ECUACIONES DE ONDA SEMILINEALES CON PARTE NO LINEAL NO MONÓTONA

Rodrigo Duque Baracaldo
Matemático, M.Sc.
Código: 830143

Universidad Nacional de Colombia
Facultad de Ciencias
Departamento de Matemáticas
Bogotá, D.C.
Septiembre de 2011

ECUACIONES DE ONDA SEMILINEALES CON PARTE NO LINEAL NO MONÓTONA

Rodrigo Duque Baracaldo
Matemático, M.Sc.
Código: 830143

Trabajo de tesis para optar al título de
Doctor en Matemáticas

Director
Francisco Caicedo, Ph.D.
Doctor en Matemáticas

Codirector
Alfonso Castro, Ph.D.
Doctor en Matemáticas

Universidad Nacional de Colombia
Facultad de Ciencias
Departamento de Matemáticas
Bogotá, D.C.

Septiembre de 2011

Título en español

Ecuaciones de onda semilineales con parte no lineal no monótona

Title in English

Semilinear wave equations with non-monotone nonlinear part

Resumen: Estudiamos dos ecuaciones de onda no lineales, con parte no lineal no monótona. Los problemas están sujetos a las condiciones de frontera $u(0,t) = u(\pi,t) = 0$ y de periocidad $u(x,t) = u(x,t+2\pi)$. Se establecen condiciones que permiten garantizar la existencia de solución débil en cada problema

Abstract: We study two nonlinear wave equations with non-monotone nonlinear part. The problems are subjet to the Dirichlet-periodic conditions $u(0,t) = u(\pi,t) = 0; \quad u(x,t) = u(x,t+2\pi)$. We establish the conditions that guarantee the existence of weak solution to the problems.

Palabras clave: Ecuaciones semilineales, ecuaciones de onda, condiciones de frontera, solución débil

Keywords: Semilinear wave equations, boundary conditions, weak solutions

Nota de aceptación

Trabajo de tesis
Aprobado

Jurado
Peter Bates

Jurado
Jorge Cossio

Jurado
Bernhard Ruf

Director
Francisco caicedo.

Codirector
Alfonso Castro

Bogotá, D.C., Sep. de 2011

Dedicatoria

A mis hijos Luisa Fernanda y Juan Diego, fuente de motivación y apoyo constante. A ellos dedico esta y todas mis actividades.

Agradecimientos

Agradezco a los Profesores Francisco Caicedo y Alfonso Castro, quienes con su don de gentes, conocimiento y continua orientación han sido fundamentales para el desarrollo de la tesis y culminación del doctorado.

Agradezco a los Profesores Lorenzo Acosta, Guillermo Rodriguez y Félix Soriano quienes me impulsaron y apoyaron en el inicio del doctorado. A los colegas del departamento de matemáticas que de una u otra forma me animaron para seguir adelante en los estudios.

Agradezco también al Profesor Bernhard Ruf, excelente matemático y persona, por su paciencia, colaboración y enseñanzas durante mi pasantía en Milán, Italia.

Quiero agradecer a las directivas del departamento de matemáticas y de la Facultad de Ciencias, quienes aprobaron de manera diligente la comisión de estudios y el permiso para realizar la pasantía en Milán-Italia, actividades importantes en mi actividad académica.

Finalmente, agradezco a la Università Degli Studio di Milano, que con el Proyecto UNIALA me permitió realizar la pasantía en Milán, actividad importante para la culminación de la tesis.

Índice general

Introducción

Desde sus inicios, en el siglo XVIII, el estudio de las ecuaciones diferenciales parciales (EDP) ha sido importante y ha apasionado a muchos matemáticos. De una parte, las EDP son una herramienta útil para modelar analíticamente muchos fenómenos de la física y otras ciencias. Por ejemplo, la ecuación de onda unidimensional, $u_{tt} = u_{xx}$, fué estudiada por D'Alambert a mediados del siglo XVIII para modelar una cuerda vibrante. Las EDP también son una herramienta para el desarrollo de otras ramas de la matemática. H. Brezis y F. Browder escriben "Esta dualidad de puntos de vista ha sido central para el estudio de las EDP durante los siglos XIX y XX "(véase [B-B-1998]).

En esta tesis estudiamos específicamente, la solubilidad de las siguientes ecuaciones unidimensionales de tipo hiperbólico:

$$\begin{aligned}
&u_{tt} - u_{xx} = \epsilon(u^{2k} + h(x,t) + R(x,t,u)) \\
&u_{tt} - u_{xx} + \tau u + h(u) = f(x,t) \\
&x \in [0,\pi], \quad t \in \mathbf{R},
\end{aligned}$$

donde u satisface las condiciones

$$\begin{cases} u(0,t) = u(\pi,t) = 0, \\ u(x,t) = u(x,t+2\pi) \qquad x \in [0,\pi], \quad t \in \mathbf{R}. \end{cases}$$

Cada una de las funciones y parámetros serán descritos al estudiar el correspondiente problema.

Para simplificar la escritura, a partir de este momento denotaremos con $\Box$ al operador de D'Alambert $\partial_{tt} - \partial_{xx}$, y Ω será el abierto $(0,\pi) \times (0,2\pi)$.

El estudio de los problemas citados anteriormenete está motivado por algunos resultados que mencionaremos a continuación:

H. Lovicarova [L-1969] considera el problema

$$\begin{cases} \Box u = \epsilon f(x,t,u,u_t,u_x) \\ \text{lím}_{x\to 0} u(x,t) = \text{lím}_{x\to\pi} u(x,t) = 0 \\ u(x,t) = u(x,t+2\pi), \quad (x,t) \in (0,\pi)\times \mathbf{R}, \end{cases} \tag{1}$$

donde f es 2π periódica en t, está definida sobre $(0,\pi)\times\mathbf{R}\times\mathbf{R}\times\mathbf{R}\times\mathbf{R}$. Demuestra que si $f \in C^{k+1}$, es decir, f tiene derivadas parciales hasta de orden $k+1$, continuas y acotas. Y existe $\gamma > 0$ tal que $\frac{\partial f}{\partial u_t} < -\gamma$ entonces, para ϵ suficientemente pequeño del problema (1) tiene solución $u_\epsilon \in C^k$. Tambien establece condiciones sobre f, para que las soluciones u_ϵ dependan continuamente de ϵ.

H. Brezis y L. Nirenberg [B-N-1978] plantean el problema monótono:

$$\begin{cases} \Box u + R(x,t,u) = 0 \\ u(0,t) = u(\pi,t) = 0 \\ u(x,t+T) = u(x,t), \quad (x,t)\in(0,\pi)\times\mathbf{R}, \end{cases} \tag{2}$$

donde $T = 2\pi/\lambda$ con λ racional. R es una función continua en $[0,\pi]\times[0,T]\times\mathbf{R}$, monótona en la variable u y T periódica en la variable t. La monotonía de R es clave para estimar la componente de las soluciones en el núcleo del operador de onda. Ellos demuestran que si: (a) R es creciente en la variable u, (b) para alguna constante C, $|R(x,t,u)| \le 3|u| + C$, (c) existe un $u_0(x,t)\in L_2(\Omega)$ tal que $R(x,t,u_0(x,t)) = 0$ y (d) $|R|\to\infty$ cuando $|u|\to\infty$. Entonces (2) tiene solución generalizada, de la forma

$$u = u_1 + u_2 \qquad u_1 \in C^{0,1} \qquad u_2 \in L^\infty,$$

donde $C^{0,1}$ es el espacio de las funciones Lipschitz continuas en $\overline{\Omega}$.

H. Hofer [H-1982] y M. Willem [W-1981] estudian, independientemente, el problema

$$\begin{cases} \Box u = g(u) + h(x,t) \\ u(0,t) = u(\pi,t) = 0 \\ u(x,t) = u(x,t+2\pi), \quad x\in(0,\pi), \quad t\in\mathbf{R}, \end{cases} \tag{3}$$

demuestran el siguiente resultado:
Asumiendo que existen $\gamma_1,\gamma_2\in\mathbf{R}$, $\gamma_1\le\gamma_2$ tales que el intervalo $[\gamma_1,\gamma_2]$ no contiene puntos del espectro del operador $\Box$, y $g:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ es Lipschitz continua, y para algún $c>0$

$$-c + \frac{\gamma_1}{2}s^2 \le \int_0^s g(t)dt \le c + \frac{\gamma_2}{2}s^2, \quad \text{para toda } s\in\mathbf{R}. \tag{4}$$

Entonces, para todo h en un subconjunto denso de L^2, (3) tiene una solución débil.

A. Castro y S. Unsurangsie [C-U-1988], introducen la idea de *funciones no planas sobre características* (véase definición 1). Consideran el problema

$$\begin{cases} \Box u + \lambda u = cq(x,t) + r(x,t) + h(u) \\ u(0,t) = u(\pi,t) = 0 \\ u(x,t) = u(x,t+2\pi), \quad (x,t) \in [0,\pi] \times \mathbf{R}, \end{cases} \tag{5}$$

donde h es una función real de clase C^1, tal que $\lim_{|u|\to\infty} h'(u) = 0$ y $q \in N^{\perp}$, y $\lambda \in \mathbf{R} - \sigma(\Box)$.
Demuestran que si φ no es plana sobre características y $\varphi_t \in L^\infty$, donde φ es solución de la ecuación linel $\Box\varphi + \lambda\varphi = q(x,t)$ sujeta a las condiciones dadas en (5), entonces existe una constante c_0 tal que para $|c| > c_0$ el problema (5) tiene solución débil $u \in H^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$.

F. Caicedo y A. Castro [C-C-1997], demuestran la existencia de solución débil $u \in H^1 \cap L^\infty$ para el problema con periocidad $\sqrt{2}\pi$:

$$\begin{cases} \Box u + \lambda u + h(u) = p(x,t) \\ u(0,t) = u(\pi,t) \\ u(x,t) = u(x,t+\sqrt{2}\pi), \quad x,t \in \mathbf{R}, \end{cases} \tag{6}$$

donde $h : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ es de clase C^1 tal que $\lim_{|u|\to\infty} h'(u) = 0$. Descomponiendo $p(x,t) = cq(x,t) + r(x,t)$ y asumiendo condiciones sobre q condiciones similares a las del problema (5), para $|c|$ suficientemente grande (6) tiene solución débil $u \in \mathbf{H^1} \cap L^\infty([0,\pi] \times \mathbf{R}$.
En este problema observamos que $\Box$, sujeto a las condiciones dadas en (6), son de multiplicidad infinita.

F. Caicedo y A. Castro [C-C-2009], estudian el problema doble periódico

$$\begin{cases} \Box u + \lambda u + h(u) = p(x,t) \\ u(x,t) = u(x,t+2\pi) = u(x+2\pi,t), \quad x,t \in \mathbf{R}, \end{cases} \tag{7}$$

donde $p(x,t) = p(x,t+2\pi) = p(x+2\pi,t)$, λ es un real positivo y no es valor propio de $\Box$ sujeto a las condiciones de doble periocidad. Asumiendo que la función h es diferenciable, no monótona, y de soporte en compacto. Demuestran que (7) no tiene solución continua cuando p es de la forma $c\sin(x+t)$ y $|c|$ es grande.

En este trabajo seguimos la técnicas introducidas por A. Castro y B. Preskill [C-P-2010] para demostrar la existencia de solución de las ecuaciones

$$\begin{aligned} &\Box u = \epsilon(u^{2k} + h(x,t) + R(x,t,u)) \\ &\Box u + \tau u + h(u) = f(x,t) \\ &x \in [0,\pi], \quad t \in \mathbf{R}, \end{aligned}$$

sujetas a la condición

$$\begin{cases} u(0,t) = u(\pi,t) = 0, \\ u(x,t) = u(x,t+2\pi) \qquad x \in [0,\pi], \quad t \in \mathbf{R}. \end{cases}$$

Antecedentes específicos sobre cada una de estas ecuaciones los encontramos en [B-B-2006] y [C-P-2010], respectivamente.

En [B-B-2006], los autores demuestran la existencia de solución del problema

$$\begin{cases} \Box u = \epsilon(u^{2k} + h(x,t) + R(x,t,u)) \\ u(0,t) = u(\pi,t) = 0, \\ u(x,t) = u(x,t+2\pi) \qquad x \in [0,\pi], \quad t \in \mathbf{R}. \end{cases}$$

Para hacerlo, los autores introducen $H = \Box^{-1} h$, y asumen que $H(x,t) > 0$ para todo $(x,t) \in \Omega$. Nosotros introducimos un operador lineal L, y asumiendo su invertibilidad demostramos la existencia de solución débil del problema (véase Teorema 1). Además mostramos que la positividad de H es condición suficiente pero no necesaria para que L sea invertible (véase Teorema 2).

En [C-P-2010], los autores demuestran la existencia de solución del problema

$$\begin{cases} \Box u + \tau u + h(u) = f(x,t) \\ u(0,t) = u(\pi,t) = 0, \\ u(x,t) = u(x,t+2\pi) \qquad x \in [0,\pi], \quad t \in \mathbf{R}, \end{cases}$$

asumiendo que $f \in L^\infty$. Demuestran que bajo condiciones apropiadas, el problema tiene solución. Nosotros generalizamos este resultado considerando $f \in L^p(\Omega)$, $p \geq 2$. (véase Teorema 4).

La tesis está dividida en cuatro capítulos:

En el primer capítulo, denominado Preliminares, definimos la notación usada, mencionamos algunos conceptos y resultados que necesitamos más adelante.

En la segunda parte, denominada un problema con bifurcación imperfecta, estudiamos el problema $\Box u = \epsilon(u^{2k} + h(x,t) + R(x,t,u))$, sujeto a la condición Dirichlet-periódica.

En el capítulo tres, llamado un problema asintóticamente lineal, estudiamos la ecuación $\Box u + \tau u + h(u) = f(x,t)$, sujeta a la condición Dirichlet-periódica. Donde $f \in L^p([0,\pi] \times [0,2\pi])$.

En el capítulo cuatro, anexo 1, damos dos definiciones de funciones no planas sobre características, y demostramos que estas son equivalentes.

CAPÍTULO 1

Preliminares

1.1. Notación

Denotaremos con $\Box$ al operador de D'Alambert $\partial_{tt} - \partial_{xx}$. Con $\Omega = (0, \pi) \times (0, 2\pi)$. Nos referiremos a la condición

$$\begin{cases} u(0,t) = u(\pi,t) = 0 \\ u(x,t+2\pi) = u(x,t), \end{cases} \tag{1.1}$$

como la condición Dirichlet-periódica.

El espectro del operador $\Box$, sujeto a las condiciones dadas en (1.1), es

$$\sigma(\Box) = \{k^2 - j^2; k = 1,2,\ldots,\ j = 0,1,\ldots\}.$$

Se observa que todos los valores propios tienen multiplicidad finita, excepto el 0, que tiene multiplicidad infinita.

Sea N es el subespacio cerrado de $L^2(\Omega)$ generado por

$$\{\sin(kx)\sin(kt),\ \sin(kx)\cos(kt);\ k = 1,2,3,\ldots\}. \tag{1.2}$$

Este espacio N, es el núcleo del operador $\Box$ sujeto a las condiciones dadas en (1.1). En la sección 1.3 veremos que toda función $v \in N$ se puede escribir de la forma $v(x,t) = p(t+x) - p(t-x)$, donde p es 2π periódica y pertenece a $L^2[0,2\pi]$.
Denotamos con $N^{\perp}$ al complemento ortogonal de N en $L^2(\Omega)$, es decir, $N^{\perp}$ es el subespacio de $L^2(\Omega)$ generado por

$$\{\sin(kx)\sin(jt),\ \sin(kx)\cos(jt);\ k = 1,2,3,\ldots, j = 0,1,2,\ldots\}.$$

Denotamos con $\mathbf{H^1}$ al espacio de Sobolev de las funciones $y \in L^2(\Omega)$, que satisfacen las condiciones de frontera $y(0,t) = y(\pi,t) = 0$, y tales que sus primeras derivadas parciales tambien pertenecen a $L^2(\Omega)$. Finalmente, Y será el subespacio de $\mathbf{H^1}$ de funciones y tales que

$$\int_\Omega y(x,t)v(x,t)dxdt = 0 \quad \text{para toda} \quad v \in N, \tag{1.3}$$

de esta forma $Y = N^\perp \cap \mathbf{H^1}$.

Notaremos con Π_N y $\Pi_{N^\perp}$ las proyecciones ortogonales de $L^2(\Omega)$ sobre N y $N^\perp$ respectivamente. Por simplicidad, notamos con Π_Y la proyección sobre Y. La norma en $\mathbf{H^1}$ se denotará $\|\ \|_{1,2}$, la norma en $L^2(\Omega)$ por $\|\ \|_2$, y en L^∞ por $\|\ \|$ o $\|\ \|_\infty$.

Recordamos que $u = v + y \in N \oplus Y$ es una solución débil de (**??**), (1.1) si

$$\int_\Omega \left((y_t\hat{y}_t - y_x\hat{y}_x) - (R(x,t,u) - f(x,t))(\hat{v} + \hat{y})\right) dxdt = 0, \tag{1.4}$$

para toda $\hat{v} + \hat{y} \in N \oplus Y$. Es claro, que toda solución clásica del problema, es solución débil.

Denotamos con $\mu(E)$ la medida de Lebesgue del conjunto $E \subset \mathbf{R}^n$. Decimos que $f \in L^1_{Loc}$ si f es localmente integrable.

1.2. Algunos teoremas

En esta sección citamos algunos teoremas que necesitaremos más adelante. Además, indicamos la referencia bibliográfica correspondiente.

Teorema de Convergencia Dominada. ([F-1999], pg. 54)
Sea $\{f_n\}$ una sucesión en L^1 tal que (a) $f_k \to f$ en casi toda punto, y (b) existe una función no negativa $g \in L^1$ tal que $|f_n| \leq g$ en casi todo punto. Entonces $f \in L^1$ y

$$\int f = \lim_{n\to\infty} \int f_n.$$

Teorema de Fubini. ([W-Z-1977], pg. 87)
Sean I_1, I_2 intervalos en $\mathbf{R}$, $f \in L^1(I)$, $\quad I = I_1 \times I_2$. Entonces

i) para casi todo $x \in I_1$ $f(x,y)$ es medible e integrable sobre I_2, como función de y;

ii) como función de x, $\int_{I_2} f(x,y)dy$ es medible e integrable sobre I_1, y

$$\iint_I f(x,y)dxdy = \int_{I_1} \left[\int_{I_2} f(x,y)dy\right] dx.$$

Teorema de Diferenciación de Lebesgue. ([F-1999], pg. 97)
Sean $f \in L^1_{Loc}$ y $B_r(x)$ la bola de centro x y radio r. Entonces para casi todo $x \in \mathbf{R}^n$

$$\lim_{r\to 0} \frac{1}{\mu(B_r(x))} \int_{B_r(x)} f(y)dy = f(x).$$

Teorema de Rellich-Kondrachov. ([B-1983], pg.169)
Sea $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ abierto acotado y de clase C^1 a trozos. Si $p \leq n$, entonces

$$\mathbf{W}^{1,p}(\Omega) \subset L^q(\Omega), \quad \textit{para todo } q \in [1, p^*) \quad \textit{donde } \frac{1}{p^*} = \frac{1}{p} - \frac{1}{n},$$

con inyección compacta.
En particular, $\mathbf{H^1}(\Omega) = \mathbf{W}^{1,2}(\Omega) \subset L^2(\Omega)$. Aplicaremos este teorema de la siguiente forma: Si $\{w_n\} \subset \mathbf{H^1}$ es acotada, es decir $\|w_n\|_{1,2} \leq K$, entonces $\{w_n\}$ contiene una subsucesión convergente en L^2 y esta a la vez una subsucesión que converge puntualmente en casi toda parte.

1.3. El núcleo del operador de onda

Comenzamos deduciendo la **Fórmula de D'Alambert**, esto es, toda función $v \in N$ se puede expresar de la forma $v(x,t) = p(t+x) - p(t-x)$, donde p es 2π-periódica y $p \in L^2[0, 2\pi]$, además, es posible escoger p tal que $\int_0^{2\pi} p(t)dt = 0$. Para ver esto, tomemos la ecuación

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0, \tag{1.5}$$

y sean

$$\xi = x - t, \quad \eta = x + t, \tag{1.6}$$

de esta forma, la ecuación (1.5) se transforma en

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} = 0. \tag{1.7}$$

Es decir,

$$\frac{\partial}{\partial \xi} \frac{\partial u}{\partial \eta} = 0,$$

por tanto $\frac{\partial u}{\partial \eta} = p_2(\eta)$, donde p_2 es una función arbitraria. Así, $u = p_2(\eta) + p_1(\xi)$, donde p_1 tambien es arbitraria. Volviendo a las variables originales tenemos

$$u = p_2(x - t) + p_1(x + t).$$

De las condiciones de frontera dadas en (**??**) tenemos que

$$p_2(-t) + p_1(t) = 0 \quad \text{y} \quad p_2(\pi - t) + p_1(\pi + t) = 0$$

para todo $t \in \mathbf{R}$, por tanto, $p_2(-t) = -p_1(t)$, reemplazando en la segunda de estas ecuaciones obtenemos $p_1(t+\pi) = p_1(t-\pi)$, es decir p_1 es 2π periódica. Así

$$u(x,t) = p(x+t) - p(t-x). \tag{1.8}$$

Además, como $u \in L^2(\Omega)$, tenemos que $p_1 \equiv p \in L^2[0, 2\pi]$.

Usando (1.8) podemos comprobar la **propiedad del paralelogramo** para funciones en el núcleo. Sean $0 \leq r_1 < r_2 < r_3 < r_4 \leq 2\pi$, y sean A, B, C y D los vértices del paralelogramo obtenido en la intersección de las características

$$\begin{aligned} t = r_1 + x, &\qquad t = r_2 + x \\ t = r_3 - x, &\ \text{ y } t = r_4 - x. \end{aligned}$$

Las coordenadas de estos vértices son

$$\begin{aligned} A\left(\frac{r_3 - r_1}{2}; \frac{r_3 + r_1}{2}\right), &\quad B\left(\frac{r_4 - r_1}{2}; \frac{r_4 + r_1}{2}\right), \\ C\left(\frac{r_4 - r_2}{2}; \frac{r_4 + r_2}{2}\right), &\quad D\left(\frac{r_3 - r_2}{2}; \frac{r_3 + r_2}{2}\right). \end{aligned}$$

De (1.8) vemos que

$$\begin{aligned} u(A) + u(C) &= p(r_3) - p(r_1) + p(r_4) - p(r_2) \\ &= u(B) + u(D). \end{aligned} \tag{1.9}$$

Enunciamos ahora los siguientes lemas y su demostración, que corresponden al Lema 2.4 en [B-B-2006].

Lema 1. *Si* $v_1, v_2, \ldots, v_{2k+1} \in N$ *con* $v_j(x,t) = p_j(t+x) - p_j(t-x)$, $\quad p_j 2\pi$*-períodica,* $j = 1, \ldots, 2k+1$, *y* $v_1 \cdot v_2 \cdots v_{2k+1} \in L^1(\Omega)$, *entonces*

$$\int_\Omega v_1 \cdot v_2 \cdots v_{2k+1} = 0.$$

En particular, $v_1 \cdot v_2 \cdots v_{2k} \in N^\perp$.

Demostración. Realizando el cambio de variables $(x,t) \mapsto (\pi - x, t)$, y usando el hecho que las p_j son 2π-periódicas tenemos

$$\begin{aligned}
\int_\Omega v_1 \cdot v_2 \cdots v_{2k+1} &= \int_\Omega \prod_{j=1}^{2k+1} (v_j(x,t))dtdx \\
&= \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \prod_{j=1}^{2k+1} (p_j(t+x) - p_j(t-x))dtdx \\
&= \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \prod_{j=1}^{2k+1} (p_j(t+\pi-x) - p_j(t-\pi+x))dtdx \\
&= \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \prod_{j=1}^{2k+1} (p_j(t+\pi-x) - p_j(t+\pi+x))dtdx \\
&= \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \prod_{j=1}^{2k+1} (p_j(t-x) - p_j(t+x))dtdx \\
&= (-1)^{2k+1} \int_\Omega \prod_{j=1}^{2k+1} (v_j(x,t))dtdx,
\end{aligned}$$

Lo cual implica que $\int_\Omega v_1 \cdot v_2 \cdots v_{2k+1} = 0.$

■

Lema 2. *Sea $g : \Omega \to \mathbf{R}$ tal que $g(x,u) = g(x,-u) = g(\pi - x, u)$, o tal que $-g(x,u) = g(x,-u) = g(\pi - x, u)$, entonces*

$$\int_\Omega g(x,v)\varphi(x,t)dxdt = 0, \quad \forall \varphi \in N; v \in N \cap L^\infty.$$

Demostración. Usando (1.8), como en el lema anterior, sean p_v y p_φ tales que $v(x,t) = p_v(t+x) - p_v(t-x)$ y $\varphi(x,t) = p_\varphi(t+x) - p_\varphi(t-x)$, entonces

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega g(x, v(x,t))\varphi(x,t)dtdx \\
&\quad = \int_0^\pi \int_0^{2\pi} g(x, p_v(t+x) - p_v(t-x))[p_\varphi(t+x) - p_\varphi(t-x)]dtdx,
\end{aligned}$$

realizando el cambio de variables $(x,t) \mapsto (\pi - x, t)$, tenemos

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega g(x, v(x,t))\varphi(x,t)dtdx \\
&= \int_0^\pi \int_0^{2\pi} g(\pi - x, p_v(t+\pi-x) - p_v(t-\pi+x))[p_\varphi(t+\pi-x) - p_\varphi(t-\pi+x)]dtdx \\
&= \int_0^\pi \int_0^{2\pi} g(\pi - x, -v(x,t))[-\varphi(x,t)]dtdx \\
&= -\int_0^\pi \int_0^{2\pi} g(x, v(x,t))\varphi(x,t)dtdx.
\end{aligned}$$

Por tanto, $\int_\Omega g(x, v(x,t))\varphi(x,t)dxdt = 0$.

■

Lema 3. *Sea $v \in N \cap L^{2k}$ y sea A el conjunto*

$$A = \left\{ x \in [0,\pi]; \quad \int_0^{2\pi} v^{2k}(x,t)dt \geq \frac{20}{\pi} \int_\Omega v^{2k}(x,t)dtdx \right\}$$

entonces $\mu(A) \leq \pi/20$, donde $\mu(A)$ es la medida de Lebesgue del conjunto A,

Demostración. De no ser así

$$\begin{aligned}
\int_\Omega v^{2k}dtdx &= \int_0^\pi \int_0^{2\pi} v^{2k}(x,t)dtdx \\
&\geq \int_A \left(\int_0^{2\pi} v^{2k}(x,t)dt \right) dx \\
&\geq \int_A \left(\frac{20}{\pi} \int_\Omega v^{2k}(\eta,t)dtd\eta \right) dx \\
&\geq \mu(A)\frac{20}{\pi} \int_\Omega v^{2k}(\eta,t)dtd\eta \\
&> \int_\Omega v^{2k}dtdx
\end{aligned}$$

Lo cual es una contradicción. por lo tanto, $\mu(A) \leq \pi/20$.

■

1.4. El operador onda inverso

Con argumentos basados en expansión en series de Fourier, podemos ver que para cada $w \in N^{\perp}$ existe una única $y \in Y$, tal que $\Box y = w$ en el sentido de las distribuciones. Sea

$$w(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{\substack{j=0 \\ j \neq k}}^{\infty} \sin(kx)(a_{jk} \sin(jt) + b_{jk} \cos(jt)),$$

entonces $\|w\|_2^2 = C \sum |a_{jk}|^2 + |b_{jk}|^2$, tenemos que

$$\Box^{-1} w = y = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{\substack{j=0 \\ j \neq k}}^{\infty} \sin(kx) \left(\frac{a_{jk}}{k^2 - j^2} \sin(jt) + \frac{b_{jk}}{k^2 - j^2} \cos(jt) \right),$$

obteniendo de aquí las desigualdades

$$\int_0^{\pi} y_x^2 dx \leq C \|w\|_2^2, \quad \text{para todo } t$$
$$\int_0^{2\pi} y_t^2 dt \leq C \|w\|_2^2, \quad \text{para todo } x,$$

por tanto, existe C tal que $\|y\|_{1,2} \leq C\|w\|_2$, más aún $\|y\|_{1,2} + \|y\|_{C^{1/2}} \leq C\|w\|_2$, donde $\| \cdot \|_{C^{1/2}}$ es la norma del espacio de las funciones Hölder continuas de orden 1/2, véase [B-N-1978]. Además, la transformación $\Box^{-1}$ es compacta entre los espacios:

$$N^{\perp} \to Y, \qquad N^{\perp} \to L^{\infty} \cap N^{\perp}, \quad \text{y} \quad L^{\infty}(\Omega) \cap N^{\perp} \to C^{0,1} \cap N^{\perp},$$

de igual forma, si $\tau \in (0, \infty) - \sigma(\Box)$, el operador $(\Box - \tau I)^{-1} : N^{\perp} \to Y$ es compacto, por tanto, existe una constante κ tal que

$$\begin{gathered} \|\Box^{-1} w\|_{1,2} \leq \kappa \|w\|_2, \qquad \|(\Box \tau I)^{-1} w\|_{1,2} \leq \kappa \|w\|_2, \\ \|\Box^{-1} w\|_{\infty} \leq \kappa \|w\|_2, \quad \text{y} \quad \|\Box^{-1} w\|_{C^{0,1}} \leq \kappa \|w\|_{\infty}, \end{gathered} \tag{1.10}$$

véase la ecuación (2.3) en [B-B-2006].

1.5. La ecuación de núcleo

Aplicando el método de reducción de Lyapunov-Schmidt, tenemos que $u = v + w \in N \oplus Y$ es solución de $\Box u + R(x,t,u) = f(x,t)$ si y sólo si u es solución de las ecuaciones

$$w = \Box^{-1} \Pi_{N^{\perp}} (f(x,t) - R(x,t,v+w)), \tag{1.11}$$

y

$$0 = \Pi_N(f(x,t) - R(x,t,v+w)). \tag{1.12}$$

Asumiendo que existe $w(v) \in Y$ solución de (1.11), seguimos el método introducido en [C-P-2010] para resolver la ecuación de núcleo.

Para $0 \leq r \leq s \leq 2\pi$, sea $\chi_{[r,s]}$ la función 2π-periódica definida por

$$\chi_{[r,s]}(t) = \begin{cases} 1, & \text{si} \quad t \in [r,s] \\ 0, & \text{si} \quad t \in [0,2\pi] - [r,s]. \end{cases}$$

Definimos ahora la función

$$\phi_{[r,s]}(x,t) = \chi_{[r,s]}(t+x) - \chi_{[r,s]}(t-x) \in N, \tag{1.13}$$

y sean los conjuntos

$$A = \{(x,t) \in \Omega;\ x \in [0,\pi],\ t \in \bigcup_j [r + 2j\pi - x, s + 2j\pi - x], \quad j = -1,0,1\}$$
$$B = \{(x,t) \in \Omega;\ x \in [0,\pi],\ t \in \bigcup_j [r + 2j\pi + x, s + 2j\pi + x], \quad j = -1,0,1\}.$$

Observamos que $\phi_{[r,s]}(x,t) = 1$ si $(x,t) \in A - B$, $\phi_{[r,s]}(x,t) = -1$ sobre $B - A$ y $\phi_{[r,s]}(x,t) = 0$ cuando $(x,t) \in \bar{\Omega} - (A \cup B)$. Supongamos que $v \in N$ es solución de (1.12). Multiplicando (1.12) por $\phi_{[r,s]} \in N$, integrando sobre Ω, y usando el hecho que el operador Π_N es autoadjunto, obtenemos

$$\begin{aligned} 0 &= \int_\Omega (f(x,t) - R(x,t,v+w))\phi_{[r,s]}(x,t)dxdt \\ &= \int_A (f(x,t) - R(x,t,(v+w)(x,t)))dxdt \\ &\quad - \int_B (f(x,t) - R(x,t,(v+w)(x,t)))dxdt \\ &= \int_0^\pi \int_r^s (f(x,\eta - x) - R(x,\eta - x,(v+w)(x,\eta - x)))d\eta dx \\ &\quad - \int_0^\pi \int_r^s (f(x,\eta + x) - R(x,\eta + x,(v+w)(x,\eta + x)))d\eta dx, \end{aligned}$$

dividiendo esta ecuación por $(s-r)$, y calculando el límite cuando $s \to r$, entonces por los teoremas de Fubini y de diferenciación de Lebesgue, tenemos

$$\begin{aligned} \int_0^\pi (f(x,r-x) - f(x,r+x))dx = &\int_0^\pi R(x,r-x,(v+w)(x,r-x))dx \\ &- \int_0^\pi (R(x,r+x,(v+w)(x,r+x)))dx, \end{aligned} \tag{1.14}$$

para casi todo $r \in [0, 2\pi]$.
Recíprocamente, demostraremos que si $v \in N$ satisface (1.14), entonces es solución de (1.12). Haremos uso del siguiente resultado: Si $F(x,t)$ es 2π-periódica en t entonces

$$\begin{aligned}\int_\Omega F(x,t)dxdt &= \int_0^\pi \int_x^{x+2\pi} F(x,t)dtdx \\ &= \int_0^\pi \int_{-x}^{2\pi-x} F(x,t)dtdx.\end{aligned} \tag{1.15}$$

Supongamos que $v \in N$ satisface (1.14), debemos ver que para toda $\phi \in N$ se cumple la ecuación

$$\int_\Omega \phi \Pi_N(f)dxdt = \int_\Omega \phi \Pi_N(R)dxdt.$$

Nuevamente, como Π_N es autoadjunto, demostraremos que

$$\int_\Omega \phi_{[r,s]} f dxdt = \int_\Omega \phi_{[r,s]} R dxdt, \tag{1.16}$$

para las funciones $\phi_{[r,s]}$ definidas en (1.13). Ya que por linealidad también se cumple si ϕ es una función simple en el kernel. Y entonces, por el Teorema de convergencia dominada, el resultado se tiene para toda función $\phi \in N$.

$$\begin{aligned}\int_\Omega \phi_{[r,s]} f dxdt &= \int_0^\pi \int_0^{2\pi} (\chi_{[r,s]}(t+x) - \chi_{[r,s]}(t-x)) f(x,t)dtdx \\ &= \int_0^\pi \int_x^{x+2\pi} \chi_{[r,s]}(t+x) f(x,t)dtdx - \int_0^\pi \int_{-x}^{-x+2\pi} \chi_{[r,s]}(t-x) f(x,t)dtdx \\ &= \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \chi_{[r,s]}(\zeta) f(x, \zeta - x)d\zeta dx - \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \chi_{[r,s]}(\eta) f(x, \eta + x)d\eta dx,\end{aligned}$$

donde $\zeta = t + x$ y $\eta = t - x$. Así

$$\begin{aligned}\int_\Omega \phi_{[r,s]} f dxdt &= \int_0^\pi \int_r^s f(x, \eta - x)d\eta dx - \int_0^\pi \int_r^s f(x, \eta + x)d\eta dx \\ &= \int_r^s \left(\int_0^\pi (f(x, \eta - x) - f(x, \eta + x))dx \right) d\eta.\end{aligned} \tag{1.17}$$

De manera similar en la integral de la derecha de (1.16), tenemos

$$\begin{aligned}\int_\Omega \phi_{[r,s]} R dxdt &= \int_0^\pi \int_r^s R(x, \eta - x, (v+w)(x, \eta - x))d\eta dx \\ &\quad - \int_0^\pi \int_r^s R(x, \eta + x, (v+w)(x, \eta + x))d\eta dx \\ &= \int_r^s \left(\int_0^\pi (R(x, \eta - x, (v+w)(x, \eta - x))dx \right. \\ &\quad \left. - \int_0^\pi R(x, \eta + x, (v+w)(x, \eta + x))dx \right) d\eta.\end{aligned} \tag{1.18}$$

De (1.17), (1.14) y (1.18),tenemos

$$\begin{aligned}\int_{\Omega} \phi_{[r,s]} f dxdt &= \int_r^s \left(\int_0^{\pi} (f(x, \eta - x) - f(x, \eta + x))dx \right) d\eta \\ &= \int_r^s \left(\int_0^{\pi} (R(x, \eta - x, (v + w)(x, \eta - x))dx \right. \\ &\quad \left. - \int_0^{\pi} R(x, \eta + x, (v + w)(x, \eta + x))dx \right) d\eta \\ &= \int_{\Omega} \phi_{[r,s]} R dxdt.\end{aligned}$$

De esta forma hemos demostrado el siguiente lema,

Lema 4. *Sean* $R \in C^0([0, \pi] \times \mathbf{R} \times \mathbf{R})$ *y* $f \in L^2((0, \pi) \times (0, 2\pi))$. *Asumamos además, que* $w(v) \in Y$ *es solución de* (1.11). *Entonces,* $v \in N$ *es solución de la ecuación de núcleo*

$$\Pi_N(f(x, t)) = \Pi_N(R(x, t, v + w))$$

si y sólo si satisface la ecuación

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi} (f(x, r - x) - f(x, r + x))dx &= \int_0^{\pi} R(x, r - x, (v + w)(x, r - x))dx \\ &\quad - \int_0^{\pi} (R(x, r + x, (v + w)(x, r + x)))dx,\end{aligned}$$

para todo $r \in [0, 2\pi]$.

CAPÍTULO 2

Un Problema de Bifurcación Imperfecta

En este capítulo estudiamos la ecuación

$$\begin{cases} \Box u = \epsilon(u^{2k} + h(x,t) + R(x,t,u)) \\ u(0,t) = u(\pi,t) = 0 \\ u(x,t) = u(x,t+2\pi), \qquad x \in [0,\pi], \quad t \in \mathbf{R}, \end{cases} \tag{2.1}$$

donde k es un entero positivo, $h \in N^{\perp}$ y $R \in C^0([0,\pi] \times \mathbf{R} \times \mathbf{R})$. Asumimos además, que R es diferenciable en la tercera variable, y

$$\lim_{u \to 0} \frac{R(x,t,u)}{u^{2k}} = 0 \quad \text{y} \quad \lim_{u \to 0} \frac{R_u(x,t,u)}{u^{2k-1}} = 0, \tag{2.2}$$

uniformemente en $(x,t) \in [0,\pi] \times \mathbf{R}$. Así, $R(x,t,0) = 0$.
La norma en el espacio $\mathbf{H^1}$ la definimos como

$$\|w\|_{1,2} = \left(\int_{\Omega} (w_t^2(x,t) + w_x^2(x,t)) dt dx \right)^{1/2}. \tag{2.3}$$

Como $h \in N^{\perp}$, sea $H = \Box^{-1}(h)$. Entonces (2.1) se puede escribir

$$\Box u - \epsilon \Box H = \epsilon u^{2k} + \epsilon R(x,t,u),$$

y haciendo el cambio de variable $u := u - \epsilon H$, (2.1) se transforma en

$$\Box u = \epsilon (u + \epsilon H)^{2k} + \epsilon R(x,t,u+\epsilon H). \tag{2.4}$$

2.1. Resultados principales

Para $\hat{v} \in N$, sea $J = (\hat{v} + \epsilon H)^{2k-1} - \hat{v}^{2k-1}$. Estableceremos la solución de (2.4) en términos del operador $L_J : C^0((0, 2\pi)) \to C^0((0, 2\pi))$, definido de la siguiente manera

$$\begin{aligned}(L_J(p))(r) = p(r) \int_0^\pi J(x, r+x) + J(x, r-x)dx - \\ \int_0^\pi p(r+2x)J(x, r+x) + p(r-2x)J(x, r-x)dx\end{aligned} \tag{2.5}$$

donde $r \in [0, 2\pi]$. El resultado principal es:

Teorema 1. *Supongamos que* (2.2) *se satisface, si*

a) $k = 1$ *y* L_H *es invertible, o*

b) $k > 1$, *y existe* $\hat{v} \in N$, *con* $\|\hat{v}\| \leq O(\epsilon)$, *tal que* $\Pi_N(\hat{v} + \epsilon H)^{2k} = 0$ *y* L_J *es invertible para* $J = (\hat{v} + \epsilon H)^{2k-1} - \hat{v}^{2k-1}$, *con* $\epsilon^{1-2k}\|L_J^{-1}\|$ *acotado y lejos de cero,*

entonces existe $\epsilon_0 > 0$ *tal que para* $\epsilon \in (0, \epsilon_0)$ *la ecuación* (2.4) *tiene una solución* $u \in C^0(\Omega)$.

Sean $V = N \cap C^0(\Omega)$, $\quad W = N^\perp \cap C^0(\Omega)$ y $u = v + w \in V \oplus W$. como mencionamos antes, sean Π_N, $\Pi_{N^\perp}$ las proyecciones ortogonales de $L^2(\Omega)$ sobre N y $N^\perp$, respectivamente. Resolver el problema (2.4) es equivalente a resolver las ecuaciones de núcleo y rango

$$\Pi_N((v + w + \epsilon H)^{2k} + R(x, t, v + w + \epsilon H)) = 0, \tag{2.6}$$

$$\epsilon \Box^{-1} \Pi_{N^\perp}((v + w + \epsilon H)^{2k} + R(x, t, v + w + \epsilon H)) = w. \tag{2.7}$$

Para demostrar la existencia de solución a la ecuación de núcleo, (2.6), seguiremos el método introducido en [C-P-2010]. La solubilidad de la ecuación de rango, (2.7), la probamos en la siguiente seccción.

Como se afirma en [B-B-2006], la condición $h \in N^\perp$ no es sólo de carácter técnico. Por ejemplo, sea $g \in C([0, \pi] \times \mathbf{R})$ tal que $g(x, u) = g(x, -u) = g(\pi - x, u)$, afirmamos que si $u := u_\epsilon = v_\epsilon + w_\epsilon \in V \oplus W$ es solución débil de $\Box u = \epsilon(g(x, u) + h(x, t))$, y $\|u_\epsilon\| \leq r_0$ para todo ϵ pequeño, entonces $h \in N^\perp$.
Como w_ϵ satisface la ecuación de rango $w_\epsilon = \epsilon \Box^{-1} \Pi_{N^\perp}(g(x, u_\epsilon) + h(x, t))$, tenemos que $\|w_\epsilon\| \leq C|\epsilon|$. De la ecuación de núcleo, $\Pi_N(g(x, v_\epsilon + w_\epsilon) + h(x, t)) = 0$, además, del Lema 2, $\Pi_N(g(x, v_\epsilon)) = 0$. Entonces tenemos

$$\begin{aligned}\|\Pi_N(h(x, t))\|_2 &= \|\Pi_N(g(x, v_\epsilon + w_\epsilon) + g(x, v_\epsilon))\|_2 \\ &\leq \|g(x, v_\epsilon + w_\epsilon) + g(x, v_\epsilon)\|_2 \to 0\end{aligned}$$

cuando $\|w_\epsilon\| \to 0$, porque g es uniformemente continua en $[0, \pi] \times \{|u| \leq C\}$. Por tanto $\Pi_N(h) = 0$, es decir $h \in N^\perp$.

2.2. Solución en $N^{\perp}$

Proposición 1. *Existen* $\epsilon_0 > 0$ *y* $\delta_0 > 0$*, tales que si* $v \in V$ *con* $\|v\| \leq \delta_0$ *y* $|\epsilon| < \epsilon_0$*, entonces* (2.7) *tiene una única solución* $w(v,\epsilon) \in N^{\perp}$*. Más aún, existe* α *tal que si* v_1, v_2 *con* $\|v_1\|, \|v_2\| \leq \delta_0$*,*

$$\|w(v_1,\epsilon) - w(v_2,\epsilon)\| \leq |\epsilon|\alpha\|v_1 - v_2\| \tag{2.8}$$

para todo $|\epsilon| \leq \epsilon_0$*.*

Demostración. Por facilidad en la notación, sea $f(v,w) = (v+w+\epsilon H)^{2k} + R(x,t,v+w+\epsilon H)$. De (2.2) tenemos que existe $\hat{\delta} \in (0,1)$ tal que $|R(x,t,u)| < |u|^{2k}$ si $|u| < \hat{\delta}$, además, R es Lipschitz en la tercera variable. Luego, existe m tal que si $\|u_1\| \leq \hat{\delta}$ y $\|u_2\| \leq \hat{\delta}$, $|R(x,t,u_1) - R(x,t,u_2)| \leq m|u_1 - u_2|$. Sean κ como en (1.10), $\delta_0 = \hat{\delta}/3$,

$$\begin{aligned} \alpha &= \max\{2\kappa(2k+m), 4\pi\kappa\} \quad \text{y} \\ \epsilon_0 &= \min\left\{\frac{\delta_0}{3\|H\|}, \frac{\delta_0}{2\alpha}\right\}, \end{aligned}$$

y sean $X_1 = \{v \in V; \quad \|v\| \leq \delta_0\} \times [-\epsilon_0, \epsilon_0]$ y $X_2 = \{w \in W; \quad \|w\| \leq \delta_0\}$. Veamos que para cada $(v,\epsilon) \in X_1$, la transformación $w \to \epsilon\Box^{-1}\Pi_{N^{\perp}}(f(v,w))$ define una contracción sobre X_2. Sea $w \in X_2$, de (1.10) y las hipótesis sobre R, tenemos

$$\begin{aligned} \|\epsilon\Box^{-1}\Pi_{N^{\perp}}(f(v,w))\| &\leq |\epsilon|\kappa\|\Pi_{N^{\perp}}(f(v,w))\|_2 \\ &\leq |\epsilon|\kappa\|(f(v,w))\|_2 \\ &\leq |\epsilon|\kappa 2\pi\|(v+w+\epsilon H)^{2k} + R(x,t,v+w+\epsilon H)\| \\ &\leq |\epsilon|\kappa 4\pi\|(v+w+\epsilon H)^{2k}\| \\ &\leq 4\pi|\epsilon|\kappa \\ &\leq \delta_0. \end{aligned} \tag{2.9}$$

Por tanto, la transformación está bien definida.
Dados $(v,\epsilon) \in X_1$ fijo, y $w_1, w_2 \in X_2$, aplicando el Teorema del valor medio y la definición de m, obtenemos

$$\begin{aligned} \|f(v,w_1) - f(v,w_2)\| \leq{}& \|(v+w_1+\epsilon H)^{2k} - (v+w_2+\epsilon H)^{2k}\| + \\ & \|R(x,t,v+w_1+\epsilon H) - R(x,t,v+w_2+\epsilon H)\| \\ \leq{}& (2k+m)\|w_1 - w_2\|. \end{aligned} \tag{2.10}$$

De aquí, de (1.10) y del hecho que $|\epsilon| \leq \epsilon_0$, tenemos

$$\begin{aligned} \|\epsilon\Box^{-1}\Pi_{N^\perp}(f(v,w_1)) - \epsilon\Box^{-1}\Pi_{N^\perp}(f(v,w_2))\| \\ &\leq |\epsilon|\kappa\|\Pi_{N^\perp}(f(v,w_1)) - \Pi_{N^\perp}(f(v,w_2))\|_2 \\ &\leq |\epsilon|\kappa\|f(v,w_1) - f(v,w_2)\|_2 \\ &\leq |\epsilon|\kappa 2\pi\|f(v,w_1) - f(v,w_2)\| \\ &\leq |\epsilon|\kappa 2\pi(2k+m)\|w_1 - w_2\| \\ &\leq (1/2)\|w_1 - w_2\|. \end{aligned} \tag{2.11}$$

así, la transformación $w \to \epsilon\Box^{-1}\Pi_{N^\perp}(f(v,w))$ define una contracción sobre X_2, por tanto para cada $(v,\epsilon) \in X_1$, existe una única $w(v,\epsilon)$ que satisface la ecuacion de rango (2.7). Sean $(v_1,\epsilon),(v_2,\epsilon) \in X_1$, denotemos $w_1 = w(v_1,\epsilon)$ y $w_2 = w(v_2,\epsilon)$. Fijando w_1 y argumentando como antes, tenemos

$$\begin{aligned} \|f(v_1,w_1) - f(v_2,w_1)\| &\leq \|(v_1+w_1+\epsilon H)^{2k} - (v_2+w_1+\epsilon H)^{2k}\| + \\ &\quad \|R(x,t,v_1+w_1+\epsilon H) - R(x,t,v_2+w_1+\epsilon H)\| \\ &\leq (2k+m)\|v_1 - v_2\|. \end{aligned} \tag{2.12}$$

De aquí, y de (2.11) llegamos a

$$\begin{aligned} \|w_1 - w_2\| &= |\epsilon|\|\Box^{-1}\Pi_{N^\perp}(f(v_1,w_1)) - \Box^{-1}\Pi_{N^\perp}(f(v_2,w_2))\| \\ &\leq |\epsilon|\|\Box^{-1}\Pi_{N^\perp}(f(v_1,w_1)) - \Box^{-1}\Pi_{N^\perp}(f(v_2,w_1))\| \\ &\quad + |\epsilon|\|\Box^{-1}\Pi_{N^\perp}(f(v_2,w_1)) - \Box^{-1}\Pi_{N^\perp}(f(v_2,w_2))\| \\ &\leq |\epsilon|\kappa(2k+m)\|v_1 - v_2\| + (1/2)\|w_1 - w_2\|, \end{aligned} \tag{2.13}$$

por tanto, $\|w_1 - w_2\| \leq 2|\epsilon|\kappa(2k+m)\|v_1 - v_2\| \leq |\epsilon|\alpha\|v_1 - v_2\|$, quedando demostrado (2.8), y la proposición.

Comentario 1. *En* (2.9) *observamos que w es de orden ϵ, por tanto si tomamos $v \in V$, con $\|v\| < \epsilon$ y reemplazamos en la ecuación de rango, encontramos que $\|w(v,\epsilon)\| = o(|\epsilon|^{2k+1})$. Más precisamente, $\|w(v,\epsilon)\| \leq \alpha|\epsilon|^{2k+1}$.*

2.3. La ecuación de núcleo para $k = 1$

Expandiendo la potencia cuadrada en (2.6) y del hecho que $v^2 \in N^\perp$ (véase Lema 1), tenemos que (2.6) es equivalente a

$$\Pi_N(vH) = (-2\epsilon)^{-1}\Pi_N(w^2 + \epsilon^2 H^2 + 2vw + 2\epsilon wH + R). \tag{2.14}$$

Además, por el Lema 4, tenemos que (2.14) es equivalente a

$$\int_0^\pi (v(x,r-x)H(x,r-x) - v(x,r+x)H(x,r+x))dx = (-2\epsilon)^{-1}(I_1(r) + \ldots + I_5(r)),$$

para todo $r \in [0, 2\pi]$. Donde

$$\begin{aligned} I_1(r) =& \int_0^\pi (w^2(x,r-x) - w^2(x,r+x))dx \\ I_2(r) =& \epsilon^2 \int_0^\pi (H^2(x,r-x) - H^2(x,r+x))dx \\ I_3(r) =& 2 \int_0^\pi (v(x,r-x)w(x,r-x) - v(x,r+x)w(x,r+x))dx \\ I_4(r) =& 2\epsilon \int_0^\pi (w(x,r-x)H(x,r-x) - w(x,r+x)H(x,r+x))dx \\ I_5(r) =& \int_0^\pi (R(x,r-x,(v+w+\epsilon H)(x,r-x)) - \\ & \qquad R(x,r+x,(v+w+\epsilon H)(x,r+x)))dx. \end{aligned} \tag{2.15}$$

Escribiendo $v(x,t) = p(t+x) - p(t-x)$, tenemos que (2.14) es equivalente a

$$[L_H(p)](r) = (-2\epsilon)^{-1}[\Gamma(p)](r), \qquad r \in [0, 2\pi], \tag{2.16}$$

donde

$$\begin{aligned} (L_H(p))(r) &= \int_0^\pi (v(x,r-x)H(x,r-x) - v(x,r+x)H(x,r+x))dx \\ &= \int_0^\pi (p(r) - p(r-2x))H(x,r-x)dx \\ &\quad + \int_0^\pi (p(r) - p(r+2x))H(x,r+x)dx, \end{aligned} \tag{2.17}$$

y

$$(\Gamma(p))(r) = I_1(r) + \ldots + I_5(r). \tag{2.18}$$

Por hipótesis del Teorema, L_H es invertible, entonces demostraremos que el operador $p \to (-2\epsilon)^{-1}(L_H)^{-1}(\Gamma(p))$, que denotaremos $p \to \Gamma_1(p)$, define una contracción sobre un espacio métrico apropiado X, el cual definiremos más adelante (véase (2.21)).
Sean

$$\theta(s) = \text{máx}\{|R_u(t,x,u)/u|; |u| \leq s\}, \quad \text{y}$$
$$\hat{\theta}(s) = \text{máx}\{|R(t,x,u)/(u^2)|; |u| \leq s\},$$

Por (2.2) tenemos que

$$\lim_{s\to 0} \theta(s) = 0, \qquad \text{y} \qquad \lim_{s\to 0} \hat{\theta}(s) = 0. \tag{2.19}$$

Sea $c_1 = 2\pi\|H^2\|_\infty \|L_H^{-1}\|$, escojamos $\epsilon_1 \in (0, \epsilon_0)$ tal que satisfaga

$$\begin{aligned}\|L_H^{-1}\|\pi[\alpha^2\epsilon_1^4 + \|H\|^2 + 2\alpha(2c_1 + \|H\|)\epsilon_1^2 + \\ \hat{\theta}((2c_1 + \alpha + \|H\|)\epsilon_1) \cdot (2c_1 + \alpha + \|H\|)^2] \leq c_1.\end{aligned} \tag{2.20}$$

Para $|\epsilon| < \epsilon_1$, definimos el espacio métrico X así

$$X = \left\{p \in C^0(\mathbb{R}); p(x) = p(x + 2\pi), \int_0^{2\pi} p(s)ds = 0, \|p\| \leq c_1|\epsilon|\right\}, \tag{2.21}$$

dotado de la norma heredada de $C^0(\mathbb{R})$.
Sea $p \in X$, y sean $v(x, t) = p(t + x) - p(t - x)$ y $w = w(v, \epsilon)$ dados en la Proposición 1, de (2.15) tenemos que

$$\begin{aligned}|I_1| &\leq \int_0^\pi |w^2(x, r - x)| + |w^2(x, r + x)|dx \leq 2\pi\alpha^2|\epsilon|^6, \\ |I_2| &\leq 2|\epsilon|^2 \int_0^\pi |H^2(x, r - x)| + |H^2(x, r + x)|dx \leq 2\pi\|H\|^2|\epsilon|^2 \\ |I_3| &\leq 2\int_0^\pi |v(x, r - x)w(x, r - x)| + |v(x, r + x)w(x, r + x)|dx \\ &\leq 8\pi\alpha c_1|\epsilon|^4,\end{aligned} \tag{2.22}$$

$$\begin{aligned}|I_4| &\leq 2|\epsilon| \int_0^\pi |w(x, r - x)H(x, r - x)| + |w(x, r + x)H(x, r + x)|dx \\ &\leq 4\pi\alpha\|H\||\epsilon|^4, \\ |I_5| &\leq \int_0^\pi |R(x, r - x, (v + w + \epsilon H)(x, r - x))|dx + \\ &\quad \int_0^\pi |R(x, r + x, (v + w + \epsilon H)(x, r + x))|dx \\ &\leq 2\pi\hat{\theta}((2c_1 + \alpha|\epsilon|^2 + \|H\|)|\epsilon|) \cdot (2c_1 + \alpha|\epsilon|^2 + \|H\|)^2|\epsilon|^2.\end{aligned} \tag{2.23}$$

Ahora, de (2.20), (2.22) y (2.23), tenemos

$$\begin{aligned}\|\Gamma_1(p)\| &\leq (2\epsilon)^{-1}\|L^{-1}\|\|\Gamma(p)\| \\ &\leq (2\epsilon)^{-1}\|L^{-1}\|(8\pi^2\kappa|\epsilon|^6 + 2\pi\|H\|^2|\epsilon|^2 + 32\pi^2\kappa c_1|\epsilon|^4 + 16\pi^2\kappa\|H\||\epsilon|^4 + \\ &\quad 2\pi\hat{\theta}((2c_1 + \alpha + \|H\|)|\epsilon|) \cdot (2c_1 + \alpha + \|H\|)^2|\epsilon|^2) \\ &\leq \|L_H^{-1}\|\pi[\alpha|\epsilon|^4 + \|H\|^2 + 8\pi\kappa(2c_1 + \|H\|)|\epsilon|^2 + \\ &\quad \hat{\theta}((2c_1 + \alpha|\epsilon|^2 + \|H\|)|\epsilon|) \cdot (2c_1 + \alpha|\epsilon|^2 + \|H\|)^2]|\epsilon| \\ &\leq c_1|\epsilon|.\end{aligned} \tag{2.24}$$

Esto demuestra que $\Gamma_1(X) \subset X$. Veamos ahora, que Γ_1 define a contracción sobre X. Sean $p_1, p_2 \in X$, $v_i(x,t) = p_i(t+x) - p_i(t-x)$, and $w_i = w(v_i, \epsilon)$, $i = 1, 2$, como en la Proposición 1. Entonces

$$\|w_1 - w_2\| \leq |\epsilon|\alpha\|v_1 - v_2\| \leq 2|\epsilon|\alpha\|p_1 - p_2\|. \tag{2.25}$$

Aplicando nuevamente la Proposición 1 tenemos

$$\begin{aligned} \|w_1^2 - w_2^2\| &\leq \|w_1 - w_2\| \cdot \|w_1 + w_2\| \\ &\leq 2\alpha|\epsilon|^3\|w_1 - w_2\| \\ &\leq 4\alpha^2|\epsilon|^4\|p_1 - p_2\|. \end{aligned} \tag{2.26}$$

Además

$$\begin{aligned} \|v_1w_1 - v_2w_2\| &\leq \|v_1w_1 - v_1w_2\| + \|v_1w_2 - v_2w_2\| \\ &\leq \|v_1\|\|w_1 - w_2\| + \|v_1 - v_2\|\|w_2\| \\ &\leq (2c_1\alpha|\epsilon|^2 + \alpha|\epsilon|^3)\|v_1 - v_2\| \\ &\leq \alpha|\epsilon|^2(2c_1 + |\epsilon|)\|p_1 - p_2\|. \end{aligned} \tag{2.27}$$

Tomando $u_1 = v_1 + w_1$, $u_2 = v_2 + w_2$, y $\nu = s(u_1) + (1-s)(u_2) + |\epsilon|H, \quad 0 \leq s \leq 1$, tenemos que $\|\nu\| \leq c_2|\epsilon|$. Así, por Teorema del valor medio

$$\begin{aligned} \|R(t,x,u_1 + \epsilon H) - R(t,x,u_2 + \epsilon H)\| &\leq \|R_u(x,t,\nu)\| \cdot \|u_1 - u_2\| \\ &\leq \theta(c_2|\epsilon|) \cdot c_2|\epsilon| \cdot \|u_1 - u_2\| \\ &\leq \theta(c_2|\epsilon|) \cdot c_2|\epsilon|(\|v_1 - v_2\| + \|w_1 - w_2\|) \\ &\leq \theta(c_2|\epsilon|) \cdot c_2|\epsilon|(2 + 2|\epsilon|\alpha)\|p_1 - p_2\|. \end{aligned} \tag{2.28}$$

Ahora estimamos las diferencias $\|I_i(p_1) - I_i(p_2)\|, \quad i = 1, \ldots 5$, con I_i dada en (2.15). De (2.26)

$$\|I_1(p_1) - I_1(p_2)\| \leq 8\pi\alpha^2|\epsilon|^4\|p_1 - p_2\|. \tag{2.29}$$

Como I_2 es independiente de p,

$$\|I_2(p_1) - I_2(p_2)\| = 0. \tag{2.30}$$

De (2.27)

$$\|I_3(p_1) - I_3(p_2)\| \leq 2\pi\alpha|\epsilon|^2(2c_1 + |\epsilon|)\|p_1 - p_2\|. \tag{2.31}$$

Por (2.25)

$$\|I_4(p_1) - I_4(p_2)\| \leq 8\epsilon^2\pi\alpha\|H\|\|p_1 - p_2\|. \tag{2.32}$$

y por (2.28)

$$\|I_5(p_1) - I_5(p_2)\| \leq \theta(c_2|\epsilon|) \cdot 4\pi c_2|\epsilon|(1 + |\epsilon|\alpha)\|p_1 - p_2\|. \tag{2.33}$$

Sea $\hat{\epsilon}_0 \in (0, \epsilon_1)$ tal que

$$\begin{aligned}\|L^{-1}\|\pi(4\hat{\epsilon}_0^3\alpha^2 + \hat{\epsilon}_0\alpha(2c_1 + \hat{\epsilon}_0) + 4\hat{\epsilon}_0\alpha\|H\| \\ + \theta(c_2\hat{\epsilon}_0) \cdot 2c_2(1 + \hat{\epsilon}_0\alpha)) < \frac{1}{2}.\end{aligned} \tag{2.34}$$

Luego, de (2.29), (2.30), (2.31), (2.32), (2.33), y (2.34), para $|\epsilon| \in (0, \hat{\epsilon}_0)$ tenemos

$$\begin{aligned}\|\Gamma_1(p_1) - \Gamma_1(p_2)\| &\leq (2\epsilon)^{-1}\|L^{-1}\|\|\Gamma(p_1) - \Gamma(p_2)\| \\ &\leq (2\epsilon)^{-1}\|L^{-1}\| \sum_{i=1}^{5} \|I_i(p_1) - I_i(p_2)\| \\ &\leq (1/2)\|p_1 - p_2\|.\end{aligned} \tag{2.35}$$

Así, Γ_1 tiene un punto fijo. De esta forma hemos probado el caso $k = 1$ del Teorema 1.

2.4. La ecuación de núcleo para $k > 1$

Sea $\hat{v}$ como en la parte b) del Teorema 1, y $v = \hat{v} + \zeta$. Entonces (2.6) se transforma en

$$\begin{aligned}0 &= \Pi_N\Big([(\hat{v} + \epsilon H) + (\zeta + w)]^{2k} + R(x, t, \hat{v} + \zeta + w + \epsilon H)\Big) \\ &= \Pi_N\Big((\hat{v} + \epsilon H)^{2k} + 2k(\hat{v} + \epsilon H)^{2k-1}\zeta + 2k(\hat{v} + \epsilon H)^{2k-1}w \\ &\quad + \sum_{j=2}^{2k} \binom{2k}{j} (\hat{v} + \epsilon H)^{2k-j}(\zeta + w)^j + R(x, t, \hat{v} + \zeta + w + \epsilon H)\Big),\end{aligned}$$

De aquí, y del hecho que $\hat{v}^{2k-1}\zeta \in N^\perp$ (véase Lema 1), tenemos que (2.6) es equivalente a

$$\begin{aligned}\Pi_N(-2kJ\zeta) &= \Pi_N\Big(2k(\hat{v} + \epsilon H)^{2k-1}w + \sum_{j=2}^{2k} C_j(\hat{v} + \epsilon H)^{2k-j}(\zeta + w)^j \\ &\quad + R(x, t, \hat{v} + \zeta + w + \epsilon H)\Big) \\ &\equiv \Pi_N\Big(Q(\zeta, \epsilon, H)\Big),\end{aligned} \tag{2.36}$$

donde C_j es el coeficiente binomial $\binom{2k}{j}$, y $J = (\hat{v} + \epsilon H)^{2k-1} - \hat{v}^{2k-1}$.

Sea $z : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ una función 2π-periódica tal que $\zeta(t, x) = z(t+x) - z(t-x)$ con $\int_0^{2\pi} z(s)ds = 0$. Como en la sección anterior, seguimos el método introducido en [C-P-2010] (véase Lema

4). Así, si $v = \hat{v} + \zeta + w$ satisface (2.6) entonces, z satisface $-2kL_J(z) = \Gamma(z)$, donde

$$\begin{aligned}(L_J(z))\,(r) = &\int_0^\pi (z(r) - z(r-2x))J(x, r-x)dx \\ &+ \int_0^\pi (z(r) - z(r+2x))J(x, r+x)dx.\end{aligned} \tag{2.37}$$

y

$$\begin{aligned}(\Gamma(z))\,(r) = &\int_0^\pi Q(\zeta, \epsilon, H)(x, r-x)dx \\ &+ \int_0^\pi Q(\zeta, \epsilon, H)(x, r+x))dx.\end{aligned} \tag{2.38}$$

Nuevamente, del Lema 4, el recíproco tambien es válido, es decir, si z satisface $z = (-1/(2k))L_J^{-1}\Gamma(z) \equiv \Gamma_k(z)$, entonces $v = \hat{v} + \zeta + w$ satisface (2.6). Por tanto, para demostrar la parte b) del Teorema 1, basta ver que existe $\epsilon_0 > 0$ tal que para $\epsilon \in (0, \epsilon_0)$, el operador $z \to \Gamma_k(z)$ tiene punto fijo.
Como $\hat{v}$ es de orden ϵ, sea $M > 0$ tal que $\|\hat{v}\| + \epsilon\|H\| \leq M\epsilon$ para todo $\epsilon \in (0, \epsilon_0)$. Sean además $\epsilon_1 \in (0, \epsilon_0)$ y $\tau > 0$ tales que

$$\begin{aligned}&2k\alpha(M(M+2\tau))^{2k-1}\epsilon_1^{2k} + \sum_{j=2}^{2k} D_j(2\tau + \alpha(M+2\tau)^{2k+1}\epsilon_1^{2k})^j \leq \frac{\tau}{2}, \\ &2k\alpha M^{2k-1}\epsilon_1 + \sum_{j=2}^{2k} D_j(1+\alpha\epsilon_1)^j(4\tau)^{j-1} \leq \frac{k}{2\|L^{-1}\|}.\end{aligned} \tag{2.39}$$

donde $D_j = C_j M^{2k-j}$. Ahora escogemos $\gamma > 0$ tal que

$$\gamma < \text{mín}\left\{\frac{\tau}{M + 2\tau\epsilon_1 + \alpha\epsilon_1^{2k}}, \frac{k}{2\|L^{-1}\|(2M+1+\alpha)^{2k-1}}\right\}. \tag{2.40}$$

Por (2.2), existe $\delta > 0$ tal que si $|s| < \delta$ entonces $|R(t,x,s)| < \gamma s^{2k}$ y $|R_u(t,x,s)| \leq \gamma |s|^{2k-1}$.
Finalmente tomemos $\epsilon_2 \in (0, \epsilon_1)$ tal que

$$\epsilon_2(2M + 2\tau + \alpha\epsilon_2^{2k}) < \delta. \tag{2.41}$$

Ahora, para $\|z\| \leq \tau\epsilon$ tenemos $\|\zeta\| \leq 2\tau\epsilon$, y $\|w\| \leq \alpha(M+2\tau)^{2k+1}\epsilon^{2k+1}$. Por tanto

$$
\begin{aligned}
\|Q(\zeta,\epsilon,H)\| &\leq 2k\|(\hat{v}+\epsilon H)^{2k-1}w\| + \sum_{j=2}^{2k} C_j(M\epsilon)^{2k-j}\|\zeta+w\|^j \\
&\quad + \|R(t,x,\hat{v}+\zeta+w+\epsilon H)\| \\
&\leq 2kM^{2k-1}\alpha(M+2\tau)^{2k+1}\epsilon^{4k} \\
&\quad + \sum_{j=2}^{2k} D_j\epsilon^{2k-j}(2\tau\epsilon+\alpha(M+2\tau)^{2k+1}\epsilon^{2k+1})^j \\
&\quad + \gamma\|\hat{v}+\zeta+w+\epsilon H)\|^{2k} \\
&\leq \epsilon^{2k}\big(2kM^{2k-1}\alpha(M+2\tau)^{2k+1}\epsilon^{2k} \\
&\quad \sum_{j=2}^{2k} D_j(2\tau+\alpha(M+2\tau)^{2k+1}\epsilon^{2k})^j \\
&\quad + \gamma(M+2\tau+\alpha\epsilon^{2k})\big) \\
&\leq \tau\epsilon^{2k}.
\end{aligned}
\tag{2.42}
$$

Sea $\zeta_i(t,x) = z_i(t+x) - z_i(t-x)$, $i=1,2$, y $w_i = w(\hat{v}+\zeta_i)$ con $\|z_i\| \leq \tau\epsilon$. Así, de la definición de Q, la Proposición 1, (2.39), (2.41), y (2.40) tenemos

$$
\begin{aligned}
\|Q(\zeta_1,&\epsilon,H) - Q(\zeta_2,\epsilon,H)\| \leq 2k\|(\hat{v}+\epsilon H)^{2k-1}\|\|w_1-w_2\| \\
&\sum_{j=2}^{2k} C_j(M\epsilon)^{2k-j}\|(\zeta_1+w_1)^j - (\zeta_2+w_2)^j\| \\
&+ \|R(t,x,\hat{v}+\zeta_1+w_1+\epsilon H) - R(t,x,\hat{v}+\zeta_2+w_2+\epsilon H)\| \\
&\leq 2k(M\epsilon)^{2k-1}\alpha\epsilon\|\zeta_1-\zeta_2\| \\
&+ \Big(\sum_{j=2}^{2k} D_j\epsilon^{2k-j}(1+\epsilon\alpha)\sum_{i=0}^{j-1}\|(\zeta_1+w_1)^{j-1-i}(\zeta_2+w_2)^i\| \\
&+ \gamma(2M+1+\alpha)^{2k-1}\epsilon^{2k-1}\Big)\|\zeta_1-\zeta_2\| \\
&\leq \epsilon^{2k-1}\Big(\sum_{j=2}^{2k} D_j(1+\epsilon\alpha)j(2\tau+\alpha(M+2\tau)^{2k+1}\epsilon^{2k})^{j-1} \\
&+ 2kM^{2k-1}\alpha\epsilon + \gamma(2M+1+\alpha)^{2k-1}\Big)\|\zeta_1-\zeta_2\| \\
&\leq \frac{k\epsilon^{2k-1}}{\|L_J^{-1}\|}\|\zeta_1-\zeta_2\|.
\end{aligned}
\tag{2.43}
$$

De (2.42) vemos que $(\epsilon^{1-2k}/(2k))L_J^{-1}\Gamma$ es una transformación del espacio métrico $\{z; \|z\| \leq \tau\epsilon\}$ sobre él mismo. Por tanto, (2.43) prueba que $(\epsilon^{1-2k}/(2k))LJ^{-1}\Gamma$ es una contracción, luego tiene un único punto fijo, lo cual demuestra el Teorema 1.

2.5. Existencia de $\hat{v}$

El propósito de esta sección es establecer la existencia de $\hat{v} = \epsilon V$, usado en la demostración del Teorema 1 para el caso $k > 1$, cuando H es positiva.

Lema 5. *Existe Δ tal que para $v \in N \cap L^{2k}(\Omega)$*

$$\int_{\Omega} v^{2k}(x,t)d\sigma \leq \Delta \int_{\Omega_1} v^{2k}(x,t)d\sigma, \tag{2.44}$$

donde $\Omega_1 = [\pi/4, 3\pi/4] \times [0, 2\pi]$.

Demostración. Para $v \in N \cap L^{2k}(\Omega)$, sea

$$A = \left\{ x \in [\pi/4, 3\pi/4]; \int_0^{2\pi} v^{2k}(x,t)dt \geq \frac{20}{\pi} \int_{\Omega_1} v^{2k}(x,t)d\sigma \right\}. \tag{2.45}$$

Por el Lema 3, $\mu(A) \leq \pi/20$.
Si $B = [\pi/4, 3\pi/4] - A$, entonces $\mu(B) \geq \pi/2 - \pi/20 = 9\pi/20$ y por tanto

$$\begin{aligned} \mu([\pi/4, \pi/2] \cap B) &\geq \mu(B) - \mu([\pi/2, 3\pi/4]) \\ &\geq \pi/5, \\ \mu([\pi/2, 3\pi/4] \cap B) &\geq \pi/5. \end{aligned} \tag{2.46}$$

Afirmamos que para todo $x \in [0, \pi/4)$, existe $z \in B \cap [\pi/2, 3\pi/4]$ tal que $z - x \in B$. Asumiendo lo contrario, existe $x \in [0, \pi/4)$ tal que, para todo $z \in B \cap [\pi/2, 3\pi/4]$, $z - x \notin B$ vemos que $B_1 = \{z - x; z \in B \cap [\pi/2, 3\pi]/4\} \subset A$. Así, $\mu(A) \geq \mu(B_1) \geq \pi/5$ lo cual contradice que $\mu(A) \leq \pi/20$.
Ahora, para $t \in [0, 2\pi]$, y $x \in [0, \pi/4)$, usando la propiedad del paralelogramo, tenemos

$$\begin{aligned} |v^{2k}(x,t)| &= |v(t-z, z-x) + v(t-x, 0) - v(t+x-z, z)|^{2k} \\ &\leq |v(t-z, z-x) - v(t-x-z, z)|^{2k} \\ &\leq 2^{2k-1}(v^{2k}(t-z, z-x) + v^{2k}(t-x-z, z)). \end{aligned} \tag{2.47}$$

Entonces

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} v^{2k}(t,x)dt &\leq 2^{2k-1}\left(\int_0^{2\pi} v^{2k}(t, z-x)dt + \int_0^{2\pi} v^{2k}(t,z))dt \right) \\ &\leq 2^{2k}\frac{20}{\pi}\int_{\Omega_1} v^{2k}(t,x)d\sigma. \end{aligned} \tag{2.48}$$

De manera similar, para todo $x \in (3\pi/4, \pi]$,

$$\int_0^{2\pi} v^{2k}(x,t)dt \leq 2^{2k}\frac{20}{\pi}\int_{\Omega_1} v^{2k}(t,x)d\sigma. \tag{2.49}$$

Luego, por el Teorema de Fubini, (2.48), y (2.49)

$$\begin{aligned}\int_\Omega v^{2k}(x,t)d\sigma &= \int_0^{\pi/4}\int_0^{2\pi} v^{2k}(x,t)dtdx + \int_{\Omega_1} v^{2k}(x,t)d\sigma \\ &\quad + \int_{3\pi/4}^{\pi}\int_0^{2\pi} v^{2k}(x,t)dtdx \\ &\leq \left(1 + 5\cdot 2^{2k+1}\right))\int_{\Omega_1} v^{2k}(x,t)d\sigma \\ &\equiv \Delta\int_{\Omega_1} v^{2k}(x,t)d\sigma,\end{aligned} \tag{2.50}$$

Lo cual demuestra el Lema 5.

Lema 6. *Si H es continua y positiva en $(0,\pi)\times\mathbf{R}$, entonces existe $V \in N \cap L_\infty$ tal que $\Pi_N(V+H)^{2k} = 0$.*

Demostración. Sea

$$\begin{aligned} g(s,x,t) &= (s + H(x,t))^{2k+1} - s^{2k+1} \\ &= \sum_{j=1}^{2k+1}\frac{(2k+1)!}{(2k+1-j)!j!}s^{2k+1-j}H^j(x,t).\end{aligned} \tag{2.51}$$

Asumiendo $H(x,t) \geq 0$, g is una función convexa de su primera variable. Por tanto $f(v) = \int_\Omega g(v(x,t),x,t)d\sigma$ define un funcional convexo sobre $N \cap L^{2k}(\Omega)$. Por la continuidad de H, existe una constante positiva C tal que $H(x,t) \geq C$ para todo $(x,t) \in \Omega_1$. Esto y el Lema 5 implican que $\text{lím}_{\|v\|_{2k}\to\infty} f(v) = +\infty$. Por tanto, existe $V \in N \cap L^{2k}(\Omega)$ tal que $f(V) = \text{mín}\{f(v); v \in N \cap L^{2k}(\Omega)\}$ (see [**?**], Theorem 7.3.4).

Veamos que V está en $L^\infty(\Omega)$. Sea $p : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ una función 2π-periódica tal que $V(x,t) = p(t+x) - p(t-x)$. Sea ϕ como en (1.13). Como $\phi \in N \cap L^{2k}(\Omega)$ y $V^{2k} \in N^\perp$ (ver Lema 1), $0 = \int_\Omega \varphi(V+H)^{2k}d\sigma = \int_\Omega \varphi((V+H)^{2k} - V^{2k})d\sigma$. Argumentando como en el Lema 4 tenemos

$$\begin{aligned}
0 &= \int_0^\pi (V+H)^{2k}(x, r+x)dx - \int_0^\pi (V+H)^{2k}(x, r-x)dx \\
&= \int_0^\pi \sum_{j=1}^{2k} \frac{(2k)!}{(2k+1-j)!j!}(p(r+2x)-p(r))^{2k-j} H^j(x, r+x)dx \\
&\quad - \int_0^\pi \sum_{j=1}^{2k} \frac{(2k)!}{(2k+1-j)!j!}(p(r)-p(r-2x))^{2k-j} H^j(x, r-x)dx \qquad (2.52) \\
&= -2kp^{2k-1}(r)\left(\int_0^\pi (H(x, r+x)+H(x, r-x))dx\right) \\
&\quad + \sum_{j=2}^{2k} p^{2k-j}(r) q_j(r),
\end{aligned}$$

donde los q_j son funciones periódicas acotadas. Como tambien asumimos que H es continua y positiva, existe una constante positiva c tal que $\int_0^\pi (H(x, r+x)+H(x, r-x))dx \geq c$ para todo $r \in [0, 2\pi]$. Esto y (2.52) implican que $p \in L^\infty(\mathbf{R})$. Así, $V \in L^\infty(\mathbf{R})$, y se concluye la prueba del Lema 6.

2.6. La positividad de H

En esta sección veremos que el Teorema 1 incluye los resultados en [B-B-2006].

Teorema 2. *Si, para algún $v \in N$, H es continua y $H(t, x) > 0$ para todo $(t, x) \in \Omega$, entonces L_H es invertible. Si, adicionalmente, $k > 1$ entonces existe $\hat{v} \in N$ que satisface la parte b) en el Teorema 1. Así, existe $\epsilon_0 > 0$ tal que para $\epsilon \in (0, \epsilon_0)$ la ecuación (2.4) tiene una solución $u \in C^0(\Omega)$.*

Sea

$$X_2 = \left\{ p \in C^0(\mathbb{R}); p(x) = p(x+2\pi), \int_0^{2\pi} p(s)ds = 0, \|p\|_{C^0} = 1 \right\}$$

Para cada $p \in X_2$, sea $r_p \in [0, 2\pi]$ tal que $|p(r_p)| = 1$. Afirmamos que

$$\inf_{p \in X_2} |L(p)(r_p)| > 0 \tag{2.53}$$

Asumamos lo contrario, es decir, que existe una sucesión $\{p_n\}$ en X_2 tal que $|L(p_n)(r_{p_n})| <$

$1/n$. Sin pérdida de generalidad, podemos asumir que $p_n(r_{p_n}) = 1$. Así

$$\begin{aligned}\frac{1}{n} &\geq L(p_n)(r_{p_n}) \\ &= \int_0^\pi (1 - p_n(r_{p_n} - 2x))H(r_{p_n} - x, x)dx \\ &+ \int_0^\pi (1 - p_n(r_{p_n} + 2x))H(r_{p_n} + x, x)dx \\ &\geq \int_0^\pi (1 - p_n(r_{p_n} - 2x))H(r_{p_n} - x, x)dx.\end{aligned} \tag{2.54}$$

Por tanto,

$$\{\sqrt{(1 - p_n(\widehat{r}_n + 2x))H(\widehat{r}_n + x, x)}\} \to 0, \text{ in } L^2. \tag{2.55}$$

Luego, existe una subsucesión $\{p_{n_k}\}$ de $\{p_n\}$ tal que

$$\left\{(1 - p_{n_k}(r_{p_{n_k}} + 2x))H(r_{p_{n_k}} + x, x)\right\} \to 0 \tag{2.56}$$

en casi toda parte sobre $[0, \pi]$. Como $H(t, x) > 0$ para todo $(x, t) \in \Omega$, entonces la sucesión $\{p_{n_k}\} \to 1$ c.t.p. de $[0, 2\pi]$. Pero esto es una contradicción, porque $\int_0^{2\pi} p_{n_k}(s)ds = 0$ para todo k. Así, se ha probado (2.53), que junto con el Lema 6 demuestran el Teorema 1, quedando demostrado el Teorema 2.

La positividad de H no es condición necesaria para que L_H sea invertible. Por ejemplo, si $h(t, x) = 9\sin(3x)$ entonces $H(t, x) = \sin(3x) + v(t, x)$ cambia de signo para todo $v \in N$, no obstante L_H es invertible. Este es un caso en el cual el Teorema 1 aplica, pero no los resultados de [B-B-2006], véase sección 2.7.

2.7. H cambia de signo y L es invertible

Haremos uso de expansión en series de Fourier para mostrar ejemplos en los cuales $L_H \equiv L$ (véase (2.5), Teorema 1) tiene inversa en el espacio de funciones continuas, aunque H cambia de signo. En efecto, mostramos que este es el caso para $H(x, t) = \sin(3x)$, y calculamos explicitamente L^{-1}. Este resultado y el Teorema 2 prueban que nuestros resultados incluyen los de [B-B-2006]. Sean

$$\begin{aligned}H(x, t) &= \sum_{j,l} (a_{jl}\sin(jx)\sin(lt) + b_{jl}\sin(jx)\cos(lt)) \\ p(t) &= \sum_{k=1}^{\infty} (c_k\sin(kt) + d_k\cos(kt))\end{aligned} \tag{2.57}$$

las series de Fourier de H y p.
Cálculos elementales muestran que

$$\begin{aligned} L(\sin(kr)) = 8 \sum_{j+l\ odd} \Bigg(& \frac{ja_{jl}(k^2-kl)}{(j^2-l^2)((2k-l)^2-j^2)} \cos(kr-lr) \\ & - \frac{ja_{jl}(k^2+kl)}{(j^2-l^2)((2k+l)^2-j^2)} \cos(kr+lr) \\ & + \frac{jb_{jl}(k^2-kl)}{(j^2-l^2)((2k-l)^2-j^2)} \sin(kr-lr) \\ & + \frac{jb_{jl}(k^2+kl)}{(j^2-l^2)((2k+l)^2-j^2)} \sin(kr+lr) \Bigg) \end{aligned} \tag{2.58}$$

De manera similar

$$\begin{aligned} L(\cos(kr)) = 8 \sum_{j+l\ odd} \Bigg(& \frac{jb_{jl}(k^2-kl)}{(j^2-l^2)((2k-l)^2-j^2)} \cos(kr-lr) \\ & + \frac{jb_{jl}(k^2+kl)}{(j^2-l^2)((2k+l)^2-j^2)} \cos(kr+lr) \\ & - \frac{ja_{jl}(k^2-kl)}{(j^2-l^2)((2k-l)^2-j^2)} \sin(kr-lr) \\ & + \frac{ja_{jl}(k^2+kl)}{(j^2-l^2)((2k+l)^2-j^2)} \sin(kr+lr) \Bigg) \end{aligned} \tag{2.59}$$

En particular, si $H(x,t) = \sin(3x)$

$$L(\sin(kr)) = \frac{16k^2}{3(4k^2-9)} \sin(kr) \tag{2.60}$$

y

$$L(\cos(kr)) = \frac{16k^2}{3(4k^2-9)} \cos(kr) \tag{2.61}$$

Así, para $H(x,t) = \sin(3x)$

$$\begin{aligned} L(p(t)) =& L\left(\sum_{k=1}^{\infty} (c_k \sin(kt) + d_k \cos(kt))\right) \\ =& \sum_{k=1}^{\infty} \frac{16\pi k^2}{3(4k^2-9)} (c_k \sin(kt) + d_k \cos(kt)) \\ =& \frac{16\pi}{3} \sum_{k=1}^{\infty} \left(1 + \frac{9/4}{k^2-9/4}\right) (c_k \sin(kt) + d_k \cos(kt)) \end{aligned} \tag{2.62}$$

Claramente tenemos que si $p \in C[0, 2\pi]$, entonces $p \in L^2[0, 2\pi]$ y, por (2.62), $L(p(t)) \in L^2[0, 2\pi]$. Veamos ahora que $L(p(t))$ es continua en $[0, 2\pi]$. De (2.62) tenemos

$$\begin{aligned} L(p(t)) =& \frac{16\pi}{3} p(t) + \frac{16\pi}{3} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{9/4}{k^2 - 9/4} c_k \sin(kt) \\ &+ \frac{16\pi}{3} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{9/4}{k^2 - 9/4} d_k \cos(kt) \\ &\equiv \frac{16\pi}{3} (p(t) + S_1(t) + S_2(t)). \end{aligned} \tag{2.63}$$

Tomando $t_n \to t$, tenemos

$$\begin{aligned} |S_1(t_n) - S_1(t)| \leq& \sum_{k=1}^{\infty} \frac{9/4}{|k^2 - 9/4|} |c_k| |\sin(kt_n) - \sin(kt)| \\ \leq& \frac{9}{4} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{|k^2 - 9/4|} |c_k| |\cos(\zeta)| |t_n - t| \\ \leq& 18 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} |c_k| |t_n - t| \\ \leq& 18 \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \right)^{1/2} \left(\sum_{k=1}^{\infty} (c_k)^2 \right)^{1/2} |t_n - t| \\ \leq& c|t_n - t| \end{aligned} \tag{2.64}$$

donde la constante c es independiente de t y t_n. Así, S_1 es una función continua. De manera similar, S_2 tambien es continua. Entonces, por (2.63) y (2.64), $L(p) \in C[0, 2\pi]$ si $p \in C[0, 2\pi]$.

Más aún, para todo entero positivo k, $1 + \frac{9/4}{k^2 - 9/4} \neq 0$ y

$$\begin{aligned} p(t) =& \sum_{k=1}^{\infty} (c_k \sin(kt) + d_k \cos(kt)) \\ =& \sum_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{9}{4k^2}\right) \left(1 + \frac{9/4}{k^2 - 9/4}\right) (c_k \sin(kt) + d_k \cos(kt)) \end{aligned} \tag{2.65}$$

por tanto, siguiendo los argumentos en (2.62), (2.63) y (2.64) tenemos que, el operador $L^{-1} : C[0, 2\pi] \to C[0, 2\pi]$ definido por

$$L^{-1}(q(t)) = \frac{3}{16\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{9}{4k^2}\right) (\overline{c_k} \sin(kt) + \overline{d_k} \cos(kt)) \tag{2.66}$$

es el inverso de L. Aquí, $\sum_{k=1}^{\infty}(\overline{c_k}\sin(kt)+\overline{d_k}\cos(kt))$ es la serie de Fourier de $q(t)$. Luego, por el teorema 1, existe $\epsilon_0 > 0$ tal que para $\epsilon \in (0,\epsilon_0)$ la ecuación (2.4) tiene solución $u \in C^0(\Omega)$.

Lema 7. *Si $h(x,t) = 9\sin(3x)$ y $H = \Box^{-1}(h)+v$, con $v \in N$, entonces H cambia de signo.*

Dem. Por la definición de H, $H(x,t) = \sin 3x + v(x,t)$ con $v(x,t) = p(t+x) - p(t-x)$ (ver (1.8)). Asumiendo que $H(x,t) > 0$ para todo $x \in (0,\pi)$, $t \in [0,2\pi]$, tenemos que $-1 + p(t+\pi/2) - p(t-\pi/2) > 0$. Así

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} p(\pi/2+t)dt &> \int_0^{2\pi}(1+p(t-\pi/2))dt \\ &= 2\pi + \int_0^{2\pi} p(t-\pi/2)dt \end{aligned} \tag{2.67}$$

Pero, p es 2π-periódica y $\int_0^{2\pi} p(t)dt = 0$, por tanto (2.67) es una contradicción. De otra parte, si asumimos que $H(x,t) < 0$ para todo $x \in (0,\pi)$, $t \in [0,2\pi]$, tomando $x = \pi/6$ encontramos una contradicción. Así, H cambia de signo.

Así, para $h(x,t) = 9\sin(3x)$, podemos tomar $H(x,t) = \sin(3x)$. Por (2.66) y el Teorema 1, la ecuación (2.1) tiene una solución para ϵ pequeño. De otra parte, por el Lema 7, el Teorema 1 de [B-B-2006] no aplica porque, ni h ni H tienen un sólo signo. Estos argumentos pueden ser extendidos a cualquier función $h(x,t)$ de la forma $\sin(kx)$ con k impar y positivo. Obteniendo un gran número de ejemplos para los cuales el Teorema 1 aplica pero no el Teorema 1 de [B-B-2006]. Además, como el conjunto de operadores invertibles en un espacio de Banach es abierto en el álgebra de tales operadores, si $H_1(x,t)$ es pequeño entonces $L + L_{H_1}$ tambien es invertible. De esta forma hemos demostrado

Teorema 3. *Existe $\delta > 0$ tal que si $\|h_1\| \leq \delta$ entonces existe $\epsilon_0 > 0$ tal que para $\epsilon \in (0,\epsilon_0)$, $h(x,t) = 9\sin(3x) + h_1(x,t) \in N^{\perp}$, y $k = 1$ la ecuación (2.1) tiene una solución. Más aún, toda solución de $\Box H = h$ que satisfaga la condición de frontera dada en (2.1) cambia de signo.*

CAPÍTULO 3

Un Problema Asintóticamente Lineal

En este capítulo consideramos el problema

$$\begin{cases} \Box(u) + \tau u + h(u) = f(x,t) = f(x,t+2\pi), \\ u(0,t) = u(\pi,t) = 0, \\ u(x,t) = u(x,t+2\pi) \qquad x \in [0,\pi], \quad t \in \mathbf{R}. \end{cases} \tag{3.1}$$

Suponemos que: (a) $\tau > 0$ y $\tau \notin \sigma(-\Box)$. (b) h es de clase C^1 y existen $\beta < 0$ y $a > 1$ tales que

$$|h'(u)| \leq |u|^{\beta}, \quad \text{para } |u| \geq a. \tag{3.2}$$

Nuestro objetivo es dar condiciones suficientes sobre f para que (3.1) tenga solución. De (3.2) tenemos que existe $M > 0$ tal que $|h'(u)| \leq M$ para todo $u \in \mathbf{R}$. También observamos que si $\beta \leq -1$, entonces $|h'(s)| \leq |s|^{\beta} < |s|^{-1/2}$, por tanto, en adelante asumiremos que $-1 < \beta < 0$.

Como h es de clase C^1, existe $M_1 > 1$ tal que $|h(s)| \leq M_1$ para todo $|s| \leq a$. Si $s \geq a$,

$$\begin{aligned} |h(s)| &\leq \left| h(a) + \int_a^s h'(t)dt \right| \\ &\leq |h(a)| + \int_a^s |h'(t)|dt \\ &\leq M_1 + \int_a^s |t|^{\beta} dt \\ &\leq M_1 + \frac{s^{\beta+1}}{\beta+1} - \frac{a^{\beta+1}}{\beta+1} \\ &\leq M_1 + \frac{s^{\beta+1}}{\beta+1}. \end{aligned}$$

De manera similar argumentamos para $s \leq -a$. Entonces

$$|h(s)| \leq M_1 + \frac{|s|^{\beta+1}}{\beta+1} \quad \text{para todo} \quad s \in \mathbf{R}. \tag{3.3}$$

De esta forma la función $G(s) = \tau s + h(s)$ es asintóticamente lineal, pero no necesariamente monótona. Aún más, como $0 < \beta + 1 < 1$, de (3.3) tenemos que $\lim_{|s|\to\infty} |h(s)|/|s| = 0$, es decir, para todo $\epsilon > 0$ existen $M_\epsilon > 0$ y $a_\epsilon > a$ tales que

$$\begin{aligned} &|h(s)| \leq \epsilon |s| \quad \text{si} \quad |s| \geq a_\epsilon, \quad \text{y} \\ &|h(s)| \leq M_\epsilon + \epsilon |s|, \quad \text{para todo} \quad s \in \mathbf{R}. \end{aligned} \tag{3.4}$$

Sean γ_1 y γ_2 reales positivos, tales que $\gamma_1 < \tau < \gamma_2$ y $\sigma(\Box) \cap [\gamma_1, \gamma_2] = \emptyset$. Tomando $\epsilon > 0$ tal que $\tau + \epsilon \in (\gamma_1, \gamma_2)$ y a_ϵ como en (3.4), tenemos que para $|s| > a_\epsilon$

$$\frac{\gamma_1}{2} s^2 \leq \int_{a_\epsilon}^{s} G(t)dt \leq \frac{\gamma_2}{2} s^2.$$

Por tanto G satisface (4), es decir existe $c > 0$ tal que

$$-c + \frac{\gamma_1}{2} s^2 \leq \int_0^s G(t)dt \leq c + \frac{\gamma_2}{2} s^2, \quad \text{para toda } s \in \mathbf{R}. \tag{3.5}$$

H. Brezis y L. Nirenberg [B-N-1978] demuestran que si la función G es monótona, para toda $f \in L^2(\Omega)$ el problema (3.1) tiene solución débil. En particular, para toda $q \in L^2(\Omega)$ el problema

$$\begin{cases} \Box\varphi + \tau\varphi = q(x,t) \\ \quad \varphi(0,t) = \varphi(\pi,t) = 0 \\ \quad \varphi(x,t) = \varphi(x,t+2\pi) \end{cases} \tag{3.6}$$

tiene una solución débil $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2 \in N \oplus Y$, la cual denotamos como $(\Box + \tau I)^{-1}(q)$. Aún más, si $\int_\Omega qv = 0$ para toda $v \in N$, existe un número real κ tal que

$$\|(\Box + \tau I)^{-1}(q)\|_{1,2} + \|(\Box + \tau I)^{-1}(q)\|_{C^{1/2}} \leq \kappa \|q\|_2, \tag{3.7}$$

donde $C^{1/2}$ es el espacio de las funciones Hölder continuas de exponente 1/2.

3.1. Teorema de existencia de solución

Introducimos el concepto de *función no plana sobre características*, necesario para enunciar nuestros resultados.

Definición 1. *Sea $\phi : \mathbf{R^2} \to \mathbf{R}$ integrable en $[0,\pi]\times[0,2\pi]$. Decimos que ϕ no es plana sobre características si*

$$\begin{aligned}&\text{dado } \ \epsilon > 0 \ \text{ existe } \ \delta > 0 \ \text{ tal que}\\ &\mu\{x\in[0,\pi]; |\phi(x, r\pm x)| < \delta\} < \epsilon \ \textit{para todo} \ \ r\in\mathbf{R},\end{aligned} \tag{3.8}$$

donde μ representa la medida de Lebesgue.

Ahora establecemos el teorema de existencia de solución para (3.1) de la siguiente manera:

Teorema 4. *Sea $f(x,t) = cq(x,t) \in L^p(\Omega)$, $p \geq 2$ y φ solución del problema* (3.6). *Si φ no es plana sobre características, entonces existe c_0 tal que para $|c| \geq c_0$ la ecuación* (3.1) *tiene solución débil* (*ver* (1.4)).

Si $f \in L^p(\Omega)$ con $p \geq 2$, entonces $f \in L^2(\Omega)$. De aquí, de la condición (3.5) y teniendo en cuenta los resultados de H. Hofer [H-1982] y M. Willem [W-1981], tenemos que existen sucesiones $\{g_n\}$ y $\{u_n\}$ en $L^2(\Omega)$ tales que $g_n \to 0$ en L^2 y para cada n, u_n es solución débil de

$$\begin{cases}\Box u_n + \tau u_n + h(u_n) = f(x,t) + g_n(x,t)\\ u_n(0,t) = u_n(\pi,t) = 0\\ u_n(x,t) = u_n(x,t+2\pi)\end{cases} \tag{3.9}$$

De (3.6) y (3.9), obtenemos

$$\Box(u_n - c\varphi) + \tau(u_n - c\varphi) = g_n - h(u_n), \tag{3.10}$$

haciendo $z_n = u_n - c\varphi$, tenemos

$$\Box z_n + \tau z_n = g_n(x,t) - h(u_n). \tag{3.11}$$

Para demostrar el Teorema 4 probaremos que la sucesión u_n (véase (3.9)) converge a u en L^2 y que además u es solución débil de (3.1). Ahora bien, demostrar que $\{u_n\}$ converge es equivalente a demostrar que la sucesión $\{z_n\}$ dada en (3.11) converge en $N \oplus Y$.

Sea $z_n = v_n + w_n \in N \oplus Y$, aplicando reducción de Lyapunov-Schmidt en (3.11), obtenemos

$$\begin{aligned}\Box w_n + \tau I w_n &= \Pi_Y(g_n - h(u_n))\\ w_n &= (\Box + \tau I)^{-1}\Pi_Y(g_n(x,t) - h(u_n)),\end{aligned} \tag{3.12}$$

$$\tau v_n = \Pi_N(g_n - h(u_n)). \tag{3.13}$$

En las dos secciones siguientes demostraremos la convergencia de las sucesiones $\{w_n\}$ y $\{v_n\}$ en Y y N respectivamente. Esto a partir de (3.12) y (3.13), y haciendo uso del método descrito en la sección 1.5.

3.2. Convergencia de la sucesión $\{w_n\}$

De (3.12), (3.7) y (3.13) concluimos que

$$\begin{aligned}\|w_n\|_{1,2} &\leq \kappa\|(g_n - h(u_n))\|_2 \leq \kappa(\|g_n\|_2 + \|h(u_n)\|_2), \quad \text{y}\\ \tau\|v_n\|_2 &\leq \|(g_n - h(u_n))\|_2 \leq \|g_n\|_2 + \|h(u_n)\|_2.\end{aligned}$$

Como $g_n \to 0$ en L^2, existe k_2 tal que $\|g_n\|_2 \leq k_2$, entonces

$$\|w_n\|_{1,2} \leq \kappa k_2 + \kappa\|h(u_n)\|_2, \quad \text{y} \quad \tau\|v_n\|_2 \leq k_2 + \|h(u_n)\|_2 \tag{3.14}$$

Lema 8. *Si h satisface (3.2) y $\{u_n\}$ es la sucesión de soluciones dada en (3.9), entonces las sucesiones $\{w_n\}$ y $\{v_n\}$ están acotadas en $\mathbf{H^1}$ y en $L^2(\Omega)$, respectivamente.*

Demostración. De (3.3),

$$\begin{aligned}\|h(u_n)\|_2^2 &= \int_\Omega (h(u_n))^2\\ &\leq \int_\Omega \left(M_1 + \frac{|u_n|^{\beta+1}}{\beta+1}\right)^2\\ &\leq 2\int_\Omega M_1^2 + \frac{2}{(\beta+1)^2}\int_\Omega |u_n|^{2(\beta+1)}\\ &\leq 4\pi^2 M_1^2 + \frac{2}{(\beta+1)^2}\left(\int_\Omega |u_n|^2\right)^{\beta+1} \cdot \left(\int_\Omega 1^{-1/\beta}\right)^{-\beta}\\ &\leq 4\pi^2 M_1^2 + \frac{2}{(\beta+1)^2}(2\pi^2)^{-\beta}\|u_n\|_2^{2(\beta+1)}\\ &\leq 4\pi^2 M_1^2 + \frac{2^{-\beta+1}\pi^{-2\beta}}{(\beta+1)^2}\|u_n\|_2^{2(\beta+1)}\end{aligned}$$

es decir,

$$\|h(u_n)\|_2 \leq 2\pi M_1 + \frac{2^{(1-\beta)/2}\pi^{-\beta}}{\beta+1}\|u_n\|_2^{(\beta+1)}. \tag{3.15}$$

Reemplazando (3.15) en (3.14) y teniendo en cuenta que $u_n = v_n + w_n + c\varphi$, obtenemos

$$\begin{aligned}\|w_n\|_{1,2} &\leq \kappa\left(k_3 + k_4\|v_n + w_n + c\varphi\|_2^{\beta+1}\right)\\ &\leq \kappa\left(k_3 + k_4(\|v_n\|_2 + \|w_n\|_2 + |c|\|\varphi\|_2)^{\beta+1}\right)\end{aligned} \tag{3.16}$$

$$\tau\|v_n\|_2 \leq k_3 + k_4(\|v_n\|_2 + \|w_n\|_2 + |c|\|\varphi\|_2)^{\beta+1} \tag{3.17}$$

donde $k_3 = k_2 + 2\pi M_1$, $\quad k_4 = \frac{2^{(1-\beta)/2}\pi^{-\beta}}{\beta+1}$, y fijamos c.
Si $|c|\|\varphi\|_2 = \max\{\|v_n\|_2, \|w_n\|_2, |c|\|\varphi\|_2\}$, entonces de (3.16) y (3.17) tenemos que

$$\|w_n\|_{1,2} \leq \kappa k_3 + \kappa k_4(3|c|\|\varphi\|_2)^{\beta+1} \quad \text{y} \quad \|v_n\|_2 \leq k_3 + k_4(3|c|\|\varphi\|_2)^{\beta+1}. \tag{3.18}$$

Si $\|w_n\|_2 = \max\{\|v_n\|_2, \|w_n\|_2, |c|\|\varphi\|_2\}$, entonces de (3.16) tenemos que

$$\|w_n\|_{1,2} \leq \kappa k_3 + \kappa k_4 3^{\beta+1}\|w_n\|_2^{\beta+1},$$

aplicando la desigualdad de Young con $p = 1/(\beta+1)$ y $p' = -1/\beta$ obtenemos

$$\begin{aligned}\|w_n\|_{1,2} &\leq \kappa k_3 - \beta(\kappa k_4 3^{\beta+1})^{-1/\beta} + (\beta+1)\|w_n\|_2 \\ &\leq \kappa k_3 - \beta(\kappa k_4 3^{\beta+1})^{-1/\beta} + (\beta+1)\|w_n\|_{1,2}\end{aligned}$$

restando el término $(\beta+1)\|w_n\|_{1,2}$ a la desigualdad, obtenemos $-\beta\|w_n\|_{1,2} \leq \kappa k_3 - \beta(\kappa k_4 3^{\beta+1})^{-1/\beta}$, así

$$\|v_n\|_2 \leq \|w_n\|_2 \leq \|w_n\|_{1,2} \leq (\kappa k_4 3^{\beta+1})^{-1/\beta} - \kappa k_3\beta^{-1}. \tag{3.19}$$

Si $\|v_n\|_2 = \max\{\|v_n\|_2, \|w_n\|_2, |c|\|\varphi\|_2\}$, usando (3.17) obtenemos

$$\|v_n\|_2 \leq k_3 + k_4 3^{\beta+1}\|v_n\|_2^{\beta+1},$$

aplicando nuevamente la desigualdad de Young con $p = 1/(\beta+1)$ y $p' = -1/\beta$ obtenemos

$$\|v_n\|_2 \leq k_3 - \beta(k_4 3^{\beta+1})^{-1/\beta} + (\beta+1)\|v_n\|_2$$

de aquí, concluimos que

$$\|w_n\|_2 \leq \|v_n\|_2 \leq (k_4 3^{\beta+1})^{-1/\beta} - k_3\beta^{-1}, \tag{3.20}$$

y por (3.16), w_n es acotada en $\mathbf{H^1}$.

De (3.18), (3.19) y (3.20) concluimos que w_n es acotada en $\mathbf{H^1}$ y v_n es acotada en L^2. Quedando demostrado el Lema.

■

Como la sucesión $\{\|w_n\|_{1,2}\}$ es acotada, por el Teorema de Rellich-Kondrachov (véase sección 1.2) existe una subsucesión de $\{w_n\}$ que converge puntualmente y en L^2. Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que es ella misma.

3.3. Convergencia de la sucesión $\{v_n\}$ en $L^2(\Omega)$

Siguiendo el método descrito en la sección 1.5, tenemos que para cada entero positivo n, v_n es solución de la ecuación de kernel (3.13) si y solo si v_n es solución de la ecuación integral sobre características

$$\begin{aligned}\tau\int_0^\pi (v_n(x,r-x)-v_n(x,r+x)dx &= \int_0^\pi (g_n(x,r-x)-h(u_n(x,r-x)))dx \\ &- \int_0^\pi (g_n(x,r+x)-h(u_n(x,r+x)))dx, \qquad \text{para casi todo } r\in[0,2\pi].\end{aligned} \tag{3.21}$$

De (1.8), tenemos que para todo $n=1,2,\ldots$, $v_n(x,t)=p_n(t+x)-p_n(t-x)$ con $p_n\in L^2[0,2\pi]$. Reemplazando al lado izquierdo de (3.21) obtenemos

$$\begin{aligned}2\pi\tau p_n(r) &= \int_0^\pi g_n(x,r-x)-g_n(x,r+x)dx \\ &- \int_0^\pi h(z_n(x,r-x)+c\varphi(x,r-x))dx \\ &+ \int_0^\pi h(z_n(x,r+x)+c\varphi(x,r+x))dx.\end{aligned} \tag{3.22}$$

Demostraremos que la sucesión $\{p_n\}$ obtenida en (3.22) converge en $L^2[0,2\pi]$. Sea

$$\begin{aligned}\Gamma_{mn}(x,r,s,c) &= c\varphi(x,r+x)+z_n(x,r+x)+s(z_m(x,r+x)-z_n(x,r+x)) \\ &= c\left(\varphi(x,r+x)+\frac{1}{c}(z_n(x,r+x)+s(z_m(x,r+x)-z_n(x,r+x)))\right) \\ &\equiv c\left(\varphi(x,r+x)+\frac{1}{c}\zeta_{mn}(x,r,s)\right).\end{aligned} \tag{3.23}$$

Del Lema (8) y teniendo en cuenta que φ es solución (3.6), tenemos que φ y z_n están acotadas en L^2, sea

$$M_2=\max\{\|z_n\|_2,\|\varphi\|_2; n=1,2,\ldots\}<+\infty, \tag{3.24}$$

entonces $\zeta_{mn}(x,r,s)$ es acotada en $L^2(\Omega)$ y $\|\zeta_{mn}\|_2\le 3M_2$. Además, $\zeta_{mn}(x,r,s)\in L^2(\Omega\times[0,1])$ y

$$\begin{aligned}\|\zeta_{mn}\|^2_{L^2(\Omega\times[0,1])} &= \int_0^1\int_0^{2\pi}\int_0^\pi |\zeta_{mn}(x,r,s)|^2 \\ &\le \int_0^1\int_\Omega |\zeta_{mn}(x,r,s)|^2 \\ &\le 9\|z_n\|_2^2 \\ &\le 9M_2^2.\end{aligned} \tag{3.25}$$

Dado $\epsilon = \pi\tau^2/256(M^2+1)$, existe δ tal que $\mu(\{x \in [0,\pi]; |\varphi(x, r+x) < \delta\}) < \epsilon$. Definimos los siguientes conjuntos

$$\begin{aligned} B &= \{x \in [0,\pi]; |\varphi(x, r+x)| < \delta\}, \quad B^c = \{x \in [0,\pi]; |\varphi(x, r+x)| \geq \delta\}, \\ A &= \{(x,s) \in [0,\pi] \times [0,1]; |\zeta_{mn}(x,r,s)| \geq |c|\delta/2\}, \\ A^c &= \{(x,s) \in [0,\pi] \times [0,1]; |\zeta_{mn}(x,r,s)| < |c|\delta/2\}. \end{aligned} \tag{3.26}$$

Sobre $A^c \cap (B^c \times [0,1])$ se cumple

$$\begin{aligned} |\Gamma_{mn}(x,r,s,c)|^{2\beta} &\leq |c|^{2\beta} \left(|\varphi(x,r+x)| - \frac{1}{|c|}|\zeta_{mn}(x,r,s)| \right)^{2\beta} \\ &\leq |c|^{2\beta}(\delta - \delta/2)^{2\beta} \\ &\leq |c|^{2\beta}(\delta/2)^{2\beta}. \end{aligned} \tag{3.27}$$

De (3.25) y aplicando Fubini tenemos

$$\begin{aligned} 9M_2^2 &\geq \int_{\Omega\times[0,1]} |\zeta_{mn}(x,r,s)|^2 \\ &\geq \int_0^{2\pi} \int_A |\zeta_{mn}|^2 \\ &\geq 2\pi\mu(A)c^2\delta^2/4, \end{aligned}$$

entonces

$$\mu(A) \leq (18\pi M_2^2)/(c^2\delta^2). \tag{3.28}$$

De (3.26), (3.27) y (3.28) tenemos

$$\begin{aligned} \int_0^\pi \int_0^1 |h'(\Gamma_{mn}(x,r,s,c))|^2 ds dx &\leq \iint_{A^c\cap(B^c\times[0,1])} |h'(\Gamma_{mn}(x,r,s,c))|^2 ds dx \\ &+ \iint_{A\cup(B\times[0,1])} |h'(\Gamma_{mn}(x,r,s,c))|^2 ds dx \\ &\leq \iint_{A^c\cap(B^c\times[0,1])} |h'(\Gamma_{mn}(x,r,s,c))|^2 ds dx + \frac{18\pi M_2^2 M^2}{c^2\delta^2} + M^2\epsilon, \end{aligned} \tag{3.29}$$

de (3.29) y tomando c tal que

$$|c| = \max\left\{ \frac{2a}{\delta}, \frac{2}{\delta}\left(\frac{\tau}{16}\right)^{1/\beta}, \frac{48\sqrt{2}M_2 M}{\delta\tau} \right\} \tag{3.30}$$

tenemos que

$$\begin{aligned}
&\int_0^\pi \int_0^1 |h'(\Gamma_{mn}(x,r,s,c))|^2 ds dx \\
&\qquad \le \iint\limits_{A^c\cap(B^c\times[0,1])} |\Gamma_{mn}(x,r,s,c)|^{2\beta} ds dx + \frac{18\pi M_2^2 M^2}{c^2\delta^2} + \pi\tau^2/256 \\
&\qquad \le \iint\limits_{A^c\cap(B^c\times[0,1])} |c|^{2\beta}(\delta/2)^{2\beta} ds dx + \frac{18\pi M_2^2 M^2}{c^2\delta^2} + \pi\tau^2/256 \\
&\qquad \le \pi|c|^{2\beta}(\delta/2)^{2\beta} + \frac{18\pi M_2^2 M^2}{c^2\delta^2} + \pi\tau^2/256 \le 3\pi\tau^2/256.
\end{aligned} \tag{3.31}$$

De (3.31), con c dada por (3.30), aplicando las desigualdades del valor medio y de Hölder, obtenemos

$$\begin{aligned}
&\int_0^\pi |h(z_n(x,r+x)+c\varphi(x,r+x)) - h(z_m(x,r+x)+c\varphi(x,r+x))|\, dx \\
&\quad \le \int_0^\pi \int_0^1 |h'(\Gamma_{mn}(x,r,s,c))| \cdot |z_m(x,r+x)-z_n(x,r+x)| ds dx \\
&\quad \le \left(\int_0^\pi \int_0^1 |h'(\Gamma_{mn}(x,r,s,c))|^2 ds dx\right)^{1/2} \\
&\qquad \cdot \left(\int_0^\pi |z_m(x,r+x)-z_n(x,r+x)|^2 dx\right)^{1/2} \\
&\quad \le \frac{\sqrt{3\pi}\tau}{16} \cdot \left(\int_0^\pi |z_m(x,r+x)-z_n(x,r+x)|^2 dx\right)^{1/2}.
\end{aligned} \tag{3.32}$$

De manera similar podemos afirmar que

$$\begin{aligned}
&\int_0^\pi |h(z_n(x,r-x)+c\varphi(x,r-x)) - h(z_m(x,r-x)+c\varphi(x,r-x))|\, dx \\
&\quad \le \frac{\sqrt{3\pi}\tau}{16} \cdot \left(\int_0^\pi |z_m(x,r-x)-z_n(x,r-x)|^2 dx\right)^{1/2}.
\end{aligned} \tag{3.33}$$

Veamos que $\{p_n\}$ es de Cauchy en $L^2[0,2\pi]$.

De (3.22), (3.32) y (3.33) obtenemos

$$
\begin{aligned}
(\pi\tau)^2\|p_n(r)-p_m(r)\|_2^2 &= (\pi\tau)^2\int_0^{2\pi}|p_n(r)-p_m(r)|^2dr \\
&\le \int_0^{2\pi}\left(\int_0^{\pi}|g_n(x,r+x)-g_m(x,r+x)|dx\right)^2dr \\
&+ \int_0^{2\pi}\left(\int_0^{\pi}|g_n(x,r-x)-g_m(x,r-x)|dx\right)^2dr \\
&+ \int_0^{2\pi}\left(\int_0^{\pi}|h(z_n(x,r+x)+c\varphi(x,r+x))-h(z_m(x,r+x)+c\varphi(x,r+x))|dx\right)^2dr \\
&+ \int_0^{2\pi}\left(\int_0^{\pi}|h(z_n(x,r-x)+c\varphi(x,r-x))-h(z_m(x,r-x)+c\varphi(x,r-x))|dx\right)^2dr \\
&\le \int_0^{2\pi}\left(\int_0^{\pi}|g_n(x,r+x)-g_m(x,r+x)|dx\right)^2dr \\
&+ \int_0^{2\pi}\left(\int_0^{\pi}|g_n(x,r-x)-g_m(x,r-x)|dx\right)^2dr \\
&+ \frac{3\pi\tau^2}{256}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}|z_m(x,r+x)-z_n(x,r+x)|^2dxdr \\
&+ \frac{3\pi\tau^2}{256}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}|z_m(x,r-x)-z_n(x,r-x)|^2dxdr
\end{aligned}
\tag{3.34}
$$

Sobre las últimas cuatro integrales tenemos:

$$
\begin{aligned}
&\int_0^{2\pi}\left(\int_0^{\pi}|g_n(x,r+x)-g_m(x,r+x)|dx\right)^2dr \\
&\quad\le \pi\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}|g_n(x,r+x)-g_m(x,r+x)|^2dxdr \\
&\quad= \pi\|g_n-g_m\|_2^2,
\end{aligned}
\tag{3.35}
$$

de manera similar

$$
\int_0^{2\pi}\left(\int_0^{\pi}|g_n(x,r-x)-g_m(x,r-x)|dx\right)^2dr \le \pi\|g_n-g_m\|_2^2. \tag{3.36}
$$

En la tercera integral

$$\begin{aligned}
&\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} |z_m(x,r+x) - z_n(x,r+x)|^2 dxdr \\
&\quad \leq \iint_{\Omega} |p_n(r+2x) - p_m(r+2x) + p_m(r) - p_n(r) + w_n(x,r+x) - w_m(x,r+x)|^2 dxdr \\
&\quad \leq 2\iint_{\Omega} |p_n(r+2x) - p_m(r+2x)|^2 dxdr + 4\iint_{\Omega} |p_n(r) - p_m(r)|^2 dxdr \\
&\quad + 4\iint_{\Omega} |w_n(x,r+x) - w_m(x,r+x)|^2 dxdr \\
&\quad \leq 8\pi\|p_n - p_m\|_2^2 + 4\|w_n - w_m\|_2^2,
\end{aligned} \tag{3.37}$$

de igual manera

$$\begin{aligned}
&\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} |z_m(x,r-x) - z_n(x,r-x)|^2 dxdr \\
&\quad \leq 8\pi\|p_n - p_m\|_2^2 + 4\|w_n - w_m\|_2^2.
\end{aligned} \tag{3.38}$$

De (3.34), (3.35), (3.36), (3.37) y (3.38) llegamos a

$$\begin{aligned}
(\pi\tau)^2\|p_n - p_m\|_2^2 &\leq 2\pi\|g_n - g_m\|_2^2 \\
&+ \frac{3\pi\tau^2}{128}\left(8\pi\|p_n - p_m\|_2^2 + 4\|w_n - w_m\|_2^2\right) \\
&\leq 2\pi\|g_n - g_m\|_2^2 + \frac{3\pi\tau^2}{32}\|w_n - w_m\|_2^2 \\
&+ \frac{\pi^2\tau^2}{4}\|p_n - p_m\|_2^2,
\end{aligned} \tag{3.39}$$

de esta forma

$$\frac{3\pi^2\tau^2}{4}\|p_n - p_m\|_2^2 \leq 2\pi\|g_n - g_m\|_2^2 + \frac{3\pi\tau^2}{32}\|w_n - w_m\|_2^2 \tag{3.40}$$

Como $\{g_n\}$ y $\{w_n\}$ convergen en L^2, entonces $\{p_n\}$ es Cauchy en $L^2[0,2\pi]$ y por tanto $\{v_n\}$ converge en L^2.

Resumiendo, hemos visto que existe una sucesión $\{z_n\}$ tal que cada $z_n = v_n + w_n$ es solución débil de la ecuación $\Box z_n + \tau z_n + h(u_n) - g_n(x,t) = 0$ (ecuación (3.11)). Además, demostramos que para $|c|$ suficientemente grande las sucesiones $\{w_n\}$ y $\{v_n\}$ convergen en L^2. Sean $\mathbf{w}$ y $\mathbf{v}$ tales que $w_n \to \mathbf{w}$ y $v_n \to \mathbf{v}$ en L^2, entonces podemos suponer que $\{w_n\}$ y $\{v_n\}$ también convergen en casi toda parte y casi uniformemente a $\mathbf{w}$ y $\mathbf{v}$.

Veamos que $\mathbf{z} = \mathbf{v} + \mathbf{w}$ es solución débil de la ecuación

$$\Box z + \tau z + h(z + c\varphi) = 0, \tag{3.41}$$

donde φ es solución no plana de (3.6).

De (1.4) y (3.11) tenemos

$$\int_\Omega ((w_n)_t\hat{y}_t - (w_n)_x\hat{y}_x - (\tau z_n + h(z_n + c\varphi) - g_n(x,t))(\hat{v} + \hat{y}))\,dxdt = 0,$$

para toda $\hat{v} + \hat{y} \in N \oplus Y$.

Fijando $\hat{v} + \hat{y} \in N \oplus Y$, teniendo en cuenta la convergencia de las sucesiones $\{z_n\}$ y $\{g_n\}$, así como la continuidad de h, y aplicando el Teorema de convergencia dominada, tenemos que

$$\begin{aligned} 0 &= \lim_{n\to\infty} \int_\Omega ((w_n)_t\hat{y}_t - (w_n)_x\hat{y}_x - (\tau z_n + h(z_n + c\varphi) - g_n(x,t))(\hat{v} + \hat{y}))\,dxdt \\ &= \int_\Omega ((\mathbf{w}_t\hat{y}_t - \mathbf{w}_x\hat{y}_x) - (\tau\mathbf{z} + h(\mathbf{z} + c\varphi))(\hat{v} + \hat{y}))\,dxdt \end{aligned} \tag{3.42}$$

Es decir, $\mathbf{z}$ es solución débil de la ecuación (3.41). Concluyendo así, la demostración del Teorema 4 cuando $f = cq \in L^2(\Omega)$.

3.4. El caso L^p, para $p > 2$

Finalmente consideramos el caso cuando $q \in L^p(\Omega)$ con $p > 2$. Como $f \in L^p(\Omega)$, $f \in L^2(\Omega)$. Luego, existe $u \in N \oplus Y$ solución del problema (3.1). Demostraremos que $u \in L^p(\Omega)$.

Sea $q = q_1 + q_2$, donde $q_1 \in N$ y $q_2 \in N^\perp$, y sea

$$z(r) = \int_0^\pi q(x, r-x)dx - \int_0^\pi q(x, r+x)dx.$$

Veamos que $z \in L^p[0, 2\pi]$,

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} |z(r)|^p dr &= \int_0^{2\pi} \left| \int_0^\pi q(x, r-x)dx - \int_0^\pi q(x, r+x)dx \right|^p dr \\ &\leq 2^p \int_0^{2\pi} \left| \int_0^\pi q(x, r-x)dx \right|^p dr \\ &\quad + 2^p \int_0^{2\pi} \left| \int_0^\pi q(x, r+x)dx \right|^p dr \\ &\leq 2^p \pi^{p-1} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi |q(x, r-x)|^p dxdr \\ &\quad + 2^p \pi^{p-1} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi |q(x, r+x)|^p dxdr \\ &\leq 2^{p+1}\pi^{p-1} \|q\|_{L^p}^p. \end{aligned} \tag{3.43}$$

Así, $z \in L^p[0, 2\pi]$.
Sea $\hat{q}(x,t) = \frac{1}{2\pi}(z(t+x) - z(t-x))$, claramente $\hat{q} \in L^p(\Omega)$. Veamos que $\hat{q} = \Pi_N(q)$, es decir que para todo $\phi \in N$ se cumple que

$$\int_\Omega q(x,t)\phi(x,t)dxdt = \int_\Omega \hat{q}(x,t)\phi(x,t)dxdt. \tag{3.44}$$

Como $\phi(x,t) = p(t+x) - p(t-x)$, entonces

$$\begin{aligned}
\int_\Omega q(x,t)\phi(x,t)dxdt &= \int_\Omega q(x,t)p(t+x)dxdt - \int_\Omega q(x,t)p(t-x)dxdt \\
&= \int_0^{2\pi}\int_0^\pi q(x,r-x)p(r)dxdr - \int_0^{2\pi}\int_0^\pi q(x,r+x)p(r)dxdr \\
&= \int_0^{2\pi} p(r)\int_0^\pi (q(x,r-x) - q(x,r+x))dxdr \\
&= \int_0^{2\pi} p(r)z(r)dr,
\end{aligned}$$

De igual manera

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega \hat{q}(x,t)\phi(x,t)dxdt = \frac{1}{2\pi}\int_\Omega (z(t+x) - z(t-x))(p(t+x) - p(t-x))dxdt \\
&= \frac{1}{2\pi}\left(\int_0^{2\pi}\int_0^\pi z(t+x)p(t+x)dxdt + \int_0^{2\pi}\int_0^\pi z(t-x)p(t-x)dxdt\right) \\
&= \frac{1}{2\pi}\left(\int_0^{2\pi}\int_0^\pi z(r)p(r)dxdr + \int_0^{2\pi}\int_0^\pi z(r)p(r)dxdr\right) \\
&= \int_0^{2\pi} p(r)z(r)dr.
\end{aligned}$$

Probando así que $\hat{q} = q_1 \in N$. De este resultado y de (3.43) concluimos que $q_1, q_2 \in L^p(\Omega)$.

Sea φ la solución de la ecuación (3.6) en $L^2(\Omega)$, $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$ con $\varphi_1 \in N$ y $\varphi_2 \in \mathbf{H^1}$. Como $\varphi_2 \in L^p$ y $\tau\varphi_1 = q_1 \in L^p$, entonces $\varphi \in L^p$.

Sea ahora, u solución de la ecuación $\Box(u) + \tau(u) + h(u + c\varphi) = 0$ en $L^2(\Omega)$, donde c es suficientemente grande (véase (3.41)), $u = v + w$ con $w \in \mathbf{H^1}$, $v \in N$ y $v(x,t) = \psi(t+x) - \psi(t-x)$. Por tanto $w \in L^p(\Omega)$. Veamos que $v \in L^p(\Omega)$.
Argumentando como en (3.22) tenemos que

$$\begin{aligned}
2\pi\tau\psi(r) = &\int_0^\pi h(u(x,r+x) + c\varphi(x,r+x))dx \\
&- \int_0^\pi h(u(x,r-x) + c\varphi(x,r-x))dx.
\end{aligned} \tag{3.45}$$

De (3.45) tenemos

$$
\begin{aligned}
(\pi\tau)^p \int_0^{2\pi} |\psi(r)|^p dr \leq & \int_0^{2\pi} \left| \int_0^{\pi} h(u(x, r+x) + c\varphi(x, r+x)) dx \right|^p dr \\
& + \int_0^{2\pi} \left| \int_0^{\pi} h(u(x, r-x) + c\varphi(x, r-x)) dx \right|^p dr,
\end{aligned}
$$

aplicando la desigualdad de Hölder en las integrales de la derecha y de (3.4) llegamos a

$$
\begin{aligned}
\pi\tau^p \int_0^{2\pi} |\psi(r)|^p dr \leq & \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} |h(u(x, r+x) + c\varphi(x, r+x))|^p dxdr \\
& + \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} |h(u(x, r-x) + c\varphi(x, r-x))|^p dxdr \\
& \leq \int_\Omega |M_\epsilon + \epsilon(u(x, r+x) + c\varphi(x, r+x))|^p dxdr \\
& + \int_\Omega |M_\epsilon + \epsilon(u(x, r-x) + c\varphi(x, r-x))|^p dxdr,
\end{aligned}
$$

entonces

$$
\begin{aligned}
2^{-2p}\tau^p\pi \int_0^{2\pi} |\psi(r)|^p dr \leq & \; 4\pi^2 M_\epsilon^p + 2c^p\epsilon^p\|\varphi\|_p^p + 2\epsilon^p\|w\|_p^p \\
& + \epsilon^p \int_\Omega |v(x, r+x)|^p dxdr + \epsilon^p \int_\Omega |v(x, r-x)|^p dxdr \\
& \leq 4\pi^2 M_\epsilon^p + 2c^p\epsilon^p\|\varphi\|_p^p + 2\epsilon^p\|w\|_p^p + 2^{p+2}\pi\epsilon^p \int_0^{2\pi} |\psi(r)|^p dr
\end{aligned}
$$

Tomando $\epsilon = \tau/64$ tenemos

$$
\frac{\tau^p}{2^{6p}} \int_0^{2\pi} |\psi(r)|^p dr \leq 4\pi M_\epsilon^p + \left(\frac{\tau}{64}\right)^p \left(c^p\|\varphi\|_p^p + \|w\|_p^p\right) \tag{3.46}
$$

Así, $\psi \in L^p[0, 2\pi]$ y por tanto $v \in L^p(\Omega)$, quedando demostrado el Teorema 4.

■

CAPÍTULO 4

Anexo 1

El objetivo de este anexo, es demostrar que las dos definiciones de *función no plana sobre características*, dadas en los preliminares (véase ..), son equivelentes.

Sea φ solución problema (3.6). $\varphi(x,t) = p(t+x) - p(t-x) + w(x,t)$, donde $w = \Pi_Y(\varphi)$, $w \in C^{1/2}$ y $p \in L^2[0, 2\pi]$.

Teorema 5. *Sea φ solución de* (3.6)*. Las afirmaciones siguientes son equivalentes:*

1. *φ no es identicamente cero en conjuntos de medida positiva sobre rectas características.*

2. *Dado $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $\mu\{x \in [0,\pi]; |\varphi(x, r \pm x)| < \delta\} < \epsilon$ para todo $r \in \mathbf{R}$.*

Demostración. Si la afirmación (1) se cumple y (2) no, existen $\eta > 0$ y una sucesión $\{r_n\} \subset [0, 2\pi]$ tal que

$$\mu(\{x \in [0,\pi]; |p(r_n) - p(r_n - 2x) + w(x, r_n - x)| \leq 1/n\}) \geq \eta.$$

Llamemos $A_n = \{x \in [0,\pi]; |p(r_n) - p(r_n - 2x) + w(x, r_n - x)| \leq 1/n\}$. Sin perdida de generalidad podemos asumir que $\{r_n\}$ converge a $\hat{r}$. Además, para todo natural n

$$\begin{aligned} |p(r_n - 2x) + w(x, r_n - x)| &\geq |p(r_n)| - |p(r_n) - p(r_n - 2x) + w(x, r_n - x)| \\ &\geq |p(r_n)| - \frac{1}{n}, \end{aligned}$$

entonces

$$\begin{aligned}
\eta|p(r_n)|^2 &= \int_{A_n} |p(r_n)|^2 dx \\
&\leq \int_{A_n} (|p(r_n - 2x) + w(x, r_n - x)| + 1/n)^2 dx \\
&\leq 2\int_{A_n} |p(r_n - 2x)|^2 dx + 4\int_{A_n} |w(x, r_n - x)|^2 dx + 4\int_{A_n} dx/n^2 \\
&\leq 4\big(\|p\|_2 + \eta\|w\|_\infty^2 + \eta/n^2\big),
\end{aligned}$$

es decir $\{p(r_n)\}$ es acotada. Por tanto podemos asumir que $\{p(r_n)\}$ converge. Sea $l = \lim_{n\to\infty} p(r_n)$.
Como $w \in C^{1/2}$ podemos asumir que $\{w(x, r_n - x)\}$ converge uniformemente a $w(x, \hat{r} - x)$. Para cada n, sea

$$a_n = \max_{x\in[0,\pi]} |p(r_n) - l + w(x, r_n - x) - w(x, \hat{r} - x)|,$$

así, $\{a_n\}$ es una sucesión de reales no negativos que converge a 0, podemos asumir que $\{a_n\}$ es decreciente.
Sea ahora $B_n = \{x \in [0, \pi]; |l - p(\hat{r} - 2x) + w(x, \hat{r} - x)| \leq a_n + 1/n\}$. Entonces, B_n es una sucesión decreciente de conjuntos medibles y $\lim_{n\to\infty} \mu(B_n) = \mu\left(\cap_{n=1}^{\infty} B_n\right)$.
Para $(x + (r_n - \hat{r})/2) \in A_n$ tenemos

$$\begin{aligned}
&|l - p(\hat{r} - 2x) + w(x, \hat{r} - x)| \leq |l - p(r_n) + w(x, \hat{r} - x) - w(x, r_n - x)| \\
&\quad + |p(r_n) - p(r_n - 2(x + (r_n - \hat{r})/2) + w(x, r_n - x)| \\
&\quad \leq a_n + 1/n,
\end{aligned}$$

es decir, la traslación $(r_n - \hat{r})/2$ de A_n está contenida en B_n. Como la medida de Lebesgue es invariante bajo traslación, $\mu(A_n) \geq \eta$. Por tanto, $\lim_{n\to\infty} \mu(B_n) \geq \eta$. De otra parte, por la afirmación (1),

$$0 = \mu(\{x \in [0, \pi]; \varphi(x, r - x) = 0\}) = \mu\left(\cap_{n=1}^{\infty} B_n\right) \geq \eta,$$

lo cual es contradictorio, demostrando que (1) implica (2).

Que (2) implica (1) se tiene usando nuevamente el hecho que la medida de la intersección de una familia decreciente de conjuntos medibles es el límite de sus medidas.

■

Conclusiones

En esta tesis hemos estudiado la existencia de solución para dos ecuaciones de onda no lineales y no monótonas. Más concretamente estudiamos:

1. Un problema de bifurcación imperfecta

$$\begin{aligned} &\Box u = \epsilon(u^{2k} + h(x,t) + R(x,t,u)) \\ &u(0,t) = u(\pi,t) = 0, \\ &u(x,t) = u(x,t+2\pi) \qquad x \in [0,\pi], \quad t \in \mathbf{R}, \end{aligned}$$

   donde k es un número entero positivo, h pertenece al complemento ortogonal del operador $\Box$ sujeto a la condición Dirichlet-periódica y R es una función continua que satisface condiciones adecuadas.

   Para el estudio de este problema definimos un operador L, el cual depende de h.

   - Demostramos que si L es inversible, para cada ϵ suficientemente pequeño existe solución continua del problema. Además esta solución es única.
   - Demostramos que los resultados encontrados por M. Berti y L. Biasco (véase [B-B-2006]) son un caso particular del nuestro.

2. Un problema asintóticamente lineal

$$\begin{aligned} &\Box u + \tau u + h(u) = f(x,t) \\ &u(0,t) = u(\pi,t) = 0, \\ &u(x,t) = u(x,t+2\pi) \qquad x \in [0,\pi], \quad t \in \mathbf{R}, \end{aligned}$$

   donde τ es un real positivo que no pertenece al espectro del operador $-\Box$, $f \in L^p(\Omega)$ y h es una función de clase C^1 que satisface condiciones adecuadas.

Para abordar este problema consideramos la ecuación auxiliar

$$\begin{aligned}
&\Box\varphi + \tau\varphi = q(x,t)\\
&\varphi(0,t) = \varphi(\pi,t) = 0,\\
&\varphi(x,t) = \varphi(x,t+2\pi) \qquad x \in [0,\pi], \quad t \in \mathbf{R},
\end{aligned}$$

donde $f(x,t) = cq(x,t)$.

- Demostramos existencia de solución en L^p, si c es suficientemente grande y si φ satisface la condición de ser no plana sobre características.

La técnica empleada en la Tesis se basa en el método de reducción de Liapunov-Schmidt. Para estudiar la solución de la ecuación en el núcleo, seguimos el método introducido por A. Castro y B. Preskill (véase [C-P-2010]), que consiste en estudiar la solución de una ecuación de integrales sobre características, equivalente a la ecuación de kernel.

Trabajo futuro

En esta parte hacemos algunos comentarios acerca de los problemas tratados y posibles temas para seguir desarrollando.

1. Con relación al problema de bifurcación imperfecta, se demostró la existencia y unicidad de soluciones continuas del problema, pero no hacemos mención a la regularidad, y este es un trabajo que se puede abordar más adelante.

2. En el problema asintóticamente lineal sería interesante hacer un estudio sobre la multiplicidad de soluciones para $f \in L^2$.

3. Además, en el problema asintóticamente lineal, estudiar la posibilidad de generalizar al caso L^p con $1 \leq p < 2$. Aquí, los resultados H. Hofer [H-1982] y M. Willem [W-1981] no aplican.

4. Con referencia al método introducido por A. Castro, descrito en la sección 1.5, sería interesante estudiar las *integrales sobre características* si el operador de onda no tiene coeficientes constantes.

5. Otro trabajo interesante es el de considerar los problemas hiperbólicos bidimensionales, considerando el caso radial.

Bibliografía

[B-C-1980] P. Bates and A. Castro, *Existence and uniqueness for a variational hyperbolic system without resonance,* Nonlinear Analysis TMA, Vol. 4, No. 6(1980), pp. 1151-1156.

[B-B-2006] M. Berti and L. Biasco, *Forced vibrations of wave equations with non-monotone nonlinearities.* Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non LinŽaire 23 (2006), no. 4, pp. 439–474.

[B-1983] H. Brézis, *Análisis funcional*, Alianza editorial, (1983).

[B-B-1998] H. Brézis and F. Browder, *Partial Differential Equations in the 20th Century*, Advances in Mathematics 135 (1998), pp. 76–144.

[B-N-1978] H. Brezis and L Nirenberg, *Characterizations of the ranges of some nonlinear operators and applications to boundary value problems,* Annali della Scuola Norm. Sup. di Pisa. (1978), pp. 225-236.

[B-S-2009] R. Brooks and K. Schmitt *The contraction mapping principle and some applications,* Electron. J. Diff. Eqns., Monograph 09, 2009, (90 pages).

[C-2005] A. Castro, *Semilinear equations with discrete spectrum*, Contemporary Mathematics, **357** (2005), pp. 1-16.

[C-C-1997] J. Caicedo and A. Castro, *A semilinear wave equation with derivative of nonlinearity containing multiple eigenvalues of infinite multiplicity,* Contemp. Math., 208, (1997) pp. 111-132.

[C-C-2009] J. Caicedo and A. Castro, *A semilinear wave equation with smooth data and no resonance having no continuous solution*, Discrete and Continuous Dynamical Systems, Vol. 24, No. 3 (2009), pp. 653-658.

[C-C-D-2011] J. Caicedo, A. Castro, and R. Duque, *Existence of solutions for a wave equation with non-monotone nonlinearity and a small parameter*, Milan J. Math., Vol. 79, No. 1 (2011), pp. 207-220.

[C-P-2010] A. Castro, and B. Preskill, *Existence of solutions for a semilinear wave equation with non-monotone nonlinearity*, Continuous and Discrete Dynamical Systems, Series A, Vol. 28, No. 2, (2010), 649-658.

[C-U-1988] A. Castro and S. Unsurangsie, *A semilinear wave equation with nonmonotone nonlinearity,* Pacific J. Math. 132 (1988), no. 2, pp. 215-225.

[D-1985] K. Deimling, *Nonlinear Functional Analysis,* Springer-Verlag Berlin Heidelberg (1985).

[F-1999] G. Folland, *Real Analysis,* John Wiley and Sons, Inc. (1999).

[H-1982] H. Hofer, *On the range of a wave operator with nonmonotone nonlinearity,* Math. Nachr. **106** (1982), pp. 327-340.

[J-1998] J. Jost, *Postmodern Analysis*, Universitex Springer, (1998).

[L-1969] H. Lovicarová, *Periodic solutions of a weakly wave equation in one dimension*,Czech. Math. Jour.,19,1969,324-342.

[M-1995] J. Mawhin, *Periodic solutions of some semilinear wave equations and systems: a survey,* Chaos, Solitons and Fractals 5 (1995), pp. 1651-1669.

[McK-1985] P. J. McKenna, *On solutions of a nonlinear wave equation when the ratio of the period to the length of the interval is irrational,* Proc. Amer. Math. Soc. 93 (1985), no. 1, pp. 59-64.

[R, 1971] P. H. Rabinowitz, *Time periodic solutions of nonlinear wave equations,* Manuscripta Math. 5 (1971), 165-194.

[R-1984] P. H. Rabinowitz, *Large amplitude time periodic solutions of a semilinear wave equation,* Comm. Pure Appl. Math. 37 (1984), no. 2, 189–206.

[W-1981] M. Willem, *Density of the range of potential operators,* Proc. Amer. Math. Soc. **83** (1981), no. 2, 341–344.

[W-Z-1977] R. Wheeden and A. Zygmund, *Measure and Integral. An Introduction to Real Analysis,* Marcel Dekker Inc. (1977).

Declaración

Me permito afirmar que he realizado la presente tesis de manera autónoma y con la única ayuda de los medios permitidos y no diferentes a los mencionados en la propia tesis. Todos los pasajes que se han tomado de manera textual o figurativa de textos publicados y no publicados, los he reconocido en el presente trabajo. Ninguna parte del presente trabajo se ha empleado en ningún otro tipo de tesis.

Bogotá, D.C., septiembre de 2011

(Rodrigo Duque B.)