Representación integral de soluciones de problemas no locales

Nelson Andrés Agudelo Parra

Director: Jose Manuel Jiménez Urrea

Profesor asociado Universidad Nacional de Colombia Sede Medellín

Co-Director: Cristian Camilo Chica Castaño

Estudiante de Doctorado en matemáticas, University of Minnesota
Magister en ciencias matemáticas, Universidad Nacional de Colombia
Sede Medellín

Tesis presentada como requisito parcial para optar al título de

Magíster en Ciencias - Matemáticas

Grupo de Investigación en Matemáticas de la Universidad Nacional de Colombia Sede Medellín

Facultad de Ciencias, Escuela de Matemáticas

Universidad Nacional de Colombia Sede Medellín

Septiembre, 2022

Agradecimientos

A mi familia, especialmente a mis padres por su apoyo incondicional en los momentos difíciles.

A mi director de tesis José Jiménez por su constante dirección y dedicación en mi formación desde temprana etapa.
A mi amigo y compañero Cristian Chica por sus valiosas contribuciones y tiempo en el desarrollo de esta tesis, además de proponer el tema.
Al profesor Carlos Vélez y al egresado Daniel Restrepo por sus impecables sugerencias y motivaciones en el área.

Finalmente a Liliana Parra por ser garante de nuestro proceso formativo y una cálida persona siempre dispuesta ayudar. A mis amigos de maestría, particularmente a Luis Miguel Álvarez, Johan López y Jonnathan Ramírez.

Con apoyo de la Facultad de ciencias en el marco del proyecto Problemas en ecuaciones diferenciales del tipo elíptico o dispersivo. Código Hermes 53815.

Representación integral de soluciones de problemas no locales

Resumen

En este trabajo estudiamos un problema semilineal que involucra un operador de tipo no local a través de la transformada de Fourier. Investigamos existencia y unicidad local de soluciones vía el principio de Duhamel y las propiedades del kernel asociado al operador involucrado.

Palabras Clave: Transformada de Fourier, principio de Duhamel, regularidad, solución débil.

Integral representation of non local problems solutions

Abstract

In this work we study a semilinear problem involving a type of non-local operator through the Fourier transform. We investigate the existence and local uniqueness of solutions, using Duhamel's principle and the properties of the kernel associated with the aforementioned operator.

Keywords: Fourier transform, Duhamel's principle, regularity, weak solution.

Índice general

Introducción

En este trabajo estamos interesados en estudiar problemas semilineales de la forma

$$\begin{cases} \partial_t u + (-L)[u] = f(u) & \text{en } (0,+\infty)\times\mathbb{R}^N \\ \\ u(0,\cdot) = u_0(\cdot) & \text{en } \mathbb{R}^N, \end{cases} \tag{1}$$

donde f y u_0 son funciones de valor real con condiciones que especificaremos más adelante y L es un operador no local (operadores cuyo valor en una función u no es posible determinar a partir de los valores de dicha función en alguna vecindad del punto de interés, ver [7]) del tipo

$$L[u(t,\cdot)](x) = \int\limits_{\mathbb{R}^N} \left(\frac{u(t,x+y)+u(t,x-y)}{2} - u(t,x) \right) \frac{b(y)}{|y|^{N+2s}} dy, \quad s \in (0,1) \tag{2}$$

donde u pertenece a un espacio de Banach apropiado y b es una función con condiciones de acotamiento adecuadas.

Los operadores de la forma (2) se han estudiado ampliamente en la literatura y una teoría general sobre estos es desarrollada en [8]. Problemas del tipo (1) tienen su origen o motivación en el modelamiento matemático de algunos fenómenos físicos, como por ejemplo en procesos de difusión anómala o también suelen aparecer en ciertos modelos de ciencias financieras ver [13].

Este trabajo tiene como propósito estudiar el problema (1) en el caso en que $b \equiv 1$. Más precisamente nuestro operador no local L está definido a través de la transformada de Fourier $\mathcal{F}$, como sigue

$$L[\varphi] := g_\lambda[\varphi] = \mathcal{F}^{-1}(|\cdot|^\lambda \mathcal{F}(\varphi)), \quad \lambda \in (0,2), \tag{0.0.1}$$

para $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$.

El operador g_λ posee una representación del tipo (2) la cual presentaremos en el Teorema 3.1.1 y además resulta definir un tipo de operador que se puede entender, bajo hipótesis adecuadas, como una versión fraccionaria del laplaciano usual. (Ver [7] y [2]).

Además de la elección de L por g_λ, consideraremos una función f de la forma $f(u) = F(\cdot,\cdot,u,\nabla u)$, donde $F : [0,\infty)\times\mathbb{R}^N\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}$ será una función con condiciones de regularidad y acotamiento apropiadas que describiremos de manera detallada en el Capítulo 2. Teniendo en cuenta las consideraciones anteriores nuestro propósito en este trabajo será estudiar la existencia, unicidad y regularidad espacial de las soluciones del problema de valor incial

$$\begin{cases} \partial_t u + g_\lambda[u] = F(\cdot,\cdot,u,\nabla u), & \text{en } (0,+\infty)\times\mathbb{R}^N \\ \\ u(0,\cdot) = u_0(\cdot), & \text{en } \mathbb{R}^N, \end{cases} \tag{3}$$

con $u_0 \in W^{1,\infty}(\mathbb{R}^N)$.

Este documento está basado en el trabajo de DRONIOU & IMBERT: *Fractal First-Order Partial Differential Equations* [13]. Nuestro objetivo es exponer de manera detallada los resultados y razonamientos allí tratados.

Con el fin de establecer los resutados de existencia y unicidad de soluciones para el problema (3), usaremos el principio de Duhamel y probaremos algunas propiedades del kernel asociado al operador g_λ; esto nos permitirá usar métodos de punto fijo clásicos para obtener soluciones de (3). Por otro lado la representación integral del operador g_λ será fundamental para conseguir estimativos a priori de la solución y su gradiente, así como la unicidad en el sentido del Teorema 2.2.1.

El trabajo está organizado de la siguiente manera: en el Capítulo 1 presentamos algunos preliminares básicos sobre la transformada de Fourier y usaremos esto para definir el concepto de derivada fraccionaria a través de la cual se puede representar el operador g_λ. (Ver [7]).

En el Capítulo 2 describimos de manera breve el problema de valor inicial (p.v.i) (2.1.1) a estudiar y hacemos una corta discusión sobre las hipótesis a considerar. Además presentamos el resultado principal, Teorema 2.2.1.

El Capítulo 3 está dedicado en su mayoría a probar que el operador g_λ tiene una representación integral y algunas consecuencias importantes que se obtienen a partir de dicha representación, a saber, un estimativo a priori de la solución (ver Sección 3.2).

En el Capítulo 4 se introduce una noción de solución a través de la fórmula de Duhamel, vía el kernel asociado a g_λ que denotaremos por K_λ y, que hablaremos con detalle en el apéndice 6.2. Establecemos un estimativo importante del gradiente de la solución. Enunciamos el resultado de existencia y unicidad de soluciones de (2.1.1) (Teorema 4.1.2) cuya prueba se posterga al capítulo siguiente ya que para una prueba completa es necesario abordar primero un resultado sobre regularidad (Proposición 5.1.1).

El Capítulo 5 es concluyente, en este se demuestra la existencia y unicidad de soluciones y se estudian aspectos de regularidad de las mismas.

Finalmente, incluímos como Capítulo 6 un apéndice dedicado fundamentalmente al estudio de algunas propiedades importantes del kernel K_λ; las cuales son fundamentales para la obtención de soluciones mediante métodos de punto fijo.

Capítulo 1

Preliminares

1.1. Transformada de Fourier

Comenzamos, por recordar el operador no local mediante el cual está definido g_λ (ver ecuación (0.0.1)), la transformada de Fourier, que sin lugar a confusión en el espacio en que estemos trabajando, denotaremos siempre mediante el símbolo $\mathcal{F}$. Omitiremos las pruebas de los resultados mencionados en esta sección y solo comentaremos algunos de los detalles destacados sobre ellos. Para un tratamiento de las cuestiones aquí abordadas recomendamos el libro de Claude Zuilly [5].

1.1.1. Transformada de Fourier en $L^1(\mathbb{R}^N)$

Para una función $f \in L^1(\mathbb{R}^N)$ (con valores en $\mathbb{C}$), definimos su transformada de Fourier en cada punto $\xi \in \mathbb{R}^N$ por

$$\mathcal{F}(f)(\xi) := \int_{\mathbb{R}^N} e^{-2\pi i x\cdot\xi} f(x)dx. \tag{1.1.1}$$

Claramente $\mathcal{F}(f)$ está bien definida para cada punto $\xi \in \mathbb{R}^N$ y representa una función con valores en $\mathbb{C}$.

Del Teorema de la Convergencia Dominada se sigue que $\mathcal{F}(f)$ es continua en $\mathbb{R}^N$, más aún, el operador $\mathcal{F} : L^1(\mathbb{R}^N) \longrightarrow L^\infty(\mathbb{R}^N)$ es lineal y continuo. A continuación listamos algunas de las propiedades fundamentales de $\mathcal{F}$.

Proposición 1.1.1. *Sean $f, g \in L^1(\mathbb{R}^N)$ y $a \neq 0$. Entonces para todo $\xi \in \mathbb{R}^N$*

(1) $f * g \in L^1(\mathbb{R}^N)$ *y* $\mathcal{F}(f * g)(\xi) = \mathcal{F}(f)(\xi)\mathcal{F}(g)(\xi)$.

(2) $\mathcal{F}[f(a\cdot)](\xi) = a^{-N}\mathcal{F}(f)(a^{-1}\xi)$.

(3)

$$\int_{\mathbb{R}^N} \mathcal{F}(f)(x)g(x)dx = \int_{\mathbb{R}^N} f(x)\mathcal{F}(g)(x)dx.$$

(4) *Fórmula de Inversión: Para casi todo* $x \in \mathbb{R}^N$

$$\lim_{t\to 0} \int_{\mathbb{R}^N} e^{2\pi i x\cdot\xi} e^{-4\pi^2 t|\xi|^2} \mathcal{F}(f)(\xi) d\xi = f(x).$$

En particular, la secuencia $\{e^{-|\cdot|^2/4t}/(4\pi t)^{N/2}\}_{t>0}$ *es una aproximación a la identidad y* $\mathcal{F}(e^{-\pi|\cdot|^2}) = e^{-\pi|\cdot|^2}$ *(i.e., es un punto fijo de la Transformada de Fourier).*

(5) $\mathcal{F} : L^1(\mathbb{R}^N) \longrightarrow L^\infty(\mathbb{R}^N)$ *es inyectivo (fórmula de inversión) pero no sobreyectivo.*

(6) *Si* $f \in L^1(\mathbb{R}^N) \cap L^2(\mathbb{R}^N)$ *entonces* $\mathcal{F}(f) \in L^2(\mathbb{R}^n)$ *y además* $\|\mathcal{F}(f)\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} = \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}$. *La última igualdad es conocida como la Fórmula de Plancherel.*

Prueba. Ver [11], Teorema 1.1, Proposición 1.2, Teorema 1.3 y [2, Pag 7], Sección 2.1. ☑

1.1.2. Transformada de Fourier en $L^2(\mathbb{R}^N)$

Puesto que $C_0^\infty(\mathbb{R}^N) \subseteq L^1(\mathbb{R}^N) \cap L^2(\mathbb{R}^N)$ el ítem (6) de la proposición 1.1.1 permite definir el operador $\mathcal{F}$ en $C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ con valores en $L^2(\mathbb{R}^N)$ mediante la fórmula (1.1.1), usada para funciones de $L^1(\mathbb{R}^N)$. Como $\overline{C_0^\infty(\mathbb{R}^N)}^{L^2(\mathbb{R}^N)} = L^2(\mathbb{R}^N)$ entonces pordemos extender $\mathcal{F}$ a todo $L^2(\mathbb{R}^N)$ de manera continua.

Proposición 1.1.2. *El operador* $\mathcal{F} : L^2(\mathbb{R}^N) \longrightarrow L^2(\mathbb{R}^N)$ *es una isometría sobreyectiva y para toda* $f \in L^2(\mathbb{R}^N)$, $\mathcal{F}(\mathcal{F}(f)) = f(-\cdot)$.

Prueba. Ver [11], Teoremas 1.4 y 1.5. ☑

Como consecuencia de esta proposición es posible construir una fórmula de inversión para $\mathcal{F}$ en $L^2(\mathbb{R}^N)$, mediante la ecuación $\mathcal{F}^{-1}(f) = \mathcal{F}(f(-\cdot))$. También se verifica la fórmula del ítem (3) de la Proposición 1.1.1 para funciones f y g de $L^2(\mathbb{R}^N)$.

Observación 1.1.3 (Cómputo de $\mathcal{F}$ en $L^2(\mathbb{R}^N)$). Denotemos por “ $\widehat{\ }$ ” a la transformada de Fourier en $L^1(\mathbb{R}^N)$. Si $f \in L^2(\mathbb{R}^N)$, entonces para cualquier $R > 0$ la función $f\chi_{B_R(0)}$ es integable ya que por la desigualdad de Hölder

$$\|f\chi_{B_R(0)}\|_{L^1(\mathbb{R}^N)} \leq \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} |B_R(0)| < \infty.$$

Podemos calcular $(f\chi_{B_R(0)})\widehat{\ }$ en $L^1(\mathbb{R}^N)$.

Por el Teorema de la Convergencia Dominada se tiene que $f\chi_{B_R(0)} \longrightarrow f$, cuando $R \to \infty$ en $L^2(\mathbb{R}^N)$, luego por la Proposición 1.1.2 $\mathcal{F}(f\chi_{B_R(0)}) \longrightarrow \mathcal{F}(f)$, $R \to \infty$, en $L^2(\mathbb{R}^N)$.

De lo anterior se sigue que para una función de $L^2(\mathbb{R}^N)$ podemos calcular su transformada de Fourier como el límite de transformadas en $L^1(\mathbb{R}^N)$ de truncaciones de f por $\chi_{B_R(0)}$.

1.1.3. Transformada de Fourier en $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$

Notación. Recordemos que para $x = (x_1, ..., x_N) \in \mathbb{R}^N$ y un multi-índice $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_N) \in \mathbb{N}^N$, $x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \cdots x_N^{\alpha_N}$ y si f es una función $|\alpha|$-veces diferenciable la derivada de orden α es

$$\partial^\alpha f(x) = \frac{\partial^{\alpha_N} \cdots \partial^{\alpha_1}}{\partial {x_N}^{\alpha_N} \cdots \partial {x_1}^{\alpha_1}} f(x).$$

El espacio de funciones con derivadas rápidamente decrecientes, *espacio de Schwartz*, se define como

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}^N) := \{\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^N) | \forall \alpha, \beta \text{ multi índices, } x^\alpha \partial^\beta \varphi \in L^\infty(\mathbb{R}^N)\}$$

y el espacio de las distribuciones temperadas como

$$\mathcal{S}'(\mathbb{R}^N) := \{T : \mathcal{S}(\mathbb{R}^N) \longrightarrow \mathbb{C} : T \text{ es lineal y continuo}\},$$

donde T es continuo en el siguiente sentido: para toda secuencia $\{\varphi_k\}_{k=1}^\infty \subseteq \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ tal que $\varphi_k \longrightarrow 0$, cuando $k \longrightarrow \infty$ en $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ entonces, $T(\varphi_k) \longrightarrow 0$, cuando $k \longrightarrow \infty$ en $\mathbb{C}$.

La transformada de Fourier en $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$ está bien definida y es un automorfismo (ver Teorema 1.1.5). Entre otras cosas, se cumple que para todo $1 \leq p \leq \infty$, $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N) \subseteq L^p(\mathbb{R}^N)$ y si $p \neq \infty$ entonces $\overline{\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)}^{L^p(\mathbb{R}^N)} = L^p(\mathbb{R}^N)$ y esto en particular permite calcular $\mathcal{F}$ para $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ mediante la fórmula (1.1.1) de $L^1(\mathbb{R}^N)$.

Proposición 1.1.4. *Suponga que $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ y sea α un multi índice (en $\mathbb{N}^N$). Entonces*

(1) $\partial_\xi^\alpha \mathcal{F}(\varphi)(\xi) = \mathcal{F}[(-2\pi i x)^\alpha \varphi](\xi)$.

(2) $\mathcal{F}(\partial_x^\alpha \varphi)(\xi) = (2\pi i \xi)^\alpha \mathcal{F}(\varphi)(\xi)$.

Prueba. Ver [19], Proposición 2.2.11. ☑

Teorema 1.1.5. *El operador $\mathcal{F} : \mathcal{S}(\mathbb{R}^N) \longrightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ es una biyección lineal y bicontinua. De hecho, $\mathcal{F}^{-1}(\varphi) = \mathcal{F}(\varphi(-\cdot))$ para toda $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$.*

Prueba. Ver [5], Teorema 1.6 y [11], Teorema 1.6. ☑

Observación 1.1.6. Para establecer un resultado como el anterior (en cuanto a continuidad) debe precisarse alguna noción de convergencia en $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$. Dada una secuencia $\{\varphi_k\}_{k=1}^\infty \subseteq \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ y una función $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ decimos que $\varphi_k \longrightarrow \varphi$, cuando $k \longrightarrow \infty$, en $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ si para todo par de multi índices α y β en $\mathbb{N}^N$ se tiene que $x^\alpha \partial^\beta \varphi_k \longrightarrow x^\alpha \partial^\beta \varphi$, cuando $k \longrightarrow \infty$, uniformemente en $\mathbb{R}^N$. En particular es cierto que si una secuencia de funciones en el espacio de Schwartz $\{\varphi_k\}$ es tal que $\varphi_k \longrightarrow 0$, cuando $k \longrightarrow \infty$ en $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$, entonces para todo $1 \leq p \leq \infty$, $\varphi_k \longrightarrow 0$, cuando $k \longrightarrow \infty$ en $L^p(\mathbb{R}^N)$.

Entre los diversos ejemplos de distribuciones temperadas destacamos dos:

(1) Para $1 \leq p \leq \infty$ y $f \in L^p(\mathbb{R}^N)$ definimos $T_f : \mathcal{S}(\mathbb{R}^N) \longrightarrow \mathbb{C}$ por

$$T_f(\varphi) := \int_{\mathbb{R}^N} \varphi(x) f(x) dx,$$

para todo $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$. Por la desigualdad de Hölder y la última parte de la observación 1.1.6 tenemos que $T_f \in S'(\mathbb{R}^N)$.

(2) Distribución valor principal de $\frac{1}{x}$. Para $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ y $0 < \varepsilon < 1$ definimos el operador

$$\text{v.p.}\frac{1}{x}(\varphi) := \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int\limits_{\varepsilon \leq |x| \leq 1/\varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x} dx.$$

Veamos que v.p.$\frac{1}{x}$ está bien definida.

Sea $0 < \varepsilon < 1$. Como $g(x) = 1/x$ es impar y continua en $\{x \in \mathbb{R} : \varepsilon \leq |x| \leq 1\} = [-1, -\varepsilon] \cup [\varepsilon, 1]$, entonces $\int\limits_{\varepsilon \leq |x| \leq 1} \frac{1}{x} dx = 0$ y por lo tanto $\int\limits_{\varepsilon \leq |x| \leq 1} \frac{\varphi(0)}{x} dx = 0$ para todo $\varepsilon > 0$. Así,

$$\begin{aligned}
\int\limits_{\varepsilon \leq |x| \leq 1/\varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x} dx &= \int\limits_{\varepsilon \leq |x| \leq 1} \frac{\varphi(x)}{x} dx - \int\limits_{\varepsilon \leq |x| \leq 1} \frac{\varphi(0)}{x} dx + \int\limits_{1 \leq |x| \leq 1/\varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x} dx \\
&= \int\limits_{\varepsilon \leq |x| \leq 1} \left[\frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x - 0}\right] dx + \int\limits_{1 \leq |x| \leq 1/\varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x} dx \\
&\leq \int\limits_{\varepsilon \leq |x| \leq 1} \|\varphi'\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} dx + \int\limits_{1 \leq |x| \leq 1/\varepsilon} \left|\frac{x\varphi(x)}{x^2}\right| dx \\
&\leq \int\limits_{|x| \leq 1} \|\varphi'\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} dx + \int\limits_{x \geq 1} \sup_{x \in \mathbb{R}} |x\varphi| \frac{1}{x^2} dx \\
&= 2\|\varphi'\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} + C\|x\varphi\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)},
\end{aligned}$$

de modo que

$$\left|\text{v.p.}\frac{1}{x}(\varphi)\right| \leq 2\|\varphi'\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} + C\|x\varphi\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} < \infty.$$

Estas dos distribuciones serán usadas en algunas partes de este tabajo por lo que es pertinente hacer mención de ellas. Indicaremos a continuación como se calcula la transformada de Fourier en $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$ y un par de propiedades relevantes al respecto.

Definición 1.1.7 (Transformada en $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$)**.** Para $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$ su transformada de Fourier es el funcional $\mathcal{F}(T) : \mathcal{S}(\mathbb{R}^N) \longrightarrow \mathbb{C}$, definido por $\mathcal{F}(T)(\varphi) := T(\mathcal{F}(\varphi))$.

Por el Teorema 1.1.5, $\mathcal{F}(T)$ está bien definido y también es lineal gracias a la linealidad de la transformada en $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ y la de T. El mismo teorema también nos permite probar que $\mathcal{F}(T)$ es continuo: recordemos que sin lugar a confusión nos referimos a la transformada por el mismo símbolo $\mathcal{F}$ sin importar el espacio en donde se esté considerando. Sea $\{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty}$ una secuencia en $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ que converge a 0 (en $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$). Por el Teorema 1.1.5 tenemos que $\mathcal{F}(\varphi_k) \to 0$, cuando $k \to \infty$ en $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$. Con esto

$$\lim_{k \to \infty} \mathcal{F}(T)(\varphi_k) = \lim_{k \to \infty} T(\mathcal{F}(\varphi_k)) = 0,$$

porque $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$ y $\lim_{k\to\infty} \mathcal{F}(\varphi_k) = 0$ en $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$. Así pues $\mathcal{F}(T) \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$.

La siguiente proposición la usamos en la Sección 3.1 para probar que el operador g_λ tiene una representación integral (Teorema 3.1.1).

Proposición 1.1.8. *Sean $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ y $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$. Se define la convolución de T con φ como la función $T * \varphi(x) := T(\varphi(x - \cdot))$. Entonces*

(1) $T * \varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^N) \cap \mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$ y $\mathcal{F}(T * \varphi) = \mathcal{F}(T)\mathcal{F}(\varphi)$, donde $\mathcal{F}(T)\mathcal{F}(\varphi) \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$ está dada por $\mathcal{F}(T)\mathcal{F}(\varphi)(\phi) := \mathcal{F}(T)(\mathcal{F}(\varphi)\phi)$, para toda $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ (recordar que para $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$, $\mathcal{F}(\varphi) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$).

(2) Para todo $\rho \in (0, N)$,

$$\mathcal{F}\left(\frac{1}{|x|^\rho}\right)(\xi) = c_{N,\rho}\frac{1}{|\xi|^{N-\rho}},$$

en el sentido distribucional, esto es

$$\int_{\mathbb{R}^N} \frac{1}{|x|^\rho}\mathcal{F}(\varphi)(x)dx = c_{N,\rho}\int_{\mathbb{R}^N} \frac{1}{|\xi|^{N-\rho}}\varphi(\xi)d\xi, \quad \text{para todo } \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$$

donde $c_{N,\rho} = \pi^{\rho-N/2}\Gamma(N/2 - \rho/2)\Gamma(\rho/2)$ y Γ es la función gamma.

Prueba. Ver [11, Proposición 1.3 y Páginas 20-22] y [16], Teorema 2.1.3. ☑

Observación 1.1.9. En la parte (1) de la Proposición 1.1.8, el símbolo de intersección tan solo indica que podemos hablar de la convolución del funcional T y la función de Schwartz φ en dos sentidos: el primero como una función $T * \varphi : \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{C}$ definida como $T * \varphi(x) := T(\varphi(x - \cdot))$, $x \in \mathbb{R}^N$, que es regular y el segundo como una distribución temperada, que formalmente está dada por $(T * \varphi)(\phi) := T(\tilde{\varphi} * \phi)$, $\phi \in S(\mathbb{R}^N)$, donde $\tilde{\varphi} = \varphi(-\cdot)$ y $\tilde{\varphi} * \phi \in S(\mathbb{R}^N)$. Ver [20]

Enunciamos ahora el principal resultado sobre $\mathcal{F}$ en $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$:

Teorema 1.1.10. *$\mathcal{F} : \mathcal{S}'(\mathbb{R}^N) \longrightarrow \mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$ es un operador lineal, biyectivo y bicontinuo.*

Prueba. Ver [5] Teorema 3.4 y [11], Teorema 1.7. ☑

Observación 1.1.11. Al igual que en el teorema 1.1.5, se hace necesario precisar una noción de convergencia en $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$: dadas $\{T_k\}_{k=1}^\infty \subseteq \mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$ y $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$, decimos que $T_k \longrightarrow T$, cuando $k \to \infty$, en $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$ si para toda $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ se tiene que $T_k(\varphi) \longrightarrow T(\varphi)$, cuando $k \longrightarrow \infty$ en $\mathbb{C}$.

Observación 1.1.12. Es posible probar que para $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$, la transformada inversa en $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$ es el operador $\mathcal{F}^{-1} : \mathcal{S}'(\mathbb{R}^N) \longrightarrow \mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$, definido para cada $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$ como el funcional $\mathcal{F}^{-1}(T) : \mathcal{S}(\mathbb{R}^N) \longrightarrow \mathbb{C}$ donde para cada $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$, $\mathcal{F}^{-1}(T)(\varphi) := T(\mathcal{F}[\varphi(-\cdot)]) = T(\mathcal{F}^{-1}(\varphi))$.

1.2. Derivada fraccionaria

1.2.1. Motivación

La idea de derivada fraccionaria está motivada por el cálculo de la transformada de Fourier de la derivada de una función regular. Consideremos por ejemplo $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ (recordemos que $C_0^\infty(\mathbb{R}^N) \subseteq \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$). Por la Proposición 1.1.4 parte (2), tenemos que si α es un multi-índice en $\mathbb{N}^N$ entonces para todo $\xi \in \mathbb{R}^N$ $\mathcal{F}(\partial_x^\alpha f)(\xi) = (2\pi i\xi)^\alpha \mathcal{F}(f)(\xi)$. De lo cual puede deducirse que la regularidad de una función está relacionada con el decaimiento de su transformada de Fourier. La condición decaimiento-regularidad se puede establecer en un espacio adecuado de funciones donde el decaimiento puede indicarse para potencias fraccionarias, dando lugar a uno de los espacios de Sobolev más usuales, los espacios H^s definidos a continuación.

Definición 1.2.1. Para $s > 0$ definimos

$$H^s(\mathbb{R}^N) := \left\{ f \in L^2(\mathbb{R}^N) : \int_{\mathbb{R}^N} (1+|\xi|^2)^s |\mathcal{F}(f)(\xi)|^2 d\xi < \infty \right\}.$$

Este espacio es un espacio de Hilbert, una vez se dota del producto interno

$$\langle f, g\rangle_{H^s(\mathbb{R}^N)} := \int_{\mathbb{R}^N} (1+|\xi|^2)^s \mathcal{F}(f)(\xi)\overline{\mathcal{F}(g)(\xi)} d\xi,$$

$f, g \in H^s(\mathbb{R}^N)$. Entre otras cosas, se da también que $\overline{\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)}^{H^s(\mathbb{R}^N)} = H^s(\mathbb{R}^N)$ (ver [12]).

Motivados por la Proposición 1.1.4 se introduce la siguiente noción de derivada fraccionaria.

Definición 1.2.2. Para $s > 0$ definimos la derivada fraccionaria de orden s de una función $f \in H^s(\mathbb{R}^N)$ por

$$D^s f(x) := \mathcal{F}^{-1}(|\xi|^s \mathcal{F}(f)(\xi))(x),$$

$x \in \mathbb{R}^N$.

D^s está bien definida ya que para $s > 0$ y $f \in H^s(\mathbb{R}^N)$ se cumple que $|\xi|^2 \leq 1 + |\xi|^2$ para todo $\xi \in \mathbb{R}^N$. Por lo tanto $|\xi|^{2s}|\mathcal{F}(f)(\xi)|^2 \leq (1+|\xi|^2)^s|\mathcal{F}(f)(\xi)|^2$, de donde $|\xi|^s\mathcal{F}(f) \in L^2(\mathbb{R}^N)$ y por el Teorema de Plancherel

$$\||\xi|^s\mathcal{F}(f)\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} = \|\mathcal{F}(D^s f)\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} = \|D^s f\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}$$

de modo que $D^s f \in L^2(\mathbb{R}^N)$.

Uno de los primeros hechos en los que podemos pensar es si esta noción de derivada tiene alguna coincidencia con la definición de derivada estándar. La respuesta es que no necesariamente coinciden. A saber, si $f(x) := e^{-\pi x^2} \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ entonces podemos calcular

$$D^1 f(\xi) = \mathcal{F}^{-1}(|x|\mathcal{F}(f)(x))(\xi) = \mathcal{F}(|-x|\mathcal{F}(f)(-x))(\xi) = \int_{\mathbb{R}} \cos(2\pi\xi x)|-x|\underbrace{\mathcal{F}(e^{-\pi x^2})}\, dx$$

$$= \int_{\mathbb{R}} \cos(2\pi\xi x)|x|\underbrace{e^{-\pi x^2}}\, dx$$

por otra parte $f'(x) = -2\pi x e^{-\pi x^2}$. Entonces $D^1 f$ es par mientras que f' es impar de manera que ambas funciones no pueden coincidir (observar que en el cálculo de $D^1 f$ se ha usaso que $\mathcal{F}(f) = f$).

D^s puede interpretarse como un tipo de derivada total en el siguiente sentido.

Proposición 1.2.3. *Sea $f \in L^2(\mathbb{R}^N;\mathbb{C})$. Entonces para cualquier $k \in \mathbb{N}$, $D^k f$ existe si y sólo si las derivadas débiles de las partes real e imaginaria de f existen y pertenecen a $L^2(\mathbb{R}^N;\mathbb{C})$. En particular para $f \in W^{k,2}(\mathbb{R}^N)$ se tiene que $\partial^\alpha f = \mathcal{F}^{-1}(\xi^\alpha(2\pi i)^{|\alpha|}\mathcal{F}(f))$, para todo $\alpha \in \mathbb{N}^N$ tal que $|\alpha| \leq k$.*

Prueba. Ver [7], Proposición 30. ☑

Observación 1.2.4. Es posible verificar (ver [7], observación 32) que para algunos valores especiales de s, el operador D^s proviene en efecto de un proceso de derivación: por ejemplo si tomamos $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ entonces por la Proposición 1.1.4 podemos expresar el laplaciano de u en términos de D^2

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(\Delta u)(\xi) = \sum_{j=1}^{N} \mathcal{F}(\partial^2_{x_j} u)(\xi) &= -4\pi^2 \sum_{j=1}^{N} \xi_j^2 \mathcal{F}(u)(\xi) \\ &= -4\pi^2 |\xi|^2 \mathcal{F}(u)(\xi).\end{aligned}$$

De donde $-\Delta u = 4\pi^2 \mathcal{F}^{-1}(|\cdot|^2 \mathcal{F}(u)) = (2\pi)^2 D^2 u$. Es esto motivación suficiente para una definición del Laplaciano fraccionario.

Definición 1.2.5. Para $s \in (0,1)$ y $u \in H^{2s}(\mathbb{R}^N)$, definimos el laplaciano fraccionario de u de orden s por

$$(-\Delta)^s(u) := (2\pi)^{2s} D^{2s} u.$$

Esta definición nos proporciona una manera de caracterizar el decaimiento de la transformada de Fourier en términos de regularidad:

Teorema 1.2.6. *Con la notación anterior, para $s \in (0,1)$*

$$H^{2s}(\mathbb{R}^N;\mathbb{C}) = \{u \in L^2(\mathbb{R}^N) : (-\Delta)^s u \in L^2(\mathbb{R}^N;\mathbb{C})\}.$$

Prueba. Ver [7], Observación 35. ☑

1.2.2. Una representación integral del Laplaciano Fraccionario.

Teniendo en mente ya una noción de derivada fraccionaria, mediante la definición 1.2.5, que nos permite establecer una relación decaimiento-regularidad para cierto espacio de funciones adecuado, surge allí en términos de esa derivada fraccionaria una clase de operadores no locales, lo que les hace tener alguna representación integral por lo menos para funciones lo suficientemente "buena".

Teorema 1.2.7. *Sean $s \in (0,1)$ y $(-\Delta)^s$ el operador laplaciano fraccionario. Entonces para toda*

$\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$

$$(-\Delta)^s\varphi(x) = \frac{C(N,s)}{2}\int\limits_{\mathbb{R}^N}\frac{2\varphi(x)-\varphi(x+y)-\varphi(x-y)}{|y|^{N+2s}}dy, \tag{1.2.1}$$

para todo $x \in \mathbb{R}^N$, donde $C(N,s)$ es una constante que depende solamente de N y s.

Prueba. Ver [7], Teorema 70 y Teorema 3.1.1. ☑

La ecuación (1.2.1) también se puede escribir, usando la distribución valor principal de $\frac{1}{x}$ de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}
(-\Delta)^s\varphi(x) &= \frac{C(N,s)}{2}\int\limits_{\mathbb{R}^N}\frac{2\varphi(x)-\varphi(x+y)-\varphi(x-y)}{|y|^{N+2s}}dy \\
&= \frac{C(N,s)}{2}\lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{B_\varepsilon^c(x)}\frac{2\varphi(x)-\varphi(x+y)-\varphi(x-y)}{|y|^{N+2s}}dy \\
&= \frac{C(N,s)}{2}\lim_{\varepsilon\to 0}\left[\int\limits_{B_\varepsilon^c(x)}\frac{\varphi(x)-\varphi(x+y)}{|y|^{N+2s}}dy + \int\limits_{B_\varepsilon^c(x)}\frac{\varphi(x)-\varphi(x-y)}{|y|^{N+2s}}dy\right] \\
&= \frac{C(N,s)}{2}\lim_{\varepsilon\to 0}\left[\int\limits_{B_\varepsilon^c(x)}\frac{\varphi(x)-\varphi(\eta)}{|x-\eta|^{N+2s}}d\eta + \int\limits_{B_\varepsilon^c(x)}\frac{\varphi(x)-\varphi(\zeta)}{|x-\zeta|^{N+2s}}d\xi\right] \\
&= C(N,s)\lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{B_\varepsilon^c(x)}\frac{\varphi(x)-\varphi(\eta)}{|x-\eta|^{N+2s}}d\eta \\
&= C(N,s)\text{v.p.}\int\limits_{\mathbb{R}^N}\frac{\varphi(x)-\varphi(y)}{|x-y|^{N+2s}}dy.
\end{aligned}$$

Observación 1.2.8. El laplaciano fraccionario tiene formulaciones también sobre dominios $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ más geneales, además de una formulación distribucional (ver [7], capítulo 4).

Capítulo 2

Presentación del resultado principal

De ahora y en adelante denotamos por B_R a la bola de centro 0 y radio R en $\mathbb{R}^N$, $R > 0$.

2.1. El problema de Cauchy asociado a g_λ

Comenzamos por recordar la definición del operador g_λ : para $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$, $g_\lambda[\varphi] := \mathcal{F}^{-1}(|\cdot|^\lambda \mathcal{F}(\varphi))$, $\lambda \in (0, 2)$.

Describimos con detalle los elementos principales de la ecuación diferencial parcial de interés. Aunque nuestro trabajo se restringe al caso $1 < \lambda < 2$, vale la pena mencionar que para $\lambda \leq 1$ se opta por resolver el p.v.i (1) en el sentido de soluciones de viscosidad, ver [[13], sección 3.2].

Sea $\lambda \in (1, 2)$ y consideremos el problema de valor incial

$$\begin{cases} \partial_t u(t,x) + g_\lambda[u(t,\cdot)](x) = F(t,x,u(t,x),\nabla u(t,x)), & (t,x) \in (0,+\infty) \times \mathbb{R}^N \\ \\ u(0,x) = u_0(x), & x \in \mathbb{R}^N, \end{cases} \tag{2.1.1}$$

donde $u_0 \in W^{1,\infty}(\mathbb{R}^N)$ y $F \in C^\infty([0,+\infty) \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N)$ satisfacen las siguientes condiciones

$\forall T > 0, \forall R > 0, \forall k \in \mathbb{N}$, existe $C_{T,R,k} > 0$ tal que para cada (t, x, s, ξ) en $[0, T] \times \mathbb{R}^N \times [-R, R] \times B_R$ y cada $\alpha \in \mathbb{N}^{2N+2}$ con $|\alpha| \leq k$, se tiene que

$$|\partial^\alpha F(t,x,s,\xi)| \leq C_{T,R,k}. \tag{2.1.2}$$

Observación 2.1.1. La parte no homogénea de (2.1.1), F, se suele conocer como el Hamiltoniano y se asume naturalmente regular ya que el propósito es buscar soluciones u que también tengan esta propiedad.

Para la formulación del resultado central se considerarán las siguientes dos suposiciones:

(i) Para todo $T > 0$, existe $\Lambda_T : [0, +\infty) \longrightarrow (0, +\infty)$ continua y no decreciente tal que

$$\int_0^\infty \frac{1}{\Lambda_T(a)} da = +\infty. \tag{2.1.3}$$

Además para todo $(t, x, s) \in [0, T] \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}$, se tiene que $\mathrm{sgn}(s)F(t, x, s, 0) \leq \Lambda_T(|s|)$.

(ii) Para todo $T > 0$ y para todo $R > 0$, existe $\Gamma_{T,R} : [0, +\infty) \longrightarrow (0, +\infty)$ continua y no decreciente tal que

$$\int_0^\infty \frac{1}{\Gamma_{T,R}(a)} da = +\infty. \tag{2.1.4}$$

A demás, para cada $(t, x, s, \xi) \in [0, T] \times \mathbb{R}^N \times [-R, R] \times \mathbb{R}^N$ se tiene que $|\xi|\partial_s F(t, x, s, \xi) \leq \Gamma_{T,R}(|\xi|)$ y $|\nabla_x F(t, x, s, \xi)| \leq \Gamma_{T,R}(|\xi|)$.

Definimos para cada $a \geq 0$,

$$\mathcal{L}_T(a) := \int_0^a \frac{1}{\Lambda_T(b)} db \quad \text{y} \quad \mathcal{G}_{T,R}(a) := \int_0^a \frac{1}{2N\Gamma_{T,R}(b)} db. \tag{2.1.5}$$

Observación 2.1.2. Teniendo en cuenta las condiciones sobre Λ_T y $\Gamma_{T,R}$ en (2.1.3) y (2.1.4), las funciones en (2.1.5) resultan ser difeomorfismos de clase $C^1([0, +\infty))$ y funciones no decrecientes.

Por ejemplo probemos la observación 2.1.2 para $\mathcal{L}_T$. Sea $a \in [0, +\infty)$. Como Λ_T es no decreciente y $\Lambda_T(0) \neq 0$, tenemos que si $b \geq 0$, $1/\Lambda_T(b) \leq 1/\Lambda_T(0)$. Luego $0 \leq \int_0^a \frac{1}{\Lambda_T(b)} db \leq \frac{a}{\Lambda_T(0)}$, tomando $\mathcal{L}_T$ el valor de 0 cuando $a = 0$ y siendo divergente la integral cuando $a \longrightarrow +\infty$ justo como se indica en (2.1.3). Así pues, $\mathcal{L}_T$ está bien definida. Por el Teorema fundamental del cálculo se tiene que $\frac{d}{da}\mathcal{L}_T(a) = \frac{1}{\Lambda_T}(a) > 0$, para todo $a \geq 0$ de manera que $\mathcal{L}_T$ es estrictamente creciente y en particular inyectiva. En resumen: $\mathcal{L}_T$ es uno a uno, clase C^1 y con derivada diferente de cero, es decir un difeomorfismo de clase C^1 en $[0. + \infty)$. [1]

En forma análoga y mediante (2.1.4) se comprueba que $\mathcal{G}_{T,R}$ es un difeomorfismo de clase C^1 y no decreciente en $[0, +\infty)$.

2.2. Existencia y unicidad de la solución de (2.1.1)

Luego de presentar el problema de valor inicial de interés (2.1.1) junto con una breve discusión sobre las principales hipótesis, enunciamos el resultado principal de esta tesis.

Teorema 2.2.1. *Sean $\lambda \in (1, 2)$, $u_0 \in W^{1,\infty}(\mathbb{R}^N)$ y F satisfaciendo (2.1.2),(2.1.3) y (2.1.4). Existe una única solución u de (2.1.1) en el siguiente sentido: para todo $T > 0$*

(i) $u \in C_b((0, T) \times \mathbb{R}^N)$, $\nabla u \in C_b((0, T) \times \mathbb{R}^N)^N$ y para todo $a \in (0, T)$, $u \in C_b^\infty((a, T) \times \mathbb{R}^N)$.

[1] En realidad lo que obtuvimos fueron las condiciones para lo que se conoce como un cambio de variables en $\mathbb{R}$, lo cual es equivalente a la noción de difeomorfismo ver [17, pág 147].

(ii) *u satisface la e.d.p. (2.1.1) en* $(0, T) \times \mathbb{R}^N$.

(iii) $u(t, \cdot) \longrightarrow u_0$ *uniformemente en* $\mathbb{R}^N$, *cuando* $t \longrightarrow 0$.

A demás, la solución verifica los siguientes estimativos: para todo $0 < t < T < \infty$,

$$\|u(t, \cdot)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} \leq (\mathcal{L}_T)^{-1}(t + \mathcal{L}_T(\|u_0\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)})) \tag{2.2.1}$$

y

$$\|Du(t, \cdot)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} \leq (\mathcal{G}_{T,R})^{-1}(t + \mathcal{G}_{T,R}(\|Du_0\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)})), \tag{2.2.2}$$

donde $\mathcal{L}_T$ *y* $\mathcal{G}_{T,R}$ *están definidos por (2.1.5),* $\|Du(t, \cdot)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} = \sum_{i=1}^N \|\partial_i u(t, \cdot)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)}$ *y* R *es cualquier cota superior de* $\|u\|_{L^\infty((0,T)\times\mathbb{R}^N)}$.

Para la prueba de este teorema abordaremos varias etapas: demostramos primero que el operador g_λ tiene una representación integral. Esto permite obtener por ejemplo los estimativos indicados arriba (ver Sección 3.2). La noción de solución débil se introduce en el Capítulo 4; buscamos primero soluciones de este tipo para posteriormente interpretarlas en el sentido del Teorema 2.2.1, verificando entre varias cosas que son soluciones suaves al regularizar por convolución con el kernel K_λ asociado al oprador g_λ (ver secciones 4.1 y 6.2).

Capítulo 3

Representación Integral de g_λ

La mayor parte de este capítulo está dedicado exclusivamente a obtener una representación integral del operador no local g_λ. Haremos uso principalmente de las propiedades de la transformada de Fourier. Posteriormente presentaremos una consecuencia fundamental (Proposición 3.2.1) que nos permitirá establecer uno de los estimativos *apriori* (el (2.2.2)) del Teorema 2.2.1 para la derivada de la solución. Veremos que la solución del problema de valor inicial (p.v.i.) (2.1.1) está motivada por la fórmula de Duhamel.

3.1. g_λ como operador integro-diferencial

Como se intuye de la Definición 1.2.5, el operador g_λ corresponde, salvo por una constante adecuada, al laplaciano fraccionario (ver [2] y [7]) por lo que toma todo el sentido e importancia una representación alterna integro-diferencial. El principal resultado del capítulo es el siguiente:

Teorema 3.1.1. *Sea $\lambda \in (0,2)$. Para toda $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$, $x \in \mathbb{R}^N$ y $r > 0$ se tiene que*

$$g_\lambda[\varphi](x) = -C_N(\lambda)\left(\int\limits_{B_r} \frac{\varphi(x+z) - \varphi(x) - \nabla\varphi(x)\cdot z}{|z|^{N+\lambda}}dz + \int\limits_{B_r^c} \frac{\varphi(x+z) - \varphi(x)}{|z|^{N+\lambda}}dz\right) \tag{3.1.1}$$

donde

$$C_N(\lambda) = \frac{\lambda\Gamma\left(\frac{N+\lambda}{2}\right)}{2\pi^{\frac{N}{2}+\lambda}\Gamma\left(1-\frac{\lambda}{2}\right)}. \tag{3.1.2}$$

La fórmula (3.1.1) puede particularizarse a dos casos:

(i) Si $\lambda \in (0,1)$, $r = 0$, podemos tomar

$$g_\lambda[\varphi](x) = -C_N(\lambda)\int\limits_{\mathbb{R}^N} \frac{\varphi(x+z) - \varphi(x)}{|z|^{N+\lambda}}dz.$$

(ii) Si $\lambda \in (1,2)$, $r = \infty$, podemos tomar

$$g_\lambda[\varphi](x) = -C_N(\lambda)\int\limits_{\mathbb{R}^N} \frac{\varphi(x+z) - \varphi(x) - \nabla\varphi(x)\cdot z}{|z|^{N+\lambda}}dz.$$

Prueba.

Dividimos la prueba en tres pasos:

Paso 1 (escribir g_λ como una convolución).

Supongamos primero que $\lambda \in (1,2)$. Como para toda $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ (ver Observación 1.2.4) $\mathcal{F}(\Delta\varphi) = -4\pi^2|\cdot|^2\mathcal{F}(\varphi)$, se tiene que

$$\begin{aligned} g_\lambda[\varphi] = \mathcal{F}^{-1}(|\xi|^\lambda \mathcal{F}(\varphi)(\xi))] = \mathcal{F}^{-1}\left[|\xi|^\lambda\left(-\frac{1}{4\pi^2|\xi|^2}\mathcal{F}(\Delta\varphi)(\xi)\right)\right] \\ = -\frac{1}{4\pi^2}\mathcal{F}^{-1}[|\xi|^{\lambda-2}\mathcal{F}(\Delta\varphi)(\xi)]. \end{aligned} \tag{3.1.3}$$

Puesto que $1 < \lambda < 2$ y $N \geq 1$ entonces $-N < \lambda - 2 < 0$. Luego es $|\cdot|^{\lambda-2}$ localmente integrable; es decir $|\cdot|^{\lambda-2}\phi \in L^1(\mathbb{R}^N)$, para todo $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N) \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$: si usamos un cambio de variables $\rho = |x|$, se obtiene que

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^N} |x|^{\lambda-2}|\phi(x)|dx &= \int_{|x|\leq 1} |x|^{\lambda-2}|\phi(x)|dx + \int_{|x|>1} \frac{|x|^N|\phi(x)|}{|x|^N}|x|^{\lambda-2}dx \\ &\leq C\int_{|x|\leq 1} |x|^{\lambda-2}dx + C'\int_{|x|>1} |x|^{\lambda-2-N}dx \\ &= C\int_0^1 \rho^{(\lambda-2)+N-1}d\rho + C'\int_1^\infty \frac{1}{\rho^{3-\lambda}}d\rho < \infty, \quad (\rho = |x|) \end{aligned}$$

ya que como $-N < \lambda - 2 < 0$ entonces $-1 < (\lambda-2) + N - 1 < N - 1$ y $1 < 3 - \lambda < N + 1$.

Entonces es posible calcular $\mathcal{F}^{-1}(|x|^{\lambda-2})$ en el sentido distribucional. Por la Proposición 1.1.8 $|x|^{\lambda-2}$ define una distribución temperada para $x \in \mathbb{R}^N \setminus \{0\}$ con transformada de Fourier inversa $\mathcal{F}^{-1}(|x|^{\lambda-2}) = c_N(\lambda)|\xi|^{-N-(\lambda-2)}$, donde $c_N(\lambda)$ es una constante positiva que depende solo de N y λ. Además para toda $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$ y $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$, $\mathcal{F}^{-1}(T)(\varphi) = \mathcal{F}(T)(\varphi(-\cdot)) = T(\mathcal{F}(\varphi(-\cdot)))$, usando el cambio de variables $y = -x$ tenemos que, [1]

$$\begin{aligned} \mathcal{F}^{-1}(|\cdot|^{\lambda-2})(\varphi) &= \mathcal{F}(|-\cdot|^{\lambda-2}\varphi(-\cdot)) \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} \frac{1}{|x|^{2-\lambda}}\mathcal{F}(\varphi(-x))dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} \frac{1}{|y|^{2-\lambda}}\mathcal{F}(\varphi(y))dy \\ &= c_N(\lambda)\int_{\mathbb{R}^N} \frac{1}{|\xi|^{N-(2-\lambda)}}\varphi(\xi)d\xi = c_N(\lambda)|\cdot|^{-N-(\lambda-2)}. \end{aligned} \tag{3.1.4}$$

[1] Aunque esto hace parte de la Proposición 1.1.8, aquí damos una prueba de este resultado.

Determinemos el valor de la constante $c_N(\lambda)$ usando la función de prueba $e^{-\pi|x|^2} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$, que es un punto fijo de la transformada de Fourier. Empleamos la parte (3) de la Proposición 1.1.1 en $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$ (en el sentido de la distribución T_f, $f \in L^1(\mathbb{R}^N)$) se obtiene

$$\int_{\mathbb{R}^N} |x|^{\lambda-2} e^{-\pi|x|^2} dx = \int_{\mathbb{R}^N} |x|^{\lambda-2} \mathcal{F}^{-1}(e^{-\pi|x|^2}) dx$$

$$= \int_{\mathbb{R}^N} \mathcal{F}^{-1}(|x|^{\lambda-2}) e^{-\pi|x|^2} dx$$

$$= c_N(\lambda) \int_{\mathbb{R}^N} |x|^{-N-(\lambda-2)} e^{-\pi|x|^2} dx.$$

La anterior igualdad la podemos reescribir como

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_{\varepsilon\leq|x|\leq 1/\varepsilon} |x|^{\lambda-2} e^{-\pi|x|^2} dx = c_N(\lambda) \lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_{\varepsilon\leq|x|\leq 1/\varepsilon} |x|^{-N-(\lambda-2)} e^{-\pi|x|^2} dx,$$

Aplicando coordenadas esféricas a la igualdad anterior ($\rho = |x|$) nos queda

$$\int_0^\infty \rho^{\lambda-2} e^{-\pi\rho^2} \rho^{N-1} d\rho = c_N(\lambda) \int_0^\infty \rho^{-N-(\lambda-2)} \rho^{N-1} e^{-\pi\rho^2} d\rho,$$

que equivale a

$$\int_0^\infty \rho^{N+\lambda-4} e^{-\pi\rho^2} \rho d\rho = c_N(\lambda) \int_0^\infty \rho^{-\lambda} e^{-\pi\rho^2} \rho d\rho.$$

Haciendo el cambio de variables $\tau = \pi\rho^2$ con $d\tau/2\pi = \rho d\rho$, la ecuación anterior se transforma en

$$\int_0^\infty \left(\frac{\tau}{\pi}\right)^{\left(\frac{N+\lambda-4}{2}\right)} e^{-\tau} \frac{d\tau}{2\pi} = c_N(\lambda) \int_0^\infty \left(\frac{\tau}{\pi}\right)^{-\frac{\lambda}{2}} e^{-\tau} \frac{d\tau}{2\pi},$$

$$\frac{\pi^{-(N+\lambda-4)/2}}{2\pi} \int_0^\infty \tau^{\left(\frac{N+\lambda-2}{2}-1\right)} e^{-\tau} d\tau = \frac{c_N(\lambda)\pi^{\lambda/2}}{2\pi} \int_0^\infty \tau^{\left(1-\frac{\lambda}{2}\right)-1} e^{-\tau} d\tau,$$

$$\frac{\pi^{-(N+\lambda-4)/2}}{2\pi} \Gamma\left(\frac{N+\lambda}{2} - 1\right) = \frac{c_N(\lambda)\pi^{\lambda/2}}{2\pi} \Gamma\left(1 - \frac{\lambda}{2}\right),$$

de donde

$$c_N(\lambda) = \frac{\Gamma\left(\frac{N+\lambda}{2} - 1\right)}{\Gamma\left(1 - \frac{\lambda}{2}\right) \pi^{\frac{N}{2}+\lambda-2}}. \tag{3.1.5}$$

Recordemos que para $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$ y $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ se define $(T * \varphi)(x) := T(\varphi(x - \cdot))$, $x \in \mathbb{R}^N$ y además $\mathcal{F}(T * \varphi) = \mathcal{F}(\varphi)\mathcal{F}(T)$ (ver Proposición 1.1.8). En nuestro caso tenemos que

$$|\cdot|^{\lambda-2} \mathcal{F}(\Delta\varphi) = \mathcal{F}(\mathcal{F}^{-1}(|\cdot|^{\lambda-2}))\mathcal{F}(\Delta\varphi)$$

$$= \mathcal{F}(\mathcal{F}^{-1}(|\cdot|^{\lambda-2}) * \Delta\varphi),$$

que al tomar transformada inversa, multiplicando por $-1/4\pi^2$ nos queda en el lado derecho (3.1.3) y

$$\begin{aligned} g_\lambda[\varphi] &= -\frac{1}{4\pi^2}\mathcal{F}^{-1}(|\cdot|^{\lambda-2}) * \Delta\varphi \\ &= -\frac{1}{4\pi^2}c_N(\lambda)|\cdot|^{-N-(\lambda-2)} * \Delta\varphi && \text{(por 3.1.4)} \\ &= -\frac{1}{4\pi^2}\frac{\Gamma\left(\frac{N+\lambda}{2}-1\right)}{\Gamma\left(1-\frac{\lambda}{2}\right)\pi^{\frac{N}{2}+\lambda-2}}|\cdot|^{-N-(\lambda-2)} * \Delta\varphi && \text{(por 3.1.5)} \\ &= -\frac{\Gamma\left(\frac{N+\lambda}{2}-1\right)}{4\pi^{\frac{N}{2}+\lambda}\Gamma\left(1-\frac{\lambda}{2}\right)}|\cdot|^{-N-(\lambda-2)} * \Delta\varphi. \end{aligned} \tag{3.1.6}$$

Paso 2 (prueba de (3.1.1) para $1<\lambda<2$).

Sean $r>0, \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N), x \in \mathbb{R}^N$ y definamos $\phi_x(z) := \varphi(x+z) - \varphi(x) - \nabla\varphi(x)\cdot z\theta(z)$, donde $\theta \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ que es par e igual a 1 en $B_r(0)$.
El laplaciano de ϕ_x con respecto a z es

$$\begin{aligned} \Delta_z\phi_x(z) &= \Delta_z\varphi(x+z) - \Delta_z(\nabla_x\varphi(x)\cdot\theta(z)) \\ &= \Delta_z\varphi(x+z) - \nabla_x\varphi(x)\cdot\Delta(z\theta(z)), \end{aligned} \tag{3.1.7}$$

donde la segunda igualdad (segundo término) se justifica a continuación:

$$\nabla_z\varphi(x)\cdot z\theta(z) = \langle\partial\varphi/\partial x_1, \cdots, \partial\varphi/\partial x_N\rangle\cdot\langle z_1\theta(z), \cdots, z_N\theta(z)\rangle = \sum_{i=1}^N \frac{\partial\varphi(x)}{\partial x_i}z_i\theta(z),$$

de modo que

$$\begin{aligned} \Delta_z(\nabla_x\varphi(x)\cdot z\theta(z)) &= \nabla_z\cdot\nabla_z(\nabla_x\varphi(x)\cdot z\theta(z)) \\ &= \nabla_x\varphi(x)\cdot\left(\sum_{j=1}^N\frac{\partial^2}{\partial z_j^2}\right)\langle z_1\theta(z), \cdots, z_N\theta(z)\rangle \\ &= \nabla_x\varphi(x)\cdot(\nabla_z\cdot\nabla_z)(z\theta(z)) = \nabla_x\varphi(x)\cdot\Delta_z(z\theta(z)). \end{aligned}$$

Sea $\beta := -N-(\lambda-2) \in (-N,0)$ ($|\cdot|^\beta$es localmente integrable). Mediante el cambio de variables $z=-w$ y (3.1.7),

$$\begin{aligned} |\cdot|^{-N-(\lambda-2)} * \Delta\varphi(x) &:= (|\cdot|^{-N-(\lambda-2)}(\Delta\varphi(x-\cdot))) \\ &= \int_{\mathbb{R}^N}|w|^\beta\Delta_w\varphi(x-w)dw \\ &= \int_{\mathbb{R}^N}|z|^\beta\Delta_z\varphi(x+z)dz \\ &= \int_{\mathbb{R}^N}|z|^\beta\Delta_z\phi_x(z)dz + \nabla_x\varphi(x)\cdot\int_{\mathbb{R}^N}|z|^\beta\Delta_z(z\theta(z))dz. \end{aligned} \tag{3.1.8}$$

Observemos que todas las funciones en la última igualdad de (3.1.8) son integrables ya que $\Delta\varphi(x+z)$ y $\Delta(z\theta(z))$ están en $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ (recordar que $\theta \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$) y $\beta \in (-N, 0)$ (por ende $\int_{\mathbb{R}^N} |z|^\beta \Delta\phi_x(z)dz$ existe). Veámoslo,

$$\begin{aligned}
\int\limits_{\mathbb{R}^N} |z|^\beta |\Delta_z\varphi(x+z)|dz &= \int\limits_{|z|\le 1} |\Delta_z\varphi(x+z)||z|^\beta dz + \int\limits_{|z|>1} |z|^N |\Delta_z\varphi(x+z)| \frac{|z|^\beta}{|z|^N} dz \\
&\le \sup_{\mathbb{R}^N}(|\Delta_z\varphi(x+\cdot)|) \int\limits_{|z|\le 1} |z|^\beta dz + \sup_{\mathbb{R}^N}(|\cdot|^N |\Delta_z\varphi(x+\cdot)|) \int\limits_{|z|>1} |z|^{\beta-N} dz \\
&= \sup_{\mathbb{R}^N}(|\Delta_z\varphi(x+\cdot)|) \int_0^1 \rho^{\beta+N-1} d\rho + \sup_{\mathbb{R}^N}(|\cdot|^N |\Delta_z\varphi(x+\cdot)|) \int_1^\infty \frac{1}{\rho^{1-\beta}} d\rho \\
&< \infty \quad (\rho = |z|),
\end{aligned}$$

ya que al ser $-N < \beta < 0$ se tiene que $\beta + N - 1 > -1$ y $1 - \beta > 1$.

Además, como θ es par entonces la función $z \longmapsto \Delta_z(z\theta(z))$ es impar (Δ_z lineal) y usando que $\theta \equiv 1$ en $B_r(0)$ tenemos

$$\int\limits_{\mathbb{R}^N} |z|^\beta \Delta_z(z\theta(z))dz = \int\limits_{B_r(0)} |z|^\beta \Delta_z(z)dz + \int\limits_{\mathbb{R}^N \setminus B_r(0)} |z|^\beta \Delta_z(z\theta(z))dz = 0, \quad (\Delta_z(z) = 0).$$

Por lo tanto

$$|\cdot|^{-N-(\lambda-2)} * \Delta_z\varphi(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^N} |z|^\beta \Delta_z\phi_x(z)dz = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \int\limits_{\varepsilon\le|z|\le 1/\varepsilon} |z|^\beta \Delta_z\phi_x(z)dz. \tag{3.1.9}$$

Para estimar el límite en (3.1.9), definamos $C_\varepsilon := \{z \in \mathbb{R}^N : \varepsilon \le |z| \le 1/\varepsilon\}$. Este conjunto es acotado con frontera de clase C^1. Por las fórmulas de Green (ver [18], Apéndice C)

$$\int\limits_{C_\varepsilon} (|z|^\beta \Delta_z\phi_x(z) - \phi_x(z)\Delta_z(|z|^\beta))dz = \int\limits_{\partial C_\varepsilon} [|z|^\beta \nabla_z\phi_x(z)\cdot\mathbf{n}(z) - \phi_x(z)\nabla_z(|z|^\beta)\cdot\mathbf{n}(z)] d\sigma_\varepsilon(z),$$

de donde

$$\int\limits_{C_\varepsilon} |z|^\beta \Delta_z\phi_x(z)dz = \int\limits_{C_\varepsilon} \Delta_z(|z|^\beta)\phi_x(z)dz + \int\limits_{\partial C_\varepsilon} [|z|^\beta \nabla_z\phi_x(z)\cdot\mathbf{n}(z) - \phi_x(z)\nabla_z(|z|^\beta)\cdot\mathbf{n}(z)] d\sigma_\varepsilon(z), \tag{3.1.10}$$

siendo σ_ε la medida $(N-1)$ - dimensional sobre $\partial C_\varepsilon = S_\varepsilon \cup S_{1/\varepsilon}$ (aquí $S_a = \{z \in \mathbb{R}^N : |z| = a\}$ es la esfera $(N-1)$ - dimensional de radio $a > 0$) y $\mathbf{n}$ es el vector normal unitario apuntando hacia afuera de C_ε.

Estimemos las dos integrales sobre la frontera en (3.1.10) para ver que en el límite cuando $\varepsilon \longrightarrow 0^+$, son iguales a 0. Notemos que en una vecindad del 0, $\phi_x(z) = \varphi(x+z) - \varphi(x) - \nabla\varphi(x)\cdot z$ ($\theta = 1$ en S_ε para $\varepsilon < r$.). Por el Teorema de Taylor $\phi_x(z)$ corresponde al resto de la expansión de segundo orden de φ alrededor de x con lo cual $\phi_x(z) = \mathcal{O}(|z|^2)$ y $\nabla_z\phi_x(z) = \mathcal{O}(|z|)$. Por lo tanto, existen constantes $C_1, C_2 > 0$ tales que $|\nabla_z\phi_x(z)| \leq C_1|z|$ y $|\phi_x(z)| \leq C_2|z|^2$ para z en una vecindad del 0.

De lo anterior, la desigualdad de Cauchy-Schwarz y el hecho de que $|\nabla_z(|z|^\beta)| = |\beta||z|^{\beta-1}$ se tiene que, en una vecindad del 0,

$$
\begin{aligned}
\left|\left[|z|^\beta\nabla_z\phi_x(z) - \phi_x(z)\nabla_z(|z|^\beta)\right]\cdot\mathbf{n}(z)\right| &\leq \left||z|^\beta\nabla_z\phi_x(z) - \phi_x(z)\nabla_z(|z|^\beta)\right| \\
&\leq |z|^\beta|\nabla_z\phi_x(z)| + |\beta||z|^{\beta-1}|\phi_x(z)| \\
&\leq |z|^\beta C_1|z| + |\beta||z|^{\beta-1}C_2|z|^2 \\
&= |z|^{\beta+1}(C_1 + |\beta|C_2),
\end{aligned}
\tag{3.1.11}
$$

y con esto

$$
\begin{aligned}
\left|\int_{S_\varepsilon}[|z|^\beta\nabla_z\phi_x(z) - \phi_x(z)\nabla_z(|z|^\beta)\cdot\mathbf{n}(z)]d\sigma_\varepsilon(z)\right| &\leq \int_{S_\varepsilon}\left||z|^\beta\nabla_z\phi_x(z) - \phi_x(z)\nabla_z(|z|^\beta)\right|d\sigma_\varepsilon(z) \\
&\leq \int_{\{|z|=\varepsilon\}}(C_1 + |\beta|C_2)|z|^{\beta+1}d\sigma_\varepsilon(z) \\
&= C\varepsilon^{\beta+1}\varepsilon^{N-1} = C\varepsilon^{\beta+N} \longrightarrow 0
\end{aligned}
\tag{3.1.12}
$$

cuando $\varepsilon \longrightarrow 0^+$ ya que $\beta + N = 2 - \lambda > 0$.

De otra parte, por fuera de una vecindad del origen y lo suficientemente lejos tal que $z \notin \text{supp}(\theta)$, $\phi_x(z) = \varphi(x+z) - \varphi(x)$ y $\nabla\phi_x(z) = \nabla\varphi(x+z)$. Esta última función es rápidamente decreciente y ϕ_x es acotada ($\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$) de modo que podemos estimar la integral en (3.1.10) que corresponde a $S_{1/\varepsilon}$ con un procedimiento similar al de (3.1.11):

$$
\begin{aligned}
\left|\left[|z|^\beta\nabla_z\phi_x(z) - \phi_x(z)\nabla_z(|z|^\beta)\right]\cdot\mathbf{n}(z)\right| &\leq |z|^\beta|\nabla_z\varphi(x+z)| + |\beta||z|^{\beta-1}|\phi_x(z)| \\
&\leq C\sup_{S_{1/\varepsilon}}|\nabla_z\varphi(x+\cdot)||z|^\beta + \check{C}|\beta||z|^{\beta-1} \\
&\leq C\sup_{\mathbb{R}^N}|\nabla_z\varphi(x+\cdot)||z|^\beta + \tilde{C}|z|^{\beta-1},
\end{aligned}
$$

de donde

$$
\begin{aligned}
&\left|\int_{S_{1/\varepsilon}}[|z|^\beta\nabla_z\phi_x(z) - \phi_x(z)\nabla_z(|z|^\beta)]\cdot\mathbf{n}(z)d\sigma_\varepsilon(z)\right| \\
&\leq \int_{\{|z|=\varepsilon^{-1}\}}\left(C\sup_{\mathbb{R}^N}|\nabla_z\varphi(x+\cdot)||z|^\beta + \tilde{C}|z|^{\beta-1}\right)d\sigma_\varepsilon(z)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= C \sup_{\mathbb{R}^N} |\nabla_z \varphi(x+\cdot)| (\varepsilon^{-1})^{\beta} (\varepsilon^{-1})^{N-1} + \tilde{C} (\varepsilon^{-1})^{\beta-1} (\varepsilon^{-1})^{N-1} \\
&= C \sup_{\mathbb{R}^N} |\nabla_z \varphi(x+\cdot)| \left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^{N-1+\beta} + \tilde{C} \varepsilon^{-(N-1)-(\beta-1)} \qquad (3.1.13) \\
&\longrightarrow 0,
\end{aligned}
$$

cuando $\varepsilon \longrightarrow 0^+$ ya que $N-1+\beta = 1-\lambda < 0$ y $-(N-1)-(\beta-1) = \lambda > 0$.

Calculemos de manera explícita $\Delta(|z|)^\beta$ con el fin de que cuando pasemos al límite en (3.1.10), nos acerquemos a (3.1.9) y podamos ir concluyendo la correspondiente representación de g_λ indicada en (3.1.1).

Como $|z|^\beta = \left[\sum_{i=1}^N z_i^2\right]^{\beta/2}$, entonces

$$
\frac{\partial |z|^\beta}{\partial z_i} = \frac{\beta}{2} \left[\sum_{i=1}^N z_i^2\right]^{\frac{\beta}{2}-1} 2z_i = \beta z_i \left[\sum_{i=1}^N z_i^2\right]^{\frac{\beta}{2}-1} \quad \text{y}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial^2 |z|^\beta}{\partial z_i^2} &= \beta \left(\frac{\beta-2}{2}\right) \left[\sum_{i=1}^N z_i^2\right]^{\frac{\beta}{2}-2} 2z_i z_i + \beta \left[\sum_{i=1}^N z_i^2\right]^{\frac{\beta}{2}-1} \\
&= \beta(\beta-2)(|z|^2)^{\frac{\beta}{2}-2} z_i^2 + \beta(|z|^2)^{\frac{\beta}{2}-1} \\
&= \beta(\beta-2)|z|^{\beta-4} z_i^2 + \beta |z|^{\beta-2},
\end{aligned}
$$

luego

$$
\begin{aligned}
\Delta(|z|^\beta) = \sum_{i=1}^N \frac{\partial^2 |z|^\beta}{\partial z_i^2} &= \beta(\beta-2)|z|^{\beta-4} \sum_{i=1}^N z_i^2 + \sum_{i=1}^N \beta |z|^2 \\
&= \beta(\beta-2)|z|^{\beta-2} + N\beta |z|^{\beta-2} \qquad (3.1.14) \\
&= \beta(N+\beta-2)|z|^{\beta-2}.
\end{aligned}
$$

Puesto que $\beta = -N-\lambda+2, N+\beta-2 = -\lambda$, y se tiene que $\beta(N+\beta-2) = -\lambda\beta$ y por lo tanto

$$
\beta(N+\beta-2) = -\lambda(-N-\lambda+2) = (N+\lambda-2)\lambda.
$$

También $\beta - 2 = -N - \lambda$. De lo anterior y (3.1.14)

$$
\int_{C_\varepsilon} \Delta(|z|^\beta) \phi_x(z) dz = (N+\lambda-2)\lambda \int_{C_\varepsilon} |z|^{-N-\lambda} \phi_x(z) dz. \qquad (3.1.15)
$$

Usando de nuevo que $\phi_x(z) = \mathcal{O}(|z|^2)$ en una vecindad del 0 y que ϕ_x es acotada en $\mathbb{R}^N$ podemos comprobar que la función en la integral del lado derecho de (3.1.15) es integrable en $\mathbb{R}^N$:

$$\int_{\mathbb{R}^N} |z|^{-N-\lambda}|\phi_x(z)|dz = \int_{|z|\le R} |z|^{-N-\lambda}|\phi_x(z)|dz + \int_{|z|>R} |z|^{-N-\lambda}|\phi_x(z)|dz \quad (R>0)$$

$$\le C\int_{|z|\le R} |z|^{-N-\lambda+2}dz + \tilde{C}\int_{|z|>R} |z|^{-N-\lambda}dz$$

$$= C\int_0^R \rho^{1-\lambda}d\rho + \tilde{C}\int_R^\infty \frac{1}{\rho^{\lambda+1}}d\rho < \infty, \qquad (\rho = |z|)$$

porque $1<\lambda<2$ ($-1<1-\lambda<0$ y $\lambda+1>2$). Además hemos usado $R<r$ tal que $\phi_x(z)=\mathcal{O}(|z|^2)$.

Pasando al límite en (3.1.10) tenemos por (3.1.12), (3.1.13) y (3.1.15) que

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_{C_\varepsilon} |z|^\beta \Delta\phi_x(z)dz = \lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_{C_\varepsilon} \Delta(|z|^\beta)\phi_x(z)dz \qquad \text{(por (3.1.12) y (3.1.13))}$$

$$= \lambda(N+\lambda-2)\lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_{C_\varepsilon} |z|^{-N-\lambda}\phi_x(z)dz. \qquad \text{(por (3.1.15))}$$

Al combinar la ecuación anterior con (3.1.9) y por el Teorema de la Convergencia Dominada, obtenemos

$$|\cdot|^{-N-(\lambda-2)} * \Delta\varphi(x) = \lambda(N+\lambda-2)\int_{\mathbb{R}^N} |z|^{-N-\lambda}\phi_x(z)dz$$

$$= \lambda(N+\lambda-2)\int_{B_r} \frac{\varphi(x+z)-\varphi(x)-\nabla\varphi(x)\cdot z}{|z|^{N+\lambda}}dz$$

$$+ \lambda(N+\lambda-2)\int_{\mathbb{R}^N\setminus B_r} \frac{\varphi(x+z)-\varphi(x)-\nabla\varphi(x)\cdot\theta(z)}{|z|^{N+\lambda}}dz,$$

donde hemos usado de nuevo que $\theta=1$ en B_r.

Notemos que en $\mathbb{R}^N\setminus B_r$ las funciones $z\mapsto |z|^{-N-\lambda}(\varphi(x+z)-\varphi(x))$ y $z\mapsto |z|^{-N-\lambda}(z)\theta(z)$ son integrables. La primera porque $\varphi(x+\cdot)-\varphi(x)$ es acotada y $|\cdot|^{-N-\lambda}$ es integrable en dicho conjunto; la segunda porque $\theta\in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)\subset\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ es acotada y $|\cdot|^{-N-\lambda+1}$ es integrable en B_r^c ($\int_r^\infty \rho^{-\lambda)}d\rho<\infty$, $\lambda>1$). De acuerdo a lo anterior podemos escribir

$$\int_{\mathbb{R}^N\setminus B_r} \frac{\varphi(x+z)-\varphi(x)-\nabla\varphi(x)\cdot z\theta(z)}{|z|^{N+\lambda}}dz = \int_{\mathbb{R}^N\setminus B_r} \frac{\varphi(x+z)-\varphi(x)}{|z|^{N+\lambda}}dz - \nabla\varphi(x)\cdot\int_{\mathbb{R}^N\setminus B_r} \frac{z\theta(z)}{|z|^{N+\lambda}}dz,$$

pero la función $z\theta(z)|z|^{-N-\lambda-1}$ es impar de modo que su integral es 0 sobre el dominio simétrico

B_r^c y concluimos que

$$|\cdot|^{-N-(\lambda-2)} * \Delta\varphi(x) = \lambda(N+\lambda-2)\int\limits_{B_r} \frac{\varphi(x+z)-\varphi(x)-\nabla\varphi(x)\cdot z}{|z|^{N+\lambda}}dz$$

$$+\lambda(N+\lambda-2)\int\limits_{\mathbb{R}^N\setminus B_r} \frac{\varphi(x+z)-\varphi(x)}{|z|^{N+\lambda}}dz.$$

Combinando esta última ecuación con (3.1.6) obtenemos que

$$g_\lambda[\varphi](x) = -\frac{\Gamma\left(\frac{N+\lambda}{2}-1\right)}{4\pi^{\frac{N}{2}+\lambda}\Gamma\left(1-\frac{\lambda}{2}\right)}|\cdot|^{-N-(\lambda-2)} * \Delta\varphi(x)$$

$$= \frac{-\Gamma\left(\frac{N+\lambda}{2}-1\right)\lambda(N+\lambda-2)}{4\pi^{\frac{N}{2}+\lambda}\Gamma\left(1-\frac{\lambda}{2}\right)}\left(\int\limits_{B_r} \frac{\varphi(x+z)-\varphi(x)-\nabla\varphi(x)\cdot z}{|z|^{N+\lambda}}dz + \int\limits_{B_r^c} \frac{\varphi(x+z)-\varphi(x)}{|z|^{N+\lambda}}dz\right)$$

$$= -C_N(\lambda)\left(\int\limits_{B_r} \frac{\varphi(x+z)-\varphi(x)-\nabla\varphi(x)\cdot z}{|z|^{N+\lambda}}dz + \int\limits_{B_r^c} \frac{\varphi(x+z)-\varphi(x)}{|z|^{N+\lambda}}dz\right),$$

en donde hemos usado la propiedad de la función gamma, $\Gamma(\alpha) = (\alpha-1)\Gamma(\alpha-1)$, para el valor de $C_N(\lambda)$ indicado en (3.1.2).

Paso 3 (prueba de (3.1.1) para $0 < \lambda \leq 1$).

Sean $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$, $x \in \mathbb{R}^N$ y consideremos la banda $E = \{\lambda \in \mathbb{C} : 0 < \mathrm{Re}(\lambda) < 2\}$. Como $\mathcal{F}(\varphi) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$, tenemos que para todo $\lambda \in E$

$$||\cdot|^\lambda \mathcal{F}(\varphi)| = |\cdot|^{\mathrm{Re}(\lambda)}|\mathcal{F}(\varphi)| \leq (1+|\cdot|^2)|\mathcal{F}(\varphi)| \in L^1(\mathbb{R}^N),$$

ya que como $0 < \mathrm{Re}(\lambda) < 2$ si $|\cdot| < 1$, entonces $|\cdot|^2 \leq |\cdot|^{\mathrm{Re}(\lambda)} \leq 1 < 1+|\cdot|^2$ y si $|\cdot| > 1$, entonces $1 \leq |\cdot|^{\mathrm{Re}(\lambda)} \leq |\cdot|^2 < 1+|\cdot|^2$; además $(1+|\cdot|^2)\mathcal{F}(\varphi) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N) \subset L^1(\mathbb{R}^N)$.

Consideremos la función $(\lambda,\xi) \mapsto e^{2\pi i x\cdot\xi}|\xi|^\lambda \mathcal{F}(\varphi)(\xi) \in \mathbb{C}$, $(\lambda,\xi) \in E \times \mathbb{R}^N$. Vamos a verificar que esta función cumple todas las hipótesis del teorema de diferenciación compleja bajo el signo integral (ver [21, pág 32]). Esta función es holomorfa en E y medible como función de $\xi \in \mathbb{R}^N$. Del razonamiento anterior se tiene que $\lambda \mapsto \int_{\mathbb{R}^N} \left|e^{2\pi i x\cdot\xi}|\xi|^\lambda \mathcal{F}(\varphi)(\xi)\right| d\xi$ es localmente acotada, pues

$$\int\limits_{\mathbb{R}^N} \left|e^{2\pi i x\cdot\xi}|\xi|^\lambda \mathcal{F}(\varphi)(\xi)\right| d\xi \leq \int\limits_{\mathbb{R}^N} (1+|\xi|^2)\mathcal{F}(\varphi)(\xi)d\xi < \infty. \tag{3.1.16}$$

El lado derecho de (3.1.16) es independiente de λ, se sigue que para $\lambda_0 \in E$, existe $\delta > 0$ (por continuidad) tal que

$$\sup_{\lambda_0\in E, |\lambda-\lambda_0|<\delta} \int\limits_{\mathbb{R}^N} \left|e^{2\pi i x\cdot\xi}|\xi|^\lambda \mathcal{F}(\varphi)(\xi)\right| d\xi < \infty,$$

$\delta > 0$. Por el teorema de diferenciación compleja bajo el signo integral se sigue que la función

$$\lambda \mapsto g_\lambda[\varphi](x) = \int\limits_{\mathbb{R}^N} e^{2\pi i x\cdot\xi}|\xi|^\lambda \mathcal{F}(\varphi)(\xi)d\xi = \mathcal{F}^{-1}(|\cdot|^\lambda \mathcal{F}(\varphi))(x)$$

es holomorfa en E. De modo que el lado izquierdo de (3.1.1) es holomorfo en E.

Veamos ahora que el lado derecho de (3.1.1) es holomorfa en E. Notemos que para todo a y b tales que $0 < a \leq \mathrm{Re}(\lambda) \leq b < 2$, los integrandos en (3.1.1) están acotados por funciones integrables que dependen solo de a y de b (con el fin de aplicar nuevamente holomorfía bajo el signo integral). En efecto, si $|z| < r$ (este $r > 0$ no es el mismo del paso 2, simplemente es un r genérico como en el enunciado del Teorema) se tiene que $||z|^\lambda| = |z|^{\mathrm{Re}(\lambda)} \geq r^{\mathrm{Re}(\lambda)-b}|z|^b \geq c_{r,b}|z|^b$ ya que $\mathrm{Re}(\lambda) - b \leq 0$ por tanto $|z|^{\mathrm{Re}(\lambda)-b} \geq r^{\mathrm{Re}(\lambda)-b}$. De otra parte si $|z| \geq r$, dado que $\mathrm{Re}(\lambda) - a \geq 0$ tenemos $|z|^{\mathrm{Re}(\lambda)-a} \geq r^{\mathrm{Re}(\lambda)-a}$ y por lo tanto $||z|^\lambda| \geq |z|^{\mathrm{Re}(\lambda)} \geq c'_{r,a}|z|^a$.

De lo anterior y usando el Teorema de Taylor con residuo en forma integral (ver [10, pág 3]) aplicado a φ, para todos los multi-índices $\alpha \in \mathbb{N}^N$ de longitud 2

$$\int_{B_r} \left| \frac{\varphi(x+z) - \varphi(x) - \nabla\varphi(x) \cdot z}{|z|^{N+\lambda}} \right| dz = \int_{B_r} \frac{\left|2 \sum_{|\alpha|=2} \frac{z^\alpha}{2} \int_0^1 (1-t) D^2\varphi(x+tz)dt\right|}{|z|^N ||z|^\lambda|}$$

$$\leq C_{r,b} \|D^2\varphi\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} \int_{B_r} \frac{|z|^2}{|z|^N |z|^b} dz = C \int_{B_r} \frac{dz}{|z|^{N+b-2}} = C \int_0^r \rho^{1-b} d\rho < \infty \quad (\rho = |z| \ \text{ y } \ 1 - b > -1),$$

para algún $t \in (0,1)$. Por otra parte

$$\int_{B_r^c} \frac{|\varphi(x+z) - \varphi(x)|}{||z|^{N+\lambda}|} dz = \int_{B_r^c} \frac{|\varphi(x+z) - \varphi(x)|}{|z|^N ||z|^\lambda|} dz \leq C'_{r,a} \int_{B_r^c} \frac{|\varphi(x+z) - \varphi(x)|}{|z|^{N+a}} dz$$

$$\leq C'_{r,a} \int_{B_r^c} \frac{2\|\varphi\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)}}{|z|^{N+a}} dz = C \int_r^\infty \frac{d\rho}{\rho^{a+1}} < \infty \quad (a + 1 > 1).$$

Concluimos por el teorema de diferenciación bajo el signo integral que las dos integrales en el lado derecho de (3.1.1) definen funciones holomorfas con respecto a λ. Además, la función $\lambda \mapsto C_N(\lambda)$ ($C_N(\lambda)$ definida como en (3.1.2)) es holomorfa en E con respecto a λ (puesto que Γ es holomorfa en el semiplano $\{\mathrm{Re} > 0\}$, (ver [9]) y además Γ no es cero en tal semiplano) se sigue que las funciones en ambos lados de (3.1.1) son holomorfas en dicho conjunto. Como (3.1.1) vale para todo real $\lambda \in (1,2)$, por el principio de continuación analítica (ver [1] y [22]) se sigue que la igualdad es válida para cualquier $\lambda \in E$, en particular esto comprueba que (3.1.1) se tiene si $\lambda \in (0,2)$.

A partir de (3.1.1) podemos obtener los casos especiales indicados en los items (i) y (ii) del teorema.

(i) Consideramos $0 < \lambda < 1$. Se tiene que para todo $r > 0$

$$\frac{|\varphi(x+z) - \varphi(x)|}{|z|^{N+\lambda}} |\chi_{B_r^c}| \leq \frac{|\varphi(x+z) - \varphi(x)|}{|z|^{N+\lambda}},$$

con $z \mapsto |z|^{-N-\lambda}(\varphi(x+z) - \varphi(x))$ integrable. En efecto, como $\varphi(x+z) - \varphi(x) = \mathcal{O}(|z|)$ (Teorema del Valor Medio y $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$) se tiene que

$$\int_{\mathbb{R}^N} \frac{|\varphi(x+z)-\varphi(x)|}{|z|^{N+\lambda}}dz = \int_{B_1} \frac{|\varphi(x+z)-\varphi(x)|}{|z|^{N+\lambda}}dz + \int_{B_1^c} \frac{|\varphi(x+z)-\varphi(x)|}{|z|^{N+\lambda}}$$

$$\leq C\int_{B_1} \frac{dz}{|z|^{N+\lambda-1}} + 2\|\varphi\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} \int_{B_1^c} \frac{dz}{|z|^{N+\lambda}}$$

$$= C\int_0^1 \rho^{-\lambda} d\rho + 2\|\varphi\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} \int_1^\infty \frac{d\rho}{\rho^{\lambda+1}} < \infty,$$

porque $-\lambda > -1$.

Pasando al límite en (3.1.1) cuando $r \longrightarrow 0$ y por el Teorema de la Convergencia Dominada

$$g_\lambda[\varphi](x) = -C_N(\lambda) \lim_{r\to 0} \left(\int_{B_r} \frac{\varphi(x+z)-\varphi(x)-\nabla\varphi(x)\cdot z}{|z|^{N+\lambda}}dz + \int_{B_r^c} \frac{\varphi(x+z)-\varphi(x)}{|z|^{N+\lambda}}dz \right)$$

$$= -C_N(\lambda) \int_{\mathbb{R}^N} \frac{\varphi(x+z)-\varphi(x)}{|z|^{N+\lambda}}dz,$$

donde la primera integral del lado derecho de g_λ es 0 si $r \longrightarrow 0$, pues en una vecindad del 0, por el Teorema de Taylor

$$\int_{B_r} \frac{|\varphi(x+z)-\varphi(x)-\nabla\varphi(x)\cdot z|}{|z|^{N+\lambda}}dz \leq C\|D^2\varphi\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} \int_{B_r} \frac{dz}{|z|^{N+\lambda-2}}$$

$$\leq C\|D^2\varphi\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} \int_0^r \rho^{1-\lambda} d\rho$$

$$= C\|D^2\varphi\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} \frac{r^{2-\lambda}}{2-\lambda} \longrightarrow 0,$$

cuando $r \longrightarrow 0$ ya que $1 < 2-\lambda < 2$.

(ii) Si $1 < \lambda < 2$, entonces para todo $r > 0$

$$\frac{|\varphi(x+z)-\varphi(x)-\nabla\varphi(x)\cdot z|}{|z|^{N+\lambda}} |\chi_{B_r(0)}| \leq \frac{|\varphi(x+z)-\varphi(x)-\nabla\varphi(x)\cdot z|}{|z|^{N+\lambda}},$$

siendo la función $z \mapsto |z|^{-N-\lambda}(\varphi(x+z)-\varphi(x)-\nabla\varphi(x)\cdot z)$ integrable:

$$
\begin{aligned}
\int\limits_{\mathbb{R}^N} \frac{|\varphi(x+z)-\varphi(x)-\nabla\varphi(x)\cdot z|}{|z|^{N+\lambda}}dz &= \int\limits_{B_1} \frac{|\varphi(x+z)-\varphi(x)-\nabla\varphi(x)\cdot z|}{|z|^{N+\lambda}}dz \\
&+ \int\limits_{B_1^c} \frac{|\varphi(x+z)-\varphi(x)-\nabla\varphi(x)\cdot z|}{|z|^{N+\lambda}}dz \\
&\leq C\|D^2\varphi\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} \int\limits_{B_1} \frac{dz}{|z|^{N+\lambda-2}} + 2||\varphi||_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} \int\limits_{B_1^c} \frac{dz}{|z|^{N+\lambda}} \\
&+ \|\nabla\varphi\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} \int\limits_{B_1^c} \frac{dz}{|z|^{N+\lambda-1}} \\
&= C\|D^2\varphi\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} \int_0^1 \rho^{1-\lambda}d\rho + 2\|\varphi\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} \int_1^\infty \frac{d\rho}{\rho^{\lambda+1}} \\
&+ \|\nabla\varphi\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} \int_1^\infty \frac{d\rho}{\rho^\lambda} < \infty.
\end{aligned}
$$

Entonces por el Teorema de la Convergencia Dominada, si $r \longrightarrow \infty$ en (3.1.1),

$$
g_\lambda[\varphi](x) = -C_N(\lambda) \int\limits_{\mathbb{R}^N} \frac{\varphi(x+z)-\varphi(x)-\nabla\varphi(x)\cdot z}{|z|^{N+\lambda}}dz,
$$

donde la segunda integral del lado derecho de g_λ es 0 si $r \longrightarrow \infty$, pues

$$
\begin{aligned}
\int\limits_{B_r} \frac{|\varphi(x+z)-\varphi(x)|}{|z|^{N+\lambda}}dz &\leq 2\|\varphi\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} \int\limits_{B_r} \frac{dz}{|z|^{N+\lambda}} \\
&= 2\|\varphi\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} \int_r^\infty \frac{d\rho}{\rho^{\lambda+1}} \\
&= \frac{1}{\lambda r^\lambda} \longrightarrow 0,
\end{aligned}
$$

cuando $r \longrightarrow \infty$ $(\lambda > 1)$. ☑

El siguiente lema nos provee una forma de extender g_λ de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ a $C_b^2(\mathbb{R}^N)$:

Lema 3.1.2. *Sean $\lambda \in (0,2)$ y $\varphi \in C_b^2(\mathbb{R}^N)$. Si $(\varphi_n)_{n\geq 1}$ es una secuencia de funciones en $C_b^2(\mathbb{R}^N)$ que es acotada en $L^\infty(\mathbb{R}^N)$ y $D^2\varphi_n \longrightarrow D^2\varphi$ local y uniformemente en $\mathbb{R}^N$, cuando $n \longrightarrow \infty$, entonces $g_\lambda[\varphi_n] \longrightarrow g_\lambda[\varphi]$ local y uniformemente en $\mathbb{R}^N$, cuando $n \longrightarrow \infty$.*

Observación 3.1.3. Hablamos de una extensión de g_λ de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ a $C_b^2(\mathbb{R}^N)$ en el sentido de que $g_\lambda[\varphi] \in C_b(\mathbb{R}^N)$ para cada $\varphi \in C_b^2(\mathbb{R}^N)$.

Prueba.
En virtud de la linealidad del operador g_λ en $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ basta comprobar la continuidad en $\varphi = 0$, es decir, veremos que $\lim_{n\to\infty} g_\lambda[\varphi_n] = 0$ local y uniformemente en $\mathbb{R}^N$, cuando $\lim_{n\to\infty} D^2\varphi_n = 0$ local y uniformemente en $\mathbb{R}^N$ (nótese que esta última hipótesis reemplaza la condición $\lim_{n\to\infty} \varphi_n = 0$).

Como existe $C > 0$ tal que $\|\varphi_n\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} \leq C$ para todo n, tenemos para la segunda integral del lado derecho de (3.1.1) que

$$\int_{B_r^c} \frac{|\varphi_n(x+z) - \varphi_n(x)|}{|z|^{N+\lambda}} dz \leq 2\|\varphi_n\|_\infty \int_{B_r^c} \frac{dz}{|z|^{N+\lambda}} \leq 2C \int_{B_r^c} \frac{dz}{|z|^{N+\lambda}},$$

en donde el lado derecho de esta desigualdad es pequeño, uniformemente para todo $n \geq 1$ y $x \in \mathbb{R}^N$, si r es grande.

Por otra parte, como $D^2\varphi_n \longrightarrow 0$ cuando $n \longrightarrow \infty$, localmente y uniformemente, se tiene que para todo $z \in \mathbb{R}^N$ existe $R > 0$ tal que $\lim_{n\to\infty} \sup_{y\in B_R(z)} |D^2\varphi_n(y)| = 0$. Sea $x \in \mathbb{R}^N$ tal que $|x| \leq R$ y apliquemos el teorema de Taylor alrededor de x. Entonces para $|z| \leq r$ (el r de arriba)

$$|\varphi_n(x+z) - \varphi_n(x) - \nabla\varphi_n(x)\cdot z| \leq C\|D^2\varphi_n\|_{L^\infty(B_{r+R})}|z|^2.$$

La norma L^∞ de $D^2\varphi_n$ es en la bola $B_{r+R} = B_R(z)$ con el fin de aplicar la convergencia local uniforme y porque en la expansión de Taylor $D^2\varphi_n$ está valuada en puntos de la forma $x + tz$, con $0 < t < 1$. Luego para el primer término del lado derecho de (3.1.1), para tales x y z se tiene que

$$\int_{B_r} \frac{|\varphi_n(x+z) - \varphi_n(x) - \nabla\varphi_n(x)\cdot z|}{|z|^{N+\lambda}} dz \leq C\|D^2\varphi_n\|_{L^\infty(B_{r+R})} \int_{B_r} \frac{dz}{|z|^{N+\lambda-2}},$$

y es aplicable la convergencia uniforme en el lado derecho de esta última desigualdad cuando $n \longrightarrow \infty$ con r fijo. Concluimos que con r fijo, el lado izquierdo es uniformemente pequeño para $x \in B_R$ si n es grande. ☑

A continuación exhibimos una consecuencia importante de la representación integral de g_λ, que a demás de permitir obtener estimativos para la solución del p.v.i (1), nos indica cierto resultado de unicidad en el espíritu de la Proposicón 3.2.1

Teorema 3.1.4. *Sean $\lambda \in (0,2)$ y $\varphi \in C_b^2(\mathbb{R}^N)$. Si $(x_n)_{n\geq 1}$ es una secuencia en $\mathbb{R}^N$ tal que $\varphi(x_n) \longrightarrow \sup_{\mathbb{R}^N} \varphi$ cuando $n \longrightarrow \infty$, entonces $\lim_{n\to\infty} \nabla\varphi(x_n) = 0$ y $\liminf_{n\to\infty} g_\lambda[\varphi](x_n) \geq 0$.*

Prueba.
Sea $x \in \mathbb{R}^N$. Como $\varphi \in C^2(\mathbb{R}^N)$, el teorema de Taylor alrededor de x nos da que

$$\varphi(x+z) = \varphi(x) + \nabla\varphi(x)\cdot z + R_{x,1}(z),$$

donde el resto de la expansión es $R_{x,1}(z) = \sum_{|\alpha|=2} z^\alpha \int_0^1 (1-t)D^\alpha\varphi(x+tz)dt$, con $t \in (0,1)$, α es un multi-índice de longitud 2 y z está en una vecindad de x.

Como $D^2\varphi$ es acotada, existe $C > 0$ tal que $|R_{x,1}(z)| \leq C|z|^2$. A demás $-C|z|^2 \leq R_{x,1}(z) \leq C|z|^2$. En particular

$$-C|z|^2 \leq R_{x,1}(z).$$

Sumando $\varphi(x+z)$ a ambos lados de esta última desigualdad

$$\varphi(x+z) - C|z|^2 \leq \varphi(x+z) + R_{x,1}(z)$$

$$\varphi(x) + \nabla\varphi(x)\cdot z + R_{x,1}(z) - C|z|^2 \leq \varphi(x+z) + R_{x,1}(z)$$

$$\varphi(x) + \nabla\varphi(x)\cdot z - C|z|^2 \leq \varphi(x+z),$$

y por lo tanto para todo $z \in \mathbb{R}^N$ y todo $n \geq 1$

$$\sup_{\mathbb{R}^N} \varphi \geq \varphi(x_n+z) \geq \varphi(x_n) + \nabla\varphi(x_n)\cdot z - C|z|^2. \tag{3.1.17}$$

Como $\nabla\varphi(x_n)$ es acotada (las derivadas de φ hasta el orden 2 son acotadas), existe una subsecuencia $(x_{n_k})_{k\geq 1}$ de $(x_n)_{n\geq 1}$ tal que $\nabla\varphi(x_{n_k}) \longrightarrow p$ ($p \in \mathbb{R}^N$) cuando $k \longrightarrow \infty$.

Pasando al límite en (3.1.17)

$$\sup_{\mathbb{R}^N} \varphi \geq \sup_{\mathbb{R}^N} \varphi + p\cdot z - C|z|^2,$$

$$0 \geq p\cdot z - C|z|^2.$$

Tomando $z = tp$ ($t > 0$) nos da que

$$0 \geq |p|^2 - Ct|p|^2,$$

y haciendo $t \longrightarrow 0^+$ queda $0 \geq |p|^2 \geq 0$ de donde $p = 0$ y $\lim_{k\to\infty} \nabla\varphi(x_{n_k}) = 0$.

Supongamos ahora que $l = \liminf_{n\to\infty} g_\lambda[\varphi](x_n) < 0$. Existe una subsecuencia $(x_{n_k})_{k\geq 1}$ tal que $g_\lambda[\varphi](x_{n_k}) \longrightarrow l$ cuando $k \longrightarrow \infty$ y de lo probado arriba también existe una subsubsecuencia $(x_{n_{k_\ell}})_{\ell\geq 1}$ tal que $\nabla\varphi(x_{n_{k_\ell}}) \longrightarrow p = 0$, cuando $\ell \longrightarrow \infty$. Sea $y_\ell := x_{n_{k_\ell}}$. Como $\varphi(y_\ell + z) \leq \sup_{\mathbb{R}^N} \varphi$, para todo $z \in \mathbb{R}^N$ y todo $\ell \geq 1$, entonces tomando límite superior a ambos lados de esta desigualdad

$$\limsup_{\ell\to\infty} (\varphi(y_\ell + z) - \varphi(y_\ell)) \leq \sup_{\mathbb{R}^N} \varphi - \liminf_{\ell\to\infty} \varphi(y_\ell) = 0,$$

y usando que $\lim_{\ell\to\infty} \nabla\varphi(y_\ell) = 0$, concluimos

$$\begin{aligned} &\limsup_{\ell\to\infty} (\varphi(y_\ell + z) - \varphi(y_\ell)) \leq 0, \text{ y} \\ &\limsup_{\ell\to\infty} (\varphi(y_\ell + z) - \varphi(y_\ell) - \nabla\varphi(y_\ell)\cdot z) \leq 0. \end{aligned} \tag{3.1.18}$$

También se tiene que

$$\frac{|\varphi(y_\ell + z) - \varphi(y_\ell)|}{|z|^{N+\lambda}} \leq \frac{2\|\varphi\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)}}{|z|^{N+\lambda}} \in L^1(\mathbb{R}^N \setminus B_r) \;\; (\rho = |z| \text{ y } \lambda > 0)$$

y por el teorema de Taylor

$$\frac{|\varphi(y_\ell + z) - \varphi(y_\ell) - \nabla\varphi(y_\ell)\cdot z)|}{|z|^{N+\lambda}} \leq \frac{C\|D^2\varphi\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)}|z|^2}{|z|^{N+\lambda}} \in L^1(B_r),$$

De (3.1.18) y el Lema de Fatou (reverso) conseguimos que

$$\limsup_{\ell\to\infty} \int_{B_r^c} \frac{\varphi(y_\ell + z) - \varphi(y_\ell)}{|z|^{N+\lambda}} dz \leq \int_{B_r^c} \limsup_{\ell\to\infty} \frac{\varphi(y_\ell + z) - \varphi(y_\ell)}{|z|^{N+\lambda}} dz \leq 0 \tag{3.1.19}$$

y

$$\limsup_{\ell\to\infty} \int_{B_r} \frac{\varphi(y_\ell + z) - \varphi(y_\ell) - \nabla\varphi(y_\ell)\cdot z}{|z|^{N+\lambda}} dz \leq \int_{B_r} \limsup_{\ell\to\infty} \frac{\varphi(y_\ell + z) - \varphi(y_\ell) - \nabla\varphi(y_\ell)\cdot z}{|z|^{N+\lambda}} dz \leq 0. \tag{3.1.20}$$

Por último, usando que el límite inferior es a lo más el límite superior, al sumar (3.1.19) y (3.1.20), y multiplicando por $-C_N(\lambda)$ concluimos la pruba del teorema, esto es,

$$-C_N(\lambda) \liminf_{\ell\to\infty} \left(\int_{B_r^c} \frac{\varphi(y_\ell + z) - \varphi(y_\ell)}{|z|^{N+\lambda}} dz + \int_{B_r} \frac{\varphi(y_\ell + z) - \varphi(y_\ell) - \nabla\varphi(y_\ell)\cdot z}{|z|^{N+\lambda}} dz \right) \geq 0$$

o lo que es lo mismo $\liminf_{\ell\to\infty} g_\lambda[\varphi](y_\ell) \geq 0$, o sea $g_\lambda[\varphi](y_\ell) \longrightarrow l \geq 0$ cuando $\ell \to \infty$, que es una contradicción, luego

$$\liminf_{n\longrightarrow\infty} g_\lambda[\varphi](x_n) \geq 0$$

para toda la sucesión $(x_n)_{n\geq 1}$.

☑

3.2. Un estimativo previo de la solución

La siguiente proposición nos permitirá probar el estimativo (2.2.2) de la solución del p.v.i. (2.1.1) indicado en el Teorema 2.2.1, el cual demostraremos para una solución débil como se indica en el capítulo 4; también nos dejará, en el capítulo 5, el estimativo (2.2.1) mediante el requerimiento (2.1.3) y los ítems (i) y (ii) del Teorema 2.2.1 (ver Sección 5.3).

Proposición 3.2.1. *Sean $\lambda \in (0,2)$, $T > 0$ y $G \in C((0,T)\times\mathbb{R}^N\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}^N)$ tal que para todo $R > 0$, $\nabla_\xi G$ es acotado en $(0,T)\times\mathbb{R}^N\times[-R,R]\times B_R$. Supongamos también que existe $h : [0,+\infty) \longrightarrow (0,+\infty)$ continua y no decreciente tal que $\int_0^{+\infty}\frac{1}{h(a)}da = \infty$ y, para todo $(t,x,s)\in(0,T)\times\mathbb{R}^N\times\mathbb{R}$, $\operatorname{sgn}(s)G(t,x,s,0) \leq h(|s|)$.*

Si $u \in C_b^2((a,T)\times\mathbb{R}^N)$ para todo $0 < a < T$ y satisface

$$\partial_t u(t,x) + g_\lambda[u(t,\cdot)](x) = G(t,x,u(t,x),\nabla u(t,x)) \text{ en } (0,T)\times\mathbb{R}^N, \tag{3.2.1}$$

entonces, definiendo

$$\mathcal{H}(a) := \int_0^a \frac{1}{h(b)} db,$$

se tiene que

$$\|u(t,\cdot)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} \leq \mathcal{H}^{-1}(t-t'+\mathcal{H}(\|u(t',\cdot)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)})) \tag{3.2.2}$$

para todo $0<t'<t<T$.

Prueba.
Sea $a \in (0,T)$. Como u es dos veces diferenicable y continua con respecto a t en $(a/2,T)\times\mathbb{R}^N$ entonces $\partial_t^2 u$ es acotada en dicho conjunto, digamos por C_a. Por el teorema de Taylor (en variable temporal) se tiene que para $(t,\tau,x)\in(a,T)\times(0,a/2)\times\mathbb{R}^N$

$$u(s,x)=u(t,x)+\partial_t u(t,x)(s-t)+\underbrace{\frac{1}{2}\partial_t^2 u(p,x)(s-t)^2}_{\text{resto}},$$

para algún p intermedio entre s y t.

Haciendo $s:=t-\tau$, $\tau\in(0,a/2)$ (notar que si $a<t<T$ y $0<\tau<a/2$ entonces $-a/2<-\tau<0$ con lo que, $s=t-\tau$ pertenece a $(a/2,T)$) nos queda.

$$u(t-\tau,x)=u(t,x)-\tau\partial_t u(t,x)+\frac{1}{2}\partial_t^2 u(p,x)\tau^2. \tag{3.2.3}$$

Dado que $\partial_t^2 u(p,x)$ es acotada, por la hipótesis (3.2.1) y a partir de (3.2.3) obtenemos que

$$\begin{aligned} u(t,x) &= u(t-\tau,x)+\tau\partial_t u(t,x)-\frac{1}{2}\tau^2\partial_t^2 u(p,x) \\ &\leq u(t-\tau,x)+\tau\partial_t u(t,x)+C_a\tau^2 \qquad (3.2.4)\\ &\leq \sup_{\mathbb{R}^N} u(t-\tau,\cdot)+\tau G(t,x,u(t,x),\nabla u(t,x))-\tau g_\lambda[u(t,\cdot)](x)+C_a\tau^2. \end{aligned}$$

Fijemos $t\in(a,T)$. Supongamos que $\sup_{\mathbb{R}^N} u(t,\cdot)>0$ y sea $(x_n)_{n\geq 1}$ una secuencia en $\mathbb{R}^N$ tal que $u(t,x_n)\longrightarrow \sup_{\mathbb{R}^N} u(t,\cdot)$. Para un $R_t>0$, cota superior de $u(t,\cdot)$ y $\nabla u(t,\cdot)$ (esto es posible hacerlo porque $u\in C_b^2((a,T)\times\mathbb{R}^N)$) tenemos que

$$|\nabla_\xi G(t,x,s,\xi)|\leq M_t:=\sup\{|\nabla_\xi G(t,x,s,\xi)|:(x,s,\xi)\in\mathbb{R}^N\times[-R_t,R_t]\times B_{R_t}\}$$

Recordar que dado culaquier $R>0$, el gradiente de G con respecto a la cuarta variable, es acotado en R.

Aplicando el teorema del valor medio a G con respecto a la cuarta coordenada en el convexo B_{R_t} y evaluando en $t,x_n,u(t,x_n),\nabla u(t,x_n)$ obtenemos que

$$G(t,x_n,u(t,x_n),\nabla u(t,x_n))\leq G(t,x_n,u(t,x_n),0)+M_t|\nabla u(t,x_n)|. \tag{3.2.5}$$

Puesto que para n suficientemente grande $u(t,x_n)>0$ (dado que $\sup_{\mathbb{R}^N} u(t,\cdot)>0$), por hipótesis se tiene que

$$\underbrace{\operatorname{sgn}(u(t,x_n))}_{1}G(t,x_n,u(t,x_n),0)\leq h(\underbrace{|u(t,x_n)|}_{>0}). \tag{3.2.6}$$

A partir de (3.2.6) y (3.2.5)

$$\begin{aligned} G(t, x_n, u(t, x_n).\nabla u(t, x_n)) &\leq h(u(t, x_n)) + M_t |\nabla u(t, x_n)| \\ &\leq h\left(\sup_{\mathbb{R}^N} u(t, \cdot)\right) + M_t |\nabla u(t, x_n)|, \end{aligned} \tag{3.2.7}$$

donde en la última desigualdad hemos usado que h es no creciente en $[0, +\infty)$.

De (3.2.4) y (3.2.7) se tiene que para todo $t \in (a, T)$ y todo $\tau \in (0, a/2)$

$$\begin{aligned} u(t, x_n) &\leq \sup_{\mathbb{R}^N} u(t - \tau, \cdot) + \tau G(t, x_n, u(t, x_n), \nabla u(t, x_n)) - \tau g_\lambda [u(t, \cdot)](x_n) + C_a \tau^2 \\ &\leq \sup_{\mathbb{R}^N} u(t - \tau, \cdot) + \tau h\left(\sup_{\mathbb{R}^N} u(t, \cdot)\right) + \tau M_t |\nabla u(t, x_n)| - \tau g_\lambda [u(t, \cdot)](x_n) + C_a \tau^2. \end{aligned}$$

Por el Teorema 3.1.4 $\liminf_{k \to \infty} g_\lambda [u(t, \cdot)](x_{n_k}) \geq 0$ y $\nabla u(t, x_{n_k}) \longrightarrow 0$ cuando $k \longrightarrow \infty$ para una subsucesión $(x_n)_{k \geq 1}$, que reescribimos como $x_n = x_{n_k}$. Entonces tomando el límite superior en la anterior desigualdad

$$\begin{aligned} \limsup_{n \longrightarrow \infty} u(t, x_n) \leq \sup_{\mathbb{R}^N} u(t - \tau, \cdot) + \tau h\left(\sup_{\mathbb{R}^N} u(t, \cdot)\right) + \tau M_t \left|\limsup_{n \longrightarrow \infty} \nabla u(t, x_n)\right| \\ - \tau \limsup_{n \longrightarrow \infty} g_\lambda [u(t, \cdot)](x_n) + C_a \tau^2 \end{aligned}$$

y por lo tanto

$$\sup_{\mathbb{R}^N} u(t, \cdot) \leq \sup_{\mathbb{R}^N} u(t - \tau, \cdot) + \tau h\left(\sup_{\mathbb{R}^N} u(t, \cdot)\right) + C_a \tau^2. \tag{3.2.8}$$

donde $-\limsup_{n \to \infty} g_\lambda [u(t, \cdot)](x_n) \leq -\liminf g_\lambda [u(t, \cdot)](x_n) \leq 0$.

Notemos que (3.2.8) se obtuvo bajo la condición que $\sup_{\mathbb{R}^N} u(t, \cdot) > 0$. Sin embargo, definiendo

$$\Phi(t) := \max\left(\sup_{\mathbb{R}^N} u(t, \cdot), 0\right),$$

veamos que culaquiera sea el signo de $\sup_{\mathbb{R}^N} u(t, \cdot)$ se tiene que para todo $t \in (a, T)$ y $\tau \in (0, a/2)$

$$\Phi(t) \leq \Phi(t - \tau) + \tau h(\Phi(t)) + C_a \tau^2. \tag{3.2.9}$$

En efecto, si $\max(\sup_{\mathbb{R}^N} u(t, \cdot), 0) = \sup_{\mathbb{R}^N} u(t, \cdot) > 0$ entonces la desigualdad buscada es justamente (3.2.8). Si $\max(\sup_{\mathbb{R}^N} u(t, \cdot), 0) = 0 > \sup_{\mathbb{R}^N} u(t, \cdot)$ la desigualdad es inmediata, pues h, $C_a, \tau > 0$ y $\Phi(t - \tau) \geq 0$.

Afirmación 3.2.2. *Φ es localmente Lipschitz en $(0, T)$, es decir para todo $0 < a < T$, Φ es Lipschitz en (a, T).*

Prueba de la Afirmación 3.2.2. Sean t y s en (a, T). Analizamos varios casos posibles:

(i) $\Phi(t) = \Phi(s) = 0$. Inmediato.

(ii) $\Phi(t) = \sup_{\mathbb{R}^N} u(t,\cdot)$ y $\Phi(s) = \sup_{\mathbb{R}^N} u(s,\cdot)$.

Como $u \in C_b^2((a,T)\times\mathbb{R}^N)$, por el teorema del valor medio existe $\eta \in (t,s)$ (suponiendo $t > s$) tal que para todo $x \in \mathbb{R}^N$

$$u(t,x) - u(s,x) = \partial_t u(\eta,x)(t-s)$$

$$u(t,x) = \partial_t u(\eta,x)(t-s) + u(s,x)$$

$$\sup_{\mathbb{R}^N} u(t,\cdot) \leq K_a(t-s) + \sup_{\mathbb{R}^N} u(s,\cdot)$$

$$\Phi(t) - \Phi(s) \leq K_a(t-s),$$

con, $K_a > 0$ cota de $\partial_t u$ (observar que si fuese $\Phi(t) \leq \Phi(s)$ el argumento es el mismo).

(iii) $\Phi(t) = \sup_{\mathbb{R}^N} u(t,\cdot)$ y $\Phi(s) = 0$. Para este caso como $\Phi(s) = 0 \geq u(s,x)$ para todo x, tenemos que $u(t,x) \leq u(t,x) - u(s,x)$

$$u(t,x) - 0 \leq u(t,x) - u(s,x),$$

y basta razonar como en el ítem (ii). $\triangle$

Por el teorema de Rademacher (ver [15], Teorema 3.1 y Teorema 3.2) Φ es diferenciable en casi todo punto (c.t.p.) de $(0,T)$, luego por (3.2.9)

$$\Phi'(t) \leq h(\Phi(t)) \tag{3.2.10}$$

para casi todo punto $t \in (0,T)$.

La función $t \in (0,T) \longmapsto \mathcal{H}(\Phi(t)) \in [0,+\infty)$ con

$$\mathcal{H}(\Phi(t)) = \int_0^{\Phi(t)} \frac{1}{h(b)}db,$$

es localmente Lipschitz en $(0,T)$, ya que para todo a entre 0 y T, Φ es Lipschitz en (a,T), luego para s y t en tal intervalo

$$|\mathcal{H}(\Phi(t)) - \mathcal{H}(\Phi(s))| = \left| \int_{\Phi(s)}^{\Phi(t)} \frac{1}{h(b)}db \right| \leq \int_{\Phi(s)}^{\Phi(t)} \frac{1}{h(b)}db \leq \frac{1}{h(0)}|\Phi(t) - \Phi(s)| \leq \frac{K_a}{h(0)}|t-s|.$$

Se sigue que $\mathcal{H}\circ\Phi$ es diferenciable en casi todo punto de $(0,T)$ y como $\mathcal{H}$ es un difeomorfismo en $[0,+\infty)$ en virtud de la obervación 2.1.2, por la regla de la cadena y (3.2.10) su derivada está acotada por 1:

$$(\mathcal{H}\circ\Phi)'(t) = \mathcal{H}'(\Phi(t))\Phi'(t) = \frac{1}{h(\Phi(t))}\Phi'(t) \leq 1,$$

para casi todo $t \in (0,T)$. Usando esto último, junto con el teorema del valor medio, tenemos que para todos $0 < t' < t<$T

$$\mathcal{H}(\Phi(t)) - \mathcal{H}(\Phi(t')) = (\mathcal{H}\circ\Phi)'(t^*)(t-t') \leq t - t',$$

para algún $t^* \in (t', t)$.

De esta forma,

$$\mathcal{H}(\Phi(t)) \leq t - t' + \mathcal{H}(\Phi(t')) \tag{3.2.11}$$

para todos $0 < t' < t < T$.

Como $\mathcal{H}$ es una biyección no decreciente, se sigue de (3.2.11) que

$$\begin{aligned} \sup_{\mathbb{R}^N} u(t,\cdot) \leq \Phi(t) &\leq \mathcal{H}^{-1}(t - t' + \mathcal{H}(\Phi(t'))) \\ &\leq \mathcal{H}^{-1}(t - t' + \mathcal{H}(\|u(t',\cdot)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)})), \end{aligned} \tag{3.2.12}$$

se ha usado que $\Phi(t') \leq \|u(t',\cdot)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)}$: si $\Phi(t') = 0$ es trivial; si $\Phi(t') = \sup_{\mathbb{R}^N} u(t',\cdot) > 0$ entonces $u(t',\cdot) \leq \Phi(t')$, luego como $\|u(t',\cdot)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} = \inf\{C \geq 0 : |u(t',\cdot)| \leq C \ \text{ c.t.p. en } \mathbb{R}^N\}$ entonces $\Phi(t') \leq \|u(t',\cdot)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)}$. Además, se ha utilizado que $\mathcal{H}^{-1} : [0,+\infty) \longrightarrow [0,+\infty)$ es también no decreciente.

Considerando ahora la función $-u$ y replicando todo el razonamiento anterior, es posible conseguir una cota superior similar a (3.2.12) para $\sup(-u(t,\cdot)) = -\inf u(t,\cdot)$ y así concluir la prueba. Es como sigue: en lugar de G consideramos $(x,t,s,\xi) \mapsto -G(t,x,-s,-\xi)$, la cual es continua en $(0,T) \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N$, y para todo $R > 0$, $\nabla_\xi(-G)$ es acotado en $(0,T) \times \mathbb{R}^N \times [-R,R] \times B_R$ (esto es claro ya que $\nabla_\xi[-G(t,x,-s,-\xi)] = \nabla_\xi G(t,x,-s,-\xi)$ y como $-s \in [-R,R]$ y $-\xi \in B_R$, se aplica que $\nabla_\xi G$ es acotado en el conjunto de interés). La ecuación (3.2.1) se satisface con $-u(t,x)$ y $-G(t,x,-s,-\xi)$ en $(0,T) \times \mathbb{R}^N$:

$$\begin{aligned} \partial_t[-u(t,x)] + g_\lambda[-u(t,\cdot)](x) &= -(\partial_t u(t,x) + g_\lambda[u(t,\cdot)](x)) \\ &= -G(t,x,u(t,x),\nabla u(t,x)) = -G(t,x,-[-u(t,x)],-\nabla[-u(t,x)]). \end{aligned}$$

Por otra parte si $(t,x,s) \in (0,T) \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}$ como sgn es una función impar, se tiene que

$$\operatorname{sgn}(s)[-G(t,x,-s,0)] = \operatorname{sgn}(-s)G(t,x,-s,0) \leq h(|-s|) = h(|s|).$$

Con las consideraciones anteriores se pueden ir obteniendo los diferentes estimativos. Por ejemplo: Por el Teorema de Taylor ($-u(\cdot,x) \in C_b^2(a,T)$) si $(t,\tau,x) \in (a,T) \times (0,a/2) \times \mathbb{R}^N$

$$-u(s,x) = -u(t,x) - \partial_t u(t,x)(s-t) - \underbrace{\frac{1}{2}\partial_t^2 u(p,x)(s-t)^2}_{\text{resto}},$$

que haciendo $s := t - \tau$ queda

$$-u(t-\tau,x) = -u(t,x) + \tau\partial_t u(t,x) - \frac{1}{2}\partial_t^2 u(p,x)\tau^2.$$

En virtud de (3.2.1) con $-u$ y $-G(\cdot,\cdot,-s,-\xi)$ y el acotamiento de $\partial_t^2 u$,nos queda

$$\begin{aligned} -u(t,x) &= -u(t-\tau,x) - \tau\partial_t u(t,x) + \frac{1}{2}\tau^2\partial_t^2 u(p,x) \\ &\leq \sup_{\mathbb{R}^N}[-u(t-\tau.\cdot)] - \tau G(t,x,u(t,x),\nabla u(t,x)) + \tau g_\lambda[u(t,\cdot)](x) + C_a\tau^2. \end{aligned} \tag{3.2.13}$$

Fijamos $t \in (a,T)$ y suponemos que $\sup_{\mathbb{R}^N}[-u(t,\cdot)] > 0$. Para una secuencia $(x_n)_{n\geq 1}$ tal que $-u(t,x_n) \longrightarrow \sup_{\mathbb{R}^N}[-u(t,\cdot)]$ se tiene que si $R_t > 0$ acota superiormente a $-u(t,\cdot)$ y a $-\nabla u(t,\cdot)$, por el teorema del valor medio

$$-G(t,x_n,u(t,x_n),\nabla u(t,x_n)) \leq -G(t,x_n,u(t,x_n),0) + M'_t|\nabla u(t,x_n)|,$$

donde

$$M'_t = \sup\{\underbrace{|\nabla_\xi[-G(t,x,-s,-\xi)]|}_{|\nabla_\xi G(t,x,-s,-\xi)|} : (x,s,\xi) \in \mathbb{R}^N \times [-R_t,R_t] \times B_{R_t}\}.$$

Para n suficientemente grande, $-u(t,x_n) > 0$. Luego

$$\operatorname{sgn}(u(t,x_n))G(t,x_n,-[-u(t,x_n)],0) \leq h(|-u(t,x_n)|),$$

es decir,

$$-G(t,x_n,u(t,x_n),0) \leq h(|u(t,x_n)|) = h(-u(t,x_n)).$$

Con lo cual,

$$\begin{aligned} -G(t,x_n,u(t,xn),\nabla u(t,x_n)) &\leq -G(t,x_n,u(t,x_n),0) + M'_t|-\nabla u(t,x_n)| \\ &\leq h(-u(t,x_n)) + M'_t|\nabla u(t,x_n)|. \end{aligned} \tag{3.2.14}$$

Combinando (3.2.13) y (3.2.14), para todo $t \in (a,T)$ y todo $\tau \in (0,a/2)$

$$\begin{aligned} -u(t,x_n) &\leq \sup_{\mathbb{R}^N}[-u(t-\tau,\cdot)] - \tau G(t,x_n,u(t,x_n),\nabla u(t,x_n)) + \tau g_\lambda[u(t,\cdot)](x_n) + C_a\tau^2 \\ &\leq \sup_{\mathbb{R}^N}[-u(t-\tau,\cdot)] + \tau h\left(\sup_{\mathbb{R}^N}[-u(t,\cdot)]\right) + \tau M'_t|-\nabla u(t,x_n)| + \tau g_\lambda[u(t,\cdot)](x_n) + C_a\tau^2. \end{aligned}$$

Tomando límite superior en la última desigualdad y aplicando el Teorema **??**, concluimos que

$$\sup_{\mathbb{R}^N}[-u(t,\cdot)] \leq \sup_{\mathbb{R}^N}[-u(t-\tau,\cdot)] + \tau h\left(\sup_{\mathbb{R}^N}[-u(t,\cdot)]\right) + C_a\tau^2,$$

donde $\operatorname{liminf} g_\lambda[-u(t,\cdot)](x_n) \geq 0$ y $\operatorname{limsup} g_\lambda[u(t,\cdot)](x_n) \leq 0$.

Lo anterior válido bajo el supuesto de que $\sup_{\mathbb{R}^N}[-u(t,\cdot)] > 0$, pero definiendo

$$\widetilde{\Phi}(t) = \operatorname{máx}\left(\sup_{\mathbb{R}^n}[-u(t,\cdot)], 0\right) \quad t \in (0,T)$$

de nuevo se verifica que sin importar el signo de dicho supremo,

$$\frac{\widetilde{\Phi}(t) - \widetilde{\Phi}(t-\tau)}{\tau} \leq h(\widetilde{\Phi}(t)) + C_a\tau.$$

Como en la afirmación 3.2.2, $\widetilde{\Phi}$ es localmente Lipschitz en $(0,T)$ y por lo tanto

$$\widetilde{\Phi}' \leq h(\widetilde{\Phi}) \text{ en c.t.p. de } (0,T).$$

De lo anterior, $\mathcal{H} \circ \widetilde{\Phi}$ es diferenciable c.t.p. en $(0,T)$ con derivada acotada superiormente por 1 y en forma similar a (3.2.11) se verifica que

$$\mathcal{H}(\widetilde{\Phi}(t)) \leq t - t' + \mathcal{H}(\widetilde{\Phi}(t'))$$

para todos $0 < t' < t < T$, y por lo tanto

$$\sup_{\mathbb{R}^N}[-u(t,\cdot)] = -\inf_{\mathbb{R}^N} u(t,\cdot) \leq \mathcal{H}^{-1}(t - t' + \mathcal{H}(\| - u(t,\cdot)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)})). \tag{3.2.15}$$

Como $\|u(t,\cdot)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} = \mathrm{Max}(\Phi(t), \widetilde{\Phi}(t))$, (3.2.2) se sigue de (3.2.12) y (3.2.15). ☑

Como consecuencia de esta proposición, el siguiente corolario nos da la unicidad de la solución u establecida en el Teorema 2.2.1.

Corolario 3.2.2.1. *Sean $\lambda \in (0,2)$, $T > 0$ y $u_0 \in W^{1,\infty}(\mathbb{R}^N)$. Si F satisface (2.1.2), entonces existe a lo más una función definida en $(0,T) \times \mathbb{R}^N$ que verifica (i), (ii) y (iii) del Teorema 2.2.1.*

Prueba.
Supongamos que u y v son dos de soluciones del p.v.i. (2.1.1) que verifican las condiciones (i), (ii) y (iii) del Teorema 2.2.1. La diferencia $w = u - v$ está en $C_b^2((a,T) \times \mathbb{R}^N)$ para todo $a \in (0,T)$ (de hecho por (i) del Teorema 2.2.1, $u, v \in C_b^\infty((a,T) \times \mathbb{R}^N)$ para todo $a \in (0,T)$) y verifica la ecuación

$$\partial_t w(t,x) + g_\lambda[w(t,\cdot)](x) = G(t,x,w(t,x),\nabla w(t,x)), \quad (t,x) \in (0,T) \times \mathbb{R}^N, \tag{3.2.16}$$

y para todo $(t,x,s,\xi) \in [0,T] \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N$

$$G(t,x,s,\xi) = \left(\int_0^1 \partial_s F(t,x,\tau u(t,x) + (1-\tau)v(t,x), \nabla u(t,x)) d\tau \right) s$$
$$+ \left(\int_0^1 \nabla_\xi F(t,x,v(t,x), \tau \nabla u(t,x) + (1-\tau)\nabla v(t,x)) d\tau \right) \cdot \xi.$$

A continuación justificamos (3.2.16). Observemos primero que como g_λ es lineal y u y v satisfacen la e.d.p. en (2.1.1), entonces

$$\begin{aligned}
\partial_t w(t,x) + g_\lambda[w(t,\cdot)](x) &= \partial_t (u-v)(t,x) + g_\lambda[(u-v)(t,\cdot)](x) \\
&= \partial_t u(t,x) - \partial_t v(t,x) + g_\lambda[u(t,\cdot)](x) - g_\lambda[v(t,\cdot)](x) \\
&= \partial_t u(t,x) + g_\lambda[u(t,\cdot)](x) - (\partial_t v(t,x) + g_\lambda[v(t,\cdot)](x)) \\
&= F(t,x,u(t,x),\nabla u(t,x)) - F(t,x,v(t,x),\nabla v(t,x)).
\end{aligned} \tag{3.2.17}$$

De otra parte, por (2.1.2) existen $C_{T,R} > 0$ tal que

$$|\partial_s F(t,x,s,\xi)| \leq C_{T,R}, \qquad s \in [-R,R],$$

para $(t,x,\xi) \in (0,T) \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N$ fijos y,

$$|\partial_\xi F(t,x,s,\xi)| \leq C_{T,R}, \qquad \xi \in B_R,$$

fijando $(t,x,s) \in (0,T) \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}$. Notar que $T, R > 0$ están dados como en el Teorema 2.2.1 de modo que $u, v, \nabla u$ y ∇v estén acotadas por R. Entrando en detalle tal R viene determinado por la elección de un $t > a$ fijo para algún $a \in (0, T)$, es decir, $R = R_t$ como en la Proposición 3.2.1.

Las dos últimas desigualdades nos permiten concluir que estas derivadas son localmente integrables en $[-R, R]$ y en B_R, respectivamente. Para todo $p \in [1, +\infty)$

$$\int_{[-R,R]} |\partial_s F(t, x, s, \xi)|^p ds \leq 2RC^p_{T,R} < \infty \text{ y}$$

$$\int_{B_R} |\partial_\xi F(t, x, s, \xi)|^p d\xi \leq |B_R| C^p_{T,R} < \infty.$$

En definitiva, se tiene que las funciones $s \in [-R, R] \mapsto F(t, x, s, \xi) \in \mathbb{R}$ $(\xi \in \mathbb{R}^N)$ y $\xi \in B_R \mapsto F(t, x, s, \xi) \in \mathbb{R}$ $(s \in \mathbb{R})$, pertenecen a $W^{1,p}([-R, R])$ y $W^{1,p}(B_R)$ respectivamente, para todo $(t, x) \in (0, T) \times \mathbb{R}^N$ (al ser estas derivadas localmente integrables en los dominios indicados, también son derivadas débiles ver [7], proposición 6 y [12], capítulos 8 y 9).

Reescribiendo G, la versión débil del Teorema fundamental del cálculo ([7], Teorema 13) nos da que

$$\begin{aligned}
G(t, x, w(t, x), \nabla w(t, x)) &= \int_0^1 \partial_s F(t, x, v(t, x) + \tau[u(t, x) - v(t, x)], \nabla u(t, x))(u(t, x) - v(t, x))d\tau \\
&+ \int_0^1 \nabla_\xi F(t, x, v(t, x), \nabla v(t, x) + \tau[\nabla u(t, x) - \nabla v(t, x)]) \cdot (\nabla u(t, x) - \nabla v(t, x))d\tau \\
&= F(t, x, v(t, x) + u(t, x) - v(t, x), \nabla u(t, x)) - F(t, x, v(t, x), \nabla u(t, x)) \\
&+ F(t, x, v(t, x), \nabla v(t, x) + \nabla u(t, x) - \nabla v(t, x)) - F(t, x, v(t, x), \nabla v(t, x)) \\
&= F(t, x, u(t, x), \nabla u(t, x)) - F(t, x, v(t, x), \nabla v(t, x)).
\end{aligned} \tag{3.2.18}$$

De (3.2.17) y (3.2.18) conseguimos (3.2.16).

Verificamos ahora que G satisface las hipótesis de la Proposición 3.2.1. Por (2.1.2) y la primera parte de (i) del Teorema 2.2.1 tenemos que para todo $0 < \tau < 1$, $F(\cdot, \cdot, \tau u + (1 - \tau)v, \nabla u)$ y $\partial_s F(\cdot, \cdot, \tau u + (1 - \tau)v, \nabla u)$ son continua en $(0, T) \times \mathbb{R}^N$. De igual forma, también lo son $F(\cdot, \cdot, v, \tau \nabla u + (1 - \tau)\nabla v)$ y el vector $\nabla_\xi F(\cdot, \cdot, v, \tau \nabla u + (1 - \tau)\nabla v)$ en $(0, T) \times \mathbb{R}^N$ luego G es continua en $(0, T) \times \mathbb{R}^N \times [-R, R] \times B_R$.

Ahora $\nabla_\xi G$ es acotada en $(0, T) \times \mathbb{R}^N \times [-R, R] \times B_R$ ya que si $\xi \in B_R$, como la integral en el segundo término de G es independiente de ξ entonces

$$\nabla_\xi G(t, x, s, \xi) = \int_0^1 \nabla_\xi F(t, x, v(t, x), \tau \nabla u(t, x) + (1 - \tau)\nabla v(t, x))d\tau$$

y por (2.1.2), $\nabla_\xi F$ es acotada en $(0,T)\times\mathbb{R}^N\times[-R,R]\times B_R$.

Construimos ahora una función $h:[0,+\infty)\longrightarrow(0,+\infty)$, continua y no decreciente tal que $\int_0^{+\infty}\frac{1}{h(a)}da=+\infty$ y, para todo $(t,x,s)\in(0,T)\times\mathbb{R}^N\times\mathbb{R}$, $\operatorname{sgn}(s)G(t,x,s,0)\le h(|s|)$. Definamos para $a\in[0,+\infty)$, $h(a):=C(\kappa+a)$, donde κ es cualquier número positivo y C, también positivo, depende únicamente de u, v y las constantes en (2.1.2), digamos $C=C_{T,R,u,v}$. Notemos que h es continua, no decreciente y verifica que

$$\int_0^{+\infty}\frac{1}{h(a)}da=\frac{1}{C}\int_0^{+\infty}\frac{1}{\kappa+a}da=\frac{1}{C}\int_\kappa^{+\infty}\frac{1}{b}db=\frac{1}{C}\log(b)]_\kappa^{+\infty}=+\infty. \tag{3.2.19}$$

Ahora, como $\partial_s F(t,x,\tau u(t,x)+(1-\tau)v(t,x),\nabla u((t,x))\le C$ con C indicada como antes, tenemos que para todo $(t,x,s)\in(0,T)\times\mathbb{R}^N\times\mathbb{R}$,

$$\operatorname{sgn}(s)G(t,x,s,0)=\operatorname{sgn}(s)\left(\int_0^1\partial_s F(t,x,\tau u(t,x)+(1-\tau)v(t,x),\nabla u(t,x))d\tau\right)s$$

$$\le C|s|\le\kappa C+C|s|=h(|s|).$$

Hemos usado que $\operatorname{sgn}(s)s=|s|$.

Definamos por último, $\mathcal{H}:[0,+\infty)\longrightarrow[0,+\infty)$ como en (2.1.5), esto es, $\mathcal{H}(a):=\int_0^a\frac{1}{h(b)}db=\int_0^a\frac{1}{C(\kappa+b)}db$. Mediante el cambio de variables $\ell=\kappa+b$, conseguirmos que

$$\mathcal{H}(a)=\frac{1}{C}\log\left(\frac{\kappa+a}{\kappa}\right)\quad a\ge 0. \tag{3.2.20}$$

Si además hacemos $y=\mathcal{H}(a)=\frac{1}{C}\log\left(\frac{\kappa+a}{\kappa}\right)$, entonces $Cy=\log\left(\frac{\kappa+a}{\kappa}\right)$, $e^{Cy}=\frac{\kappa+a}{\kappa}$, de donde se obtiene que $\mathcal{H}^{-1}(a)=\kappa e^{Ca}-\kappa$.

La continuidad de G, que $\nabla_\xi G$ sea acotada en $(0,T)\times\mathbb{R}^N\times[-R,R]\times B_R$ para todo $R>0$, (3.2.16), (3.2.19) y (3.2.20) nos permite aplicar la Proposición 3.2.1, así para todos $0<t'<t<T$,

$$\begin{aligned}\|w(t,\cdot)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)}&\le\mathcal{H}^{-1}(t-t'+\mathcal{H}(\|w(t',\cdot)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)}))\\&=\kappa\exp\left\{C\left(t-t'+\frac{1}{C}\log\left(\frac{\kappa+\|w(t',\cdot)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)}}{\kappa}\right)\right)\right\}-\kappa\\&=\kappa\exp C(t-t')\exp\left\{\log\left(\frac{\kappa+\|w(t',\cdot)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)}}{\kappa}\right)\right\}-\kappa\\&=\kappa e^{C(t-t')}\left(\frac{\kappa+\|w(t',\cdot)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)}}{\kappa}\right)-\kappa\\&=e^{C(t-t')}(\kappa+\|w(t',\cdot)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)})-\kappa.\end{aligned} \tag{3.2.21}$$

Por el ítem (iii) del Teorema 2.2.1, $u(t',\cdot)\longrightarrow u_0$ y $v(t',\cdot)\longrightarrow u_0$, uniformemente en $\mathbb{R}^N$ cuando $t'\longrightarrow 0$. De lo anterior concluimos que $\|w(t',\cdot)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)}\longrightarrow 0$, $t'\longrightarrow 0$ y por (3.2.21), si también hacemos $\kappa \longrightarrow 0$ entonces $0 \leq \|w(t,\cdot)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} \leq 0$ y por lo tanto $w(t,\cdot) = 0$ c.t.p. $t \in (0,T)$. Por continuidad concluimos que $u = v$ en $(0,T) \times \mathbb{R}^N$. ☑

Observación 3.2.3. Notemos que la unicidad referida se sigue básicamente de que κ es arbitrario, esencialmente no hay restricción alguna sobre esta constante y no hay una dependencia exclusiva sobre las condiciones que satisface la solución, como por ejemplo la convergencia uniforme al dato inicial.

Capítulo 4

Estimativo L^∞ del gradiente de la solución

Con el fin de mostrar existencia de una solución de (2.1.1) en el sentido del Teorema 2.2.1, requerimos primero investigar la noción de solución débil para nuestro p.v.i. de interés. Una solución de este tipo está determinada por el kernel asociado al operador g_λ y las propiedades de dicho kernel (ver Apéndice 6.2) nos permiten establecer, por ejemplo, el estimativo (2.2.2).

4.1. Solución débil del p.v.i (2.1.1)

Comenzamos discutiendo qué es una solución débil para (2.1.1) y en parte, qué motivación hay detrás.

Definición 4.1.1. Sean $\lambda \in (1,2)$, $u_0 \in W^{1,\infty}(\mathbb{R}^N)$, $T > 0$ y F satisfaciendo (2.1.2). Una *solución débil* de (2.1.1) en $[0,T]$ es una función $u \in L^\infty((0,T)\times\mathbb{R}^N)$ tal que $\nabla u \in L^\infty((0,T)\times\mathbb{R}^N)^N$ y, c.t.p. $(t,x) \in (0,T)\times\mathbb{R}^N$,

$$u(t,x) = K_\lambda(t,\cdot) * u_0(x) + \int_0^t K_\lambda(t-s,\cdot) * F(s,\cdot,u(s,\cdot),\nabla u(s,\cdot))(x)ds, \tag{4.1.1}$$

donde K_λ es el kernel asociado al operador integral g_λ y definido sobre $(0,+\infty)\times\mathbb{R}^N$ vía la transformada de Fourier por $K_\lambda(t,x) := \mathcal{F}^{-1}(e^{-t|\cdot|^\lambda})(x)$.

Estudiaremos con detalle las propiedades de K_λ en el Apéndice 6.2, donde destacamos y probamos las más relevantes (ver [4], sección 1.2 y [14], sección 2). El operador $K_\lambda(t,\cdot)$ $(t>0)$ define un *molificador*, de ahí que sea posible hacer *regularización por convolución* y que la solución en el Teorema 2.2.1 sea suave, (en las condiciones del principio de Duhamel). La solución del p.v.i $\partial_t v + g_\lambda[v] = 0$, con condición inicial $v(0,\cdot) = v_0 \in C_b(\mathbb{R}^N)$ en concordancia con (4.1.1), viene dada por $v(t,x) = K_\lambda(t,\cdot) * v(0,\cdot)(x)$, pues es posible verificar (ver [14], Proposición 5.3) que $\partial_t v = -g_\lambda[v]$. Esto en parte motiva por qué son importantes las propiedades de K_λ que anunciaremos a continuación:

Las propiedades de K_λ son:

(K1) *Homogeneidad:* para todo $(t, x) \in (0, +\infty) \times \mathbb{R}^N$, $K_\lambda(t, x) = t^{-N/\lambda} K_\lambda(1, t^{-1/\lambda} x)$.

(K2) *Regularidad:* $K_\lambda \in C^\infty((0, +\infty) \times \mathbb{R}^N)$, para todo m entero no negativo y para todo multi-índice β, con $|\beta| = m$, existe $B_m > 0$ tal que

$$|\partial_x^\beta K_\lambda(t, x)| \leq t^{-(N+m)/\lambda} \frac{B_m}{1 + t^{-(N+1)/\lambda} |x|^{N+1}},$$

para todo $(t, x) \in (0, +\infty) \times \mathbb{R}^N$.

(K3) $K_\lambda \geq 0$ y para todo $t > 0$, $\|K_\lambda(t, \cdot)\|_{L^1(\mathbb{R}^N)} = 1$. Más aún, $(K_\lambda(t, \cdot))_{t>0}$, es una *aproximación a la identidad.*

(K4) Existe $\mathcal{K} > 0$ tal que para todo $t > 0$, $\|\nabla K_\lambda(t, \cdot)\|_{L^1(\mathbb{R}^N)} \leq \mathcal{K} t^{-1/\lambda}$.

(K5) *Propiedad de semigrupo:* para todos t y $t' > 0$, $K_\lambda(t + t', \cdot) = K_\lambda(t, \cdot) * K_\lambda(t', \cdot)$.

(K6) *Continuidad:* la función $t \in (0, +\infty) \mapsto K_\lambda(t, \cdot) \in L^1(\mathbb{R}^N)$ es continua, es decir, para todo $t_0 > 0$ $\lim_{t \to t_0} \|K_\lambda(t, \cdot) - K_\lambda(t_0, \cdot)\|_{L^1(\mathbb{R}^N)} = 0$.

Como mencionamos anteriormente, en el apéndice trataremos sobre la prueba de estas propiedades y en lo que sigue, las usaremos para demostrar los resultados que nos conllevarán a la prueba del Teorema 2.2.1. Iniciemos viendo, por ejemplo, que (4.1.1) está bien definida:

Puesto que $u_0 \in L^\infty(\mathbb{R}^N)$, por (K3) y la desigualdad de Young para la convolución (con $p = 1$, $q = \infty$ y $r = \infty$) tenemos que c.t.p. $x \in \mathbb{R}^N$:

$$|K_\lambda(t, \cdot) * u_0(x)| \leq \|K_\lambda(t, \cdot) * u_0\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} \leq \|K_\lambda(t, \cdot)\|_{L^1(\mathbb{R}^N)} \|u_0\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} = \|u_0\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} < \infty.$$

En cuanto al segundo término de (4.1.1) podemos aplicar (2.1.2) con el multi índice $\alpha = (0, ..., 0) \in \mathbb{N}^{2N+2}$ y $R := \max(\|u\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)}, \|\nabla u\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)})$ para estimar

$$\int_0^t |K_\lambda(t - s, \cdot) * F(s, \cdot, u(s, \cdot), \nabla u(s, \cdot))(x)| ds$$

$$\leq \int_0^t \|K_\lambda(t - \cdot, \cdot)\|_{L^1(\mathbb{R}^N)} \|F(s, x - \cdot, u(s, x - \cdot), \nabla u(s, x - \cdot))\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} ds$$

$$\leq T \|F(\cdot, \cdot, u, \nabla u)\|_{L^\infty} < \infty,$$

donde la última norma infinito es tomada en $[0, T] \times \mathbb{R}^N \times [-R, R] \times B_R$. Exhibimos ahora el teorema que proporciona una solución débil para el p.v.i. (2.1.1):

Teorema 4.1.2 (Existencia y unicidad local de una solución débil para (2.1.1)). *Sean $\lambda \in (1, 2)$, $u_0 \in W^{1,\infty}(\mathbb{R}^N)$ y F verificando (2.1.2). Entonces:*

(a) *Para todo* $T > 0$, *existe a lo más una solución débil de* (2.1.1) *en* $[0, T]$.

(b) *Una solución débil de* (2.1.1) *en* $[0, T]$ *satisface (i),(ii) y (iii) del Teorema* 2.2.1.

(c) *Sea* $M \geq \|u_0\|_{W^{1,\infty}(\mathbb{R}^N)}$. *Existe* $T > 0$, *dependiendo únicamente de* M *y las constantes de* (2.1.2), *tal que* (2.1.1) *tiene una solución débil en* $[0, T]$.

Este teorema por supuesto hace parte de los resutados fuertes de esta tesis y parte de la prueba, específicamente los incisos (a) y (c), son aplicaciones (un tanto similares) del Teorema del Punto fijo de Banach. Antes de probarlo abordaremos un resultado en el siguiente capítulo (Proposición 5.1.1) que nos permitirá obtener la regularidad espacial de la solución. Entre tanto aprovecharemos la noción de solución débil y este teorema para demostrar el estimativo (2.2.2) que mencionamos al inicio de la Sección 3.2.

Proposición 4.1.3. *Sea* $1 < \lambda < 2$ *y* $u_0 \in W^{1,\infty}(\mathbb{R}^N)$. *Supongamos que* F *satisface* (2.1.2) *y que* (2.1.4) *también se verifica. Si* u *es solución débil de* (2.1.1) *en* $[0, T]$ *y* $R \geq \|u\|_{L^\infty((0,T)\times\mathbb{R}^N)}$, *entonces* (2.2.2) *se tiene para todo* $0 < t < T$.

La prueba consiste en adaptar la prueba de la Proposición 3.2.1 y tener en cuenta que es posible, como en el Lema 3.1.2, extender continuamente g_λ a $C_b^3(\mathbb{R}^N)$.

Prueba.
Paso 1 (Acotar $\partial_i u$, $i = 1, 2, ..., N$*).* Sea $\varphi \in C_b^3(\mathbb{R}^N)$. Por el teorema de derivación bajo el signo integral y el ítem (ii) al final del Teorema 3.1.1, se tiene que

$$\begin{aligned}
\partial_i(g_\lambda[\varphi])(x) &= \partial_i\left(-C_N(\lambda)\int_{\mathbb{R}^N}\frac{\varphi(x+z)-\varphi(x)-\nabla\varphi(x)\cdot z}{|z|^{N+\lambda}}dz\right)\\
&= -C_N(\lambda)\partial_i\left(\int_{\mathbb{R}^N}\frac{\varphi(x+z)-\varphi(x)-\nabla\varphi(x)\cdot z}{|z|^{N+\lambda}}dz\right)\\
&= -C_N(\lambda)\int_{\mathbb{R}^N}\frac{\partial_i\varphi(x+z)-\partial_i\varphi(x)-(\nabla\partial_i\varphi(x))\cdot z}{|z|^{N+\lambda}}dz\\
&= g_\lambda[\partial_i\varphi](x).
\end{aligned} \tag{4.1.2}$$

La aplicación del teorema de derivación bajo el signo integral se justifica considerando $z \mapsto (\varphi(x+z) - \varphi(x) - \nabla\varphi(x)\cdot z)|z|^{-N-\lambda}$, que como vimos en la prueba del Teorema 3.1.1 se domina por una función integrable de z y además al diferenciar con respecto a x_i, la misma función dominante también acota dicha derivada.

Como u satisface la e.d.p. (2.1.1), $u \in C^3$ y $F \in C^\infty$, la regla de la cadena y (4.1.2) nos da que

$$\partial_t(\partial_i u)(t,x) + g_\lambda[\partial_i u(t,\cdot)](x) = \partial_{x_i}F(t,x,u(t,x),\nabla u(t,x))$$
$$+ \partial_s F(t,x,u(t,x),\nabla u(t,x))\partial_i u(t,x) \tag{4.1.3}$$
$$+ \nabla_\xi F(t,x,u(t,x),\nabla u(t,x)) \cdot \nabla(\partial_i u)(t,x).$$

Sea $a \in (0,T)$. Puesto que $\partial_i u(\cdot,x) \in C_b^2(a,T)$ tenemos que $\partial_t^2 \partial_i u = \partial_t(\partial_t \partial_i u)$ es acotada en $(a/2,T)\times\mathbb{R}^N$ por una constante $C_{a,i}$, entonces para $t\in(a,T), \tau\in(0,a/2)$ y $x\in\mathbb{R}^N$, el teorema de Taylor de segundo orden aplicado a $\partial_i u$ con respecto a t nos da que

$$\partial_i u(w,x) = \partial_i u(t,x) + \partial_t(\partial_i u)(t,x)(w-t) + \underbrace{\frac{1}{2}\partial_t^2(\partial_i u)(p,x)(w-t)^2}_{\text{Resto}},$$

para algún p entre w y t. Haciendo $w := t-\tau$, nos queda $(a/2 < t-\tau < T)$

$$\partial_i u(t-\tau,x) = \partial_i u(t,x) - \tau\partial_t\partial_i u(t,x) + \frac{\tau^2}{2}\partial_t^2\partial_i u(p,x).$$

Equivalentemente por (4.1.3)

$$\partial_i u(t,x) = \partial_i u(t-\tau,x) + \tau\partial_t\partial_i u(t,x) - \frac{\tau^2}{2}\partial_t^2\partial_i u(p,x)$$
$$\leq \partial_i u(t-\tau,x) + \tau\partial_t\partial_i u(t,x) + \tau^2|\partial_t^2\partial_i u(p,x)|$$
$$\leq \partial_i u(t-\tau,x) + \tau\partial_t\partial_i u(t,x) + C_{a,i}\tau^2$$
$$(4{,}1{,}3 \text{ En el segundo término}) \leq \sup_{\mathbb{R}^N}\partial_i u(t-\tau,\cdot) + \tau\partial_{x_i}F(t,x,u(t,x),\nabla u(t,x)) \tag{4.1.4}$$
$$+ \tau\partial_s F(t,x,u(t,x),\nabla u(t,x))\partial_i u(t,x)$$
$$+ \tau\nabla_\xi F(t,x,u(t,x),\nabla u(t,x)) \cdot \nabla(\partial_i u)(t,x)$$
$$- \tau g_\lambda[\partial_i u(t,\cdot)](x) + C_{a,i}\tau^2.$$

Supongamos que $\sup_{\mathbb{R}^N}\partial_i u(t,\cdot) > 0$ y sea $(x_n)_{n\geq 1}$ en $\mathbb{R}^N$ una secuencia tal que $\partial_i u(t,x_n) \to \sup_{\mathbb{R}^N}\partial_i u(t,\cdot)$. Como $\partial_i u(t,\cdot)\in C_b^2(\mathbb{R}^N)$, el Teorema 3.1.4 nos da que $\liminf_{n\to\infty} g_\lambda[\partial_i u(t,\cdot)](x_n) \geq 0$ y $\lim_{n\to\infty}\nabla(\partial_i u)(t,x_n) = 0$ como en la prueba del teorema.

De acuerdo a nuestras consideraciones, para n suficientemente grande se tiene que $\partial_i u(t,x_n) > 0$. Aplicando (4.1.4) en $x = x_n$, deducimos,

$$\partial_i u(t,x_n) \leq \sup_{\mathbb{R}^N}\partial_i u(t-\tau,\cdot) + \tau\partial_{x_i}F(t,x_n,u(t,x_n),\nabla u(t,x_n))$$
$$+ \tau\partial_s F(t,x_n,u(t,x_n),\nabla u(t,x_n))\partial_i u(t,x_n)$$
$$+ \tau\nabla_\xi F(t,x_n,u(t,x_n),\nabla u(t,x_n)) \cdot \nabla(\partial_i u)(t,x_n) \tag{4.1.5}$$
$$- \tau g_\lambda[\partial_i u(t,\cdot)](x_n) + C_{a,i}\tau^2.$$

Deseamos acotar los tres primeros términos que están multiplicados por τ en (4.1.5), para que luego de tomar límite superior podamos acotar el término asociado a g_λ.

Sea $R > 0$ tal que $R \geq \|u\|_{L^\infty((0,T)\times\mathbb{R}^N)}$ (como en la hipótesis). Puesto que $|u(t, x_n)| \leq \|u\|_\infty \leq R$, por la segunda desigualdad en (2.1.4) tenemos que

$$\begin{aligned}
\partial_{x_i} F(t, x_n, u(t, x_n), \nabla u(t, x_n)) &\leq |\partial_{x_i} F(t, x_n, u(t, x_n), \nabla u(t, x_n))| \\
&\leq |\nabla_x F(t, x_n, u(t, x_n), \nabla u(t, x_n))| \\
&\leq \Gamma_{T,R}(|\nabla u(t, x_n)|) \\
&\leq \Gamma_{T,R}\left(\sup_{\mathbb{R}^N} |\nabla u(t, \cdot)|\right).
\end{aligned} \tag{4.1.6}$$

Notemos ahora que si $\partial_s F \leq 0$, trivialmente vale que

$$\underbrace{\partial_i u(t, x_n)}_{>0} \partial_s F(t, x_n, u(t, x_n), \nabla u(t, x_n)) \leq 0 \leq \Gamma_{T,R}\left(\sup_{\mathbb{R}^N} |\nabla u(t, \cdot)|\right),$$

y si es $\partial_s F > 0$ entonces

$$\begin{aligned}
\partial_i u(t, x_n) \partial_s F(t, x_n, u(t, x_n), \nabla u(t, x_n)) &= |\partial_i u(t, x_n)| \partial_s F(t, x_n, u(t, x_n), \nabla u(t, x_n)) \\
&\leq |\nabla u(t, x_n)| \partial_s F(t, x_n, u(t, x_n), \nabla u(t, x_n)) \\
&\leq \Gamma_{T,R}(|\nabla u(t, x_n)|) \\
&\leq \Gamma_{T,R}\left(\sup_{\mathbb{R}^N} |\nabla u(t, \cdot)|\right).
\end{aligned} \tag{4.1.7}$$

De otro lado, por (2.1.2) y la desigualdad de Cauchy-Schwarz

$$\begin{aligned}
\nabla_\xi F(t, x_n, u(t, x_n), \nabla u(t, x_n)) \cdot \nabla(\partial_i u)(t, x_n) &\leq |\nabla_\xi F(t, x_n, u(t, x_n), \nabla u(t, x_n))| |\nabla(\partial_i u)(t, x_n)| \\
&\leq M_R |\nabla(\partial_i u)(t, x_n)|,
\end{aligned} \tag{4.1.8}$$

donde $M_R := \sup\{|\nabla_\xi F(t, x, u(t, x), \nabla u(t, x))| : (t, x, s, \xi) \in (0, T) \times \mathbb{R}^N \times [-R, R] \times B_R\}$. De (4.1.5) a (4.1.8) concluimos que para $t \in (0, T)$ y $\tau \in (0, a/2)$

$$\begin{aligned}
\partial_i u(t, x_n) \leq \sup_{\mathbb{R}^N} u(t - \tau, \cdot) &+ \tau \Gamma_{T,R}\left(\sup_{\mathbb{R}^N} |\nabla u(t, \cdot)|\right) \\
&+ \tau \Gamma_{T,R}\left(\sup_{\mathbb{R}^N} |\nabla u(t, \cdot)|\right) + M_R |\nabla(\partial_i u)(t, x_n)| \\
&- \tau g_\lambda[\partial_i u(t, \cdot)](x_n) + C_{a,i} \tau^2.
\end{aligned}$$

Al tomar límite inferior nos queda

$$\begin{aligned}\liminf_{n\longrightarrow\infty} \partial_i u(t,x_n) \leq \sup_{\mathbb{R}^N} \partial_i u(t-\tau,\cdot) + 2\tau\Gamma_{T,R}\left(\sup_{\mathbb{R}^N}|\nabla u(t,\cdot)|\right)\\ + M_R \underbrace{\liminf_{n\longrightarrow\infty} |\nabla(\partial_i u)(t,x_n)|}_{=0}\\ - \tau \liminf_{n\longrightarrow\infty} g_\lambda[(\partial_i u)(t\cdot)](x_n) + C_{a,i}\tau^2,\end{aligned}$$

es decir,

$$\sup_{\mathbb{R}^N} \partial_i u(t,\cdot) \leq \sup_{\mathbb{R}^N} \partial_i u(t-\tau,\cdot) + 2\tau\Gamma_{T,R}\left(\sup_{\mathbb{R}^N}|\nabla u(t,\cdot)|\right) + C_{a,i}\tau^2 \tag{4.1.9}$$

donde hemos usado que $-\liminf_{n\longrightarrow\infty} g_\lambda[\partial_i u(t,\cdot)](x_n) \leq 0$.

De la misma manera que razonamos en la prueba de la Proposición 3.2.1, si definimos la función $t \in (0,+\infty) \mapsto \omega_{i,+}(t) := \max(\sup_{\mathbb{R}^N} \partial_i u(t,\cdot), 0)$, vemos que independientemente del signo de $\sup_{\mathbb{R}^N} \partial_i u(t,\cdot)$ se tiene la desigualdad

$$\omega_{i,+}(t) \leq \omega_{i,+}(t-\tau) + 2\tau\Gamma_{T,R}(\|Du(t,\cdot)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)}) + C_{a,i}\tau^2, \tag{4.1.10}$$

para todo $t \in (a,T)$ y $0 < \tau < a/2$:

- Si $\max(\sup_{\mathbb{R}^N} \partial_i u(t,\cdot), 0) = \sup_{\mathbb{R}^N} \partial_i u(t,\cdot) > 0$, (4.1.10) es justamente (4.1.9) (se tiene en cuenta que $\|Du(t,\cdot)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} = \sum_{i=1}^N \|\partial_i u(t,\cdot)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)}$ y que $\Gamma_{T,R}$ es no decreciente).
- Si $\max(\sup_{\mathbb{R}^N} \partial_i u(t,\cdot), 0) = 0 > \sup_{\mathbb{R}^N} \partial_i u(t,\cdot)$, la desigualdad es directa, pues

$$\omega_{i,+}(t) - \omega_{i,+}(t-\tau) = 0 \leq \underbrace{2\tau\Gamma_{T,R}(0)}_{\geq 0} + \underbrace{C_{a,i}\tau^2}_{\geq 0}.$$

De otra parte (también como en la prueba de la Proposición 3.2.1), si aplicamos el razonamiento anterior a la función $-u$ (y en este caso usando la función $-F(\cdot,\cdot,-\cdot,-\cdot)$ la cual satisface (2.1.2) y (2.1.4)) se tiene que (4.1.10) también es satisfecha con $\omega_{i,-}(t) := \max(\sup_{\mathbb{R}^N}(-\partial_i u(t,\cdot), 0)) = \max(-\inf_{\mathbb{R}^N} \partial_i u(t,\cdot), 0)$.

En consecuencia, (4.1.10) se tiene para $\max(\omega_{i,+}(t), \omega_{i,-}(t)) := \|\partial_i u(t,\cdot)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)}$, es decir

$$\|\partial_i u(t,\cdot)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} \leq \|\partial_i u(t-\tau,\cdot)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} + 2\tau\Gamma_{T,R}(\|Du(t,\cdot)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)}) + C_{a,i}\tau^2,$$

que sumando sobre i desde 1 hasta N nos da

$$\begin{aligned}\|Du(t,\cdot)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} \leq \|Du(t-\tau,\cdot)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} + 2N\tau\Gamma_{T,R}(\|Du(t,\cdot)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)})\\ + \sum_{i=1}^N C_{a.i}\tau^2,\end{aligned} \tag{4.1.11}$$

para todo $a < t < T$ y todo $0 < \tau < a/2$.

Paso 2. Probamos que si $0 < t' < t < T$, entonces

$$\|Du(t,\cdot)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} \leq (\mathcal{G}_{T,R})^{-1}(t - t' + \mathcal{G}_{T,R}(\|Du(t,\cdot)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)})). \tag{4.1.12}$$

Consideremos las funciones

$$\omega_i(t) = \text{máx}(\omega_{i,+}(t), \omega_{i,-}(t)) = \|\partial_i u(t,\cdot)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)}$$

y

$$\omega(t) = \sum_{i=1}^{N} \omega_i(t) = \|Du(t,\cdot)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)},$$

para todo $t \in (0,T)$.

Veamos que c.t.p. $t \in (0,T)$

$$\omega'(t) \leq 2N\Gamma_{T,R}(\omega(t)). \tag{4.1.13}$$

Como en la prueba de la Afirmación 3.2.2 podemos probar que $\omega_{i,\pm}$ es localmente Lipschitz en $(0,T)$ y entonces por el Teorema de Rademacher esta función es diferenciable en casi todo punto de $(0,T)$; además para todo $a < t < T$ y $0 < \tau < a/2$ ($a \in (0,T)$) por (4.1.10) concluimos que c.t.p. $t \in (0,T)$

$$\omega_{i,\pm}'(t) \leq 2\Gamma_{T,R}(\omega(t)),$$

y por lo tanto también $\omega_i(t) \leq 2\Gamma_{T,R}(\omega(t))$ (ver [3], lema 2.1.7). Sumando sobre N concluimos entonces (4.1.13).

Consideremos ahora la función $t \in (0,T) \mapsto \mathcal{G}_{T,R}(\omega(t)) \in [0,+\infty)$, donde

$$\mathcal{G}_{T,R}(\omega(t)) = \int_0^{\omega(t)} \frac{1}{2N\Gamma_{T,R}(b)} db.$$

$\mathcal{G}_{T,R}$ es un difeomorfismo de clase C^1 y no decreciente como se anotó en la observación 2.1.2. Como en la prueba de la Proposición 3.2 para $\mathcal{H} \circ \Phi$, por la regla de la cadena, el Teorema Fundamental del Cálculo y (4.1.13) tenemos que $\mathcal{G}_{T,R}(\omega(t))$ tiene derivada acotada por 1 c.t.p. en $(0,T)$:

$$(\mathcal{G}_{T,R} \circ \omega)'(t) = (\mathcal{G}_{T,R}'(\omega(t)))\omega'(t) = \frac{1}{2N\Gamma_{T,R}(\omega(t))}\omega'(t) \leq 1.$$

$\mathcal{G}_{T,R}(\omega(t))$ es localmente Lipschitz continua en $(0,T)$ ya que ω lo es. Por lo anterior podemos aplicar el Teorema del Valor Medio y probar que si $0 < t' < t < T$ entonces existe $t^0 \in (t',t)$ tal que

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_{T,R}(\omega(t)) - \mathcal{G}_{T,R}(\omega(t')) &= (\mathcal{G}_{T,R}(\omega)'(t^0)(t-t') \\ &\leq t - t'. \end{aligned}$$

Luego

$$\omega(t) \leq \mathcal{G}_{T,R}^{-1}(t - t' + \mathcal{G}_{T,R}(\omega(t'))),$$

cuando $0 < t' < t < T$, que es justamente (4.1.12).

Paso 3. Veamos que $\limsup_{t'\to 0} \|Du(t',\cdot)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} \leq \|Du_0\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)}$.
La idea es diferenciar respecto a x_i la fórmula de Duhamel.

Comenzamos por notar que la función u_0 de $W^{1,\infty}(\mathbb{R}^N)$ es Lipschitz (ver [12], Teorema 9.12): tenemos que c.t.p. $x, y \in \mathbb{R}^N$, por el teorema del valor medio existe $z \in [x, y]$ tal que

$$|u_0(x) - u_0(y)|_{\mathbb{R}^N} \leq \|Du_0(z)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)}|x-y|_{\mathbb{R}^N} \leq M|x-y|_{\mathbb{R}^N},$$

donde $M = \sum_{i=1}^N M_i$, con M_i tal que $\|\partial_i u_0(z)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} \leq M_i$. Con esto tenemos que dados $x \in \mathbb{R}^N$, $h > 0$ y $t' \in (0, T)$, la función

$$y \mapsto K_\lambda(t', y)\left(\frac{u_0[(x-y) + he_1] - u_0(x-y)}{h|e_1|}\right),$$

donde $e_1 = (0, ..., 1, ..., 0)^t$, es integrable. Ya que por (K3) y la condición Lipschitz de u_0 tenemos

$$\int_{\mathbb{R}^N} \left|K_\lambda(t', y)\left(\frac{u_0[(x-y) + he_1] - u_0(x-y)}{h|e_1|}\right)\right| dy \leq M \int_{\mathbb{R}^N} K_\lambda(t', y)dy < \infty.$$

Teniendo en cuenta la definición de derivada direccional y por el Teorema de la Convergencia Dominada, encontramos que para $x \in \mathbb{R}^N$

$$\partial_i(K_\lambda * u_0)(x) = \lim_{h\to 0} \frac{K_\lambda(t', \cdot) * u_0(x + he_1) - K_\lambda(t', \cdot) * u_0(x)}{h}$$

$$\lim_{h\to 0} \int_{\mathbb{R}^N} K_\lambda(t', y)\left(\frac{u_0[(x-y) + he_1] - u_0(x-y)}{h}\right) dy \tag{4.1.14}$$

$$= \int_{\mathbb{R}^N} K_\lambda(t', \cdot)\partial_i u_0(x-y)dy = K_\lambda(t', \cdot) * \partial_i u_0(x),$$

En palabras, significa que podemos pasar la derivada espacial del primer término de (4.1.1) al dato inicial.

De las propiedades (K2) y (K4) se sigue que $K_\lambda \in C^1(\mathbb{R}^N) \cap W^{1,1}(\mathbb{R}^N)$ (por la segunda parte de (K2) las derivadas espaciales de K_λ son localmente integrables y por lo tanto estas derivadas en sentido clásico son también derivadas débiles. Además por (2.1.2), $F(s, \cdot, u(s, \cdot), \nabla u(s, \cdot)) \in L^\infty(\mathbb{R}^N)$ para $s \in (0, t')$. Del Lema 6.1.1 concluimos que para $s \in (0, t')$

$$\partial_i[K_\lambda(t'-s, \cdot) * F(s, \cdot, u(s, \cdot), \nabla u(s, \cdot))](x) = \partial_i K_\lambda(t'-s, \cdot) * F(s, \cdot, u(s, \cdot), \nabla u(s, \cdot))(x) \tag{4.1.15}$$

Consideremos ahora la función $\mathbb{R}^N \times (0, t') \longrightarrow \mathbb{R}$, definida por

$$(x, s) \mapsto K_\lambda(t'-s, \cdot) * F(s, \cdot, u(s, \cdot), \nabla u(s, \cdot))(x). \tag{4.1.16}$$

Esta función verifica todas las hipótesis del teorema de derivación bajo el signo de la integral:

- (4.1.16) es integrable como función de s: por la desigualdad de Hölder

$$|K_\lambda(t'-s, \cdot) * F(s, \cdot, u(s, \cdot), \nabla u(s, \cdot))(x)|$$

$$\leq \int_{\mathbb{R}^N} |K_\lambda(t'-s, y)F(s, x-y, u(s, x-y), \nabla u(s, x-y))|dy$$

$$\leq \underbrace{\|K_\lambda(t'-s, \cdot)\|_{L^1(\mathbb{R}^N)}}_{1} \|F(s, \cdot, u(s, \cdot).\nabla u(s, \cdot))\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)},$$

luego

$$\int_0^{t'} |K_\lambda(t'-s,\cdot) * F(s,\cdot,u(s,\cdot),\nabla u(s,\cdot))(x)|ds \le t' \|F(s,\cdot,u(s,\cdot).\nabla u(s,\cdot))\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)}$$

$$\le T\|F(s,\cdot,u(s,\cdot).\nabla u(s,\cdot))\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)}$$

$$< \infty.$$

- (4.1.16) como función de x es diferenciable (respecto a la i-ésima coordenada x_i) y esta derivada es acotada uniformemente por una función integrable de $s \in (0,t')$:

  Por (4.1.15) la derivada indicada existe y para $x \in \mathbb{R}^N$ se tiene que, por la desigualdad de Hölder nuevamente y (K4),

$$|\partial_i K_\lambda(t'-s,\cdot) * F(s,\cdot,u(s,\cdot),\nabla u(s,\cdot))(x)|$$

$$\le \int_{\mathbb{R}^N} |\partial_i K_\lambda(t'-s,y) F(s,x-y,u(s,x-y),\nabla u(s,x-y))|dy$$

$$\le \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla K_\lambda(t'-s,y) F(s,x-y,u(s,x-y),\nabla u(s,x-y))|dy$$

$$\le \|\nabla K_\lambda(t'-s,\cdot)\|_{L^1(\mathbb{R}^N)} \|F(s,\cdot,u(s,\cdot),\nabla u(s,\cdot))\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)}$$

$$\le \mathcal{K}(t'-s)^{-1/\lambda} \|F(s,\cdot,u(s,\cdot),\nabla u(s,\cdot))\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)},$$

  Con el cambio de variables $\tau = t'-s$,

$$\int_0^{t'} (t'-s)^{-1/\lambda} ds = \int_0^{t'} \tau^{-1/\lambda} d\tau = \frac{t'^{1-\frac{1}{\lambda}}}{1-\frac{1}{\lambda}} < \infty,$$

  porque $1 < \lambda < 2$ y $1 - \frac{1}{\lambda} > 0$.

Así, de (4.1.14), (4.1.15) y el teorema de derivación bajo el signo integral, la derivada respecto a x_i en (4.1.1) es

$$\partial_i u(t',x) = K_\lambda(t',\cdot) * \partial_i u_0(x) + \int_0^{t'} \partial_i K_\lambda(t'-s,\cdot) * F(s\cdot,u(s,\cdot),\nabla u(s,\cdot))(x)ds. \tag{4.1.17}$$

Además, la desigualdad de Young para la convolución, con $p = 1$ y $q = r = \infty$, nos da que $\partial_i K_\lambda(t',\cdot) * u_0$ y $\partial_i K(t'-s,\cdot) * F(s,\cdot,u(s,\cdot),\nabla u(s,\cdot))$ son funciones de $L^\infty(\mathbb{R}^N)$ y entonces por

(4.1.17)

$$
\begin{aligned}
\|\partial_i u(t',\cdot)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} \leq & \|K_\lambda(t',\cdot) * \partial_i u_0\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} \\
& + \int\limits_0^{t'} \|\partial_i K_\lambda(t'-s,\cdot) * F(s,\cdot,u(s,\cdot),\nabla u(s,\cdot))\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} ds \\
& \leq \|K_\lambda(t',\cdot)\|_{L^1(\mathbb{R}^N)} \|\partial_i u_0\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} \\
& + \mathcal{K}\|F(\cdot,\cdot,u,\nabla u)\|_{L^\infty} \int\limits_0^{t'} (t'-s)^{-1/\lambda} ds \\
& = \|\partial_i u_0\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} + \|F(\cdot,\cdot,u,\nabla u)\|_{L^\infty} \mathcal{K} \frac{t'^{1-\frac{1}{\lambda}}}{1-\frac{1}{\lambda}},
\end{aligned}
$$

donde la norma infinito de $F(\cdot,\cdot,u,\nabla u)$ se toma en $(0,T)\times\mathbb{R}^N\times[-R,R]\times B_R$.

Sumando sobre i y tomando límite superior cuando t' tiende a 0 en esta desigualdad, conseguimos

$$\limsup_{t'\to 0} \|Du(t',\cdot)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} \leq \|Du_0\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)}.$$

Usando esto, al tomar límite superior cuando t' tiende a 0 en (4.1.12), concluimos

$$
\begin{aligned}
\|Du(t,\cdot)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} &\leq \mathcal{G}^{-1}_{T.R}\left[\limsup_{t'\to 0}(t-t'+\mathcal{G}_{T,R}(\|Du(t',\cdot)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)}))\right] \\
&= \mathcal{G}^{-1}_{T,R}(t+\mathcal{G}_{T,R}(\|Du_0\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)})),
\end{aligned}
$$

ya que $\mathcal{G}_{T,R}(\limsup_{t'\to 0}\|Du(t'\cdot)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)}) \leq \mathcal{G}_{T,R}(\|Du_0\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)})$. ☑

Capítulo 5

Existencia de soluciones

Nuestro propósito en este punto es asegurar la existencia y unicidad de una solución de (2.1.1) en el sentido de la definición 2.1.5 y, junto con la Proposición 4.1.3, garantizar la existencia y unicidad en el sentido del Teorema 2.2.1.

5.1. Un resultado previo sobre regularidad

Con el fin de proveer una prueba completa del Teorema 4.1.2 de existencia y unicidad del capítulo 4, comenzamos con el siguiente resultado que es clave para justificar la regularidad allí indicada:

Proposición 5.1.1. *Sean $\lambda \in (1,2)$, $S > 0$, y $(t,x,\zeta) \in (0,S) \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N \longmapsto G(t,x,\zeta) \in \mathbb{R}$ una función continua. Supongamos que $\partial_x G$, $\partial_\zeta G$, $\partial_\zeta \partial_x G$ y $\partial_\zeta \partial_\zeta G$ existen y son continuas en $(0,S) \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N$. Supongamos también que existe una función $\omega : (0,+\infty) \longrightarrow \mathbb{R}^+$ tal que, para todo $L > 0$, G y las derivadas mencionadas están acotadas por $\omega(L)$ en $(0,S) \times \mathbb{R}^N \times B_L$.*
Sean $R_0 > 0$ y $R = (2+\mathcal{K})R_0$ con $\mathcal{K}$ como en (K4). Entonces existe $T_0 > 0$ que depende únicamente de λ, R_0 y ω tal que, si $T = \text{ínf}(S, T_0)$ y $V_0 \in L^\infty(\mathbb{R}^N)^N$ con $\|V_0\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)^N} \leq R_0$, existe una única $V \in C_b((0,T) \times \mathbb{R}^N)^N$ acotada por R tal que

$$V(t,x) = K_\lambda(t,\cdot) * V_0(x) + \int_0^t \nabla K_\lambda(t-s,\cdot) * G(s,\cdot,V(s,\cdot))(x)ds. \tag{5.1.1}$$

Más aún, $\partial_x V \in C((0,T) \times \mathbb{R}^N)^{N^2}$ y $\|\partial_x V\|_{C_b((a,T)\times\mathbb{R}^N)^{N^2}} \leq Ra^{-1/\lambda}$, para todo $a \in (0,T)$.

Prueba. Ver [4], Proposición 5 y [14], Proposición 5.1. ☑

5.2. Prueba del Teorema 4.1.2

Desarrollamos esta prueba utilizando las ideas de [14] Proposición 3.1 y [4] Lema 3. Iniciamos con la existencia de una solución un tanto particular:

(c) *(Existencia) Sea $M \geq \|u\|_{W^{1,\infty}(\mathbb{R}^N)}$. Existe $T > 0$, dependiendo únicamente de M y las constantes de (2.1.2), tal que el p.v.i (2.1.1) tiene a lo más una solución débil en $[0,T]$.*

Sea $M \geq \|u_0\|_{W^{1,\infty}(\mathbb{R}^N)}$ y F satisfaciendo (2.1.2). Definamos para $T > 0$

$$E_T := \{u \in L^\infty((0,T) \times \mathbb{R}^N) | \nabla u \in L^\infty((0,T) \times \mathbb{R}^N)^N\}$$

dotado de la norma

$$\|u\|_{E_T} = \|u\|_{L^\infty((0,T)\times\mathbb{R}^N)} + \|\nabla u\|_{L^\infty((0,T)\times\mathbb{R}^N)^N}.$$

Tenemos que $E_T \neq \emptyset$ ya que $C_0^\infty(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^N) \subset E_T$. Además E_T es un espacio de Banach:

Sea $\{u_k\}$ una secuencia de Cauchy en E_T. Se sabe que para cada $\varepsilon > 0$, existe un entero positivo, $\ell(\varepsilon)$, tal que $\|u_j - u_k\|_{E_T} < \varepsilon/2$ siempre que $j, k \geq \ell(\varepsilon)$. Por lo tanto, tenemos que $\|u_j - u_k\|_{L^\infty((0,T)\times\mathbb{R}^N)} < \varepsilon/2$ y $\|\nabla u_j - \nabla u_k\|_{L^\infty((0,T)\times\mathbb{R}^N)^N} < \varepsilon/2$ si $j, k \geq \ell(\varepsilon)$, de donde se sigue que c.t.p.$(t, x) \in (0, T) \times \mathbb{R}^N$

$$|u_j(t,x) - u_k(t,x)| < \varepsilon/2 \;\text{ y }\; |\nabla u_j(t,x) - \nabla u_k(t,x)| < \varepsilon/2. \tag{5.2.1}$$

Estas dos últimas desigualdades indican que $\{u_k(t, x)\}$ y $\{\nabla u_k(t, x)\}$ son secuencias de Cauchy en $\mathbb{R}$ y $\mathbb{R}^N$ respectivamente.

Definamos entonces c.t.p. $(t, x) \in (0, T) \times \mathbb{R}^N$

$$u(t,x) := \lim_{k\to\infty} u_k(t,x) \;\text{ y }\; \nabla u(t,x) := \lim_{k\to\infty} \nabla u_k(t,x).$$

Si hacemos $k \longrightarrow \infty$ en (5.2.1), nos queda que para todo $j \geq \ell(\varepsilon)$ y c.t.p. $(t, x) \in (0, T) \times \mathbb{R}^N$ $|u_j(t, x) - u(t, x)| \leq \varepsilon/2$ y $|\nabla u_j(t, x) - \nabla u(t, x)| \leq \varepsilon/2$. Esto prueba que $u_j - u$ y $\nabla u_j - \nabla u$ son esencialmente acotadas y así $u \in L^\infty((0, T) \times \mathbb{R}^N)$ y $\nabla u \in L^\infty((0, T) \times \mathbb{R}^N)^N$ (pues, sabemos que $(u_k, \nabla u_k) \in L^\infty((0, T) \times \mathbb{R}^N)$ y nuestro argumento prueba que las diferencias indicadas también están en los espacios indicados respectivamente). De hecho $\|u_j - u\|_{E_T} \leq \varepsilon$:

$$\begin{aligned}\|u_j - u\|_{E_T} &:= \|u_j - u\|_{L^\infty((0,T)\times\mathbb{R}^N)} + \|\nabla u_j - \nabla u\|_{L^\infty((0,T)\times\mathbb{R}^N)^N} \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,\end{aligned}$$

para todo $j \geq \ell(\varepsilon)$, es decir, $u_j \longrightarrow u$, $j \longrightarrow \infty$ en E_T.

Definamos para $u \in E_T$, $t \in (0, T)$ y c.t.p. $x \in \mathbb{R}^N$,

$$\Psi_T(u)(t,x) := K_\lambda(t,\cdot) * u_0(x) + \int_0^t K_\lambda(t-s,\cdot) * F(s,\cdot,u(s,\cdot),\nabla u(s,\cdot))(x)ds.$$

Vamos a probar que Ψ_T es una contracción en el espacio de Banach E_T. Probemos en primer lugar que $\Psi_T(E_T) \subset E_T$ (en particular que Ψ_T está bien definida) lo cual haremos probando que $\Psi_T(u)$ y $\partial_i\Psi_T(u)$ $(i = 1, ..., N)$ son continuas y acotadas

Sea $u \in E_T$ tal que $\|u\|_{E_T} \leq R_T$ (queremos comprobar que para una escogencia adecuada de T, Ψ_T lleva la bola cerrada de centro 0 y radio R_T en ella misma).

Probamos que $\Psi_T(u)$ es una función continua en (t,x) y acotada.

Veamos que el primer término de $\Psi_T(u)$ es una función continua en (t,x). Nótese primero que como $u_0 \in L^\infty(\mathbb{R}^N)$ y por (K3), si $t \in (0,T)$ y c.t.p. $x \in \mathbb{R}^N$, entonces

$$|K_\lambda(t,\cdot) * u_0(x)| \leq \int_{\mathbb{R}^N} |K_\lambda(t,x-y)u_0(y)|dy \leq \|u_0\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)}. \tag{5.2.2}$$

Consideremos la función que c.t.p. $(t,y) \in (0,T) \times \mathbb{R}^N \longmapsto K_\lambda(t,x-y)u_0(y) \in \mathbb{R}$. Esta función es integrable en $\mathbb{R}^N$ para cada t fijo por (5.2.2). Puesto que u_0 es acotada, entonces por (K6) la función $t \longmapsto K_\lambda(t,x-\cdot)u_0(\cdot)$ es continua para x fijo.

Busquemos una función $G \in L^1(\mathbb{R}^N)$ tal que $|K_\lambda(t,x-y)| \leq G(y)$.

Sea $t_0 \in (0,T)$. Aplicando (K2) con $m = 0$, tenemos que para todo $t \in (t_0,T)$ y todos $x,y \in \mathbb{R}^N$, existe $B_0 > 0$ tal que

$$\begin{aligned}|K_\lambda(t,x-y)| &\leq \frac{C_1(t_0,T)B_0}{1 + C_2(t_0,T)|x-y|^{N+1}} \\ &= \frac{\frac{C_1(t_0,T)B_0}{C_2(t_0,T)}}{C_2(t_0,T)^{-1} + |x-y|^{N+1}} \equiv \frac{C_1}{C_2 + |x-y|^{N+1}},\end{aligned}$$

donde $C_1, C_2 > 0$ dependen solamente de t_0 y T.

Observemos que para $x_0 \in \mathbb{R}^N$

$$|x_0 - y|^{N+1} = |(x_0 - x) + (x-y)|^{N+1} \leq 2^N(|x_0 - x|^{N+1} + |x-y|^{N+1}),$$

luego $|x-y|^{N+1} \geq \frac{1}{2^N}|x_0-y|^{N+1} - |x_0 - x|^{N+1}$. Entonces para todo $x \in \mathbb{R}^N$ tal que $|x_0 - x|^{N+1} \leq C_2/2^N$, todo $t \in (t_0,T)$ y todo $y \in \mathbb{R}^N$, se tiene que

$$-\frac{C_2}{2^N} \leq -|x_0 - x|^{N+1}.$$

Luego

$$\left(\frac{2^N - 1}{2^N}\right) C_2 \leq C_2 - |x_0 - x|^{N+1},$$

es decir,

$$\begin{aligned}\left(\frac{2^N - 1}{2^N}\right) C_2 + \frac{1}{2^N}|x_0 - y|^{N+1} &\leq C_2 + \frac{1}{2^N}|x_0-y|^{N+1} - |x_0 - x|^{N+1} \\ &\leq C_2 + |x-y|^{N+1}.\end{aligned}$$

Utilizamos este último estimativo para concluir que para los x arriba mencionados y todo $y \in \mathbb{R}^N$

$$\begin{aligned}|K_\lambda(t,x-y)| &\leq \frac{C_1}{C_2 + |x-y|^{N+1}} \\ &\leq \frac{C_1}{\left(\frac{2^N-1}{2^N}\right) C_2 + \frac{1}{2^N}|x_0 - y|^{N+1}} =: G(y),\end{aligned} \tag{5.2.3}$$

Siendo G integrable en $\mathbb{R}^N$ (coordenadas polares).

Podemos aplicar entonces el teorema de continuidad bajo el signo integral y concluir que $K_\lambda(t,\cdot)*u_0$ es continua en t, uniformemente con respecto a x. Ahora, si t es fijo, dado que $K_\lambda * u_0$ viene del producto de una función integrable (K_λ) por una función acotada (u_0) hacemos lo siguiente para probar que esta función es continua en x:

Sea $(K_n(t,\cdot))_{n\geq 1}$ una secuencia de funciones continuas y de soporte compacto tales que $K_n(t,\cdot) \longrightarrow K_\lambda(t,\cdot)$ cuando $n \longrightarrow \infty$, en $L^1(\mathbb{R}^N)$ (recordemos que $\overline{C_0^\infty(\mathbb{R}^N)}^{L^1(\mathbb{R}^N)} = L^1(\mathbb{R}^N)$ y $K_\lambda(t,\cdot) \in L^1(\mathbb{R}^N)$). Observemos que $(K_n(t,\cdot)*u_0)(x)$ es continua en x: como $K_n(t,\cdot)$ es uniformemente continua, dado $\varepsilon > 0$, elegimos $\delta > 0$ tal que $\delta < \varepsilon/\|u_0\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)}\mathrm{ds}(K_n)$ (ds denota el díametro del soporte) y para todos $x, y \in \mathbb{R}^N$ con $|x-y| < \delta$

$$
\begin{aligned}
|K_n(t,\cdot)*u_0(x) - K_n(t\cdot)*u_0(y)| &\leq \int\limits_{\mathbb{R}^N} |K_n(t,x-z) - K_n(t,y-z)||u_0|(z)dz \\
&\leq \|u_0\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} \int\limits_{\mathbb{R}^N} |K_n(t,x-z) - K_n(t,y-z)|dz \\
&< \|u_0\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} \frac{\varepsilon}{\|u_0\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)}\mathrm{ds}(K_n)}\mathrm{ds}(K_n) \\
&= \varepsilon.
\end{aligned}
$$

Por último verificamos que $K_n(t,\cdot)*u_0 \longrightarrow K_\lambda(t,\cdot)*u_0$ cuando $n \longrightarrow \infty$, uniformemente en $\mathbb{R}^N$ y, por ser $K_\lambda(t,\cdot)*u_0$ límite uniforme de funciones continuas, concluimos la continuidad buscada. En efecto, por la desigualdad de Hölder

$$
|K_n(t,\cdot)*u_0(x) - K_\lambda(t,\cdot)*u_0(x)| \leq \|u_0\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} \|K_n(t,\cdot) - K_\lambda(t,\cdot)\|_{L^1(\mathbb{R}^N)}.
$$

Luego

$$
\lim_{n\to\infty} |K_n(t,\cdot)*u_0(x) - K_\lambda(t,\cdot)*u_0(x)| \leq \|u_0\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} \underbrace{\lim_{n\to\infty} \|K_n(t,\cdot) - K_\lambda(t,\cdot)\|_{L^1(\mathbb{R}^N)}}_{=0},
$$

y así la convergencia es uniforme.

Continuidad del término integral de $\Psi_T(u)$ en (t,x). Sean H y P las funciones de valor real definidas sobre $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^N$ por

$$
H(s,x) := F(s,x,u(s,x),\nabla u(s,x))\chi_{[0,T]}(s) \;\text{ y }\; P(s,x) := K_\lambda(s,x)\chi_{[0,T]}(s).
$$

Si consideramos la convolución en $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^N$, entonces

$$
H * P(t,x) = \int\limits_0^t (K_\lambda(t-s,\cdot)*F(s,\cdot,u(s,\cdot),\nabla u(s,\cdot)))(x)ds.
$$

En efecto, vemos que $P \in L^1(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^N)$ porque por el teorema de Fubini-Tonelli y (K3)

$$\int_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}^N} |P(s,x)|d(x,s) = \int_0^T \int_{\mathbb{R}^N} |K_\lambda(s,x)|dxds = T.$$

De otra parte $H \in L^\infty(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^N)$, pues $|H(s,x)| \leq \|F(s,\cdot.u(s,\cdot),\nabla u(s,\cdot))\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} \leq C_{R_T}$ (aquí hemos usado la hipótesis (2.1.2) con el $R_T > 0$ considerado al inicio de la prueba).

Tenemos entonces que

$$\begin{aligned}
H * P(t,x) :=& \int_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}^N} H(s,y)P(t-s,x-y)dyds \\
=& \int_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}^N} F(s,y,u(s,y),\nabla u(s,y))\chi_{[0,T]}(s)K_\lambda(t-s,x-y)\chi_{[0,T]}(t-s)dyds \\
\text{(Fubini-Tonelli)} =& \int_0^t \int_{\mathbb{R}^N} F(s,y,u(s,y),\nabla u(s,y))K_\lambda(t-s,x-y)dyds \\
\text{(c.v. } z = x-y) =& \int_0^t (K_\lambda(t-s,\cdot) * F(s,\cdot,u(s,\cdot),\nabla u(s,\cdot)))(x)ds,
\end{aligned}$$

en donde hemos utilizado que $\chi_{[0,T]}(s)\chi_{[0,T]}(t-s) = \chi_{[0,t]}(s)$ donde $0 < t < T$ y $s < t$ (esto por supuesto es válido ya que $\chi_{[0,T]}(s)\chi_{[0,T]}(t-s) = 1$ si $0 \leq s \leq T$ y $-T+t \leq s \leq t$ e igual a 0 cero en otro caso; pero $[0,T]\cap[-T+t,t] = [0,t]$).

Hemos conseguido entonces ver el segundo término de $\Psi_T(u)$ como el producto de convolución (en $L^1(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^N)$) de una función integrable P con una función acotada H y en la misma forma que probamos la continuidad espacial del primer término de $\Psi_T(u)$ (con un argumento de densidad) obtenemos que $H * P$ es continua en (t,x). Notemos ahora que por el Teorema del Valor Medio (en la tercera coordenada) y (2.1.2)

$$\begin{aligned}
|F(s,y,u(s,y),\nabla u(s,y))| &\leq |F(s,y,u(s,y),\nabla u(s,y)) - F(s,y,0,0)| + |F(s,y,0,0)| \\
&\leq C_{R_T}|u(0,y) - 0| + |F(s,y,0,0)| \\
&\leq C_{R_T}\|u\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} + C_{R_T} \\
&\leq C_{R_T}R_T + C_{R_T},
\end{aligned}$$

ya que $\|u\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} \leq \|u\|_{E_T} \leq R_T$. Obtenemos entonces

$$\begin{aligned}
\int_0^t |K_\lambda(t-s,\cdot) * F(s,\cdot,u(s,\cdot),\nabla u(s,\cdot))(x)|ds &\leq (C_{R_T}R_T + C_{R_T})\int_0^t \int_{\mathbb{R}^N} |K_\lambda(t-s,x-z)|dzds \\
&\leq (C_{R_T}R_T + C_{R_T})T,
\end{aligned}$$

que combinado con (5.2.2) nos da

$$|\Psi_T(u)| \leq \|u_0\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} + (C_{R_T} R_T + C_{R_T})T \tag{5.2.4}$$

Calculamos ahora $\partial_i \Psi_T(u)$ y vemos que es continua y acotada.

En la Proposición 4.1.3 demostramos que para todo $0 < t < T$, $\partial_i[K_\lambda(t,\cdot) * u_0] = K_\lambda(t,\cdot) * \partial_i u_0$ y como $\partial_i u_0 \in L^\infty(\mathbb{R}^N)$, podemos replicar el mismo argumento hecho para la continuidad del primer término de $\Psi_T(u)$ y así tener que $\partial_i[K_\lambda(t,\cdot) * u_0]$ es continua. Ya teníamos también de la misma proposición que la derivada del segundo término de $\Psi_T(u)$ es

$$\int_0^t \partial_i K_\lambda(t-s,\cdot) * F(s,\cdot,u(s,\cdot),\nabla u(s,\cdot))(x)ds.$$

La continuidad la podemos justificar viéndola como la convolución en $L^1(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^N)$ de dos funciones adecuadas (justo como en el término integral de $\Psi_T(u)$). Definamos las funciones $H_1, P_1 : \mathbb{R}\times\mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}$ mediante

$$H_1(s,x) := F(s,x,u(s,x),\nabla u(s,x))\chi_{[0,T]}(s) = H(s,x) \;\text{ y }\; P_1(s,x) := \partial_i K_\lambda(s,x)\chi_{[0,T]}(s).$$

Entonces se tiene que $H_1 \in L^\infty(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^N)$ y además $P_1 \in L^1(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^N)$ ya que por (K4) y el Teorema de Fubini-Tonelli

$$\int_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}^N} |P_1(s,x)|d(x,s) = \int_0^T \int_{\mathbb{R}^N} |\partial_i K_\lambda(s,x)|dxds \leq \int_0^T \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla K_\lambda(s,\cdot)|dxds$$

$$\leq \int_0^T \mathcal{K} s^{-1/\lambda} ds = \mathcal{K}\frac{T^{1-\frac{1}{\lambda}}}{1-\frac{1}{\lambda}}.$$

En este sentido, tenemos que

$$P_1 * H_1(t,x) = \int_0^t \partial_i K_\lambda(s,\cdot) * F(s\cdot,u(s,\cdot),\nabla u(s,\cdot))(x)ds$$

en $L^1(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^N)$.

Nuevamente usando densidad (como en el término integral de $\Psi_T(u)$) tenemos que $P_1 * H_1$ es uniformemente continua en $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^N$ y, además, para $(t,x) \in (0,T)\times\mathbb{R}^N$

$$|P_1 * H_1(t,x)| \leq (C_{R_T} + C_{R_T} R_T)\mathcal{K}\frac{\lambda}{\lambda-1} T^{\frac{\lambda}{\lambda-1}}. \tag{5.2.5}$$

Concluimos de todo lo anterior que $\Psi_T(u) \in C^1$ en x y que

$$\nabla\Psi_T(u)(t,x) = K_\lambda(t,\cdot) * \nabla u_0(x) + \int_0^t \nabla K_\lambda(t-s,\cdot) * F(s,\cdot,u(s,\cdot),\nabla u(s,\cdot))(x)ds. \tag{5.2.6}$$

De hecho, por (5.2.5)

$$|\nabla \Psi_T(u)| \leq |K_\lambda(t,\cdot) * \nabla u_0(x)| + \int_0^t |\nabla K_\lambda(t-s,\cdot) * F(s,\cdot,u(s,\cdot),\nabla u(s,\cdot))(x)| ds$$
$$\leq \|\nabla u_0\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} + (C_{R_T} + C_{R_T} R_T)\mathcal{K}\frac{\lambda}{\lambda-1} T^{\frac{\lambda}{\lambda-1}}. \tag{5.2.7}$$

Con lo cual $\nabla \Psi_T(u) \in L^\infty((0,T)\times\mathbb{R}^N)^N$ y por lo tanto $\Psi_T(u) \in E_T$. Como consecuencia de (5.2.4) y (5.2.7), encontramos que

$$\begin{aligned}
\|\Psi_T(u)\|_{E_T} &= \|\Psi_T(u)\|_{L^\infty((0,T)\times\mathbb{R}^N)} + \|\nabla\Psi_T(u)\|_{L^\infty((0,T)\times\mathbb{R}^N)^N} \\
&\leq \|u_0\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} + (C_{R_T}R_T + C_{R_T})T + \|\nabla u_0\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} + (C_{R_T} + C_{R_T}R_T)\mathcal{K}\frac{\lambda}{\lambda-1}T^{\frac{\lambda}{\lambda-1}} \\
&= \|u_0\|_{W^{1,\infty}(\mathbb{R}^N)} + (C_{R_T}R_T + C_{R_T})T + (C_{R_T} + C_{R_T}R_T)\mathcal{K}\frac{\lambda}{\lambda-1}T^{\frac{\lambda}{\lambda-1}} \\
&\leq M + (C_{R_T}R_T + C_{R_T})\left(T + \mathcal{K}\frac{\lambda}{\lambda-1}T^{\frac{\lambda}{\lambda-1}}\right).
\end{aligned} \tag{5.2.8}$$

Tomemos $R_T := 2M$ y $T > 0$ tal que

$$(C_{R_T}R_T + C_{R_T})\left(T + \mathcal{K}\frac{\lambda}{\lambda-1}T^{\frac{\lambda}{\lambda-1}}\right) \leq M.$$

Con esta escogencia claramente $\Psi_T(u)$ lleva la bola B_{R_T} en ella misma. En efecto, por (5.2.8)

$$\|\Psi_T(u)\|_{E_T} \leq M + (C_{R_T}R_T + C_{R_T})\left(T + \mathcal{K}\frac{\lambda}{\lambda-1}T^{\frac{\lambda}{\lambda-1}}\right) \leq M + M = 2M.$$

También con la elección anterior tenemos que Ψ_T es una contracción:

Para $u, v \in B_{R_T}$ se verifica que

$$\begin{aligned}
\|\Psi_T(u) - \Psi_T(v)\|_{E_T} &= \|\Psi_T(u) - \Psi_T(v)\|_{L^\infty((0,T)\times\mathbb{R}^N)} + \|\nabla\Psi_T(u) - \nabla\Psi_T(v)\|_{L^\infty((0,T)\times\mathbb{R}^N)^N} \\
&= \|(K_\lambda * u_0 + \Phi(u)) - (K_\lambda * u_0 + \Phi(v))\|_{L^\infty((0,T)\times\mathbb{R}^N)} \\
&+ \|(K_\lambda * \nabla u_0 + \nabla\Phi(u)) - (K_\lambda * \nabla u_0 + \nabla\Phi(v))\|_{L^\infty((0,T)\times\mathbb{R}^N)^N} \\
&= \|\Phi(u) - \Phi(v)\|_{L^\infty((0,T)\times\mathbb{R}^N)} + \|\nabla\Phi(u) - \nabla\Phi(v)\|_{L^\infty((0,T)\times\mathbb{R}^N)^N},
\end{aligned} \tag{5.2.9}$$

donde denotamos por $\Phi_T(\cdot)$ al término integral de $\Psi(\cdot)$.

Observemos que para $(t,x) \in (0,+\infty)\times\mathbb{R}^N$ se tiene que, por el teorema del Valor Medio (aplicado F en la tercera coordenada, en virtud de (2.1.2))

$$
\begin{aligned}
|\Phi(u)(t,x)-\Phi(v)(t,x)| &\leq \int_0^t |K_\lambda(t-s,\cdot)*[F(s,\cdot,u(s,\cdot),\nabla u(s,\cdot))-F(s,\cdot,v(s,\cdot),\nabla v(s,\cdot))]|(x)ds \\
&\leq \int_0^t \int_{\mathbb{R}^N} |K_\lambda(t-s,x-y)| C_{R_T} |u(s,y)-v(s,y)| dyds \\
&\leq \int_0^T C_{R_T} \|u-v\|_{L^\infty((0,T)\times\mathbb{R}^N)} ds = C_{R_T} T \|u-v\|_{L^\infty((0,T)\times\mathbb{R}^N)}.
\end{aligned}
\tag{5.2.10}
$$

Similarmente, aplicando nuevamente el Teorema del Valor Medio pero en la cuarta coordenada y usando (K4), conseguimos que

$$
\begin{aligned}
|\nabla\Phi(u)(t,x)-\nabla\Phi(v)(t,x)| &\leq \int_0^t |\nabla K_\lambda(t-s,\cdot)*[F(s,\cdot,u(s,\cdot),\nabla u(s,\cdot))-F(s,\cdot,v(s,\cdot),\nabla v(s,\cdot))]|(x)ds \\
&\leq \int_0^t \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla K_\lambda(t-s,x-y)| C_{R_T} |\nabla u(s,y)-\nabla v(s,y)| dyds \\
(K4) &\leq \int_0^T C_{R_T} \mathcal{K}(t-s)^{-1/\lambda} \|\nabla u-\nabla v\|_{L^\infty((0,T)\times\mathbb{R}^N)^N} ds \\
&= C_{R_T} \mathcal{K} \frac{\lambda}{\lambda-1} T^{(\lambda-1)/\lambda} \|\nabla u-\nabla v\|_{L^\infty((0,T)\times\mathbb{R}^N)^N},
\end{aligned}
$$

En la última desigualdad hemos tenido en cuenta que C_{R_T} es la constante de acotamiento que da (2.1.2) y que la aplicación de esta hipótesis toma sentido porque dado este $R_T > 0$, $u, v \in [-R_T, R_T]$ y que $\nabla u, \nabla v \in B_{R_T}$.

Con estos dos estimativos volvemos a (5.2.9) y obtenemos

$$
\begin{aligned}
\|\Psi_T(u)-\Psi_T(v)\|_{E_T} &\leq C_{R_T} T \|u-v\|_{L^\infty((0,T)\times\mathbb{R}^N)} + C_{R_T} \mathcal{K} \frac{\lambda}{\lambda-1} T^{(\lambda-1)/\lambda} \|\nabla u-\nabla v\|_{L^\infty((0,T)\times\mathbb{R}^N)^N} \\
&= C_{R_T} \left(T + \mathcal{K} \frac{\lambda}{\lambda-1} T^{(\lambda-1)/\lambda} \right) \|u-v\|_{E_T} \\
&\leq \frac{M}{R_T} \|u-v\|_{E_T} = \frac{M}{2M} \|u-v\|_{E_T} = \frac{1}{2} \|u-v\|_{E_T}
\end{aligned}
$$

Recordemos que por la escogencia de T, en particular $C_{R_T} R_T \left(T + \mathcal{K} \frac{\lambda}{\lambda-1} T^{(\lambda-1)/\lambda} \right) \leq M$.

Por el Teorema del Punto Fijo de Banach, existe un único $u \in B_{R_T}$ tal que $u = \Psi_T(u)$. Por lo tanto, para todo $t > 0$ y c.t.p. $x \in \mathbb{R}^N$

$$u(t,x) = K_\lambda(t,\cdot) * u_0(x) + \int_0^t K_\lambda(t-s,\cdot) * F(s,\cdot,u(s,\cdot),\nabla u(s,\cdot))(x)ds,$$

así pues u es una solución débil del problema (2.1.1). $\triangle$

(a) (*Unicidad) Para todo $T > 0$, existe a lo más una solución débil de (2.1.1) en* $[0,T]$.

Usamos las ideas de [14] dadas en el Corolario 3.1 y el Teorema 4.1.

Sea $T > 0$. Probaremos primero la siguiente afirmación:

Afirmación 5.2.1. *Si u es una solución débil de (2.1.1) en $[0,T]$ con dato inicial u_0, entonces para todo $t_0 \in (0,T)$, $u(t_0+\cdot,\cdot)$ es una solución débil en $[0,T-t_0]$ con dato inicial $u(t_0,\cdot)$.*

Prueba de la Afirmación (5.2.1).

Sea $0 < t_0 < T$. Queremos ver que c.t.p. $(t,x) \in (0,T-t_0) \times \mathbb{R}^N$

$$u(t_0+t,x) = K_\lambda(t,\cdot) * u(t_0,\cdot)(x) + \int_0^t K_\lambda(t-s,\cdot) * F(t_0+s,\cdot,u(t_0+s,\cdot),\nabla u(t_0+s,\cdot))(x)ds. \tag{5.2.11}$$

Usaremos la propiedad de semigrupo de K_λ, (K5).

Para $(t,x) \in (0,T-t_0) \times \mathbb{R}^N$, como $0 < t < T - t_0$, entonces $t_0 < t + t_0 < T$ luego $t_0 + t \in [0,T]$ de manera que como u es solución en $(0,T)$

$$u(t+t_0,x) = K_\lambda(t+t_0,\cdot)*u_0(x) + \int_0^{t+t_0} K_\lambda(t_0+t-\tau,\cdot)*F(\tau,\cdot,u(\tau,\cdot),\nabla u(\tau,\cdot))(x)d\tau. \tag{5.2.12}$$

Efectuemos el cambio de variables $\tau = t_0 + s$ en (5.2.11). Obtenemos que

$$\begin{aligned}&\int_0^t K_\lambda(t-s,\cdot) * F(t_0+s,\cdot,u(t_0+s,\cdot),\nabla u(t_0+s,\cdot))(x)ds \\ &= \int_{t_0}^{t_0+t} K_\lambda(t_0+t-\tau,\cdot) * F(\tau,\cdot,u(\tau,\cdot),\nabla u(\tau,\cdot))(x)d\tau.\end{aligned} \tag{5.2.13}$$

Desarrollemos el primer término de (5.2.11)

$$
\begin{aligned}
&K_\lambda(t,\cdot) * u(t_0,\cdot)(x)\\
&= \int\limits_{\mathbb{R}^N} K_\lambda(t,x-y)u(t_0,y)dy\\
&= \int\limits_{\mathbb{R}^N} K_\lambda(t,x-y)\left[K_\lambda(t_0,\cdot) * u_0(y) + \int\limits_0^{t_0} K_\lambda(t_0-\tau,\cdot) * F(\tau,\cdot,u(\tau,\cdot),\nabla u(\tau,\cdot))(x)d\tau\right]dy\\
&= \int\limits_{\mathbb{R}^N} K_\lambda(t,x-y)\left[\int\limits_{\mathbb{R}^N} K_\lambda(t_0,y-z)u_0(z)dz\right]dy\\
&+ \int\limits_{\mathbb{R}^N} K_\lambda(t,x-y)\int\limits_0^{t_0} K_\lambda(t_0-\tau,\cdot) * F(\tau,\cdot,u(\tau,\cdot),\nabla u(\tau,\cdot))(x)d\tau dy.
\end{aligned}
\tag{5.2.14}
$$

Investiguemos los dos términos en la última igualdad de (5.2.14).

Para el primero apliquemos el teorema de Fubini para funciones integrables, usando el ambio $\eta = y - z$ y (K5,)

$$
\begin{aligned}
\int\limits_{\mathbb{R}^N}\int\limits_{\mathbb{R}^N} K_\lambda(t,x-y)K_\lambda(t_0,y-z)u_0(z)dzdy &= \int\limits_{\mathbb{R}^N} u_0(z)\int\limits_{\mathbb{R}^N} K_\lambda(t,x-y)K_\lambda(t_0,y-z)dydz\\
&= \int\limits_{\mathbb{R}^N} u_0(z)\int\limits_{\mathbb{R}^N} K_\lambda(t,(x-z)-\eta)K_\lambda(t_0,\eta)d\eta dz\\
&= \int\limits_{\mathbb{R}^N} u_0(z)K_\lambda(t,\cdot) * K_\lambda(t_0,\cdot)(x-z)dz\\
&= \int\limits_{\mathbb{R}^N} u_0(z)K_\lambda(t+t_0,x-z)dz\\
&= K_\lambda(t+t_0,\cdot) * u_0(x).
\end{aligned}
$$

Con respecto al segundo, para no cargar la notación escribamos $f(\tau,\cdot) = F(\tau,\cdot,u(\tau,\cdot,\nabla u(\tau,\cdot)))$

y apliquemos nuevamente el teorema de Fubini, el cambio $\zeta = y - z$ y (K5)

$$\int_{\mathbb{R}^N} K_\lambda(t, x-y) \int_0^{t_0} K_\lambda(t_0 - \tau, \cdot) * F(\tau, \cdot, u(\tau, \cdot), \nabla u(\tau, \cdot))(x) d\tau dy$$

$$= \int_{\mathbb{R}^N} \int_0^{t_0} \int_{\mathbb{R}^N} K_\lambda(t_0 - \tau, y - z) f(\tau, z) K_\lambda(t, x-y) dz d\tau dy$$

$$= \int_0^{t_0} \int_{\mathbb{R}^N} f(\tau, z) \int_{\mathbb{R}^N} K_\lambda(t_0 - \tau, y - z) K_\lambda(t, x-y) dy dz d\tau$$

$$= \int_0^{t_0} \int_{\mathbb{R}^N} f(\tau, z) \int_{\mathbb{R}^N} K_\lambda(t_0 - \tau, \zeta) K_\lambda(t, (x-z) - \zeta) d\zeta dz d\tau$$

$$= \int_0^{t_0} \int_{\mathbb{R}^N} f(\tau, \cdot) K_\lambda(t_0 - \tau, \cdot) * K_\lambda(t, \cdot)(x - z) dz d\tau$$

$$= \int_0^{t_0} \int_{\mathbb{R}^N} f(\tau, z) K_\lambda(t_0 + t - \tau, x - z) dz d\tau$$

$$= \int_0^{t_0} K_\lambda(t_0 + t - \tau) * F(\tau, \cdot, u(\tau, \cdot), \nabla u(\tau, \cdot))(x) d\tau.$$

De esta forma (5.2.14) se reescribe como

$$K_\lambda(t, \cdot) * u(t_0, \cdot)(x) = K_\lambda(t_0 + t, \cdot) * u_0(x) + \int_0^{t_0} K_\lambda(t_0 + t - \tau, \cdot) * F(\tau, \cdot, u(\tau, \cdot), \nabla u(\tau, \cdot))(x) d\tau.$$

Por otro lado, (5.2.13) se escribe como

$$\underbrace{K(t, \cdot) * u(t, \cdot)(x)} + \underbrace{\int_0^{t} K_\lambda(t - s, \cdot) * F(t_0 + s, \cdot, u(t_0 + s, \cdot), \nabla u(t_0 + s, \cdot))(x) ds}$$

$$\underbrace{= K_\lambda(t_0 + t, \cdot) * u_0(x) + \int_0^{t_0} K_\lambda(t_0 + t - \tau, \cdot) * F(\tau, \cdot, u(\tau, \cdot), \nabla u(\tau, \cdot))(x) d\tau}$$

$$+ \underbrace{\int_{t_0}^{t_0 + t} K_\lambda(t_0 + t - \tau, \cdot) * F(\tau, \cdot, u(\tau, \cdot), \nabla u(\tau, \cdot))(x) d\tau}$$

$$= K_\lambda(t_0+t,\cdot) * u_0(x) + \int_0^{t_0+t} K_\lambda(t_0+t-\tau\cdot) * F(\tau,\cdot,u(\tau,\cdot),\nabla u(\tau,\cdot))(x)d\tau$$

$$= u(t_0+t,x),$$

como en (5.2.11). $\triangle$

Retornando a la pueba de la unicidad, sean $T_1 > 0$, $R > 0$ y u, v soluciones débiles de (2.1.1) es $[0,T_1]$ acotadas por R.

Como vimos en (5.2.10) en la prueba de la existencia, se tiene que

$$|u(t,x)-v(t,x)| \leq C_R T_1 \|u-v\|_{L^\infty((0,T_1)\times\mathbb{R}^N)} = k(T_1,R)\|u-v\|_{L^\infty((0,T_1)\times\mathbb{R}^N)},$$

para $(t,x) \in (0,T_1)\times\mathbb{R}^N$.

Queremos escoger $T_0 > 0$ que dependa únicamente de R tal que $k(T_1,R) < 1$ siempre que $T_1 \leq T_0$. Elijamos dicho T_0 tal que $0 < T_0 < 1/C_R$. Con esta elección, si $T_1 \leq T_0$ tenemos que $C_R T_1 \leq C_R T_0 < 1$ y así $|u(t,x)-v(t,x)| < \|u-v\|_{L^\infty((0,T_1)\times\mathbb{R}^N)}$. Lo anterior implica que $u(t,x) = v(t,x)$ c.t.p. $(t,x) \in (0, \text{ínf}(T_1,T_0)) \times \mathbb{R}^N$. Así, para $T_1 \leq T_0$ hay a lo más una solución de (2.1.1) en $[0,T_1]$ acotada por R.

Sean ahora u y v dos soluciones de (2.1.1) en $[0,T]$. Tomemos $R := \text{máx}(\|u\|_\infty, \|v\|_\infty)$, (la norma infinito es en $(0,T)\times\mathbb{R}^N$) y $T_0 > 0$ como antes (T_0 depende únicamente de R y es tal que si $t \leq T_0$, hay a lo más una solución de (2.1.1) en $[0,t]$ acotada por R). Como u y v son acotadas por R el paso anterior muestra que $u = v$ en $(0, \inf(T,T_0)) \times \mathbb{R}^N$. Definamos

$$T' := \sup\{t \in (0,T) : u = v \, \text{en} \, (0,t)\times\mathbb{R}^N\}.$$

Puesto que $\text{ínf}(T,T_0) \in \{t \in (0,T) : u = v \, \text{en} \, (0,t)\times\mathbb{R}^N\}$, tenemos que $T' \geq \text{máx}(T,T_0)$. Deseamos probar que $u = v$ en $(0,T)\times\mathbb{R}^N$ y de acuerdo a la definición de T' necesitamos probar que $T \leq T'$. Razonemos por contradicción y supongamos que $T' < T$.

Sea $\varepsilon > 0$. Por la propiedad de aproximación al supremo existe $t_\varepsilon \in \{t \in (0,T) : u = v \, \text{en} \, (0,t)\times\mathbb{R}^N\}$ tal que $T' - \varepsilon < t_\varepsilon < T$. Para tal t_ε se verifica que $u = v$ en $(0,t_\varepsilon)\times\mathbb{R}^N$ luego $u(T'-\varepsilon,x) = v(T'-\varepsilon,x)$ y puesto que u y v son continuas en $(0,T)\times\mathbb{R}^N$ conseguimos que si $\varepsilon \to 0^+$, entonces $u(T',\cdot) = v(T',\cdot)$ en $\mathbb{R}^N$. Como $T' \in (0,T)$ por la afirmación (5.2.1), $u(T'+\cdot,\cdot)$ y $v(T'+\cdot,\cdot)$ son soluciones de (2.1.1) en $[0,T-T']$ con el mismo dato inicial $u(T',\cdot) = v(T',\cdot)$ y dichas soluciones siguen estando acotadas por R de modo que por el primer argumento $u(T'+\cdot,\cdot) = v(T'+\cdot,\cdot)$ en $(0, \text{ínf}(T_0, T-T'))\times\mathbb{R}^N$ lo cual es una contradicción a la definición de T' porque estamos exhibiendo un valor temporal mayor que T donde u y v coinciden. $\triangle$

(b) *(Propiedades de la solución) Una solución de (2.1.1) satisface que para todo* $T > 0$

  (i) $u \in C_b((0,T)\times\mathbb{R}^N)$, $\nabla u \in C_b((0,T)\times\mathbb{R}^N)^N$ *y para todo* $a \in (0,T)$, $u \in C_b^\infty((a,T)\times\mathbb{R}^N)$.

(ii) *u satisface la e.d.p. de (2.1.1) en* $(0,T)\times\mathbb{R}^N$.

(iii) $u(t,\cdot)\longrightarrow u_0$ *uniformemente en* $\mathbb{R}^N$*, cuando* $t\longrightarrow 0$.

Nuestro mayor esfuerzo se concentrará en probar la regularidad de la solución. Optamos por trabajar la regularidad espacial principalmente, que como veremos, es una aplicación reiterada de la Proposición 5.1.1. En cuanto a la regularidad temporal referimos su lectura a [14], Sección 5.2.

Sea u una solución débil de (2.1.1) en $[0,T]$. Ya sabemos que $u\in L^\infty((0,T)\times\mathbb{R}^N)$, $\nabla u\in L^\infty((0,T)\times\mathbb{R}^N)^N$ y que u verifica c.t.p. (4.1.1). De acuerdo a (5.2.6), o más precisamente por (4.1.17), se tiene la ecuación integral

$$\nabla u(t,x)=K_\lambda(t,\cdot)*\nabla u_0(x)+\int_0^t\nabla K_\lambda(t-s,\cdot)*F(s,\cdot,u(s,\cdot),\nabla u(s,\cdot))(x)ds, \tag{5.2.15}$$

y en el ítem (c) (existencia) argumentamos por qué ∇u es continua así como tambien u, de modo que también hemos probado previamente que $(u,\nabla u)\in C_b((0,T)\times\mathbb{R}^N)$.

Vamos a comprobar que para culaquier multi-índice $\alpha\in\mathbb{N}^N$, $\partial_x^\alpha u$ existe, es continua y acotada en $(t_0,T)\times\mathbb{R}^N$ para cada $0<t_0<T$ y para esto deseamos usar recursivamente la proposición 5.1.1. La motivación es la siguiente:

Consideremos el T de la existencia. Probamos que $u(t,\cdot)\in C_b^1(\mathbb{R}^N)$ para todo $0<t<T$. De acuerdo a (4.1.17), que da (5.2.15). Queremos escribir en la forma (5.1.1) la ecuación (5.2.15) de ∇u y comprobar que las hipótesis de la proposición 5.1.1 se verifican.

Definamos la función $G:(0,T)\times\mathbb{R}^N\times\mathbb{R}^N\longrightarrow\mathbb{R}$, por $G(t,x,\xi):=F(t,x,u(t,x),\xi)$. Por (2.1.2) esta G es continua y por la regla de la cadena, las derivadas ∂_xG, $\partial_\xi G$,$\partial_\xi\partial_xG$ y $\partial_\xi\partial_\xi G$ existen y son continuas. Además dado $L>0$ la misma hipótesis (2.1.2) nos indica que G y todas las derivadas indicadas son acotadas de modo que si consideramos la función $\omega:(0,+\infty)\to\mathbb{R}^+$, dada por

$$\omega(L):=\max_{(0,T)\times\mathbb{R}^N\times B_L}\{\|G\|_\infty,\|\partial_xG\|_\infty,\|\partial_\xi G\|_\infty,\|\partial_\xi\partial_xG\|_\infty,\|\partial_\xi\partial_\xi G\|_\infty\},$$

donde la norma infinito se toma en $(0,T)\times\mathbb{R}^N\times B_L$, entonces $\omega(L)$ acota a G y dichas derivadas. Sea $R_0>0$ tal que $\|\nabla u_0\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)^N}\geq R_0$ y definimos $R:=(2+\mathcal{K})R_0$. Por la Proposición 5.1.1 existe $T_1>0$ que depende únicamente de (λ,R_0,ω) tal que si $T_2=\inf(T,T_1)$, ∇u es la única función en $C_b((0,T_2)\times\mathbb{R}^N)^N$ acotada por R tal que

$$\nabla u(t,x)=K_\lambda(t,\cdot)*\nabla u_0(x)+\int_0^t\nabla K_\lambda(t-s,\cdot)*\underbrace{G(s,\cdot,\nabla u(s,\cdot))}_{F(s,\cdot,u(s,\cdot),\nabla u(s,\cdot))}(x)ds.$$

También $\partial_x(\nabla u)\in C((0,T_2)\times\mathbb{R}^N)^{N^2}$ y es acotada por $Ra^{-1/\lambda}$ en $C_b((a,T_2)\times\mathbb{R}^N)^{N^2}$ para todo $a\in(0,T_2)$. Esto nos dice entonces que las derivadas de segundo orden de u (espaciales) existen, son continuas y acotadas sobre $(a,T_2)\times\mathbb{R}^N$ para todo $a\in(0,T_2)$. Nótese que

$T_2 \leq T_1, T$.

Probamos por indución sobre la longitud del multi-índice, $|\alpha| = \ell$, que si u es una solución débil en $[0,T]$ entonces para todo $t_0 \in (0,T)$

- $\nabla(\partial_x^\alpha u) \in C_b((t_0,T)\times\mathbb{R}^N)^N$.
- $\forall t \in (0, T-t_0)$

$$\nabla(\partial_x^\alpha u)(t+t_0,x) = K_\lambda(t,\cdot) * \nabla(\partial_x^\alpha u(t_0,\cdot))(x)$$
$$+ \int_0^t \nabla K_\lambda(t-s,\cdot) * \partial_x^\alpha F(t_0+s,\cdot,u(t_0+s,\cdot),\nabla u(t_0+s,\cdot))(x)ds. \tag{5.2.16}$$

- Si $R \geq \|u\|_{C_b(0,T)\times\mathbb{R}^N}$, existe $C > 0$ que depende únicamente de (R, t_0, ℓ) tal que $\|\nabla(\partial_x^\alpha u)\|_{C_b((t_0,T)\times\mathbb{R}^N)^N} \leq C$.

Usaremos las ideas plasmadas en [14], Teorema 5.1

Probamos por inducción sobre $\ell = |\alpha|$ que u tiene derivadas espaciales hasta el orden $\ell+1$, que son continuas y acotadas por $C(R,t_0,\ell) > 0$ en $(t_0,T)\times\mathbb{R}^N$, para todo $t_0 \in (0,T)$ (esto cubre el primer y tercer ítem), se verifica el segundo ítem en $(0,T-t_0)\times\mathbb{R}^N$, para todo $t_0 \in (0,T)$ y que

$$\partial^\alpha F(t,\cdot,u(t,\cdot),\nabla u(t,\cdot)) = U_\ell + (1-\delta_{\ell,0})\nabla_\xi F\cdot\nabla(\partial^\alpha u) + \delta_{\ell,0}F, \tag{5.2.17}$$

donde $\delta_{\ell,0}$ es el símbolo de Krönecker, $U_0 = 0$ y si $\ell \geq 1$, U_ℓ es una función regular de las derivadas de orden menor o igual a ℓ de u y de F.

Paso base. Para $\ell = 0$ tenemos que $\nabla(\partial^\alpha u) = \nabla u$ y vimos ya al inicio de la prueba que esta función es continua y acotada en $(0,T_2)\times\mathbb{R}^N$ y además, ya hemos justificado también por qué se verifica la ecuación integral (5.2.15), que mediante (4.1.17) nos da (5.2.16) para este orden.

Paso inductivo. Supongamos que las afirmaciones son ciertas para $\ell \geq 1$ y sea $0 < b_0 < T_\ell$. Tomemos $b \in (b_0, T_\ell)$ y definamos para tal número una función $G : (0, T_\ell - b)\times\mathbb{R}^N\times\mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}$ por

$$G(t,x,\xi) := U_\ell(b+t,x) + (1-\delta_{\ell,0})\nabla_\xi F(t,x,u(t,x),\nabla u(t,x))\cdot\xi$$
$$+ \delta_{\ell,0}F(t,x,u(t,x),\xi).$$

Definimos esta función de modo que $G(t,x,\nabla(\partial^\alpha u)) = \partial^\alpha F(t,x,u(t,x),\nabla u(t,x))$. Veamos que G satisface las hipótesis de la Proposición 5.1.1. Como F es $C^\infty([0,T_\ell]\times\mathbb{R}^N\times[-R,R]\times B_R)$, con R tal que $\|u\|_{C_b((0,T_\ell)\times\mathbb{R}^N)} \leq R$, entonces G es continua y también esto mismo permite concluir que las derivadas $\partial_x G$, $\partial_\xi G$,$\partial_\xi\partial_x G$ y $\partial_\xi\partial_\xi G$, existen y son continuas. Por (2.1.2) y la hipótesis de indución, existe $\omega : \mathbb{R}^+ \longrightarrow (0, +\infty)$ dependiendo solamente de (R, b_0, ℓ) tal que para todo $L > 0$ $\omega(L)$ acota a G y a las derivadas mencionadas en $(0, T_\ell - b) \times \mathbb{R}^N \times B_L$. Acudimos a (2.1.2) para acotar los términos de estas derivadas que contienen a F o derivadas de dicha función; hacemos uso de la hipótesis de inducción para acotar términos que involucre a u o derivadas de esta función.

Para hacer evidente el uso de la proposición que vamos a utilizar, sea $R_0 > 0$ tal que $\|\nabla(\partial^\alpha u)\|_{C_b((b_0,T_\ell)\times\mathbb{R}^N)^N} \leq R_0$ que solo depende de (R, b_0, ℓ) . Consideremos el $T_{\ell+1} > 0$ que da la Proposición 5.1.1 (que depende solo de (R, b_0, ℓ)). Por hipótesis de inducción $\nabla(\partial^\alpha u)(b + \cdot, \cdot)$ es continua y acotada por R_0 ($\leq (2 + \mathcal{K})R_0$) y verifica la ecuación integral (5.2.16) que es del tipo (5.1.1) en $(0, T_\ell - b) \times \mathbb{R}^N$ con la G que definimos arriba (en la tercera coordenada se evalúa en $\xi = \nabla(\partial^\alpha u)(b + \cdot, \cdot)$) y con $V_0 := \nabla(\partial^\alpha u)(b, \cdot)$ la cual es acotada por R_0, esto es

$$\nabla(\partial^\alpha u)(b + t, x) = K_\lambda(t, \cdot) * \nabla(\partial^\alpha u)(b, \cdot)(x)$$

$$\int_0^t \nabla K_\lambda(t - s, \cdot) * G(s, \cdot, \nabla(\partial^\alpha u)(b + s, \cdot))(x)ds.$$

Pero si consideramos $T_{\ell+2} = \inf(T_\ell - b, T_{\ell+1})$, la proposición 5.1.1 nos dice que $\nabla(\partial^\alpha u)(b+\cdot, \cdot)$ debe ser la única en $C((0, T_{\ell+2}) \times \mathbb{R}^N)^N$ y acotada por $(2 + \mathcal{K})R_0$ que satisface la anterior ecuación integral y además, $\partial_x[\nabla(\partial^\alpha u)(b + \cdot, \cdot)]$ existe, pertenece a $C((0, T_{\ell+2}) \times \mathbb{R}^N)^{N^2}$ y está acotada por $(2 + \mathcal{K})R_0 a^{-1/\lambda}$ en $(a, T_{\ell+2}) \times \mathbb{R}^N$ para todo $a \in (0, \inf(T_\ell - b, T_{\ell+1}))$.

De manera concreta, $\nabla(\partial^\alpha u)(b + \cdot, \cdot)$ cumple que es:

- *Continua* en variable temporal para $0 < t < T_{\ell+2}$, esto es si $T_{\ell+2} = T_{\ell+1}$, $0 < t < T_{\ell+1}$ luego $b < b + t < T_{\ell+1} + b$; si $T_{\ell+2} = T_\ell - b$, $0 < t < T_\ell - b$ luego $b < b + t < T_\ell$ de modo que la continuidad es en $(b, \inf(T_\ell, T_{\ell+1} + b)) \times \mathbb{R}^N$.
- *Acotada* por $(2 + \mathcal{K})R_0 a^{-1/\lambda}$ en variable temporal para $a < t < T_{\ell+2}$, esto es, de nuevo razonando por casos, si $T_{\ell+2} = T_{\ell+1}$, $a < t < T_{\ell+1}$ luego $b + a < t + b < T_{\ell+1} + b$; si $T_{\ell+2} = T_\ell - b$, $a < t < T_\ell - b$ luego $b + a < t + b < T_\ell$ de modo que el acotamiento (por $(2 + \mathcal{K})R_0 a^{-1/\lambda}$) sucede en $(b + a, \inf(T_\ell, T_{\ell+1} + b)) \times \mathbb{R}^N$.

Recordemos que todo lo anterior es cierto para todo $b \in (b_0, T_\ell)$ y todo $a \in (0, \text{ínf}(T_\ell - b, T_{\ell+1}))$.

Como $T_{\ell+1}$ no depende ni de a ni de b, la idea es elegir estos dos valores apropiadamente para que la continuidad y el acotamiento concluidos arriba, nos quede sobre los conjuntos que queremos, es decir, sobre $(t_0, T_\ell) \times \mathbb{R}^N$ para todo $t_0 \in (0, T_\ell)$. En efecto, si $t_0 \in (0, T_\ell)$ eligiendo $b_0 = t_0/2$ y $a = \inf(t_0/2, T_{\ell+1}/2)$ se tiene en primer lugar que $a < T_\ell - b_0$: supongamos que $a \geq T_\ell - b_0$. Si $a = t_0/2$ entonces $T_\ell - b_0 = T_\ell - t_0/2 \leq t_0/2$, o sea $T_\ell \leq t_0$ que es contradictorio; si fuese $a = T_{\ell+1}/2$, nuevamente $T_\ell - b_0 = T_\ell - t_0/2 \leq T_{\ell+1}/2$ y como $T_{\ell+1}/2 \leq t_0/2$ (porque $\inf = T_{\ell+1}/2$) y entonces otra vez $T_\ell - t_0/2 \leq t_0/2$, o sea, $T_\ell \leq t_0$.

Para el b_0 y el a elegidos, consideremos el intervalo $(b_0 + a, T_\ell)$ [acá usamos que $a < T_\ell - b_0$]. Afirmamos que $(b_0 + a, T_\ell) \supset (t_0, T_\ell)$: para esto comprobamos que $b_0 + a \leq t_0$. Tenemos que si $a = t_0/2$, entonces $b_0 + a = t_0/2 + t_0/2 = t_0$; si $a = T_{\ell+1}/2$ (es decir, $T_{\ell+1}/2 \leq t_0/2$), entonces $b_0 + a = t_0/2 + T_{\ell+1}/2 \leq t_0/2 + t_0/2 = t_0$.

Ahora, en los intervalos de la forma $(b+a, \text{ínf}(T_\ell, b+T_{\ell+1}))$ con $b \in (b_0, T_\ell)$ es que ocurre el acotamiento indicado pero para la elección de b_0 y a, se tiene que la colección de intervalos $\{(b + a, \text{ínf}(T, b + T_{\ell+1})) : b \in (b_0, T_\ell - a)\}$ cubren a $(b_0 + a, T_\ell)$. Notemos que los intervalos $(b, \inf(T_\ell, T_{\ell+1} + b))$ donde hay regularidad, contienen a $(b + a, \inf(T_\ell, T_{\ell+1} + b))$ en donde hay acotamiento y entonces si la unión de estos últimos cubren a (t_0, T_ℓ), también lo hace la unión de los intervalos $(b, \inf(T_\ell, T_{\ell+1} + b))$ para la regularidad.

Afirmación 5.2.2. *Se cumple que $T_\ell \longrightarrow T$, cuando $\ell \longrightarrow \infty$.*

En el argumento anterior hemos probado el primer y tercer ítem. Ahora probaremos (también por inducción) el segundo que concierne a la fórmula (5.2.16) para $\nabla(\partial^\alpha u)$.

Por hipótesis de inducción, la fórmula (5.2.16) vale para todo $t_0 \in (0, T)$. Ahora, como lo hemos realizado ya en reiteradas ocasiones (como en (4.1.17)), puesto que $\nabla(\partial^\alpha u)(t_0, \cdot)$ es $C_b^1(\mathbb{R}^N)$, la definición de derivada parcial y el Teorema de la Convergencia Dominada nos da que

$$\partial(K_\lambda(t, \cdot) * \nabla(\partial^\alpha u)(t_0, \cdot))(x) = K_\lambda(t, \cdot) * \nabla(\partial^{\alpha+e_i} u)(t_0, \cdot)(x).$$

Para el termino integral consideremos la función $(t, x) \in (0, T - t_0) \times \mathbb{R}^N \longrightarrow \partial^\alpha F(t_0 + t, x, u(t, x), \nabla u(t, x))) \in \mathbb{R}$ la cual, junto con su primera derivada (espacial) son continuas y acotadas (por (2.1.2)). Aplicando el mismo razonamiento de la Proposición 5.1.1 (ver apéndice) para el término integral (dos veces diferenciación bajo el signo integral) concluimos que

$$\partial(\nabla K_\lambda(t - s, \cdot) * \partial^\alpha F(t_0 + s, \cdot, u(t_0 + s, \cdot), \nabla u(t_0 + s, \cdot)))$$

$$= \nabla K_\lambda(t - s, \cdot) * \partial^{\alpha+e_i} F(t_0 + s, \cdot, u(t_0 + s, \cdot), \nabla u(t_0 + s, \cdot))$$

y que

$$\partial \int_0^t \nabla K_\lambda(t - s, \cdot) * \partial^\alpha F(t_0 + s, \cdot, u(t_0 + s, \cdot), \nabla u(t_0 + s, \cdot))(x) ds$$

$$= \int_0^t \nabla K_\lambda(t - s, \cdot) * \partial^{\alpha+e_i} F(t_0 + s, \cdot, u(t_0 + s, \cdot), \nabla u(t_0 + s, \cdot))(x) ds.$$

Finalmente la fórmula (5.2.17) proviene de aplicar la regla de la cadena a la función F en virtud de (2.1.2).

Lo que hemos abarcado hasta ahora en la prueba del ítem (b) del Teorema 4.1.2, nos dá la prueba del *ítem (i)* del Teorema 2.2.1 en cuanto a la regularidad espacial. Como habíamos mencionado con anterioridad, la regularidad temporal la vamos a referir a [14] y en cuanto al *ítem (ii), que nos dice que u satisface la ecuación diferencial de (2.1.1)*, también haremos omisión de este cálculo. Probamos el *ítem (iii)* que nos dice que la solución converge uniformemente al dato inicial en $\mathbb{R}^N$.

Notemos primero que

$$\begin{aligned}\left|\int_0^t K_\lambda(t-s,\cdot)*F(s,\cdot,u(s,\cdot),\nabla u(s,\cdot))(x)ds\right| &\leq \int_0^t |K_\lambda(t-s,\cdot)*F(s,\cdot,u(s,\cdot),\nabla u(s,\cdot))(x)|ds\\ &\leq \int_0^t \|F(\cdot,\cdot,u,\nabla u)\|_{L^\infty((0,T)\times\mathbb{R}^N)}ds\\ &= t\|F(\cdot,\cdot,u,\nabla u)\|_{L^\infty((0,T)\times\mathbb{R}^N)}\\ &\longrightarrow 0,\ \text{cuando } t\longrightarrow 0.\end{aligned}$$

Ahora, con respecto al primer término de la solución débil (4.1.1) tenemos lo siguiente: sea $t>0$. observemos que

$$\begin{aligned}|K_\lambda(t,\cdot)*u_0(x)-u_0(x)| &= \left|\int_{\mathbb{R}^N} K_\lambda(t,y)u_0(x-y)dy-\int_{\mathbb{R}^N} K_\lambda(t,y)u_0(x)dy\right|\\ &\leq \int_{\mathbb{R}^N}|K_\lambda(t,y)||u_0(x-y)-u_0(x)|dy\\ &= \int_{|y|<\delta}|K_\lambda(t,y)||u_0(x-y)-u_0(x)|dy\\ &+\int_{|y|\geq\delta}K_\lambda(t,y)||u_0(x-y)-u_0(x)|dy\\ &\leq t\|K_\lambda(t,\cdot)\|_{L^1(\mathbb{R}^N)}+2\|u_0\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)}\int_{|y|\geq\delta}t^{-N/\lambda}K_\lambda(1,t^{-1/\lambda}y)dy\end{aligned}$$

ya que por la continuidad uniforme de u_0 (recordar que esta función es Lipschitz, ver página 50), dado $t>0$ podemos hallar $\delta>0$ tal que si $|y|<\delta$, entonces $|u_0(x-y)-u_0(x)|<t$ y además hemos usado que u_0 es acotada en la segunda integral así como las propiedad (K1). Puesto que $(K_\lambda(t,\cdot))_{t>0}$ es una aproximación a la identidad, se concluye que

$$|K_\lambda(t,\cdot)*u_0(x)-u_0(x)|\longrightarrow 0, t\longrightarrow 0.$$

En consecuncia

$$\lim_{t\to 0}\sup_{x\in\mathbb{R}^N}|u(x,t)-u_0(x)|=0,$$

o sea, $u(t,\cdot)\longrightarrow u_0$ uniformemente en $\mathbb{R}^N$ cuando $t\longrightarrow 0$. △

5.3. Prueba del Teorema 2.2.1

Finalizamos mencionando lo que sería la prueba del Teorema 2.2.1.

Sea u una solución débil de (2.1.1) en $[0, T]$ indicada por el Teorema 4.1.2. Entonces u verifica los ítems *(i), (ii)* y *(iii)* (daremos por hecho el ítem (ii), que es la verificación de la e.d.p. en u. Es un tanto técnico y requiere de tener la regularidad temporal, que como mencionamos al inicio de la prueba del ítem (b) del Teorema 4.1.2, queda referida como lectura en [14]). Ya hemos obtenido el estimativo (2.2.2) en la proposición 4.1.3; veamos que (2.2.1) se tiene. Consideremos F como en (2.1.2) y sea $h := \Lambda_T$ como en (2.1.3) de modo que F satisface el requerimiento indicado en la propisición 3.2.1. Puesto que u verifica (i) y (ii) (es decir (3.2.1)), considerando la función $\mathcal{L}_T$ de (2.1.5), por la proposición 3.2.1 se tiene que para todos $0 < t' < t < T$,

$$\|u(t, \cdot)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} \leq (\mathcal{L}_T)^{-1}(t - t' + \mathcal{L}_T(\|u(t', \cdot)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)}))$$

Como $u(t', \cdot)$ converge uniformemente a u_0 en $\mathbb{R}^N$ cuando $t' \longrightarrow 0$, entonces de la desigualdad anterior concluimos que para todo $0 < t < T < \infty$

$$\|u(t, \cdot)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} \leq (\mathcal{L}_T)^{-1}(t + \mathcal{L}_T(\|u_0\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)})).$$

□

Capítulo 6

Apéndice

6.1. Un lema sobre regularidad

Probamos el lema que nos permitió computar la derivada parcial del primer término de (4.1.1), el cual fue empleado en el paso 3 del teorema 4.1.2.

Lema 6.1.1. *Si $f \in C^1(\mathbb{R}^N) \cap W^{1,1}(\mathbb{R}^N)$ y $g \in L^\infty(\mathbb{R}^N)$, entonces $f * g \in C^1(\mathbb{R}^N)$ y $\nabla(f * g) = \nabla f * g$.*

Prueba. No podemos asumir que $\nabla f(x-y)$ es acotada localmente y uniformemente por una función integrable de y, por lo que no se puede aplicar directamente diferenciación bajo el signo de la integral. Procedemos como sigue: Sea $k \geq 1$ y definamos $g_k := g\chi_{B_k(0)}$. Para todo $x \in \mathbb{R}^N$ tenemos que

$$f * g_k(x) = \int_{\mathbb{R}^N} f(x-y)g_k(y)dy = \int_{B_k} f(x-y)g(y)dy,$$

y por el teorema de la convergencia dominada ($f(x-\cdot)\|g\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} \in L^1(\mathbb{R}^N)$ domina) concluimos que

$$f * g_k(x) \longrightarrow \int_{\mathbb{R}^N} f(x-y)g(y)dy = f * g(x), \text{ cuando } k \to \infty.$$

Como f es integrable y $g_k \in L^\infty(\mathbb{R}^N)$, la función $f(x-\cdot)g_k(\cdot)$ es integrable como función de y y al ser $f \in C^1(\mathbb{R}^N)$ es diferenciable como función de x con derivada dominada (acotada uniformemente en x) por la derivada débil de f que es integrable en y. Por el teorema de derivación bajo el signo integral $f * g_k \in C^1(\mathbb{R}^N)$ y

$$\nabla(f * g_k)(x) = \nabla \int_{\mathbb{R}^N} f(x-y)g_k(y)dy = \int_{B_k} \nabla f(x-y)g(y)dy = \nabla f * g_k(x).$$

Así obtenemos que para todo $|x| \leq R$

$$|\nabla f * g_k(x) - \nabla f * g(x)| = \left| \int_{|y|<k} \nabla f(x-y)g(y)dy - \int_{|y|<k} \nabla f(x-y)g(y)dy + \int_{|y|\geq k} \nabla f(x-y)g(y)dy \right|$$

$$\leq \int_{|y|\geq k} |\nabla f(x-y)g(y)|dy \leq \|g\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} \int_{|y|\geq k} |\nabla f(x-y)|dy,$$

y haciendo el cambio de variables $z = x - y$ y usando la propiedad $||x| - |y|| \leq |x - y|$ tenemos que

$$|\nabla f * g_k(x) - \nabla f * g(x)| \leq \|g\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} \int_{|z|\geq k-R} |\nabla f(z)|dz,$$

($-|x-y| \leq |x| - |y|$ luego $|x-y| \geq |y| - |x| \geq k - R$). Finalmente, si $k \to \infty$, entonces $\nabla f * g_k \longrightarrow \nabla f * g$ localmente y uniformemente en $\mathbb{R}^N$. ☑

6.2. Propiedades del kernel K_λ

Estudiamos en esta sección con algo de detalle las propiedades de K_λ, las cuales nos permitieron desarrollar los razonamientos y pruebas satisfactoriamente. Tengamos en cuenta que para nuestro trabajo requerimos que $\lambda \in (0,1)$. Sin embargo, algunas de las propiedades pueden ser probadas para $\lambda \in (0,2)$.

Prueba. (K1) *Homogeneidad*: para todo $t > 0$ y todo $x \in \mathbb{R}^N$ $K_\lambda(t,x) = t^{-N/} K_\lambda(1, t^{-1/\lambda}x)$.

Sea $(t,x) \in (0,+\infty) \times \mathbb{R}^N$ y usemos el cambio de variables $\xi = t^{-1/\lambda}\eta$ en la definición de K_λ: tenemos que

$$\begin{aligned}
K_\lambda(t,x) &= \mathcal{F}^{-1}(\xi \mapsto e^{-t|\xi|^\lambda})(x) \\
&= \mathcal{F}(e^{-t|\xi|^\lambda})(-x) \\
&= \int_{\mathbb{R}^N} e^{2\pi i\xi\cdot x} e^{-t|\xi|^\lambda} d\xi \\
&= \int_{\mathbb{R}^N} e^{2\pi i t^{-1/\lambda}\eta\cdot x - t|t^{-1/\lambda}\eta|^\lambda} t^{-N/\lambda} d\eta \\
&= t^{-N/\lambda} \int_{\mathbb{R}^N} e^{2\pi i(t^{-1/\lambda}x)\cdot\eta - |\eta|^\lambda} d\eta \\
&= t^{-N/\lambda} K_\lambda(1, t^{-1/\lambda}x).
\end{aligned}$$

(K2) *Regularidad:* $K_\lambda \in C^\infty((0,+\infty)\times\mathbb{R}^N)$ y , para todo entero no negativo m y todo multi-índice β, con $|\beta| = m$, existe una constante $B_m > 0$ tal que

$$|\partial_x^\beta(t,x)| \leq t^{-(N+m)/\lambda} \frac{B_m}{1 + t^{-(N+1)/\lambda}|x|^{N+1}}.$$

Sean $t > 0$ y $x \in \mathbb{R}^N$. Recordemos que

$$K_\lambda(t,x) = \int_{\mathbb{R}^N} e^{2\pi i\xi\cdot x} e^{-t|\xi|^\lambda} d\xi.$$

Queremos aplicar derivación bajo el signo integral para conseguir la regularidad de K_λ. Consideremos la función $(x_i, \xi) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \longmapsto e^{2\pi i\xi\cdot x} e^{-t|\xi|^2} \in \mathbb{C}$, donde x_i es la i-ésima coordenada de $x \in \mathbb{R}^N$. Entonces podemos dominar esta función por $\xi \mapsto e^{-t|\xi|^\lambda}$ (el término $e^{2\pi i\xi\cdot x}$ es acotado) la cual es integrable: si $|\xi| \leq 1$ al ser la exponencial continua y la bola cerrada unitaria un conjunto compacto, tenemos que la integrabilidad es clara en este conjunto; si $|\xi| > 1$, como $1 < \lambda < 2$, $|\xi| \leq |\xi|^\lambda \leq |\xi|^2$ de donde $-t|\xi|^2 \leq -t|\xi|^\lambda \leq -t|\xi|$ y por lo tanto

$$\int_{|\xi|>1} e^{-t|\xi|^\lambda} d\xi \leq \int_{|\xi|>1} e^{-t|\xi|} d\xi = \int_1^\infty e^{-rt} r^{N-1} dr < \infty \,.$$

Con lo anterior podemos afirmar:

(i) $(x, \xi) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N \longmapsto e^{-2\pi i x\cdot\xi} e^{-t|\xi|^\lambda}$ es integrbale como función de ξ.

(ii) Para cada multi-índice $\beta \in \mathbb{N}^N$, la derivada (con respecto a x) de la función de (i) existe y está dominada por la función $\xi \longmapsto |\xi|^\beta e^{-t|\xi|^\lambda} \in L^1(\mathbb{R}^N)$ (al usar coordenadas polares la integral resultante se domina por una función de la forma $r^\ell e^{-rt}$, $\ell \in \mathbb{Z}^+$ la cual converge en virtud de la fórmula de integración por partes).

Entonces por el teorema de diferenciación bajo el signo integral $\partial_x^\beta K_\lambda$ existe y es continua.

Con respecto a la diferenciaición en t podemos argumentar de manera similar como en la regularidad espacial para aplicar el teorema de derivación bajo el signo de la integral: se considera la función $(t, \xi) \in (0, +\infty) \times \mathbb{R}^N \longmapsto e^{2\pi i\xi\cdot x} e^{-t|\xi|^\lambda} \in \mathbb{C}$ que es integrable como función de ξ y su derivada está dominada por la función $\xi \in \mathbb{R}^N \longmapsto -|\xi|^\lambda e^{-t|\xi|^\lambda}$ que también es integrable en $\mathbb{R}^N$. Por el teorema de derivación bajo el signo de la integral, $\partial_t^k K_\lambda(t,x)$ existe y es continua, para todo $k \in \mathbb{N}$.

Vamos a concluir el estimativo para $\partial_x^\beta K_\lambda$. Es suficiente probarlo en detalle para $t = 1$ porque de tenerse en este caso, entonces para cualquier $t \neq 1$ y positivo se oberva que por la regla de la cadena y (K1), si $\beta \in \mathbb{N}^N$ tiene longitud m

$$\begin{aligned}
|\partial_x^\beta K_\lambda(t,x)| &= |\partial_x^\beta (t^{-N/\lambda} K_\lambda(1, t^{-1/\lambda}x))| \\
((\text{K1})) &= t^{-N/\lambda} |\partial_x^\beta K_\lambda(1, t^{-1/\lambda}x)| \\
&= t^{-N/\lambda} |\partial_x^\beta K_\lambda(1, t^{-1/\lambda}x)| |\partial_x^\beta (t^{-1/\lambda}x)| \\
&= t^{-(N+m)/\lambda} |\partial_x^\beta K_\lambda(1, t^{-1/\lambda}x)| \\
(\text{Estimativo en } t = 1\ ) &\leq t^{-(N+m)/\lambda} 1^{-(N+m)/\lambda} \frac{B_m}{1 + 1^{-(N+1)/\lambda} |t^{-1/\lambda}x|^{N+1}} \\
&= t^{-(N+m)/\lambda} \frac{B_m}{1 + t^{-(N+1)/\lambda} |x|^{N+1}}.
\end{aligned}$$

(K3) *No negatividad y aproximación a la identidad:* Recordemos que $0 < \lambda < 2$. Considere $f(x) := A|x|^{-N-\lambda}\chi_{B_1(0)^c}(x)$, con $A > 0$ tal que $\int f = 1$. Observe que

$$\int_{\mathbb{R}^N} |x|^{-N-\lambda}\chi_{B_1(0)^c}(x)dx < \infty,$$

ya que por coordenadas polares

$$\int_{\mathbb{R}^N} |x|^{-N-\lambda}\chi_{B_1(0)^c}(x)dx = \int_1^\infty r^{-N-\lambda}r^{N-1}dr = \int_1^\infty \frac{dr}{r^{\lambda+1}} < \infty,$$

en virtud de la p-serie, ya que $\lambda + 1 > 1$.

Podemos entonces calcular la transformada de Fourier como en $L^1(\mathbb{R}^N)$ para la función f:

$$\mathcal{F}(f)(\xi) = \int_{\mathbb{R}^N} e^{-2\pi i x\cdot\xi} A|x|^{-N-\lambda}\chi_{B_1^c}(0)(x)dx$$

$$= A \int_{|x|\geq 1} e^{-2\pi i x\cdot\xi}|x|^{-N-\lambda}dx$$

$$= A \int_{|x|\geq 1} \cos(2\pi x\cdot\xi)|x|^{-N-\lambda}dx - \underbrace{iA \int_{|x|\geq 1} \sin(2\pi x\cdot\xi)|x|^{-N-\lambda}dx}_{=0,\text{ impar sobre un dominio simétrico}}$$

$$= \int_{\mathbb{R}^N} \cos(2\pi x\cdot\xi)\underbrace{A|x|^{-N-\lambda}\chi_{B_1^c(0)}(x)}_{f(x)}dx$$

$$= \underbrace{\int_{\mathbb{R}^N} f(x)dx}_{1} + \int_{\mathbb{R}^N} \cos(2\pi x\cdot\xi)f(x)dx - \int_{\mathbb{R}^N} f(x)dx$$

$$= 1 + \int_{\mathbb{R}^N} (\cos(2\pi x\cdot\xi) - 1)f(x)dx$$

$$= 1 + A \int_{|x|\geq 1} \frac{\cos(2\pi x\cdot\xi) - 1}{|x|^{N+\lambda}}dx.$$

Hagamos el cambio de variables $x = y/|\xi|$, $|\xi| \neq 0$. Entonces $dx = dy/|\xi|^N$ de donde

$$1 + A \int_{|x|\geq 1} \frac{\cos(2\pi x\cdot\xi) - 1}{|x|^{N+\lambda}}dx = 1 + A \int_{|y|\geq|\xi|} \frac{\cos\left(2\pi\frac{\xi}{|\xi|\cdot y}\right) - 1}{\frac{|y|^{N+\lambda}}{|\xi|^{N+\lambda}}}\frac{dy}{|\xi|^N}$$

$$= 1 + A|\xi|^\lambda \int_{|y|\geq|\xi|} \frac{\cos\left(2\pi\frac{\xi}{|\xi|}\cdot y\right) - 1}{|y|^{N+\lambda}}dy.$$

Aplicando otro cambio de variables, esta vez mediante una matriz ortogonal M, tal que $Me_1 = \xi/|\xi|$, se tiene que

$$\mathcal{F}(f)(\xi) = 1 + A|\xi|^\lambda \int\limits_{|y|\geq|\xi|} \frac{\cos(2\pi y_1) - 1}{|y|^{N+\lambda}} dy,$$

siendo y_1 la primera componente del vector y.

Consideremos la función de valor real $y \longmapsto \frac{\cos(2\pi y_1)-1}{|y|^{N+\lambda}}$, $y \in \mathbb{R}^N$. Esta función es integrable: cerca del origen se tiene que $\cos(2\pi y_1) - 1 = \mathcal{O}(|y|^2)$ luego existe $C > 0$ tal que

$$\frac{|\cos(2\pi y_1) - 1|}{|y|^{N+\lambda}} \leq \frac{C}{|y|^{N+\lambda-2}},$$

$(|\cos(2\pi y_1 - 1)| \leq C|y|^2)$ por lo tanto como $\lambda < 2$, al usar coordenadas polares

$$\int\limits_{|y|<1} \frac{|\cos(2\pi y_1) - 1|}{|y|^{N+\lambda}} dy \leq C \int\limits_{|y|<1} \frac{C}{|y|^{N+\lambda-2}} dy$$

$$= C \int\limits_0^1 \frac{1}{r^{N+\lambda-2}} r^{N-1} dr$$

$$= C \int\limits_0^1 r^{-\lambda+1} dr = \frac{C}{2-\lambda} r^{2-\lambda} < \infty.$$

Para $|y| \geq 1$, $\cos(2\pi y_1) - 1$ es acotada y así

$$\int\limits_{|y|\geq 1} \frac{|\cos(2\pi y_1) - 1|}{|y|^{N+\lambda}} dy \leq M \int\limits_{|y|\geq 1} \frac{1}{|y|^{N+\lambda}} dy = M \int\limits_1^\infty \frac{r^{N-1}}{r^{N+\lambda}} dr$$

$$= M \int\limits_1^\infty \frac{1}{r^{\lambda+1}} dr < \infty.$$

Podemos aplicar el Teorema de la Convergencia Dominada para concluir que

$$\int\limits_{|y|\geq|\xi|} \frac{\cos(2\pi y_1) - 1}{|y|^{N+\lambda}} dy \longrightarrow \underbrace{\int\limits_{\mathbb{R}^N} \frac{\cos(2\pi y_1) - 1}{|y|^{N+\lambda}} dy}_{I}, \text{ cuando } |\xi| \to 0.$$

Nótese que $I < 0$, pues $\cos(2\pi y_1) \leq 1$.

De acuerdo a esto podemos escribir

$$\mathcal{F}(f)(\xi) = 1 + AI|\xi|^\lambda = 1 - C|\xi|^\lambda(1 + \omega(\xi)) \tag{6.2.1}$$

donde $C = -AI > 0$ y $\lim_{|\xi|\to 0} \omega(\xi) = 0$.

Definamos la secuencia de funciones $f_k(x) := k^{N/\lambda} f * f * f * \cdots * f(k^{1/\lambda} x)$, donde la convolución se toma k veces. f_k está bien definida (f es acotada, pues $|x| \geq 1$ y $\lambda > 0$, entonces $\lambda + N > N \geq 1$

y de esta manera $A|x|^{-N-\lambda}\chi_{B_1^c(0)}(x) \leq A < \infty$) ya que al ser $f \in L^\infty(\mathbb{R}^N)$, podemos aplicar la desigualdad de Young genralizada con $r = p_1 = 1$ y $p_2 = p_3 = \cdots = p_k = \infty$, que cumplen que $1/1 = 1/1 + 1/\infty + \cdots + 1/\infty$, da que $f_k \in L^1(\mathbb{R}^N)$ y además $\|f_k\|_{L^1(\mathbb{R}^N)} = 1$. Aplicando las propiedades de la transformada de Fourier para la convolución, encontramos que para todo $\xi \in \mathbb{R}^N$

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}(f_k)(\xi) &= \mathcal{F}[k^{N/\lambda} f * f * f * \cdots * f(k^{1/\lambda}\cdot)](\xi) \\
&= k^{N/\lambda}\mathcal{F}[f * f * f * \cdots * f(k^{1/\lambda}\cdot)](\xi) \\
&= k^{N/\lambda}k^{-N/\lambda}\mathcal{F}[f * f * f * f \cdots * f](k^{1/\lambda}\xi) \\
&= \underbrace{\mathcal{F}(f)\mathcal{F}(f)\mathcal{F}(f)\cdots\mathcal{F}(f)}_{k-\text{veces}}(k^{-1/\lambda}\xi) \\
&= (\mathcal{F}(f)(k^{-1/\lambda}\xi))^k \\
(\text{por } 6.2.1) &= (1 - C|k^{-1/\lambda}\xi|^\lambda(1 + \omega(\mathcal{K}^{-1/\lambda\xi})))^k \\
&= (1 - Ck^{-1}|\xi|^\lambda - Ck^{-1}|\xi|^\lambda\omega(k^{-1/\lambda}\xi))^k \to (1 - Ck^{-1/\lambda}|\xi|^\lambda)^k, \\
&\text{cuando } k \to \infty.
\end{aligned}$$

Pero $\lim_{k\to\infty}(1 - C|\xi|^\lambda/k)^k = e^{-C|\xi|^\lambda}$, de modo que

$$\mathcal{F}(f_k)(\xi) \longrightarrow e^{-C|\xi|^\lambda}, \text{ cuando } k \to \infty.$$

y esto muestra que $\mathcal{F}(f_k) \in L^\infty(\mathbb{R}^N)$. Así pues podemos considerar un tipo de convergencia en $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$ $\mathcal{F}(f_k) \to e^{-C|\cdot|^\lambda}$, cuando $k \to \infty$, en el siguiente sentido: considere la secuencia de distribuciones temperadas

$$T_k(\varphi) := \int_{\mathbb{R}^N} \mathcal{F}(f_k)\varphi,\ \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$$

y la distribución temperada

$$T(\varphi) := \int_{\mathbb{R}^N} e^{-C|\cdot|^\lambda}\varphi,\ \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$$

Tenemos que si $\mathcal{F}(f_k) \to e^{-C|\cdot|^\lambda}$, cuando $k \to \infty$ en $L^\infty(\mathbb{R}^N)$, entonces $T_k \to T, k \to \infty$ en $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$: si $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$

$$\begin{aligned}
|T_k(\varphi) - T(\varphi)| &\leq \int_{\mathbb{R}^N} |\mathcal{F}(f_k) - e^{-C|\cdot|^\lambda}||\varphi|dx \\
&\leq \|\mathcal{F}(f_k) - e^{-C|\cdot|^\lambda}\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)}\|\varphi\|_{L^1(\mathbb{R}^N)} \to 0, k \to \infty,
\end{aligned}$$

luego tomando $\mathcal{F}^{-1}$ nos da que $f_k \to \mathcal{F}^{-1}(e^{-C|\cdot|^\lambda}) = K_\lambda(C, \cdot), k \to \infty$ y como $f_k \geq 0$ para todo k entonces $K_\lambda \geq 0$ en $\{C\} \times \mathbb{R}^N$. Usando (K1) se concluye que para todo $(t, x) \in (0, +\infty) \times \mathbb{R}^N$

$$K_\lambda(t, x) = \underbrace{t^{-N/\lambda}}_{>0}\underbrace{K_\lambda(1, t^{-1/|l}x)}_{\geq 0} \geq 0.$$

Veamos ahora que $\|K_\lambda(t,\cdot)\|_{L^1(\mathbb{R}^N)} = 1$. Primero probémoslo para $t = 1$. Tenemos que

$$\int_{\mathbb{R}^N} |K_\lambda(1,x)|dx = \int_{\mathbb{R}^N} K_\lambda(1,x)dx = \int_{\mathbb{R}^N} e^{-2\pi i 0\cdot x} K_\lambda(1,x)dx$$

$$= \mathcal{F}(K_\lambda(1,\cdot))(0)$$

$$= e^{-1|0|^\lambda} = 1,$$

de acuerdo a la definición de K_λ.

Ahora, para cualquier $t > 0$ usamos (K1) (homogeneidad):

$$\int_{\mathbb{R}^N} |K_\lambda(t,x)|dx = t^{-N/\lambda} \int_{\mathbb{R}^N} K_\lambda(1, t^{-1/\lambda}x)dx$$

$$(\text{c.v. } y = t^{-1/\lambda}) = t^{-N/\lambda} \int_{\mathbb{R}^N} K_\lambda(1,y)t^{N/\lambda}dy$$

$$= 1.$$

Finalmente, para probar que $(K_\lambda(t,\cdot))_{t>0}$ es una aproximación a la identidad, demostraremos que para cualquier $f \in L^1(\mathbb{R}^N)$

$$\lim_{t\to 0} \|K_\lambda(t,\cdot) * f - f\|_{L^1(\mathbb{R}^N)} = 0.$$

Para esto vamos a usar el siguiente resultado sobre convoluciones de [9] (página 285):

Teorema: Sea $\{\phi_k\}$ una secuencia de funciones en $L^1(\mathbb{R}^N)$ tales que:

(1) $\lim_{k\to\infty} \int \phi_k dx = c$ *existe;*

(2) $\int |\phi_k|dx \le M$ *para alguna constante M;*

(3) para todo r>0,

$$\lim_{k\to\infty} \int_{|x|>r} |\phi_k(x)|dx = 0.$$

Entonces para cada $f \in L^p(\mathbb{R}^N)$, $1 \le p < \infty$,

$$\lim_{k\to\infty} \| * \phi_k - cf\|_p = 0.$$

Hagamos $\phi = \underbrace{K_\lambda(1,\cdot)}_{\ge 0} \in L^1(\mathbb{R}^N)$, donde $\int \phi = 1$. Para cualquier $t > 0$ definamos $\phi_a(x) := a^{-N}\phi(x/a)$, con $a = t^{-1/\lambda}$; para esta colección de funciones $\{\phi_a\}_{a>0}$ se tiene lo siguiente:

(1) $\int_{\mathbb{R}^N} \phi_a(x)dx = \int_{\mathbb{R}^N} K_\lambda(t,x)dx = 1.$

(2) $\int_{\mathbb{R}^N} |\phi_a(x)|dx = \|\phi\|_{L^1(\mathbb{R}^N)} = 1$ (como en (1)).

(3) Para todo $r > 0$, efectuando el cambio de variables $y = t^{-1/\lambda}x$ obtenemos que

$$\int\limits_{|x|\geq r} |\phi_a(x)|dx = \int\limits_{|y|\geq t^{-1/\lambda}r} |K_\lambda(1,y)|dy$$

$$= \int\limits_{|y|\geq ra} |\phi(y)|dy \to 0, a \to 0,$$

en virtud del Teorema de la Convergencia Dominada. Por el resultado arriba mencionado (con $c = 1$ y $p = 1$) concluimos que para toda $f \in L^1(\mathbb{R}^N)$,

$$\lim_{a\to 0} \phi_a * f = f, \ \text{ en } L^1(\mathbb{R}^N).$$

(K4) *Cota para el gradiente de K_λ:* Para todo $t > 0$, existe $\mathcal{K} > 0$ tal que $\|\nabla K_\lambda(t,\cdot)\|_{L^1(\mathbb{R}^N)} \leq \mathcal{K}t^{-1/\lambda}$.

Sean $t > 0$ y $x \in \mathbb{R}^N$. Tenemos que

$$\begin{aligned} |\nabla K_\lambda(t,x)| &= t^{-N/\lambda}|\nabla K_\lambda(1, t^{-1/\lambda}x)| \\ &= t^{-N/\lambda}\sqrt{\sum_{i=1}^{N}(\partial_i K_\lambda(1,t^{-1/\lambda}x))^2} \\ &\leq t^{-N/\lambda}\sum_{i=1}^{N}|\partial_i K_\lambda(1,t^{-1/\lambda}x)| \qquad (6.2.2) \\ \text{(Regla de la cadena)} &= t^{-N/\lambda}\sum_{i=1}^{N}t^{-1/\lambda}|\partial_i K_\lambda(1,t^{-1/\lambda}x)| \\ &= t^{-1/\lambda}t^{-N/\lambda}\sum_{i=1}^{N}|\partial_i K_\lambda(1,t^{-1/\lambda}x)|. \end{aligned}$$

Para hallar una cota para ∇K_λ, debemos estimar la integral

$$\int\limits_{\mathbb{R}^N} |\partial_i K_\lambda(1,t^{-1/\lambda}x)|dx.$$

Comenzando con el cambio de variables $y = t^{-1/\lambda}x$, de (6.2.2) se tiene que

$$\begin{aligned} \int\limits_{\mathbb{R}^N} |\nabla K_\lambda(t,x)|dx &\leq t^{-1/\lambda}\sum_{i=1}^{N} t^{-N/\lambda}\int\limits_{\mathbb{R}^N}|\partial_i K_\lambda(1,y)|t^{N/\lambda}dy \\ &= t^{-1/\lambda}\sum_{i=1}^{N}\int\limits_{\mathbb{R}^N}|\partial_i K_\lambda(1,y)|dy. \end{aligned}$$

Aplicando (K2) con un multi índice β de longitud 1, existe $B_1 > 0$ tal que

$$|\partial_i K_\lambda(1,y)| \leq 1^{-(N+1)/\lambda}\frac{B_1}{1 + 1^{-(N+1)/\lambda}|y|^{N+1}} = \frac{B_1}{1+|y|^{N+1}}.$$

Como la función $y \in \mathbb{R}^N \mapsto 1/(1+|y|^{N+1}) \in \mathbb{R}$ es integrable y conseguimos que para todo $t > 0$, $\|\nabla K_\lambda(t,\cdot)\|_{L^1(\mathbb{R}^N)} \leq t^{-1/\lambda}\mathcal{K}$.

(K5) *Propiedad del semigrupo:* Para todo $t, t' > 0$, $K_\lambda(t,\cdot) * K_\lambda(t',\cdot) = K_\lambda(t+t',\cdot)$. Sean $t, t' > 0$ y $x \in \mathbb{R}^N$. Entonces

$$\begin{aligned}
K_\lambda(t,\cdot) * K_\lambda(t',\cdot)(x) &= \int_{\mathbb{R}^N} K_\lambda(t,y) K_\lambda(t', x-y)\,dy \\
&= \int_{\mathbb{R}^N} \left[\int_{\mathbb{R}^N} e^{2\pi i \xi \cdot y} e^{-t|\xi|^\lambda} d\xi \right] \left[\int_{\mathbb{R}^N} e^{2\pi i \xi \cdot y} e^{-t'|\xi|^\lambda} d\xi \right] dy \\
(\text{Fubini}) &= \int_{\mathbb{R}^N} \int_{\mathbb{R}^N} e^{2\pi i \xi \cdot y} e^{-t|\xi|^\lambda} \left[\int_{\mathbb{R}^N} e^{-2\pi i \xi \cdot y} e^{2\pi i \xi \cdot x} e^{-t'|\xi|^\lambda} d\xi \right] d\xi dy \\
&= \int_{\mathbb{R}^N} \int_{\mathbb{R}^N} e^{2\pi i \xi \cdot y} e^{-t|\xi|^\lambda} \mathcal{F}(\xi \to e^{2\pi i \xi \cdot x} e^{-t'|\xi|^\lambda})(y)\, d\xi dy \\
(\text{Fubini}) &= \int_{\mathbb{R}^N} e^{-t|\xi|^\lambda} \underbrace{\int_{\mathbb{R}^N} e^{2\pi i \xi \cdot y} \mathcal{F}(e^{2\pi i \xi \cdot x} e^{-t'|\xi|^\lambda})(y)\, dy}\, d\xi \\
&= \int_{\mathbb{R}^N} e^{-t|\xi|^\lambda} \underbrace{\mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}(e^{2\pi i \xi \cdot x} e^{-t'|\xi|^\lambda}))}\, d\xi \\
&= \int_{\mathbb{R}^N} e^{2\pi i \xi \cdot x} e^{-t'|\xi|^\lambda} e^{-t|\xi|^\lambda} d\xi \\
&= \int_{\mathbb{R}^N} e^{2\pi i \xi \cdot x} e^{-(t+t')|\xi|^\lambda} d\xi = K_\lambda(t+t', x).
\end{aligned}$$

(K6) *Continuidad $K_\lambda(t,\cdot)$:* La función $t \in (0,+\infty) \longmapsto K_\lambda(t,\cdot) \in L^1(\mathbb{R}^N)$ es continua. Necesitamos la siguiente propiedad adicional de K_λ:

Afirmación 6.2.1. *Sea B un subconjunto compacto de $(0,+\infty)$. Entonces $(K_\lambda(t,\cdot))_{t\in B}$ es equi-integrable al infinito, es decir, para todo $\varepsilon > 0$, existe $R > 0$ tal que para todo $t \in B$*

$$\int_{\mathbb{R}^N \setminus B_R} |K_\lambda(t,x)|\,dx \leq \varepsilon.$$

Prueba de la Afirmación 6.2.1. Como B es compacto, existe $t_0 \in B$ (mínimo) tal que $t_0 \leq t$ para todo $t \in B$. Por otro lado, (K1) y el cambio de variables $y = t^{-1/\lambda}x$ nos da que para todo $t \in B$ y todo $R > 0$

$$\int_{\mathbb{R}^N \setminus B_R} |K_\lambda(t,x)|\,dx = \int_{|y| \geq t^{-1/\lambda} R} |K_\lambda(1,y)|\,dy \leq \int_{|y| \geq t_0^{-1/\lambda} R} |K_\lambda(1,y)|\,dy, \tag{6.2.3}$$

ya que $\lambda > 1$.

Como $K_\lambda(1,\cdot) \in L^1(\mathbb{R}^N)$, se tiene que existe $L > 0$ tal que $\int_{|y|\geq L} |K_\lambda(1,y)|dy \leq \varepsilon$. Tomando $R := Lt_0^{1/\lambda}$ obtenemos de (6.2.3) que para todo $t \in B$

$$\int\limits_{\mathbb{R}^N\setminus B_R} |K_\lambda(t,x)|dx \leq \varepsilon.$$

$\triangle$

Para probar (K6) sean $t_0 > 0$ y $\{t_n\}_n \subset (0,+\infty)$ una secuencia tal que $t_n \to t_0$, cuando $n \to \infty$. Veamos que

$$\lim_{n\to\infty} \|K_\lambda(t_n,\cdot) - K_\lambda(t_0,\cdot)\|_{L^1(\mathbb{R}^N)} = 0.$$

Demostremos primero que si A es un subconjunto compacto de $\mathbb{R}^N$ con medida positiva, entonces $K_\lambda(t_n,\cdot) \to K_\lambda(t_0,\cdot)$, uniformemente en A, cuando $n \to \infty$. Como $\{t_n\}_n$ converge es acotada, luego existe un intervalo cerrado I que contiene a t_n para todo $n \in \mathbb{N}$.

Sea $\varepsilon > 0$. Como $I \times A$ es compacto en $\mathbb{R}^{N+1}$ y K_λ es continua en el producto $(0,+\infty)\times\mathbb{R}^N$, entonces es uniformemente continua, por lo tanto existe $\delta > 0$ tal que $|K_\lambda(t,x) - K_\lambda(s,y)| < \varepsilon/2|A|$ siempre que $|(t,x)-(s,y)| < \delta$, $(t,x),(s,y) \in I \times A$. Aplicando esta condición en los puntos $(t_n,x),(t_0,x)$ para los cuales $|(t_n,x)-(t_0,x)| = |t_n - t_0| < \delta$, con $x \in A$ y teniendo en cuenta que t_n converge a t_0, para este δ existe $\ell \in \mathbb{Z}^+$ tal que para todo $x \in A$ y todo $n \geq \ell$

$$|K_\lambda(t_n,x) - K_\lambda(t_0,x)| < \frac{\varepsilon}{2|A|},$$

y con esto si $n \geq \ell$, para todo $x \in A$

$$\int\limits_A |K_\lambda(t_n,x) - K_\lambda(t_0,x)|dx < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{6.2.4}$$

De acá se sigue la convergencia uniforme buscada.

Por otro lado como $(K_\lambda(t,\cdot))_{t\in I}$ es equi-integrable en el infinito, se tiene que en el compacto $I \subset (0,+\infty)$, existe $R > 0$ tal que para todo $t \in I$

$$\int\limits_{\mathbb{R}^N - B_R} |K_\lambda(t,x)|dx < \frac{\varepsilon}{4}.$$

Si consideramos el compacto $\overline{B}_R \subset \mathbb{R}^N$, entonces por (6.2.4) y la equi-integrabilidad con este compacto tenemos que para todo $n \geq \ell$

$$\begin{aligned}
\int\limits_{\mathbb{R}^N} |K_\lambda(t_n,x) - K_\lambda(t_0,x)|dx &= \int\limits_{\overline{B}_R} |K_\lambda(t_n,x) - K_\lambda(t_0,x)|dx + \int\limits_{B_R^c} |K_\lambda(t_n,x) - K_\lambda(t_0,x)|dx \\
&\leq \frac{\varepsilon}{2} + \int\limits_{B_R^c} |K_\lambda(t_n,x)|dx + \int\limits_{B_R^c} |K_\lambda(t_0,x)|dx \\
&\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} = \varepsilon,
\end{aligned}$$

es decir,

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^N} |K_\lambda(t_n, x) - K_\lambda(t_0, x)| dx = 0.$$

☑

Lista de símbolos

∂^α	notación multi-índice
$\mathcal{F}$	transformada de Fourier
$C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$	espacio de funciones suaves real valuadas de soporte compacto en $\mathbb{R}^N$
$L^\infty(\mathbb{R}^N)$	espacio de funciones real valuadas esencialmente acotadas en $\mathbb{R}^N$
$L^p(\mathbb{R}^N)$	espacio de funciones real valuadas p integrables en $\mathbb{R}^N$
$\|\cdot\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)}$	norma del espacio $L^\infty(\mathbb{R}^N)$
$\|\cdot\|_{L^p(\mathbb{R}^N)}$	norma del espacio $L^p(\mathbb{R}^N)$
$\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$	espacio de Schwartz de funciones real valuadas rápidamente decrecientes
$\mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$	dual topológico de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$
D^s	derivada fraccionaria de orden s
Δ	operador laplaciano
$(-\Delta)^s$	laplaciano fraccionario de orden s
B_R	bola de centro 0 y radio $R > 0$ en $\mathbb{R}^N$
$W^{k,p}(\mathbb{R}^N)$	espacio de Sobolev de funciones en $L^p(\mathbb{R}^N)$ con derivadas débiles en $L^p(\mathbb{R}^N)$
$H^s(\mathbb{R}^N)$	espacio de funciones en $L^2(\mathbb{R}^N)$ tal que el cuadrado del módulo de su transformada de Fourier decae más rápido que $(1 + \lvert\cdot\rvert^2)^s$
C^k, C_b^k, C_b^∞	espacios de funciones diferenciables y acotadas
$\lvert\cdot\rvert$	medida de Lebesgue

Bibliografía

[1] B. P. Palka. *An introduction to Complex Function Theory* . Undergraduate Texts in Mathematics. Springer, 2012.

[2] C. Bucur and E. Valdinoci. *Nonlocal Diffusion and Applications*. Lecture Notes of the Unione Matematica Italiana. Springer, 2015.

[3] C. Chica. *Some aspects of the obstacle problem*. Tesis de maestría. Medellín, 2020.

[4] C. IMBERT. *A non-local regularization of first order Hamilton-Jacobi equations*. Journal of Differential Equations, Elsevier, 2005, 211 (1), pp.218-246. 10.1016/j.jde.2004.06.001. hal-00176542

[5] C. Zuily. *Éléments de distributions et d'équations aux dérivées partielles*. Cours et problèmes résolus. Donud, París, 2002. ISBN 2 10 005735 9.

[6] D. Gilbarg and N. S. Trudinger. *Elliptic Partial Differential Equations of Second Order, volume 224 of Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences]*. Springer-Verlag. Berlin. Second edition, 1983.

[7] D. Restrepo. *On the fractional Laplacian and non local operators*. Tesis de maestría. Medellín, 2018.

[8] E. JAKOEBSEN and K. KARLSEN. *A maximum principle for semicontinuous function applicable to integro-partial differential equations*. Prepint

[9] F. Jones. *Lebesgue integration on Euclidean space.* Jones & Bartlett Learning, 2001.

[10] G B. Folland. *Higher-Order Derivatives and Taylor's Formula in Several Variables*. https://sites.math.washington.edu/~folland/Math425/taylor2.pdf

[11] G. Ponce and F. Linares. *Introduction to Nonlinear Dispersive Equations*. Universitext. Springer. New York, 2009.

[12] H. Brezis. *Functional analysis, Sobolev spaces and partial differential equations*. Springer Science & Business Media, 2010.

[13] J. DRONIOU and C. IMBERT. *Fractal First-Order Partial Differential Equations*. Arch. Rational Mech. Anal. 182 (2006) 299-331. DOI: 10.1007/s00205-006-0429-2.

[14] J. DRONIOU, G. THIERRY AND J. VOVELLE. *Global solution and smoothing effect for a non-local regularization of a hyperbolic equation.* Article in Journal of Evolution Equations. August 2003. DOI: 10.1007/S00028-003-0503-1.

[15] J. HEINONEN. *Lectures on Lipschitz Analysis.* Lectures at the 14th Jyväskylä Summer School in August 2004. http://www.math.jyu.fi/research/reports/rep100.pdf

[16] J. JIMÉNEZ. *Unique Continuation Properties for Some Nonlinear Dispersive Models.* Tesis de Doctorado. Río de Janeiro, 2011.

[17] J. MUNKRES. *Analysis on manifolds.* Westview Press, 1997.

[18] L. C. EVANS. *Partial differential equations.* Graduate studies in mathematics. Ameri- can Mathematical Society, 1998.

[19] L. GRAFAKOS. *Classical Fourier analysis*, volume 2. Springer, 2008.

[20] L. FISKE AND C. OVERTURF. *Tempered Distributions.* University of New Mexico, 2001. https://www.math.unm.edu/~crisp/courses/math402/spring16/Distributions402CairnLionel.pdf

[21] L. MATTNER. *Complex differentiation under the integral.* Department of Statistics. University of Leeds. Leeds, LS2 9JT, England, 2001. http://www.nieuwarchief.nl/serie5/pdf/naw5-2001-02-1-032.pdf

[22] R. REMMERT. *Theory of Complex Functions.* Graduate Texts in Mathematics. Springer Science & Business Media, 1991.