en el relleno sanitario, sino que por las mismas condiciones de diseño del relleno, migran fuera del mismo pudiendo contaminar el suelo y las aguas superficiales y subterráneas que se encuentran a su paso [3, 4, 31].

2.1. Reactor UASB

Los reactores UASB, ver Figura 2.1, es un reactor que separa dentro de él las distintas fases (biológica (cama de lodos), líquida (manto de lodos) y gaseosa (parte superior)). El agua residual entra

por la parte inferior del reactor y sale el efluente tratado por la parte superior. El reactor no tiene ningún relleno para soportar el crecimiento biológico. El lodo formado en el reactor puede considerarse dividido en dos zonas; la zona 1 «lecho o cama de lodos» y la zona 2 «manto de lodos» (se compone de gránulos o partículas además del agua residual). La diferencia entre estas dos zonas es la compactación del lodo obteniéndose en la zona uno un lodo mucho más compacto que en la zona dos.

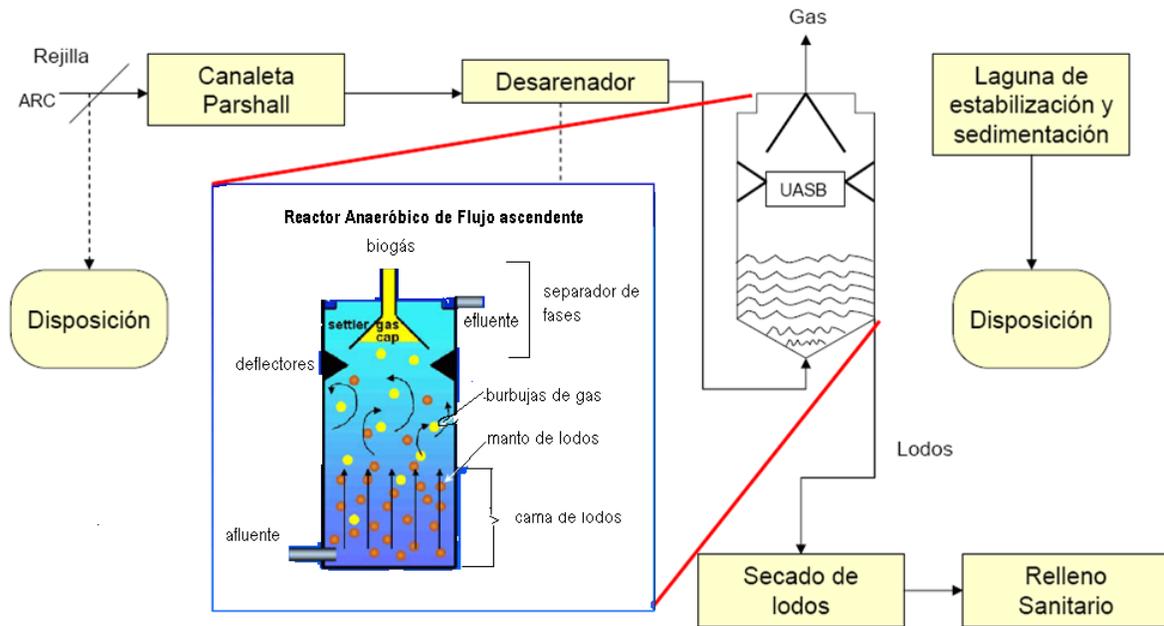


Figura 2.1. Reactor UASB

La parte superior del reactor (separador gas-sólido-líquido, impide la salida de los sólidos del reactor separándolos del gas producido y del efluente líquido) sirve de sedimentador de lodo y colector de gas ya que los gases producidos bajo condiciones anaerobias provocan la recirculación interna, lo que ayuda en la formación y mantenimiento de las partículas biológicas, sobre las cuales algunas partículas de gas se adhieren. La pieza superior (pantalla) crea una zona de bajo nivel de turbulencia en donde un 99 % del lodo en suspensión se sedimenta y es retornado al reactor. La pantalla sirve también para recuperar el gas que sale por la parte del centro. La biomasa en un reactor UASB esta formada por gránulos de 3 a 4 mm. que tienen altas velocidades de sedimentación y por consiguiente son casi totalmente retenidos en el reactor. Habrá acumulación de biomasa si la producción neta supera las pérdidas por arrastre en el efluente, o sea la purga [7].

El líquido que ha pasado a través del manto contiene algunos sólidos residuales y gránulos biológicos que pasan a través del sedimentador donde los sólidos se separan del futuro efluente. Los sólidos retornan, por tanto, al caer a través del sistema de deflectores en la parte alta del manto de lodos. Para lograr una operación correcta del sistema se requiere la formación de biomasa floculenta, y la puesta en marcha suele requerir la inoculación previa del reactor con grandes cantidades de lodos de algún otro sistema de operación[7].

El proceso UASB se puede aplicar a una amplia variedad de aguas residuales industriales. Al igual que en otros tipos de tratamiento de aguas residuales, en los UASB también son necesarias unas etapas previas de adecuación del influente antes de ingresarlas al reactor, como por ejemplo, eliminación de aceites y grasas, desarenado, corrección de pH, etc. Tras este tipo de pretratamientos, el UASB puede convertir el 70-95 % de la materia orgánica biodegradable en una corriente de biogás (compuesto por un 70 % de metano y un 30 % de una mezcla de dióxido de carbono y otros compuestos como nitrógeno, hidrógeno, amoníaco y sulfuro de hidrógeno, los cuales son responsables de los malos olores generados durante la digestión) [24]. De ahí que sean posibles mayores eficiencias mediante el acople de pre- y/o pos-tratamientos adecuados que aumente el tiempo medio de residencia celular, la composición y la resistencia frente a tóxicos del fango [8].

Entre las técnicas empleadas para reducir la demanda de oxígeno de las aguas residuales son especialmente importantes los tratamientos de oxidación biológica. El fundamento de estos tratamientos consiste en la asimilación aerobia de la materia orgánica degradable biológicamente (DBO) por microorganismos, en presencia de oxígeno y nutrientes. Los productos finales del metabolismo son CO_2 y H_2O , produciéndose un incremento de la biomasa de microorganismos a expensas de parte de la materia orgánica consumida [8].

La digestión anaerobia en su proceso global incluye las siguientes cuatro etapas sucesivas para la transformación de la materia orgánica en biogás [6, 7, 16], como se puede observar en la Figura 2.2

- Hidrólisis: los compuestos orgánicos complejos (material particulado) son transformados en material disuelto más simple, por medio de enzimas producidas por bacterias fermentativas.
- Acidogénesis: los productos solubles son convertidos en ácidos grasos volátiles, CO_2 , H_2 , H_2S etc; por la adición de bacterias fermentativas acidogénicas.
- Acetogénesis: los productos generados en la etapa anterior son transformados en sustrato para

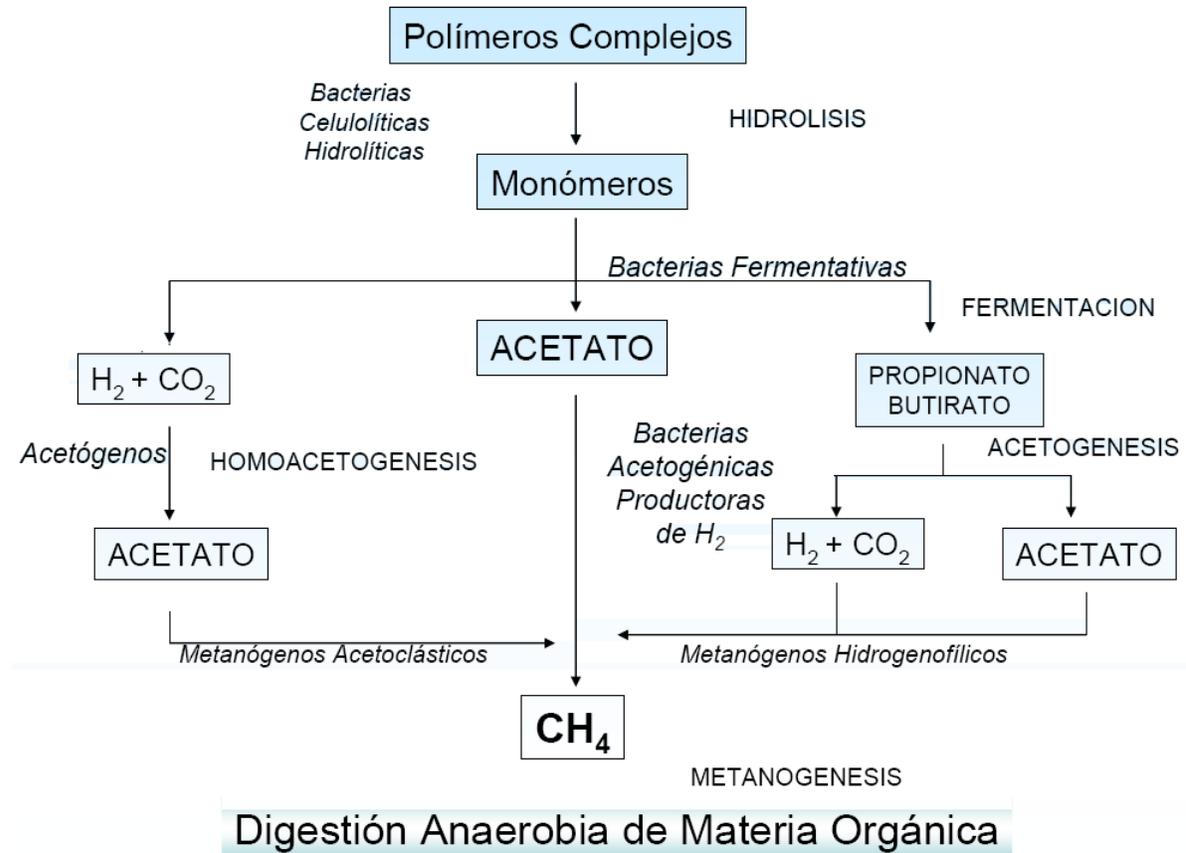


Figura 2.2. Digestión anaerobia de materia orgánica

las bacterias metanogénicas.

- **Metanogénesis:** las «bacterias metanogénicas» que son estrictamente anaerobias convierten los ácidos de cadena más larga en metano, dióxido de carbono y ácidos volátiles de cadenas más cortas. Las moléculas ácidas se rompen repetidamente dando lugar finalmente a ácido acético que se convierte en CH_4 , CO_2 y H_2S .

2.1.1. Etapa de arranque

El arranque de un reactor anaerobio es el periodo de tiempo durante el cual la biomasa anaerobia se adapta en cantidad y calidad a las características del agua residual. La duración de la etapa de arranque dependerá del tiempo que se requiera para obtener una calidad constante del efluente y una masa de

lodo suficiente, que no varíe cualitativamente con el tiempo. Generalmente se identifica el final del arranque en lo que respecta a biomasa, con la aparición del fenómeno de granulación y/o formación de un floc o biopelícula estable. Existen diversas metodologías para el arranque de reactores anaerobios, las cuales se basan fundamentalmente en el seguimiento de parámetros de operación y en el aumento paulatino de la carga. Se definen principalmente tres fases [5, 22].

1. Adaptación primaria y crecimiento de bacterias degradadoras de los ácidos acético y propiónico.
2. Formación de una biomasa anaerobia metanogénica activa.
3. Formación de un lodo granular, si las condiciones del sustrato lo permiten.

El arranque se inicia con la aplicación de cargas orgánicas bajas, las cuales se incrementan cuando el sistema lo permite, en lo que se refiere principalmente a contenidos de ácidos grasos volátiles (AGVs) y remoción de materia orgánica. Durante el arranque existe peligro de sobrecarga orgánica y si esto ocurre, la fermentación ácida puede volverse predominante sobre la fermentación metanogénica, resultando en la acidificación del sistema. De otro lado, el arranque de reactores tratando aguas residuales domésticas es mucho más sencillo que el de reactores tratando aguas residuales industriales, ya que las características de las primeras proporcionan una capacidad buffer suficiente, que evitan la acidificación cuando existe acumulación de los productos de la fermentación ácida, debido principalmente a que en esta fase la población metanogénica es aún muy pequeña para convertirlos eficientemente [33].

La estrategia del incremento gradual de la carga de acuerdo con el sistema, generalmente produce largos periodos de arranque que pueden resultar del orden de varios meses. Con el fin de reducirlos, se han desarrollado otros enfoques [9, 17].

1. Alta presión selectiva: consiste en la aplicación al reactor de altas velocidades ascensionales que generan un lavado del lodo más flocculento y disperso, permitiendo una selección del lodo, favoreciendo con esto el fenómeno de granulación.
2. Incremento de la adhesión bacteriana: consiste en agregar al reactor a través del sustrato, elementos y sustancias que incrementan la adhesión bacteriana. Se ha probado entre otros la adición de Ca^{++} y de polielectrolitos. También se ha reportado la adición de polímeros catiónicos en presencia de carbón activado, así como la de sucrosa en proporción de 0.1 % .

Fenómeno de la Granulación. Para el óptimo desarrollo de la digestión anaerobia, el sistema debe ser selectivo para generar una biomasa con buenas características de sedimentación, principalmente en la forma de conglomerados. Los conglomerados que se forman son de tres tipos:

1. Flócs: poseen una estructura suelta, forma indefinida y de capa única.
2. Pellets: poseen una estructura más densa que los flócs, bien definida y sedimentan fácilmente.
3. Gránulos: son pellets densos con apariencia granular y alta sedimentación.

La granulación es el resultado de varios procesos físicos, químicos y biológicos y depende de factores tales como: el tipo y concentración del lodo de inóculo; las concentraciones de cationes bivalentes; la producción de sustancias poliméricas extracelulares; el efecto hidráulico denominado «presión selectiva» y la concentración del sustrato [17]. Los gránulos son consorcios concéntricos que poseen una estructura bien definida constituida por tres capas [14]: la Capa Interna es el centro del gránulo y esta conformada por bacilos metanogénicos que poseen flagelos (Methanosaeta); la Capa Media la conforman bacterias del mismo género Methanosaeta y bacterias acetogénicas; la Capa Externa contiene una diversidad de microorganismos e incluye, tanto organismos acidogénicos, como sulfato reductores y metanogénicos.

Ventajas de la granulación [17]:

- Bajo condiciones de mezcla y choque hidráulico el gránulo permanece intacto;
- La agregación bacteriana lleva a poblaciones heterogéneas ordenadas de microorganismos sintróficos en la forma de asociaciones multicelulares bajo condiciones fisiológicas favorables.
- Facilita las interacciones simbióticas entre organismos adyacentes.
- A diferencia de las células libremente suspendidas, el crecimiento dentro del gránulo favorece el aprovechamiento de los nutrientes disponibles en el agua residual.
- La granulación protege las células de organismos predadores como los ciliados anaerobios.
- Se minimiza la distancia de difusión para la fermentación de productos intermedios. Esto es una forma eficiente de aprovechar cada fracción de energía disponible dentro de un sistema complejo de degradación.

- Bajo condiciones donde la composición del agua residual es adversa para el crecimiento celular, se crea un microambiente más favorable dentro del agregado, de manera que el metabolismo se pueda llevar a cabo.

2.1.2. Factores que afectan su arranque y operación

El arranque y operación de un reactor son procesos complejos que involucran simultáneamente los siguientes factores entre otros [4, 23], ver Figura 2.3.



Figura 2.3. Factores que afectan el arranque y operación de un reactor anaerobio.

1. Factores relacionados con el diseño y operación

- Retención de lodo activo dentro del reactor.
- Contacto entre el lodo y el sustrato.
- Adecuadas velocidades de reacción.
- Transferencia de masa.
- Altos tiempos de retención celular.

2. Factores ambientales

- **Nutrientes:** se requiere la presencia de macronutrientes *N, P, S* y micronutrientes *Fe, Zn, etc* en proporciones adecuadas para atender las necesidades de los microorganismos. Estos elementos se encuentran presentes en el líquido residual doméstico.
- **Temperatura:** influye en la velocidad de metabolismo de las bacterias y en la solubilidad de los sustratos. Existen dos rangos para el proceso mesófilo (20-45°C) y termófilo (50-65°C).
- **pH:** Entre 6 y 8 para que no se inhiba el proceso.

3. **Factores relacionados con la calidad y cantidad de la biomasa.** El tiempo utilizado para el arranque del reactor será corto si el lodo utilizado como inóculo tiene una alta actividad metanogénica y está adaptado a los sustratos presentes en el agua residual.

4. Factores operacionales

- **Nivel de Carga de la Planta:** se refiere a la cantidad de material orgánico que se carga al reactor.
- **Tiempo de Residencia Hidráulico:** el tiempo de residencia del líquido debe ser suficiente para permitir un tiempo de contacto adecuado entre el material orgánico disuelto y los microorganismos.
- **Concentración de lodos:** se refiere a la masa de lodos por unidad de volumen de reactor.

Etapas de operación: La operación del sistema se inicia una vez superada la etapa de arranque, cuando se alcanzan las condiciones de diseño de carga orgánica e hidráulica y la eficiencia de remoción de materia orgánica proyectada. En esta etapa se espera que el reactor funcione en condiciones de estado estable, en el cual las variables de salida del sistema se mantienen relativamente constantes a pesar de las variaciones temporales en cantidad y calidad del afluente [33].

De acuerdo con la experiencia reportada en [12, 33], la operación de diversos reactores anaerobios, se tiene entre otras las siguientes conclusiones:

- El origen y naturaleza del agua residual afecta el funcionamiento del reactor.
- Existe una tendencia general a disminuir la eficiencia de remoción cuando disminuye significa-

tivamente el tiempo de permanencia del agua residual dentro del reactor, especialmente cuando se alcanzan tiempos menores de 4 horas.

- Los reactores anaerobios presentan mayores eficiencias cuando tratan aguas residuales concentradas, sin embargo se han demostrado sus eficacias en el tratamiento de aguas residuales diluidas.

2.1.3. Ventajas del sistema UASB

Una de las principales ventajas del sistema UASB es su compacidad. Requiere de solo 50 a 100 m^2 de terreno por cada 1.000 habitantes. Otra ventaja es la ausencia de equipos electro-mecánicos, con excepción de un eventual bombeo inicial, y en consecuencia los bajos o nulos costos de electricidad y bajos costos de operación y mantenimiento en general. Sus limitantes son los menores valores de remoción de DQO y DBO comparados con un sistema de lodos activados y la necesidad de un diseño que tenga en cuenta un cuidadoso mecanismo para el control de olores (ausencia de turbulencias, estructuras tapadas, recolección y combustión del (biogás)) [12, 28].

2.2. Determinación de compuestos orgánicos en aguas residuales

- Demanda de Oxígeno: refleja el efecto que tendrán los compuestos orgánicos una vez que sean incorporados en los cuerpos de aguas receptores.
- Demanda Biológica de Oxígeno (DBO): es la cuantificación numérica de la cantidad de oxígeno necesitada para descomponer la materia orgánica existente en una unidad de volumen de agua, a una temperatura determinada.
 - Usa microorganismos para oxidar los componentes orgánicos utilizando oxígeno.
 - Se mide el oxígeno consumido durante un periodo especificado (5, 7 o 30 días)
- Demanda Química de Oxígeno (DQO): es el parámetro utilizado para caracterizar la contaminación orgánica del agua que se mide a partir de la cantidad de oxígeno disuelto necesario para la degradación química de los contaminantes orgánicos que contiene. Se entiende como

degradación química la reacción de un oxidante químico, bien dicromato potásico, bien permanganato potásico, que consume materia orgánica.

- Oxígeno requerido para oxidar químicamente el material orgánico.
- Agente oxidante $K_2Cr_2O_7$, en presencia de H_2SO_4 y un catalizador de Ag
- Tiempo de análisis 2 horas.
- Normalmente entrega resultados poco mayores que la DBO

2.3. Modelación matemática de procesos biológicos

Los modelos de los procesos de tratamiento varían en su complejidad según el número de componentes y procesos biológicos considerados, según se trate de modelos de estado estacionario ó dinámicos y según el reactor biológico que se considere.

Los modelos dinámicos se utilizan para evaluar el comportamiento de una planta ante situaciones históricas ó futuras y para el control de la planta. En estos modelos se describe el proceso biológico a través de un número de componentes del agua residual que siguen unos procesos biológicos de transformación, y cuya concentración se expresa a través de un sistema de ecuaciones diferenciales, que se obtienen mediante balances de materia de los diferentes componentes. En algunos casos hay que aplicar balances de energía y de cantidad de movimiento [7, 10].

2.3.1. Procesos biológicos de tratamiento

Un proceso biológico de tratamiento o depuración de aguas residuales es un sistema en el cual se mantiene un cultivo de microorganismos (biomasa) que se alimenta de las impurezas del agua residual (sustrato o alimento). Estas impurezas son la materia orgánica biodegradable, el amonio, el nitrato, el fosfato y otros contaminantes a menor concentración [10].

El lugar donde se ponen en contacto la biomasa con el agua residual para llevar a cabo el tratamiento se denomina reactor biológico, o bioreactor, y puede ser de diferentes tipos. Hay que remarcar

que en la mayoría de los casos la biomasa se genera espontáneamente en el reactor biológico, a partir de pequeñas concentraciones de microorganismos presentes en el agua residual o en el aire, y de las reacciones biológicas que en el diseño y operación de la planta se procura favorecer [2, 10].

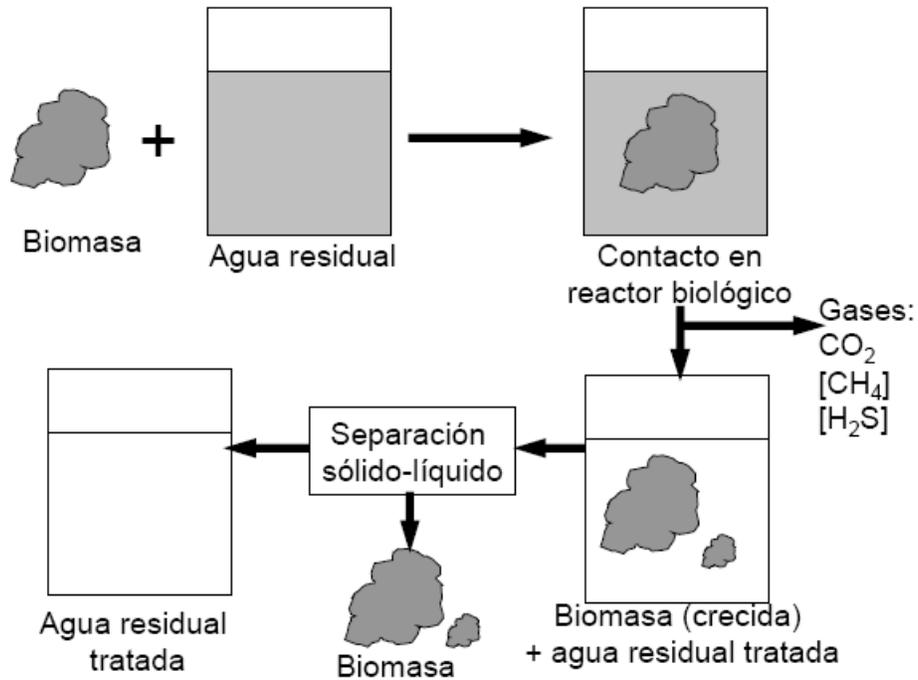


Figura 2.4. Esquema elemental de un proceso biológico de tratamiento.

La Figura 2.4 muestra de manera esquemática y elemental un proceso biológico heterótrofo de tratamiento de agua residual. Se ponen en contacto agua residual y biomasa en un reactor biológico, donde una biomasa heterótrofa se alimenta de la materia orgánica contenida en el agua residual. La materia orgánica del afluente sufre dos procesos básicos:

1. Una parte se degrada en último término a dióxido de carbono y agua mediante el metabolismo energético (con formación adicional de metano, sulfuro de hidrógeno e hidrógeno en el proceso anaerobio). Los procesos aerobios requieren oxígeno.
2. Otra parte se utiliza en la síntesis celular, para producir más biomasa (crecimiento)

De esta manera, la biomasa limpia el agua residual de la mayor parte de la materia orgánica, obteniéndose el agua residual tratada (efluente), de una calidad muy superior al afluente. En los procesos más utilizados, es fundamental aplicar una etapa de separación sólido-líquido, para separar el agua

residual tratada de la biomasa. Normalmente esto se consigue mediante la separación por gravedad (sedimentación en decantadores secundarios, etapas de sedimentación discontinua o lagunas de maduración), o mediante la separación por membranas (bioreactores de membrana) [10].

2.3.2. Componentes básicos de un modelo

En el modelo matemático más simple, se requieren al menos dos componentes para describir lo que ocurre en el reactor biológico. Estos componentes son [10]:

1. Sustrato (S): componente del agua residual que sirve de alimento a la biomasa. En un proceso heterótrofo, su concentración podría medirse a través de la demanda bioquímica de oxígeno (DBO) debida a la materia orgánica del agua residual (DBO carbonosa). De hecho, este modelo considera que sólo la materia orgánica soluble es biodegradable y puede ser atacada por la biomasa, por lo que S es un componente soluble. El sustrato, por tanto, no se separa por sedimentación. Otros modelos manejan la demanda química de oxígeno (DQO).
2. Biomasa (X): cultivo de microorganismos heterótrofos que se alimentan de la materia orgánica biodegradable del agua residual. Su concentración se puede medir mediante la concentración de sólidos suspendidos volátiles (SSV) en el reactor biológico. La biomasa está formada por partículas y puede separarse por sedimentación, filtración o flotación.

2.3.3. Procesos cinéticos básicos

Un modelo básico de dos componentes, como el mencionado anteriormente, tiene como mínimo dos procesos primordiales [10]:

- El crecimiento de la biomasa: Este proceso es responsable del consumo del sustrato y del crecimiento de la biomasa.
- La muerte de la biomasa (metabolismo endógeno o lisis de los microorganismos). Este proceso implica una mengua en el crecimiento de la biomasa obtenido en el proceso anterior.

Igualmente, los sistemas reales son mucho mas complejos con un número elevado de procesos cinéticos: crecimiento de la biomasa heterótrofa o autótrofa, hidrólisis de la materia orgánica particulada,

muerte de los organismos heterótrofos o autótrofos, amonificación, etc.

2.4. Desarrollo del modelo

Se usó el modelo planteado por Muñoz, 2006 [25], para la digestión anaerobia de un reactor UASB, pero aplicando una aproximación por rectas al modelo de crecimiento bacteriano (cinética de Monod). El sistema originalmente suave se convierte en un sistema no suave, ya que queda modelado por un sistema de ecuaciones diferenciales con el lado derecho discontinuo. Para este proceso de aproximación por rectas se ha tomado sólo la zona de (0 a 6000) mg/l DQO en valores para S , ya que además de haber logrado una buena aproximación, en ésta zona (ver Figura 2.5) los valores tienen sentido físico y están acordes a las condiciones de operación del bioreactor.

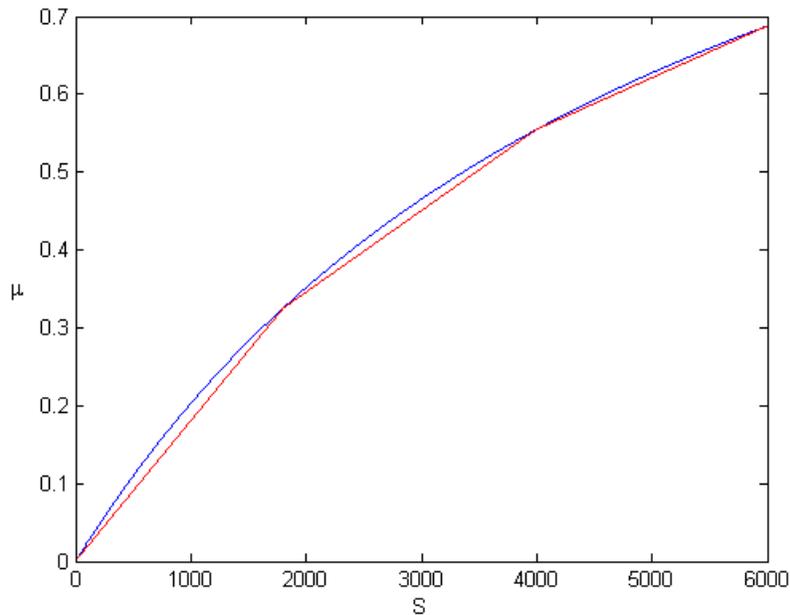


Figura 2.5. Diagrama de modelo de Monod (azul) y modelo transformado (rojo)

Las suposiciones en el modelo son:

- La temperatura de operación es 20°C .
- Todas las partículas son esferas con el mismo diámetro. Esto es importante cuando se considera una cinética de hidrólisis basada en la superficie.

- Las constantes utilizadas son las encontradas por Muñoz, 2006 [25]
 - $K = 5522.3$ (mg/l)
 - $\mu_{\text{máx}} = 1.32 d^{-1}$
 - $Y = 3.35$ (mgDQO/mgSSV)
 - $\alpha = 0.15$

- La acidogénesis y la metanogénesis son consideradas como un solo proceso comandado por la cinética de Monod, el cual supone que el crecimiento bacteriano sigue la cinética de Michaelis-Menten para los procesos catalizados por enzimas, con lo que $\mu_{(S)} = \mu_{\text{máx}} * \frac{S}{K_s + S}$, siendo K_s la constante de semisaturación para el sustrato, según este modelo, la velocidad del proceso biológico de crecimiento microbiano tenderá asintóticamente al valor máximo μ_{max} .

El modelo planteado es:

$$\begin{aligned} \dot{S} &= D(S^{\text{in}} - S) - Y\mu_{(S)}X \\ \dot{X} &= D(X^{\text{in}} - (1 - \eta)X) + \mu_{(S)}X \end{aligned} \quad (2.1)$$

donde

D : Factor de dilución d^{-1} representa el caudal volumétrico influente por unidad de volumen del reactor (inverso del tiempo de residencia hidráulico).

S^{in} : Concentración del sustrato en la corriente de entrada [mg/l DQO].

S : Concentración del sustrato en el reactor [mg/l DQO].

Y : Coeficiente de rendimiento del sustrato [mg DQO/mg SSV].

$\mu_{(S)}$: Modelo de crecimiento bacteriano.

X : Concentración de biomasa en el reactor [mg/l SSV].

X^{in} : Concentración de biomasa en la corriente de entrada [mg/l SSV].

η : Eficiencia de sedimentación en el separador (SLG).

El modelo 2.1, se modifica por medio de una aproximación por rectas para que el sistema originalmente suave se convierta en un sistema no suave ya que al dividirlo en tres zonas, se presenta una

curva continua pero no diferenciable en el límite de cada zona, se toma valores para S como mínimo de cero (físicamente no se pueden presentar concentraciones negativas) y como máximo 6000 mg/l DQO (máximo valor de la concentración del sustrato en la corriente de entrada según condiciones de operación [25]), por esto el sistema queda de la siguiente manera:

Zona uno ($0 < S < 1800$)

$$\begin{aligned}\dot{S}_1 &= D(S^{in} - S) - Y \left(\frac{\mu_1}{S_1} \right) S X \\ \dot{X}_1 &= D(X^{in} - \alpha X) + \left(\frac{\mu_1}{S_1} \right) S X\end{aligned}\tag{2.2}$$

donde

α : $1 - \eta$ (deficiencia de sedimentación en el separador SLG).

μ_i, S_i los puntos de unión entre las rectas de aproximación a la curva de Monod.

Zona dos ($1800 \leq S < 4000$)

$$\begin{aligned}\dot{S}_2 &= D(S^{in} - S) - Y \left[\mu_{1+} \left(\frac{\mu_2 - \mu_1}{S_2 - S_1} \right) (S - S_1) \right] X \\ \dot{X}_2 &= D(X^{in} - \alpha X) + \left[\mu_{1+} \left(\frac{\mu_2 - \mu_1}{S_2 - S_1} \right) (S - S_1) \right] X\end{aligned}\tag{2.3}$$

Zona tres ($4000 \leq S < 6000$)

$$\begin{aligned}\dot{S}_3 &= D(S^{in} - S) - Y \left[\mu_{2+} \left(\frac{\mu_3 - \mu_2}{S_3 - S_2} \right) (S - S_2) \right] X \\ \dot{X}_3 &= D(X^{in} - \alpha X) + \left[\mu_{2+} \left(\frac{\mu_3 - \mu_2}{S_3 - S_2} \right) (S - S_2) \right] X\end{aligned}\tag{2.4}$$

3. Sistemas Dinámicos

3.1. Definiciones

3.1.1. Sistemas no-lineales

Los fenómenos naturales son esencialmente no lineales, característica que les permite diversos comportamientos; estados de equilibrio, oscilatorios, cuasiperiódicos y caóticos que en general no pueden ser tratados con modelos o ecuaciones lineales, por esto se aplican en distintas ramas de la física y de la ingeniería para modelar por ejemplo circuitos eléctricos, sistemas mecánicos, procesos químicos, biológicos, reactores químicos, propagación de enfermedades contagiosas, interacción de especies en la vida salvaje, etc [11, 20].

Sistema autónomo

Es aquel en el que el campo vectorial f no depende explícitamente del tiempo y se puede expresar como:

$$\dot{x} = f(x), x \in \mathbb{R}^n \quad (3.1)$$

Existen conceptos fundamentales de los sistemas no-lineales que nos ayudarán a describir su comportamiento. Algunos de ellos son [11]:

- **Punto de equilibrio:** Un punto $x = x^*$ en el espacio de estados se llama punto de equilibrio para el sistema $\dot{x} = f(x)$, si, cuando el estado (trayectoria o solución) del sistema comienza en x^* , permanece en x^* para todo tiempo futuro. También se le llama punto fijo o punto estacionario. Para sistemas autónomos los puntos de equilibrio son las raíces reales de la ecuación $f(x) = 0$. El punto de equilibrio se dice aislado si existe algún entorno del punto donde no existe otro equilibrio del sistema.

- Estabilidad de un punto de equilibrio: Un punto de equilibrio x^* es estable si para todo entorno V de x^* existe un entorno $V_1 \subset V$ tal que toda solución $X(x_0, t)$ del sistema 3.1, con $x_0 \in V_1$ (donde x_0 es la condición inicial), está definida y permanece en V para todo $t > 0$. Si V_1 puede elegirse de modo tal que $X(x_0, t) \rightarrow x^*$ cuando $t \rightarrow \infty$, entonces se dice que x^* es asintóticamente estable.
- Sistemas Planares: son también llamados sistemas de dimensión dos o sistemas de dos variables de estado. Se representan por dos ecuaciones diferenciales escalares. Las soluciones del sistema se pueden representar como curvas en el plano, que llamaremos también órbitas. Las órbitas se representan en lo que se llama el plano de fase del sistema.
- Oscilación: Un sistema oscila cuando tiene una solución periódica no trivial. En un sistema planar una solución periódica en el plano de fase resulta una órbita cerrada.

3.1.2. Sistemas de segundo orden

Están determinados por dos ecuaciones diferenciales de primer orden:

$$\dot{x}_1 = f_1(x_1, x_2) \quad (3.2)$$

$$\dot{x}_2 = f_2(x_1, x_2) \quad (3.3)$$

Las soluciones del sistema se pueden representar como curvas en el plano. Si por ejemplo $x(t) = (x_1(t), x_2(t))$ es la solución del sistema planar para cierta condición inicial $x^0 = (x_1^0, x_2^0)$, entonces la gráfica en el plano $x_1 - x_2$ sería una curva que pasa por x^0 . Al plano $x_1 - x_2$ donde se representan las órbitas o soluciones se le llama plano de fase o plano de estados del sistema. Para cada punto $x = (x_1, x_2)$ en el plano de fase se tiene el vector $f(x) = f(x_1, x_2)$, es decir que $f(x)$ es un campo vectorial sobre el plano de fase. Se puede observar que el campo vectorial en un punto, es tangente a la trayectoria en ese punto. Luego, puede construirse la trayectoria desde un estado inicial x^0 , a partir del diagrama del campo vectorial [11].

3.2. Teoría de estabilidad de Lyapunov

Para estudiar la estabilidad de puntos de equilibrio se utilizan las ideas de Lyapunov [13].

Definición 1. El equilibrio $x = 0$ del sistema autónomo $\dot{x} = f(x)$ es estable si para cada $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que:

$$\|x(0)\| < \delta \Rightarrow \|x(t)\| < \epsilon, \forall t \geq 0$$

El equilibrio es inestable si no es estable; el equilibrio es asintóticamente estable si es estable y además δ puede elegirse de modo tal que

$$\|x(0)\| < \delta \Rightarrow x(t) \rightarrow 0, \text{ si } t \rightarrow \infty$$

3.2.1. Análisis dinámico mediante el método indirecto de Lyapunov

El método indirecto de Lyapunov da condiciones para determinar la estabilidad del origen del sistema no lineal, a través del estudio de la estabilidad del sistema linealizado.

Teorema 3.1 (Método Indirecto de Lyapunov). *Sea $X = 0$ un punto de equilibrio del sistema no lineal*

$$\dot{x} = f(x)$$

donde $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$, es una función continuamente diferenciable y $D \subset \mathbb{R}^n$, es un entorno del origen.
Sea

$$A = \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)_{x=0}$$

Entonces:

1. El origen es AE (asintóticamente estable) si todos los autovalores de A tienen parte real negativa.
2. El origen es inestable si uno o más autovalores de A tiene parte real positiva.

El método indirecto de Lyapunov sirve para establecer la estabilidad local de un punto de equilibrio de un sistema no lineal. Está relacionado con la idea de que un sistema no lineal en general se comporta

similarmente a la aproximación lineal en una región local, por ejemplo cerca de un punto de equilibrio, tal como se establece en el teorema de Hartman- Grobman [15, 18, 20].

Para linealizar el sistema se procede a calcular el Jacobiano del sistema definido por

$$A = \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)_{x=x^{eq}} \quad (3.4)$$

El cual corresponde a los términos de primer orden de la expansión en series de Taylor. Evaluando en el punto de equilibrio se tiene:

$$\dot{x} = Ax \quad (3.5)$$

Para determinar la estabilidad de un punto de equilibrio de un sistema no lineal se calculan los valores propios del sistema linealizado y se puede decir que [15, 29]:

1. Puntos de equilibrio hiperbólicos

- Si todos los valores propios de A tienen parte real negativa ($\text{Re}(\lambda_i) < 0, \forall i$), entonces el punto de equilibrio del sistema no lineal es asintóticamente estable.
- Si al menos un valor propio de A tiene parte real positiva ($\text{Re}(\lambda_i) > 0$), entonces el punto de equilibrio del sistema no lineal es inestable.

2. Punto de equilibrio no hiperbólico

- Si algún valor propio de A tiene parte real cero y los demás tiene parte real negativa, no se puede concluir nada basados en la aproximación lineal.

3.3. Análisis matemático del modelo

Inicialmente se realizó una aproximación por rectas al modelo de crecimiento de bacterias planteado por Muñoz [25], para valores de S en mg/l DQO de la siguiente forma:

- Zona uno ($0 < S < 1000$)
- Zona dos ($1000 \leq S < 3000$)

- Zona tres ($3000 \leq S < 5000$)

Al realizar el estudio dinámico en estas tres zonas se identificó que el reactor era muy estable, por esto se debió explorar en rangos diferentes a estas zonas y se encontró que al aumentar los valores para S en la primera y segunda zona principalmente, se obtenía una dinámica un poco más rica, por esto se decidió realizar el análisis dinámico en los siguientes intervalos:

- Zona uno ($0 < S < 1800$)
- Zona dos ($1800 \leq S < 4000$)
- Zona tres ($4000 \leq S < 6000$)

3.3.1. Cálculo de los puntos de equilibrio

Un punto de equilibrio se puede definir como un punto donde los estados del sistema permanecen constantes, siempre y cuando no haya una fuerza externa actuando sobre ellos. Estos se hallan igualando el lado derecho de las ecuaciones diferenciales a cero [18, 30]. Así pues, los puntos de equilibrio del sistema estudiado se hallan a partir de:

Zona uno ($0 < S < 1800$)

$$\begin{aligned} D(S^{in} - S) - YASX &= 0 \\ D(X^{in} - \alpha X) + ASX &= 0 \end{aligned} \tag{3.6}$$

siendo $A = \frac{\mu_1}{S_1}$

Zona dos ($1800 \leq S < 4000$)

$$\begin{aligned} D(S^{in} - S) - Y[\mu_1 + B(S - S_1)]X &= 0 \\ D(X^{in} - \alpha X) + [\mu_1 + B(S - S_1)]X &= 0 \end{aligned} \tag{3.7}$$

siendo $B = \frac{(\mu_2 - \mu_1)}{(S_2 - S_1)}$

Zona tres ($4000 \leq S < 6000$)

$$\begin{aligned} D(S^{in} - S) - YX\mu_{m\acute{a}x} &= 0 \\ D(X^{in} - \alpha X) + X\mu_{m\acute{a}x} &= 0 \end{aligned} \quad (3.8)$$

donde para las tres ecuaciones se tiene μ_1, μ_2 , y S_1, S_2 valores de coordenadas según el modelo de crecimiento bacteriano de Monod, ($\mu_{m\acute{a}x} = 1.32$ saturación del sistema).

De las ecuaciones (3.6, 3.7, 3.8) se obtienen dos puntos de equilibrio para las zonas uno y dos, y un punto de equilibrio para la zona tres ya que se lleva a saturación con $\mu_{m\acute{a}x} = 1.32$. Estos puntos son obtenidos de la siguiente forma:

zona uno ($0 < S < 1800$)

$$\begin{aligned} S_1^{eq} &= S^{in} + Y(X^{in} - \alpha X^{Eq}) \\ X^{Eq} &= \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \end{aligned} \quad (3.9)$$

donde

$$a = AY\alpha ; b = -(AS^{in} + AYX^{in} - D\alpha) ; c = -DX^{in}$$

Zona dos ($1800 \leq S < 4000$)

$$\begin{aligned} S_2^{eq} &= S^{in} + Y(X^{in} - \alpha X^{Eq}) \\ X_2^{Eq} &= \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \end{aligned} \quad (3.10)$$

donde

$$a = YB\alpha ; b = -B(S^{in} - S) - YBX^{in} + \alpha D - \mu_1 ; c = -DX^{in} ; B = \frac{(\mu_2 - \mu_1)}{(S_2 - S_1)}$$

Zona tres ($4000 \leq S < 6000$)

$$S_3^{eq} = S^{in} - \frac{Y\mu_{m\acute{a}x}X^{in}}{(\alpha D - \mu_{m\acute{a}x})} \quad (3.11)$$

$$X_3^{Eq} = \frac{DX^{in}}{(\alpha D - \mu_{m\acute{a}x})}$$

Aplicando las ecuaciones (3.9, 3.10, 3.11) para obtener los respectivos puntos de equilibrio en cada zona, con unidades para S concentración del sustrato en el reactor de [mg/l DQO] y para X concentración de biomasa en el reactor de [mg/l SSV], se obtiene para cada variación de los parámetros dos curvas, de color azul y rojo según el signo de la ecuación cuadrática (azul + y rojo -). El análisis de los puntos de equilibrio se presenta en las Figuras 3.1, 3.3, 3.5 en las cuales se va analizando la influencia de cada parámetro en los puntos de equilibrio y además se analiza si el punto de equilibrio es no virtual (se encuentra en la respectiva zona analizada) o virtual (se encuentra en una zona diferente a la analizada), esto con base en la aproximación por rectas que se realizó, donde se obtuvieron tres zonas:

- Zona uno: cuando $0 < S < 1800$
- Zona dos: cuando $1800 \leq S < 4000$
- Zona tres: cuando $4000 \leq S < 6000$

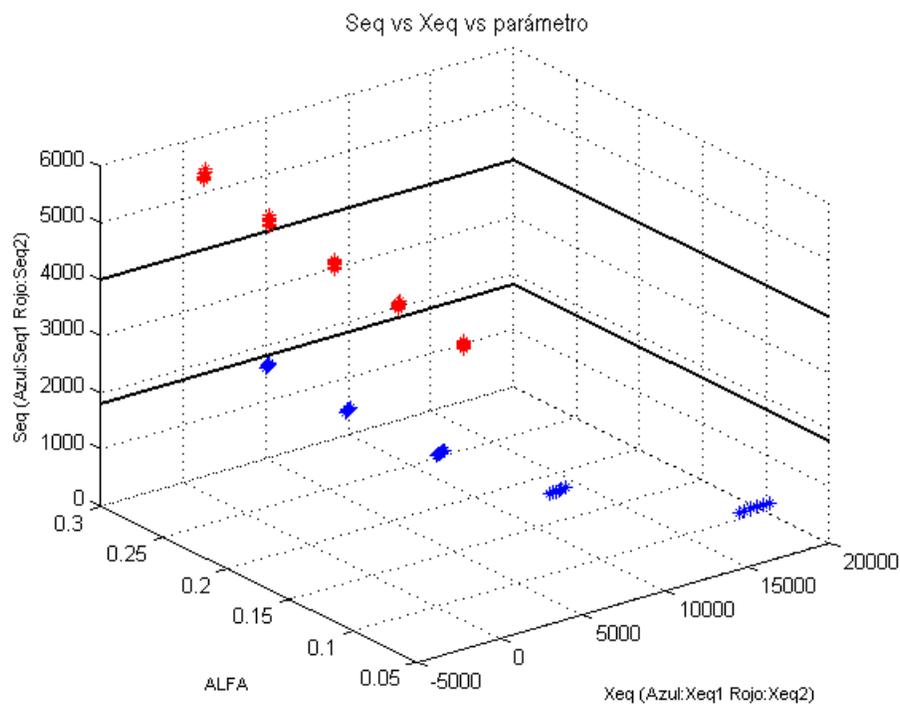
3.3.2. Análisis de los puntos de equilibrio

A continuación en las Figuras 3.1 hasta 3.6 se presenta el análisis de los puntos de equilibrio para cada zona, realizando la variación de los parámetros α , D y Y respectivamente:

En la Figura 3.1 se puede observar los puntos de equilibrio variando el parámetro α desde 0.07 hasta 0.30, analizando principalmente los de color azul, ya que estos son físicamente posibles, encontrándose:

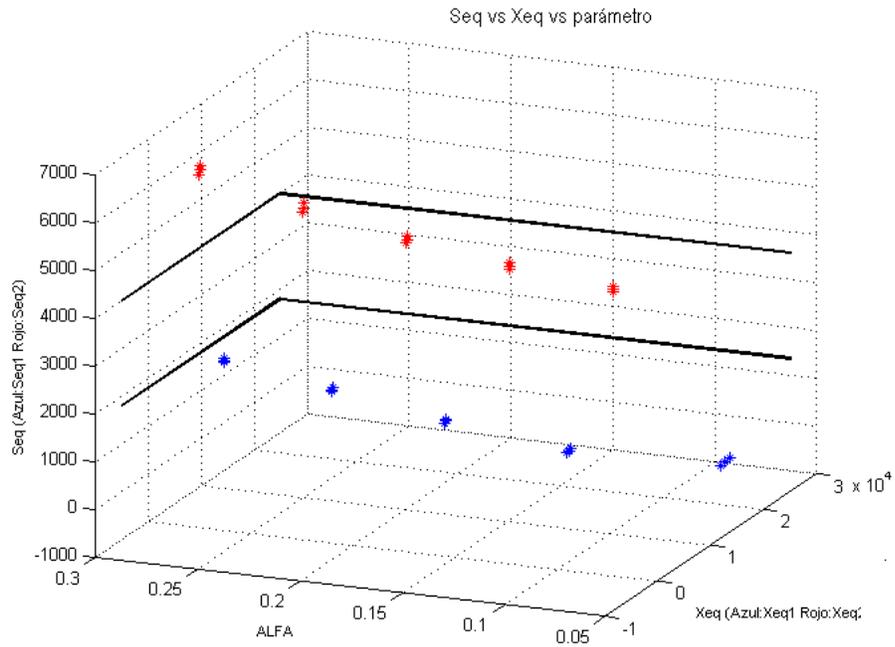
- Para la zona una, Figura 3.1(a) se presentan en su gran mayoría equilibrios no virtuales, pero a medida que se incrementa el parámetro α , los equilibrios se van desplazando hacia arriba propiciando equilibrios virtuales cuando se tienen valores de $\alpha > 0.20$.

- Para la zona dos, Figura 3.1(b) sigue un comportamiento inverso a la Figura 3.1(a), ya que para valores de $\alpha > 0.18$ se presentan puntos de equilibrio no virtuales.
- Para la zona tres, Figura 3.1(c) todos sus equilibrios son virtuales e inferiores a cero, lo cual indica situación de lavado cuando los valores de la concentración del sustrato $S > 4000$.

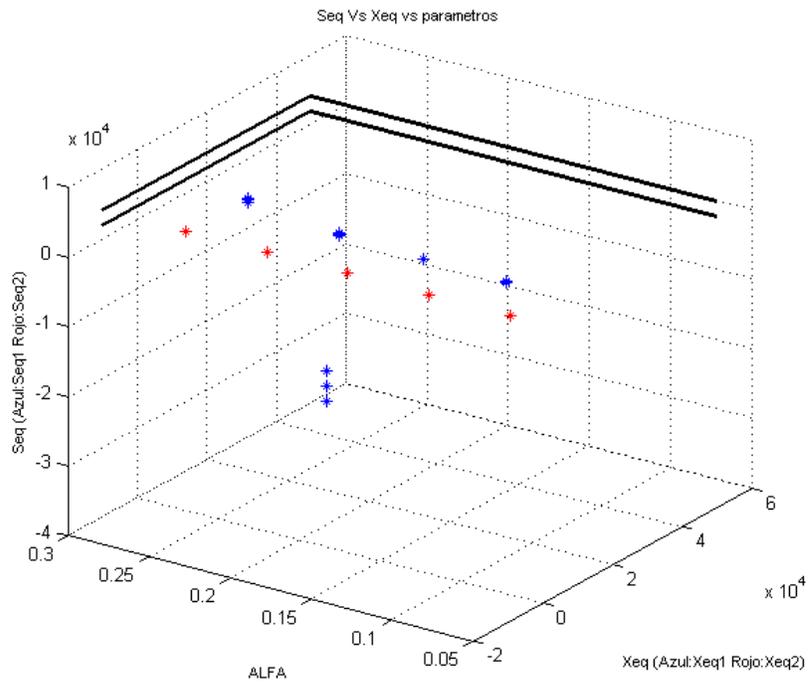


(a) Zona uno

Figura 3.1. Puntos de equilibrio variando α (Continúa en la pág. siguiente)



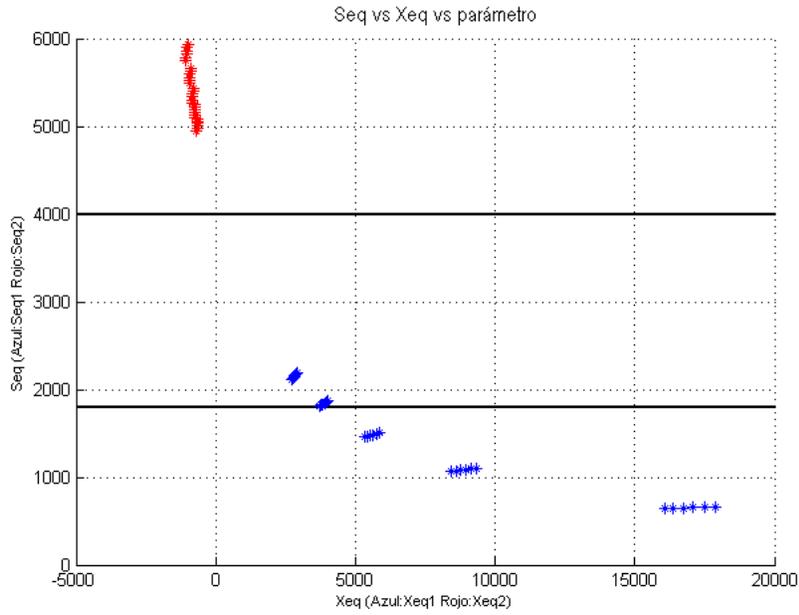
(b) Zona dos



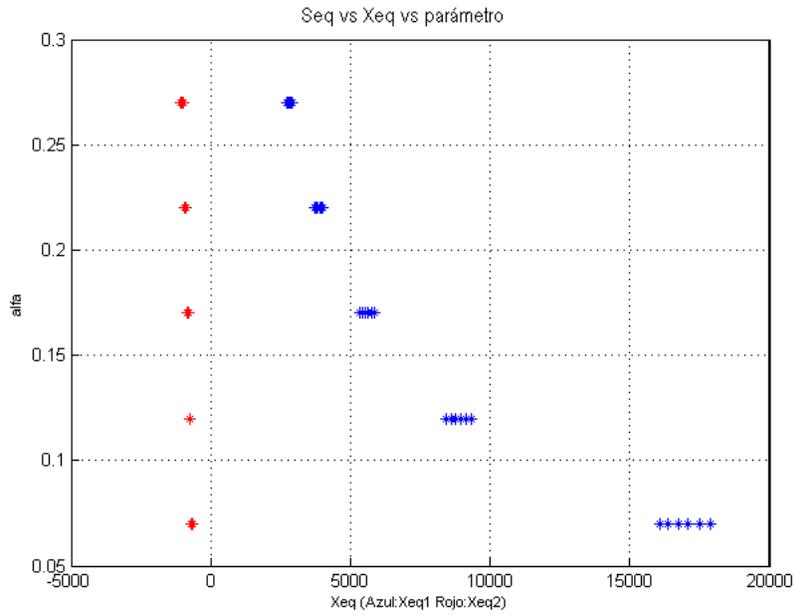
(c) Zona tres

Figura 3.1. Puntos de equilibrio variando α

Para visualizar mucho mejor la Figura 3.1, se realiza diferentes vistas de la gráfica 3.1(a), con lo cual se evidencia lo mencionado anteriormente.



(a) vista X^{eq} vs S^{eq} α zona uno

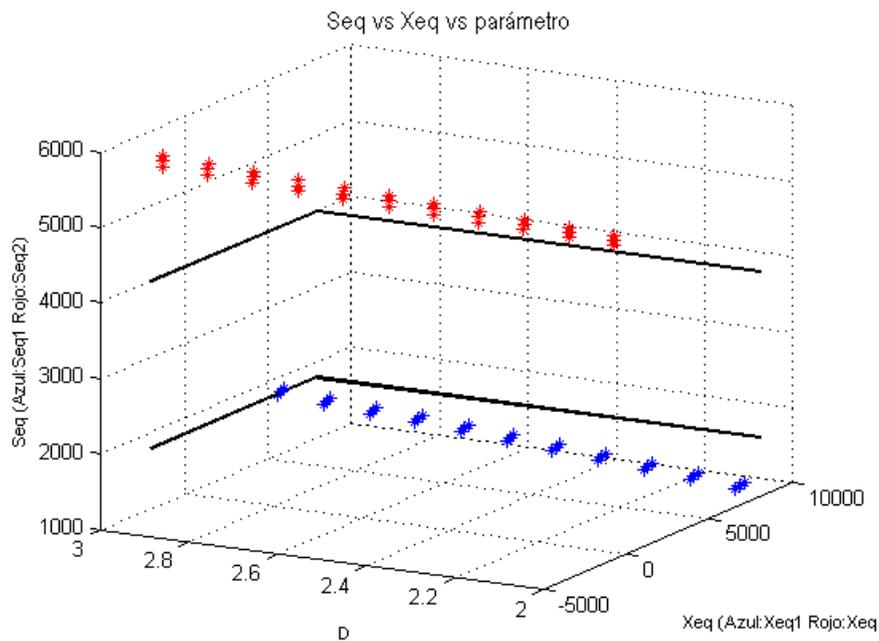


(b) vista X^{eq} vs α zona uno

Figura 3.2. Vistas de la zona uno de los puntos de equilibrio variando α

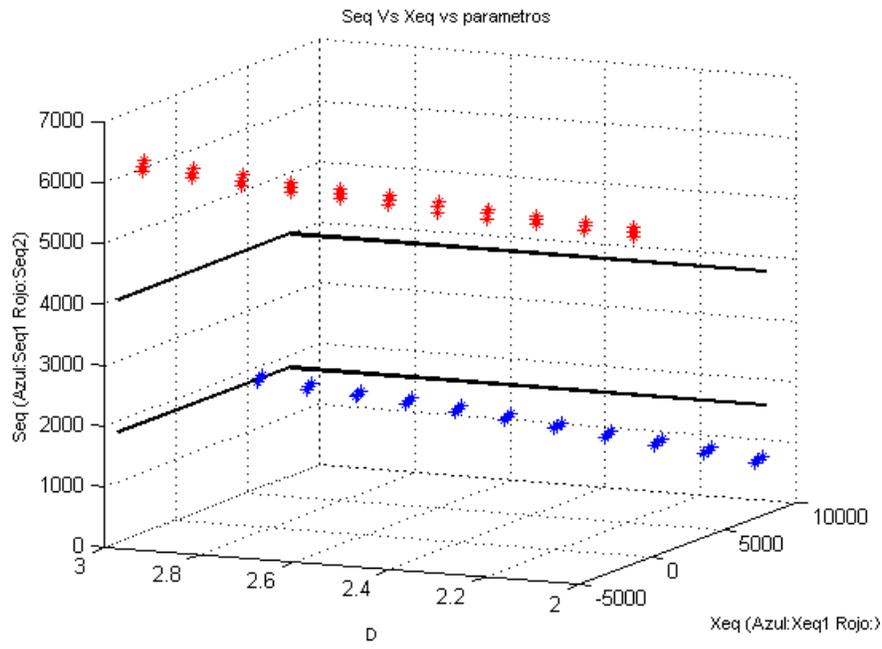
En la Figura 3.3 se observan los puntos de equilibrio variando el parámetro D desde 2 hasta 3.

- Para la zona una, Figura 3.3(a) se presentan equilibrios no virtuales color azul y equilibrios virtuales color rojo, los cuales además de ser virtuales no son físicamente admisibles al tener valores negativos de X^{eq} , también se observa que a medida que va aumentando el factor de dilución D los puntos de equilibrio se van incrementando en valores de S , lo que indica que se puede presentar situación de lavado al ir disminuyendo los valores de biomasa, indicando que hay mayor cantidad de sustrato que de biomasa.
- Para la zona dos, Figura 3.3(b) sigue un comportamiento muy similar a la Figura 3.3(a).
- Para la zona tres, Figura 3.3(c) todos sus equilibrios son no virtuales al encontrarse en valores de $S > 4000$, pero con valores no admisibles al presentar puntos de equilibrios negativos para X^{eq} .

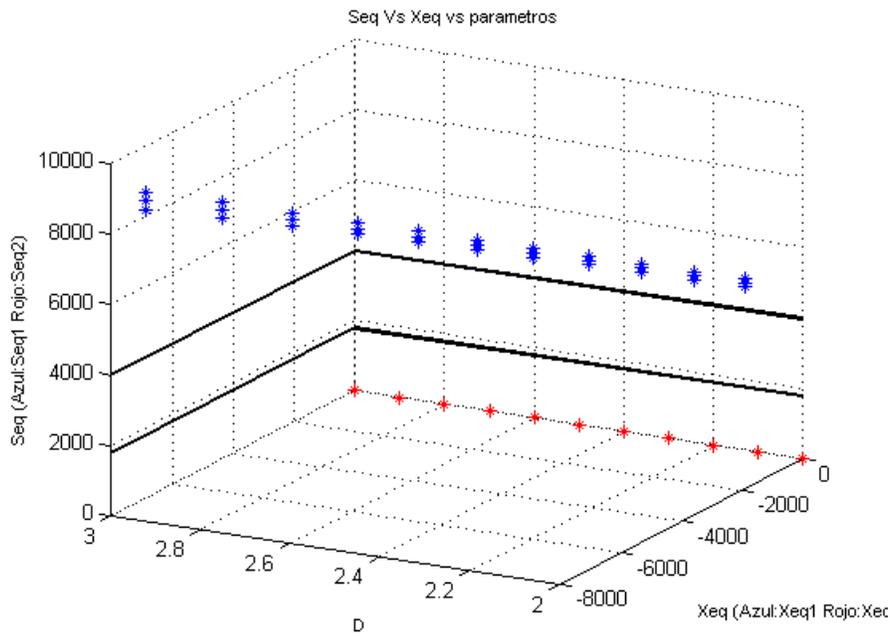


(a) Zona uno

Figura 3.3. Puntos de equilibrio variando D (Continúa en la pág. siguiente)



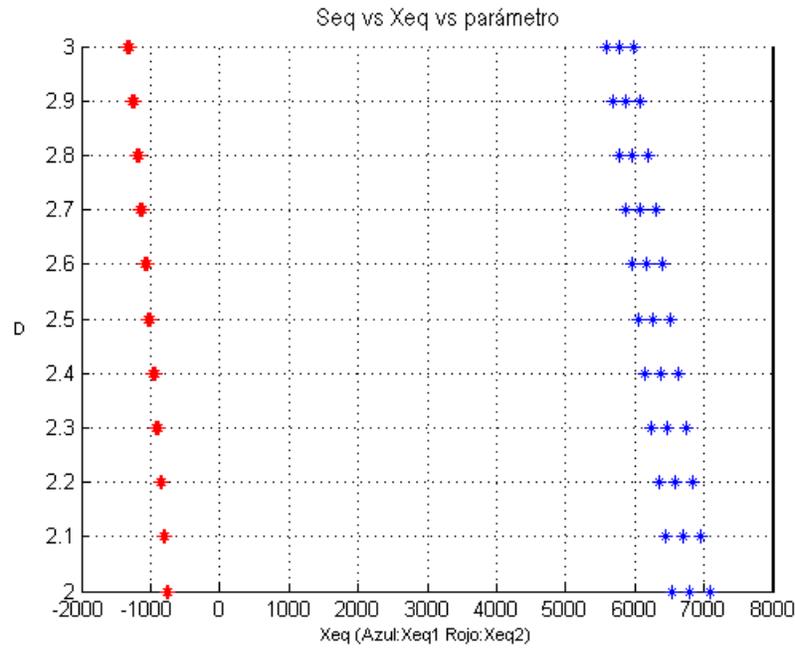
(b) Zona dos



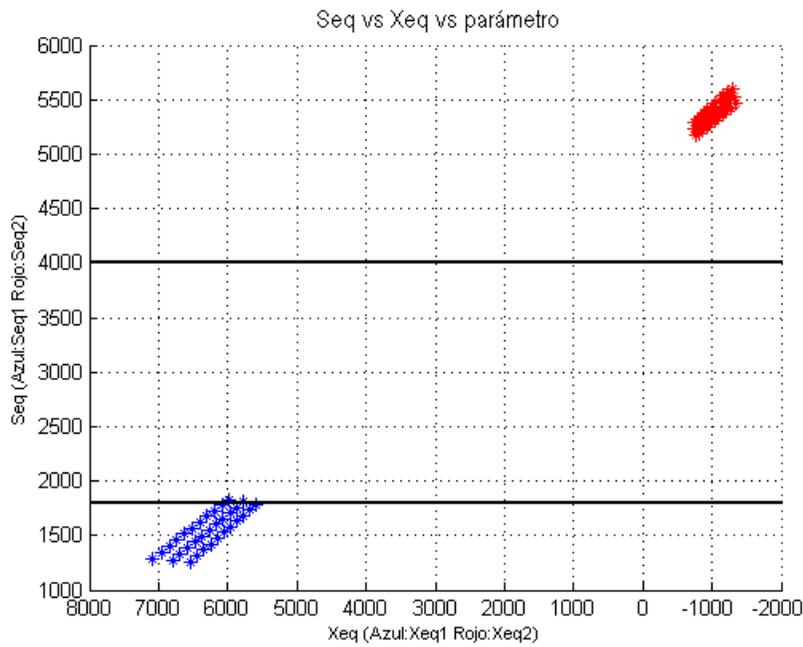
(c) Zona tres

Figura 3.3. Puntos de equilibrio variando D

A continuación se dan las vistas de la Figura 3.3(a) puntos de equilibrio de la primera zona variando el parámetro D , con el fin de interpretar más fácilmente las gráficas dadas en la Figura 3.3.



(a) vista D vs X^{eq}

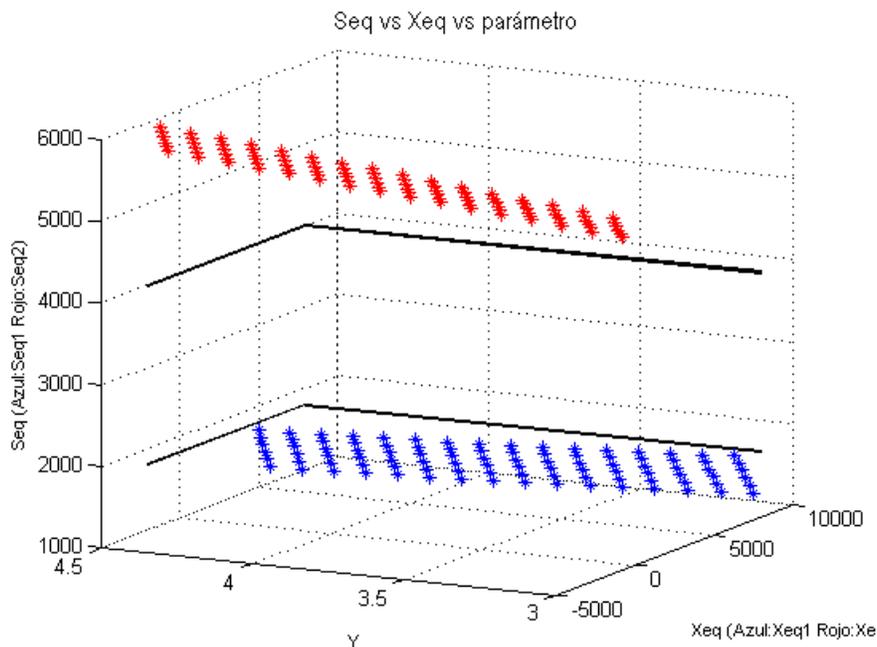


(b) vista Seq vs X^{eq}

Figura 3.4. Vistas de los puntos de equilibrio de la zona uno variando D

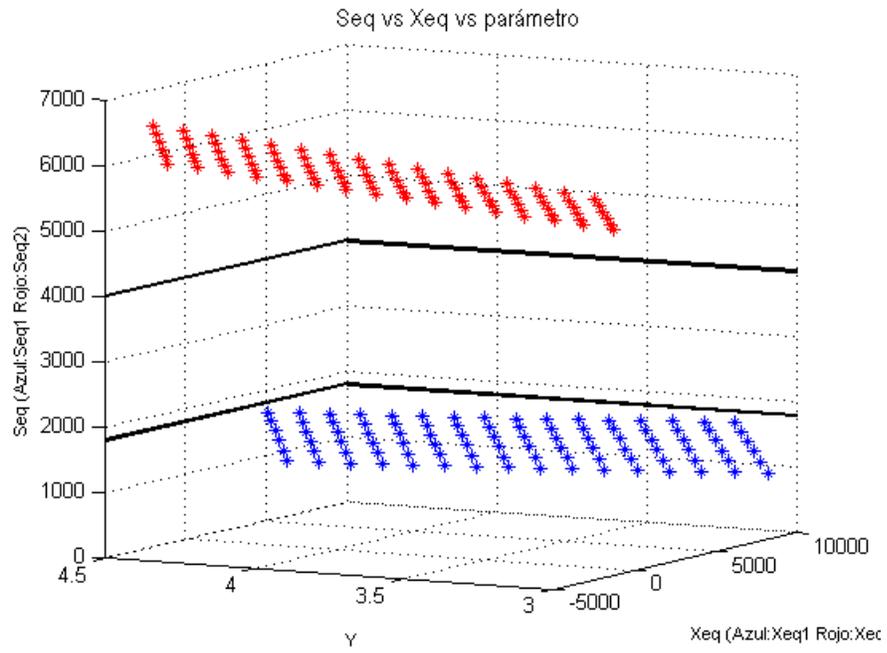
En la Figura 3.5 se observan los puntos de equilibrio variando el parámetro Y desde 3 hasta 4.5.

- Para la zona una, Figura 3.5(a) se presentan equilibrios no virtuales color azul y equilibrios virtuales color rojo, los cuales además de ser virtuales no son físicamente admisibles al tener valores negativos de X^{eq} , también se observa que a medida que va aumentando el coeficiente de rendimiento del sustrato (Y) los puntos de equilibrio no varían mucho, al ser la curva casi constante, indicando esto que este parámetro no presenta gran incidencia en el modelo.
- Para la zona dos, Figura 3.5(b) sigue un comportamiento muy similar a la Figura 3.5(a) pero se presentan puntos de equilibrio virtuales ya que pertenecen a una zona diferente a la analizada.
- Para la zona tres, Figura 3.5(c) todos sus equilibrios son no virtuales al encontrarse en valores de $S > 4000$, pero con valores no admisibles al presentar puntos de equilibrios negativos, por esto esta región no es tomada en cuenta en lo sucesivo.

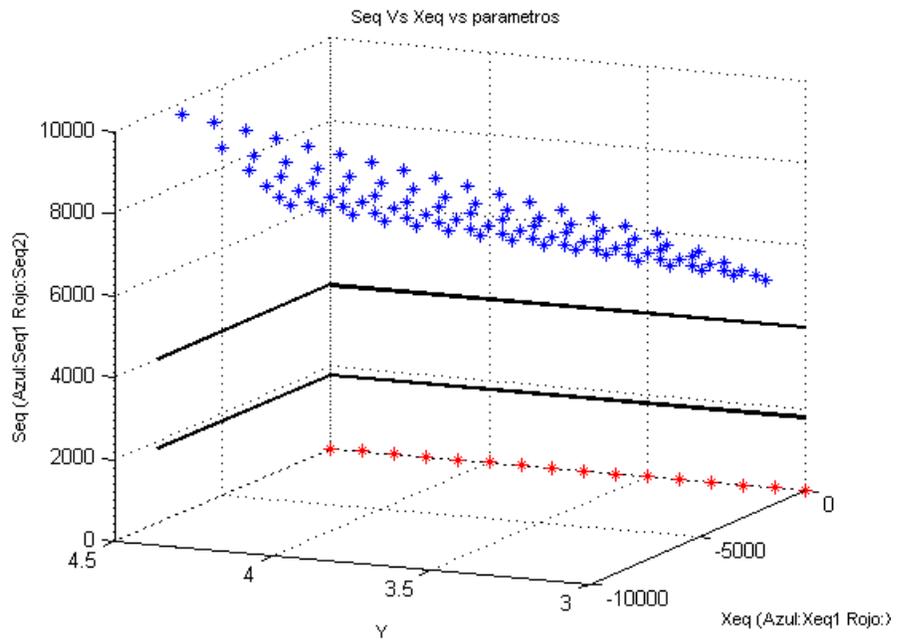


(a) Zona uno

Figura 3.5. Puntos de equilibrio variando Y (Continúa en la pág. siguiente)



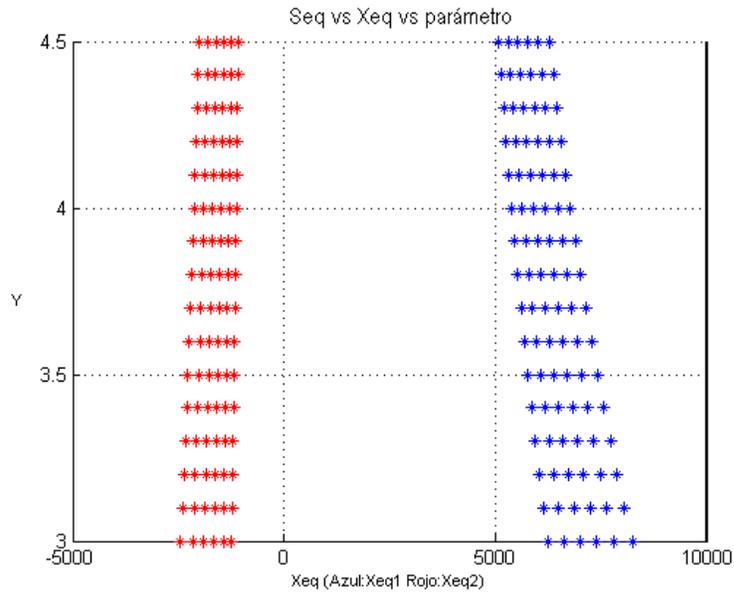
(b) Zona dos



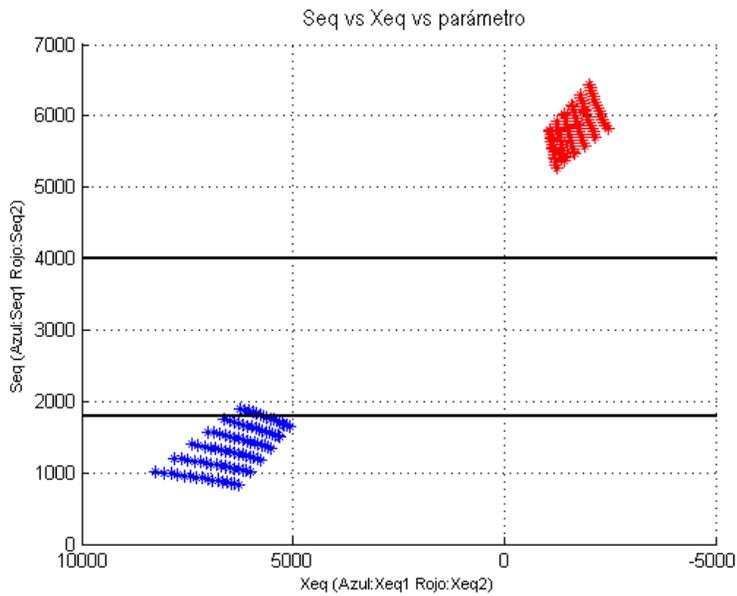
(c) Zona tres

Figura 3.5. Puntos de equilibrio variando Y

Para poder visualizar un poco mejor la Figura 3.5, realizamos vistas de los puntos de equilibrio de la zona dos Figura 3.5(b), en las cuales podemos observar que en su mayoría, sus puntos de equilibrio son virtuales.



(a) vista D vs Xeq



(b) vista seq vs Xeq

Figura 3.6. Vistas de la zona dos de los puntos de equilibrio variando Y

3.3.3. Análisis de la estabilidad

La tabla 3.1, nos muestra como cuando se dan condiciones iniciales muy cercanas a un punto de equilibrio, las orbitas tienden a él, esto se hizo aplicando la teoría de perturbaciones (consistente en analizar el crecimiento o decrecimiento de la perturbación que se le induce a la órbita periódica).

Condiciones Iniciales (X,S)	Punto de Equilibrio	Valores Propios	Clasificación
(10590.0704 , 1482.4858)	(10590.0728 , 1482.4882)	-0.25516 -8.2917	Estable
(10590.0704 , 1482.4817)	(10590.0853 , 1482.4342)	-0.25516 -8.2917	Estable
(10590.0705 , 1482.4814)	(10590.0759 , 1482.4743)	-0.25516 -8.2917	Estable
(10590.0705 , 1482.4817)	(10589.9514 , 1483.0116)	-0.25516 -8.2917	Estable
(10590.0705 , 1482.4819)	(10590.1494 , 1482.1571)	-0.25516 -8.2917	Estable
(10590.0706 , 1482.487)	(10590.0868 , 1482.4278)	-0.25516 -8.2917	Estable
(10590.0706 , 1482.4879)	(10590.093 , 1482.40129)	-0.25516 -8.2917	Estable
(10590.0706 , 1482.4881)	(10590.125 , 1482.2631)	-0.25516 -8.2917	Estable
(10590.0706 , 1482.4882)	(10590.1046 , 1482.3513)	-0.25516 -8.2917	Estable

Tabla 3.1. Estabilización de puntos de equilibrio variando condiciones iniciales

3.4. Bifurcaciones

3.4.1. Bifurcación

Si consideramos un sistema dinámico que depende de una serie de parámetros. Un sistema continuo podrá representarse como:

$$\dot{x} = f(x, \mu) \quad (3.12)$$

donde $x \in R^n$, $\mu \in R^k$ son las variables y los parámetros del sistema respectivamente. Si tomamos una región $U_\mu \subset R^n$ y si consideramos el retrato de fase del sistema en esta región a medida que los parámetros varían, el retrato de fase también varía. En esta variación puede ocurrir una de dos situaciones: el sistema puede permanecer topológicamente equivalente en U_μ al sistema original, o bien su topología puede cambiar. En caso de presentarse un cambio topológico se estaría hablando de la aparición de una bifurcación [32].

Diagrama de bifurcación

Un diagrama de bifurcación de un sistema dinámico es una estratificación de su espacio de parámetros inducida por la equivalencia topológica, junto con los retratos de fase representativos de cada estrato. Las soluciones estables suelen representarse mediante líneas continuas, mientras que las soluciones inestables se representan con líneas punteadas [32].

Localización de equilibrios, puntos fijos y ciclos límite

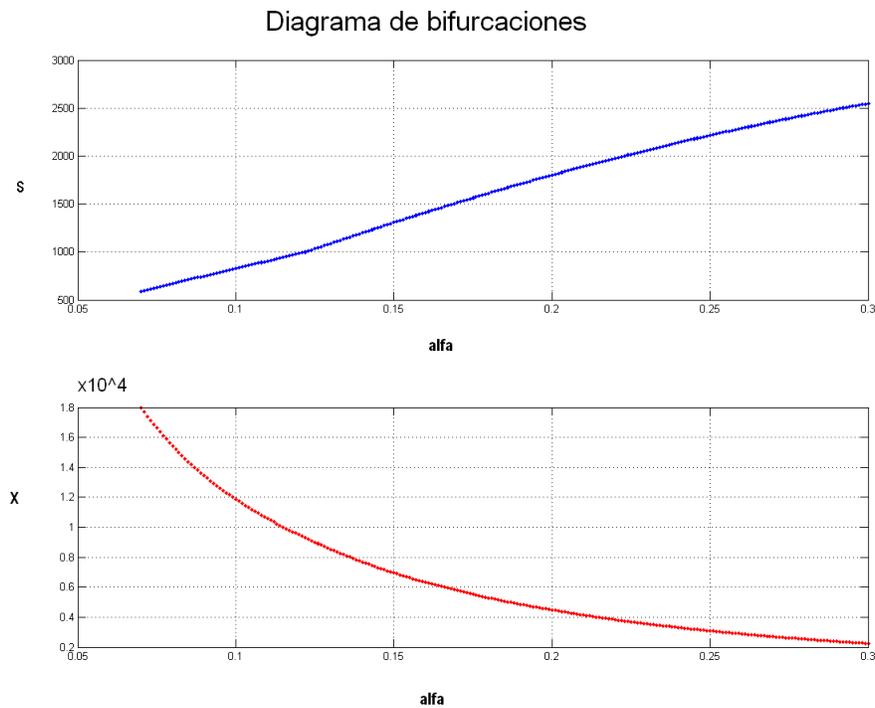
Tal como se ha visto una bifurcación es el cambio de las características del sistema dadas por su retrato de fase bajo la variación de uno de sus parámetros. Para localizar una bifurcación se hace necesario monitorear el comportamiento del sistema cerca de sus conjuntos invariantes a medida que se varía el parámetro. En el caso de las bifurcaciones elementales, estos conjuntos invariantes pueden reducirse a equilibrios. La localización de los puntos de equilibrio se realiza por métodos numéricos tales como el método de Newton-Raphson [20].

3.4.2. Análisis dinámico del sistema propuesto

Los diagramas de bifurcaciones obtenidos del sistema muestran que, en general su comportamiento es estable, no hay presencia de caos, y se mantiene la estabilidad al variar los parámetros. En los siguientes diagramas de bifurcaciones Figura 3.7, al variar los parámetros se muestra un desplazamiento en los equilibrios, el cual es positivo en la variable S y negativo en la variable X , con lo cual podemos

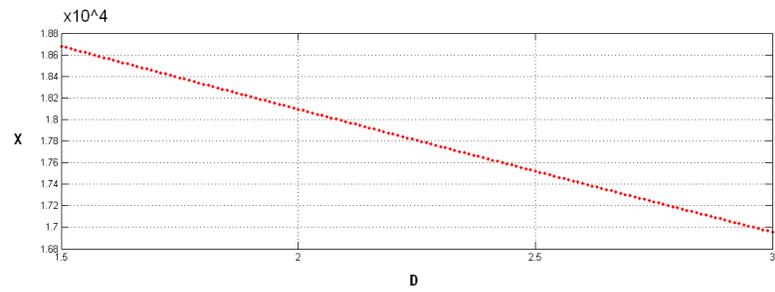
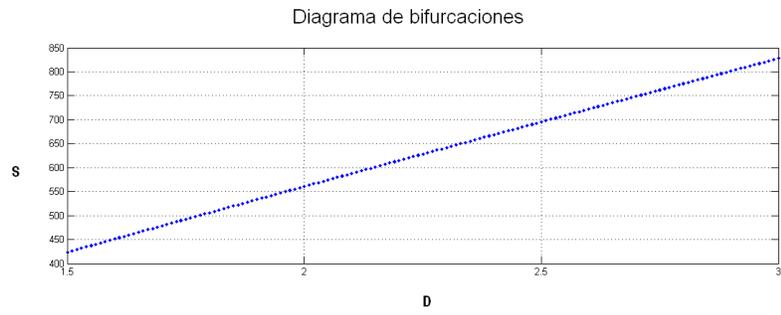
concluir lo siguiente:

- En la Figura 3.7(a) se observa que cuando aumenta el valor de la deficiencia en el separador SLG esto indica que la biomasa o microorganismos no están degradando el sustrato eficientemente al no obtener un buen porcentaje de gas metano, el cual es un indicador de la eficiencia del biodigestor.
- En la Figura 3.7(b) se observa que al ir aumentando el valor del coeficiente de dilución D , la concentración de sustrato S aumenta y la concentración de biomasa X disminuye, indicando esto que se presenta condición de lavado al presentar mayor caudal a la entrada del reactor.
- En la Figura 3.7(c) se observa que la concentración de biomasa X y la concentración de sustrato S van disminuyendo indicando esto que Y (el coeficiente de rendimiento del sustrato) incide considerablemente sobre el S (concentración de sustrato dentro del reactor) al ser el único parámetro que hace disminuirlo, mientras que su efecto en X es nulo al no presentarse en la ecuación que la modela.

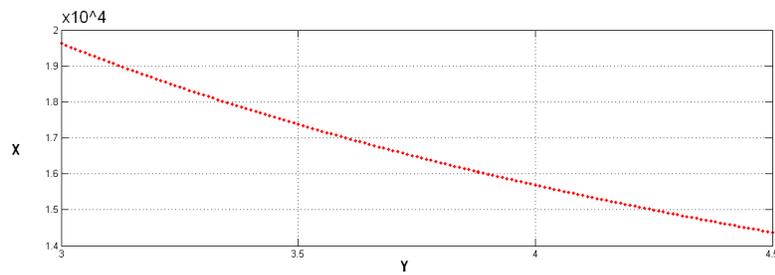
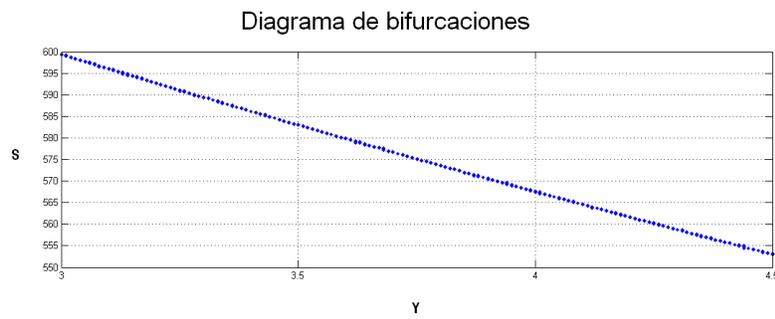


(a) variando α de (0 a 0.3)

Figura 3.7. Diagramas de bifurcación para los tres parámetros analizados (Continúa en la pág. siguiente)



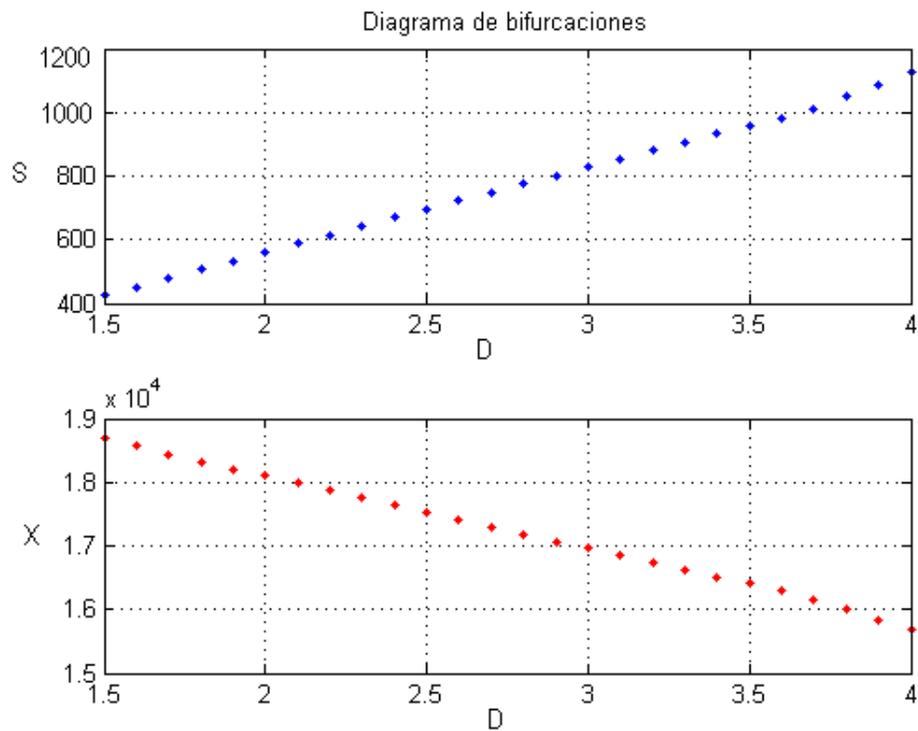
(b) variando D de (2.0 a 3.0)



(c) variando Y de (3 a 4.5)

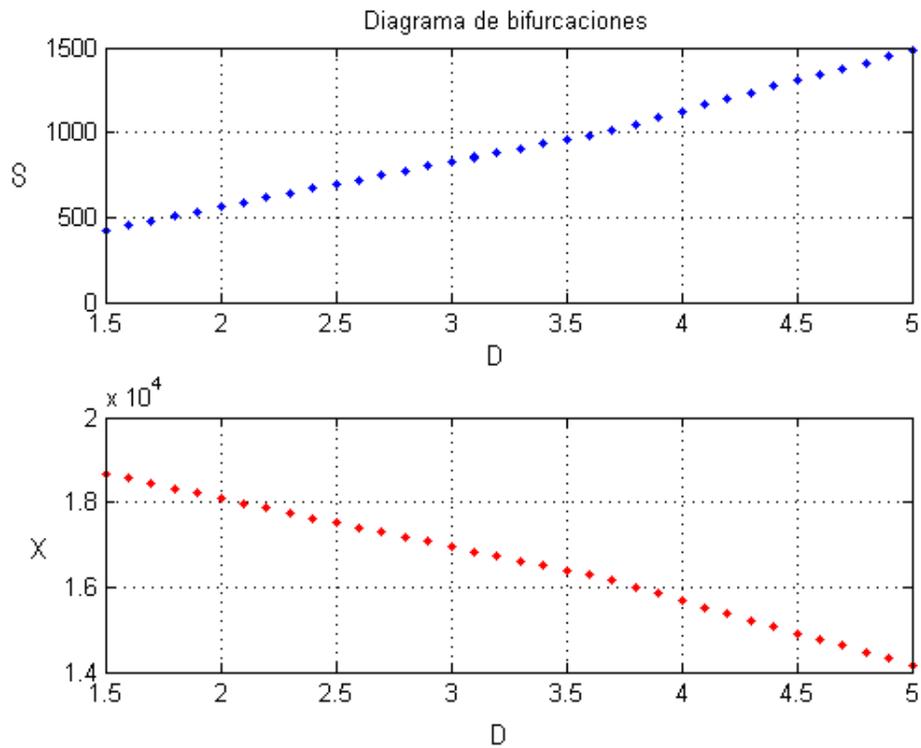
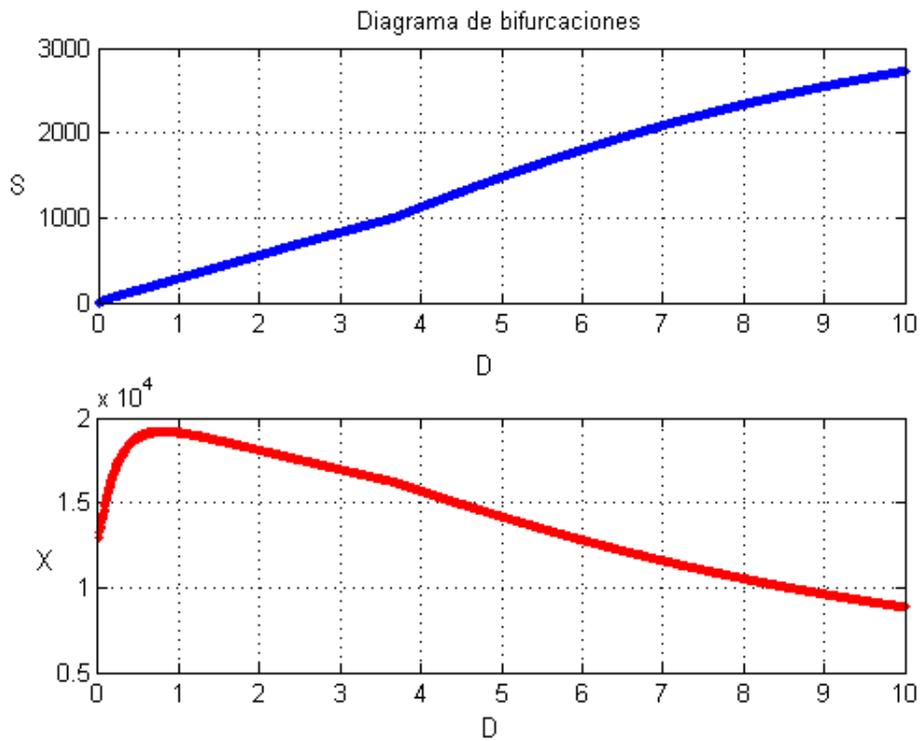
Figura 3.7. Diagramas de bifurcación para los tres parámetros analizados

Los diagramas de bifurcación de la Figura 3.8 indican que a pesar de aumentar el tiempo de simulación y el valor del parámetro D desde 1.5 hasta 5, su comportamiento no varía, por esto se realizó la simulación variando D desde 0 hasta 10, Figura 3.8(c), donde se puede apreciar el mismo comportamiento anterior, aunque es de aclarar que un valor de D tan alto indicaría que el bioreactor no podría realizar su operación ya que un caudal de entrada tan alto provoca que la biomasa no alcance a actuar sobre la materia orgánica, presentándose de esta forma la condición de lavado, lo cual es lo que siempre se pretende evitar.



(a) variando D hasta 4 con tiempo 2000

Figura 3.8. Diagramas de bifurcación a diferentes D y tiempos (Continúa en la pág. siguiente)

(b) variando D hasta 5 con tiempo 3000(c) variando D hasta 10 con tiempo 3000**Figura 3.8.** Diagramas de bifurcación a diferentes D y tiempos

Los diagramas de bifurcación bi-paramétricos, son diagramas donde se varían simultáneamente dos parámetros, estos se pueden ver en la Figura 3.9 donde al realizar la combinación de los tres parámetros (D y Y), (D y α), (α y Y), se puede observar que para cada valor de los parámetros se presenta un punto de equilibrio, en la Figura 3.10 se ratifica que al variar simultáneamente los dos parámetros se obtiene una malla de puntos de equilibrio, lo que indica que el bioreactor es muy estable.

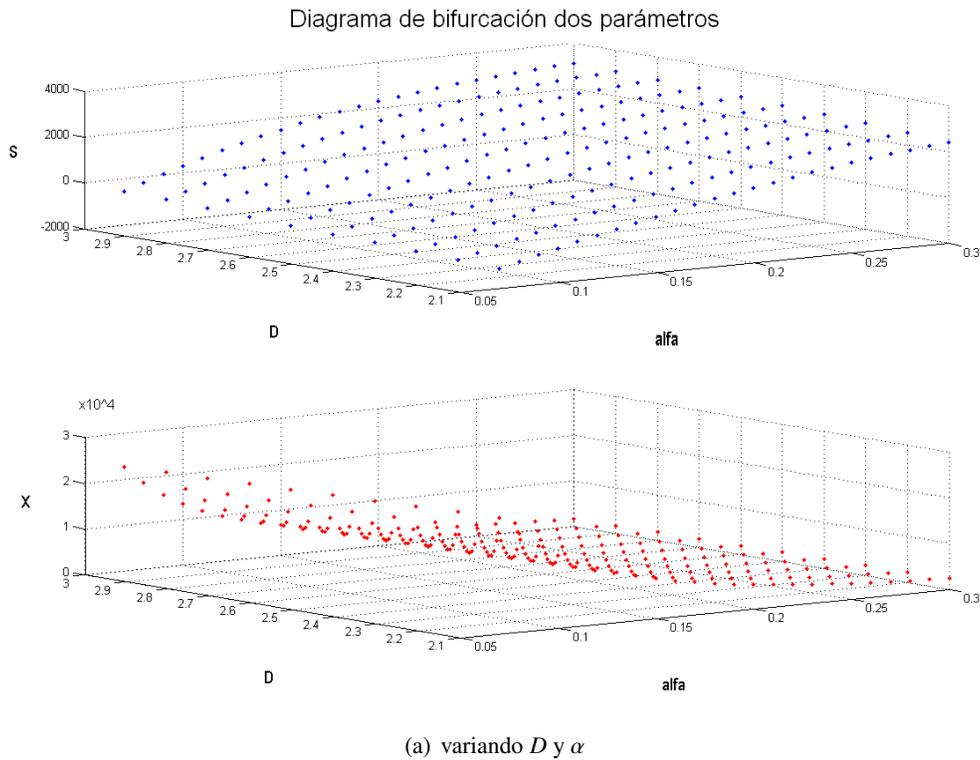
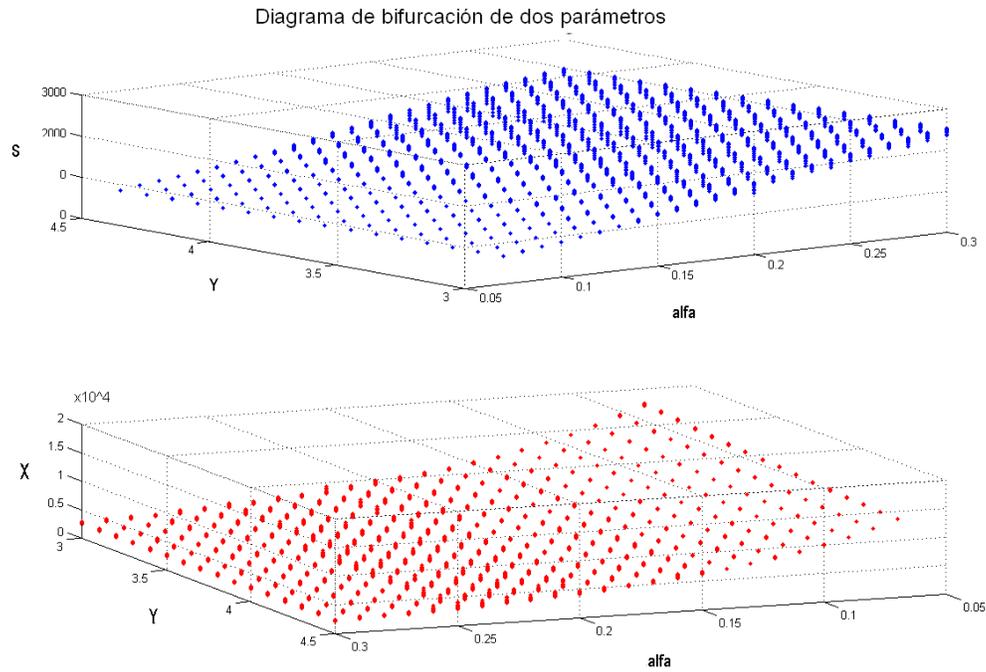
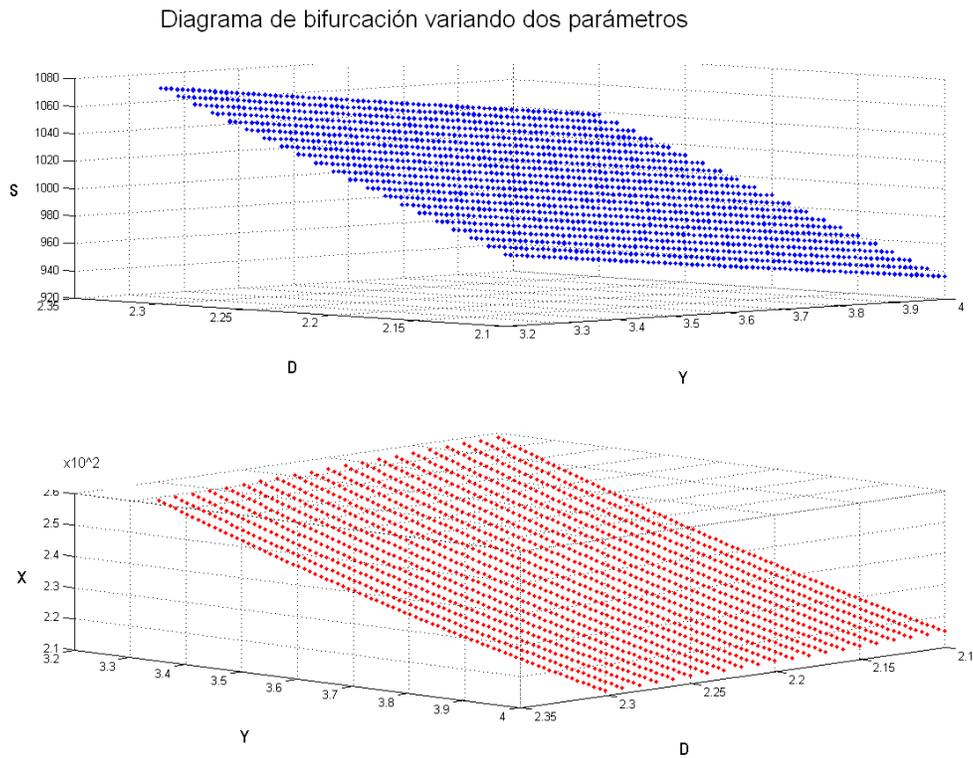
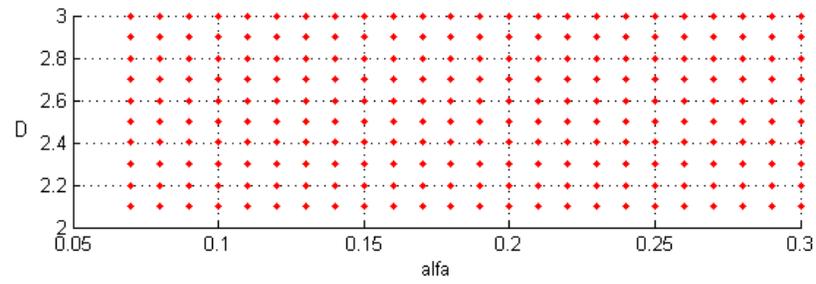
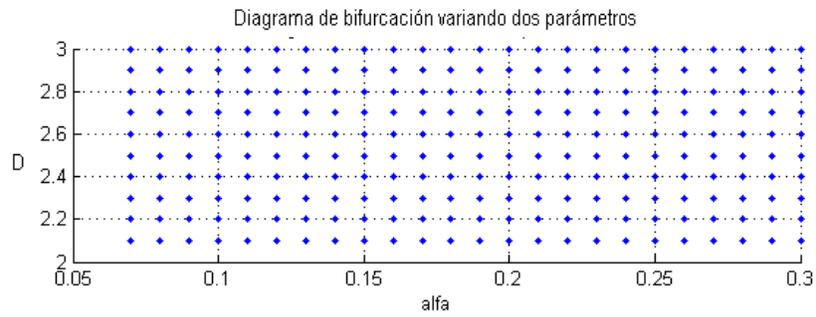
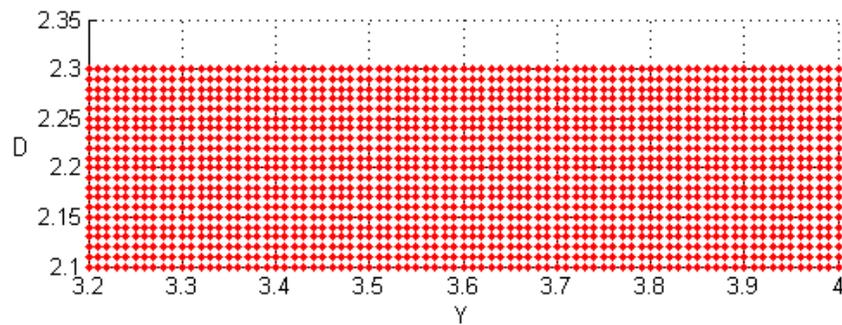


Figura 3.9. Diagramas de bifurcación de dos parámetros (Continúa en la pág. siguiente)

(b) variando Y y α (c) variando D y Y **Figura 3.9.** Diagramas de bifurcación de dos parámetros

(a) α vs D (b) γ vs D **Figura 3.10.** Vistas de los diagramas de bifurcación de dos parámetros (Continúa en la pág. siguiente)

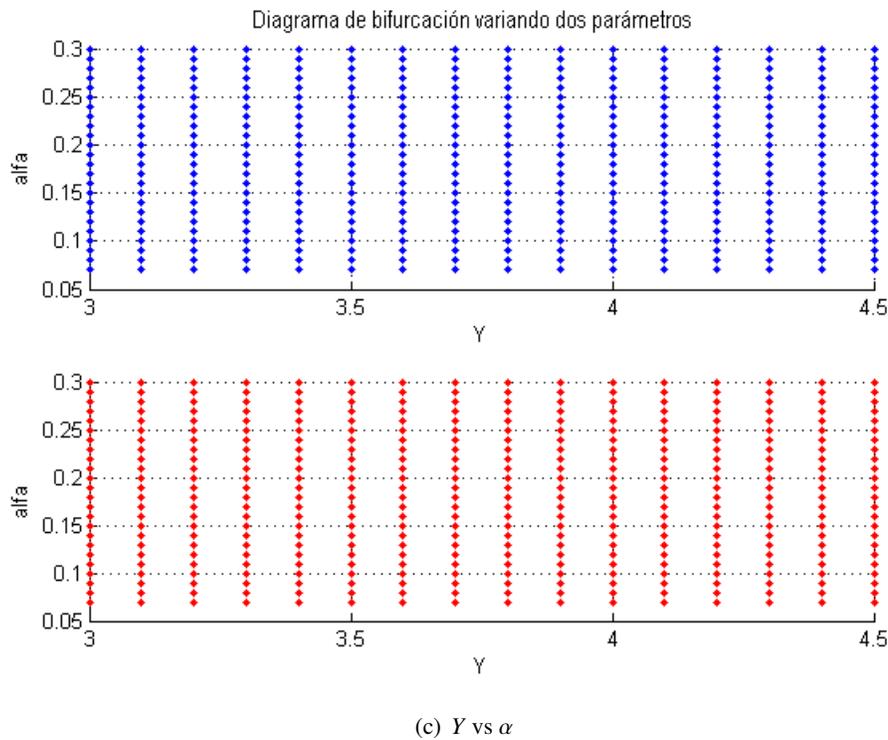


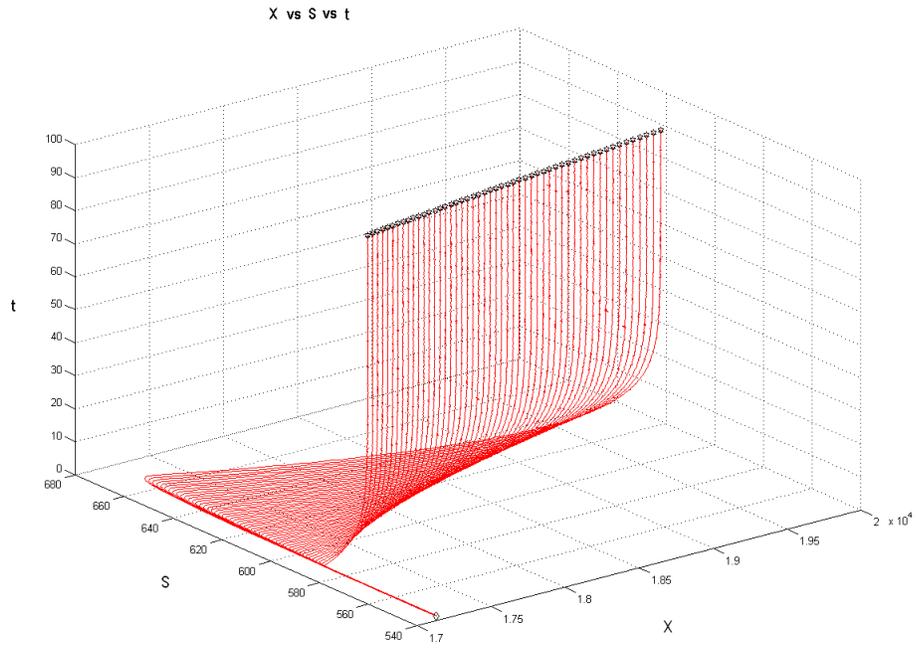
Figura 3.10. Vistas de los diagramas de bifurcación de dos parámetros

El comportamiento dinámico del sistema a diferentes tiempos se aprecia en la Figura 3.11, en la cual se puede observar que a pesar que el tiempo de simulación es 100 días Figura 3.11(a), 2000 días 3.11(b) o 3000 días 3.11(c), el comportamiento en el diagrama de fases es muy similar, ya que después de un cierto tiempo se vuelve completamente lineal, es de aclarar que se presentan diferentes curvas dentro de las gráficas debido a que se varía un parámetro simultáneamente, en este caso es el factor de dilución D , por esto se observan diferentes puntos de equilibrio (asteriscos) al terminar la gráfica; Se realiza la Figura 3.12 para mayor comprensión de las graficas anteriores, observando las diferentes vistas de las mismas.

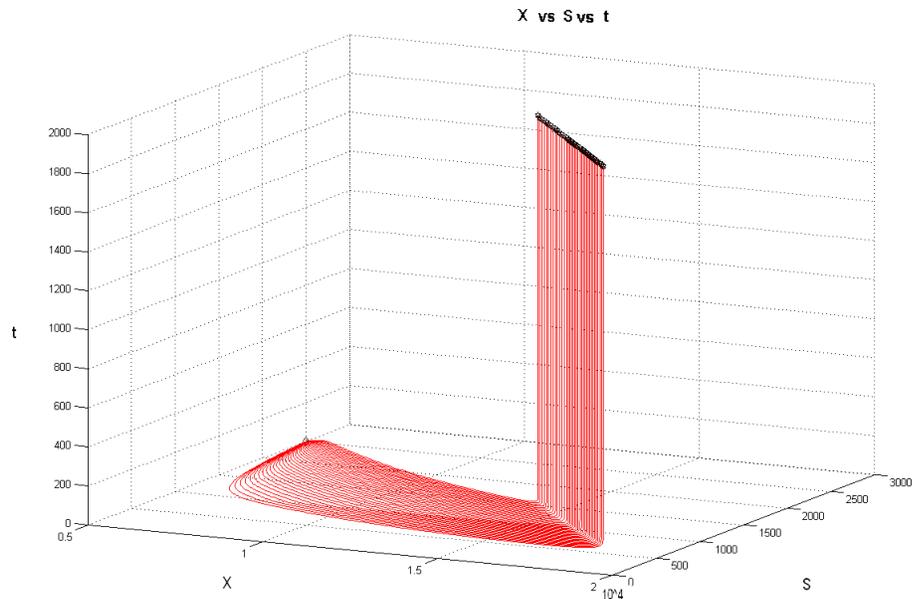
Analizando la Figura 3.11(c) nos podemos dar cuenta que a pesar que se inicie a diferentes condiciones iniciales, su comportamiento no varía, indicando esto que el reactor es muy estable.

En la Figura 3.12 se realiza una vista diferente de la Figura 3.11(b) para observar mucho mejor como es el comportamiento dinámico del sistema, encontrándose que con una condición inicial de (2000, 500) en valores para X y S , y variando simultáneamente el factor de dilución D , la dinámica inicial es de aumentar la concentración de sustrato y de bacterias debido a la influencia del factor de dilución, pero después la concentración de sustrato va disminuyendo debido a la acción de las bacterias sobre este,

indicando esto que se está generando biogás.

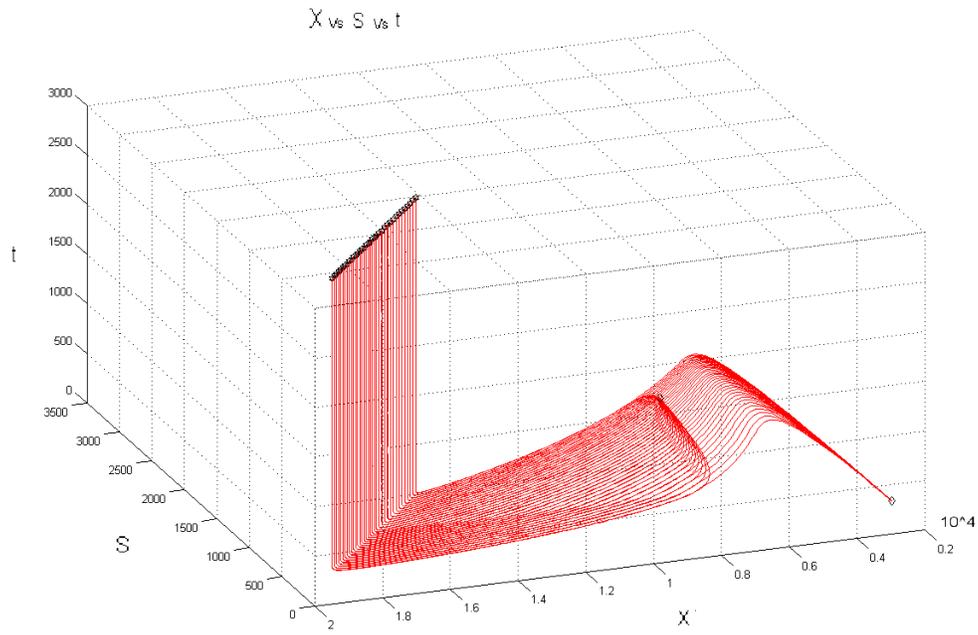


(a) tiempo hasta 100 días

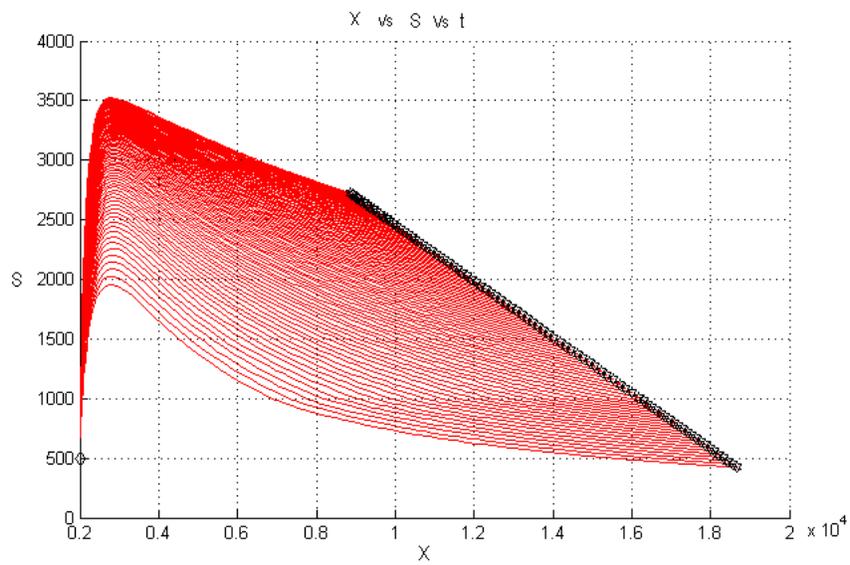


(b) tiempo hasta 2000 días

Figura 3.11. Diagramas de fases a diferentes tiempos (Continúa en la pág. siguiente)



(c) tiempo hasta 3000 días

Figura 3.11. Diagramas de fases a diferentes tiempos**Figura 3.12.** Vista del diagrama de fases X vs S de la Figura 3.11(b)

4. Teoría de Filippov

4.1. División de los sistemas dinámicos discontinuos

1. Sistemas continuos no suaves, o jacobiano discontinuo. Estos sistemas son descritos por campos vectoriales continuos pero con el campo vectorial no suave.
2. Sistemas descritos por ecuaciones diferenciales con discontinuidades al lado derecho, llamadas sistemas Filippov, el campo vectorial de este sistema es discontinuo.
3. Sistemas con discontinuidad de salto.

4.2. Generalidades de los sistemas de Filippov

El método Filippov es pensado para la continuación de la solución a una superficie discontinua por ecuaciones diferenciales con términos discontinuos del lado derecho de la ecuación. De acuerdo con este método, los extremos de todos los vectores de velocidad de estado en la vecindad de un punto en una superficie discontinua, deben ser complementados por un mínimo conjunto convexo y el vector de velocidad de estado del movimiento deslizante debe pertenecer a este conjunto [21].

Considerando un sistema Filippov y asumiendo sólo dos regiones tenemos:

$$\dot{z} = \begin{cases} F^{(1)}(z), & z \in S_1 \\ F^{(2)}(z), & z \in S_2 \end{cases} \quad (4.1)$$

siendo

$$S_1 = \{z \in \mathbb{R}^2 : H(z) < 0\},$$

$$S_2 = \{z \in \mathbb{R}^2 : H(z) > 0\}.$$

La frontera discontinuidad Σ separa las dos regiones:

$$\Sigma = \{z \in \mathbb{R}^2 : H(z) = 0\},$$

donde $H(z)$ es una función escalar suave con gradiente no nulo sobre Σ . La frontera Σ es cerrada o tiende a infinito en ambas direcciones y $F^{(1)} \neq F^{(2)}$ sobre Σ .

4.2.1. Estandarización de las soluciones deslizantes

Utilizando el Método Convexo de Filippov para obtener la solución de 4.1, para $z \in \Sigma$ se define:

$$\sigma_{(z)} = \langle H_z(z), F^{(1)}(z) \rangle \langle H_z(z), F^{(2)}(z) \rangle, \quad (4.2)$$

donde

$\langle \cdot, \cdot \rangle$ denota el producto escalar estándar.

Primero definimos el conjunto de cruce $\Sigma_c \subset \Sigma$ así:

$$\Sigma_c = \{z \in \Sigma : \sigma_{(z)} > 0\}$$

El cual es el conjunto de todos los puntos $z \in \Sigma$, donde los dos vectores $F^{(i)}(z)$ tienen componentes normales no triviales del mismo signo.

También tenemos el conjunto deslizante Σ_s que complementa a Σ_c en Σ es decir

$$\Sigma_s = \{z \in \Sigma : \sigma_{(z)} \leq 0\}.$$

El conjunto de cruce es abierto, mientras que el conjunto de deslizamiento es la unión de los segmentos cerrados deslizantes y puntos aislados de deslizamiento.

El método de Filippov asocia la siguiente combinación convexa $g(z)$ de los dos campos $F^{(i)}(z)$ para cada punto deslizante no singular $z \in \Sigma_s$, donde $g(z)$ es llamado campo de Filippov ver Figura 4.1 [21]:

$$g(z) = \lambda F^{(1)}(z) + (1 - \lambda)F^{(2)}(z) \quad (4.3)$$

$$\lambda = \frac{\langle H_z(z), f^{(2)}(z) \rangle}{\langle H_z(z), F^{(2)}(z) - F^{(1)}(z) \rangle}$$

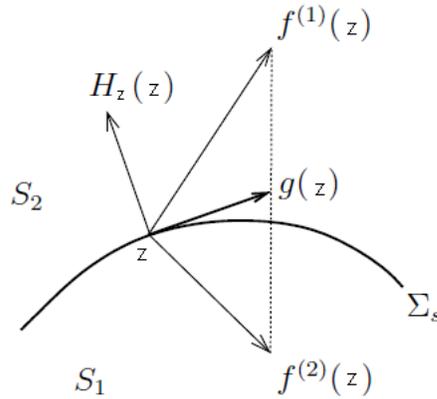


Figura 4.1. Esquema Filippov.

4.2.2. Puntos especiales de deslizamiento

- **Puntos singulares:** son los $z \in \Sigma_s$ tales que

$$\langle H_z(z), F^{(2)}(z) - F^{(1)}(z) \rangle = 0 \quad (4.4)$$

- **Pseudo-equilibrios:** son los $z \in \Sigma_s$ tales que

$$g(z) = 0, F^{1,2}(z) \neq 0 \quad (4.5)$$

- **Equilibrios de frontera:** son los $z \in \Sigma_s$ tales que

$$F^1(z) = 0, \quad F^2(z) = 0 \quad (4.6)$$

- **Puntos tangentes:** son los $z \in \Sigma_s$ tales que

$$\langle H_z(z), F^i(z) \rangle = 0, \quad F^{1,2}(z) \neq 0 \quad (4.7)$$

4.3. Bifurcaciones

Considerando el sistema Filippov dependiendo de un sólo parámetro (o una familia de parámetros):

$$\dot{z} = \begin{cases} F^{(1)}(z, \theta), & z \in S_1(\theta), \\ F^{(2)}(z, \theta), & z \in S_2(\theta), \end{cases} \quad (4.8)$$

donde $z \in \mathbb{R}^2$, $\theta \in \mathbb{R}$, y $F^{(i)}$, $i = 1, 2$, son funciones suaves de (z, θ) , mientras

$$S_1(\theta) = \{z \in \mathbb{R}^2 : H(z, \theta) < 0\}, \\ S_2(\theta) = \{z \in \mathbb{R}^2 : H(z, \theta) > 0\}$$

para alguna función suave $H(z, \theta)$ con $H_z(z, \theta) \neq 0$ para todo (z, θ) tal que $H(z, \theta) = 0$.

Decimos que 4.8 exhibe una bifurcación en $\theta = \theta_0$ si por una perturbación de un parámetro arbitrariamente pequeño tenemos un sistema topológicamente no equivalente.

4.3.1. Bifurcaciones locales

Para producir todas las bifurcaciones uni-parametricas involucradas en la frontera de discontinuidad Σ , usamos el siguiente criterio de clasificación: para un valor del parámetro α dado, consideramos el conjunto deslizante $\Sigma_s \subset \Sigma$ y encontramos todos sus pseudo-equilibrios y puntos tangentes. Teniendo en cuenta la hipótesis de generacidad, estos puntos son números infinitos, que pueden coincidir con varios α , que conducen a bifurcaciones locales de codimensión uno. Otra bifurcación

local de codimensión uno ocurre cuando un equilibrio hiperbólico **estándarizado** en S_1 o S_2 se acerca a la frontera Σ y atraviesa algún valor del parámetro, las bifurcaciones locales se clasifican en [21]:

1. Colisiones de equilibrio con la frontera

- Frontera foco
- Frontera nodo
- Frontera silla

2. Colisiones de puntos tangentes

- Doble tangencia
- Dos tangencias visibles
- Una tangencia visible y otra invisible
- Dos tangencias invisibles

3. Colisiones de pseudo-equilibrio

Las bifurcaciones globales de codimensión uno involucran ciclos límites, las cuales no son tenidas en cuenta en esta investigación ya que no se encontró ninguna de ellas.

4.4. Análisis del sistema planteado

4.4.1. Aplicación del método convexo de Filippov

El método convexo de Filippov planteado en el artículo de Kuznetsov [21] se aplica al modelo matemático planteado ya que se tienen tres zonas, cada una gobernada por ecuaciones diferenciales, las cuales son discontinuas en el límite de la zona uno y dos ó en el límite de la zona dos y tres, pero sólo se realiza el análisis de deslizamiento en la zona uno y dos, ya que como se pudo observar en la Figura 3.1(c), en la zona tres se generan puntos de equilibrio negativos, los cuales físicamente no pueden ser

posibles, por esta razón se excluye esta zona para el análisis de deslizamiento (ver apéndice uno). Las ecuaciones de las zonas analizadas se presentan a continuación.

$$F^{(1)} = \begin{cases} f_1 = & D(X^{in} - \alpha X) + ASX \\ f_2 = & D(S^{in} - S) - YASX \end{cases} \quad (4.9)$$

$$F^{(2)} = \begin{cases} g_1 = & D(X^{in} - \alpha X) + [\mu_1 + B(S - S_1)]X \\ g_2 = & D(S^{in} - S) - Y[\mu_1 + B(S - S_1)]X \end{cases} \quad (4.10)$$

donde

$$A = \frac{\mu_1}{S_1} \quad \text{y} \quad B = \frac{(\mu_2 - \mu_1)}{(S_2 - S_1)}$$

Para nuestro caso $H(z) = S - 1800$, luego haciendo $H(z) = 0$ si $S - 1800 < 0$ ó $S = 1800$, obtenemos la zona de deslizamiento; Analizando los posibles casos para cuando $H(z)$ sea mayor, menor o igual a cero, tenemos:

Zona 1:

$$H(z) < 0 \text{ si } S - 1800 < 0, \quad S < 1800$$

Zona 2:

$$H(z) > 0 \text{ si } S - 1800 > 0, \quad S > 1800 .$$

El gradiente de $H(z)$ viene dado por:

$$\nabla H_z(z) = \left(\frac{\partial H}{\partial Z}, \frac{\partial H}{\partial S} \right)$$

Así en este caso $\nabla H_z(z) = (0, 1)$ que es constante y siempre diferente de cero para cada $z \in \Sigma$, por lo tanto:

$$H(z) = \{z \in \mathbb{R}^2 : S = 1800\}$$

Obteniendo cada expresión para ser reemplazada en la ecuación 4.2, se tiene:

$$\begin{aligned}\langle H_z(z), F^{(1)}(z) \rangle &= \langle (0, 1), (f_1, f_2) \rangle = f_2 \\ \langle H_z(z), F^{(1)}(z) \rangle &= D(S^{in} - S) - YXAS\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\langle H_z(z), F^{(2)}(z) \rangle &= \langle (0, 1), (g_1, g_2) \rangle = g_2 \\ \langle H_z(z), F^{(2)}(z) \rangle &= D(S^{in} - S) - YX(\mu_1 + B(S - S_1))\end{aligned}$$

Se encuentra que la ecuación 4.2 aplicada a nuestro sistema es:

$$\sigma_{(z)} = (D(S^{in} - S) - YXAS)(D(S^{in} - S) - YX(\mu_1 + B(S - S_1)))$$

Desarrollando esta expresión para obtener una ecuación en función de z tenemos:

$$\sigma_{(z)} = X^2(Y^2AS(\mu_1 + B(S - S_1))) - X[D(S^{in} - S)Y(\mu_1 + B(S - S_1)) + SA] + (D(S^{in} - S))^2$$

Reemplazando los valores de cada constante y sabiendo que $S=1800$ se puede encontrar valores para z y así obtener las zonas de deslizamiento o cruce.

4.4.2. Obtención del campo de Filippov

Para obtener el campo de Filippov aplicamos la ecuación 4.3 a nuestro sistema, obteniendo:

$$g(z) = \frac{g_2 f_1 - f_2 g_1}{g_2 - f_2}$$

que en terminos de las dos componentes es:

$$g(z_1, z_2) = \left(\frac{g_2 f_1 - f_2 g_1}{g_2 - f_2}, 0 \right)$$

4.4.3. Obtención de los puntos de equilibrio

1. Puntos Singulares:

Los puntos singulares se obtienen por medio de la ecuación 4.4, donde los puntos de equilibrio de los campos $F^{(1)}$ y $F^{(2)}$ deben ser diferentes de los del campo vectorial ya que es igualar a cero el denominador de λ , pero se debe tener en cuenta que $F^{(1)}$ y $F^{(2)} \neq 0$, además $\nabla H F^{(1)} = \nabla H F^{(2)}$, esto quiere decir que $F^{(1)}$ y $F^{(2)}$ son colineales por lo tanto deben estar los dos campos en la misma recta.

aplicando la ecuación 4.4 a nuestro sistema se obtiene en forma general:

$$\langle H_z(z), F^2(z) - F^1(z) \rangle = g_2 - f_2$$

Reemplazando las funciones obtenemos la forma particular:

$$D(S^{in} - S) - YX(\mu_1 + B(S - S_1)) - (D(S^{in} - S) - YXAS) = 0$$

desarrollando la ecuación anterior tenemos:

$$S = \frac{\mu_1 - BS_1}{(A-B)}$$

Los puntos singulares se presentan cuando $Y = 0$, $X = 0$ ó $S = \frac{\mu_1 - BS_1}{(A-B)}$, que para nuestro sistema $Y = 0$ y $X = 0$ no se presenta ya que no son condiciones físicas deseables y μ_1 nunca es igual a BS_1 . Por lo tanto no se presentan puntos singulares.

2. Pseudo-equilibrios

Se presentan cuando los campos vectoriales $f^i(z)$ son transversales y anticolineales al campo de Filippov [21], por tanto se dan exactamente en el campo deslizante (campo de Filippov) el cual es definido por la ecuación 4.5 que al igualarla a cero y resolver el sistema, obtenemos el pseudo-equilibrio, y como este tiene sentido siempre que se encuentre en la zona deslizante, reemplazamos el punto obtenido en la ecuación 4.2, donde se hace el producto punto de cada uno de los campos con el vector normal a la superficie de conmutación; si el signo que resulta de este computo es negativo, significará que los campos tienen signos opuestos en la superficie de conmutación y ocurrirá deslizamiento (que puede ser atractor o repulsor), en caso contrario pertenecería a una zona de cruce ya que los campos llevarían el mismo signo con respecto a la superficie de conmutación.

Reemplazando las funciones y analizando cuando 4.3 se vuelve cero se tiene:

$$(D(S^{in} - S) - YX[\mu_1 + B(S - S_1)])(D(X^{in} - \alpha X) + ASX) - \\ (D(S^{in} - S) - YASX)(D(X^{in} - \alpha X) + [\mu_1 + B(S - S_1)]X) = 0$$

Desarrollando la ecuación 4.2 para obtenerla en función de X según los campos se obtiene:

$$X^2 (YmD\alpha - YAS D\alpha) + X (DAS K - YmDX^{in} - DmK + YAS DX^{in}) = 0$$

donde

$$m = \mu_1 + B(S - S_1), \quad K = (S^{in} - S)$$

3. Equilibrios de Frontera

Para obtener los puntos de frontera aplicamos la ecuación 4.6 a nuestro sistema obteniendo las siguientes expresiones para cada zona:

zona uno:

$$F^{(1)} = \begin{cases} f_1 = 0 & = D(X^{in} - \alpha X) + ASX \\ f_2 = 0 & = D(S^{in} - S) - YASX \end{cases}$$

zona dos:

$$F^{(2)} = \begin{cases} g_1 = 0 & = D(X^{in} - \alpha X) + [\mu_1 + B(S - S_1)]X \\ g_2 = 0 & = D(S^{in} - S) - Y[\mu_1 + B(S - S_1)]X \end{cases}$$

4. Puntos Tangentes

Los puntos tangentes son los que van a delimitar la zona de deslizamiento, y son calculados al resolver la ecuación 4.7, pero teniendo en cuenta que si ambos $F^{(1,2)}(z) \neq 0$, pero $\langle H_z(z), F^1(z) \rangle = 0$, ó $\langle H_z(z), F^2(z) \rangle = 0$, el valor z obtenido pertenece a la zona de deslizamiento y es llamado punto tangente.

Aplicando este concepto a nuestro sistema tenemos:

$$\langle H_z(z), F^{(1)}(z) \rangle = \langle (0, 1), (f_1, f_2) \rangle = f_2 = D(S^{in} - S) - YXAS$$

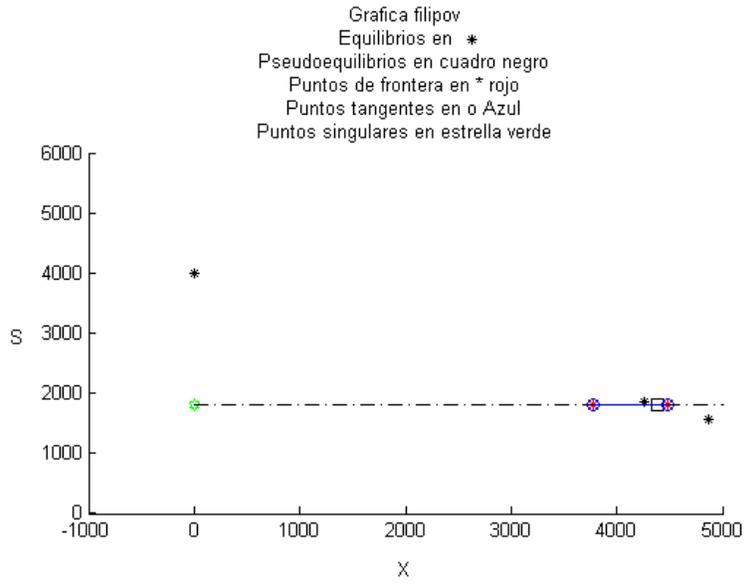
$$\langle H_z(z), F^{(2)}(z) \rangle = \langle (0, 1), (g_1, g_2) \rangle = g_2 = D(S^{in} - S) - YX(\mu_1 + B(S - S_1))$$

A continuación se presentan las gráficas que resultaron del cálculo analítico de los puntos críticos algoritmo descrito en [26], incluyendo puntos de equilibrios, pseudo-equilibrios, puntos tangentes y puntos deslizantes singulares, que sirvió como punto de referencia para el análisis numérico.

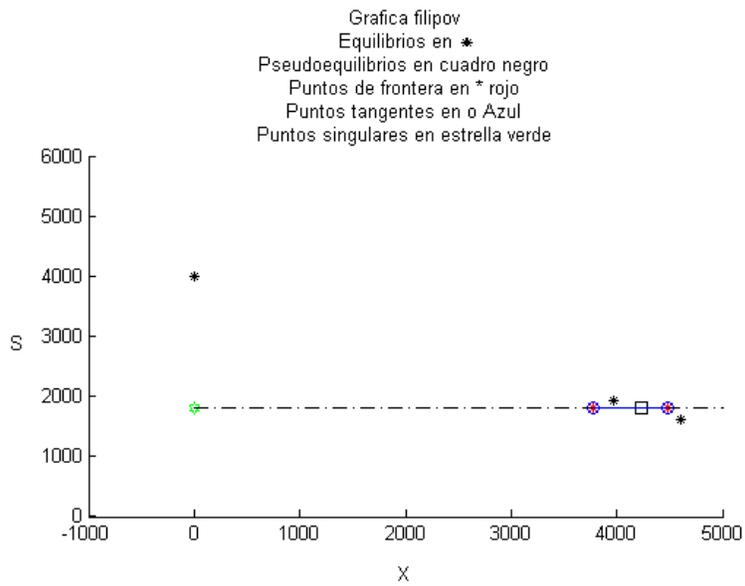
En las Figuras 4.2 a 4.4 encontramos que variando el X^{in} en 0, 240 y 320, el comportamiento de los distintos puntos cambia, ya que para que se presente la bifurcación de tipo local nodo frontera se debe variar el parámetro α según el X^{in} , por ejemplo, para $X^{in} = 0$ los α son desde 0.15 a 0.18, con $X^{in} = 240$ los α son desde 0.19 a 0.24 y con $X^{in} = 320$ los α son desde 0.24 a 0.27, lo cual hace pensar que a mayor cantidad de biomasa a la entrada del bioreactor menor es la eficiencia de remoción de DQO debido a las bacterias de diferente tipo que trae el afluente al ser de un relleno sanitario, lo cual hace pensar que se pueden realizar reacciones alternas.

En la Figura 4.2 con $X^{in} = 0$, se puede ver como el equilibrio en la zona uno se desplaza hacia la frontera, aproximándose a la colisión, para finalmente producirse una bifurcación nodo frontera, mientras que el pseudo-equilibrio también se mueve dentro del segmento deslizante entre los puntos tangentes, y finalmente también tiende a desaparecer al chocar con el punto tangente izquierdo, quedando dos puntos de equilibrio en la zona superior pero el de la parte más superior es físicamente imposible al ser negativo y el más cercano a la superficie de conmutación es el que se tiene en cuenta al ser un punto de equilibrio físicamente posible.

Las Figuras 4.3 y 4.4 muestran el mismo comportamiento anterior pero con valores de α desde 0.19 a 0.24 y 0.21 a 0.26 respectivamente, ratificando el análisis realizado en la sección anterior.



(a) $\alpha = 0.150$



(b) $\alpha = 0.155$

Figura 4.2. Puntos de equilibrio con $X^{in} = 0$ variando α de 0.150 a 0.155 (Continúa en la pág. siguiente)

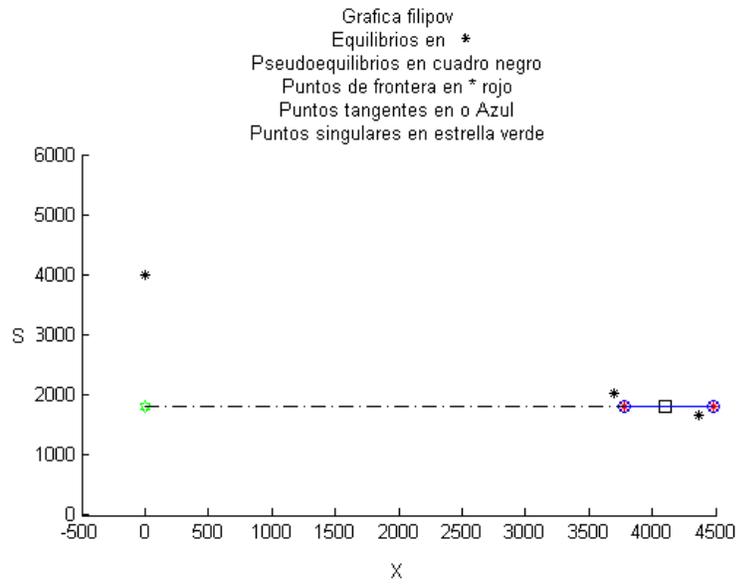
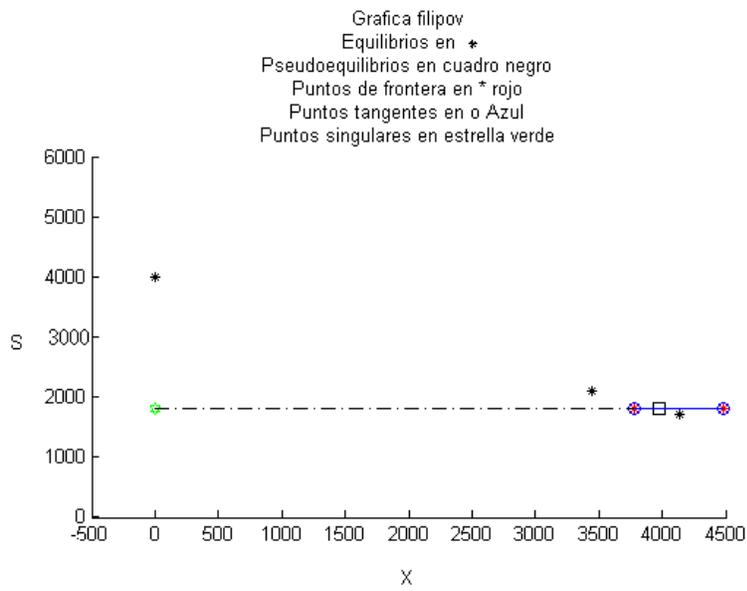
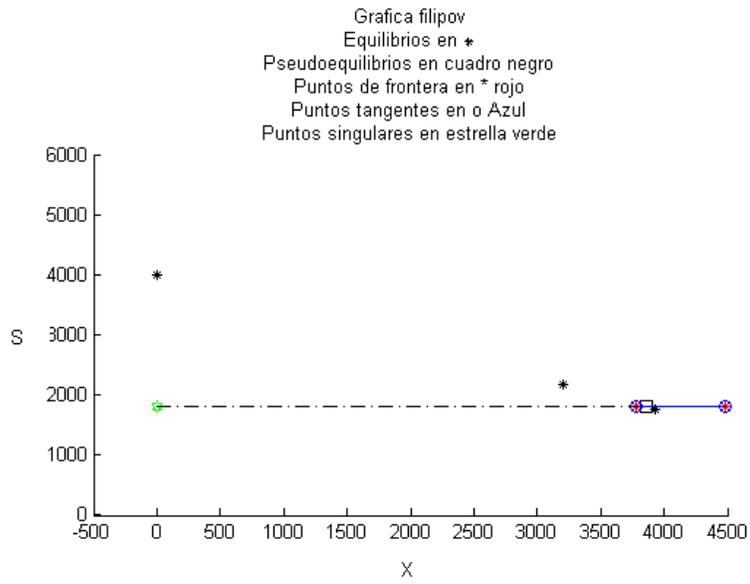
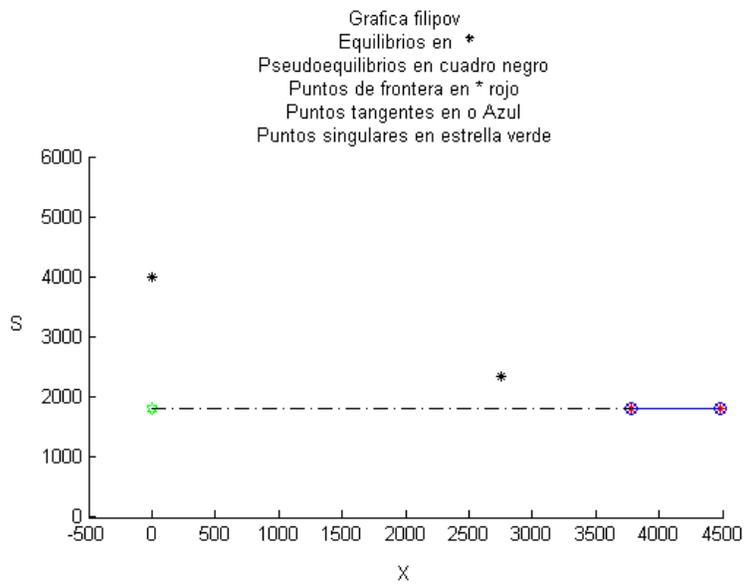
(c) $\alpha = 0.160$ (d) $\alpha = 0.165$

Figura 4.2. Puntos de equilibrio con $X^{in} = 0$ variando α de 0.160 a 0.165 (Continúa en la pág. siguiente)



(e) $\alpha = 0.170$



(f) $\alpha = 0.180$

Figura 4.2. Puntos de equilibrio con $X^{in} = 0$ variando α de 0.170 a 0.180

En la Figura 4.3 se presenta un comportamiento muy parecido al descrito anteriormente, con la diferencia de que al aumentar el X^{in} a un valor de 240, se nota un aumento del valor de α para el que se produce la bifurcación nodo frontera y el choque del pseudo-equilibrio con el punto tangente, que es en $\alpha = 0.23$ aproximadamente, y que anteriormente era cercano a $\alpha = 0.17$.

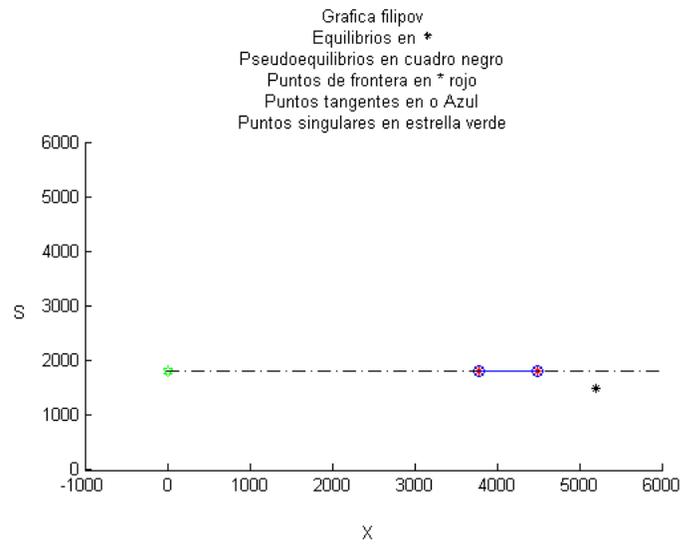
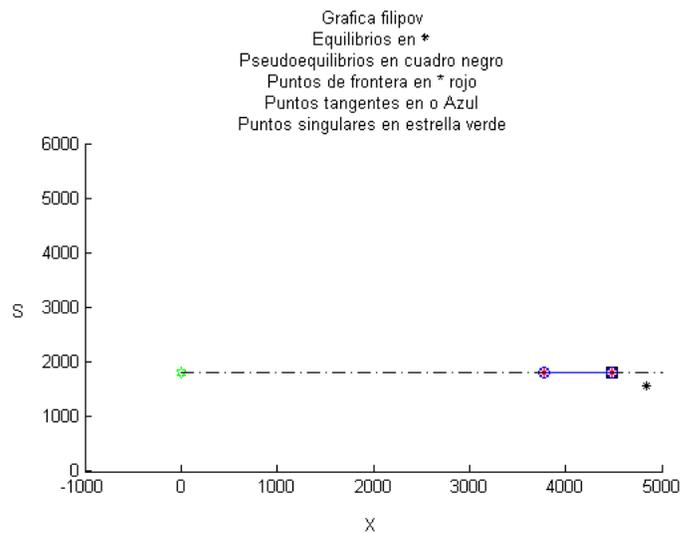
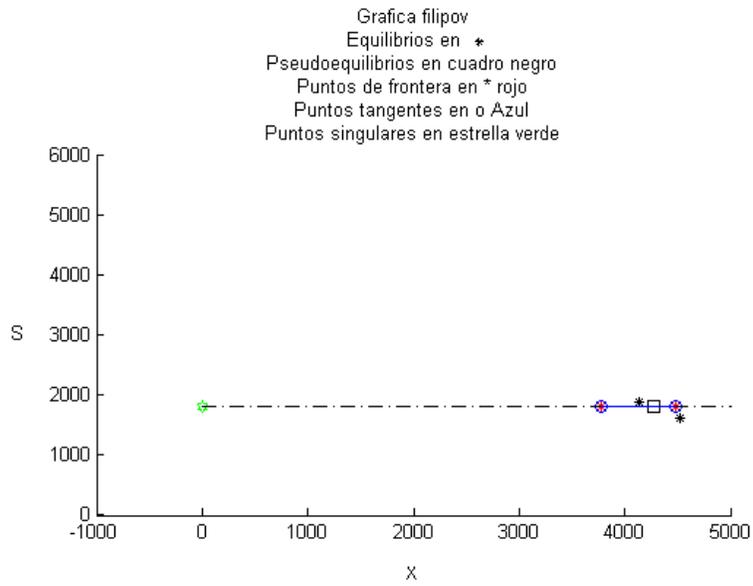
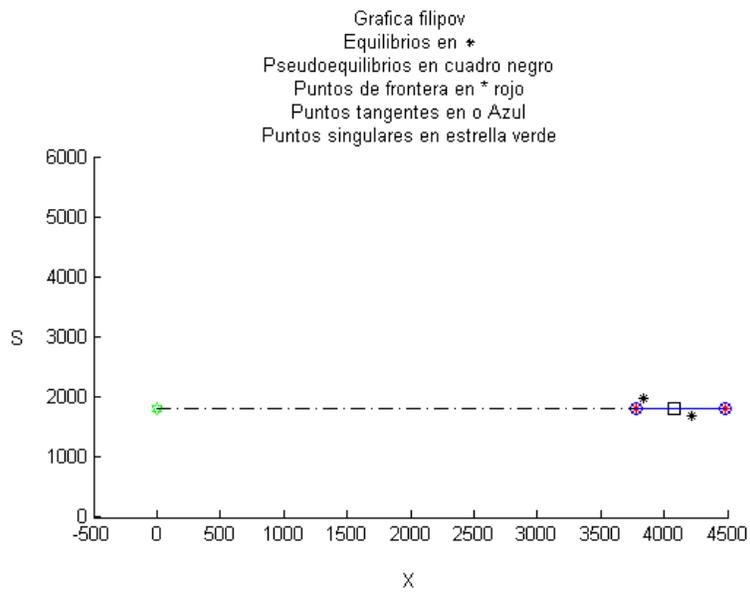
(a) $\alpha = 0.19$ (b) $\alpha = 0.20$

Figura 4.3. Puntos de equilibrio con $X^{in} = 240$ variando α de 0.19 a 0.20 (Continúa en la pág. siguiente)

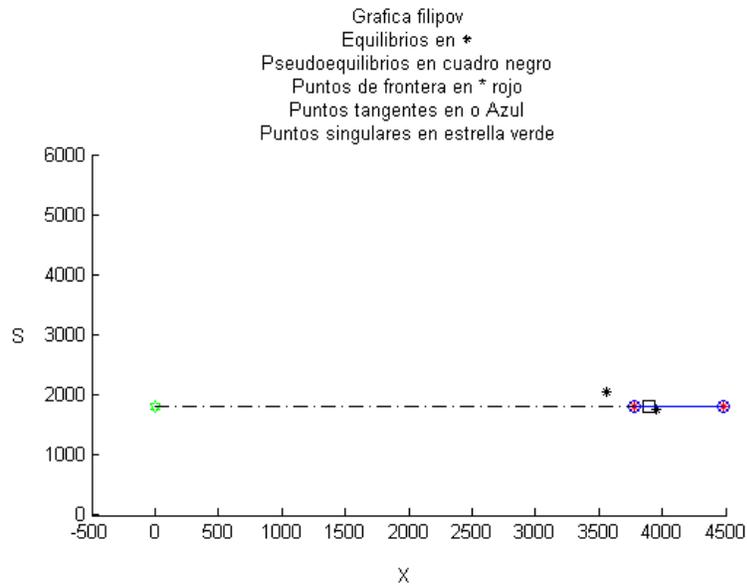
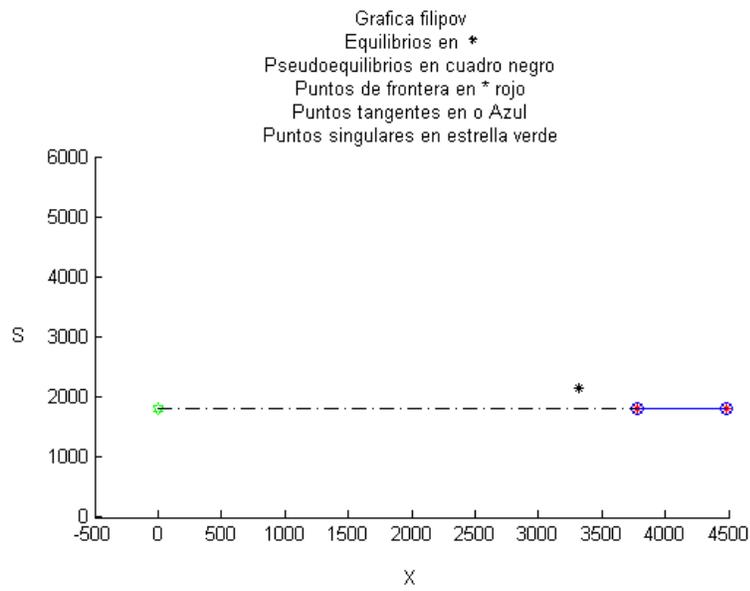


(c) $\alpha = 0.21$

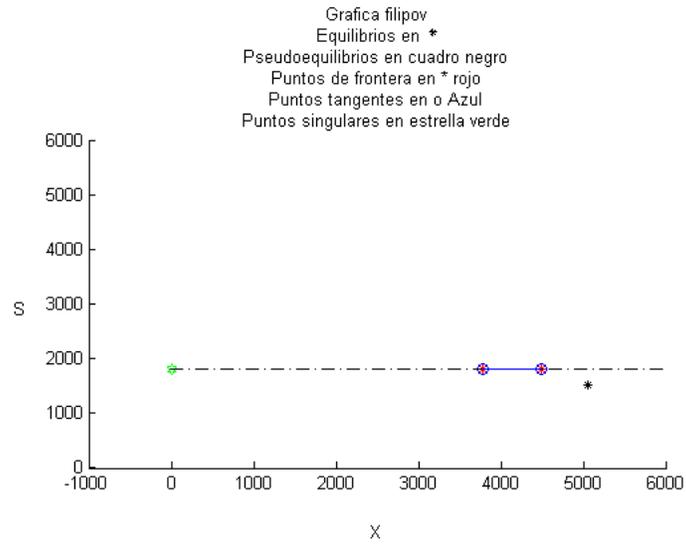


(d) $\alpha = 0.22$

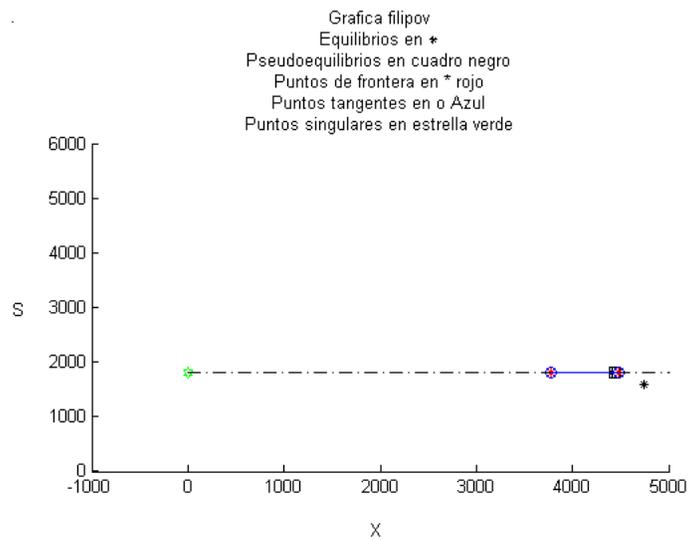
Figura 4.3. Puntos de equilibrio con $X^m = 240$ variando α de 0.21 a 0.22 (Continúa en la pág. siguiente)

(e) $\alpha = 0.23$ (f) $\alpha = 0.24$ **Figura 4.3.** Puntos de equilibrio con $X^m = 240$ variando α de 0.19 a 0.24

En la Figura 4.4 se observa el mismo comportamiento de los equilibrios, pero con un valor de bifurcación de α aumentado a cerca de $\alpha = 0.25$, ya que se ha aumentado el valor de X^{in} a 320; nuevamente se observa que el equilibrio inferior se aproxima a la frontera, choca y desaparece, y de igual manera el pseudo-equilibrio, quedando el equilibrio de la parte superior.



(a) $\alpha = 0.21$



(b) $\alpha = 0.22$

Figura 4.4. Puntos de equilibrio con $X^{in} = 320$ variando α de 0.21 a 0.22 (Continúa en la pág. siguiente)

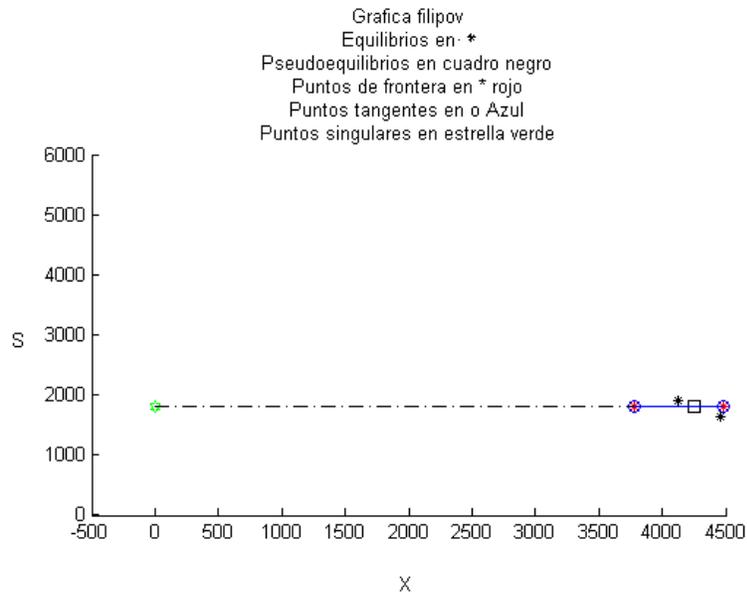
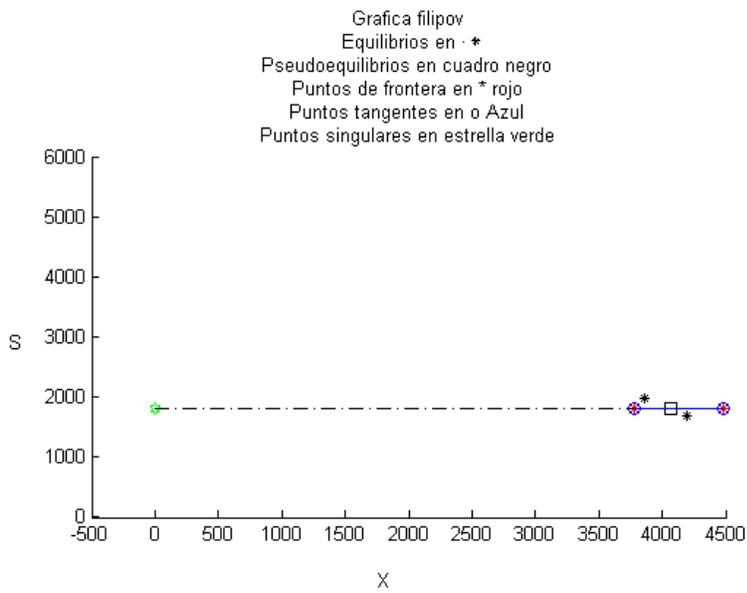
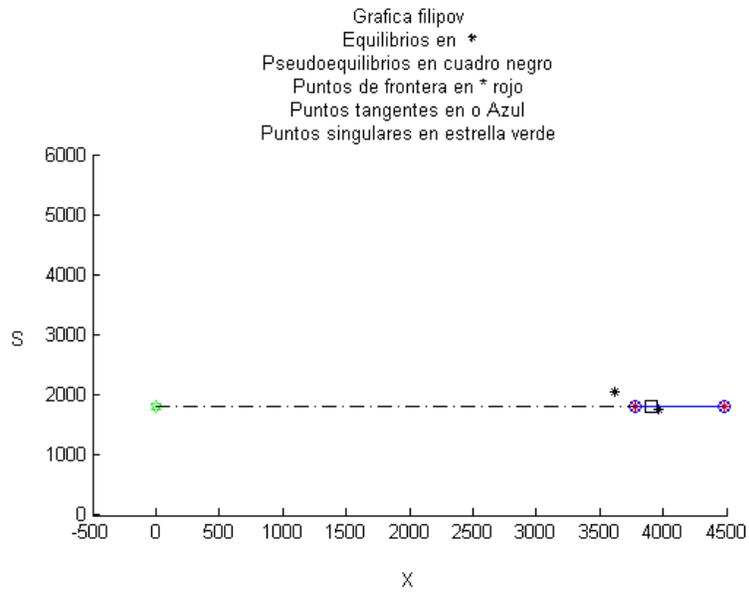
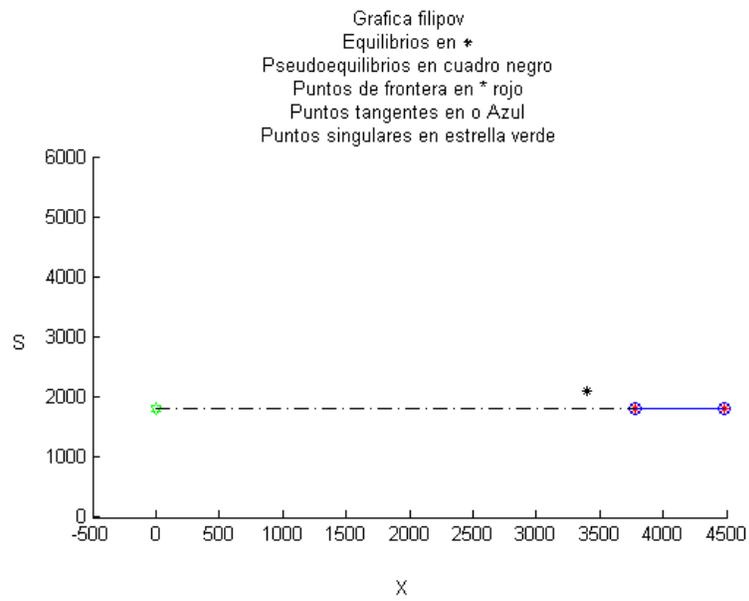
(c) $\alpha = 0.23$ (d) $\alpha = 0.24$

Figura 4.4. Puntos de equilibrio con $X^m = 320$ variando α de 0.23 a 0.24 (Continúa en la pág. siguiente)



(e) $\alpha = 0.25$



(f) $\alpha = 0.26$

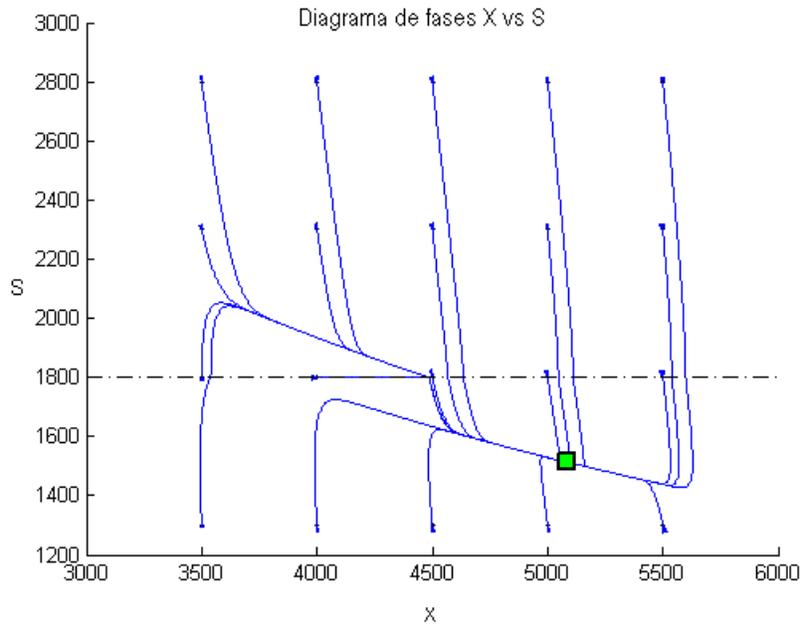
Figura 4.4. Puntos de equilibrio con $X^{in} = 320$ variando α de 0.21 a 0.26

4.5. Simulación numérica del sistema

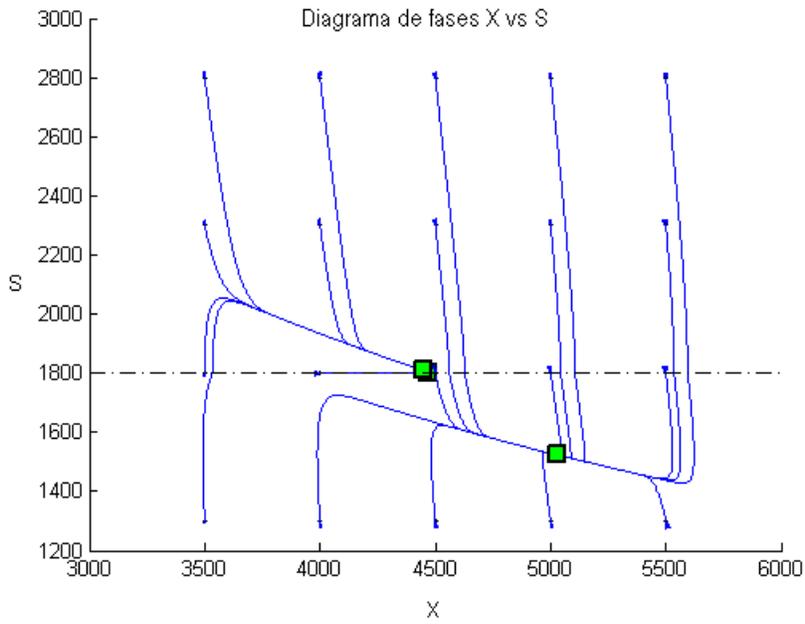
Las Figuras 4.5 hasta 4.12 representan el estudio dinámico por aproximación numérica, del método convexo de Filippov aplicado al sistema, las unidades de los ejes de las gráficas para S concentración del sustrato en el reactor son [mg/l DQO] y para X concentración de biomasa en el reactor son [mg/l SSV].

Las Figuras 4.5 a 4.7 presentan el cambio en el retrato de fase al variar el parámetro α para distintos valores de X^{in} que es el número inicial de concentración de bacterias. En la Figura 4.5 se observa que cuando α tiene un valor de 0.147 Figura 4.5(b) se evidencia el nacimiento de un pseudo-equilibrio en el segmento deslizante y un equilibrio de tipo nodal en la zona inmediatamente superior, cuando el valor de α es cercano a 0.1739 Figura 4.5(g) el equilibrio de la zona inferior se acerca a la superficie de conmutación y posteriormente ocurre una colisión catastrófica de este equilibrio, al igual que del pseudo-equilibrio, permaneciendo solamente el equilibrio de la zona superior; ocurriendo nuevamente la bifurcación nodo frontera. En las Figuras 4.6 , 4.7 se presenta el mismo comportamiento descrito anteriormente sólo que los valores donde ocurre el nacimiento de los pseudo-equilibrios y la colisión catastrófica cambia según el valor de X^{in} , como por ejemplo para $X^{in} = 240$ Figura 4.6 los valores de α son 0.20 Figura 4.6(b) y 0.24 Figura 4.6(f) y para $X^{in} = 320$ Figura 4.7 son de 0.22 Figura 4.7(b) y 0.26 Figura 4.7(f) respectivamente. Por esto se puede indicar que al aumentar el valor de X^{in} , también aumenta el valor de α para el cual se produce la bifurcación nodo frontera.

Así mismo se ve afectada la posición de los equilibrios, la cual presenta un decremento en X y un incremento en S . Con el aumento de los valores del parámetro α a medida que crece X^{in} , se puede afirmar que la eficiencia en el separador SLG esta inversamente relacionada con el tipo de agua a tratar ya que a mayor concentración de bacterias en el afluente menor es su eficiencia en la conversión a metano debido a que se producen otros compuestos químicos .

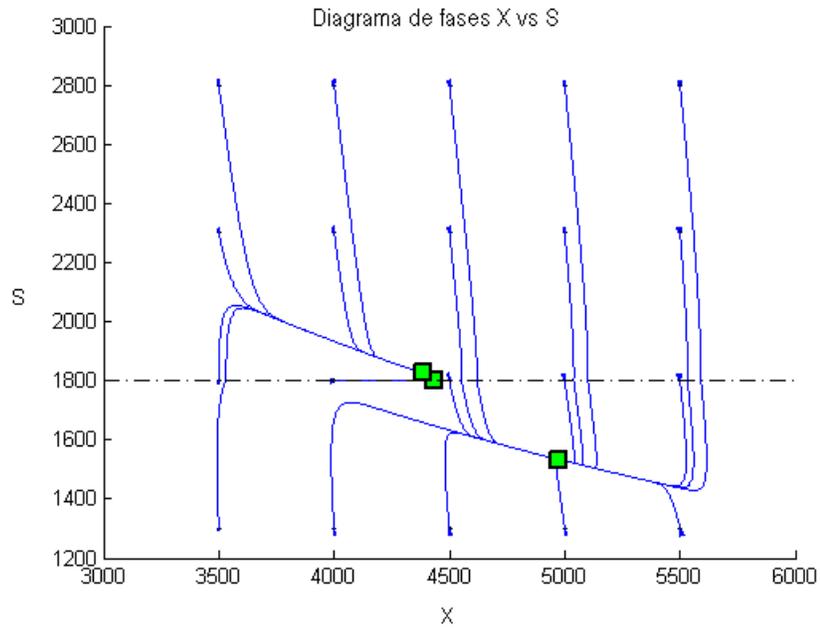
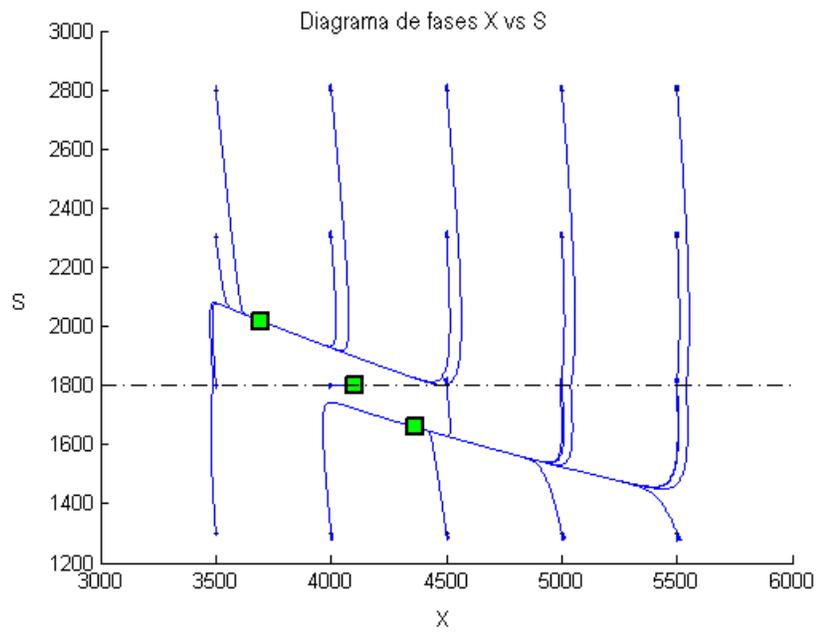


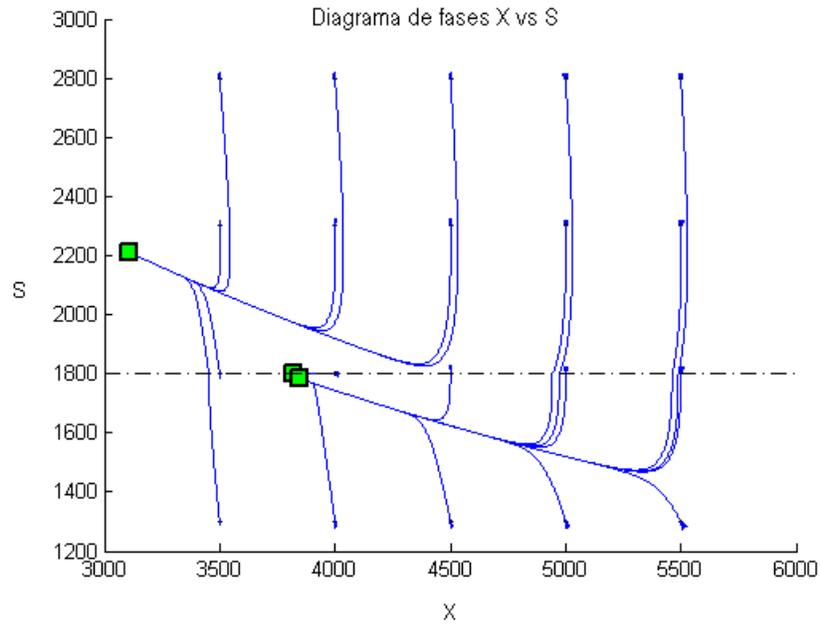
(a) $\alpha = 0.146$



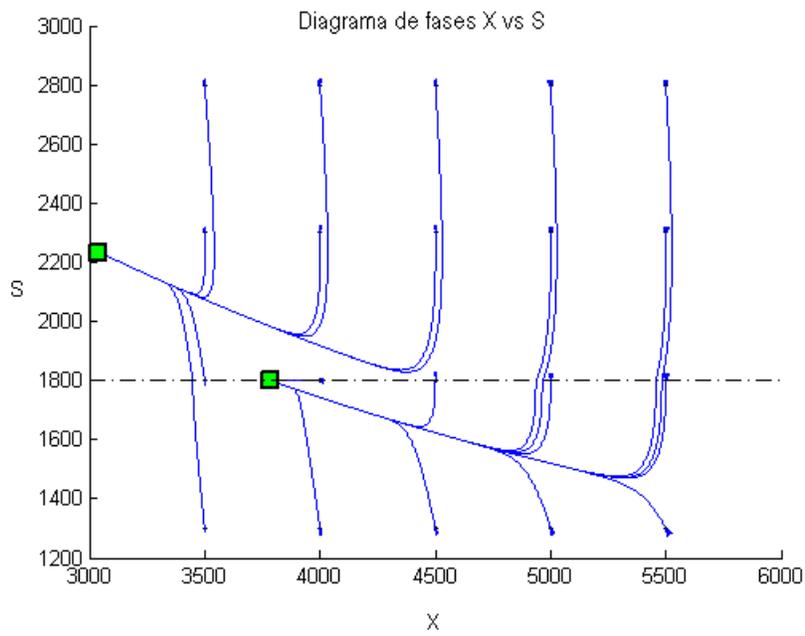
(b) $\alpha = 0.147$

Figura 4.5. Diagrama de Fases con $X^{in} = 0$ variando α de 0.146 a 0.1739 (Continúa en la pág. siguiente)

(c) $\alpha = 0.148$ (d) $\alpha = 0.160$ **Figura 4.5.** Diagrama de Fases con $X^{in} = 0$ variando α de 0.146 a 0.1739 (Continúa en la pág. siguiente)



(e) $\alpha = 0.172$



(f) $\alpha = 0.1735$

Figura 4.5. Diagrama de Fases con $X^{in} = 0$ variando α de 0.146 a 0.1739 (Continúa en la pág. siguiente)

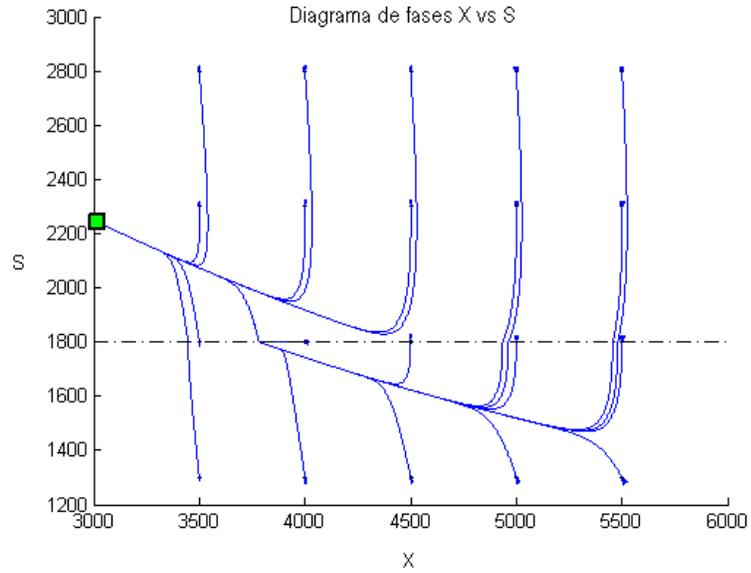


Figura 4.5. Diagrama de fases con $X^{in} = 0$ variando α de 0.146 a 0.1739

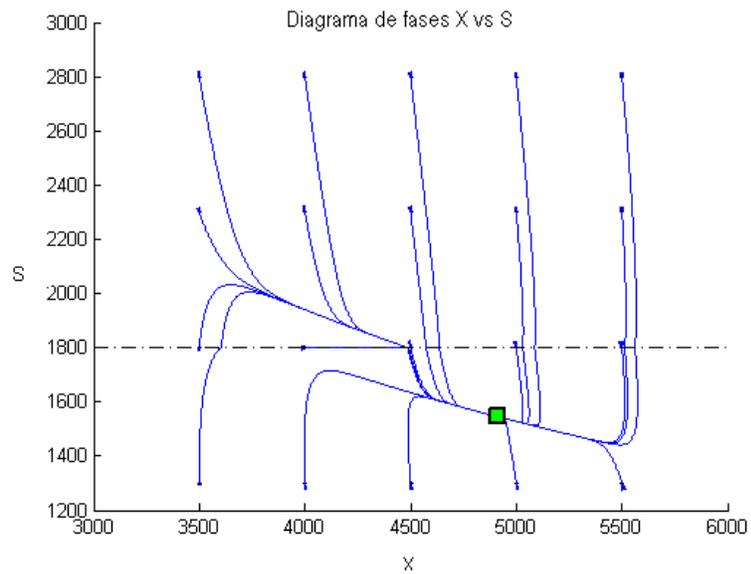
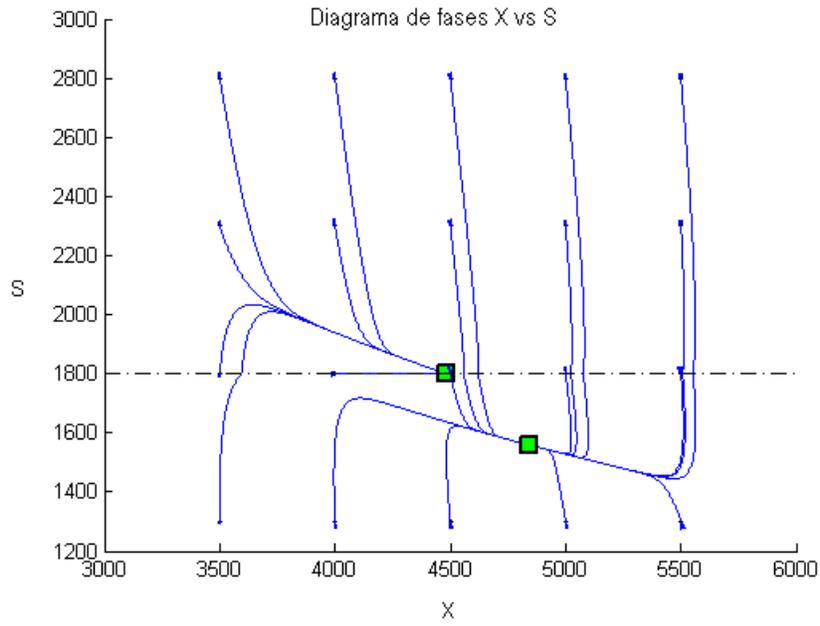
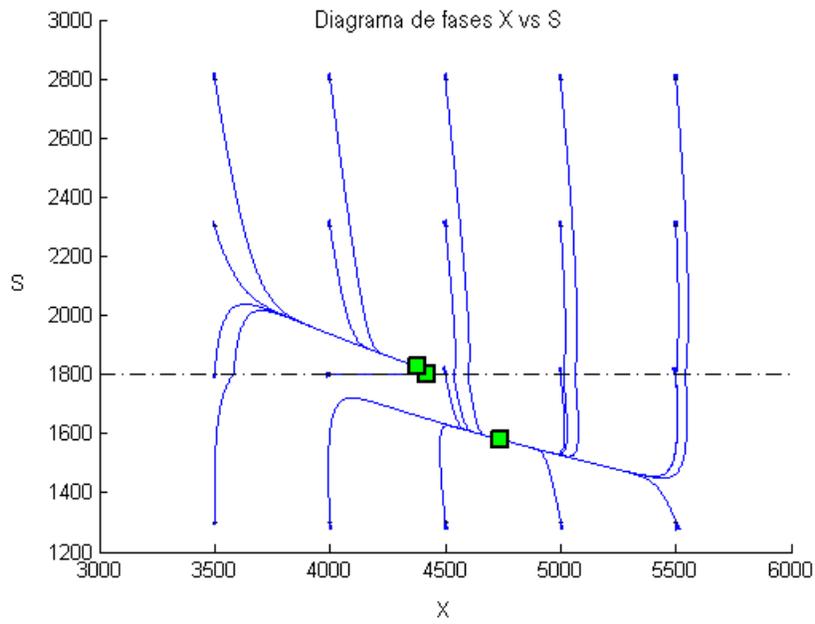


Figura 4.6. Diagrama de Fases con $X^{in} = 240$ variando α de 0.196 a 0.24 (Continúa en la pág. siguiente)



(b) $\alpha = 0.20$



(c) $\alpha = 0.203$

Figura 4.6. Diagrama de Fases con $X^{in} = 240$ variando α de 0.196 a 0.24 (Continúa en la pág. siguiente)

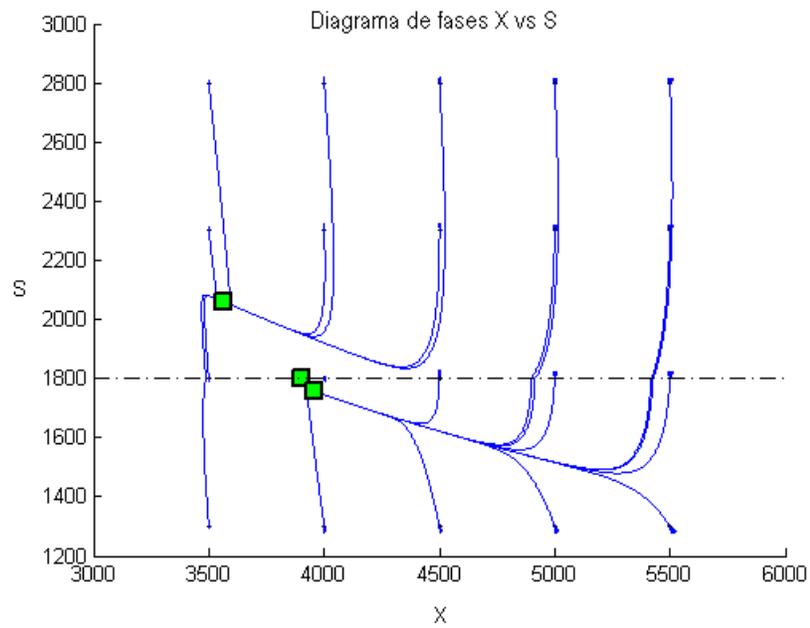
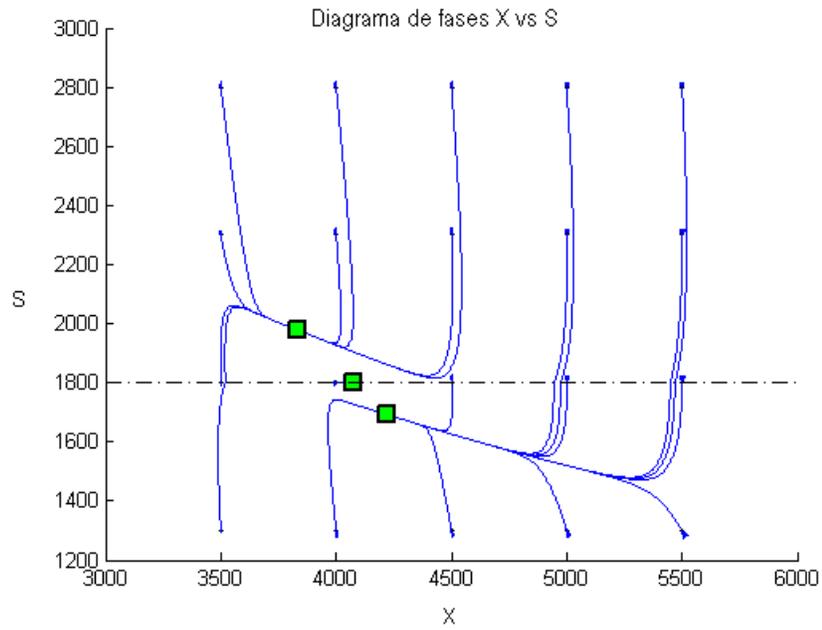
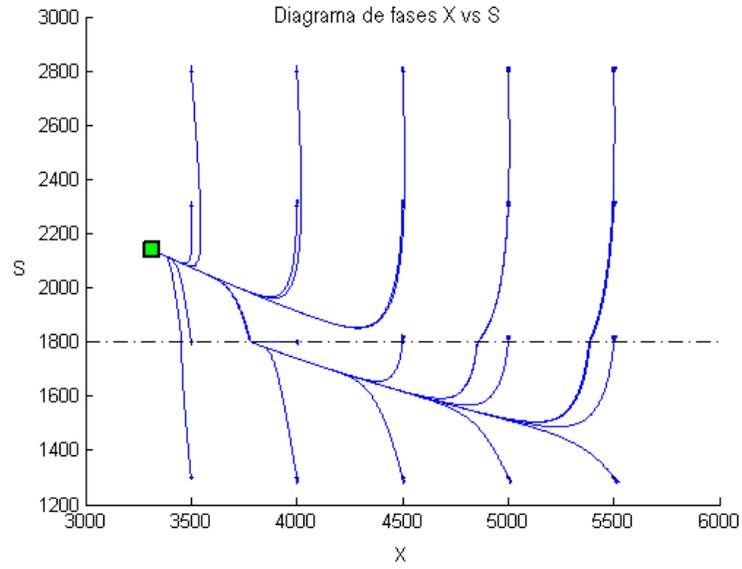
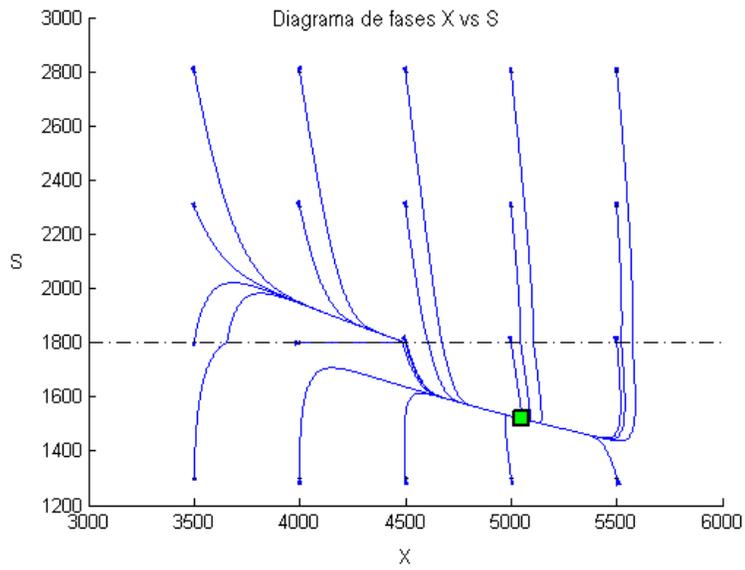


Figura 4.6. Diagrama de Fases con $X^{in} = 240$ variando α de 0.196 a 0.24 (Continúa en la pág. siguiente)



(f) $\alpha = 0.24$

Figura 4.6. Puntos de equilibrio con $X^{in} = 240$ variando α de 0.196 a 0.24



(a) $\alpha = 0.21$

Figura 4.7. Diagrama de Fases con $X^{in} = 320$ y α de 0.21 (Continúa en la pág. siguiente)

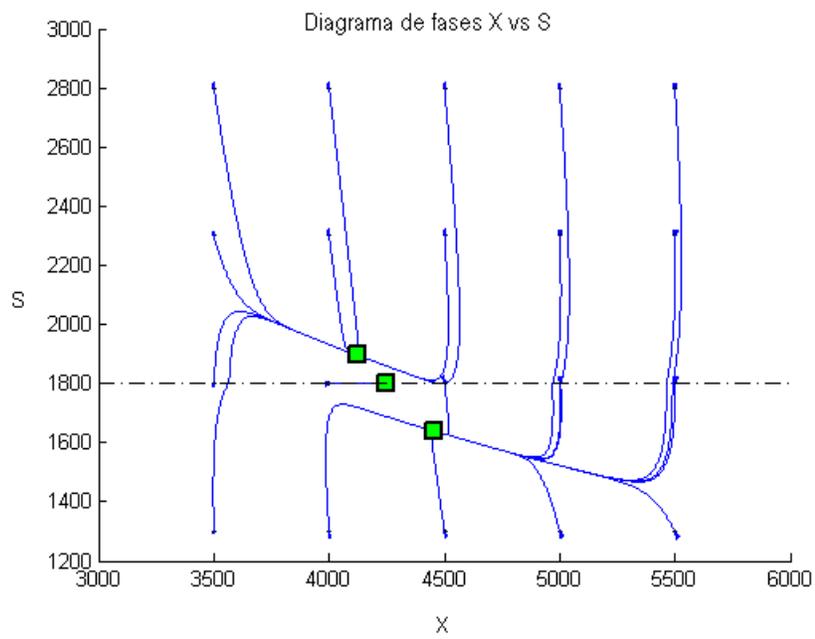
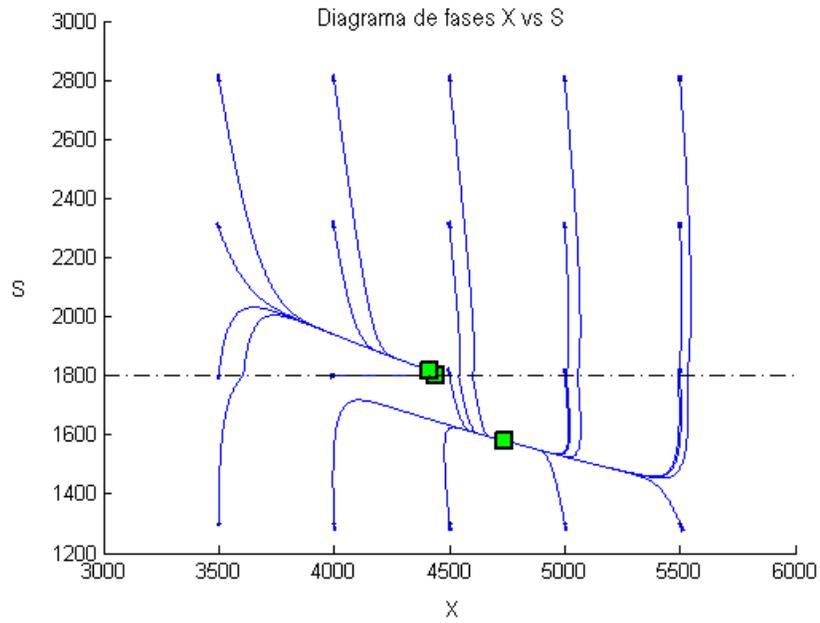


Figura 4.7. Diagrama de Fases con $X^{in} = 320$ variando α de 0.22 a 0.23 (Continúa en la pág. siguiente)

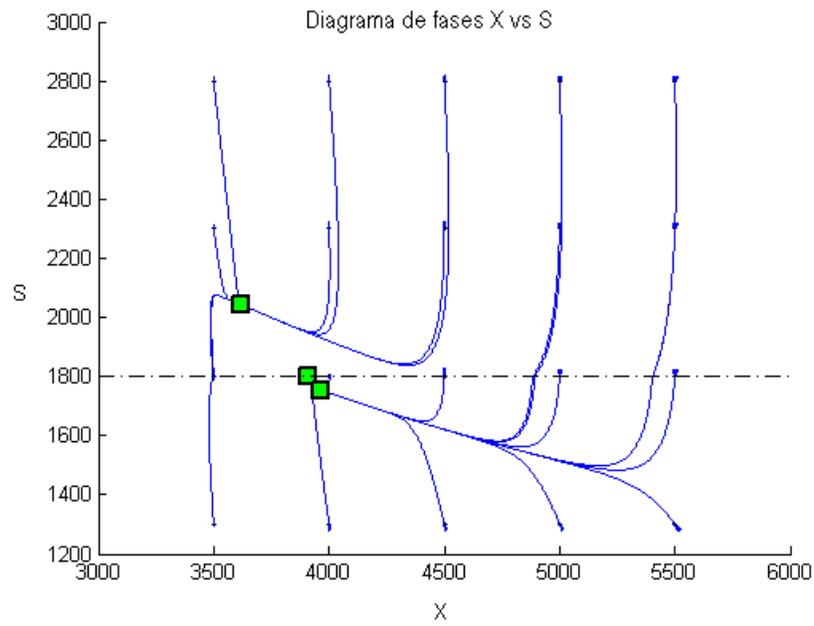
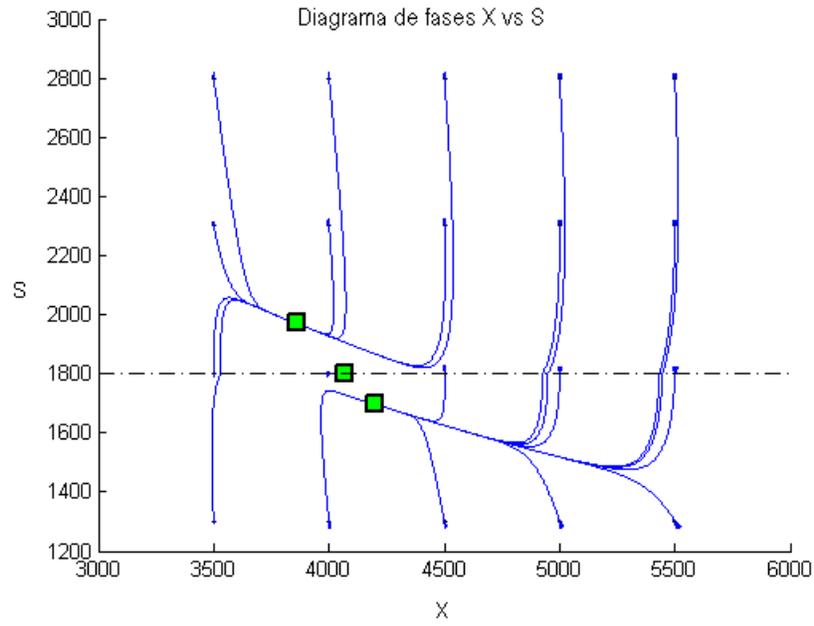


Figura 4.7. Diagrama de Fases con $X^m = 320$ variando α de 0.24 a 0.25 (Continúa en la pág. siguiente)

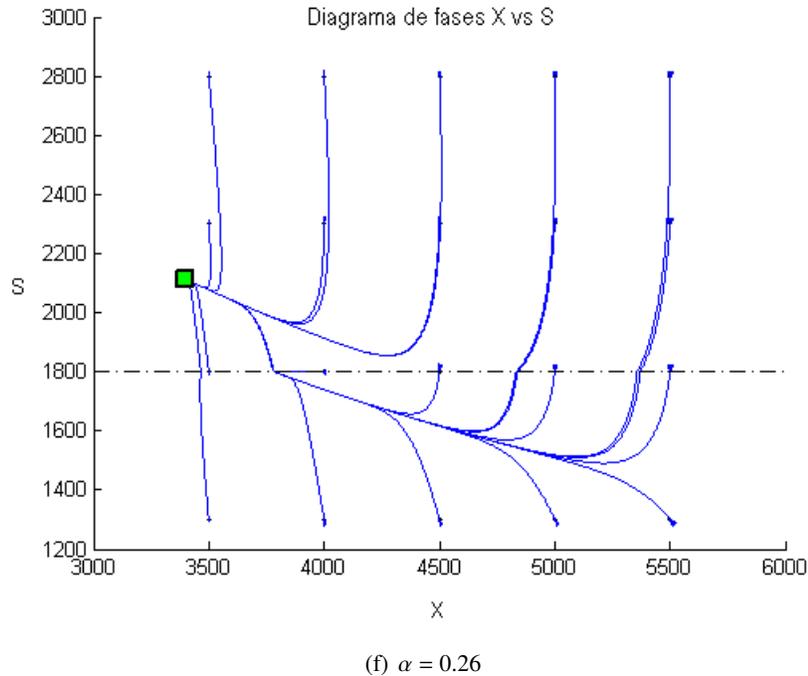


Figura 4.7. Diagrama de fases con $X^{in} = 320$ variando α de 0.21 a 0.26

El análisis dinámico del parámetro D se realizó con una concentración de biomasa en la corriente de entrada X^{in} de 0, 240 y 320, encontrándose que para valores de 240 y 320 mg/l SSV no se presentan dinámicas interesantes, pero para valores de 0 mg/l SSV se obtiene una dinámica más rica, como se puede observar en la Figura 4.8, donde inicialmente sólo se distingue un punto de equilibrio en la zona inferior; la evolución de las órbitas, las cuales arrancan desde una condición inicial y convergen en este punto, evidencian que se trata de un equilibrio de tipo nodo estable. Al avanzar en el valor del parámetro D , de 2.0 a 2.45, se observa la aparición de un pseudo-equilibrio en el segmento deslizante, y que al incrementar aún más el valor de D , se origina otro equilibrio, también de tipo nodal en la zona superior. Cuando el valor de D se acerca a 2.40, el equilibrio en la zona inferior se aproxima a la superficie de conmutación y posteriormente ocurre una colisión del equilibrio con esta frontera, lo que después produce una desaparición catastrófica de este equilibrio, al igual que del pseudo-equilibrio, quedando solamente el equilibrio de la parte superior; este tipo de bifurcación es conocida como nodo frontera que es una bifurcación de tipo local (boundary node [21]).

El análisis dinámico del coeficiente de rendimiento del sustrato Y , no evidenció comportamientos interesantes, por esto no se incluye el análisis gráfico.

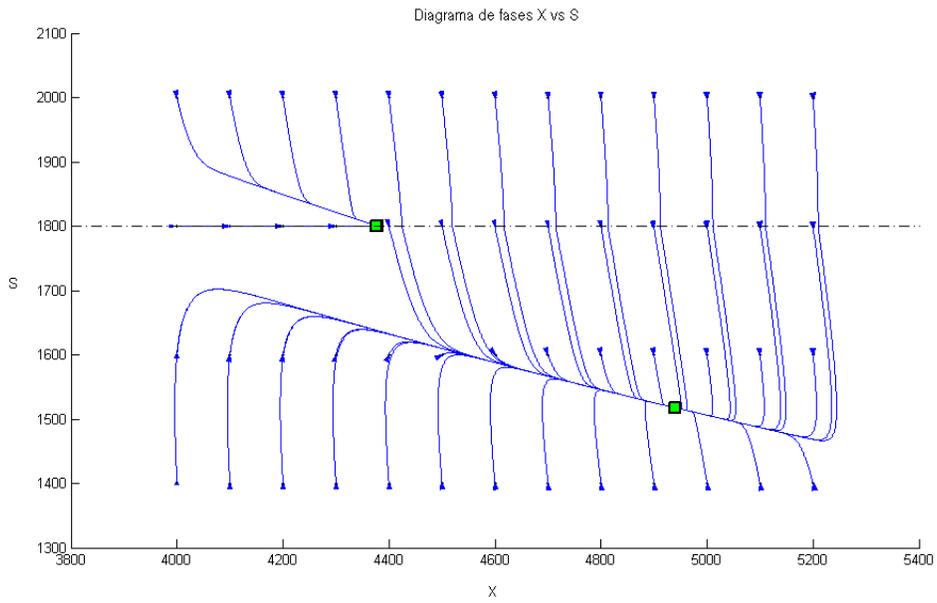
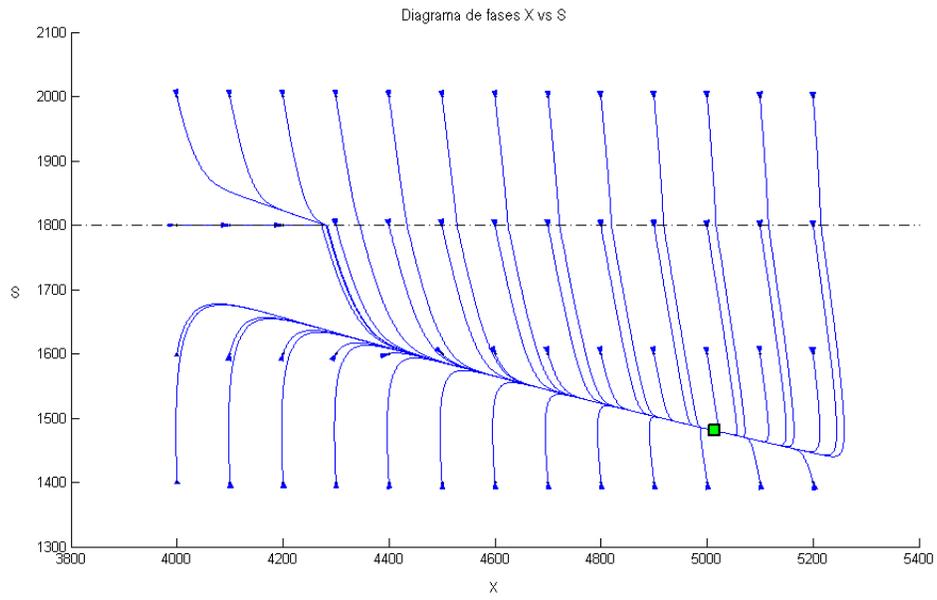


Figura 4.8. Bifurcación nodo frontera (Boundary node) (Continúa en la pág. siguiente)

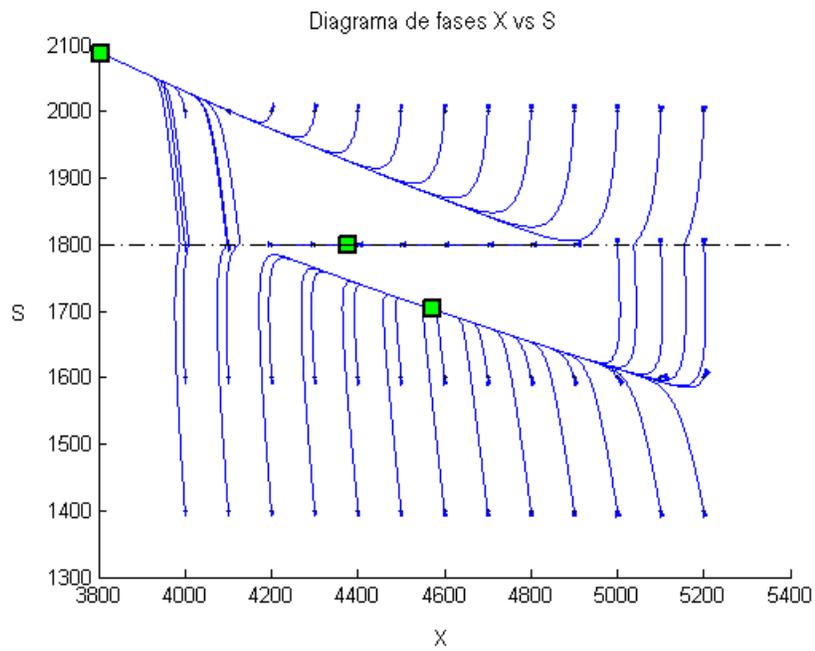
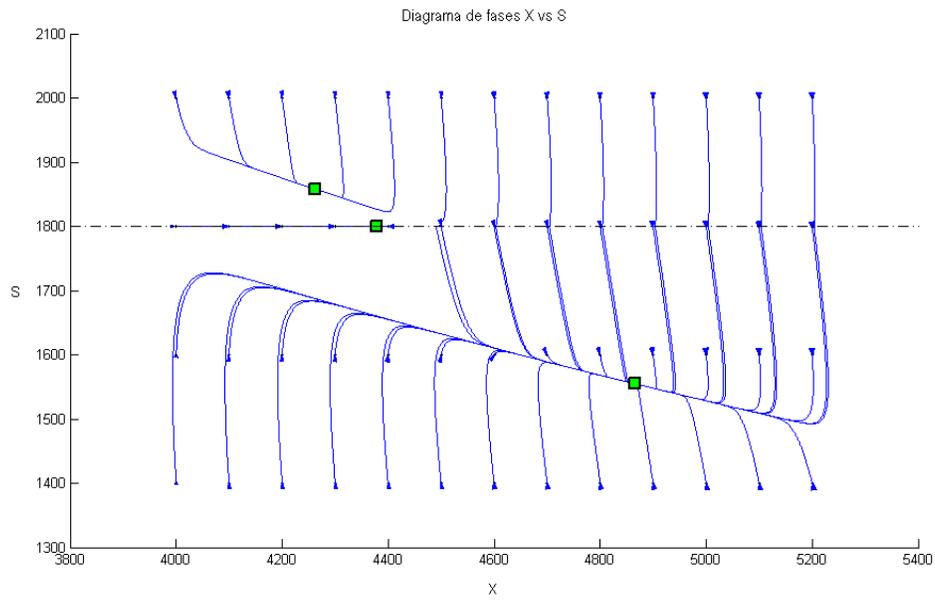
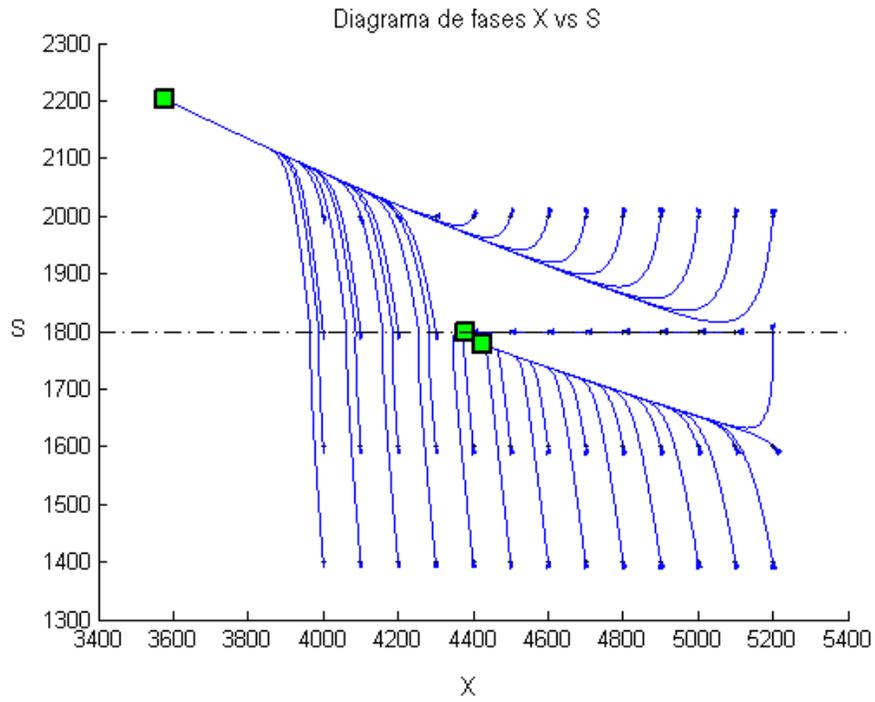
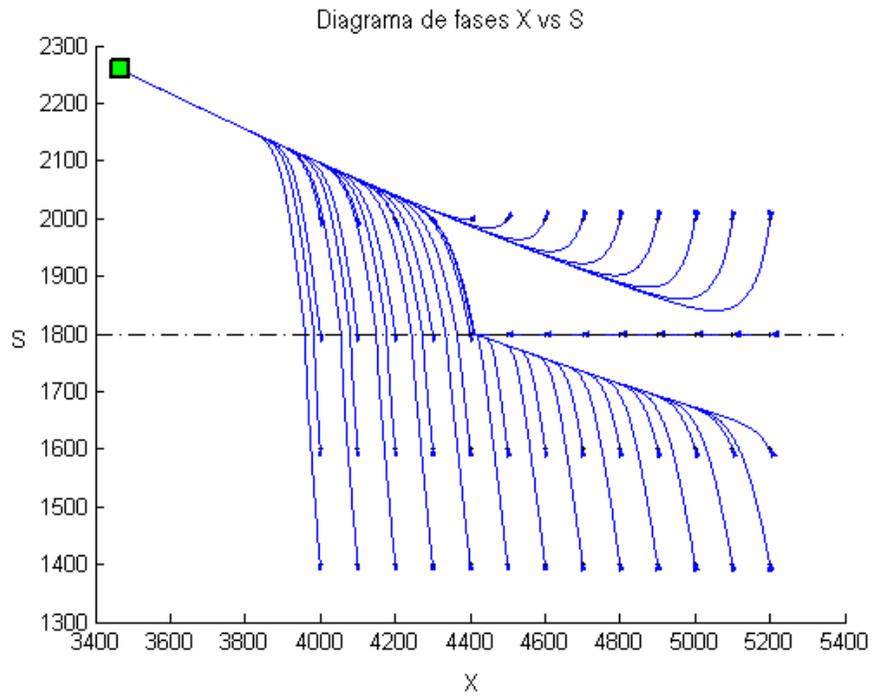


Figura 4.8. Bifurcación nodo frontera (Boundary node) (Continúa en la pág. siguiente)



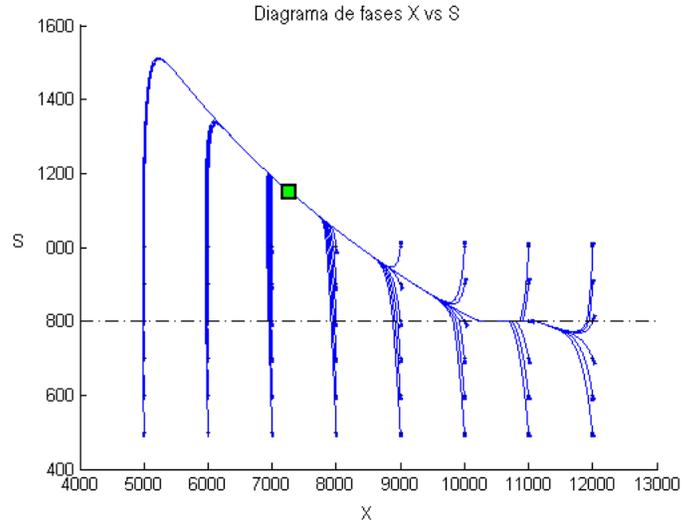
(e) D 2.40



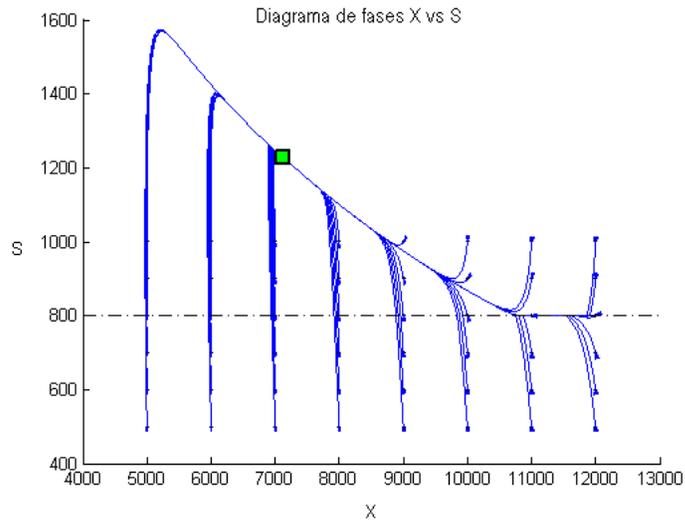
(f) D 2.45

Figura 4.8. Bifurcación nodo frontera (Boundary node)

En las Figuras 4.9 y 4.10, se puede observar que para una superficie de conmutación de 800 y con un $X^{in} = 240$ se presenta un deslizamiento estable tipo switching-sliding ([19]) ver Figuras 4.9(a) y 4.10 ya que se evidencia cruce, posterior deslizamiento y salida hacia el punto de equilibrio, para valores de D desde 1.8 hasta 2.1, pero los valores de la concentración de bacterias son muy altos, aproximadamente 11000 a 13000 (mg/l SSV), y la concentración de sustrato es relativamente baja (800 mg/l DQO) lo cual físicamente no es muy común ya que el afluente generalmente presenta mayor valor debido al agua que se está tratando.

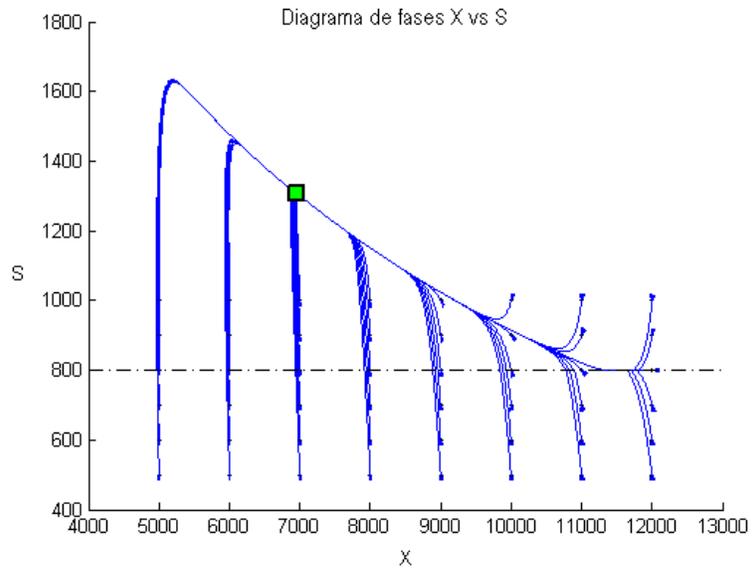


(a) D 1.9



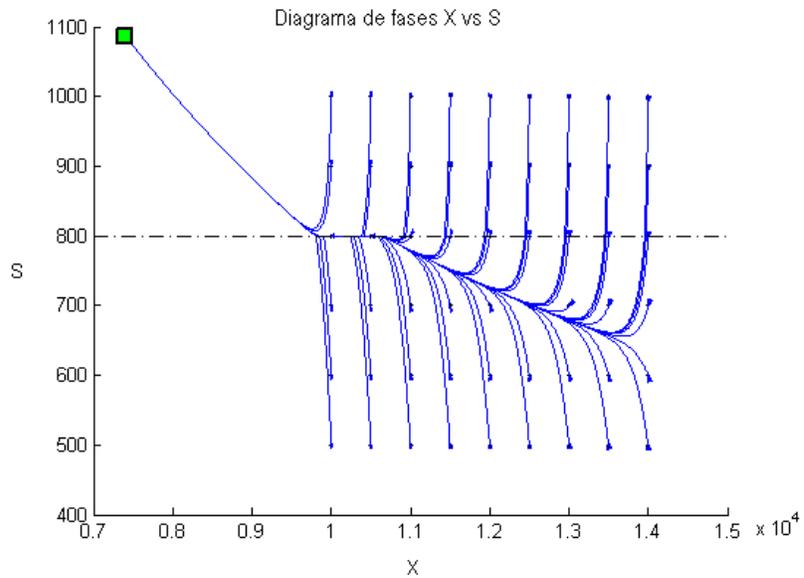
(b) D 2.0

Figura 4.9. Deslizamiento estable condiciones de izquierda a derecha (Continúa en la pág. siguiente)



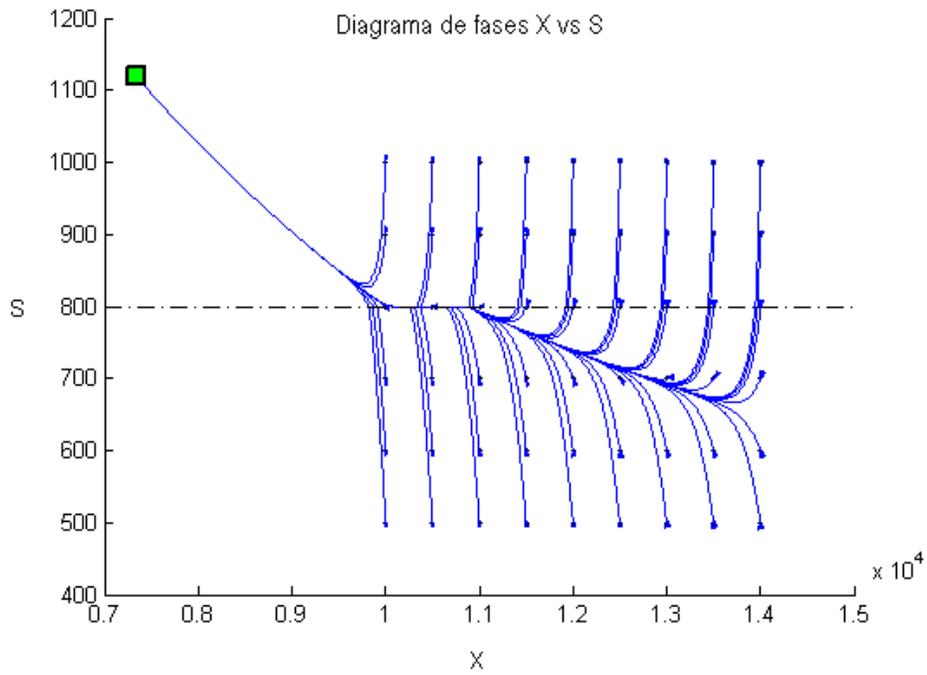
(c) D 2.1

Figura 4.9. Deslizamiento estable condiciones de izquierda a derecha

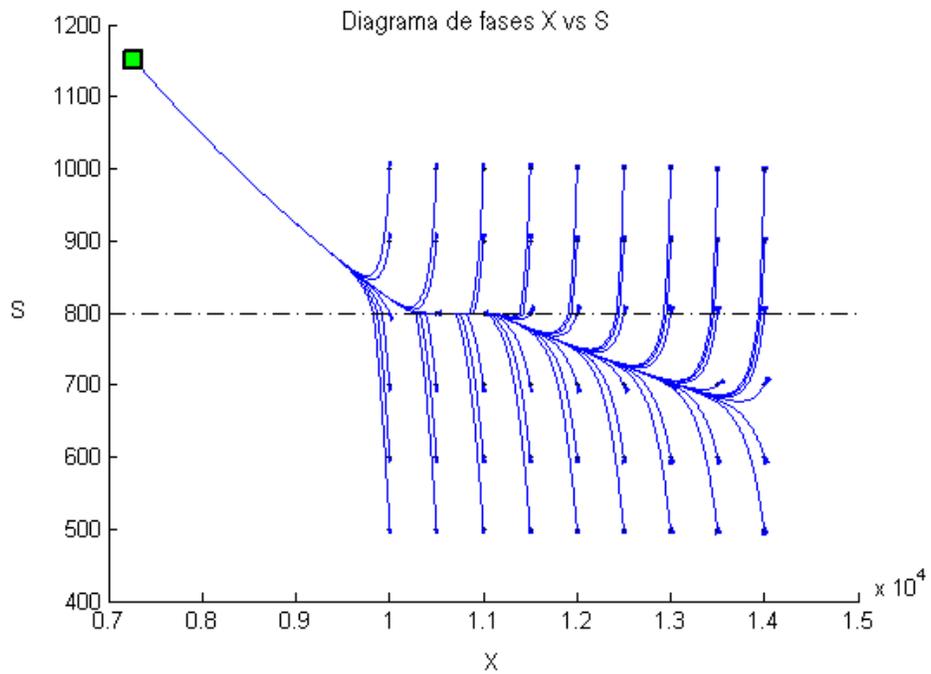


(a) D 1.82

Figura 4.10. Deslizamiento estable condiciones de derecha a izquierda (Continúa en la pág. siguiente)



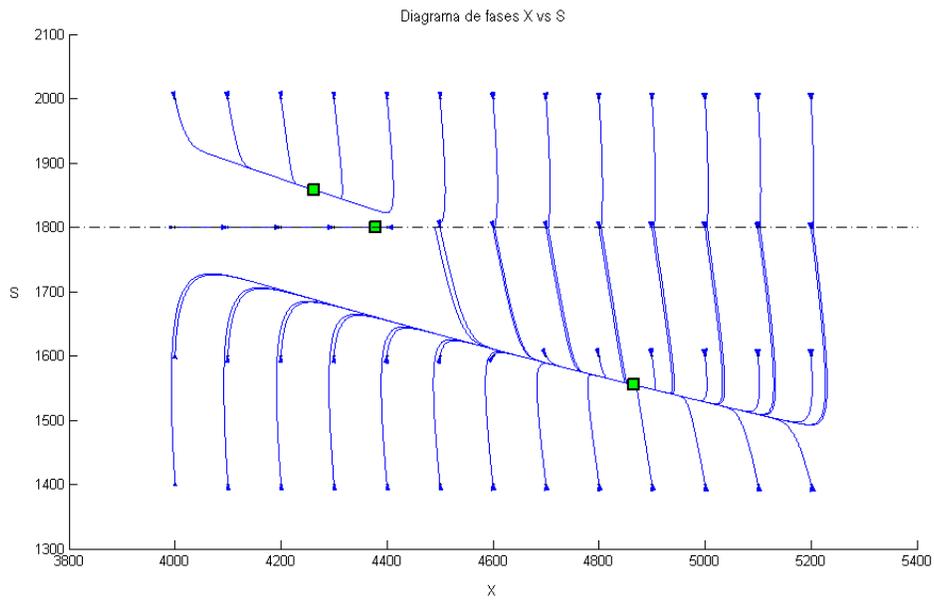
(b) D 1.86



(c) D 1.90

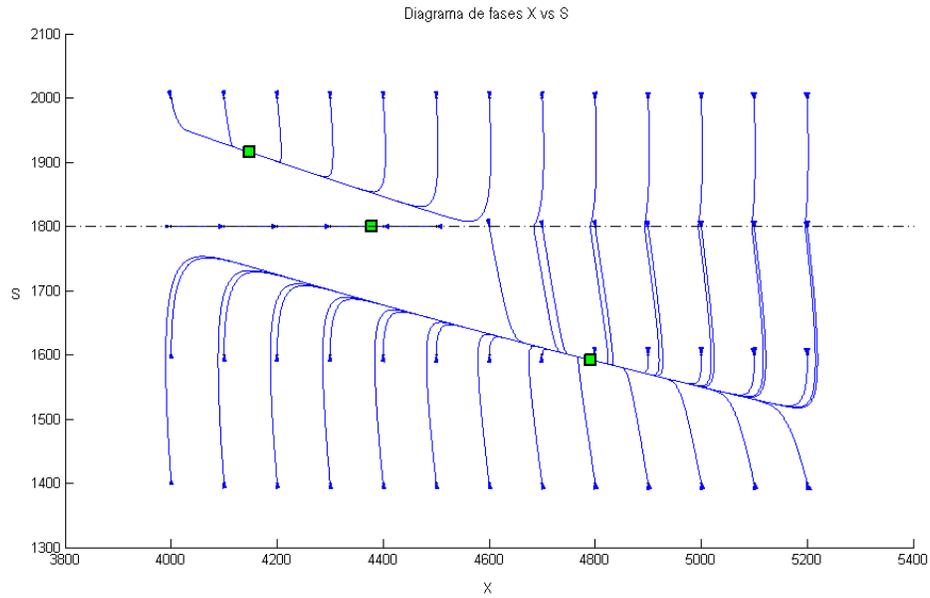
Figura 4.10. Deslizamiento estable condiciones de derecha a izquierda

La Figura 4.11 muestra el retrato de fase para un $X^{in} = 0$ con valores de D de 2.1 hasta 2.2, donde se presenta deslizamiento inestable ya que solamente los valores que se encuentran exactamente sobre la superficie de conmutación deslizan, y los demás se ven atraídos por los puntos de equilibrio de sus respectivos campos, evidenciando esto, la poca fuerza atractora que tiene el pseudo-equilibrio, esto se comprueba al observar la Figura 4.12(a).

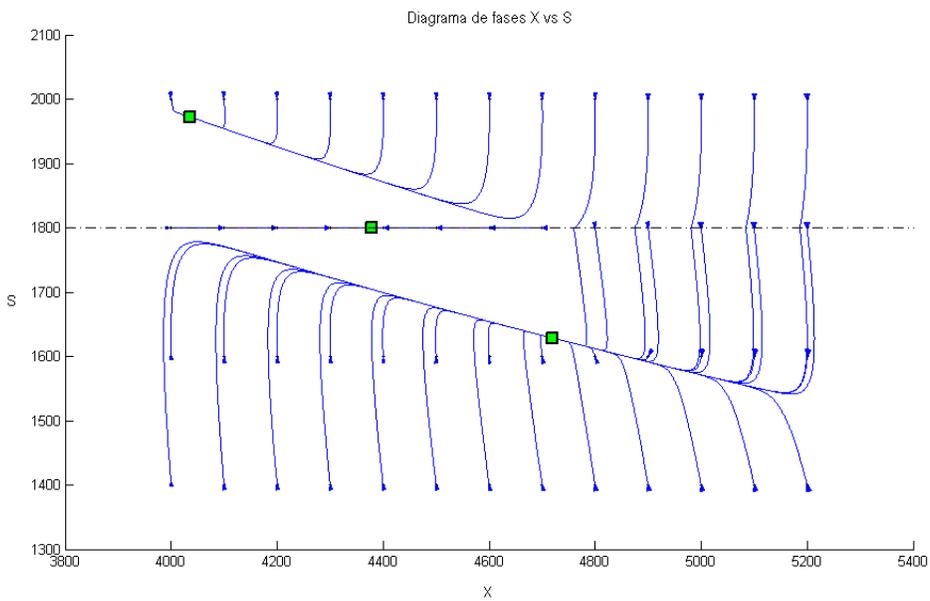


(a) D 2.1

Figura 4.11. Deslizamiento inestable (Continúa en la pág. siguiente)



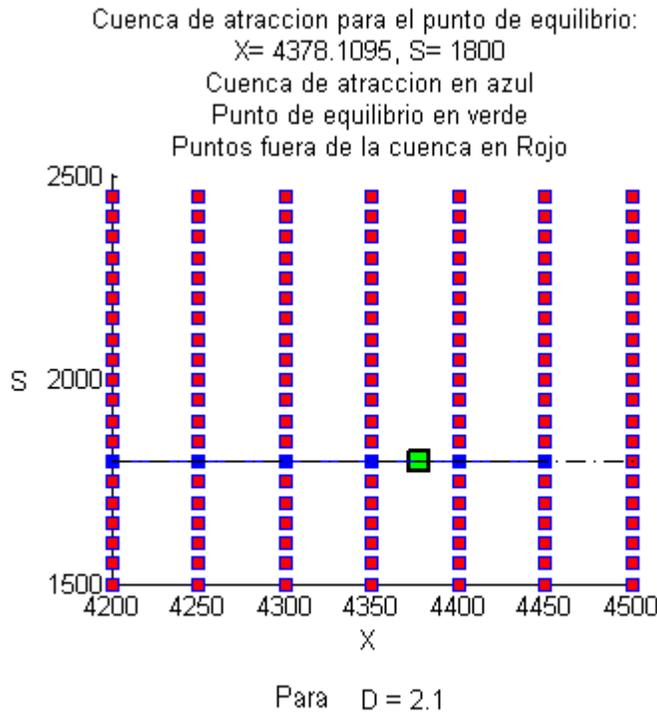
(b) D 2.15



(c) D 2.2

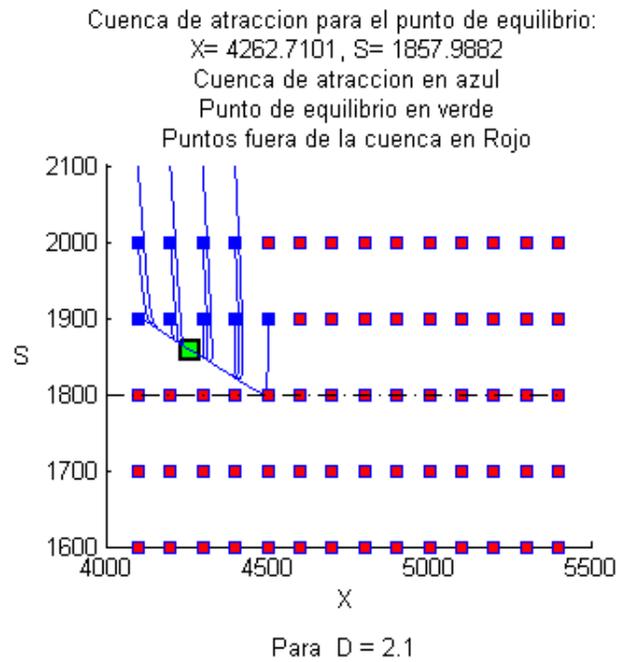
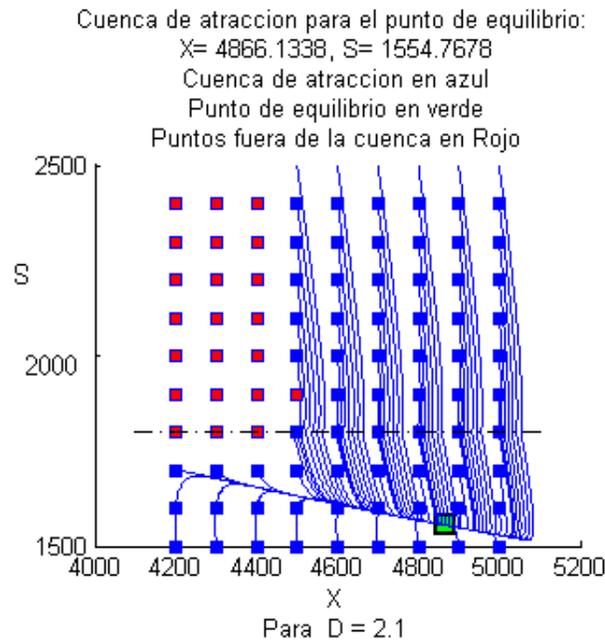
Figura 4.11. Deslizamiento inestable

Al realizar el análisis de las cuencas de atracción en la Figura 4.12 con el parámetro $D = 2.1$ y la superficie de conmutación en 1800, podemos confirmar el comportamiento del pseudo-equilibrio con coordenadas $(x, s) = (4378.1095, 1800)$ Figura 4.12(a), el cual sólo atrae los puntos iniciales que caen en la superficie de conmutación y en el segmento deslizante dentro de está, el cual también se reconoce como un segmento deslizante inestable. Los equilibrios dentro de los campos uno y dos presentan mayor fuerza de atracción, como se evidencia en las Figuras 4.12(b) y 4.12(c); siendo el más atractor el equilibrio de coordenadas $(x, s) = (4866.1338, 1554.76781)$, es de aclarar que no se hace un barrido en valores negativos de S y de X ni con valores mayores ya que físicamente no son posibles debido al diseño del reactor.



(a) Equilibrio en F2

Figura 4.12. Cuencas de atracción (Continúa en la pág. siguiente)

(b) Pseudo-equilibrio en Σ (c) Equilibrio en $F1$ **Figura 4.12.** Cuencas de atracción

4.5.1. Comparación del método analítico con la aproximación numérica

la Tabla 4.1 nos muestra el porcentaje de error que se presenta al realizar el análisis del método convexo de Filippov por el método numérico y analítico, en la cual podemos observar que el error que se comete es muy pequeño, validando así los resultados encontrados.

Método analítico (X^{eq}, S^{eq})	Método numérico (X^{eq}, S^{eq})	Error en %
(10724.301,1415.0387)	(10722.8047,1415.7907)	0.015481
(10590.073,1482.4883)	(10588.5106,1483.2734)	0.016352
(10456.607,1549.555)	(10454.9797,1550.3727)	0.017229
(10323.9243,1616.228)	(10322.2332,1617.0778)	0.018112
(10192.0466,1682.4966)	(10190.2928,1683.3779)	0.019001
(10060.9961,1748.3495)	(10059.1809,1749.2616)	0.019894
(9911.7637,1823.3387)	(9909.9883,1824.2309)	0.019715
(9699.5531,1929.9746)	(9697.7937,1930.8587)	0.019909
(9490.2143,2035.1673)	(9488.4718,2036.0429)	0.020092
(9283.8546,2138.8631)	(9282.1297,2139.7298)	0.020262
(9080.5812,2241.0079)	(9078.8748,2241.8654)	0.020418

Tabla 4.1. Comparación del método analítico con el numérico

5. Conclusiones

- El sistema analizado en las zonas uno y dos presenta puntos de equilibrio de tipo nodo estable cuando son positivos y tipo silla cuando son negativos; al analizar la zona tres, se pudo evidenciar la presencia de una dinámica físicamente imposible, ya que al variar los tres parámetros considerados α , D y Y todos sus puntos de equilibrio son negativos, lo cual puede indicar que se presenta situación de lavado.
- El sistema analizado no presentó bifurcaciones en la primera parte del estudio ya que en los diagramas de bifurcación uno y bi- paramétrico se evidenció que para cada valor de los parámetros analizados existe sólo un punto de equilibrio, lo cual significa que el sistema es muy estable.
- La dinámica del bioreactor evidencia que al aumentar el valor de los parámetros la concentración de biomasa dentro del reactor tiende a disminuir, provocando así la condición de lavado.
- La dinámica del reactor se ve muy poco afectada por el coeficiente de rendimiento del sustrato Y , lo cual indica que este parámetro no es un factor a tener en cuenta en el control del bioreactor.
- Al ir aumentando la concentración de entrada de la biomasa X^{in} a valores de 0, 240 y 320 en [mg/l SSV], el parámetro α tiende a aumentar, lo que genera una eficiencia del reactor menor, debido a que se presenta mayor cantidad de biomasa en la corriente de entrada del reactor, la cual puede estar contaminada con la presencia de organismos predadores como los ciliados anaerobios ó compuestos químicos que generan la muerte de la biomasa contenida en el reactor.
- Se pudo evidenciar que el bioreactor presenta una dinámica más rica al aplicarle el método convexo de Filippov ya que se presentó una bifurcación local del tipo nodo frontera con $X^{in} = 0$ que corresponde a la condición de lavado del reactor, variando los parámetros D y α ; pero para valores X^{in} de 240 y 320, sólo se presenta esta bifurcación con el parámetro α .
- La comparación de la parte analítica con la aproximación numérica respecto el método convexo

de Filippov generó un porcentaje de error de aproximadamente 0.02, lo cual valida los cálculos realizados.

- Estos resultados son importantes porque son la base para el control automático del bioreactor, con lo cual se espera obtener una mayor descontaminación del afluente tratado y una mejor conversión de la materia orgánica a biogás.

Trabajos futuros

- **Desde el punto de vista físico**

- Considerar el parámetro de la temperatura y la discriminación de las bacterias acidogénicas y metanogénicas, obteniendo un modelo más complejo pero a su vez más real del desempeño del bioreactor.
- Realizar un estudio cuyos parámetros principales sean la concentración de biomasa (X^{in}) y la concentración de sustrato (S^{in}) a la entrada del reactor, ya que se evidenció la influencia de estos en la dinámica del bioreactor.
- Realizar un control automático al bioreactor teniendo en cuenta los resultados encontrados, ya que de esta forma el bioreactor se vuelve mucho más eficiente, favoreciendo al medio ambiente al generar menor contaminación a la parte acuífera, menores gastos energéticos por la utilización del biogás generado y mayor aprovechamiento del suelo al aplicarle el bio-fertilizante obtenido.

- **Desde el punto de vista matemático**

- Explorar la parte negativa de la dinámica del bioreactor a manera de ejercicio académico ya que se pueden encontrar dinámicas interesantes.

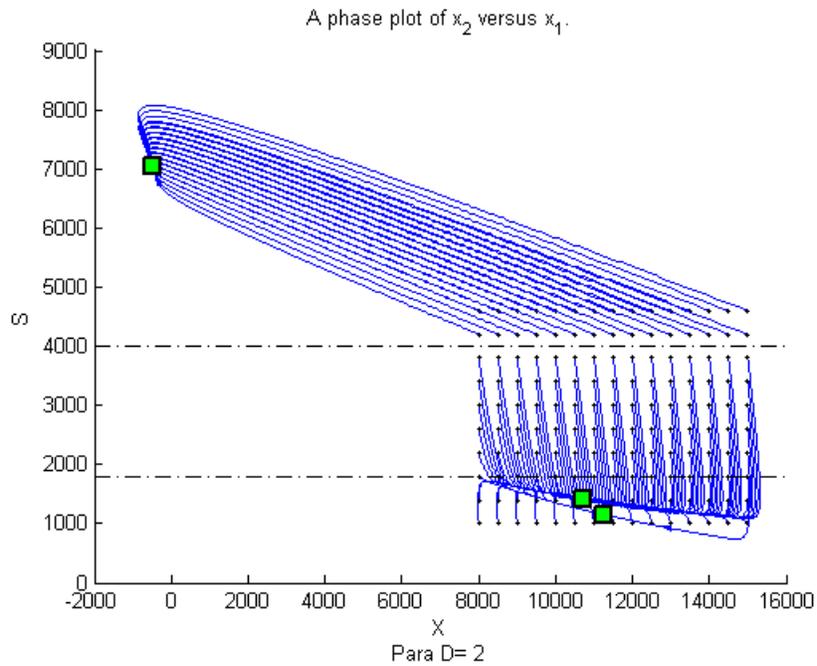
- **Desde el punto de vista académico**

- Estudio práctico de los resultados obtenidos, aprovechando que el bioreactor se encuentra en el Laboratorio de Procesos Productivos de la Universidad Nacional Sede Manizales.

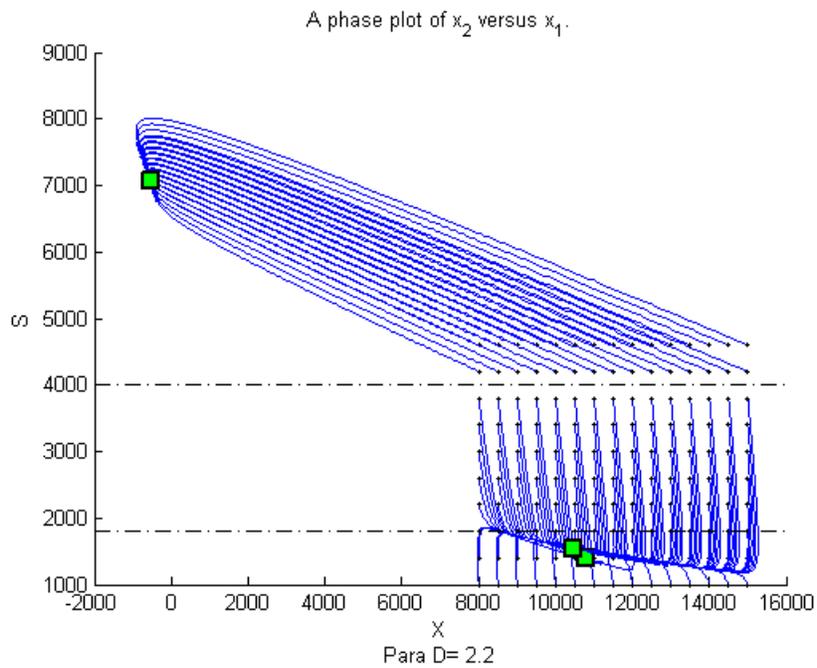
A. Exclusión de la zona tres en el análisis del método convexo de Filippov

A continuación se presenta la sustentación del porque no incluir la tercera zona en el análisis de la sección 4.4.1.

En las Figuras A.1 y A.2 se aplica el método convexo de Filippov considerando las tres zonas planteadas, variando los parámetros D , y α respectivamente, en las cuales se evidencia la presencia de un punto de equilibrio en la zona tres, el cual es negativo, y sólo atrae las órbitas que se encuentran en esta zona; La dinámica en la zona uno y dos no se ve afectada por la presencia de este punto de equilibrio ya que se observa la bifurcación nodo frontera al variar los parámetros D y α obtenida en la sección 4.5, es de aclarar que no se puede tener en cuenta la zona tres porque siempre genera equilibrios negativos como se pudo evidenciar en el capítulo 3 en las Figuras 3.1(c), 3.3(c) y 3.5(c), los cuales indicarían que el afluente sale más contaminado de lo que entra, evidenciando un mal funcionamiento del reactor.



(a) $D = 2.0$



(b) $D = 2.2$

Figura A.1. Diagrama de fases para las tres zonas variando D con $X_{in}=0$ (Continúa en la pág. siguiente)

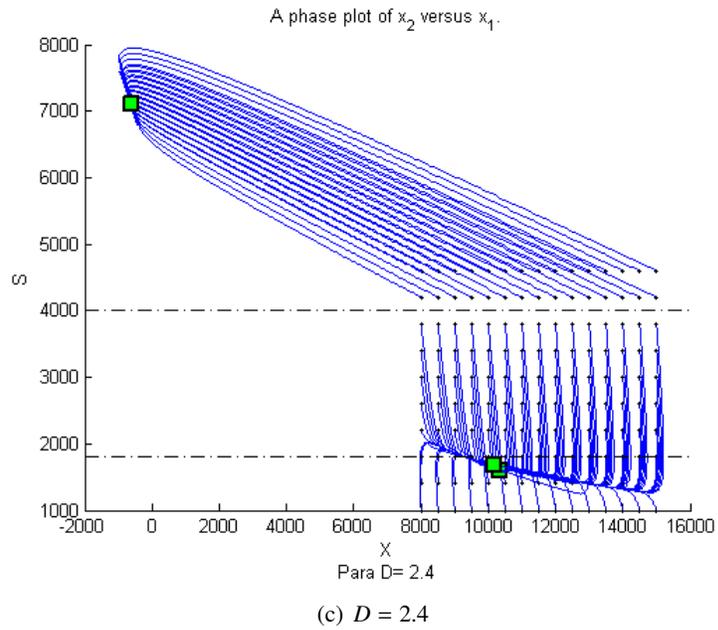


Figura A.1. Diagrama de fases para las tres zonas variando D con $X_{in}=0$

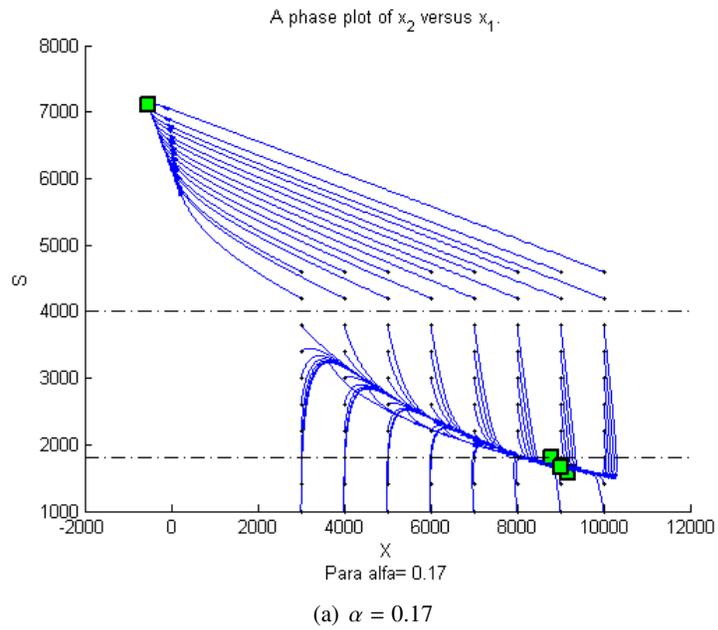


Figura A.2. Diagrama de fases para las tres zonas variando α con $X_{in}=240$ (Continúa en la pág. siguiente)

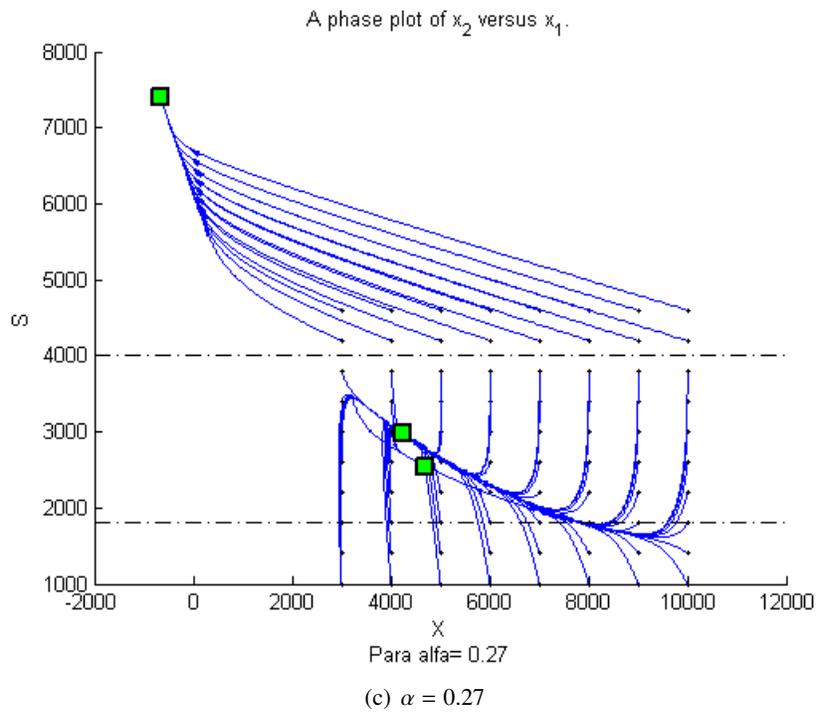
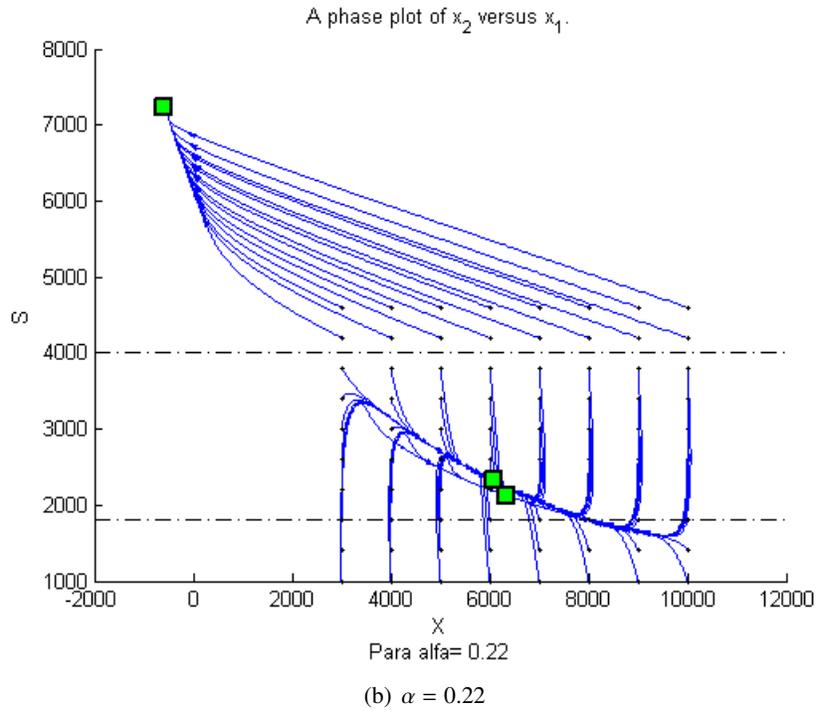


Figura A.2. Diagrama de fases para las tres zonas variando α con $X_{in} = 240$

B. Descripción de Algoritmos

En el presente anexo se describen los algoritmos utilizados para la simulación de la dinámica del bioreactor UASB:

Para el análisis de la dinámica de un bioreactor utilizado para el tratamiento de aguas residuales se utilizó diversos algoritmos que permitieron hacer el cálculo de puntos de equilibrio y su estabilidad, cuencas de atracción, comportamiento de órbitas y bifurcaciones, tanto de forma analítica como numérica. Estos se describen a continuación:

Algoritmos Para el cálculo Analítico

Dado el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales discontinuas:

$$F^{(1)} = \begin{cases} f_1 = & D(X^{in} - \alpha X) + ASX \\ f_2 = & D(S^{in} - S) - YASX \end{cases} \quad (B.1)$$

$$F^{(2)} = \begin{cases} g_1 = & D(X^{in} - \alpha X) + [\mu_1 + B(S - S_1)]X \\ g_2 = & D(S^{in} - S) - Y[\mu_1 + B(S - S_1)]X \end{cases} \quad (B.2)$$

donde

$A = \frac{\mu_1}{S_1}$ y $B = \frac{(\mu_2 - \mu_1)}{(S_2 - S_1)}$ con una hypersuperficie de conmutación entre los dos sistemas definida por:
 $H(z) = S - 1800$.

Las variables de estado son S y X y las demás constantes toman los siguientes valores por defecto:

$D = 2.1$; $\alpha = 0.15$; $Y = 3.35$; $S^{in} = 4000$; $X^{in} = 0$ ó 240 ; $\mu_1 = 0.3245$; $\mu_2 = 0.5545$; $\mu_3 = 0.6874$;
 $S_1 = 1800$; $S_2 = 4000$; $S_3 = 6000$.

También se hizo una variación de los parámetros para observar su comportamiento por medio de las herramientas para el cálculo simbólico ofrecidas por Matlab (funciones como solve, subs, diff, dot, syms, etc.), se halló un valor para los puntos de equilibrio en cada zona del sistema discontinuo (zona 1, 2 y 3) para un parámetro y un vector de variación de este parámetro, ambos elegidos por el usuario lo cual se realizó igualando cada ecuación a cero y despejando como si fuera un sistema algebraico. Una vez obtenidos estos puntos de equilibrio, analizamos su estabilidad, calculando la matriz Jacobiana para cada zona del sistema y analizando el comportamiento de sus valores propios. En la mayoría de los casos los valores propios resultaron ser menores que cero y reales, por lo que los puntos de equilibrios obtenidos son nodos estables.

Algoritmo para el método convexo de Filippov

Para realizar los cálculos de la aplicación de método convexo de Filippov se encontraron los puntos críticos en la zona de deslizamiento, entre los cuales están los pseudoequilibrios, puntos tangentes, equilibrios de frontera y puntos deslizantes singulares. El cálculo de estos fue hecho para un mismo parámetro y un mismo vector del rango de parámetro escogidos por el usuario, de la misma manera que se hizo con los puntos de equilibrio. Todos los puntos críticos obtenidos anteriormente fueron almacenados y posteriormente graficados para los distintos valores del parámetro ingresados por el usuario.

Algoritmo para el cálculo de la aproximación numérica

Para la obtención de las órbitas y los puntos críticos de manera numérica, se utilizó el algoritmo descrito en el artículo An event-driven method to simulate Filippov systems with accurate computing of sliding motions [26]. En este algoritmo se utilizan herramientas numéricas de Matlab como ode45 y el manejo de eventos para la detección de los campos vectoriales en las zonas 1 y 2, y en la zona de conmutación, tanto donde hay cruce como donde existe deslizamiento.

Además, para visualizar diferentes órbitas para un mismo valor del parámetro, se modificó la opción de introducir vectores de condiciones iniciales para las dos variables de estado, y también se dio a escoger al usuario el parámetro a simular y entre que valores variarlo, así como también el tiempo de integración máximo.

La cuenca de atracción de un punto de equilibrio se realizó con el anterior algoritmo, dando la opción al usuario de definir una región acotada 2-dimensional alrededor de estos puntos. De esta forma se crean puntos iniciales a partir de los cuales comienza la integración y se determina su punto de convergencia después de un largo periodo de transcurrida tal integración.

Bibliografía

- [1] Alvarez, Rene *Producción anaerobica de biogás aprovechamiento de residuos del proceso anaerobico*. Informe técnico, Proyecto 09 CNI IIDEPROQ, Universidad Mayor de San Andrés, La Paz Bolivia, 2004.
- [2] Bermudez, R, Rodríguez, S y Browun, T. *Ventajas del empleo de reactores UASB en el tratamiento de residuales líquidos para la obtención de biogás*. Rta Tecnología Química, xxiii, 2003.
- [3] Borzacconi L & López I & Ohanian, M. *Degradación anaerobia de lixiviado de relleno sanitario y postratamiento aerobio*. En *IV Seminario taller latinoamericano sobre tratamiento anaerobio de aguas residuales.*, Bucaramanga 1996.
- [4] Caicedo, F. *Diseño, Construcción y Arranque de un Ractor UASB. Piloto para el Tratamiento de Lixiviados*. Tesis de Maestría, Especialización en Ingeniería Ambiental. Universidad Nacional de Colombia, Sede Manizales, 2006.
- [5] Campos, C y Anderson, G. *The effect of the liquid upflow velocity and the substrate concentration on the star-up and the steady state periods of lab-scale UASB reactors*. En *6° International Symposium on anaerobic Digestion*. São Paulo, Brasil, 1991.
- [6] Campos., José Roberto *Proyecto y operación de filtros anaeróbios para tratamiento de efluentes líquidos industriales*. En *Módulo del Taller Regional y Conferencia sobre Tratamiento Anaeróbico de Aguas Residuales en América Latina*, México, 1990.
- [7] Catalán, F. E. *Modelación del proceso de digestión anaerobia en un reactor UASB para aguas residuales*. Tesis de Doctorado, Universidad de Santiago de Chile, 2002.
- [8] Conill, P. *La Tecnología anaerobia UASB en el tratamiento de la aguas residuales domésticas 10 años de desarrollo y maduración en América Latina*. En *www.bio-tec.net*, 2001.
- [9] Díaz Báez & M. Espitia, S.& Molina, F *Digestión Anaerobia una Aproximación a la Tecnología*. UNIBIBLIOS. Bogotá, Colombia, 2002.
- [10] Escalas, Antoni. *Modelación matemática de procesos biológicos de tratamiento*. En *Tecnologías sostenibles para el tratamiento de aguas y su impacto en los sistemas acuáticos*. Universidad de Concepción, Concepción, Chile, 5 de julio de 2006.

- [11] Etchechoury., María *Sistemas No-Lineales*. Departamento de Matemática, Facultad de Ciencias Exactas Universidad Nacional de La Plata.
- [12] Giraldo., Eugenio *Tratamiento de lixiviados de relleños sanitarios*. Avances Recientes. Universidad de los Andes, 2005.
- [13] Gordillo, Francisco *Estabilidad de Sistemas No-Lineales Basado en la Teora de Lyapunov*. Revista Iberoamericana de Automtica e informtica Industrial, 6:5–16, 2009.
- [14] Guiot, R., Pauus, A. y Costerton, J. *A structural model of the anaerobic granule consotium*. Water Science Technology, 25 (7):1–10, 1992.
- [15] H.K, Khalil *Nonlinear Systems*. Prentice Hall, Upper Saddle River, 1996.
- [16] Houbron, Eric. *Ensayos Anaerobios para la Determinación de las Actividades de un Lodo*. Informe técnico, Facultad de Ciencias de Valladolid, España, 1995.
- [17] Hulshoff-Pol, L. *The phenomenon of granulation of anaerobic sludge*. Tesis de Doctorado, Universidad Agrícola de Wageningen (Holanda), 1989.
- [18] J.J.E., Slotine y W, Li *Applied Nonlinear Control*. Prentice Hall Englewood Cliffs, 1991.
- [19] Kowalczyk, P y Bernardo, M. di *Two-parameter degenerate sliding bifurcations in Filippov systems*. Physica D, 204Nº 3-4:204 –229, 2005.
- [20] Kuznetsov, Y.A. *Elements of Applied Bifurcation Theory*. Springer-Verlag, 2004.
- [21] Kuznetsov, Yu. A., Rinaldi, S. y Gragnani., A. *One-parameter bifurcations in planar Filippov systems*. International Journal of Bifurcation and Chaos, Vol. 13, No. 8:2157–2188, 2003.
- [22] Lettinga, G, Velsen, A.F.M van, Homba, S.W, Zeeuw, W de y Klapwijk, A. *Use of the Up-flow Sludge Blanket reactor concept for biological wastewater treatment, specially for anaerobic treatment*. Biotechnology and Bioengineering, 22:699 734, 1980.
- [23] Monroy, O. *Sistemas de reactores anaerobios*. En *Memorias. VIII Curso Avanzado sobre Procesos Biotecnológicos*, 1997 Junio 30 a Julio 11. Cuernavaca (México).
- [24] Moreno Jimenéz, Henry. *Optimización de diseño del sistema de alimentación de reactores U. A. S. B*. Memos de Investigación (Facultad de Ingeniería. Universidad de los Andes), 284, 1999.
- [25] Muñoz, R. *Diseño e implementación de un sistema de control de la DQO en un reactor piloto UASB para el tratamiento de lixiviados*. Tesis de Maestría, Tesis Maestría Universidad Nacional de Colombia sede Manizales, 2006.
- [26] Piiroinen, Petri T. y Kuznetsov, Yuri A. *An event-driven method to simulate Filippov systems with accurate computing of sliding motions*. Junio 7 de 2005.

- [27] Rincón, A. *Análisis y control de un reactor de lecho fijo anaeróbico de flujo ascendente en un esquema de reacción en dos etapas*. Tesis de Maestría, Tesis Maestría Universidad Nacional de Colombia, 2007.
- [28] Rodríguez, Jenny Alexandra *Arranque y operación de reactores anaerobios*. Universidad del Valle. Cali - Colombia, 2005.
- [29] T., Van Cutsem y C, Vournas *Voltage Stability of Electric Power Systems*. Kluwer Academic Publishers, 1988.
- [30] T., Van Cutsem y C, Vournas *Voltage Stability of Electric Power Systems*. Kluwer Academic Publishers, 1998.
- [31] Torres, P y Rodríguez, J. A . *Tratamiento anaerobio de lixiviados en reactores UASB*. Rta: Ingeniería y Desarrollo, 18, 2005.
- [32] Tovar Pérez, A *Identificador Gráfico de Bifurcaciones IGB versiones 4 y 5*. Tesis de Maestría, Tesis Maestría Universidad Nacional de Colombia, Bogotá, Colombia, 2001.
- [33] Van Haandel, A. y G, Lettinga *Tratamiento Anaeróbico de Esgotos*. Editora EPGRAF Campina Grande, Brasil, 1994.