



UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA

Una aplicación del Modelo Panel - VAR en Tiempo Continuo en Economía

Luis Alfonso Luna Espíndola

Universidad Nacional de Colombia
Facultad de Ciencias, Departamento de Estadística
Bogotá, Colombia
2023

Una aplicación del Modelo Panel - VAR en Tiempo Continuo en Economía

Luis Alfonso Luna Espíndola

Trabajo de grado presentado como requisito parcial para optar al título de:
Magister en Ciencias - Estadística

Directora:
Ph.D., Nancy Milena Hoyos

Línea de Investigación:
Series de tiempo

Universidad Nacional de Colombia
Facultad de Ciencias, Departamento de Estadística
Bogotá, Colombia
2023

“La explicación es obvia: *El jardín de senderos que se bifurcan* es una imagen incompleta, pero no falsa, del universo tal como lo concebía Ts’ui Pên. A diferencia de Newton y de Schopenhauer, su antepasado no creía en un tiempo uniforme, absoluto. Creía en infinitas series de tiempos, en una red creciente y vertiginosa de tiempos divergentes, convergentes y paralelos. Esa trama de tiempos que se aproximan, se bifurcan, se cortan o que secularmente se ignoran, abarca todas las posibilidades. No existimos en la mayoría de esos tiempos; en algunos existe usted y no yo; en otros, yo, no usted; en otros, los dos.”

Jorge Luis Borges

Resumen

Título: Una aplicación del Modelo Panel - VAR en Tiempo Continuo en Economía

Se presenta la metodología para estimar modelos Panel VAR (PVAR) en tiempo continuo. Esta técnica permite estimar e interpretar modelos independientemente del intervalo en el que son tomadas las observaciones y permite hacer análisis en cualquier periodo de tiempo. Se ilustra con un Panel VAR en tiempo continuo de la Masa Monetaria (M1) y las Reservas Internacionales (IR) de dos países de la Alianza del Pacífico: Colombia y Chile, usando como variable exógena común al precio internacional del petróleo (WTI).

Palabras clave: Series de tiempo, Tiempo Continuo, Econometría, VAR, PVAR.

JEL Classification: C32, C33, C59

Summary

Title: An application of the Continuous Time Panel VAR Model in Economics

The methodology for estimating Continuous Time Panel VAR (PVAR) models is presented. This technique allows for estimating and interpreting models regardless of the interval at which observations are taken and enables analysis in any time period. It is illustrated with a Continuous Time Panel VAR of the Money Supply (M1) and International Reserves (IR) of two countries in the Pacific Alliance: Colombia and Chile, using the international oil price (WTI) as a common exogenous variable.

Keywords: Time Series, Continuous Time, Econometrics, VAR, PVAR.

JEL Classification: C32, C33, C59

Contenido

Resumen	IV
Summary	V
1. Introducción	2
2. Objetivos	6
3. Metodología	7
4. Aplicación	15
5. Conclusiones	23
A. Anexo: Información adicional del componente aplicado	24
B. Anexo: Simulaciones	31
C. Anexo: Modelo sin restringir	34
Bibliografía	38

1. Introducción

Los fenómenos sociales, del comportamiento, biológicos y económicos cambian continuamente a través del tiempo. El nivel de atención de una persona, por ejemplo, aumenta y disminuye repetidamente durante el transcurso del día, de la misma manera, la producción industrial de un país presenta variaciones permanentemente. Estos cambios están presentes sin importar la escala de medición usada para calcularlos. Para ponerlo en otros términos: estos procesos evolucionan en *tiempo continuo*. A pesar que son muchos los fenómenos en ciencias económicas que evolucionan en tiempo continuo, la mayoría de datos disponibles para la investigación económica son tomados en tiempo discreto, es decir, representan el estado del proceso en el momento que se mide, son “fotografías” de la serie de tiempo subyacente.

Así, modelar los procesos económicos como procesos en tiempo continuo presenta varias ventajas respecto a la alternativa discreta tradicional. Por ejemplo, un modelo en tiempo continuo permite tener en cuenta directamente la interacción de las variables a lo largo del tiempo y no solamente en aquellos en los que se realizó la observación dado que las series de tiempo se miden en intervalos discretos (usualmente mensuales, trimestrales o anuales) [Bergstrom, 1996], sin embargo, los ajustes entre las series económicas se dan en intervalos más cortos que la medición de estas, conduciendo a que un modelo en tiempo discreto pase de largo estos fenómenos [Christiano and Eichenbaum, 1987].

Otra ventaja se encuentra en la representación e interpretación de los rezagos. Así como

las interacciones entre variables pueden darse en intervalos más cortos que la medición de las mismas, los efectos autorregresivos de algunas variables también pueden presentarse en una frecuencia más alta que la permitida por la medición de estas. Lo mismo aplica para las interacciones entre rezagos de las variables, todas estas medibles en tiempo continuo [Bergstrom, 1996].

De la misma manera, la forma de los modelos en tiempo continuo no depende de la periodicidad de las series [Voelkle and Oud, 2013]. Los modelos tradicionales de series de tiempo discreto son menos flexibles en este aspecto. Por ejemplo, si las observaciones mensuales de una serie de tiempo satisfacen un modelo autorregresivo (AR), puede darse el caso que al modelar la misma variable pero con una periodicidad trimestral encontremos que el modelo que mejor se ajusta es de medias móviles (MA). Dado que usualmente no puede elegirse la periodicidad de las series sino que se suele trabajar con datos dados (por ejemplo, por una entidad productora de información estadística), la dependencia de la forma funcional a la periodicidad de las mismas puede suponer problemas para el análisis y la comparación entre investigaciones.

Finalmente, algunos análisis posteriores al ajuste del modelo, tales como pronósticos o funciones impulso respuesta (IRF), están sujetos a la periodicidad en las que se midió las series. Por ejemplo, si se hace un IRF de unas series mensuales, este mostrará los efectos futuros de una serie sobre la otra en periodicidad mensual, cuando estos choques podrían darse con una frecuencia distinta a la dada por los datos [McCrorie and Chambers, 2006].

Así, son múltiples las ventajas que tiene usar un modelo en tiempo continuo respecto a los modelos tradicionales de series de tiempo discreto. Sin embargo, el desarrollo matemáti-

co de estos modelos resulta mucho más complejo que su contraparte discreta, esto debido a que es necesario usar ecuaciones diferenciales para el ajuste e interpretación del modelo [Bergstrom, 1984]. Si bien, dadas las ventajas expuestas anteriormente, el uso de modelos en tiempo continuo para el análisis de series de tiempo resulta adecuado para el análisis de variables macroeconómicas.

Uno de los modelos más usados en investigación económica es el de vectores autorregresivos (VAR), el cual asume en su enunciación más básica que una serie de tiempo puede explicarse por rezagos de otras series de tiempo y rezagos de sí misma. Sin embargo, esta clase de modelos se limitan a explicar relaciones dentro de un solo individuo, cuando en realidad muchos fenómenos económicos modernos son explicados no solo por sus vínculos nacionales, sino también por distintas interacciones con variables de otros países. De esta manera, resulta necesario plantear modelos más flexibles para el análisis de series de tiempo.

Con la integración económica mundial y el desarrollo y popularización de técnicas estadísticas para medir variables de naturaleza macroeconómica, encontramos que la interacción entre series de tiempo supranacionales es cada vez más común y debe ser tomada en cuenta para el adecuado análisis estadístico y económico [Canova and Ciccarelli, 2013]. Así, se plantea el modelo panel de vectores autorregresivos, Panel VAR (PVAR), el cual permite modelar las variables dentro de cada país así como su interdependencia con series de tiempo por fuera de este. Una de las diferencias fundamentales entre los modelos VAR y los modelos PVAR está en que estos últimos permiten analizar como los rezagos de una variable de interés (por ejemplo, la i -ésima serie de tiempo del j -ésimo país) dependen (i) de sí misma, (ii) de otras variables dentro del país y (iii) de variables de todos los demás $N - 1$ países [Koop and Korobilis, 2014]. Así, estos modelos resultan ideales para estudiar los choques

económicos y ver como estos se transmiten entre naciones.

De esta manera, este trabajo estimará un modelo Panel VAR en tiempo continuo con el propósito de estudiar las interdependencias de dos variables: la Masa Monetaria (M1) y las Reservas Internacionales (IR) de dos países de la Alianza del Pacífico: Colombia y Chile. Así mismo, esta metodología permitirá ver como un choque en el precio internacional del petróleo (WTI), el cual será tratado como exógeno, afecta a estas tres economías.

El desarrollo de este trabajo se realiza de la siguiente manera: en el capítulo 1 y 2, de manera respectiva, se presenta la introducción y los objetivos. El capítulo 3 desarrolla la metodología de Panel VAR en tiempo continuo. El capítulo 4 presenta los resultados producto de nuestra estimación. Finalmente, el capítulo 5 presenta las principales conclusiones y recomendaciones.

2. Objetivos

Objetivo general

Estimar un modelo Panel VAR en tiempo continuo para Colombia y Chile usando como variables endógenas la Masa Monetaria (M1) y las Reservas Internacionales (IR), y como variable exógena los precios internacionales del petróleo (WTI).

Objetivos específicos

- Encontrar los estimadores que relacionan la Masa Monetaria (M1) y las Reservas Internacionales (IR).
 - Autorregresivos.
 - Entre variables de un país.
 - Entre variables de los distintos países.
- Estimar la transmisión de un choque en los precios internacionales del petróleo en las economías de Colombia y Chile.

3. Metodología

Consideramos el siguiente modelo en tiempo continuo representado como una ecuación diferencial estocástica de primer orden

$$dy(t) = [Ay(t) + a] dt + \zeta(dt), \quad t > 0, \quad (3-1)$$

donde el vector $y(t) = (y_1(t)', y_2(t)', \dots, y_n(t)')$ contiene n subvectores $y_i(t)$ $i = 1, \dots, n$ de dimensión $g_i \times 1$, con n y g_i denotando respectivamente el número de unidades de corte transversal y el número de variables de la i -ésima unidad, A es una matriz de coeficientes, a es un vector de constantes y $\zeta(dt)$ es un vector de innovaciones de ruido blanco con matriz de varianzas y covarianzas Σdt .

La matriz \mathbf{A} se le suele llamar matriz de deriva (*drift matrix*) y contiene los auto efectos y los efectos cruzados, siendo estos equivalentes a los parámetros autorregresivos y de efectos cruzados del modelo Panel VAR en tiempo discreto. Sin embargo, a diferencia del modelo en tiempo discreto, la matriz autorregresiva \mathbf{A} no depende de la frecuencia de observación de los datos.

La ecuación (3-1) es un Panel VAR que permite modelar relaciones entre las variables con-

tenidas en y_t con las siguientes características: Primero, puede modelar la heterogeneidad de sección cruzada ya que el vector a y las matrices A y Σ pueden depender de i . Segundo, permite que los rezagos de todas las variables de todas las unidades transversales afecten a cada una de las variables contenidas en $y(t)$. Tercero, los términos de error pueden correlacionarse simultáneamente entre variables de una unidad de corte transversal específica y/o entre unidades.

Teniendo en cuenta que en la práctica las variables son observadas en intervalos de tiempo discreto, se requiere derivar un modelo en tiempo discreto para poder estimar los parámetros del sistema en tiempo continuo. Asumiendo observaciones discretas equidistantes observadas en $(0, h, 2h, \dots, Th(= \tau))$, con h , T and τ siendo el intervalo de muestreo, el número total de observaciones temporales y el lapso de los datos¹, respectivamente, el modelo de tiempo discreto exacto es derivado usando la solución del sistema (3-1) el cual, sujeto a la condición inicial $y(0) = y_0$, está dado por:

$$y(t) = e^{At}y(0) + (e^{At} - I)A^{-1}a + \int_0^t e^{A(t-r)}\zeta(dr), \quad t > 0, \quad (3-2)$$

donde para cualquier matriz cuadrada A , $e^A = \sum_{i=0}^{\infty} A^i/i!$ define la matriz exponencial.

Bergstrom (1984) mostró que el modelo discreto exacto correspondiente a (3-1) es

$$y_h = \Phi y(0) + \mu + \eta_h, \quad (3-3)$$

$$y_{th} = \Phi y_{th-h} + \mu + \eta_{th}, \quad t = 2, \dots, T, \quad (3-4)$$

¹Por ejemplo, para datos recolectados mensualmente en un periodo de tiempo de 30 años, $h = 1/12$, $T = 360$ and $\tau = 30$. Note que el intervalo de muestreo es uno dividido entre la frecuencia de observación de los datos y el lapso de los datos es el número de años para los cuales se tienen datos.

donde

$$\Phi = e^{Ah}, \quad (3-5)$$

$$\mu = (e^{Ah} - I)A^{-1}a, \quad (3-6)$$

$$e^{Ah} = \sum_{i=0}^{\infty} (Ah)^i / i!, \quad (3-7)$$

y el vector de errores de tiempo discreto, el cual es igual a

$$\eta_{th} = \int_{th-h}^{th} e^{(th-r)A} \zeta(dt), \quad (3-8)$$

satisface las siguientes propiedades

$$\begin{aligned} E(\eta_{th}'\eta_{th}) &= \Omega = \int_0^h e^{rA} \Sigma e^{rA'} dr, \\ &= \bar{z}'_{22} \bar{z}_{12} \end{aligned} \quad (3-9)$$

$$E(\eta_{sh}'\eta_{th}) = 0, s \neq t, \quad (3-10)$$

con \bar{z}'_{22} y \bar{z}_{12} siendo elementos de la matriz exponencial

$$\bar{Z} = \begin{pmatrix} \bar{Z}_{11} & \bar{Z}_{12} \\ 0 & \bar{Z}_{22} \end{pmatrix} = \exp \begin{pmatrix} -Ah & \Sigma h \\ 0 & A'h \end{pmatrix},$$

[Jewitt and Roderick McCrorie, 2005].

Así, para conectar el modelo en tiempo discreto y en tiempo continuo es necesario igualar las variables de (3-2) y (3-4) [Bergstrom, 1984, Voelkle et al., 2012]. Cuando se integra la ecuación diferencial estocástica de primer orden, estamos añadiendo todos los efectos infini-

tesimalmente pequeños, determinísticos y estocásticos, a las variables en $\mathbf{y}(t)$ en el tiempo t . Con datos discretos no interesa los efectos en intervalos de tiempo arbitrarios, en cambio se calcula los efectos en el intervalo $th - h$. Obtenemos así que las ecuaciones (3-2) y (3-4) son equivalentes, permitiendo igualar el modelo Panel VAR en tiempo discreto con la integral de la ecuación diferencial estocástica de primer orden.

Es importante mencionar que el modelo discreto exacto satisface exactamente los datos generados por el modelo en tiempo continuo, es decir no existe ningún error de discretización. Sin embargo, los parámetros del modelo en tiempo continuo estimados de esta manera no son directamente comparables con aquellos del modelo de tiempo discreto. Esto porque los rangos teóricos y las interpretaciones cambian de un modelo al otro. Los efectos autoregresivos estimados en la diagonal de la matriz \mathbf{A} tienen un rango de $-\infty$ a 0 , mientras su contraparte en tiempo discreto va de -1 a 1 . Los efectos cruzados, representados en \mathbf{A} por los coeficientes fuera de la diagonal, tienen rango de $-\infty$ a ∞ , similares a los coeficientes en tiempo discreto. De manera similar, los interceptos en tiempo continuo a tienen rango de $-\infty$ a ∞ , mientras que la matriz de varianzas y covarianzas en tiempo continuo tiene un rango de 0 a ∞ .

Identificación

Una complicación aparece cuando el modelo en tiempo continuo es estimado usando el modelo en tiempo discreto exacto. En (3-1) tenemos un problema de identificación dado que existen múltiples matrices que comparten el mismo exponencial de Φ . Estas matrices son *alias* de A , en el sentido que si tomaran el lugar de este en (3-1) generarían los mismos

datos discretos y equidistantes. Este problema ha sido estudiado entre otros por Phillips [Phillips, 1973], quien derivó una condición de rango para identificación, y por Hansen y Sargent [Hansen and Sargent, 1983], quienes mostraron que la matriz de covarianzas de los errores del modelo en tiempo discreto provee información de identificación adicional sobre la matriz autorregresiva de tiempo continuo A .

De esta manera, asumiendo normalidad, es necesario encontrar una condición necesaria y suficiente tal que el par $[A, \Sigma]$ sea identificable en $[\Phi, \Omega]$. Así, puede encontrarse una matriz Hamiltoniana M que permita trabajar con $[A, \Sigma]$ de manera conjunta [McCrorie, 2003], tal que

$$M = \begin{pmatrix} -A & \Sigma \\ 0 & A' \end{pmatrix}. \quad (3-11)$$

Entonces, siguiendo las propiedades de la exponencial matricial [Van Loan, 1978], puede encontrarse

$$e^{Mh} = \begin{pmatrix} \Phi^{-1} & \Phi^{-1}\Omega \\ 0 & \Phi' \end{pmatrix}. \quad (3-12)$$

Así, puede encontrarse una matriz \bar{Z} donde $[A, \Sigma]$ son plenamente identificables en $[\Phi, \Omega]$ [Jewitt and Roderick McCrorie, 2005]

$$\bar{Z} = \begin{pmatrix} \bar{z}_{11} & \bar{z}_{12} \\ 0 & \bar{z}_{22} \end{pmatrix} = \exp \begin{pmatrix} -Ah & \Sigma h \\ 0 & A'h \end{pmatrix} \quad (3-13)$$

Con \bar{z}'_{22} y \bar{z}_{12} siendo elementos de la matriz exponencial, tal que

$$\begin{aligned} E(\eta_{th}\eta'_{th}) &= \Omega = \int_0^h e^{rA}\Sigma e^{rA'} dr, \\ &= \bar{z}'_{22}\bar{z}_{12}. \end{aligned} \tag{3-14}$$

Estimación

Nuestro interés es estimar los parámetros del sistema en tiempo continuo (3-1) a partir del vector de series de tiempo y_{th} . Para este propósito definimos el vector de parámetros $\theta = (a', (\text{vec}A)', (\text{vech}\Sigma)')$ de dimensión $m \times 1$, donde $m = G + G^2 + G(G+1)/2$, $G = \sum_{i=1}^n g_i$ siendo el número de variables de todas las unidades de sección cruzada, vec siendo un operador que transforma una matriz en un vector columna y vech un operador que vectoriza solamente los elementos sobre y por debajo de la diagonal principal de una matriz.

Asumiendo que $\zeta(dt)$ es un vector de incrementos Brownianos, lo cual implica que η_{th} es un vector de procesos Gaussianos, el logaritmo de la función de verosimilitud para el modelo de tiempo discreto exacto dado en (3-3)-(3-4) es [Chambers et al., 2018, Jewitt and Roderick McCrorie, 2005]

$$\ln L(\Theta) = -\frac{TG}{2} \ln 2\pi - \frac{1}{2} \sum_{t=1}^T \ln |\Omega| - \frac{1}{2} \sum_{t=1}^T \eta'_{th} \Omega^{-1} \eta_{th}. \tag{3-15}$$

Las propiedades asintóticas de los estimadores obtenidos al minimizar (3-15) dependen de una serie de supuestos realizados sobre (3-1). Bergstrom (1983, 1984) provee una serie de condiciones que garantizan que el vector $\hat{\theta}$ que maximiza a (3-15) sea casi siempre consis-

tente y que $\sqrt{T}(\hat{\theta} - \theta)$ sea asintóticamente normal y eficiente en el sentido de Cramer [Bergstrom, 1983]. Estas condiciones incluyen la identificación de θ en el conjunto cerrado Θ sobre el que se está llevando a cabo la maximización, estacionariedad y ergodicidad de $y(t)$ y diferenciabilidad de las matrices autorregresivas y de varianzas y covarianzas de (3-1).

De esta manera, los estimadores explícitos de A y a pueden computarse como

$$\hat{A} = \frac{1}{h} \log \hat{\Phi} \quad (3-16)$$

$$\hat{a} = \hat{A}(e^{\hat{A}h} - I)^{-1} \hat{\mu}, \quad (3-17)$$

donde $\hat{\Phi}$ y $\hat{\mu}$ se obtienen al derivar (3-15), lo cual da

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \Phi} = \sum_{t=1}^T \left[\Omega^{-1} y_{th} y'_{th-h} - \Omega^{-1} \mu y'_{th-h} - \Omega^{-1} \Phi y_{th-h} y'_{th-h} \right], \quad (3-18)$$

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \mu} = \sum_{t=1}^T \left[\Omega^{-1} y_{th} - \Omega^{-1} \Phi y_{th-h} - \Omega^{-1} \mu \right]. \quad (3-19)$$

Igualando (3-18) y (3-19) a cero y resolviendo para $\hat{\Phi}$ y $\hat{\mu}$, encontramos

$$\hat{\Phi} = \left[\sum_{t=1}^T y_{th} y'_{th-h} - \sum_{t=1}^T \frac{y_{th}}{T} \sum_{t=1}^T y'_{th-h} \right] \left[\sum_{t=1}^T y_{th} y'_{th-h} - \sum_{t=1}^T \frac{y_{th}}{T} \sum_{t=1}^T y'_{th-h} \right]^{-1}, \quad (3-20)$$

$$\hat{\mu} = \sum_{t=1}^T \left[y_{th} - \hat{\Phi} y_{th-h} \right] / T. \quad (3-21)$$

De (3-9) nosotros vemos que no es posible derivar una expresión explícita para el estimador de Σ . Note que Ω es una función no-lineal compleja de Σ . La matriz de covarianzas Σ puede

ser estimada minimizando

$$\ln \bar{L} = \sum_{t=1}^T (e'_{th} e_{th} + 2 \ln |M|), \quad (3-22)$$

donde M es una matriz triangular inferior tal que $\Omega = MM'$, $e_{th} = M^{-1} \hat{\eta}_{th}$ y $\hat{\eta}_{th} = y_{th} - \hat{\Phi} y_{th-h} - \hat{\mu}$.

4. Aplicación

El precio del petróleo es muy relevante para explicar las fluctuaciones económicas en Latino América, especialmente en los países exportadores de crudo, sin embargo debido a la baja incidencia que tienen estos países en el mercado petrolero mundial, se considera como una variable exógena.

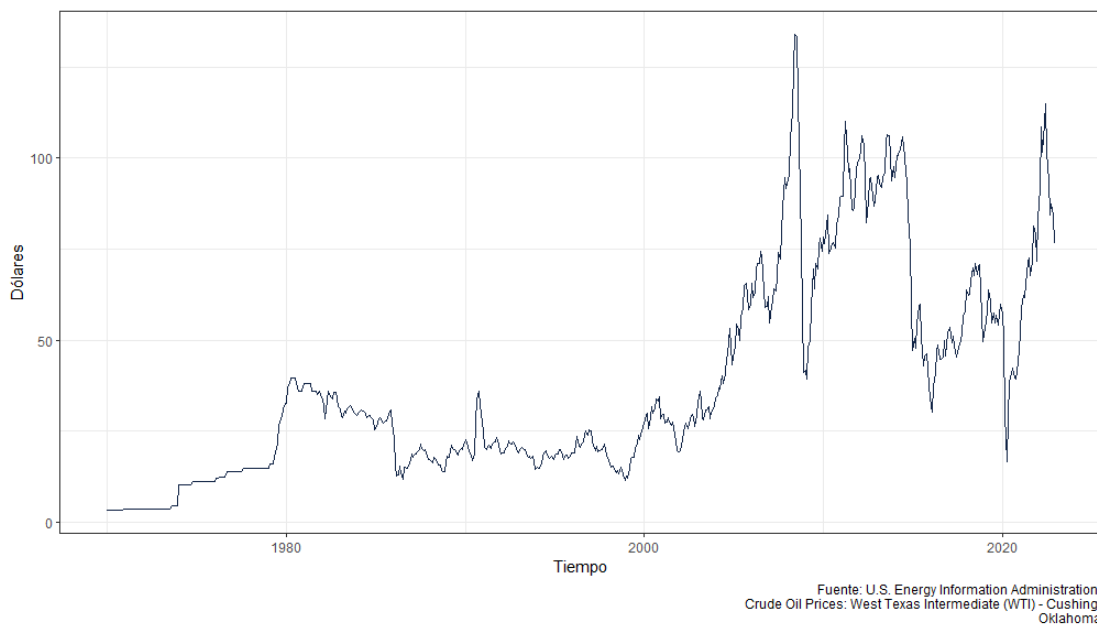


Figura 4-1.: Evolución Precios del Petróleo

En este capítulo miraremos el efecto que el precio del petróleo tiene sobre algunas varia-

bles macroeconómicas de dos países latinoamericanos (Colombia y Chile). Nos enfocamos en estas economías dado que comparten varias características estructurales, tal como un nivel de desarrollo similar, pertenencia a bloques económicos conjuntos, similitudes culturales y comercio común. Para este propósito, usaremos un modelo Panel VAR en tiempo continuo con una variable exógena común a las tres economías.

Dado que la variable WTI es exógena, se restringe los resultados del modelo para hacer explícita esta relación unidireccional. Así, añadimos las restricciones de identificación a la matriz A , imponiendo una fila de ceros a la última fila de esta, salvo el estimador que muestra el efecto autorregresivo de WTI.

Este trabajo se circunscribe a la literatura que ha estudiado los impactos de choques externos en variables macroeconómicas de economías latinoamericanas. Así, se ha mostrado como el impacto de choques económicos de Estados Unidos en Latino América se transmiten por el sector financiero [Canova, 2005]. Otros trabajos han mostrado el impacto de el precio de las materias primas en el ciclo económico [Gruss, 2014], así como el efecto en la posición fiscal [Medina, 2010]. Por otro lado, se ha mostrado como el precio del petróleo puede influir en la inversión [Céspedes and Velasco, 2012] y como estos efectos y su propagación son heterogéneos entre los países latinoamericanos [Gondo and Pérez, 2018].

Descripción de los datos

El modelo incluye una variable exógena a todos los países y un bloque de variables endógenas para 2 naciones de Latino América. La frecuencia de las observaciones es mensual y cubre el periodo de enero de 2000 a enero de 2019 para todas las variables incluyendo la exógena. Las

variables domésticas incluidas son: la Masa Monetaria (M1) y las Reservas Internacionales (IR), como variable exógena los precios internacionales del petróleo (WTI). WTI y M1, fueron descargados de la base de datos FRED de la Reserva Federal de St. Louis, por su parte, las IR se descargaron de las bases de datos de cada Banco Central. Se usa diferencias para trabajar con series temporales estacionarias.

Resultados

Así, obtenemos las siguientes estimaciones, errores estándar entre paréntesis¹.

$$\begin{aligned}
 & d \begin{pmatrix} IR_{Colombia} \\ M1_{Colombia} \\ IR_{Chile} \\ M1_{Chile} \\ WTI \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10.16 & 0.41 & -0.54 & 1.09 & -0.24 \\ (4.92) & (2.16) & (1.20) & (1.45) & (0.19) \\ 1.16 & -12.39 & -2.79 & 6.89 & -0.22 \\ (6.26) & (4.52) & (1.79) & (2.70) & (0.29) \\ 8.69 & 9.24 & -28.61 & -5.21 & 0.10 \\ (10.33) & (8.39) & (7.37) & (5.01) & (0.52) \\ -2.85 & 0.67 & 0.06 & -3.77 & -0.24 \\ (2.27) & (1.57) & (0.85) & (1.55) & (0.15) \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & -10.88 \\ (0) & (0) & (0) & (0) & (2.91) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} IR_{Colombia} \\ M1_{Colombia} \\ IR_{Chile} \\ M1_{Chile} \\ WTI \end{pmatrix} dt + \hat{\zeta}(dt) \\
 & \begin{pmatrix} 1.61 \\ (1.01) \\ 2.99 \\ (1.42) \\ 2.38 \\ (1.73) \\ 2.78 \\ (0.77) \\ 10.76 \\ (6.45) \end{pmatrix} \quad (4-1)
 \end{aligned}$$

¹Encontrados con Bootstrapping.

con

$$\hat{\Sigma} = \begin{pmatrix} 1.18 & 0.21 & 0.45 & 0.07 & 2.48 \\ 0.21 & 3.21 & 0.03 & 0.33 & -1.48 \\ 0.45 & 0.03 & 9.13 & 0.23 & 1.88 \\ 0.07 & 0.33 & 0.23 & 1.97 & -2.92 \\ 2.48 & -1.48 & 1.88 & -2.92 & 312.38 \end{pmatrix} \quad (4-2)$$

(C-2) puede presentarse también como una matriz de correlaciones

$$\hat{\rho} = \begin{pmatrix} 1 & 0.11 & 0.14 & 0.04 & 0.13 \\ 0.11 & 1 & 0.01 & 0.13 & -0.05 \\ 0.14 & 0.01 & 1 & 0.05 & 0.04 \\ 0.04 & 0.13 & 0.05 & 1 & -0.12 \\ 0.13 & -0.05 & 0.04 & -0.12 & 1 \end{pmatrix} \quad (4-3)$$

De la misma manera, usando los resultados de (3-5) y (3-6) podemos encontrar los parámetros del modelo en tiempo discreto (3-4).

$$\begin{pmatrix} IR_{Colombia,th} \\ M1_{Colombia,th} \\ IR_{Chile,th} \\ M1_{Chile,th} \\ WTI_{th} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.42 & 0.01 & -0.02 & 0.05 & -0.01 \\ 0 & 0.38 & -0.09 & 0.29 & -0.01 \\ 0.28 & 0.32 & -0.18 & -0.17 & 0 \\ -0.13 & 0.03 & 0 & 0.73 & -0.01 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} IR_{Colombia,th-h} \\ M1_{Colombia,th-h} \\ IR_{Chile,th-h} \\ M1_{Chile,th-h} \\ WTI_{th-h} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0.09 \\ 0.19 \\ 0.12 \\ 0.19 \\ 0.59 \end{pmatrix} + \hat{\eta}_{th} \quad (4-4)$$

Por (3-6) se conoce que Φ es una función de A y de h , por lo tanto puede usarse los resultados en (C-1) para analizar como las relaciones entre las variables y los rezagos cambian dependiendo el intervalo de tiempo entre las observaciones [Ryan et al., 2018].

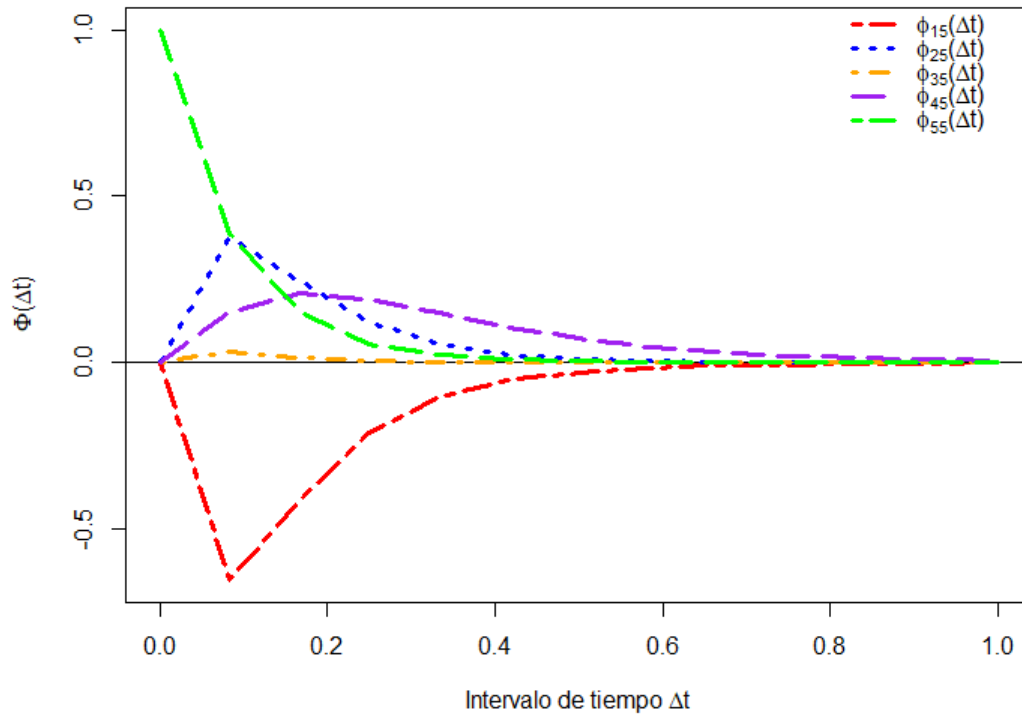


Figura 4-2.: Relación estimadores e intervalo de tiempo

Así, la relación entre el precio del petróleo y los rezagos de las demás variables nos muestran que las Reservas Internacionales colombianas, la Masa Monetaria colombiana y las reservas internacionales de Chile logran el máximo cuando $h = \frac{1}{12}$, mientras la masa monetaria chilena alcanza el máximo cuando $h = \frac{1}{6}$. Esto nos muestra que dado la alta frecuencia del precio del petróleo, es ideal hacer los análisis sobre observaciones mensuales ($h = \frac{1}{12}$) antes

que trimestrales o anuales, confirmando lo que autores como Canova (2005) y Gondo (2018) han manifestado.

5. Conclusiones

El análisis en tiempo continuo puede aplicarse a los modelos Panel VAR. El desarrollo de esta metodología es una extensión relativamente sencilla de lo ya desarrollado para otros modelos de series temporales, presentando las mismas ventajas de estos.

Nuestro modelo muestra que el precio del petróleo no es una variable influyente para explicar los coeficiente de las reservas internacionales y la masa monetaria de Colombia y Chile, evidenciando que el contagio no se da por esta vía. Así mismo, la estimación indica que todas nuestras series de tiempo son autorregresivas. Existe evidencia que la masa monetaria poco sirve para explicar las reservas.

Como trabajo futuro se recomienda estudiar las relaciones a largo plazo de estas variables debido a la posible existencia de cointegración entre estas.

A. Anexo: Información adicional del componente aplicado

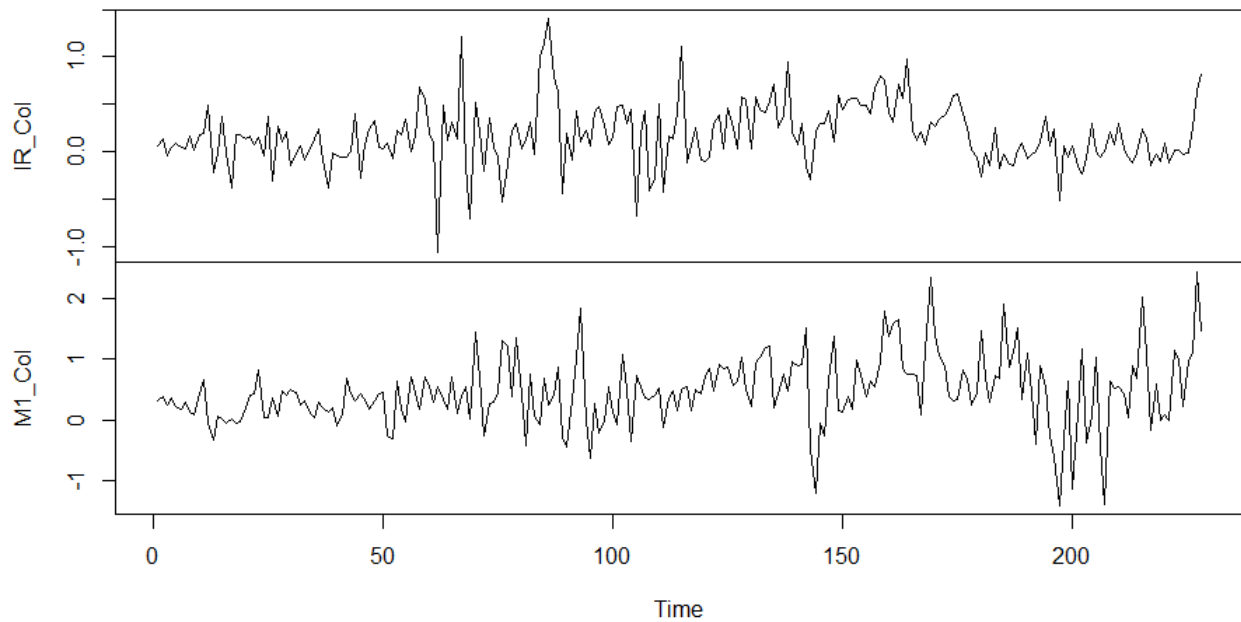


Figura A-1.: Reservas Internacionales y Masa Monetaria de Colombia

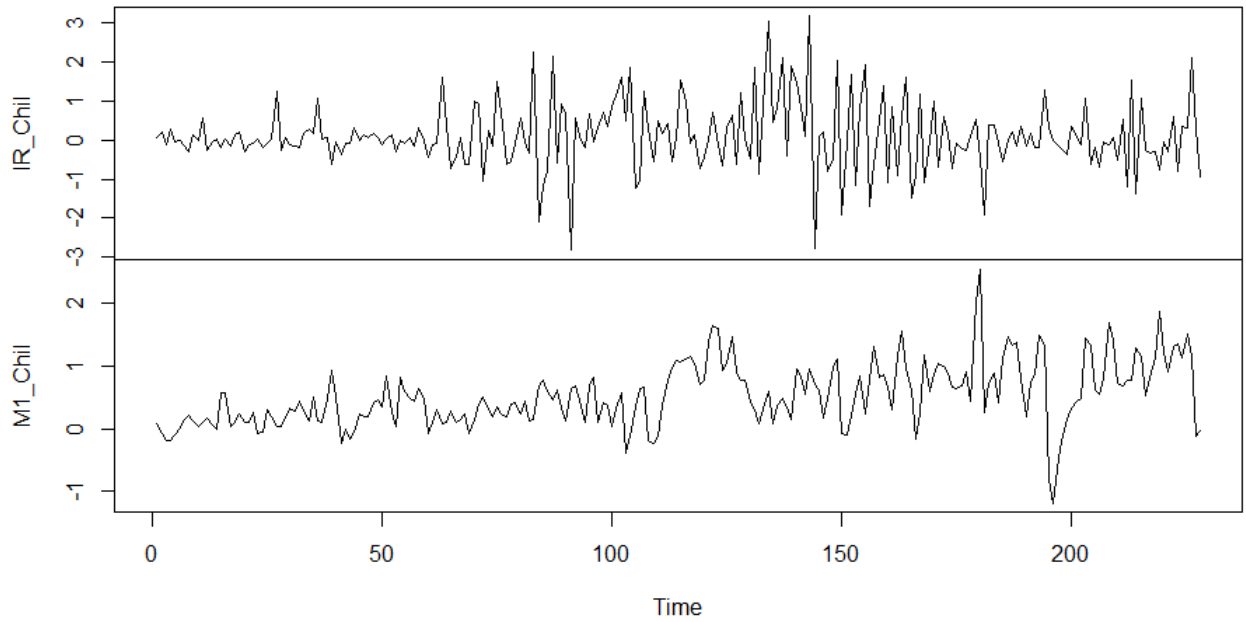


Figura A-2.: Reservas Internacionales y Masa Monetaria de Chile

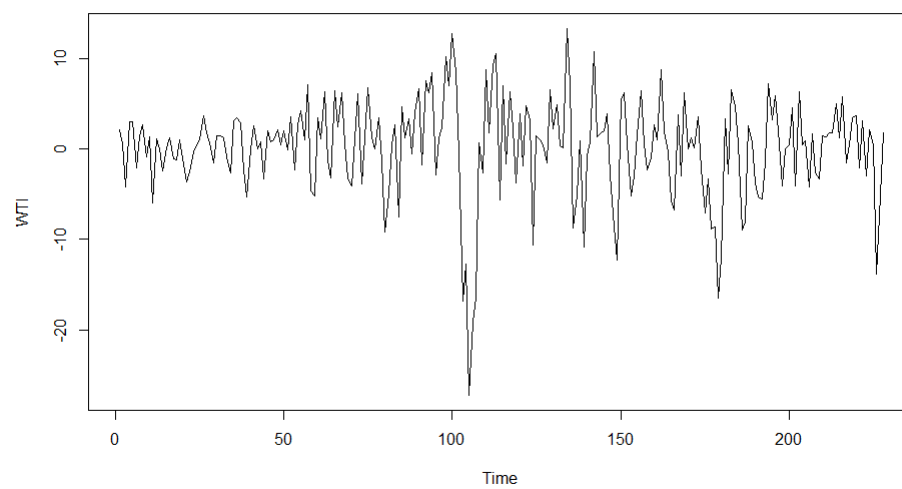


Figura A-3.: Precio internacional del Petróleo WTI

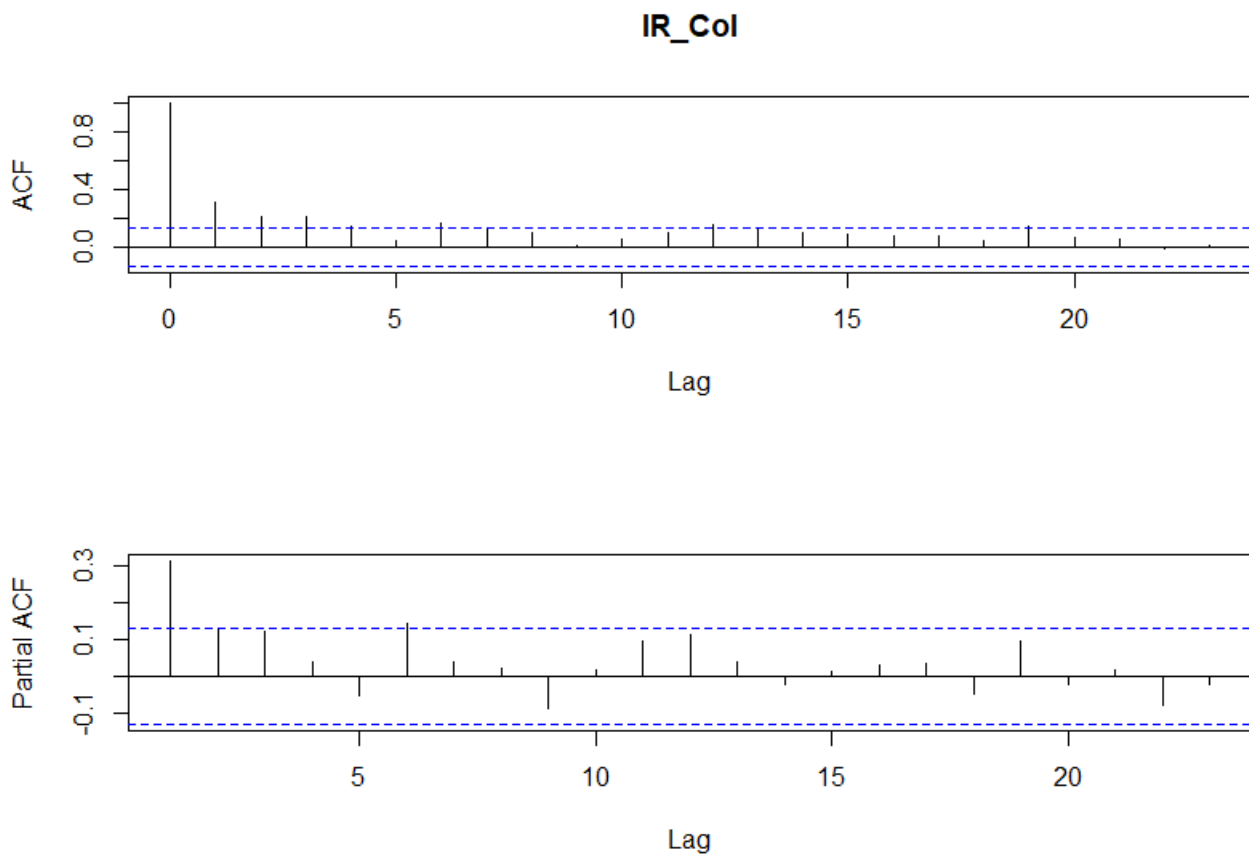


Figura A-4.: Correlograma Reservas Internacionales colombianas

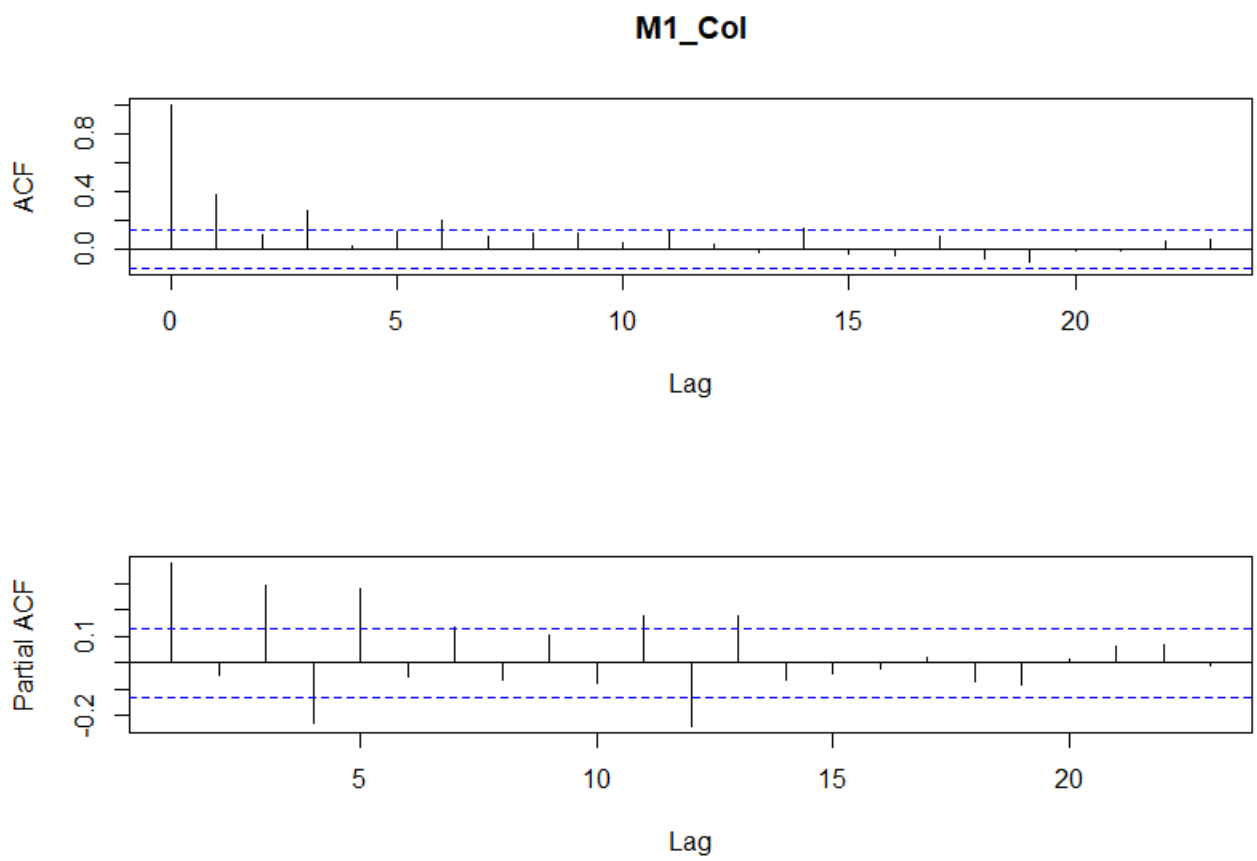


Figura A-5.: Correlograma Masa Monetaria colombiana

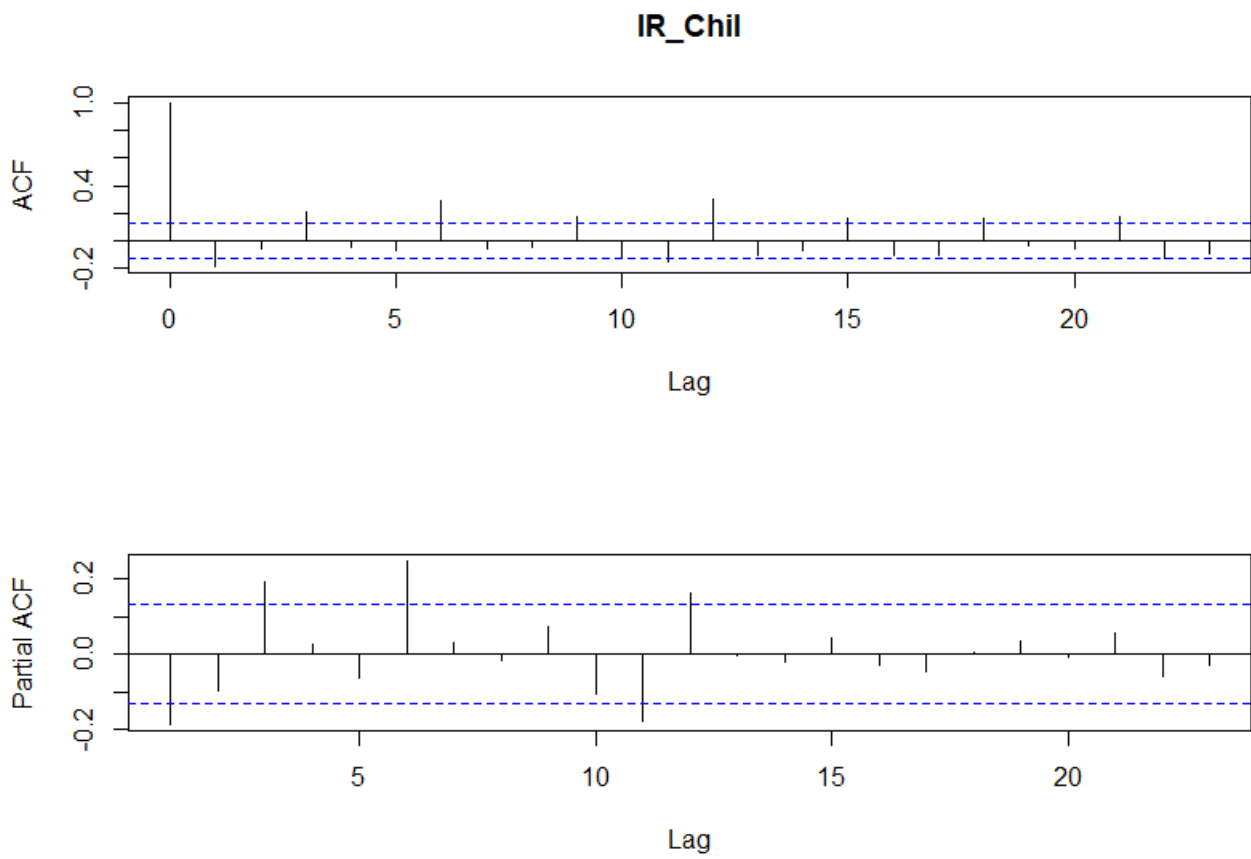


Figura A-6.: Correlograma Reservas Internacionales chilenas

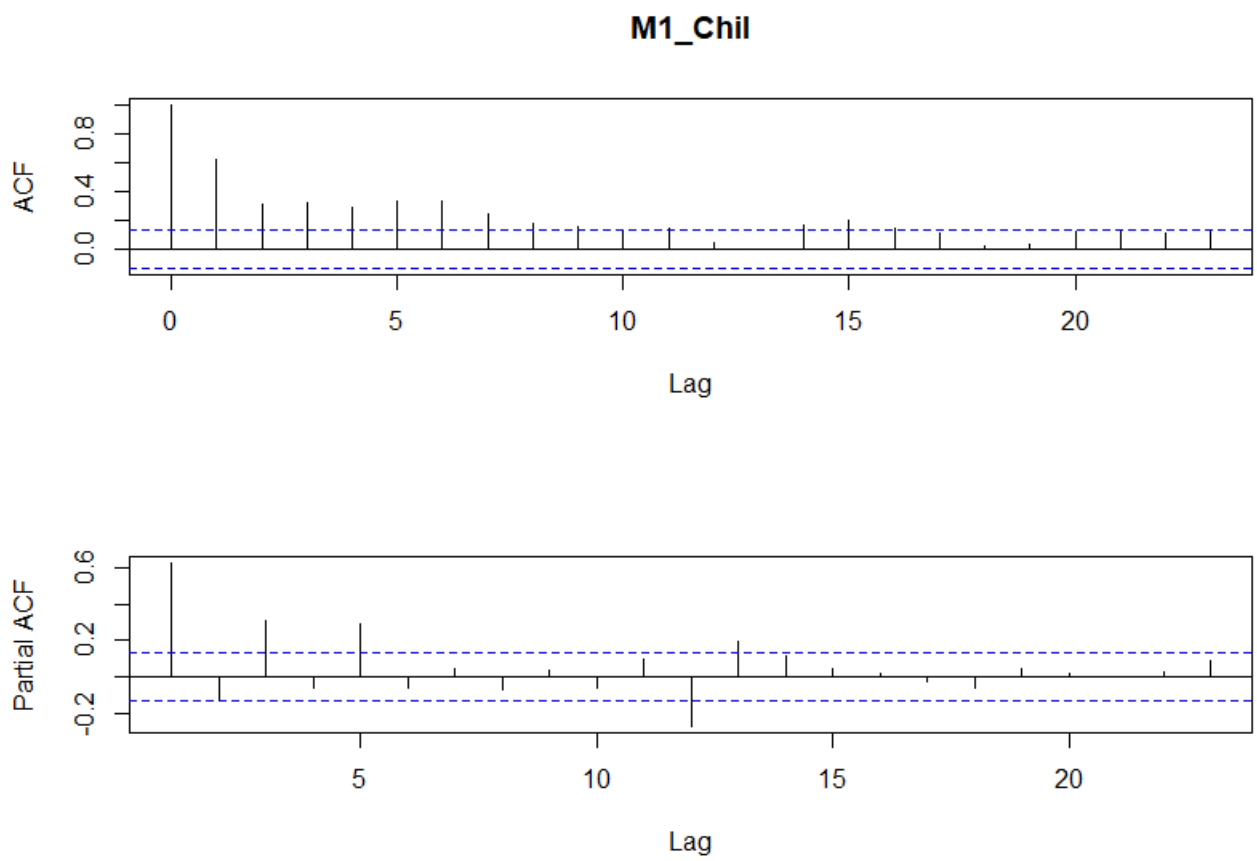


Figura A-7.: Correlograma Masa Monetaria chilena

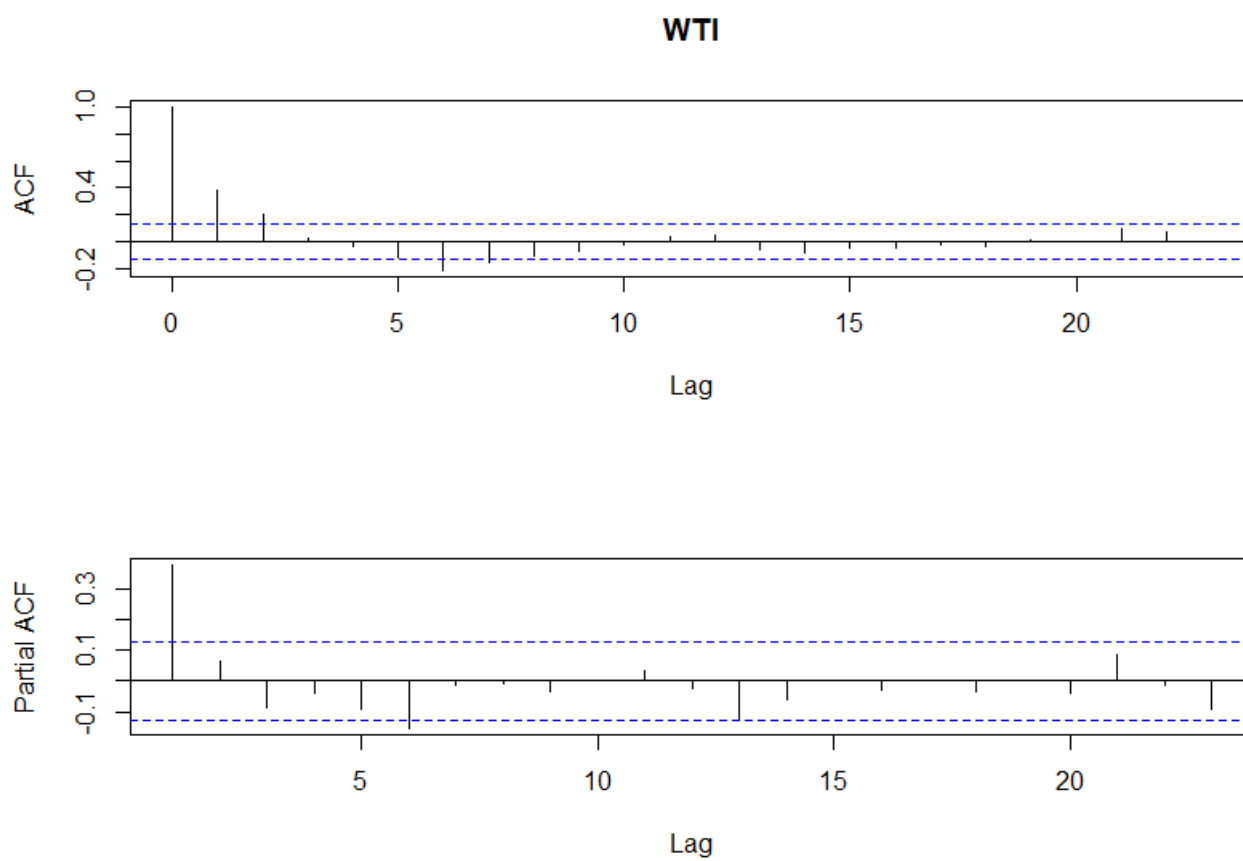


Figura A-8.: Correlograma WTI

B. Anexo: Simulaciones

Las Simulaciones de Monte Carlo para A y a se replicaron 10000 veces.

		Simulaciones				
	Valor Verdadero	T=50	T=100	T=300	T=500	T=1000
$A_{1,1}$	-3	-5.49	-4.04	-3.3	-3.18	-3.08
$A_{2,1}$	1	1.68	1.34	1.11	1.06	1.04
$A_{3,1}$	0	-0.22	-0.08	-0.02	-0.03	-0.01
$A_{4,1}$	0	0.29	0.18	0.05	0.02	0.01
$A_{5,1}$	0	0.11	0.07	0.05	0.03	0.02
$A_{1,2}$	2	3.53	2.72	2.24	2.15	2.07
$A_{2,2}$	-2.5	-4.62	-3.42	-2.76	-2.65	-2.58
$A_{3,2}$	0	0.85	0.4	0.13	0.09	0.04
$A_{4,2}$	0	0.35	0.15	0.05	0.04	0.01
$A_{5,2}$	0	-0.2	-0.13	-0.06	-0.04	-0.02
$A_{1,3}$	0	0.04	0	0	0.01	0
$A_{2,3}$	0	0.43	0.15	0.04	0.03	0.01
$A_{3,3}$	-2	-3.84	-2.74	-2.2	-2.1	-2.05
$A_{4,3}$	1.5	2.15	1.81	1.62	1.57	1.54
$A_{5,3}$	0	-0.43	-0.29	-0.1	-0.05	-0.03

$A_{1,4}$	0	-0.33	-0.14	-0.06	-0.04	-0.02
$A_{2,4}$	0	-0.32	-0.13	-0.04	-0.03	-0.01
$A_{3,4}$	3	3.51	3.25	3.1	3.05	3.02
$A_{4,4}$	-3	-6.56	-4.53	-3.45	-3.26	-3.13
$A_{5,4}$	0	0.14	0.1	0.05	0.02	0.02
$A_{1,5}$	2	2.42	2.21	2.07	2.04	2.02
$A_{2,5}$	3	4.1	3.55	3.18	3.11	3.06
$A_{3,5}$	1	0.86	0.91	0.96	0.98	0.99
$A_{4,5}$	1	1.22	1.06	1.02	1.02	1.01
$A_{5,5}$	-1	-3.33	-1.96	-1.26	-1.15	-1.07
a_1	0	2.68	1.53	0.28	0.04	-0.05
a_2	0	1.98	0.43	0.35	0.24	0.06
a_3	0	0.72	-0.54	0.04	-0.03	-0.04
a_4	0	-0.80	-1.22	0.25	0.02	0.05
a_5	0	3.21	-0.80	-0.48	-0.20	-0.03

Las Simulaciones de Monte Carlo para Σ se replicaron 300 veces.

		Simulaciones				
	Valor Verdadero	T=50	T=100	T=300	T=500	T=1000
$\Sigma_{1,1}$	1	1.39	1.26	1.2	1.09	1.05
$\Sigma_{2,1}$	0.4	0.17	0.34	0.5	0.43	0.41
$\Sigma_{3,1}$	0.5	0.67	0.54	0.52	0.54	0.55
$\Sigma_{4,1}$	0.3	0.62	0.58	0.52	0.37	0.32
$\Sigma_{5,1}$	0	0	0.03	0.03	0.02	-0.01
$\Sigma_{1,2}$	0.4	0.17	0.34	0.5	0.43	0.41

$\Sigma_{2,2}$	1	1.08	0.98	1.07	1	0.94
$\Sigma_{3,2}$	0	-0.04	-0.02	0.08	0.02	0.03
$\Sigma_{4,2}$	0.3	0.43	0.42	0.46	0.32	0.29
$\Sigma_{5,2}$	0	-0.05	-0.01	0.07	0.06	0
$\Sigma_{1,3}$	0.5	0.67	0.54	0.52	0.54	0.55
$\Sigma_{2,3}$	0	-0.04	-0.02	0.08	0.02	0.03
$\Sigma_{3,3}$	1	0.92	0.89	0.88	0.99	0.99
$\Sigma_{4,3}$	0.4	0.44	0.37	0.4	0.45	0.4
$\Sigma_{5,3}$	0	0.03	0.01	-0.08	-0.06	-0.06
$\Sigma_{1,4}$	0.3	0.62	0.58	0.52	0.37	0.32
$\Sigma_{2,4}$	0.3	0.43	0.42	0.46	0.32	0.29
$\Sigma_{3,4}$	0.4	0.44	0.37	0.4	0.45	0.4
$\Sigma_{4,4}$	1	1	1.21	1.18	1.11	1.03
$\Sigma_{5,4}$	0	0.01	0.13	0.1	0.04	0.02
$\Sigma_{1,5}$	0	0	0.03	0.03	0.02	-0.01
$\Sigma_{2,5}$	0	-0.05	-0.01	0.07	0.06	0
$\Sigma_{3,5}$	0	0.03	0.01	-0.08	-0.06	-0.06
$\Sigma_{4,5}$	0	0.01	0.13	0.1	0.04	0.02
$\Sigma_{5,5}$	1	1.07	0.89	0.97	1.02	0.99

C. Anexo: Modelo sin restringir

Errores estándar entre paréntesis¹.

¹Encontrados con Bootstrapping.

$$\begin{aligned}
 & d \begin{pmatrix} IR_{Colombia} \\ M1_{Colombia} \\ IR_{Chile} \\ M1_{Chile} \\ WTI \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -13.99 & 0.87 & -0.16 & 1.08 & -0.08 \\ (5.07) & (2.28) & (1.51) & (1.54) & (0.19) \\ 6.59 & -14.28 & -0.38 & 5.85 & -0.28 \\ (6.82) & (4.45) & (2.61) & (2.61) & (0.30) \\ 3.77 & 2.45 & -18.48 & -1.12 & 0.03 \\ (17.08) & (11.29) & (9.76) & (6.01) & (0.70) \\ -2.73 & 0.14 & -0.48 & -5.27 & 0.00 \\ (2.26) & (1.57) & (0.81) & (1.54) & (0.15) \\ -25.81 & 13.71 & 1.34 & 1.73 & -11.33 \\ (59.12) & (32.16) & (20.60) & (20.89) & (3.21) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} IR_{Colombia} \\ M1_{Colombia} \\ IR_{Chile} \\ M1_{Chile} \\ WTI \end{pmatrix} \\
 & \left[\begin{pmatrix} 1.58 \\ (1.01) \\ 2.5 \\ (1.42) \\ 0.79 \\ (2.18) \\ 3.24 \\ (0.77) \\ -1.75 \\ (13.121) \end{pmatrix} \right] dt + \hat{\zeta}(dt) \quad (C-1)
 \end{aligned}$$

con

$$\hat{\Sigma} = \begin{pmatrix} 1.15 & 0.22 & 0.41 & 0.03 & 2.33 \\ 0.22 & 3.12 & 0.08 & 0.29 & -1.44 \\ 0.41 & 0.08 & 9.94 & 0.13 & 1.27 \\ 0.03 & 0.29 & 0.13 & 1.86 & -2.92 \\ 2.33 & -1.44 & 1.27 & -2.92 & 307.74 \end{pmatrix} \quad (\text{C-2})$$

(C-2) puede presentarse también como una matriz de correlaciones

$$\hat{\rho} = \begin{bmatrix} 1 & 0.11 & 0.12 & 0.02 & 0.12 \\ 0.11 & 1 & 0.01 & 0.12 & -0.05 \\ 0.12 & 0.01 & 1 & 0.03 & 0.02 \\ 0.02 & 0.12 & 0.03 & 1 & -0.12 \\ 0.12 & -0.05 & 0.02 & -0.12 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{C-3})$$

De la misma manera, usando los resultados de (3-5) y (3-6) podemos encontrar los parámetros del modelo en tiempo discreto

(3-4).

$$\begin{pmatrix} IR_{Colombia,th} \\ M1_{Colombia,th} \\ IR_{Chile,th} \\ M1_{Chile,th} \\ WT I_{th} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.32 & 0.03 & -0.02 & 0.04 & -0.66 \\ 0.15 & 0.3 & -0.01 & 0.23 & 0.36 \\ 0.11 & 0.27 & -0.21 & -0.14 & 0.06 \\ -0.11 & 0.01 & -0.03 & 0.64 & 0.16 \\ 0 & -0.01 & 0.01 & 0 & 0.39 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} IR_{Colombia,th-h} \\ M1_{Colombia,th-h} \\ IR_{Chile,th-h} \\ M1_{Chile,th-h} \\ WT I_{th-h} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0.09 \\ 0.18 \\ 0.06 \\ 0.21 \\ -0.08 \end{pmatrix} + \hat{\eta}_{th} \quad (C-4)$$

Bibliografía

- [Bergstrom, 1984] Bergstrom, A. (1984). Chapter 20 Continuous time stochastic models and issues of aggregation over time. In *Handbook of Econometrics*, volume 2, pages 1145–1212. Elsevier.
- [Bergstrom, 1983] Bergstrom, A. R. (1983). Gaussian Estimation of Structural Parameters in Higher Order Continuous Time Dynamic Models. *Econometrica*, 51(1):117.
- [Bergstrom, 1996] Bergstrom, A. R. (1996). Survey of continuous time econometrics. In Barnett, W. A., Gandolfo, G., and Hillinger, C., editors, *Dynamic Disequilibrium Modeling*, pages 3–25. Cambridge University Press.
- [Canova, 2005] Canova, F. (2005). The transmission of US shocks to Latin America. *Journal of Applied Econometrics*, 20(2):229–251.
- [Canova and Ciccarelli, 2013] Canova, F. and Ciccarelli, M. (2013). Panel vector autoregressive models: a survey. ECB Working Paper 1507, European Central Bank (ECB), Frankfurt a. M.
- [Chambers et al., 2018] Chambers, M. J., McCrorie, J. R., and Thornton, M. A. (2018). Continuous Time Modelling Based on an Exact Discrete Time Representation. In van Montfort, K., Oud, J. H. L., and Voelkle, M. C., editors, *Continuous Time Modeling in*

- the Behavioral and Related Sciences*, pages 317–357. Springer International Publishing, Cham.
- [Christiano and Eichenbaum, 1987] Christiano, L. J. and Eichenbaum, M. (1987). Temporal aggregation and structural inference in macroeconomics. *Carnegie-Rochester Conference Series on Public Policy*, 26:63–130.
- [Céspedes and Velasco, 2012] Céspedes, L. F. and Velasco, A. (2012). Macroeconomic Performance During Commodity Price Booms and Busts. Technical Report w18569, National Bureau of Economic Research, Cambridge, MA.
- [Gondo and Pérez, 2018] Gondo, R. and Pérez, F. (2018). The Transmission of Exogenous Commodity and Oil Prices shocks to Latin America: A Panel VAR approach. *Working Paper series Banco Central de Reserva del Perú*, DT. N°. 2018(012).
- [Gruss, 2014] Gruss, B. (2014). After the Boom—Commodity Prices and Economic Growth in Latin America and the Caribbean. *IMF Working Paper*, 14(154).
- [Hansen and Sargent, 1983] Hansen, L. P. and Sargent, T. J. (1983). The dimensionality of the aliasing problem in models with rational spectral densities. 51(2):377.
- [Jewitt and Roderick McCrorie, 2005] Jewitt, G. and Roderick McCrorie, J. (2005). Computing estimates of continuous time macroeconometric models on the basis of discrete data. *Computational Statistics & Data Analysis*, 49(2):397–416.
- [Koop and Korobilis, 2014] Koop, G. and Korobilis, D. (2014). Model Uncertainty in Panel Vector Autoregressive Models. *SSRN Electronic Journal*.
- [McCrorie, 2003] McCrorie, J. R. (2003). The Problem of Aliasing in Identifying Finite Pa-

- parameter Continuous Time Stochastic Models. *Acta Applicandae Mathematicae*, 79(1/2):9–16.
- [McCrorie and Chambers, 2006] McCrorie, J. R. and Chambers, M. J. (2006). Granger causality and the sampling of economic processes. *Journal of Econometrics*, 132(2):311–336.
- [Medina, 2010] Medina, L. (2010). A Commodity Curse? The Dynamic Effects of Commodity Prices on Fiscal Performance in Latin America. *MPRA Paper*, 21690.
- [Phillips, 1973] Phillips, P. (1973). The problem of identification in finite parameter continuous time models. *Journal of Econometrics*, 1(4):351–362.
- [Ryan et al., 2018] Ryan, O., Kuiper, R. M., and Hamaker, E. L. (2018). A Continuous-Time Approach to Intensive Longitudinal Data: What, Why, and How? In van Montfort, K., Oud, J. H. L., and Voelkle, M. C., editors, *Continuous Time Modeling in the Behavioral and Related Sciences*, pages 27–54. Springer International Publishing, Cham.
- [Van Loan, 1978] Van Loan, C. (1978). Computing integrals involving the matrix exponential. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 23(3):395–404.
- [Voelkle and Oud, 2013] Voelkle, M. C. and Oud, J. H. L. (2013). Continuous time modeling with individually varying time intervals for oscillating and non-oscillating processes: Continuous time modelling. *British Journal of Mathematical and Statistical Psychology*, 66(1):103–126.
- [Voelkle et al., 2012] Voelkle, M. C., Oud, J. H. L., Davidov, E., and Schmidt, P. (2012). An SEM approach to continuous time modeling of panel data: Relating authoritarianism and anomia: Correction to Voelkle, Oud, Davidov, and Schmidt (2012). *Psychological Methods*, 17(3):384–384.