# TRANSFORMACIONES GEOMÉTRICAS DEL PLANO COMO HERRAMIENTAS PARA GENERAR FAMILIAS DE CÓNICAS

Claudia Leonor Niño Cubillos

23 de octubre de 2011

**TRANSFORMACIONES GEOMÉTRICAS DEL PLANO COMO HERRAMIENTAS PARA GENERAR FAMILIAS DE CÓNICAS**

Claudia Leonor Niño Cubillos

*Trabajo Final*
*MAESTRÍA EN ENSEÑANZA DE LAS CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES.*

Director

Profesor LORENZO ACOSTA G.

Universidad Nacional de Colombia
Facultad de Ciencias
Bogotá

# TRANSFORMACIONES GEOMÉTRICAS DEL PLANO COMO HERRAMIENTAS PARA GENERAR FAMILIAS DE CÓNICAS

Claudia Leonor Niño Cubillos

Universidad Nacional de Colombia
Facultad de Ciencias
Bogotá

# Índice general

**TRANSFORMACIONES GEOMÉTRICAS DEL PLANO COMO HERRAMIENTAS PARA GENERAR FAMILIAS DE CÓNICAS**

CLAUDIA LEONOR NIÑO CUBILLOS

MAESTRIA EN LA ENSEÑANZA DE LAS CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES

DIRECTOR

LORENZO ACOSTA G.

FACULTAD DE CIENCIAS

# Resumen

RESUMEN
Se muestra cómo pueden utilizarse los conocimientos de geometría, en particular las transformaciones del plano, para comprender de una mejor manera las ecuaciones de las cónicas. Basta estudiar a fondo solamente tres cónicas básicas: una circunferencia, una parábola y una hipérbola. Todas las demás cónicas cuyos ejes sean paralelos a los ejes de coordenadas se obtienen a partir de ellas por medio de homotecias, traslaciones, simetrías y semihomotecias.

Palabras claves: transformaciones del plano, traslaciones, homotecias, semihomotecias, simetrías, cónicas.

ABSTRACT

We show how to use the knowledge of geometry, in particular some transformations of the plane, in order to better understand the equations of conics. It is enough to study only three basic conics, a circle, a parabola and a hyperbola. All other conics whose axes are parallel to the coordinate axes are obtained from them by means of homotheties, translations, symmetries and semi-homotheties.

Keywords
Transformations of the plane, translations, homotheties, semi homotheties, symmetries, conics.

## DESCRIPCIÓN DEL PROBLEMA

En el grado décimo se estudia por lo general la geometría analítica y en particular las cónicas y sus ecuaciones. Cuando se aborda este tema generalmente se enfatiza en el aspecto algebraico, separándolo de lo geométrico. El estudiante trabaja mecánicamente una serie de ecuaciones, siguiendo unas reglas algorítmicas y aprendiéndose de memoria las fórmulas matemáticas sin tener aprehensión de la temática. El objetivo de este trabajo es mostrar cómo pueden utilizarse los conocimientos de geometría desarrollados en grados anteriores, como las transformaciones del plano, para simplificarle el trabajo al estudiante y de paso comprender de una mejor manera las ecuaciones mencionadas. La idea consiste en estudiar a fondo solamente tres cónicas básicas y obtener a partir de ellas todas las demás cónicas cuyos ejes sean paralelos a los ejes de coordenadas. Estas tres cónicas son la circunferencia de ecuación $x^2 + y^2 = 1$, la parábola de ecuación $y = x^2$ y la hipérbola cuya ecuación es $x^2 - y^2 = 1$. A partir de la circunferencia se generan las elipses mediante semihomotecias y traslaciones, a partir de la parábola dada se obtienen las demás parábolas mediante semihomotecias, simetrías y traslaciones. Igualmente se utilizan estas transformaciones del plano para generar todas las hipérbolas a partir de la hipérbola estudiada. Este método de trabajo reduce al mínimo lo que debe memorizarse y permite sacar el máximo provecho a la intuición de los estudiantes, además de establecer vínculos más estrechos entre las nociones algebraicas y las geométricas.

Agradecimientos al profesor Lorenzo Acosta por su apoyo, dedicación, comprensión y consejo, a mi madre, hermanos, esposo, familiares y amigos por su apoyo y comprensión.

# Introducción

En el grado décimo se estudia por lo general la geometría analítica y en particular las cónicas y sus ecuaciones. Cuando se aborda este tema generalmente se enfatiza en el aspecto algebraico, separándolo de lo geométrico. El estudiante trabaja mecánicamente una serie de ecuaciones, siguiendo unas reglas algorítmicas y aprendiéndose de memoria las fórmulas matemáticas sin tener aprehensión de la temática. El objetivo de este trabajo es mostrar cómo pueden utilizarse los conocimientos de geometría desarrollados en grados anteriores, como las transformaciones del plano, para simplificarle el trabajo al estudiante y de paso comprender de una mejor manera las ecuaciones mencionadas. La idea consiste en estudiar a fondo solamente tres cónicas básicas y obtener a partir de ellas todas las demás cónicas cuyos ejes sean paralelos a los ejes de coordenadas. Estas tres cónicas son la circunferencia de ecuación $x^2 + y^2 = 1$, la parábola de ecuación $y = x^2$ y la hipérbola cuya ecuación es $x^2 - y^2 = 1$. A partir de la circunferencia se generan las elipses mediante semihomotecias y traslaciones, a partir de la parábola dada se obtienen las demás parábolas mediante semihomotecias, simetrías y traslaciones. Igualmente se utilizan estas transformaciones del plano para generar todas las hipérbolas a partir de la hipérbola estudiada. Este método de trabajo reduce al mínimo lo que debe memorizarse y permite sacar el máximo provecho a la intuición de los estudiantes, además de establecer vínculos más estrechos entre las nociones algebraicas y las geométricas. La clave del trabajo consiste en relacionar cambios algebraicos en las ecuaciones de las curvas con cambios geométricos en su representación en el plano cartesiano, utilizando para ello las transformaciones del plano mencionadas.

En el primer capítulo se hace una breve reseña histórica del estudio de las cónicas desde el siglo IV antes de Cristo con los descubrimientos de Menecmo, hasta el siglo XVIII, pasando por Apolonio, Pappus, Galileo y Kepler entre otros. Mencionamos especialmente el desarrollo de la geometría analítica de Descartes y Fermat en el siglo XVII.

En el segundo capítulo se definen y estudian algunas transformaciones del plano. Se presentan estas transformaciones inicialmente en el plano sin coordenadas y posteriormente se describen con el uso de un sistema cartesiano de coordenadas lo que permite un tratamiento algebraico que es más sencillo de manejar. Estas transformaciones son las traslaciones, las homotecias, las simetrías ortogonales (o simetrías con respecto a una recta) y las que hemos llamado semihomotecias ortogonales. Para entender el desarrollo de este capítulo hemos supuesto que el lector tiene un conocimiento básico de geometría euclidiana plana, que conoce la definición y manejo de los vectores en el plano y que está familiarizado con los números reales, sus operaciones y su representación geométrica. Al final del capítulo se establece la relación que existe entre ciertos cambios en el predicado que define a un subconjunto del plano cartesiano y las transformaciones del plano mencionadas.

En el tercer capítulo se definen cada una de las cónicas como lugares geométricos del plano y se deducen las ecuaciones de las tres cónicas básicas de las que hablamos arriba. Posteriormente se utilizan los resultados del capítulo dos para generar todas las cónicas cuyos ejes son paralelos a los ejes de coordenadas.

Finalmente, el capítulo cuarto consiste en una serie de talleres diseñados para que los estudiantes de grado décimo se aproximen al método de estudio de la geometría analítica que se propone en este trabajo.

Es de notar que esta propuesta se enmarca dentro de los siguientes estándares del Ministerio de Educación Nacional, correspondientes al grado décimo:

1. Identificar características de localización de objetos geométricos en sistemas de representación cartesiana y otros.
2. Resolver problemas en los que se usen las propiedades geométricas de manera algebraica.
3. Usar argumentos geométricos para resolver y formular problemas en contextos matemáticos (y en otras ciencias).
4. Identificar las propiedades de curvas en los bordes obtenidos mediante cortes (longitudinal y transversal) en un cono y un cilindro.
5. Reconocer y describir curvas o lugares geométricos.

# Capítulo 1

# RESEÑA HISTÓRICA DE LAS CÓNICAS

En este capítulo se hará un recorrido histórico de las cónicas hasta los inicios de la geometría analítica.

Alrededor del siglo IV a.C, se admitían sólo dos maneras de definir curvas: por medio de composiciones de movimientos uniformes y como intersección de superficies geométricas conocidas: planos, esferas, cilindros, conos, poliedros, etc.

Menecmo (IV a.C) descubrió que las secciones planas de un cono servían para resolver el problema griego de la duplicación del cubo, Hipócrates de Chios intenta darle solución a este problema mediante la interpolación de dos medias proporcionales; Menecmo lo halla mediante la construcción de los puntos de intersección de las cónicas obtenidas: dos parábolas y una hipérbola como se muestra en la figura 1.1.

Menecmo descubrió también la elipse y la hipérbola seccionando conos acután gulos y obtusángulos respectivamente con planos perpendiculares a una de sus generatrices como se muestra en la figura 1.2. Por esto, en su época estas curvas recibían el nombre de oxitoma (sección del cono agudo), amblitoma (sección del cono obtuso) y ortotoma (sección del cono recto).

Apolonio ($262a.C - 190a.C$) estudió en su obra *Lugares planos* (reconstruida en el s.XVII) varios problemas sobre la determinación de lugares geométricos como los siguientes:

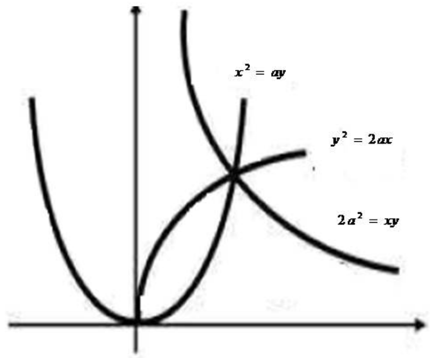



Figura 1.1: Duplicación del cubo $x^3 = 2a^3$

1. Lugar geométrico de los puntos tales que la diferencia entre los cuadrados de su distancia a dos puntos fijos es constante (una recta perpendicular a la que determina estos dos puntos).

2. Lugar geométrico de los puntos cuya razón de distancias a dos puntos fijos es una constante distinta de la unidad (una circunferencia).

Muchos de los escritos de Apolonio han desaparecido, sin embargo se ha conservado, casi completa, su obra *Las Cónicas*, gracias a una traducción al árabe realizada en el s.IX por Thabit Ibn-Qurra. Este tratado consta de ocho libros. Apolonio obtiene los tres tipos de curvas utilizando un cono circular cualquiera (no necesariamente de revolución) variando la inclinación del plano secante (ver figura 1.3). A partir de esta construcción descubre una propiedad plana que caracteriza a cada una de las secciones, es decir, una caracterización de estas curvas como lugares geométricos planos.

Apolonio le da el nombre a cada una de estas curvas (tomado de los pitagóricos que las utilizaban en la resolución de ecuaciones cuadráticas mediante la

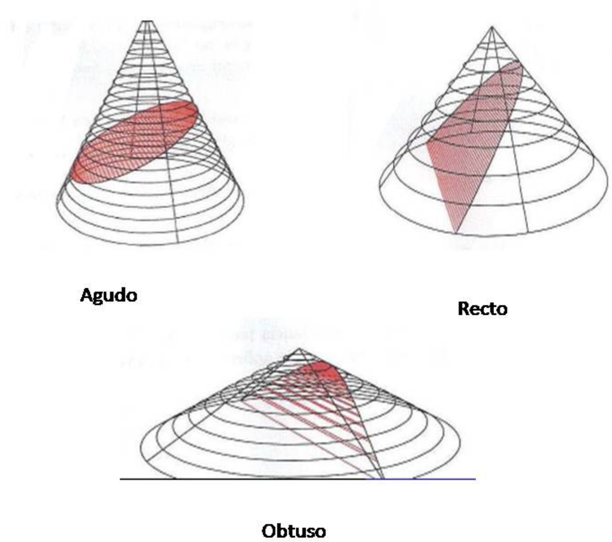



Figura 1.2: Cónicas de Menecmo

aplicación de áreas): *elipse* viene dado del término griego *elleipsis* que significa insuficiencia, *hipérbola* viene de *hipérbole* que significa exceso y *parábola* que viene de *parabole* que significa equiparación.

Pappus $(290 - 350)$ en su obra *Colección matemática* trata temas sobre lugares geométricos trabajados desde la época de Euclides. En esta obra se encuentra el primer tratamiento que conocemos de las propiedades foco-directriz de las secciones cónicas, que no aparecen explícitamente en la obra de Apolonio.

A Proclo $(410 - 485)$ se le atribuye la determinación del lugar geométrico generado por un punto fijo de un segmento cuando éste se mueve de manera que sus extremos se desplazan a lo largo de dos rectas que se cortan perpendicularmente (una elipse).

Werner $(1468-1522)$ estudia sólo la parábola y la hipérbola pues su interés se centra en la resolución de la duplicación del cubo y entre las pocas novedades que presenta con respecto al tratado de Apolonio, destaca un método para construir puntos de una parábola de parámetro $p$ con regla y compás.

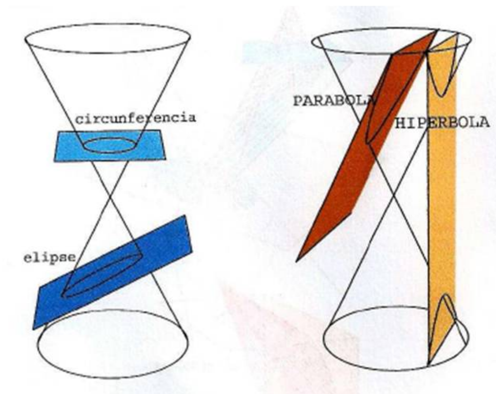



Figura 1.3: Cónicas de Apolonio

Galileo Galilei (1564−1642) descubre la trayectoria parabólica de un proyectil en ausencia de rozamiento.

Kepler (1571 - 1630) utiliza las elipses para enunciar sus leyes sobre el movimiento de los planetas: “Todos los planetas recorren órbitas elípticas teniendo al sol en uno de sus focos y el radio vector que une el sol con un planeta recorre áreas iguales en tiempos iguales”. En relación con las cónicas además de dar nombre al foco (como punto ocupado por el sol), desarrolla un principio de continuidad unificado de todas ellas. A partir de la sección cónica formada simplemente por dos rectas secantes, en las que los focos coinciden y están en el punto de intersección, podemos pasar gradualmente a una familia infinita de hipérbolas según uno de los focos se va alejando del otro. Cuando se va alejando infinitamente tenemos una parábola y al traspasar el punto del infinito y acercarse de nuevo por el otro lado, se va obteniendo una familia de elipses hasta que, cuando los focos coinciden de nuevo, aparece una circunferencia.

A comienzos del siglo XVII se concretan las primeras ideas sobre un nuevo método para enfocar los problemas geométricos, que dos siglos después recibirá el nombre de Geometría Analítica de René Descartes y Pierre de Fermat.

La contribución independiente de cada uno de ellos es el reconocimiento de que una ecuación dada con dos incógnitas puede considerarse como la determinación de una curva plana, con respecto a un sistema de coordenadas. Descartes (1596-1650) estaba más interesado por la resolución geométrica de las ecuaciones algebraicas con dos variables y encontró métodos para construir geométricamente los valores de una variable fijando la otra. Aplicando estos procedimientos a un problema de Pappus llegó a una ecuación de la forma $y^2 = ay - bxy + cx - dx^2$ que identifica una recta, una parábola, una elipse o una hipérbola según sean los coeficientes.

Fermat $(1601-1665)$ intentó reconstruir los lugares planos de Apolonio. Descubrió antes que Descartes el principio fundamental de la geometría analítica: siempre que en una ecuación aparezcan dos cantidades incógnitas, tenemos un lugar geométrico. Él demuestra que todas las ecuaciones de primer grado representan líneas rectas y las de segundo grado una cónica o un par de rectas. Fermat dejó claro que la ecuación es la expresión algebraica de las propiedades que caracterizan el lugar geométrico.

Durante la segunda mitad del siglo XVII y comienzos del siglo XVIII dos obras sobre cónicas ocupan un lugar destacado: El *Tractatus de sectionibus conicis* de Jhon Wallis (1617-1703) y los *Elementa curvarum linearun*, de Jan de Witt (1629-1672). Wallis deduce todas las propiedades de las cónicas a partir de las ecuaciones obtenidas de las relaciones de Apolonio, considerando estas ecuaciones como definiciones de secciones cónicas como lugar geométrico de los puntos que satisfacen una ecuación de segundo grado. Witt, mediante el uso sistemático de coordenadas, llega a reducir ciertas ecuaciones de segundo grado a su forma canónica, identificando la curva correspondiente. En la primera parte introduce la definición de las cónicas utilizando para todas ellas la razón de las distancias al foco y a la directriz (término introducido por él) tal como se hace actualmente en la parábola. Una cónica puede definirse como el lugar geométrico de los puntos del plano tales que el cociente entre sus distancias a un punto fijo, denominado un foco, y una línea recta, denominada directriz, es siempre el mismo. Cuando esta constante, llamada excentricidad, es menor que la unidad, la cónica es una elipse, cuando es igual una parábola y cuando es mayor una hipérbola.

# Capítulo 2

# TRANSFORMACIONES DEL PLANO

Un sub-conjunto de $A$ de $\mathbb{R}^2$ está determinado por un predicado $\varphi(x, y)$ que corresponde a la condición que deben cumplir las parejas ordenadas $(x, y)$ para estar en $A$. Si realizamos un cambio al predicado, el conjunto $A$ se modificará.

El propósito de este capítulo es describir el cambio geométrico del conjunto $A$ cuando se hacen cierto tipo de sustituciones en el predicado: por ejemplo cuando se remplaza $x$ por $x + a$ o $y$ por $\frac{y}{b}$. Estos cambios geométricos están relacionados con transformaciones del plano: traslaciones, homotecias, semi-homotecias y simetrías.

En las primeras secciones se definen estas trasformaciones utilizando vectores.

Más adelante hacemos notar que si se introduce un sistema cartesiano de coordenadas, la definición de estas transformaciones se hace más sencilla pues disponemos de herramientas algebraicas.

En la parte final del capítulo establecemos la relación entre las transformaciones del plano que hemos estudiado y los cambios geométricos mencionados.

## 2.1. Notación y preliminares

Supondremos, en el desarrollo de este capítulo, que el lector trae un conocimiento básico de geometría euclidiana plana, que sabe lo que son los vectores en el plano y cómo se pueden sumar y multiplicar por un escalar y que entiende los conceptos de función y de biyección. También supondremos que está familiarizado con la recta numérica.

Nuestro trabajo se desarrolla en un plano que llamaremos $\prod$ y que identificaremos con $\mathbb{R}^2$ cuando se introduzca un sistema cartesiano de coordenadas. Los puntos del plano los designaremos con letras latinas minúsculas, mientras que los sub-conjuntos de $\prod$ se designarán con letras latinas mayúsculas.

Utilizaremos, como es costumbre, letras minúsculas para designar las funciones.

Dados dos puntos $a$ y $b$ de $\prod$, notaremos $\overrightarrow{ab}$ al vector cuya dirección es la de la recta que pasa por $a$ y $b$, cuyo sentido es de $a$ hacia $b$ y cuya magnitud es la distancia entre $a$ y $b$.

También utilizaremos la notación $\overrightarrow{v}$ para designar un vector sin hacer mención explícita de un punto inicial y uno final.

Dado un número real $r$ y un vector $\overrightarrow{v}$, el vector $r\overrightarrow{v}$ es el vector que tiene la misma dirección de $\overrightarrow{v}$, su sentido es igual al de $\overrightarrow{v}$ si $r > 0$, opuesto a él si $r < 0$ y su magnitud es $\mid r \mid$ veces la de $\overrightarrow{v}$.

En adelante utilizaremos el siguiente resultado sin mencionarlo explícitamente:

**Teorema 2.1.** *Sea $\overrightarrow{ab}$ un vector en el plano $\prod$. Si $x$ es un punto de $\prod$ entonces existe un único punto $y$ en $\prod$ tal que $\overrightarrow{ab} = \overrightarrow{xy}$.*

Podemos ilustrar la demostración dividiéndola en dos casos:

Caso 1: $x$ no está en la recta que pasa por $a$ y $b$.

En este caso basta construir un paralelogramo como muestra la figura 2.1.

Caso 2: $x$ está en la recta que pasa por $a$ y $b$.

Considere un punto $z$ que no está en la recta que pasa por $a$ y $b$, y utilice el caso 1 para encontrar $w$ tal que $\overrightarrow{ab} = \overrightarrow{zw}$. Ahora utilice nuevamente el caso 1 para construir $y$ tal que $\overrightarrow{xy} = \overrightarrow{zw}$. De esta manera tenemos que $\overrightarrow{ab} = \overrightarrow{xy}$. (Ver figura 2.2)

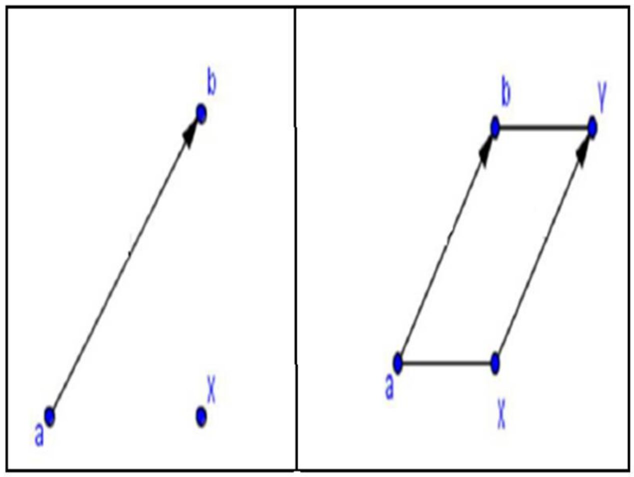



Figura 2.1: caso 1

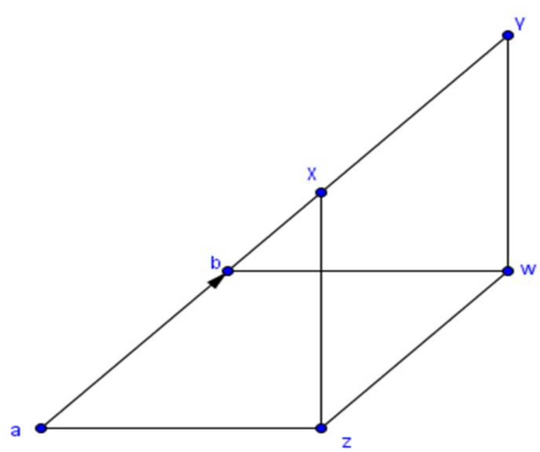



Figura 2.2:

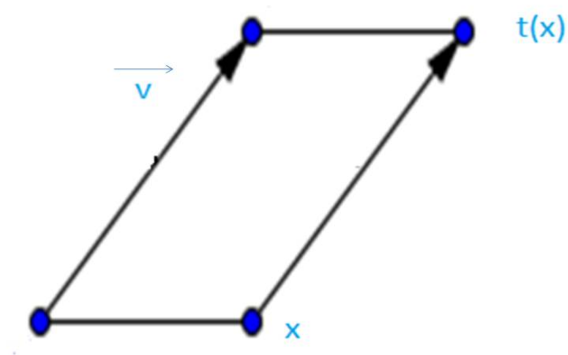



Figura 2.3: traslación

## 2.2. Traslaciones en el plano

Veremos en esta sección que cada vector determina una función de $\prod$ en $\prod$ y mostraremos ejemplos del efecto de este tipo de funciones sobre algunos sub-conjuntos de $\prod$.

Sea $\overrightarrow{ab}$ un vector en el plano.
Definimos una función $t : \prod \to \prod$, donde, para cada $x \in \prod$, $t(x)$ es el único punto de $\prod$ tal que $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{xt(x)}$. (Ver figura 2.3)
Este tipo de función recibe el nombre de traslación.

Las siguientes son propiedades básicas de una traslación $t$:

1. $t : \prod \to \prod$ es una biyección. En particular, si $x \neq z$ entonces $t(x) \neq t(z)$.

2. Si $L$ es una recta en el plano $\prod$ entonces $t(L)$ es también una recta y además $L$ y $t(L)$ son paralelas.

3. Si $t$ no es la función idéntica de $\prod$ entonces $t$ no tiene puntos fijos.

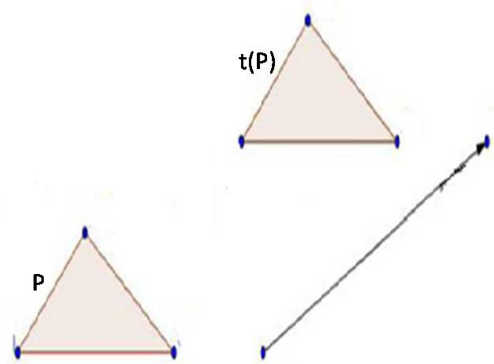



Figura 2.4: traslación

Es de notar que la compuesta de dos traslaciones es una traslación. En efecto si $t_1$ es la traslación determinada por $\overrightarrow{u}$ y $t_2$ es la traslación determinada por $\overrightarrow{v}$ entonces $t_1 \circ t_2$ es la traslación determinada por el vector $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}$.

Utilizando las propiedades básicas de las traslaciones, concluimos que la imagen de un polígono por una traslación es también un polígono y que para hallarla basta encontrar las imágenes de los vértices y unirlas mediante segmentos.

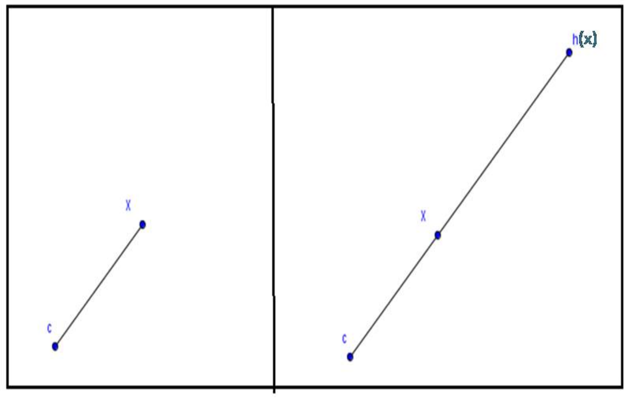
Ejemplo: Ver figura 2.4.

## 2.3. Homotecias en el plano

Describiremos en esta sección lo que son las homotecias y enunciaremos algunas de sus propiedades.

Dado un número real $r$ y un punto $c$ del plano, definimos una función $h : \prod \to \prod$, donde $h(x)$ es el único punto del plano tal que $r\overrightarrow{cx} = \overrightarrow{ch(x)}$. Como se ilustra en la figura 2.5.

Esta función se llama homotecia de centro c y razón r.




$2.5\ \overrightarrow{cx} = \overrightarrow{ch(x)}$

Figura 2.5:

Veamos unas propiedades básicas de las homotecias:

1. $h : \prod \to \prod$ es una biyección si $r \neq 0$. En particular si $x \neq z$ entonces $h(x) \neq h(z)$.

2. $h(x)$ está en la recta que pasa por $c$ y $x$.

3. $h(c) = c$.

4. Si $L$ es una recta en el plano entonces $h(L)$ también es una recta y además $L$ y $h(L)$ son paralelas.

5. Si $h$ no es la función idéntica de $\prod$ entonces el único punto fijo de $h$ es $c$.

Tenemos además las siguientes propiedades que se pueden consultar en [11]:

Al componer dos homotecias del mismo centro se obtiene otra homotecia con este centro, cuya razón es el producto de las razones de las homotecias iniciales.

Al componer dos homotecias de centros distintos, de razones $r$ y $r'$, se obtiene una homotecia de razón $rr'$ cuando $rr' > 1$, y una traslación si $rr' = 1$.

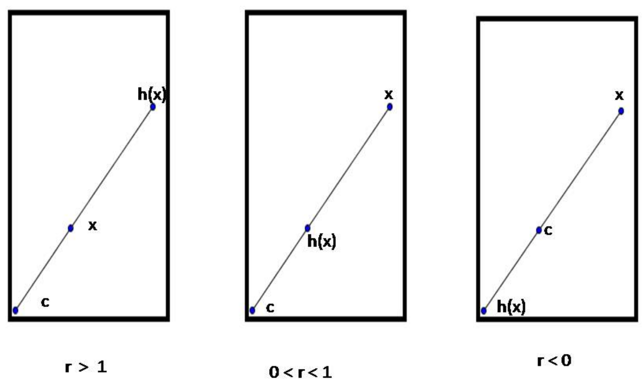



Figura 2.6:

Observemos además que si $h$ es una homotecia de centro $c$ y razón $r \neq 0$ se tiene que:

1. Si $r > 1$ entonces $x$ está entre $c$ y $h(x)$.

2. Si $0 < r < 1$ entonces $h(x)$ está entre $c$ y $x$.

3. Si $r < 0$ entonces $c$ está entre $x$ y $h(x)$.

Ilustramos esto en la figura 2.6.

Estas observaciones nos permiten concluir que si $A$ es un sub-conjunto acotado del plano entonces el tamaño de $h(A)$ es más grande que el de $A$ si $\mid r \mid > 1$ y es menor que el de $A$ si $\mid r \mid < 1$.

Además también se tiene que la imagen de un polígono es un polígono y para hallarla basta usar el mismo método que en las traslaciones.

Ejemplos: Ver figura 2.7.

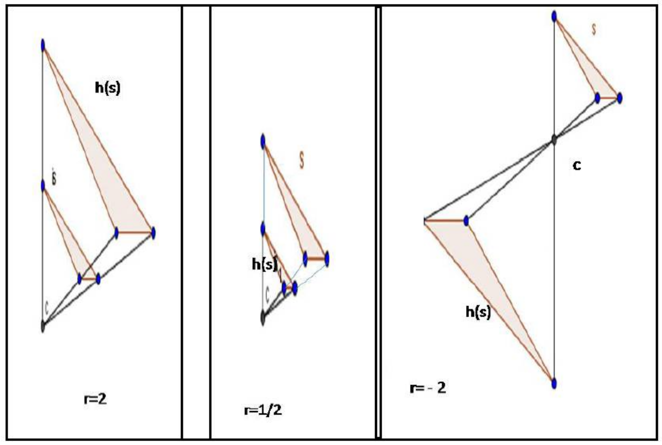



Figura 2.7: homotecia razón r

## 2.4. Simetrías con respecto a una recta

Utilizaremos nuevamente los vectores para definir otro tipo de transformación en el plano, esta vez asociada con una recta fija.

Sea $E$ una recta en el plano.

Definimos una función $s_E : \prod \to \prod$ de tal manera que $s_E(x)$ es el punto del plano que satisface lo siguiente:

1. $s_E(x)$ está en la recta perpendicular a $E$ que pasa por $x$.

2. Si $m$ es el punto de corte de $E$ con la recta perpendicular a $E$ que pasa por $x$ entonces $r\overrightarrow{xm} = \overrightarrow{ms_E(x)}$. (Ver figura 2.8)

Esta transformación del plano se llama simetría ortogonal a $E$ o simetría con respecto a la recta $E$.

Veamos algunas propiedades de $s_E$:

1. $s_E : \prod \to \prod$ es una biyección.
2. La distancia de $x$ a $E$ es igual a la distancia de $s_E(x)$ a E.
3. E es la mediatriz de $x$ y $s_E(x)$ cuando $x \neq s_E(x)$.

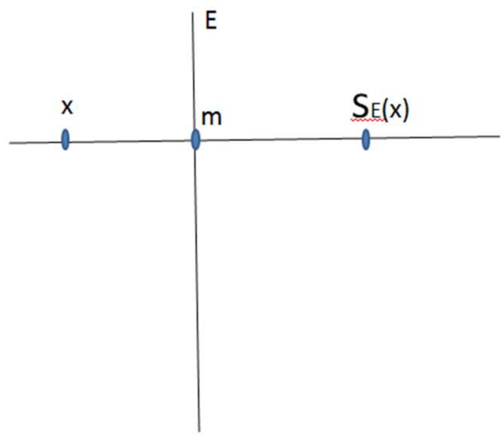



Figura 2.8:

4. $x = s_E(x)$ si y solo si $x \in E$.

5. Si $L$ es una recta en el plano, entonces $s_E(L)$ también es una recta.

6. $L$ es paralela a $s_E(L)$ si y solo si L es paralela a E o L es perpendicular a E.

Nuevamente podemos deducir que la imagen de un polígono es un polígono y que para hallarla basta hallar las imágenes de sus vértices.

Ejemplo: Ver figura 2.9.

## 2.5. Semi-homotecias ortogonales

Definiremos en esta sección otro tipo de transformaciones del plano que serán muy útiles en el capítulo 3.

Sean E una recta en el plano y r un número real.

Definimos una función $f : \prod \to \prod$ donde $f(x)$ es el punto del plano que satisface lo siguiente:

1. $f(x)$ está en la recta perpendicular a E que pasa por $x$.

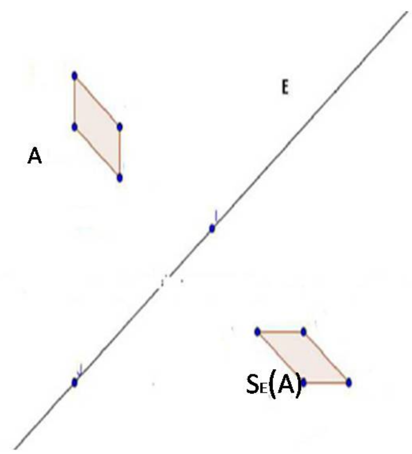



Figura 2.9:

2. Si $m$ es el punto de corte de la perpendicular a E que pasa por $x$ entonces $r\overrightarrow{mx} = \overrightarrow{mf(x)}$. (Ver figura 2.10)

Esta función la llamaremos semi-homotecia ortogonal a E de razón $r$.

Nótese que si $r = -1$ entonces esta semi-homotecia no es otra cosa que una simetría con respecto a E.

Algunas propiedades de $f$ son las siguientes:

1. $f : \prod \to \prod$ es una biyección si $r \neq 0$.

2. Si $r \neq 1$ entonces los únicos puntos fijos de $f$ son los puntos de E.

3. Si L es una recta entonces $f(L)$ también es una recta.

4. L es paralela a $f(L)$ si y solo si L es paralela a E o L es perpendicular a E.

Tendremos además que si $|r| > 1$ entonces $f(x)$ está más lejos de E que $x$. Y si $|r| < 1$ entonces $f(x)$ está más cerca de E que $x$.

Nuevamente tendremos que la imagen de un polígono es un polígono y para hallarla basta hallar la imagen de sus vértices.

Ejemplos:Ver figuras 2.11 y 2.12

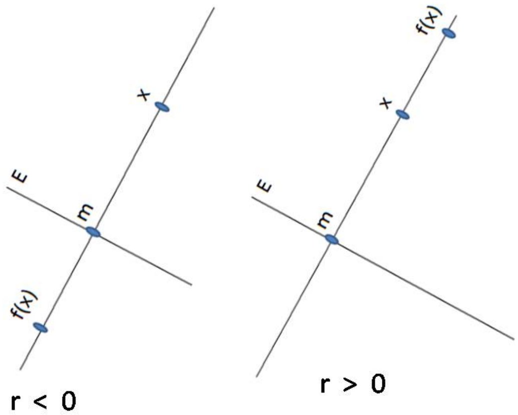



Figura 2.10:

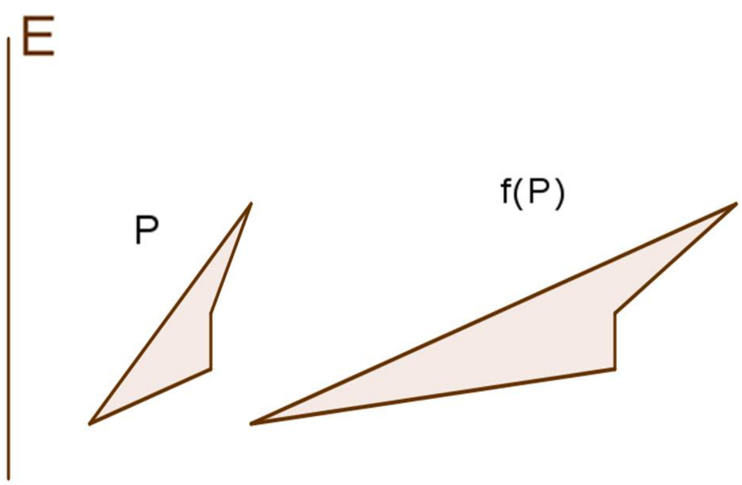



Figura 2.11: semihomotecia de razón 3

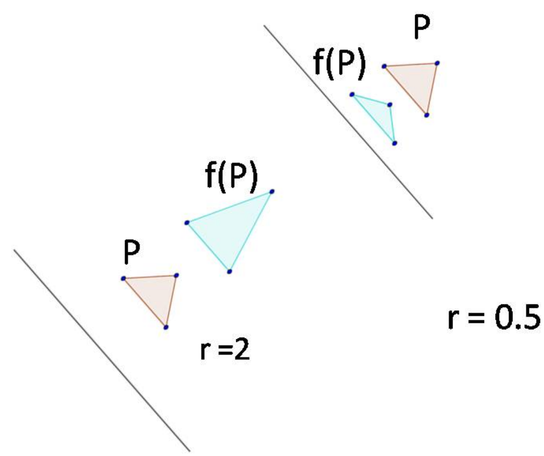



Figura 2.12: semihomotecia razón r

## 2.6. Sistema de coordenadas

La descripción de las transformaciones del plano que hemos mencionado es mucho más sencilla si introducimos un sistema cartesiano de coordenadas sobre el plano $\prod$.

Al considerar dos rectas numéricas en el plano, de tal manera que se corten en el punto correspondiente a O, se conforma un sistema de coordenadas sobre el plano. A cada punto p del plano le corresponde una pareja de números reales y viceversa. Para encontrar la pareja de números que le corresponde a p trazamos dos rectas que pasan por p, una paralela a la primera recta numérica y la otra paralela a la segunda recta numérica. La pareja de números es la que se obtiene con los puntos de corte de estas rectas con las rectas numéricas consideradas. (Ver figura 2.13)

Cuando las rectas numéricas son perpendiculares se obtiene un sistema rectangular de coordenadas o sistema cartesiano de coordenadas. Generalmente la primera recta numérica se ubica horizontalmente y se llama eje $x$ y la segunda se ubica verticalmente y se llama eje $y$.

El número $x_0$ sobre el eje $x$, correspondiente al punto de p se llama la abscisa de p y el número $y_0$, sobre el eje $y$, correspondiente al punto p se llama la

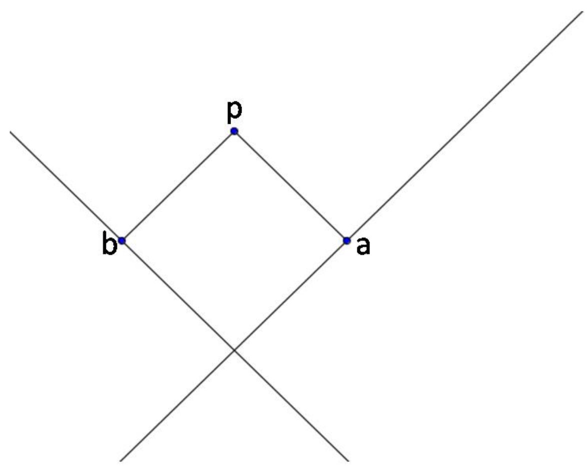



Figura 2.13: plano

ordenada de p. Estos dos números se llaman las coordenadas de p. De esta manera podemos identificar al punto p con la pareja $(x_0, y_0)$ e identificar al plano $\prod$ con el conjunto $\mathbb{R}^2 = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$.

Este plano, dotado con un sistema cartesiano de coordenadas, se denomina plano cartesiano. El plano cartesiano se divide en cuatro cuadrantes. En el primer cuadrante las abscisas y las ordenadas son positivas, en el segundo las abscisas son negativas y las ordenadas positivas, en el tercero las abscisas y las ordenadas son negativas y en el cuarto las abscisas son positivas y las ordenadas son negativas. Es de notar que el orden de las coordenadas es importante pues si $x \neq y$ es diferente el punto de coordenadas $(x, y)$ del punto de coordenadas $(y, x)$.

En la figura 2.14 se ilustran los puntos de coordenadas (-3,1), (2,3), (0,0), (-1.5,-2.5), (1,-2).

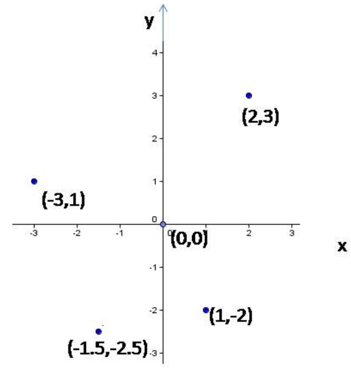



Figura 2.14: plano cartesiano

## 2.7. Transformaciones en el plano cartesiano

De ahora en adelante trabajaremos en un plano cartesiano. Un vector $\overrightarrow{v}$ queda representado por una pareja ordenada $(a, b)$. El inicio del vector es el origen del plano cartesiano y el extremo es el punto de coordenadas de $(a, b)$. Si t es la traslación determinada por $\overrightarrow{v} = (a, b)$ entonces:

$$t : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 : (x, y) \mapsto (x, y) + (a, b) = (x + a, y + b)$$

Por ejemplo si $t(x, y) = (x - 6, y + 3)$ entonces $t$ es la traslación determinada por el vector $(-6, 3)$.

Observamos que si $t$ está determinada por $(a, b)$ entonces t se puede descomponer como $t_1 \circ t_2$ donde $t_1$ es la traslación determinada por $(a, 0)$ y $t_2$ es la traslación determinada por $(0, b)$. Así toda traslación corresponde a una traslación horizontal seguida de una traslación vertical.

La homotecia de centro $(0, 0)$ y razón $r$ es la función:

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 : (x, y) \mapsto r(x, y) = (rx, ry)$$

Para nuestro trabajo del capítulo 3 necesitaremos únicamente semi-homotecias ortogonales a los ejes de coordenadas. La semi-homotecia ortogonal al eje y, de razón r, es la función:

$$h_r : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 : (x, y) \mapsto (rx, y)$$

y la llamaremos semihomotecia horizontal de razón $r$. La semi-homotecia ortogonal al eje $x$, de razón $r$, es la función:

$$v_r : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 : (x, y) \mapsto (x, ry)$$

y la llamaremos semi-homotecia vertical de razón $r$.

NOTA: Si componemos $h_r$ con $v_r$ se obtiene una homotecia de centro (0, 0) y razón r. Nótese que $h_{-1}$ es una simetría con respecto al eje $y$ y $v_{-1}$ es una simetría con respecto al eje $x$.
Tenemos además que la simetría con respecto a la recta $y = x$ es la función:

$$s : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 : (x, y) \mapsto (y, x).$$

## 2.8. Conjuntos y predicados

Existen dos formas de determinar un conjunto, una de ellas es por extensión cuando se nombra cada uno de los elementos que forman el conjunto y la otra es por comprensión cuando se da una condición lo suficientemente precisa para que dado cualquier objeto podamos decidir si pertenece o no al conjunto. Esta condición la denotamos $\varphi(x)$ y es un predicado en términos de $x$.

En general se fija un universo o conjunto de referencia $U$ al cual pertenecerán los elementos de nuestros conjuntos. El conjunto $A$ determinado por el predicado $\varphi(x)$ se notará $A = \{x \in U \mid \varphi(x)\}$. Si en el contexto es claro cuál es el universo, entonces se escribe simplemente $A = \{x \mid \varphi(x)\}$. Es de notar que $\{x \mid \varphi(x)\}$ y $\{z \mid \varphi(z)\}$ representan el mismo conjunto.

Cada vez que se remplace la variable por un elemento constante del conjunto de referencia, el predicado se transforma en una proposición que es verdadera o falsa. Si es verdadera el elemento está en el conjunto y si es falsa éste no pertenece al conjunto. Por ejemplo, si $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid x^2 - 9 = 0\}$, el conjunto referencial son los números enteros y el predicado es $x^2 - 9 = 0$. Al reemplazar $x$ por 3 en $x^2 - 9 = 0$ , obtenemos $9 - 9 = 0$. Como esta proposición es verdadera, tenemos que 3 pertenece a $A$. Si reemplazamos $x$ por 1 en $x^2 - 9 = 0$, obtenemos $1 - 9 = 0$, una proposición falsa, luego 1 no pertenece a $A$.

## 2.9. Transformaciones del plano y cambios en los predicados

Dado un sub-conjunto $A$ de $\mathbb{R}^2$ determinado por el predicado $\varphi(x, y)$, tenemos que:

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | \varphi(x, y)\}.$$

Consideraremos en esta sección los conjuntos que se obtienen mediante las siguientes modificaciones en el predicado que define a A:

(i) Cambiamos $\varphi(x, y)$ por $\varphi(x - a, y - b)$.

(ii) Cambiamos $\varphi(x, y)$ por $\varphi(\frac{x}{a}, y)$, donde $a \neq 0$.

(iii) Cambiamos $\varphi(x, y)$ por $\varphi(x, \frac{y}{b})$, donde $b \neq 0$.

(iv) Cambiamos $\varphi(x, y)$ por $\varphi(y, x)$.

1. Sea $A_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \varphi(x-a, y-b)\}$. Si hacemos el cambio de variables $z = x - a$ y $w = y - b$, tendremos que:

$A_1 = \{(z+a, w+b) \in \mathbb{R}^2 \mid \varphi(z, w)\} = \{t(z, w)|\varphi(z, w)\} = t\{(z, w)|\varphi(z, w)\} = t(A)$, donde $t$ es la traslación determinada por el vector $(a, b)$. Así $A_1$ se obtiene de $A$ mediante una traslación horizontal de $a$ unidades seguida de una traslación vertical de $b$ unidades.

Por ejemplo si $(a, b) = (2, -3)$, $A_1$ se obtiene de $A$ mediante una traslación de 2 unidades hacia la derecha y de 3 unidades hacia abajo.

2. Sea $A_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \varphi(\frac{x}{a}, y)\}$. Si hacemos el cambio de variable $z = \frac{x}{a}$, tendremos que:

$A_2 = \{(az, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \varphi(z, y)\} = \{h_a(z, y)|\varphi(z, y)\} = h_a\{(z, y)|\varphi(z, y)\} = h_a(A)$. Así, $A_2$ se obtiene de A mediante una semi-homotecia horizontal de razón $a$.

3. Sea $A_3 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \varphi(x, \frac{y}{b})\}$. Si hacemos el cambio de variable $w = \frac{y}{b}$, tendremos que:

$A_3 = \{(x, bw) \in \mathbb{R}^2 \mid \varphi(x, w)\} = \{v_b(x, w)|\varphi(x, w)\} = v_b\{(x, w)|\varphi(x, w)\} = v_b(A)$. Así, $A_3$ se obtiene de A mediante una semi-homotecia vertical de razón b.

4. Sea $A_4 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \varphi(y, x)\}$. Si hacemos el cambio de variables $u = y$, y $v = x$ tendremos que:

$A_4 = \{(v, u) \in \mathbb{R}^2 \mid \varphi(u, v)\} = \{s(u, v)|\varphi(u, v)\} = s\{(u, v)|\varphi(u, v)\} = s(A)$. Así, $A_4$ se obtiene de A mediante la simetría con respecto a la recta $y = x$.

Ejemplo: Sea $L = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = x\}$. Es claro que L es la recta que pasa por $(0, 0)$ y $(1, 1)$.

Consideremos el conjunto $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{y-k}{b} = \frac{x-h}{a}\}$.

Si $t$ es la traslación $(x, y) \mapsto (x, y) + (h, k)$, tenemos que $M = t \circ h_a \circ h_b(L)$. Sabemos que la imagen de una recta mediante una semi-homotecia y mediante una traslación es una recta. Además $t \circ h_a \circ h_b(0, 0) = (h, k)$ y $t \circ h_a \circ h_b(1, 1) = t(a, b) = (a + h, b + k)$. Entonces M es la recta que pasa por $(h, k)$ y $(a + h, b + k)$. Nótese que la pendiente de M es $\frac{b}{a}$.

# Capítulo 3

# CÓNICAS

En este capítulo estableceremos conexiones entre las transformaciones del plano y las transformaciones de las ecuaciones de las cónicas para generar familias a partir de ecuaciones básicas.

## 3.1. DISTANCIA ENTRE DOS PUNTOS

Dados los puntos $p(x_1, y_1)$ y $q(x_2, y_2)$ del plano, hallemos la distancia entre $p$ y $q$. Por los puntos $p$ y $q$, trazamos perpendiculares a los ejes $y$ y $x$ respectivamente. Dichas perpendiculares se cortan en el punto $e$ de coordenadas $(x_2, y_1)$. El triángulo $peq$ es un triángulo rectángulo. (Ver figura 3.1).

Aplicando el teorema de Pitágoras:

$$d^2 = \overline{pq}^2 = \overline{pe}^2 + \overline{qe}^2 \text{ (1)}$$

como $\overline{pe} = x_2 - x_1$ y $\overline{qe} = y_2 - y_1$, reemplazando en (1) obtenemos:

$$d^2 = \overline{pq}^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2.$$

Extrayendo la raíz cuadrada a los dos miembros de la igualdad, obtenemos:

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Ejemplo: Hallar la distancia entre los puntos a(2,5) y b(-3,-8)

$$d = \sqrt{(-3-2)^2 + (-8-5)^2}$$
$$d = \sqrt{25 + 169}$$
$$d = \sqrt{194}$$

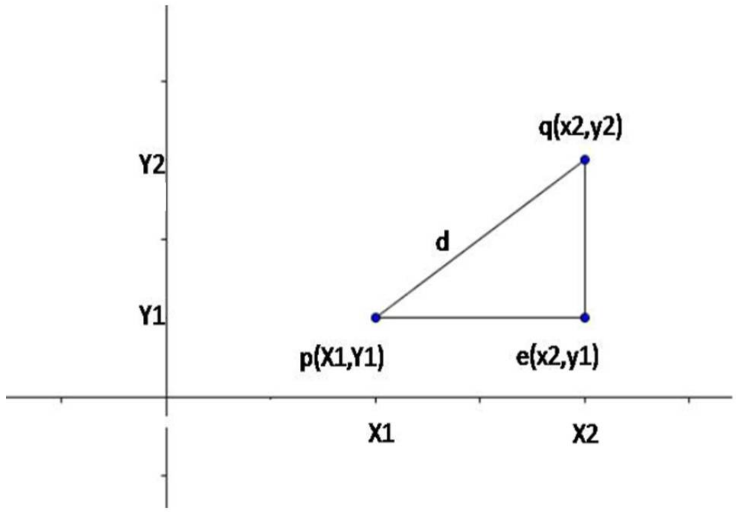



Figura 3.1: Distancia entre dos puntos

# 3.2. CÓNICAS

## 3.2.1. CIRCUNFERENCIA

La circunferencia es el lugar geométrico de un punto que se mueve en un plano de tal manera que conserva siempre una distancia constante a un punto fijo de ese plano. El punto fijo se llama centro de la circunferencia y la distancia constante es el radio. †.

Utilizando la fórmula de distancia y la definición de circunferencia vamos a deducir la ecuación de una circunferencia de centro $(0,0)$ y radio 1:
Un punto $p(x,y)$ está en esta circunferencia si y sólo si

$$\sqrt[2]{(x-0)^2+(y-0)^2}=1$$

Elevando al cuadrado obtenemos

$$x^2+y^2=1$$

llamada la ecuación canónica de la circunferencia de centro (0,0) y radio 1.

†[6]:Lehmann Ch. Geometría Analítica, UTEHA, 1986

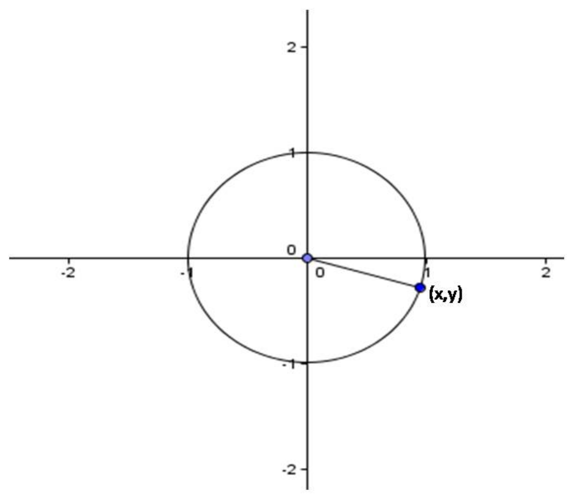



Figura 3.2: circunferencia de centro (0,0) y radio 1

Tenemos así que si llamamos $C$ a esta circunferencia,

$$C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}.$$

Consideremos ahora la homotecia

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 : (x, y) \mapsto r(x, y).$$

y la traslación

$$t : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 : (x, y) \mapsto (x, y) + (h, k).$$

$$f(C) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (\tfrac{x}{r})^2 + (\tfrac{y}{r})^2 = 1\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = r^2\}$$

Así, los puntos de $f(C)$ son exactamente los que se encuentran a una distancia $r$ de $(0, 0)$, por consiguiente, $f(C)$ es una circunferencia de centro $(0, 0)$ y radio $r$.

Ahora bien,

$$(t \circ f)(C) = t(f(C)) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2\}$$

Entonces los puntos de $(t \circ f)(C)$ son exactamente los que se encuentran a una distancia $r$ del punto $(h, k)$. Por consiguiente, $(t \circ f)(C)$ es una circunferencia de centro en $(h, k)$ y radio $r$.

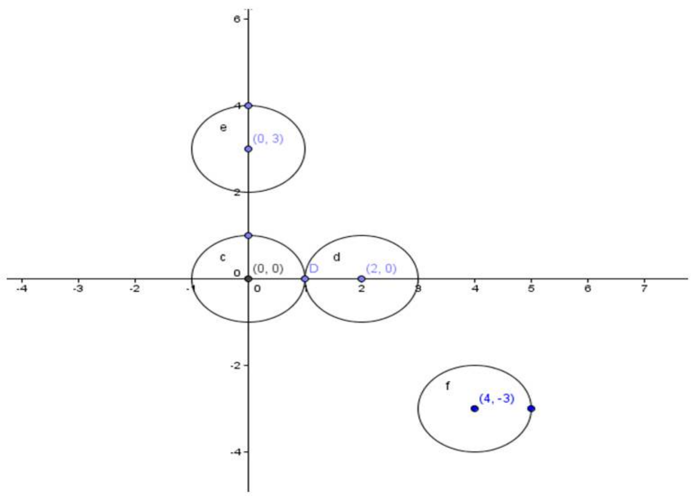



Figura 3.3: circunferencias de centro (0,0),(2,0),(0,3),(4,-3) y radio 1

Ejemplo:

$C_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x-4)^2 + (y+3)^2 = 1\}$ se obtiene de $C$ mediante una traslación de 4 unidades a la derecha y 3 unidades hacia abajo. Este conjunto es una circunferencia de centro en $(4,-3)$ y radio 1.

$C_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x+1)^2 + (y-2)^2 = 25\}$ se obtiene de $C$ mediante la compuesta de una homotecia de centro $(0,0)$ y razón 5, con una traslación de una unidad hacia la izquierda y dos unidades hacia arriba. Este conjunto es una circunferencia de centro en $(-1,2)$ y radio 5.

En la figura 3.4 se observa en azul la circunferencia C. La imagen de $C$ mediante una homotecia de centro (0,0) y razón 2 se observa en color rojo. Al desplazar esta circunferencia 3 unidades a la derecha y 2 unidades hacia arriba obtenemos la circunferencia $t(f(C)) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x-3)^2 + (y-2)^2 = 2^2\}$, la cual se ilustra con un color violeta.

Por otra parte al remplazar $x$ por $\frac{x}{a}$ en la ecuación de $C$ obtenemos:

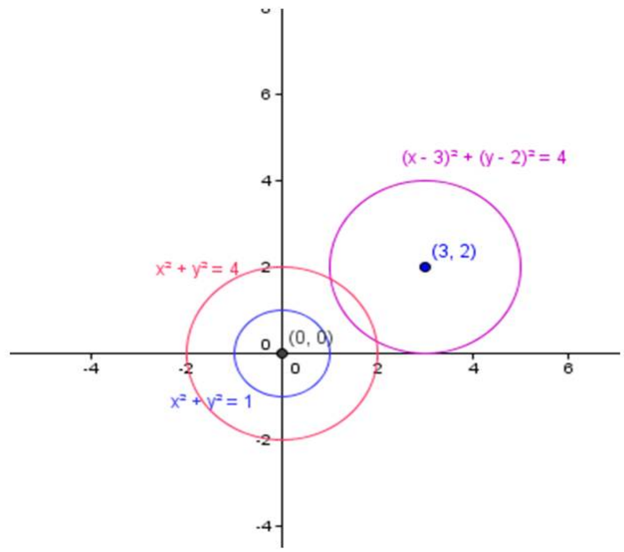



Figura 3.4: circunferencias homotecias y traslaciones

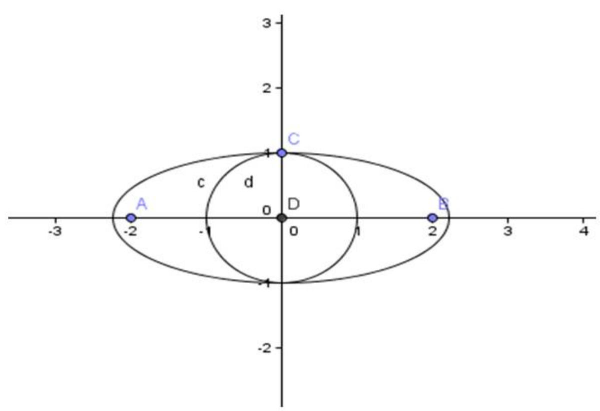



Figura 3.5: Expansión horizontal de la circunferencia

$$E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (\frac{x}{a})^2 + y^2 = 1\}$$

$E$ se obtiene de $C$ mediante una semihomotecia horizontal de razón $a$.

Ejemplo: El conjunto $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (\frac{x}{\sqrt{5}})^2 + y^2 = 1\}$ es precisamente $h_{\sqrt{5}}(C)$. Ver figura 3.5

La figura resultante no es una circunferencia, sino una elipse, lo cual comprobaremos en la siguiente sección.

### 3.2.2. ELIPSE

Una elipse es el lugar geométrico de un punto que se mueve en un plano de tal manera que la suma de sus distancias a dos puntos fijos del plano, llamados focos, es siempre igual a una constante, positiva y mayor que la distancia entre los dos focos. †.

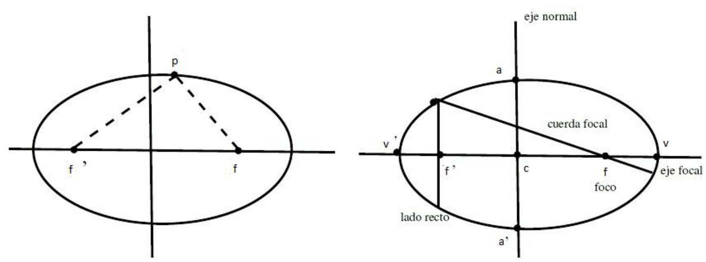



Figura 3.6: Elipse

Utilizando la fórmula de distancia y la definición de elipse vamos a deducir la ecuación de una elipse cuyos focos se encuentran sobre el eje $x$ y son

† [6]:Lehmann Ch. Geometría Analítica, UTEHA, 1986

simétricos con respecto al eje $y$. Además, llamaremos $2a$ a la constante de la que habla la definición. De esta manera las coordenadas de los focos son $(-c, 0)$ y $(c, 0)$, para algún $c > 0$. Tendremos también que $2c < 2a$.

Un punto $(x, y)$ se encuentra sobre la elipse, si y sólo si

$$\sqrt{(x-c)^2+y^2}+\sqrt{(x+c)^2+y^2}=2a.$$

Esto equivale a

$$\sqrt{(x-c)^2+y^2}=2a-\sqrt{(x+c)^2+y^2}.$$

Elevando al cuadrado vemos que

$$(x-c)^2+y^2=4a^2-4a\sqrt{(x+c)^2+y^2}+(x+c)^2+y^2.$$

Simplificando obtenemos

$$cx+a^2=a\sqrt{(x+c)^2+y^2}.$$

Elevando al cuadrado nuevamente se obtiene:

$$c^2x^2+2a^2cx+a^4=a^2x^2+2a^2cx+a^2c^2+a^2y^2,$$

lo que equivale a

$$(a^2-c^2)x^2-a^2y^2=a^2(a^2-c^2).$$

Como $2a > 2c$, tendremos que $a^2 - c^2$ es un número positivo que llamaremos $b^2$. Remplazándolo en la ecuación anterior, se obtiene:

$$b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2$$

Finalmente, dividiendo por $a^2b^2$ llegamos a la ecuación:

$$(\tfrac{x}{a})^2+(\tfrac{y}{b})^2=1$$

Nuestra elipse es entonces el conjunto

$$E=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid (\tfrac{x}{a})^2+(\tfrac{y}{b})^2=1\}.$$

Este conjunto es exactamente $v_b \circ h_a(C)$. Nótese que en este caso $a > b$

Ejemplo:

El conjunto $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (\frac{x}{\sqrt{5}})^2+y^2 = 1\}$ de la sección anterior es una elipse. En efecto, podemos tomar $a = \sqrt{5}$ y $b = 1$, de donde $c^2 = a^2-b^2 = 5-1 = 4$. Así los focos son $(-2, 0)$ y $(2, 0)$ y la constante de la definición es $2\sqrt{5}$.

Consideremos ahora los siguientes conjuntos:

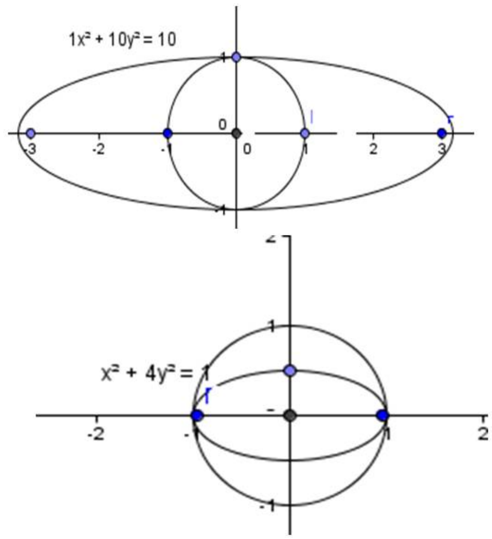



Figura 3.7: Elipses

1. $E_1 = h_a(C) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (\frac{x}{a})^2 + y^2 = 1\}$. $E_1$ se obtiene de $C$ mediante una semihomotecia horizontal de razón $a$. Esto indica que la circunferencia se expande horizontalmente si $\mid a \mid > 1$, o se contrae horizontalmente si $-1 < a < 1$ .

2. $E_2 = v_b(C) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + (\frac{y}{b})^2 = 1\}$. $E_2$ se obtiene de $C$ mediante una semihomotecia vertical de razón $b$, lo cual indica que la circunferencia se expande verticalmente si $\mid b \mid > 1$, o se contrae verticalmente si $-1 < b < 1$

Ejemplo: 1. $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (\frac{x}{\sqrt{10}})^2 + y^2 = 1\}$, se obtiene de $C$ mediante una semihomotecia horizontal de razón $\sqrt{10}$, lo cual indica que la circunferencia se expande horizontalmente, formando una elipse cuyo eje mayor se encuentra en el eje $x$.

2. $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + (2y)^2 = 1\}$, se obtiene de $C$ mediante una semihomotecia vertical de razón $\frac{1}{2}$, lo cual indica que la circunferencia se contrae verticalmente, formando una elipse cuyo eje mayor se encuentra en el eje $x$. Estos ejemplos se ilustran en la figura 3.7.

Si recordamos que $t$ es la traslación $(x,y) \mapsto (x,y)+(h,k)$ tendremos que

$$t \circ v_b \circ h_a(C) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid (\tfrac{x-h}{a})^2 + (\tfrac{y-k}{b})^2 = 1\}.$$

Así, la ecuación $(\frac{x-h}{a})^2 + (\frac{y-k}{b})^2 = 1$ representa una elipse.

Si $a > b$ la elipse tendrá eje mayor paralelo al eje $x$ y si $a < b$ éste será paralelo al eje $y$.

Nota: si $a = b$ la ecuación representa una circunferencia de radio $a$ como vimos antes.

Esta elipse tendrá su centro en el punto $(h,k)$, la longitud del eje horizontal será $2a$ y la del eje vertical será $2b$. Obsérvese que también pueden encontrarse las coordenadas de los focos.

Ejemplo:

$(\frac{x-2}{2})^2 + (\frac{y+3}{3})^2 = 1$ es la ecuación de una elipse de centro $(2,-3)$. Su eje mayor es vertical y mide 6. Su eje menor es horizontal y mide 4. Los focos se encuentran sobre la recta $x = 2$ a una distancia de $\sqrt{9-4} = \sqrt{5}$ unidades del centro. Esta elipse se obtuvo de $C$, mediante la compuesta de una semihomotecia horizontal de razón 2, una semihomotecia vertical de razón 3 y una traslación de 2 unidades a la derecha y 3 unidades hacia abajo.

### 3.2.3. PARÁBOLA

Una parábola es el lugar geométrico de un punto que se mueve en un plano de tal manera que su distancia a una recta fija, situada en el plano, es siempre igual a su distancia a un punto fijo del plano y que no pertenece a la recta. El punto fijo se llama foco y la recta fija directriz [†].

Usando la fórmula de distancia y la definición de parábola, vamos a deducir la ecuación de una parábola, cuya directriz es la recta $y = -\frac{1}{4}$ y cuyo foco es el punto $(0, \frac{1}{4})$. Un punto $(x,y)$ se encuentra sobre la parábola, si y sólo si:

$$\sqrt{(x-0)^2 + (y-\tfrac{1}{4})^2} = \sqrt{(x-x)^2 + (y+\tfrac{1}{4})^2},$$

es decir,

$$\sqrt{x^2 + (y-\tfrac{1}{4})^2} = \sqrt{(y+\tfrac{1}{4})^2}.$$

Elevando al cuadrado obtenemos

[†][6]:Lehmann Ch. Geometría Analítica, UTEHA, 1986

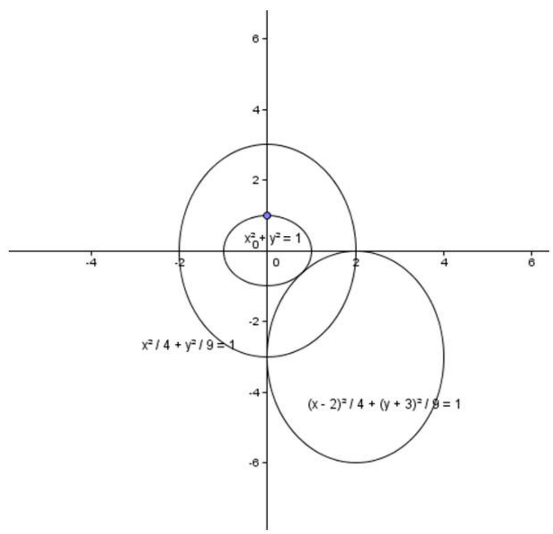



Figura 3.8: Elipses

$$x^2 + (y - \tfrac{1}{4})^2 = (y + \tfrac{1}{4})^2,$$

lo cual es equivalente a

$$x^2 + y^2 - \tfrac{y}{2} + \tfrac{1}{16} = y^2 + \tfrac{y}{2} + \tfrac{1}{16},$$

esto es,

$$x^2 = y.$$

Esta parábola se ilustra en la figura 3.9 y la llamaremos P. El punto $(0, 0)$ se llama el vértice de la parábola P.
$h_a(P) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = (\frac{x}{a})^2\}$ se obtiene de $P$ mediante una semihomotecia horizontal de razón $a$. Si $\mid a \mid > 1$, la parábola se expande horizontalmente y si $-1 < a < 1$ la parábola se contrae horizontalmente.
$v_{-1}(P) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = -x^2\}$ se obtiene de $P$ mediante una semihomotecia horizontal de razón $-1$. $v_{-1}(P)$ es una parábola simétrica a P con respecto al eje $x$. (Ver figura 3.10)

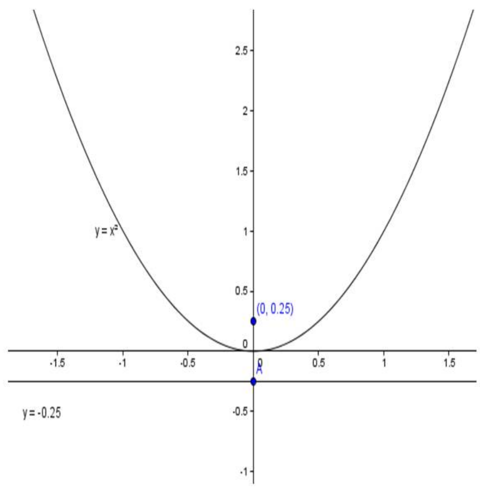



Figura 3.9: Parábola

$s(P) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = y^2\}$ se obtiene de $P$ mediante una simetría con respecto a la recta $y = x$. (Ver figura 3.11)

$v_b(s(P)) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = (\frac{y}{b})^2\}$, se obtiene de $s(P)$ mediante una semihomotecia vertical de razón $b$. Si $\mid b \mid > 1$, la parábola se expande verticalmente y si $-1 < b < 1$ la parábola se contrae verticalmente.

$t(P) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x - h)^2 = y\}$ se obtiene de $P$ mediante una traslación de h unidades a la derecha si $h > 0$ y a la izquierda si $h < 0$.

$t(s(P)) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = (y - k)^2\}$, se obtiene de $P$, mediante una compuesta de una simetría con respecto a la recta $y = x$ y una traslación de $k$ unidades hacia arriba si $k > 0$ y hacia abajo si $k < 0$.

Ejemplos:

1. $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = (\frac{x}{2})^2\}$, se obtiene de $P$ mediante una semihomotecia horizontal de razón 2.

2. $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = (2x)^2\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 4x^2\}$ se obtiene de $P$ mediante una semihomotecia horizontal de razón $\frac{1}{2}$.

3. $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = (-y)^2\}$, se obtiene de $P$ mediante una semihomotecia vertical de razón $-1$. Como $s(P)$ es simétrica con respecto al eje $x$, tenemos

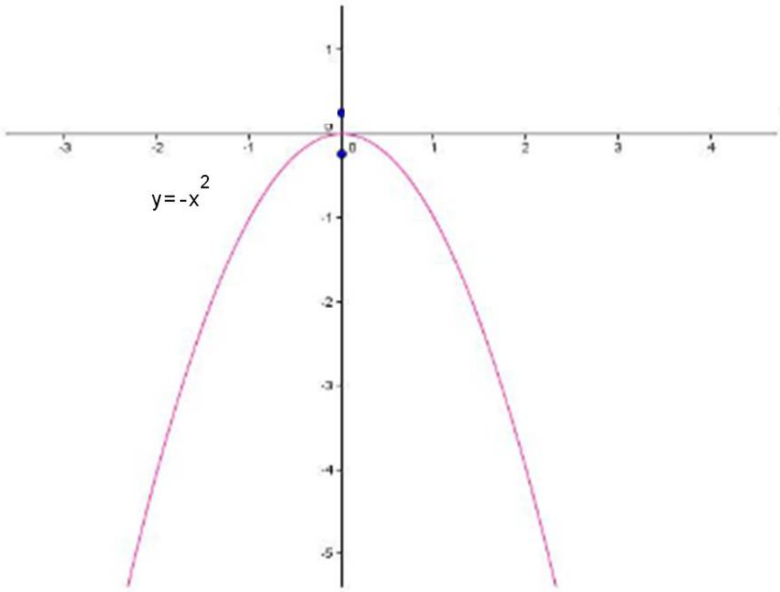



Figura 3.10: Parábola

que este conjunto coincide con $s(P)$.

Observación:

$$\begin{aligned} v_b(P) &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 = \tfrac{y}{b}\} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = bx^2\} \\ &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = (\sqrt{b}x)^2\} = h_{\frac{1}{\sqrt{b}}}(P) \end{aligned}$$

En las figuras 3.12 y 3.13 se ilustran algunos ejemplos de parábolas y su ecuación correspondiente.

### 3.2.4. HIPÉRBOLA

Una hipérbola es el lugar geométrico de un punto que se mueve en un plano de tal manera que el valor absoluto de la diferencia de sus distancias a dos puntos fijos del plano, llamados focos, es siempre igual a una constante, positiva y menor que la distancia entre los focos. †.

† [6]:Lehmann Ch. Geometría Analítica, UTEHA, 1986

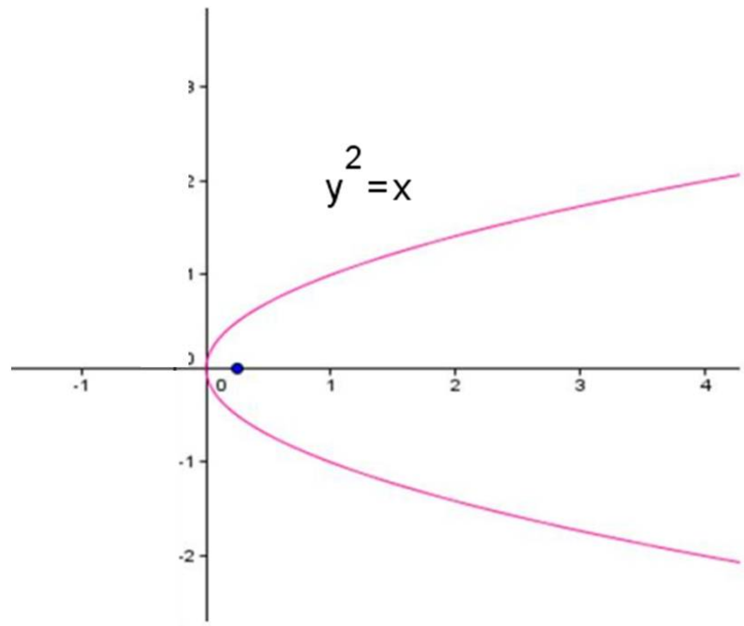



Figura 3.11: Parábola

Utilizando la fórmula de distancia y la definición de hipérbola vamos a deducir la ecuación de una hipérbola cuyos focos se encuentran sobre el eje $x$ y son simétricos con respecto al eje $y$. Además llamaremos $2a$, la constante de la que habla la definición. De esta manera las coordenadas de los focos son $(-c, 0)$ y $(c, 0)$, para algún $c > 0$. Tendremos también que $2a < 2c$.

Un punto $(x, y)$ se encuentra sobre la hipérbola, si y sólo si

$$\sqrt{(x-c)^2 + y^2} - \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a.$$

Esto equivale a

$$\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a + \sqrt{(x+c)^2 + y^2}.$$

Elevando al cuadrado vemos que

$$(x-c)^2 + y^2 = 4a^2 + 4a\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + (x+c)^2 + y^2.$$

Simplificando obtenemos

$$-cx - a^2 = a\sqrt{(x+c)^2 + y^2}.$$

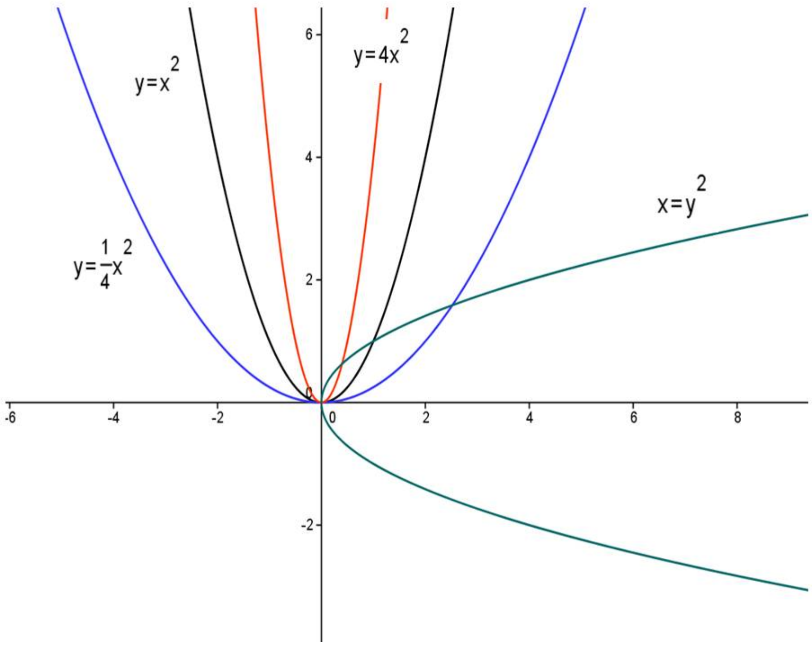



Figura 3.12: Expansiones y contracciones de la Parábola

Elevando al cuadrado nuevamente se obtiene:

$$c^2x^2 - 2a^2cx + a^4 = a^2x^2 + 2a^2cx + a^2c^2 + a^2y^2$$

es decir,

$$(c^2 - a^2)x^2 - a^2y^2 = a^2(c^2 - a^2).$$

Como $2c > 2a$, tendremos que $c^2 - a^2$ es un número positivo que llamaremos $b^2$. Remplazándolo en la ecuación anterior,se obtiene:

$$b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2.$$

Finalmente, dividiendo por $a^2b^2$ llegamos a la ecuación:

$$(\tfrac{x}{a})^2 - (\tfrac{y}{b})^2 = 1.$$

La hipérbola es una curva que consta de dos ramas diferentes, una de las cuales se extiende indefinidamente hacia la derecha, arriba y abajo del eje $x$ y la otra se extiende indefinidamente hacia la izquierda por arriba y por abajo del eje $x$. La hipérbola tiene dos asíntotas oblicuas, cuyas ecuaciones son $y = \frac{bx}{a}$ y $y = -\frac{bx}{a}$.

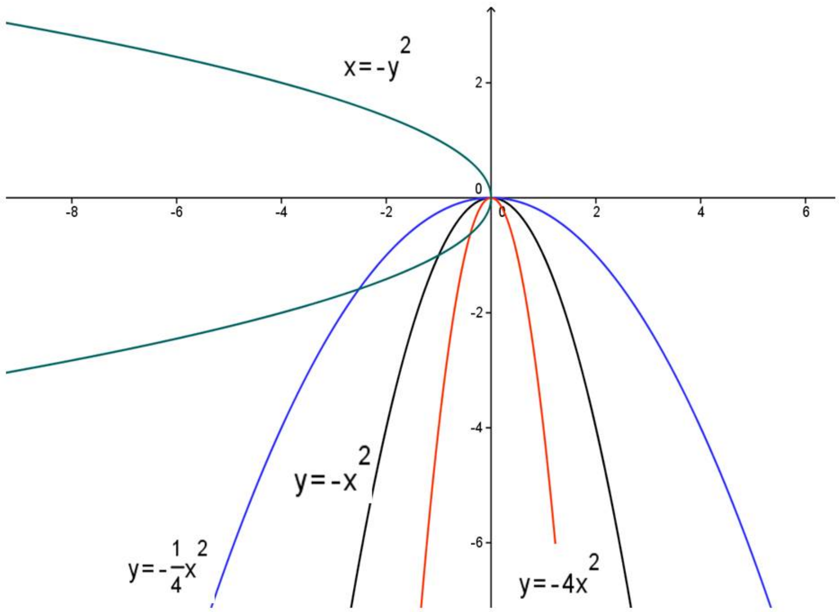



Figura 3.13: Expansiones y contracciones de la Parábola

Para realizar el trazado de la hipérbola nos apoyaremos en un rectángulo cuyo centro es el origen; las diagonales del rectángulo serán las asíntotas de la hipérbola. En el caso particular en el que $a = b = 1$, este rectángulo se convierte en un cuadrado, las diagonales del cuadrado serían las asíntotas de la hipérbola cuyas ecuaciones son $y = x$ y $y = -x$, los vértices de la hipérbola tendrán por coordenadas $(-1, 0)$ y $(1, 0)$, la hipérbola correspondiente la llamaremos $H = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 - y^2 = 1\}$. Esta hipérbola se ilustra en la figura 3.15 y a través de ella obtendremos todas las demás hipérbolas utilizando las transformaciones correspondientes.

1. $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (\frac{x}{a})^2 - y^2 = 1\}$ se obtiene de $H$ mediante una semihomotecia horizontal de razón $a$. Su eje principal es el eje $x$.

2. $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 - (\frac{y}{b})^2 = 1\}$ se obtiene de $H$ mediante una semihomotecia vertical de razón $b$.

3. $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (\frac{x-h}{a})^2 - (\frac{y+k}{b})^2 = 1\}$ se obtiene de $H$ mediante la compuesta de una semihomotecia horizontal de razón $a$, una semihomotecia vertical de

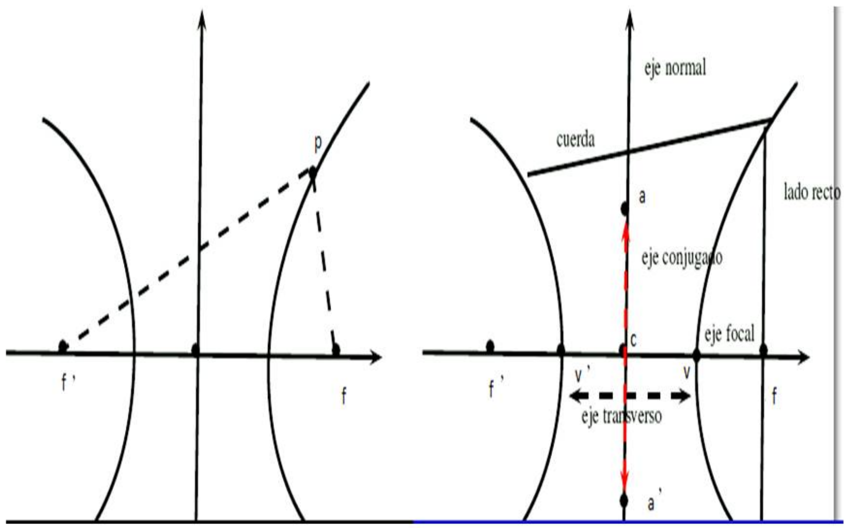



Figura 3.14: Hipérbola

razón $b$ y una traslación de $h$ unidades a la derecha y $k$ unidades hacia abajo, siendo $h, k$ constantes positivas.(ver figura 3.17)

4. $s(H) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y^2 - x^2 = 1\}$, se obtiene de $H$ mediante una simetría con respecto a la recta $y = x$ (ver figura 3.16)

5. $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y^2 - (\frac{x}{a})^2 = 1\}$, se obtiene de $s(H)$ mediante una semihomotecia horizontal de razón $a$.

6. $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (\frac{y}{b})^2 - x^2 = 1\}$, se obtiene de $s(H)$ mediante una semihomotecia vertical de razón $b$. Su eje principal es el eje $y$.

Ejemplo:

1. $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (\frac{x}{3})^2 - y^2 = 1\}$, se obtiene de $H$ mediante una semihomotecia horizontal de razón 3 (ver figura 3.18)

2. $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 - (2y)^2 = 1\}$, se obtiene de $H$ mediante una semihomotecia vertical de razón $\frac{1}{2}$ (ver figura 3.18).

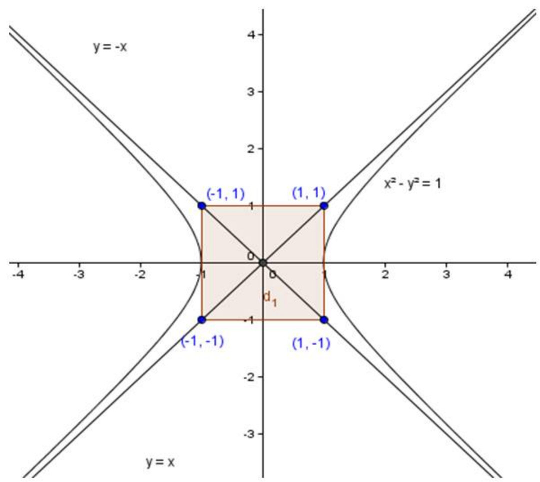



Figura 3.15: Hipérbola

3. $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (\frac{x-4}{3})^2 - (\frac{y+6}{4})^2 = 1\}$ se obtuvo de $H$ mediante la compuesta de una semihomotecia horizontal de razón 3, una semihomotecia vertical de razón 4, una traslación de 4 unidades a la derecha y 6 unidades hacia abajo (ver figura 3.17)

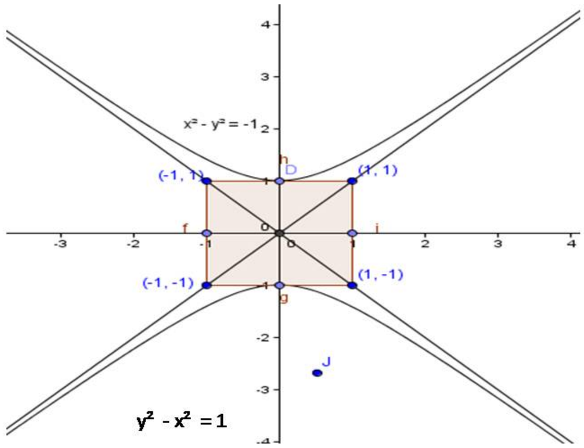



Figura 3.16:

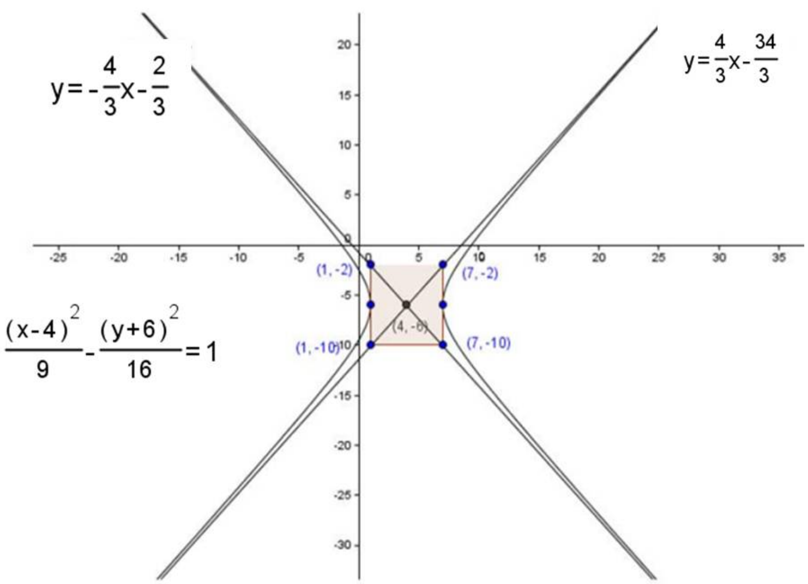



Figura 3.17:

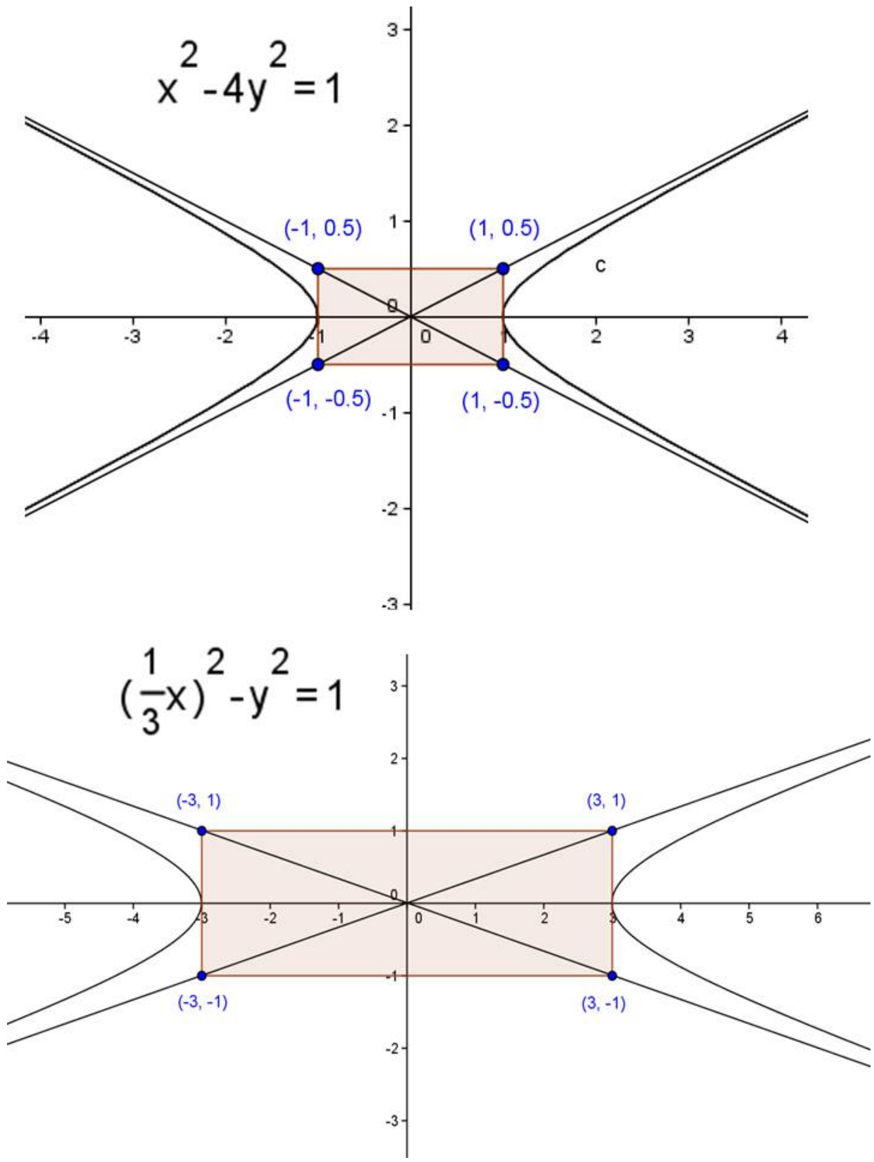



Figura 3.18:

## 3.3. Conclusión

Basta estudiar a fondo solamente tres cónicas básicas y obtener a partir de ellas todas las demás cónicas cuyos ejes sean paralelos a los ejes de coordenadas. Estas tres cónicas son la circunferencia de ecuación $x^2 + y^2 = 1$, la parábola de ecuación $y = x^2$ y la hipérbola cuya ecuación es $x^2 - y^2 = 1$. A partir de la circunferencia se generan las elipses mediante semihomotecias y traslaciones, a partir de la parábola dada se obtienen las demás parábolas mediante semihomotecias, simetrías y traslaciones. Igualmente se utilizan estas transformaciones del plano para generar todas las hipérbolas a partir de la hipérbola estudiada. Este método de trabajo reduce al mínimo lo que debe memorizarse y permite sacar el máximo provecho a la intuición de los estudiantes, además de establecer vínculos más estrechos entre las nociones algebraicas y las geométricas.

# Capítulo 4

# ACTIVIDADES EN EL AULA DE CLASE

Este capítulo consiste en una serie de talleres diseñados para que los estudiantes de grado décimo se aproximen al método de estudio de la geometría analítica que se propone en el capítulo 3.

## 4.1. Taller 1. Transformaciones

Objetivo:
Establecer la relación que existe entre ciertos cambios en el predicado que define a un subconjunto del plano cartesiano y las traslaciones, homotecias, semihomotecias y simetrías.

Metodología:
Previamente los estudiantes revisarán los conceptos de traslaciones, homotecias y semihomotecias en el plano. Se reunirán en grupos de tres estudiantes y contarán con las dos horas de clase para el desarrollo y socialización del taller.

Actividad:
1. En un plano cartesiano grafique

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid -2 \leq x \leq 3, \wedge, -1 \leq y \leq 2\}.$$

2. En el predicado que define el conjunto A cambie $x$ por $x - 3$ y $y$ por $y + 2$.

a. Escriba por comprensión el nuevo conjunto y nómbrelo B.

b. ¿Cuál es la representación gráfica del conjunto B?

c. ¿Qué tienen en común y qué diferencias encuentra entre los dos conjuntos al comparar sus representaciones gráficas?

d. Se puede afirmar que B se obtuvo de A mediante una transformación. ¿Cuál transformación sería?.

3. Reemplace en el predicado que define a $A$ la variable $x$ por $\frac{x}{3}$.

a. ¿Cómo escribimos el nuevo conjunto por comprensión?

b. ¿Qué similitud y qué diferencia hay entre las representaciones gráficas de los dos conjuntos?

c. Podemos decir que el nuevo conjunto se obtuvo de $A$ mediante una transformación ¿Cuál es la transformación?

d. El coeficiente de $x$ es menor que 1 ¿qué puede usted inferir?

4. Reemplace en el predicado que define a $A$ la variable $y$ por $2y$.

a. ¿Cómo escribimos el nuevo conjunto por comprensión?

b. ¿Qué similitud y qué diferencia hay entre las gráficas de los dos conjuntos?

c. Podemos decir que el nuevo conjunto se obtuvo de $A$ mediante una transformación. ¿Cuál es la transformación?

d. El coeficiente de $y$ es mayor que 1 ¿qué puede usted inferir?

5. En el predicado que define el conjunto $A$ del primer punto, remplace $x$ por $\frac{x-3}{3}$ y $y$ por $2(y+2)$.

a. Escriba el nuevo conjunto por comprensión y realice su representación gráfica.

b. ¿El nuevo conjunto se obtuvo de A mediante cuáles transformaciones del plano?

6. Utilice una hoja de papel mantequilla. Trace en ella un sistema cartesiano de coordenadas tomando como unidad de medida 1cm. Ubique en cada eje de coordenadas los números del -10 al 10 y grafique el conjunto $A$. Señale en el conjunto A varios puntos y escriba sus coordenadas. Posteriormente trace la recta $y = x$, y doble la hoja por la recta que acaba de trazar. Calque la gráfica del conjunto A y los puntos que trazó. Escriba las coordenadas de los puntos obtenidos.

a. Compare las coordenadas de los puntos iniciales y los puntos calcados

b. ¿Cómo es el tamaño de la figura inicial y de la figura reflejada?, ¿cómo es su forma?

7. Trace la recta $y = x$ en un plano cartesiano.

a. Remplace en la ecuación de la recta $x$ por $-2x$ y grafique. ¿Cómo es la nueva recta?, ¿qué similitudes y diferencias tienen con la recta $y = x$

b. Remplace $x$ por $x + 8$ en la ecuación de la recta $y = x$. ¿Podemos afirmar que $y = x + 8$ se obtuvo mediante una transformación de la recta $y = x$ mediante una transformación ¿Cuál es la transformación?

c. Al remplazar $x$ por $\frac{x}{3}$ en $y = x$, ¿Podemos afirmar que $y = \frac{x}{3}$ se obtuvo de una transformación de la recta $y = x$?.¿Cuál es la transformación?

8. Teniendo en cuenta el proceso de desarrollo del taller, escriba conclusiones generales.

9. Realice la socialización del taller con los demás grupos y complete las conclusiones.

## 4.2. Taller 2. Circunferencia

Objetivo:

Resolver situaciones matemáticas en las que se usan propiedades geométricas de figuras cónicas (circunferencia), por medio de transformaciones de las representaciones algebraicas de esas figuras.

Metodología:

Previamente el estudiante desarrolló el taller 1. Este taller lo desarrollará de manera individual. Contará con las dos horas de clase para el desarrollo y socialización del taller.

Actividad:

I. Considere la circunferencia $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$.

1. Remplace en la ecuación $x$ por $x - 4$ y $y$ por $y + 8$.

a. Escriba el nuevo conjunto por comprensión.

b. Realice la representación gráfica.

c. ¿Qué similitudes y qué diferencias hay entre la circunferencia de referencia y la nueva circunferencia?. Compare tamaño, ubicación, etc.

d. ¿Qué transformaciones del plano relacionan las dos figuras?

2. Remplace $x$ por $\frac{x}{2}$ y $y$ por $\frac{y}{2}$ en la ecuación de $C$.

a. Escriba por comprensión el nuevo conjunto.

b. Realice la representación gráfica.

c. ¿Qué similitudes y qué diferencias hay entre la circunferencia de referencia y la nueva circunferencia?. Compare tamaño, ubicación, etc.

d. ¿Qué transformaciones del plano relacionan la circunferencia $C$ con la nueva circunferencia?

3. Observe las gráficas y las ecuaciones de la figura 4.1

a. Compare las circunferencias de la gráfica con $C$, observe tamaño y ubicación.

b. Relacione la ecuación de la circunferencia y su representación gráfica. Haga una breve descripción de esta relación con cada una de las circunferencias de la gráfica.

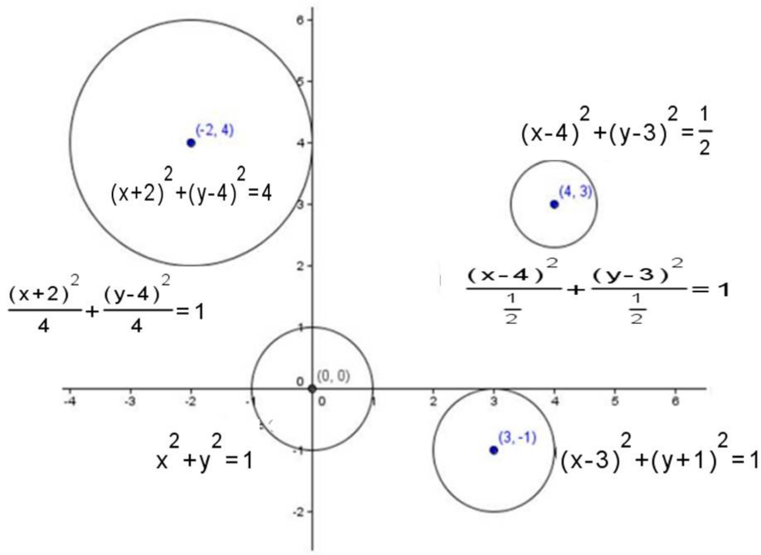



Figura 4.1: Ecuaciones circunferencias

c. ¿Mediante qué transformaciones del plano se obtuvieron las circunferencias de la figura a partir de $C$ ?

4. Remplace $x$ por $\frac{x-4}{3}$ y $y$ por $\frac{y+4}{3}$ en la ecuación de $C$.

a. ¿Cómo se escribe el nuevo conjunto por comprensión?

b. Realice la representación gráfica.

c. ¿Qué similitudes y qué diferencias hay entre la circunferencia $C$ y la nueva circunferencia? Compare tamaño, ubicación, etc.

d. ¿Mediante qué transformaciones se obtuvo el nuevo conjunto a partir de $C$?

II. En cada una de las gráficas de la figura 4.2 identifique el centro, el radio y la ecuación de la circunferencia correspondiente.

III. Siguiendo las instrucciones realice la gráfica, escriba la ecuación y el centro de la circunferencia.

a. Tome como base la circunferencia de centro en (0,0) y radio 1. Desplácela 2 unidades a la izquierda y 4 hacia abajo.

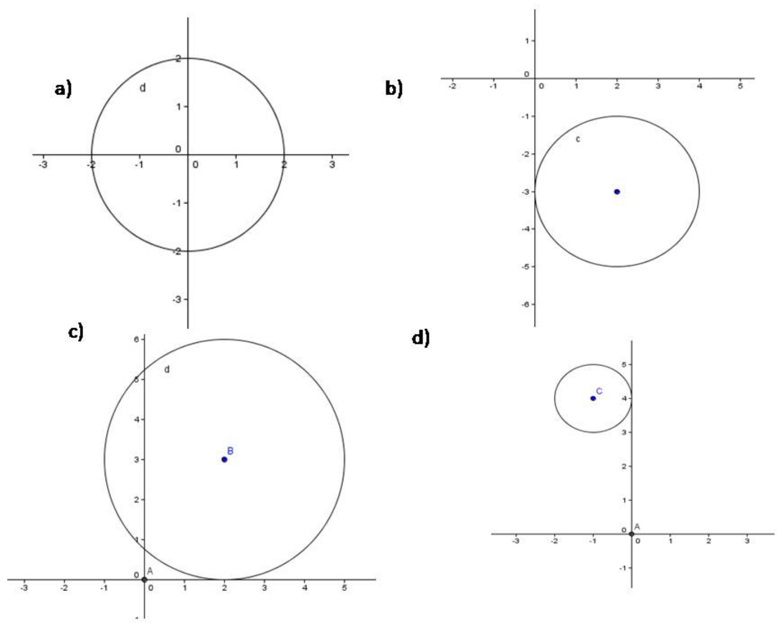



Figura 4.2: circunferencias

b. Dibuje una circunferencia de radio 3 y centro (0,0). Desplácela tres unidades a la derecha y 2 hacia arriba.

c. Tome como base la circunferencia de radio 2 y centro (1,-1). Reduzca el radio a la mitad.

d. Tome como base la circunferencia de radio 2 y centro (1,-1). Duplique el radio.

## 4.3. Taller 3. Elipse

Objetivo:

Resolver situaciones matemáticas en las que se usan propiedades geométricas de figuras cónicas (elipse), por medio de transformaciones de las representaciones algebraicas de esas figuras.

Metodología:

Previamente el estudiante desarrolló el taller 2. Este taller lo desarrollará de manera individual. Contará con las dos horas de clase para el desarrollo y socialización del taller.

Ambientación: Utilizando el programa *Wolfram CDF Player* se ilustra la definición de lugar geométrico de la elipse, como se muestra en la figura 4.3. Compruébelo ingresando a la página $http://demonstrations.wolfram.com/$ y moviendo p en cualquier posición de la elipse.

Actividad:

1. Observe la gráfica 4.4 y responda:

a. Cuando $a = b = 1$. ¿qué figura representa?

b. Tomando como referencia la figura anterior y comparándola con la figura que se obtiene cuando $a > 1$, explique qué cambios observa.

c. Tomando como referencia la figura anterior y comparándola con la figura que se obtiene cuando $b > 1$, explique qué cambios observa.

d. Tomando como referencia la figura anterior y comparándola con la figura que se obtiene cuando $a < 1$, o, $b < 1$ explique qué cambios observa.

e. Explique qué relación existe entre los ejes de las elipses y los valores de $a$ y $b$.

2. Tome como referencia la circunferencia

$$C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$$

a. Describa los cambios que observa en cada figura representada en 4.5.

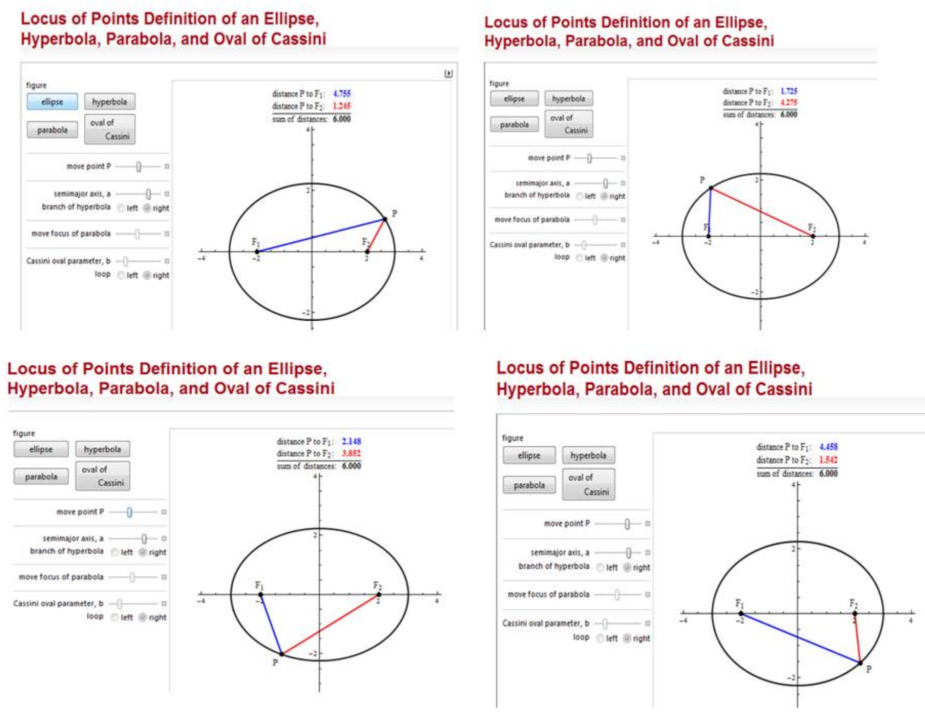



Figura 4.3: lugar geométrico de la elipse

b. Se afirma que cada una de las elipses se obtuvo de la circunferencia mediante algunas transformaciones (traslaciones, semihomotecias, etc.). Explique esta afirmación para cada una de las elipses de la figura.

c. Relacione cada transformación con la ecuación de la elipse y escriba las conclusiones que obtuvo.

3. Remplace $x$ por $3x$ y $y$ por $\frac{y}{2}$ en la ecuación del conjunto $C$ y nombre al nuevo conjunto con la letra B.

a. Realice la representación gráfica de B.

b. ¿Qué similitudes y qué diferencias hay entre el conjunto $C$ y el conjunto B? Compara forma, ubicación, etc.

c. ¿Qué transformaciones del plano se identifican al comparar las dos representaciones, si se afirma que B se obtuvo de A mediante una transformación?

4. Remplace en el predicado que define al conjunto B del ejercicio anterior, $x$ por $x - 4$ y $y$ por $y + 8$.

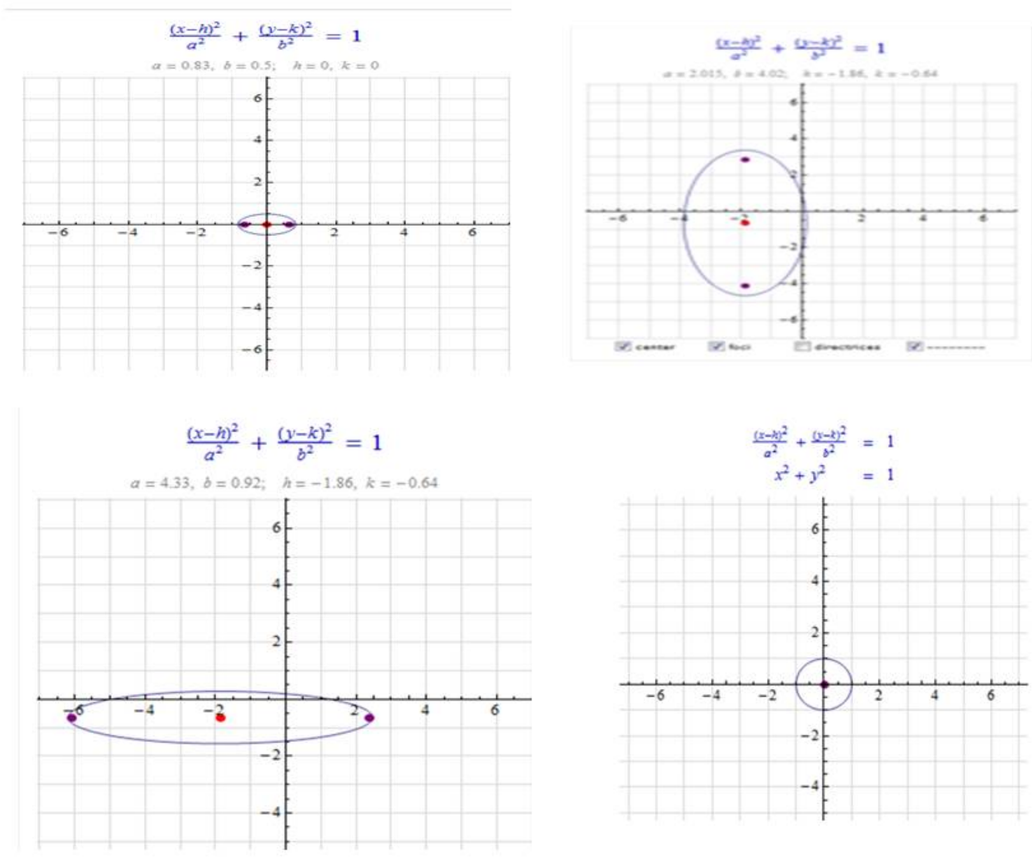

$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$
$a = 0.83,\ b = 0.5;\quad h = 0,\ k = 0$
$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$
$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$
$a = 4.33,\ b = 0.92;\quad h = -1.86,\ k = -0.64$
$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$
$x^2 + y^2 = 1$

Figura 4.4:

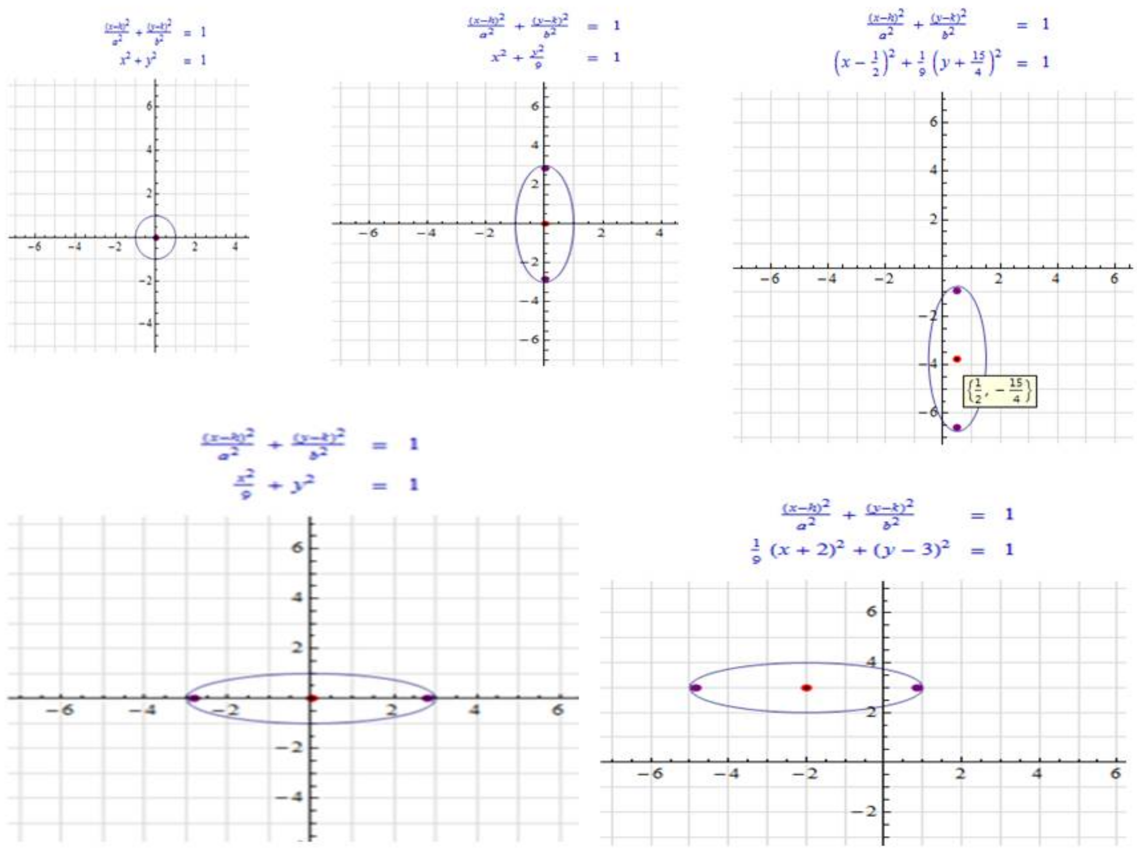



Figura 4.5: elipses y transformaciones

a. Escriba por comprensión el nuevo conjunto y nómbrelo D.

b. Realice la representación gráfica de D.

c. ¿Qué similitudes y qué diferencias hay entre el conjunto C y el conjunto D? Compare forma, ubicación, etc.

d. ¿Qué transformaciones del plano se utilizan para transformar C en D?

5. Siguiendo las instrucciones realice la gráfica, escriba la ecuación e identifique el centro, el eje mayor y el eje menor de la elipse.

a. Tome como base la circunferencia de centro (0,0) y radio 1, expándala horizontalmente 4 unidades y desplácela 3 unidades a la izquierda y 1 hacia abajo.

b. Tome como base la circunferencia de radio 1, realice una contracción vertical a la mitad y desplácela 1 unidad a la derecha y 4 hacia arriba.

c. Tome como base la circunferencia de radio 2 y centro (1,-1), expándala verticalmente 2 unidades y contraigala horizontalmente 2 unidades

d. Tome como base la circunferencia de radio 4 y centro (2,-3), expándala una unidad y desplácela 3 unidades hacia abajo.

6. En cada una de las representaciones gráficas de la figura 4.6 identifique el centro y la ecuación de la elipse.

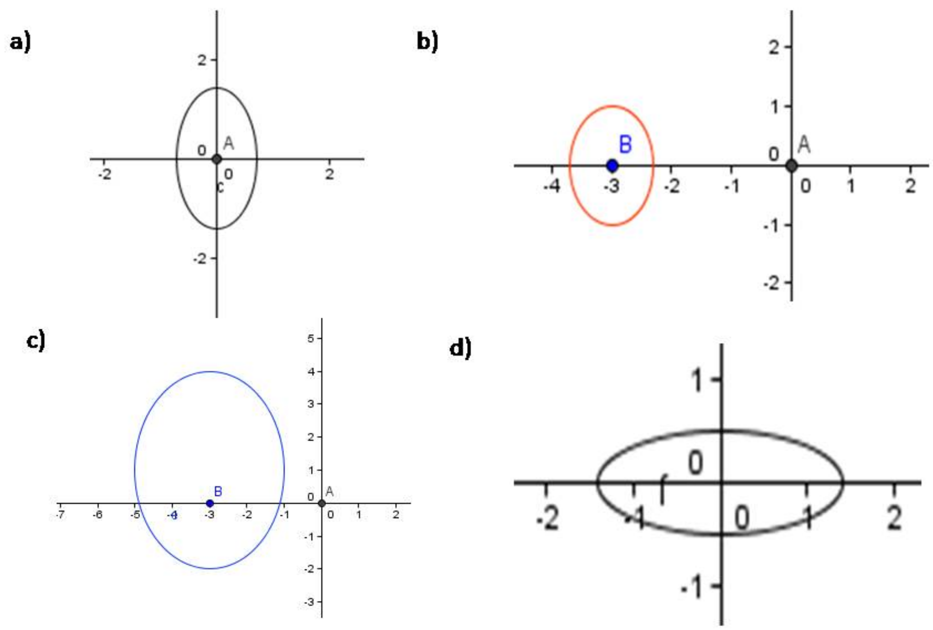



Figura 4.6: elipse

## 4.4. Taller 4. Parábola

Objetivo:

Resolver situaciones matemáticas en las que se usan propiedades geométricas de figuras cónicas (parábola), por medio de transformaciones de las representaciones algebraicas de esas figuras.

Metodología:

Este taller lo desarrollará de manera individual. Contará con las dos horas de clase para el desarrollo y socialización del taller.

Ambientación: Utilizando el programa *Wolfram CDF Player* se ilustra la definición de lugar geométrico de la parábola, como se muestra en la figura 4.7. Compruébelo ingresando a la página $http://demonstrations.wolfram.com/$ y moviendo p en cualquier posición de la parábola.

Actividad:

I. Utilizando Geogebra, realice la parábola cuya ecuación es $y = x^2$.

a. En el campo de entrada escriba las coordenadas (0,0.25) y pulse enter,(0,-0.25) y pulse enter y (-1,-0.25) y pulsa enter, de ésta manera quedarán marcadas las coordenadas en el plano cartesiano.

b. Vaya a la opción de recta que pasa por dos puntos y marca dichos puntos en las coordenadas (0,-0.25) y (-1,-0.25) se obtendrá la recta $y = -0{,}25$.

c. Busque la opción parábola y marque con el cursor la recta y el punto de coordenadas (0, 0.25), así obtendrá la parábola de ecuación $y = x^2$.

II. Tome como referencia

$$P = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = x^2\}$$

1. Remplace en la ecuación $x$ por $x - 1$.

a. Escriba el nuevo conjunto por comprensión y llámelo Q.

b. Realice la representación gráfica

c. ¿Qué similitudes y qué diferencias hay entre la parábola $P$ y la nueva gráfica? Compare tamaño, ubicación, etc.

d. Complete el enunciado entre los paréntesis: Q se obtiene de P mediante una (                    ) de (    ) unidad a la derecha.

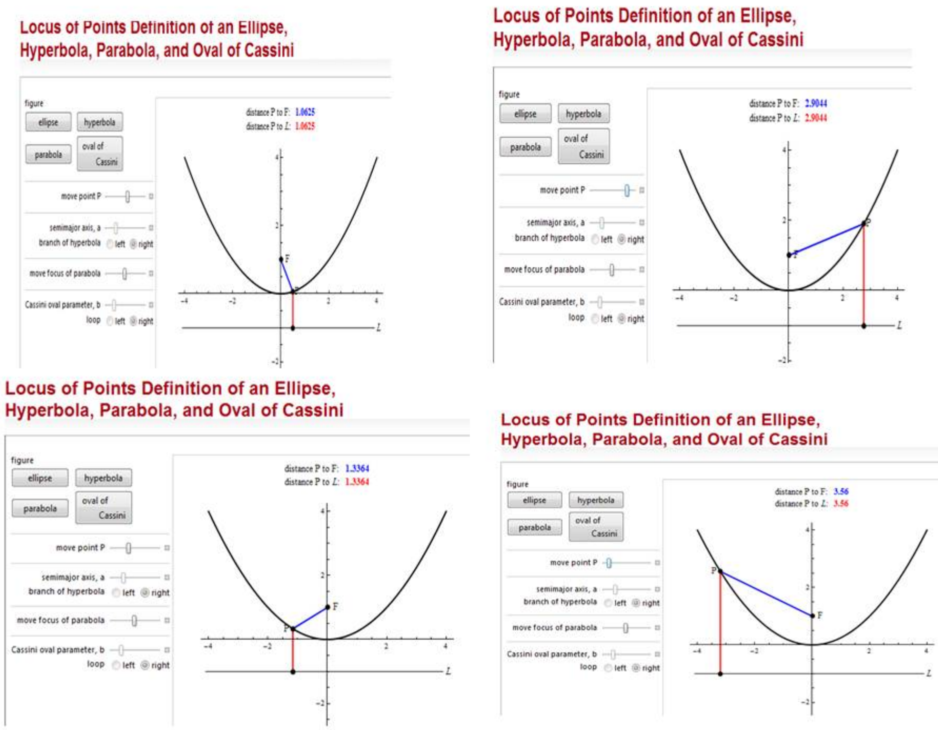



Figura 4.7: Lugar geométrico de la parábola

2. Remplace en el predicado que define a P $x$ por $3x$.

a. Escriba el nuevo conjunto por comprensión y llámelo M.

b. Realice la representación gráfica de M.

c. ¿Qué similitudes y qué diferencias hay entre la parábola de referencia y la nueva gráfica? Compare tamaño, ubicación, etc.

d. Complete el enunciado entre los paréntesis: M se obtiene de P mediante una (                ) de razón (       ).

III. En las representaciones gráficas de la figura 4.8 identifique el vértice, y la directriz de la parábola.

IV. Compare la gráfica 4.9 con la ecuación correspondiente y responda:

a. Describa los cambios que observa en cada figura representada en 4.9 tomando como referencia la parábola que tiene como ecuación $y = x^2$.

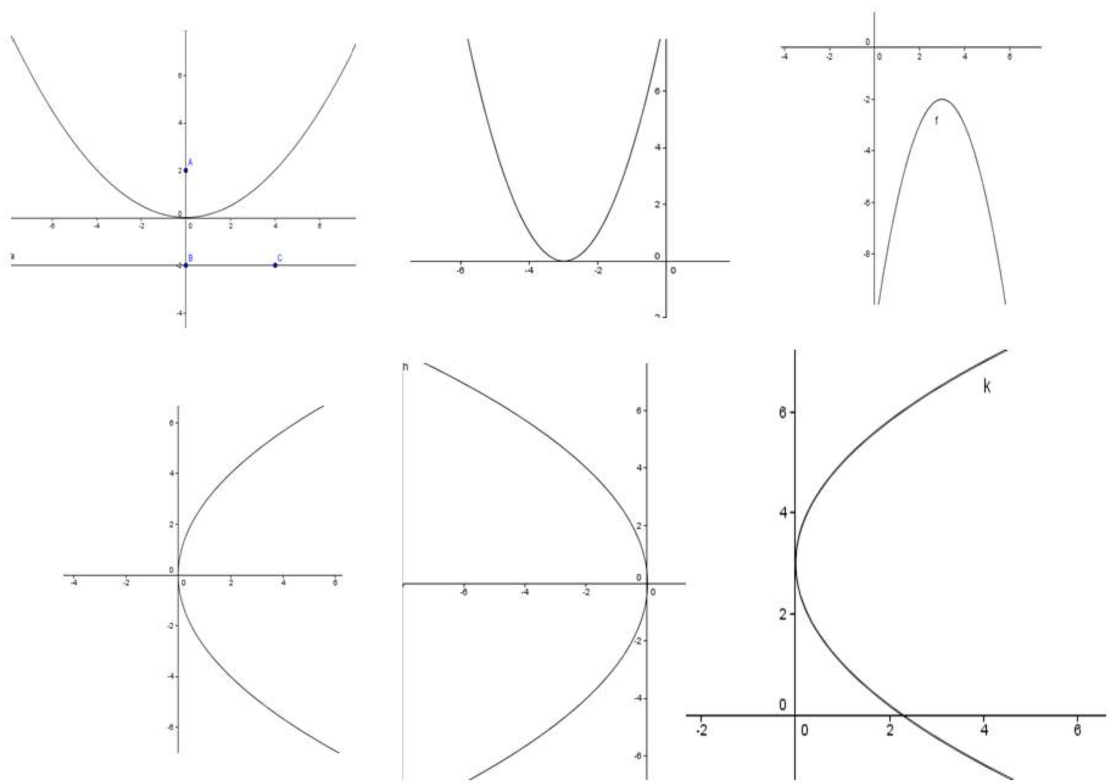


Figura 4.8: parábola

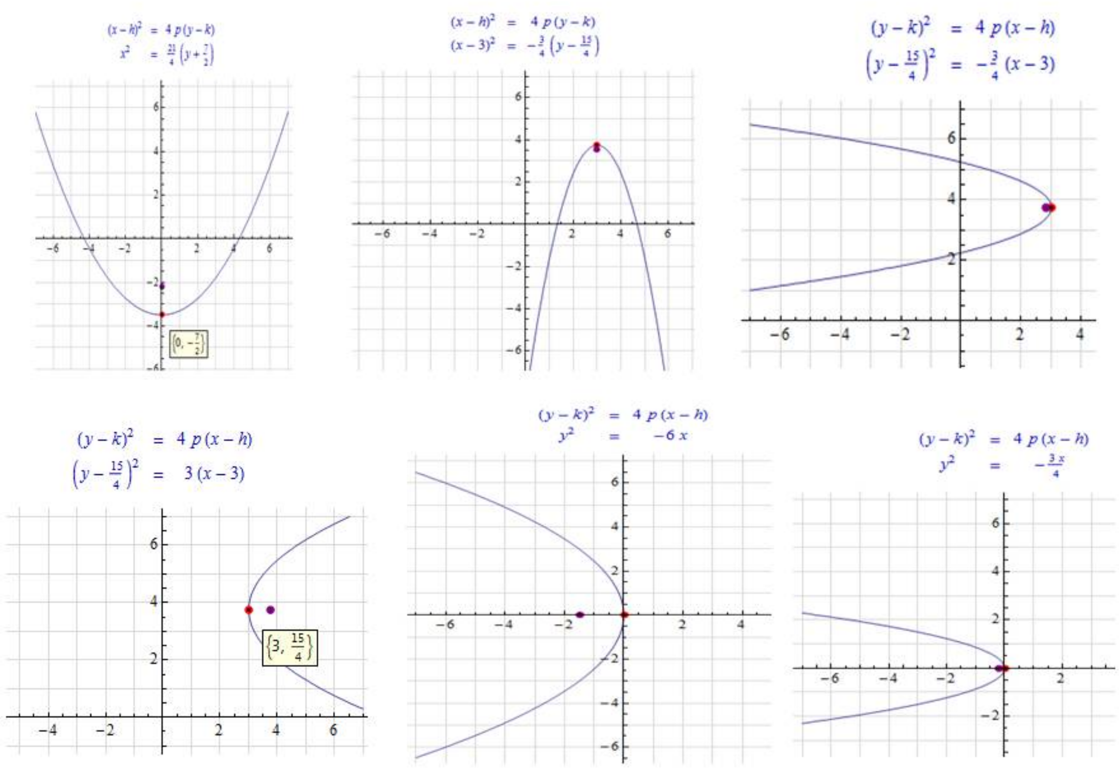



Figura 4.9: parábola

b. Se afirma que cada parábola de la gráfica se obtuvo de la parábola que tiene como ecuación $y = x^2$ mediante algunas transformaciones (traslaciones, semihomotecias, etc.). Explique ésta afirmación para cada una de las parábolas representadas en la figura.

c. Relacione cada transformación con la ecuación de la parábola y escriba las conclusiones que obtuvo.

5. Siguiendo las instrucciones realice la gráfica, verifique si se puede realizar la parábola y escriba la ecuación e identifique el vértice y la directriz.

a.Tome como base $P$, expándala horizontalmente 4 unidades y desplácela 3 unidades a la izquierda y 1 hacia abajo.

b.Tome como base $P$, realice una contracción vertical a la mitad y desplácela 1 unidad a la derecha y 4 hacia arriba.

c.Tome como base la parábola de vértice (1,-1), foco (2,0) y eje de simetría el eje $x$, expándala verticalmente 2 unidades

d.Tome como base la parábola de vértice (2,-3), foco (0,2) y eje de simetría el eje y, expándala horizontalmente 3 unidades y desplácela 3 unidades hacia abajo.

## 4.5. Taller 5. Hipérbola

Objetivo:

Resolver situaciones matemáticas en las que se usan propiedades geométricas de figuras cónicas (hipérbola), por medio de transformaciones de las representaciones algebraicas de esas figuras.

Metodología:

Este taller lo desarrollará de manera individual. Contará con las dos horas de clase para el desarrollo y socialización del taller.

Ambientación: Utilizando el programa *Wolfram CDF Player* se ilustra la definición de lugar geométrico de la hipérbola, como se muestra en la figura 4.10. Compruébalo ingresando a la página *http://demonstrations.wolfram.com/* y moviendo p en cualquier posición de la hipérbola.

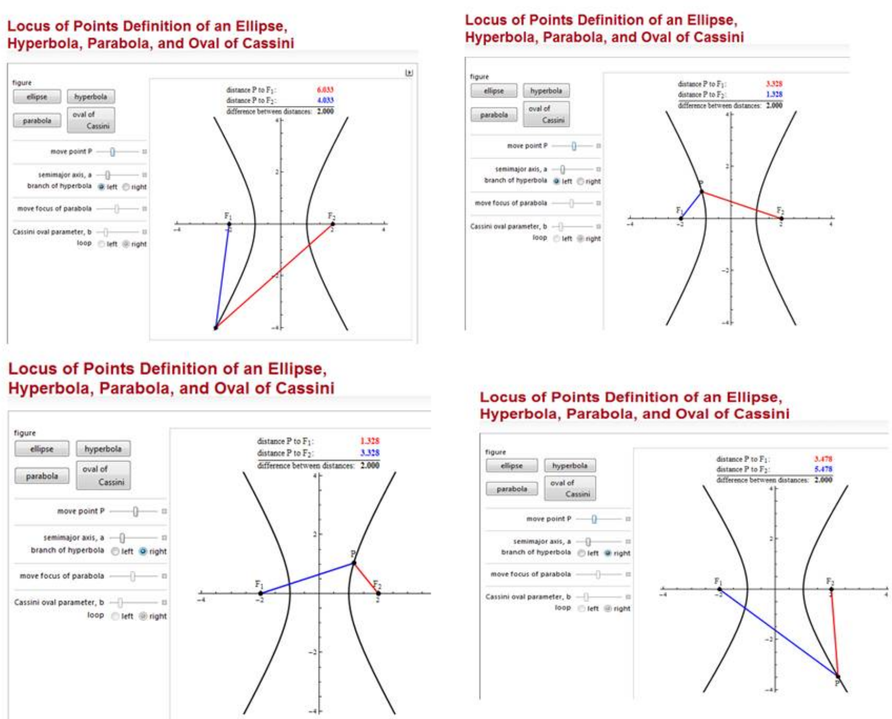



Figura 4.10: lugar geométrico de la hipérbola

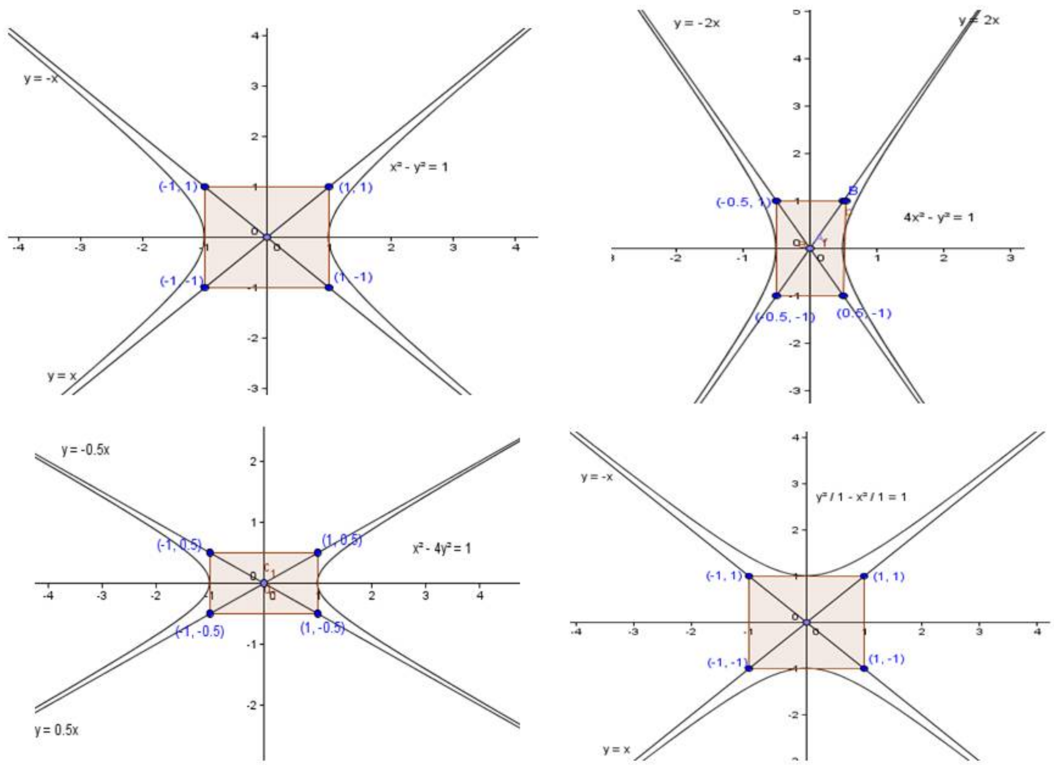



Figura 4.11: hipérbola

Actividad:

1. Observe las gráficas de la figura 4.11

Tome como referencia el conjunto

$$H = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 - y^2 = 1\}$$

a. Compare los rectángulos de cada figura, con el rectángulo de la figura de referencia

b. Se afirma que el segundo y el tercer rectángulo se obtuvieron del primer rectángulo mediante una trasformación, ¿Cuál es la transformación?

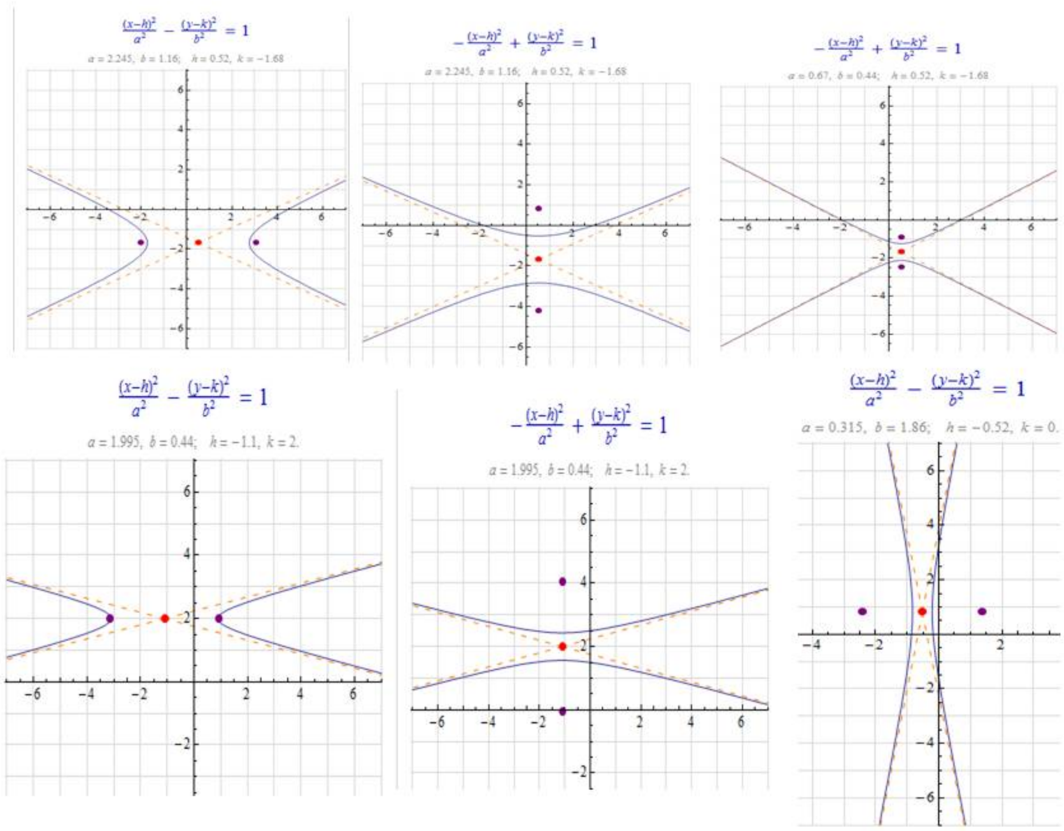



Figura 4.12:

c. ¿Podemos afirmar que esa misma transformación se le aplicó a las asíntotas?

2. Observe la gráfica 4.12 y responda:

a. Tome como referencia $H$ y compárela con la figura que se obtiene cuando $a > 1$, ¿qué cambios observa?.

c. Tome como referencia H y compárela con la figura que se obtiene cuando $b > 1$, ¿qué cambios observa?.

d. Tome como referencia H y compárela con la figura que se obtiene cuando $a < 1$, o, $b < 1$ ¿qué cambios observa?

3. Tome como referencia la hipérbola $H$

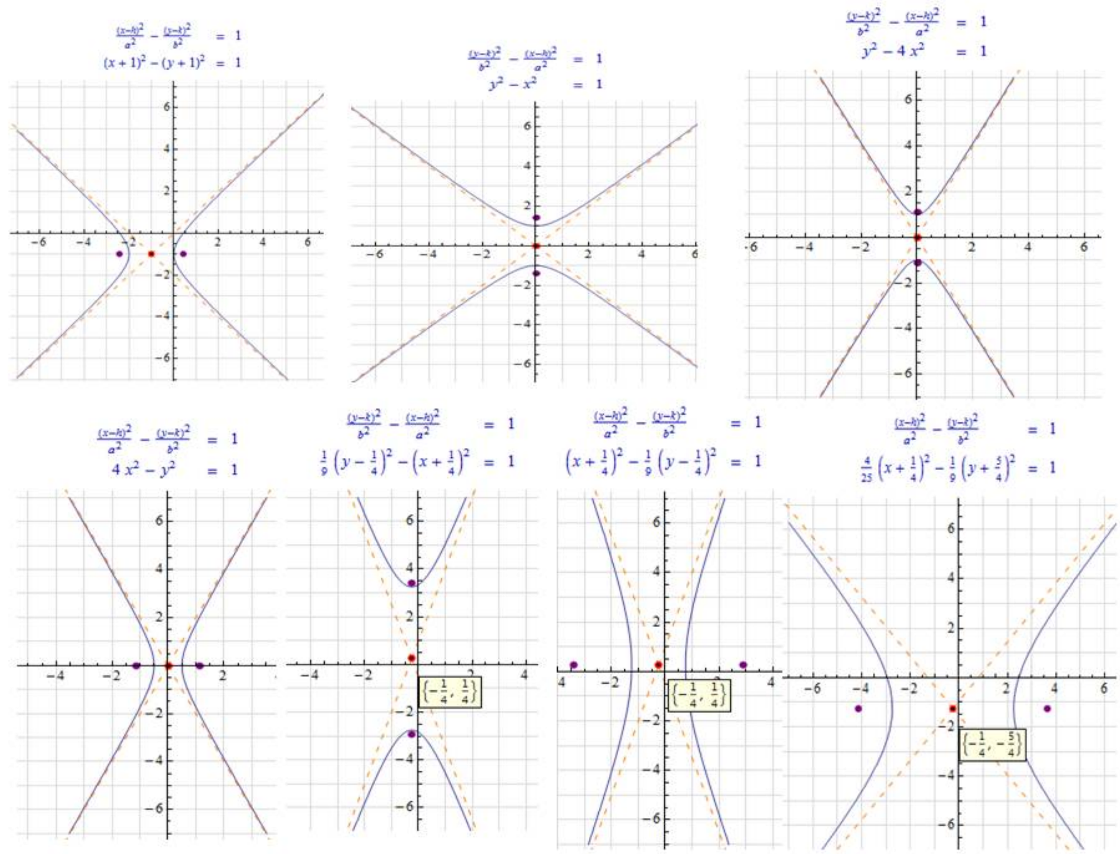


Figura 4.13: hipérbola y transformaciones

a. Describa los cambios que observa en cada figura representada en 4.13.

b. Se afirma que cada una de las hipérbolas se obtuvo de H mediante algunas transformaciones (traslaciones, semihomotecias, etc.). Explique esta afirmación para cada una de las hipérbolas de la figura.

c. Relacione cada transformación con la ecuación de la hipérbola y escriba las conclusiones que obtuvo.

3. Remplace $x$ por $3x$ y $y$ por $\frac{y}{2}$ en la ecuación del conjunto $H$ y nombre al nuevo conjunto con la letra B.

a. Realice la representación gráfica de B.

b. ¿Qué similitudes y qué diferencias hay entre el conjunto H y el conjunto

B? Compare forma, ubicación, etc.

c. ¿Qué transformaciones del plano se identifican al comparar las dos representaciones, si se afirma que B se obtuvo de C mediante una transformación?

4. Remplace $x$ por $x-4$ y $y$ por $y+8$ en el predicado que define al conjunto B del ejercicio anterior.

a. Escriba por comprensión el nuevo conjunto y nómbrelo D.

b. Realice la representación gráfica de D.

c. ¿Qué similitudes y qué diferencias hay entre el conjunto H y el conjunto D? Compare tamaño, ubicación, etc.

5. Siguiendo las instrucciones realice la gráfica, escriba la ecuación e identifique el centro y las asíntotas de la hipérbola.

a.Tome como base la hipérbola $H$, expándala horizontalmente 4 unidades y desplácela 3 unidades a la izquierda y 1 hacia abajo.

b. Tome como base la hipérbola $H$, realice una contracción vertical a la mitad y desplácela 1 unidad a la derecha y 4 hacia arriba.

c. Tome como base la hipérbola $H$, expándala verticalmente 2 unidades y contráigala horizontalmente 2 unidades.

d.Tome como base la hipérbola $H$, expándala una unidad y desplácela 3 unidades hacia abajo.

6. En cada una de las representaciones gráficas de la figura 4.14 identifique la ecuación de la hipérbola.

7. Escriba conclusiones generales y socialicelas con sus compañeros.

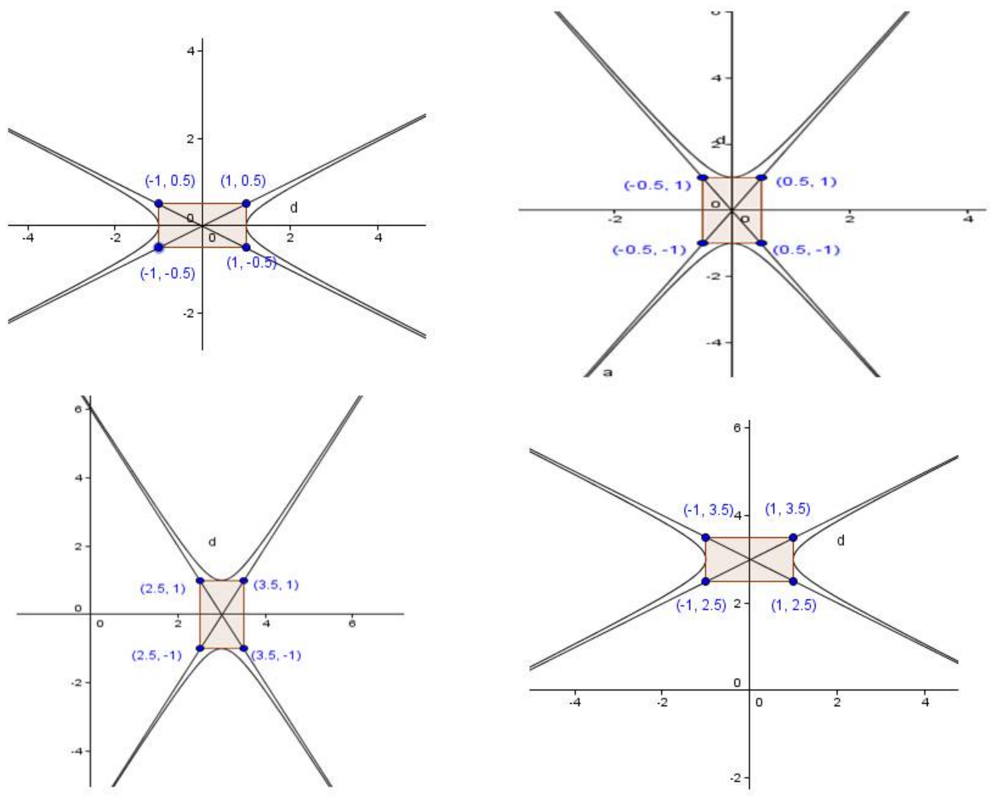



Figura 4.14: hipérbola

# Bibliografía


[1] Alsina C. and Pérez R. y Ruíz C., *Simetría Dinámica*, Síntesis, 1986.

[2] Brumfield., *Geometry*, Addison Wesley, 1962.

[3] Díaz Gómez ., *Tales de Mileto, Apuntes de historia de las matemáticas*, 2002. vol. 1.

[4] Fernández., *Geometría Integrada*, Textos Académicos, 2007.

[5] Kline M., *El pensamiento matemático de la antigüedad a nuestros días*, Alianza, 2002.

[6] Lehmann Ch., *Geometría Analítica*, UTEHA, 1986.

[7] Leithold L., *Cálculo con Geometría Analítica*, Harla, 1987.

[8] Heeren Miller Hornsby, *Matemática: razonamiento y aplicaciones*, Pearson Addison Wesley, 2006. p. 234.

[9] Moise y Downs, *Geometría Moderna*, Addison Wesley, 1962.

[10] Castiblanco Paiba A., *Incorporación de nuevas tecnologías al currículo de matemáticas de la educación media de colombia*, 2001.

[11] Rincón G., *Un recorrido por la Geometría*, Olimpiadas Universidad Antonio Nariño, 2007.

[12] Hernández Lizárraga., *La geometría analítica de Descartes, Fermat: ¿y Apolonio?, Apuntes de historia de las matemáticas* (2002). vol. 1.

[13] Ministerio de Educación Nacional, *Estándares Curriculares, un compromiso con la excelencia*, Al tablero www.mineducacion.gov.co (mayo. 2002).

[14] Ministerio de Educación Nacional. MEN., *La Revolución Educativa. Estándares Básicos de Matemáticas y Lenguaje. Educación básica y media*, www.colombiaaprende.edu.co (Mayo 12, 2003).

[15] S. Wolfram, *Wolfram CDF playeer*, Wolfram research, 1987. http://www.wolfram.com/company/background.html.

[16] www.funes.uniandes.edu.co.

[17] www.conicas.solomatematicas.com.