El Problema De Cauchy Asociado A Una Ecuación Del Tipo ZK-BBM

Iván Darío Vega Pacheco

Universidad Nacional de Colombia
Facultad De Ciencias
Departamento De Matemáticas
Bogotá D.C.
2011

El Problema De Cauchy Asociado A Una Ecuación Del Tipo ZK-BBM

Iván Darío Vega Pacheco

Trabajo final presentado como requisito parcial para optar al título de:

Magister en Ciencias Matemáticas

Director:
Guillermo Rodríguez Blanco

Universidad Nacional de Colombia
Facultad De Ciencias
Departamento De Matemáticas
Bogotá D.C.
2011

Resumen

En este trabajo trataremos con el buen planteamiento local y global en los espacios de Sobolev H^s no periódicos del problema de valor inicial

$$\begin{cases} u \in C([0,T], H^s(\mathbb{R}^2)) \\ u_t + a(u^n)_x + b(u_{xt} + u_{yy})_x = 0 \\ u(0) = \varphi \in H^s(\mathbb{R}^2), \end{cases} \tag{1}$$

donde a y b son constantes reales con $b < 0$ y n es un entero positivo mayor o igual a 2.

La ecuación (1) es una del tipo ZK-BBM, la cual modela específicamente fenómenos físicos que ocurren en teoría de fluidos.[1] Con el fin de tratar el buen planteamiento local de (1), usaremos una ecuación integral equivalente, para aplicarle el teorema del punto fijo de Banach en un espacio adecuado. Posteriormente, obtendremos estimativas a priori de las soluciones, que nos conducirán a obtener resultados del buen planteamiento global de (1).

Palabras claves: Ecuación Benjamin-Bona-Mahony (BBM); Ecuación Zakharov-Kuznetsov (ZK); Buen planteamiento local y global.

[1] A.-M. Wazwaz, *Compact and noncompact physical structures for the ZK-BBM equation* Appl. Math. Comput. 169 (2005) 713-725

Abstract

The project's aim is consider the local and golbal well-posedness in non periodics Sobolev's spaces H^s of the initial value problem

$$\begin{cases} u \in C([0,T], H^s(\mathbb{R}^2)) \\ u_t + a(u^n)_x + b(u_{xt} + u_{yy})_x = 0 \\ u(0) = \varphi \in H^s(\mathbb{R}^2), \end{cases} \tag{0.1}$$

where a y b are real constants with $b < 0$ and n is a positive integer with $n \geq 2$.
The equation (0.1) is asociated to type ZK-BBM, and it is present in some phisical problems like the Fluids Theory.[2] In the local problem, we shall use an equivalent integral equation and apply the Banach fixed point theorem in an appropiate space. Later we shall obtain some estimates a *priori* of solutions, and so in this way, some results about the global well-posedness of (0.1).

Keywords: Benjamin-Bona-Mahony (BBM) equation; The Zakharov-Kuznetsov (ZK) equation; Local and global well-posedness.

[2] A.-M. Wazwaz, *Compact and noncompact physical structures for the ZK-BBM equation* Appl. Math. Comput. 169 (2005) 713-725

Contenido

Introducción

En el modelamiento de algunos fenómenos físicos estudiados en la teoría de fluidos es bien conocida la ecuación Korteweg-de Vries (KdV) y su versión generalizada (gKdV)

$$u_t = u_{xxx} + f(u)_x \quad (x,t) \in \mathbb{R}^2.$$

A partir de esta surgieron variaciones como es el caso de la ecuación de Zakharov-Kuznetsov (ZK)

$$u_t = (u_{xx} + u_{yy})_x + uu_x,$$

y su versión generalizada (gZK)

$$u_t = (u_{xx} + u_{yy})_x + f(u)_x,$$

las cuales son versiones bidimensionales de la KdV. Otra ecuación importante es la de Bemjamin-Bona-Mahony (BBM), cuya versión generalizada (gBBM) es

$$u_t - u_{xxt} + u_x + f(u)_x = 0,$$

y surge como una alternativa a la gKdV. Tal como sucedió con la gKdV, existe también una generalización bidimensional de la gBBM, la cual es conocida como la ecuación gZK-BBM dada por

$$u_t - (u_{xt} + u_{yy})_x + u_x + f(u)_x = 0.$$

En este trabajo trataremos con el buen planteamiento local y global en los espacios de Sobolev H^s no periódicos del problema de valor inicial

$$\begin{cases} u \in C([0,T], H^s(\mathbb{R}^2)) \\ u_t + a(u^n)_x + b(u_{xt} + u_{yy})_x = 0 \\ u(0) = \varphi \in H^s(\mathbb{R}^2), \end{cases} \tag{0.1}$$

donde a y b son constantes reales con $b < 0$ y n es un entero positivo mayor o igual a 2.

La ecuación (0.1) es una del tipo gZK-BBM, la cual modela específicamente fenómenos físicos que ocurren en teoría de fluidos. Véase ([1],[4]), para más información sobre este asunto.

Con el fin de tratar el buen planteamiento local de (0.1), usaremos una ecuación integral equivalente, para aplicarle el teorema del punto fijo de Banach en un espacio adecuado. Posteriormente, obtendremos estimativas a priori de las soluciones, que nos conducirán a obtener resultados del buen planteamiento global de (0.1).

Capítulo 1

Preliminares

Notación

En este capítulo se introducirán algunas notaciones básicas, además de algunas definiciones y resultados útiles para el desarrollo del trabajo. Las demostraciones serán omitidas, sin embargo se dará una referencia donde puedan hallarse.

- $\mathscr{B}(X, Y)$ es el espacio de todos los operadores lineales acotados de un espacio de Banach X a un espacio de Banach Y.
- $\mathscr{B}(X)$=$\mathscr{B}(X, X)$.
- $C([0,T], X)$ es el espacio de Banach de las funciones continuas de $[0,T]$ en el espacio de Banach X, dotado de la norma $\|u\|_{X,\infty} = \sup_{[0,T]}\|u(t)\|_X$
- $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$ es un multiindice.
- Si α es un multiindice y $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ entonces

  a) $|\alpha| = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n$.

  b) $x^\alpha = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \cdots x_n^{\alpha_n}$

  c) $\partial^\alpha = \left(\dfrac{\partial}{\partial x_1}\right)^{\alpha_1} \left(\dfrac{\partial}{\partial x_2}\right)^{\alpha_2} \cdots \left(\dfrac{\partial}{\partial x_n}\right)^{\alpha_n}$
- $\Lambda^s = (1 - \triangle)^{\frac{s}{2}}$
- $L^p_s = L^p_s(\mathbb{R}^n) = \Lambda^{-s} L^p(\mathbb{R}^n)$ con $\| \quad \|_{L^p_s} = | \quad |_{s,p}$
- $\varphi_n \xrightarrow{H^s} \varphi$ convergencia en H^s.

Definición 1.1. *La transformada de Fourier de una función $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ es la función $\mathscr{F} f = \widehat{f}$ definida por*

$$(\mathscr{F} f)\widehat{\ }(\xi) = \widehat{f}(\xi) = (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-i\xi\cdot x} dx$$

donde $x = (x_1, x_2, \dots, x_n), \xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n$ *y*

$$x \cdot \xi = \sum_{j=1}^{n} x_j \xi_j$$

es el producto interno usual en $\mathbb{R}^n$.

Proposición 1.1. *Sea* $\mathscr{P} = C^{\infty}(\mathbb{R}^n)$*. Este espacio con la métrica,*

$$d(\phi, \psi) = \sum_{j=0}^{\infty} 2^{-j} \frac{\|\phi^{(j)} - \psi^{(j)}\|_{\infty}}{1+\|\phi^{(j)} - \psi^{(j)}\|_{\infty}}$$

donde $\phi, \psi \in \mathscr{P}$*, es un espacio métrico completo.*

Definición 1.2. *El espacio de Schwartz* $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ *es el conjunto de todas las* $f \in \mathscr{P}$ *tales que*

$$\|f\|_{\alpha,\beta} = \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \left| x^{\alpha} \partial^{\beta} f(x) \right| < \infty \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{N}^n.$$

El espacio de Schwartz es también conocido como es espacio de decrecimiento rápido de las funciones en $\mathscr{P}$.

Teorema 1.1. *Un funcional lineal* f *en* $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ *pertenece a* $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$ *si y solo si existen constantes* $C \geq 0$ *y* $l \in \mathbb{N}$*, tal queda*

$$|\langle f, \varphi \rangle| \leq C \sum_{|\alpha|, |\beta| \leq l} \|\varphi\|_{\alpha,\beta} \quad \varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n).$$

Demostración. Véase [7] Teorema 7.7. ∎

Observación 1.1. *En el caso de* $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$*, las funciones en* L^p *definen distribuciones en el sentido usual, es decir, dada una función en* $L^p(\mathbb{R}^n)$*,* $1 \leq p \leq \infty$*, la fórmula*

$$\langle T_f, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \varphi(x) dx \quad \forall \varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$$

define un elemento de $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$*. Por supuesto, no todas las distribuciones se definen de esta forma y la* δ_x*, es un ejemplo de ello. Por simplicidad se escribe* $T_f = f$.

Definición 1.3. *La transformada de Fourier de una función* $f \in \mathscr{S}'$ *es la función* $\mathscr{F} f = \widehat{f}$ *definida por*

$$\langle \widehat{f}, \varphi \rangle = \langle f, \widehat{\varphi} \rangle \quad \forall \varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n).$$

Teorema 1.2. *La transformada de Fourier* $\mathscr{F} : \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n) \to \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$ *es un isomorfismo, es continua y con inversa continua. En otras palabras,* $(\mathscr{P}')\widehat{} = \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$.

Demostración. Véase [7] Teorema 3.172. ∎

Definición 1.4. *Sea $s \in \mathbb{R}$. Los espacios de Sobolev (del tipo L^2) en $\mathbb{R}^n$ son los siguientes subconjuntos de $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$:*

$$H^s(\mathbb{R}^n) = \{f \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n) \,/\, (1+|\xi|^2)^{s/2}\widehat{f} \in L^2(\mathbb{R}^n)\}$$

Teorema 1.3. *Sea $s \in \mathbb{R}$. Entonces $H^s(\mathbb{R}^n)$ es un espacio de Hilbert con respecto al producto interno*

$$(f \,|\, g)_s = \int_{\mathbb{R}^n} (1+|\xi|^2)^s \widehat{f}(\xi)\overline{\widehat{g}(\xi)}d\xi.$$

Además se cumplen las siguientes afirmaciones

1. *$H^s(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow H^r(\mathbb{R}^n)$ para todo $s \geq r$, donde $\hookrightarrow$ denota contenencia continua y densa.*
2. *$\big(H^s(\mathbb{R}^n)\big)'$, el dual de $H^s(\mathbb{R}^n)$, es isometricamente isomorfo a $H^{-s}(\mathbb{R}^n)$ para todo $s \in \mathbb{R}$.*
3. *$f \in H^m(\mathbb{R}^n)$, $m \in \mathbb{N}$, si y solo si $\partial^\alpha f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ para todos los multiindices α tales que $|\alpha| \leq m$. En este caso las normas*

$$\|f\|_s = \left(\int_{\mathbb{R}^n} (1+|\xi|^2)^s |\widehat{f}(\xi)|^2 d\xi\right)^{1/2} \quad y \quad |||f|||_s = \left(\sum_{j=0}^{m} \|\partial^\alpha f\|_0^2\right)^{1/2}$$

   son equivalentes.

4. *El Lema de Sobolev se cumple, es decir, $H^s(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow C_\infty(\mathbb{R}^n)$ para todo $s > \frac{n}{2}$, donde $C_\infty(\mathbb{R}^n)$ denota el conjunto de todas las funciones continuas que tienden a cero en el infinito.*

Demostración. Véase [7] Teorema 7.75. ■

Teorema 1.4. *$H^s(\mathbb{R}^n)$ es un álgebra de Banach para todo $s > \frac{n}{2}$. En particular, existe una constante $c_s \geq 0$ tal que*

$$\|f\,g\|_s \leq c_s \|f\|_s \|g\|_s \quad \forall f, g \in H^s(\mathbb{R}^n).$$

Demostración. Véase [7] Teorema 7.77. ■

Definición 1.5. *Sea H un espacio de Hilbert. Un grupo unitario fuertemente continuo a un parámetro en H es una aplicación $t \in \mathbb{R} \longmapsto U(t) \in \mathscr{B}(H)$ tal que:*

1. *U es unitario para todo $t \in \mathbb{R}$,*
2. *$U(t+t') = U(t)U(t')$, para todo $t, t' \in \mathbb{R}$,*
3. *$\lim\limits_{t \to t'} \|U(t)\phi - U(t')\phi\|_H = 0$, para todo $t, t' \in \mathbb{R}$, y $\phi \in H$.*

Definición 1.6. *Sea (X, d) un espacio métrico. Una Contracción es una aplicación $T : X \longrightarrow X$ tal que: $d(T(x), T(y)) \leq \lambda d(x, y)$ para todo $x, y \in X$ y $\lambda \in [0, 1]$. Si $\lambda < 1$ se dice que T es una contracción estricta.*

Teorema 1.5 (**Teorema del punto fijo de Banach**). *Sea X un espacio métrico completo y $T : X \longrightarrow X$ es una contracción estricta, entonces T tiene un único punto fijo, es decir, existe un único $x_0 \in X$ tal que $T(x_0) = x_0$.*

Teorema 1.6 (**Desigualdad de Gronwall**). *Sea $k \in L^1([a, b])$ con $k \geq 0$ y $f, g \in C([0, T], \mathbb{R})$ tales que*

$$f(t) \leq g(t) + \int_a^t k(s)f(s)ds, \quad a \leq t \leq b$$

entonces

$$f(t) \leq g(t) + \int_a^t k(s)e^{\left[\int_a^s k(r)dr\right]} g(s)ds, \quad a \leq t \leq b.$$

En particular si g es constante, se tiene:

$$f(t) \leq g(t)e^{\left[\int_a^t k(s)ds\right]}, \quad a \leq t \leq b.$$

Teorema 1.7 (**Desigualdad de Young**). *Sean $a, b \geq 0$ y $p, q > 1$ tales que $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$, entonces se cumple*

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

Teorema 1.8 (**Desigualdad de Gagliardo-Nirenberg**). *Si $f \in H^s(\mathbb{R}^n)$,entonces existe $K > 0$ tal que*

$$\|\nabla^j f\|_p \leq K \|\nabla^m f\|_r^\theta \|f\|_q^{1-\theta}$$

donde

$$\frac{1}{p} = \frac{j}{n} + \theta\left(\frac{1}{r} - \frac{m}{n}\right) + (1-\theta)\frac{1}{q} \quad y \quad \frac{j}{m} \leq \theta \leq 1.$$

Demostración. Véase [8] Teorema 370. ∎

Teorema 1.9 (**Kato-Ponce**). *Sean $s > 0$ y $1 < p < \infty$, entonces $L_s^p \cap L^\infty$ es un álgebra de Banach. Además*

$$|fg|_{s,p} \leq c\big(\|f\|_{L^\infty}|g|_{s,p} + |f|_{s,p}\|g\|_{L^\infty}\big).$$

Observación 1.2. *Dado que $\|\Lambda^s u^n\|_0 = \|\Lambda^s u^{n-1}u\|_0 = |u^{n-1}u|_{0,2}$, si hacemos $f = u^{n-1}$ y $g = u$ en el teorema anterior, y además lo aplicamos sucesivas veces se tiene*

$$\|\Lambda^s u^{n-1}u\|_0 \leq c\|u\|_{L^\infty}^{n-1}\|\Lambda^s u\|_0. \tag{1.1}$$

Capítulo 2

El Problema Local

En este capítulo consideraremos el buen planteamiento local de problema de Cauchy asociado a la ecuación (0.1).
Los siguientes resultados serán necesarios para crear las condiciones adecuadas para un buen planteamiento local de la ecuación. Para comenzar nótese que la ecuación (0.1) es equivalente a

$$\begin{aligned} u_t + a(u^n)_x + bu_{xxt} + bu_{xyy} &= 0 \\ \partial_t(1 + b\partial_x^2)u &= -b\partial_x\partial_{yy}u - a\partial_x(u^n) \\ \partial_t u &= -b(1 + b\partial_x^2)^{-1}\partial_x\partial_{yy}u - a\partial_x(1 + b\partial_x^2)^{-1}(u^n). \end{aligned} \tag{2.1}$$

En la ecuación (2.1) sea $A = -b(1 + b\partial_x^2)^{-1}\partial_x\partial_{yy}$ y $B = a\partial_x(1 + b\partial_x^2)^{-1}$.

Proposición 2.1. *El operador $B = a\partial_x(1 + b\partial_x^2)^{-1} \in \mathscr{B}(H^s)$ y además $B(u^n) \in H^s$ para todo $u \in H^s$. y $n \geq 2$.*

Demostración. Sea $\phi \in H^s$, entonces

$$\begin{aligned} \|B\phi\|_s^2 =& \|a\partial_x(1 + b\partial_x^2)^{-1}\phi\|_s^2 \\ &= |a| \int_{\mathbb{R}^2} \frac{\xi^2}{(1 - b\xi^2)^2}(1 + \xi^2 + \eta^2)^s|\widehat{\phi}|^2 d\xi d\eta \\ &\leq |a| \int_{\mathbb{R}^2} (1 + \xi^2 + \eta^2)^s|\widehat{\phi}|^2 d\xi d\eta \\ &\leq |a| \, \|\phi\|_s^2. \end{aligned}$$

Ahora, dado $s > 1$ se tiene entonces que H^s es un álgebra de Banach y por tanto si $u \in H^s$, se tiene que $u^n \in H^s$ y $\|B(u^n)\|_s^2 < \infty$.

Si se define la función $f : H^s \to H^s$ como $f(u) = B(u^n)$, se observa que para $u \in H^s$,

$$f(u) \in H^s. \tag{2.2}$$

■

Proposición 2.2. *La funcion definida en (2.2) satisface la condición de Lipschitz local*

Demostración. Para efectos de la demostración tengamos en cuenta dos detalles importantes

(i) si $s > 1$, entonces el Teorema 1.3−(4) implica que

$$f \leq \|f\|_\infty \leq \|\widehat{f}\|_{l^1} \leq c\|f\|_s, \quad f \in H^s.$$

(ii) Si $s > 1$, entonces el Teorema 1.4 implica que existe $c_s \geq 0$ constante tal que

$$\|fg\| \leq c_s\|f\|_s\|g\|_s, \quad \forall f, g \in H^s.$$

Entonces si $u, v \in H^s$ y $t \in [0, T]$

$$\begin{aligned} u^n - v^n &= (u-v)(u^{n-1} + u^{n-2}v + \cdots + uv^{n-2} + v^{n-1}) \\ &\leq (u-v)\, c_s^0\|u^{n-1}\|_s + c_s^1\|u^{n-2}v\|_s + \cdots + c_s^{n-2}\|uv^{n-2}\|_s + c_s^{n-1}\|v^{n-1}\|_s \end{aligned}$$

Ahora por (ii)

$$\|u^{n-1-i}v^i\|_s \leq d_s^i\|u\|_s^{n-1-i}\|v\|_s^i, \quad i = 0, 1, \ldots, n-1.$$

Sea $K = \text{máx}\{c_i d_i \,/\, i = 0, 1, \ldots, n-1.\}$, entonces

$$u^n - v^n \leq (u-v)K(\,\|u\|_s^{n-1} + \|u\|_s^{n-2}\|v\|_s + \cdots \|u\|_s\|v\|_s^{n-2} + \|v\|_s^{n-1}).$$

Sea

$$\begin{aligned} \big(L(\|u\|_s\,, \|v\|_s)\big)^{1/2} = K \sup_{t\in[0,T]} (\,\|u(t)\|_s^{n-1} + \|u(t)\|_s^{n-2}\|v(t)\|_s + \cdots \\ + \|u(t)\|_s\|v(t)\|_s^{n-2} + \|v(t)\|_s^{n-1}), \end{aligned}$$

entonces

$$\begin{aligned} (u^n - v^n)^\wedge &\leq \big(L(\|u\|_s\,, \|v\|_s)\big)^{1/2}(u-v)^\wedge \\ |(u^n - v^n)^\wedge|^2 &\leq L(\|u\|_s\,, \|v\|_s)\,|\,(u-v)^\wedge|^2 \end{aligned} \tag{2.3}$$

por tanto

$$\begin{aligned} \|f(u) - f(v)\|_s &= \|a\partial_x(1 + b\partial_x^2)^{-1}(u^n - v^n)\|_s \\ &= |a| \int_{\mathbb{R}^2} \frac{\xi^2}{(1 - b\xi^2)^2}(1 + \xi^2 + \eta^2)^s|(u^n - v^n)^\wedge|^2 d\xi d\eta \\ &\leq |a|\, L(\|u\|_s\,, \|v\|_s) \int_{\mathbb{R}^2} \frac{\xi^2}{(1 - b\xi^2)^2}(1 + \xi^2 + \eta^2)^s|\,(u-v)^\wedge|^2 d\xi d\eta \\ &\leq |a|\, L(\|u\|_s\,, \|v\|_s)\,\|u - v\|_s. \end{aligned} \tag{2.4}$$

Nótese además que $L(\cdot|\cdot)$ es no decreciente respecto a cada uno de sus argumentos. Se tiene entonces de (2.4) la condición de Lipschitz local. ■

Proposición 2.3. *Sea* $A = -b(1+b\partial_x^2)^{-1}\partial_x\partial_{yy}$*, entonces la aplicación* $t \in \mathbb{R} \longmapsto U(t) = e^{tA}$ *es un grupo unitario fuertemente continuo a un parámetro en* $H^s(\mathbb{R}^2)$*.*

Demostración. La aplicación $U(t)$ también puede expresarse como

$$U(t)\varphi = e^{tA}\varphi = \left(e^{-b(1-b\xi^2)^{-1}(i\xi)(-\eta^2)t}\widehat{\varphi}\right)^{\vee}, \quad \varphi \in H^s, t \in \mathbb{R}.$$

$U(t)$ cumple con las siguientes condiciones:

1. $U(t)$ es unitario para todo $t \in \mathbb{R}$

$$\| e^{tA}\varphi\|_s = \left\|\left(e^{-b(1-b\xi^2)^{-1}(i\xi)(-\eta^2)t}\widehat{\varphi}\right)^{\vee}\right\|_s = \|\varphi\|_s \tag{2.5}$$

2.

$$\begin{aligned} U(t+t')\varphi &= \int_{\mathbb{R}^2} e^{(t+t')A}\varphi\, dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} e^{tA} e^{t'A}\varphi\, dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} U(t)U(t')\varphi\, dx \\ &= U(t)U(t')\varphi \end{aligned}$$

entonces $U(t+t') = U(t)U(t')$.

3. Dado $\epsilon > 0$ la aplicación $t \in [\epsilon, +\infty) \longmapsto U(t)\varphi$ es uniformemente continua con respecto a la norma $H^{s-2\alpha}$, $\alpha \in [0,1]$.

$$\begin{aligned} \|U(t)\varphi - U(t')\varphi\|_{s-2\alpha} &= \int_{\mathbb{R}^2} (1+\xi^2+\eta^2)^{s-2\alpha} | e^{tA} - e^{t'A}|^2 |\widehat{\varphi}|^2 d\xi d\eta \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} (1+\xi^2+\eta^2)^{s-2\alpha} | e^{(t-t')A} - 1|^2 |\widehat{\varphi}|^2 d\xi d\eta. \end{aligned} \tag{2.6}$$

Por el teorema del valor medio se tiene

$$| e^{(t-t')A} - 1| = |A e^{\tau A}||t-t'| = \left|\frac{ib\xi\eta^2}{1-b\xi^2}\right||t-t'| \leq |\eta^2||t-t'| \tag{2.7}$$

y además

$$| e^{(t-t')A} - 1| \leq 2. \tag{2.8}$$

Entonces

$$\begin{aligned} | e^{(t-t')A} - 1|^2 &= | e^{(t-t')A} - 1|^{2(1-\alpha)} | e^{(t-t')A} - 1|^{2\alpha} \\ &\leq 2^{2(1-\alpha)} |\eta^2|^{2\alpha} |t-t'|^{2\alpha}. \end{aligned} \tag{2.9}$$

Como $\frac{|\eta^2|^{2\alpha}}{(1+\xi^2+\eta^2)^{2\alpha}} \leq 1$, la ecuación (2.6) queda

$$\begin{aligned}\|U(t)\varphi - U(t')\varphi\|_{s-2\alpha} &\leq \int_{\mathbb{R}^2} (1+\xi^2+\eta^2)^s 2^{2(1-\alpha)}|t-t'|^{2\alpha}|\widehat{\varphi}|^2 d\xi d\eta \\ &\leq 4|t-t'|^{2\alpha}\|\varphi\|_s, \end{aligned} \tag{2.10}$$

haciendo $t \to t'$ se tiene que $\|U(t)\varphi - U(t')\varphi\|_{s-2\alpha} \to 0$. En particular

$$\lim_{t\to t'} \quad \|U(t)\varphi - U(t')\varphi\|_s = 0$$

■

Por comodidad, el problema de Cauchy dado por la ecuación (0.1), lo escribiremos de la siguiente forma

$$\begin{cases} \partial_t u = Au + f(u) \\ u(0) = \varphi \in H^s \end{cases} \tag{2.11}$$

Por el método de variación de parámetros se puede identificar una posible solución para $s > 1$, dada por

$$u(t) = e^{tA}\varphi + \int_0^t e^{(t-\tau)A} f(u(\tau))d\tau, \tag{2.12}$$

en la cual por (2.2) y (2.5) se tiene que $u \in C\big([0,T], H^s(\mathbb{R}^2)\big)$.

Proposición 2.4. *Sea $u \in C\big([0,T], H^s(\mathbb{R}^2)\big)$ con $s > 1$, una solución de (2.11), entonces u satisface (2.12). Recíprocamente, si $u \in C\big([0,T], H^s(\mathbb{R}^2)\big)$ es una solución de (2.12), entonces $u \in C^1\big([0,T], H^{s-2}(\mathbb{R}^2)\big)$ y satisface (2.11) con derivada*

$$\lim_{h\to 0} \quad \left\| \frac{u(t+h)-u(t)}{h} - Au - f(u) \right\|_{s-2} = 0 \tag{2.13}$$

Demostración. Si u satisface (2.11), por el método de variación de parámetros se tiene que u satiface (2.12).
Recíprocamente, sea u tal que satisface (2.12). Derivando a ambos lados con respecto al tiempo se tiene

$$\partial_t u(t) = Ae^{tA}\varphi + \partial_t \int_0^t e^{(t-\tau)A} f(u(\tau))d\tau. \tag{2.14}$$

ahora bien

$$\begin{aligned}\partial_t \int_0^t e^{(t-\tau)A} f(u(\tau))d\tau &= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\Big\{\int_0^{t+h} e^{(t+h-\tau)A} f(u(\tau))d\tau \\ &\qquad - \int_0^t e^{(t-\tau)A} f(u(\tau))d\tau\Big\} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\Big\{\int_0^t \Big[e^{(t+h-\tau)A} - e^{(t-\tau)A}\Big] f(u(\tau))d\tau \\ &\qquad + \int_t^{t+h} e^{(t+h-\tau)A} f(u(\tau))d\tau\Big\}. \end{aligned} \tag{2.15}$$

Por un lado se tiene el valor principal de una función continua, es decir

$$\lim_{h\to 0} \Big\|\int_t^{t+h} e^{(t+h-\tau)A} f(u(\tau))d\tau - f(u(t))\Big\|_{s-2} = 0. \tag{2.16}$$

Por otro lado

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\int_0^t \Big[e^{(t+h-\tau)A} - e^{(t-\tau)A}\Big] f(u(\tau))d\tau \\ &= \int_0^t \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\Big[e^{(t+h-\tau)A} - e^{(t-\tau)A}\Big] f(u(\tau))d\tau \\ &= \int_0^t \partial_t e^{(t-\tau)A} f(u(\tau))d\tau \\ &= \int_0^t A e^{(t-\tau)A} f(u(\tau))d\tau \\ &= A\int_0^t e^{(t-\tau)A} f(u(\tau))d\tau. \end{aligned} \tag{2.17}$$

Si de la ecuación (2.12) despejamos la integral, se obtiene

$$\lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\int_0^t \Big[e^{(t+h-\tau)A} - e^{(t-\tau)A}\Big] f(u(\tau))d\tau = A\big(u(t) - e^{tA}\varphi\big). \tag{2.18}$$

De las ecuaciones (2.15),(2.16) y (2.18), la ecuación (2.14) queda

$$\partial_t u(t) = Ae^{tA}\varphi + A\big(u(t) - e^{tA}\varphi\big) + f(u(\tau))$$

$$\partial_t u(t) = Au(t) + f(u(t)). \tag{2.19}$$

Haciendo $t = 0$ en (2.12), se tiene que $u(0) = \varphi$. Se concluye entonces que u satisface (2.11).

■

2.1. Existencia

Proposición 2.5. *Se define el conjunto*

$$\chi_s(T,M,\varphi)=\{u\in C\big([0,T],H^s(\mathbb{R}^2)\big)/\quad \|u(t)-e^{tA}\varphi\|\le M\},\quad M\ge 0,$$

y la métrica

$$d_{s,T}(u,v)=\sup_{[0,T]}\|u(t)-v(t)\|_s.$$

El espacio $\big(\chi_s,d_{s,T}\big)$*, es un espacio métrico completo.*

Demostración. El conjunto $\chi_s(T,M,\varphi)$ es un subconjunto cerrado de $C\big([0,T], H^s(\mathbb{R}^2)\big)$ el cual es completo con la métrica $d_{s,T}$, que es precisamente la inducida por la norma $\|u\|_{s,\infty}$. Por tanto $\big(\chi_s,d_{s,T}\big)$ es un espacio métrico completo. ■

Teorema 2.1. *La función* $\psi:\chi_s(T,M,\varphi)\to\chi_s(T,M,\varphi)$ *definida por*

$$\psi(u)(t)=e^{tA}\varphi+\int_0^t e^{(t-\tau)A}f(u(\tau))d\tau, \tag{2.20}$$

es una contracción y además existe al menos una solución al problema (2.11).

Demostración. Veamos primero que $\psi(u)\in\chi_s(T,M,\varphi)$. Dado $M\ge 0$, se tiene

$$\begin{aligned}\|\psi(u)(t)-e^{tA}\varphi\|_s &\le \int_0^t \|e^{(t-\tau)A}f(u)\|_s d\tau\\ &\le \int_0^t \|f(u)\|_s d\tau\\ &\le \int_0^t |a|L(\|u\|_s,0)\,\|u(t)\|_s d\tau \quad, \text{ por (2.4).}\end{aligned}$$

Dado $u\in\chi_s(T,M,\varphi)$, por (2.5)

$$\|u(\tau)\|_s\le\|u(\tau)-e^{\tau A}\varphi\|_s+\|e^{\tau A}\varphi\|_s\le M+\|\varphi\|_s$$

Luego, si $t\in[0,T]$

$$\begin{aligned}\|\psi(u)(t)-e^{tA}\varphi\|_s &\le |a|L(\|u\|_s,0)\,(M+\|\varphi\|_s)t\\ &\le |a|L(M+\|\varphi\|_s,0)(M+\|\varphi\|_s)T\end{aligned}$$

Sea $\alpha(M,\,\|\varphi\|_s)=[\,|a|L(M+\|\varphi\|_s,0)(M+\|\varphi\|_s)\,]^{-1}M$. Si $0<T<\alpha(M,\,\|\varphi\|_s)$, entonces se tiene

$$\|\psi(u)(t)-e^{tA}\varphi\|_s\le M \tag{2.21}$$

es decir, $\psi(u)(t) \in \chi_s(T, M, \varphi)$.
Veamos ahora que ψ es una contracción. Dados $u, v \in \chi_s$

$$\|\psi(u)(t) - \psi(v)(t)\|_s \leq \int_0^t \|e^{(t-\tau)A}(f(u) - f(v))\|_s d\tau$$

$$\begin{aligned}\|\psi(u)(t) - \psi(v)(t)\|_s &\leq \int_0^t \|f(u) - f(v)\|_s d\tau \\ &\leq |a| L(\|u\|_s\,,\, \|v\|_s) \int_0^t \|u(\tau) - v(\tau)\|_s d\tau \\ &\leq |a| L(M + \|\varphi\|_s\,, M + \|\varphi\|_s)\, d_{S,T}(u, v)\, T\end{aligned}$$

Sea $\beta(M, \|\varphi\|_s) = [\,|a| L(M + \|\varphi\|_s\,, M + \|\varphi\|_s)\,]^{-1}$. Si se tienen las opciones

$$0 < T < \alpha(M, \|\varphi\|_s) < \beta(M, \|\varphi\|_s) \quad \text{ó} \quad 0 < T < \beta(M, \|\varphi\|_s) < \alpha(M, \|\varphi\|_s)$$

en cualquier caso se cumple que

$$0 < |a| L(M + \|\varphi\|_s\,, M + \|\varphi\|_s)\, T < 1.$$

Si hacemos $\lambda = |a| L(M + \|\varphi\|_s\,, M + \|\varphi\|_s)\, T$ y $\widetilde{T} = \widetilde{T}(M, \|\varphi\|_s) = \text{mín}\,(\alpha, \beta)$, se cumple que

$$d_{s,\widetilde{T}}\,(\psi(u)(t), \psi(v)(t)) \leq \lambda\, d_{s,\widetilde{T}}\,(u, v), \quad 0 < \lambda < 1.$$

Por tanto ψ es una contracción. Aplicando entonces el Teorema de punto fijo de Banach, existe $u \in \chi_s$ tal como se indica en la ecuación (2.12), es decir

$$u(t) = e^{tA}\varphi + \int_0^t e^{(t-\tau)A} f(u(\tau)) d\tau$$

Esto garantiza la existencia de soluciones para el problema de Cauchy (2.11). ■

2.2. Dependencia continua

Teorema 2.2. *La función $\varphi \longmapsto u$ es continua.*

Demostración. Sea $(\varphi_n)_{n=1}^{\infty}$ tal que cada φ_n es una condición inicial del problema de Cauchy (2.11) y además $\varphi_n \xrightarrow{H^s} \varphi$. Sea también $u_n \in C([0, \widetilde{T}_n), H^s(\mathbb{R}^2))$ la solución correspondiente a φ_n, donde $\widetilde{T}_n = \widetilde{T}(M, \|\varphi_n\|_s)$.
Sea $\widetilde{T}_\infty = \widetilde{T}(M, \|\varphi\|_s)$ tal que $0 < T < \widetilde{T}_\infty$. Sabemos que $\widetilde{T}$ depende tanto de α como de β y estas a su vez de $L(\cdot|\cdot)$, la cual es continua, por tanto $\widetilde{T}$ lo es también, por tanto, si $n \to \infty$, $\widetilde{T}_n \to \widetilde{T}\infty$, es decir, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $0 < T < \widetilde{T}_n$, para todo $n \geq N$.
Esto indica que $u_n \in C([0, T], H^s(\mathbb{R}^2))$, para todo $n \geq N$ y además por (2.21) $u_n \in \chi_s(T, M)$, cumpliéndose también que

$$\|u_n(\tau)\|_s \leq M + \|\varphi_n\|_s \leq M + K, \quad \text{donde} \quad K = \sup_{n\in\mathbb{N}} \|\varphi_n\|_s, \quad 0 < \tau < T.$$

ahora, sea u_∞ la solución correspondiente a φ. Entonces se tiene

$$\begin{aligned}\|u_n(t)-u_\infty(t)\|_s \leq& \|\varphi_n-\varphi\|_s + \int_0^t \|f(u_n(\tau))-f(u_\infty(\tau))\|_s d\tau \\ \leq& \|\varphi_n-\varphi\|_s + L(\|u_n\|_s\,,\,\|u_\infty\|_s)\int_0^t \|u_n-u_\infty\|_s d\tau \\ \leq& \|\varphi_n-\varphi\|_s + L(M_s(u_n\,,u_\infty), M_s(u_n\,,u_\infty))\int_0^t \|u_n-u_\infty\|_s d\tau\end{aligned}$$

donde

$$M_s(u_n\,,u_\infty)=\text{máx}\left\{\sup_{[0,T]}\|u_n(t)\|_s\,,\sup_{[0,T]}\|u_\infty(t)\|_s\right\}\leq M+K$$

por tanto

$$\|u_n(t)-u_\infty(t)\|_s \leq \|\varphi_n-\varphi\|_s + L(M+K,M+K)\int_0^t \|u_n-u_\infty\|_s d\tau$$

si aplicamos ahora la desigualdad de Gronwall

$$\begin{aligned}\|u_n(t)-u_\infty(t)\|_s \leq& \|\varphi_n-\varphi\|_s\, e^{L(M+K,M+K)t} \\ \leq& \|\varphi_n-\varphi\|_s\, e^{L(M+K,M+K)T}\end{aligned}$$

entonces

$$\sup_{n\in N}\|u_n(t)-u_\infty(t)\|_s \leq \|\varphi_n-\varphi\|_s\, e^{L(M+K,M+K)T}$$

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{n\in N}\|u_n(t)-u_\infty(t)\|_s=0 \tag{2.22}$$

se concluye entonces la dependencia continua. ■

2.3. Unicidad

Teorema 2.3. *La función definida en (2.12) es la única solución al problema (2.11).*

Demostración. Supóngase que u y v son soluciones del problema de Cauchy (2.11) con condiciones iniciales φ y ψ respectivamente, entonces

$$\begin{aligned}\|u(t)-v(t)\|_s \leq& \|\varphi-\psi\|_s + \int_0^t \|f(u(\tau))-f(v(\tau))\|_s d\tau \\ \leq& \|\varphi-\psi\|_s + |a|L(\|u\|_s,\|v\|_s)\int_0^t \|u(\tau)-v(\tau)\|_s d\tau\end{aligned}$$

luego por la desigualdad de Gronwall

$$\|u(t) - v(t)\|_s \leq \|\varphi - \psi\|_s \, e^{|a| L(\|u\|_s, \|v\|_s) t}. \tag{2.23}$$

Entonces si $\varphi = \psi$ se tiene que $u = v$ y por tanto la unicidad.

■

Corolario 2.1. *Para $s > 1$, el problema de Cauchy (2.11) está localmente bien planteado en $H^s(\mathbb{R}^2)$.*

Demostración: Por lo desarrollado en los teoremas 2.1, 2.2 y 2.3 se tiene el resultado. ■

Capítulo 3

El Problema Global

El objetivo ahora es conocer el buen planteamiento global del problema de Cauchy (0.1) y para ello se necesitarán estimativas para $\|u\|_1$.

De la ecuación (2.1) el problema entonces queda de la siguiente forma

$$u_t = -(1 - b\partial_x^2)^{-1}\partial_x\big(bu_{yy} + au^n\big) \tag{3.1}$$

El siguiente lema será de mucha utilidad para hallar una estimativa de $\|u\|_1$.

Lema 3.1. *Las siguientes cantidades*

$$I_1(u) = \int_{\mathbb{R}^2}(u^2 + u_x^2)dxdy = \int_{\mathbb{R}^2}(\varphi^2 + \varphi_x^2\,)\,dxdy$$

$$I_2(u) = \int_{\mathbb{R}^2}\left(a\frac{u^{n+1}}{n+1} - b\frac{u_y^2}{2}\right)dxdy = \int_{\mathbb{R}^2}\left(a\frac{\varphi^{n+1}}{n+1} - b\frac{\varphi_y^2}{2}\,\right)dxdy$$

asociadas al flujo (0.1), son conservadas.

Demostración. Calculemos primero la derivada direccional de I_2.

$$\begin{aligned} I_2(u+\varepsilon v) &= \int_{\mathbb{R}^2}\left[a\frac{(u+\varepsilon v)^{n+1}}{n+1} - b\frac{(u_y+\varepsilon v_y)^2}{2}\right]dxdy \\ \frac{d}{d\varepsilon}I_2(u+\varepsilon v) &= \int_{\mathbb{R}^2}\big[a(u+\varepsilon v)^n v - b(u_y+\varepsilon v_y)v_y\big]\,dxdy \\ \frac{d}{d\varepsilon}I_2(u+\varepsilon v)\Big|_{\varepsilon=0} &= \int_{\mathbb{R}^2}\big(au^n v - bu_y v_y\,\big)\,dxdy \end{aligned}$$

integrando por partes el segundo término

$$\begin{aligned}\frac{d}{d\varepsilon}I_2(u+\varepsilon v)\Big|_{\varepsilon=0} &= \int_{\mathbb{R}^2}\big(au^n v + bu_{yy}v\big)\,dxdy\\ &= \int_{\mathbb{R}^2}\big(bu_{yy}+au^n\big)v\,dxdy\end{aligned}$$

entonces se tiene el paréntesis de dualidad

$$\langle I_2'(u),v\rangle = \frac{d}{d\varepsilon}I_2(u+\varepsilon v)\Big|_{\varepsilon=0} = \Big\langle bu_{yy}+au^n, v\Big\rangle$$

luego

$$I_2'(u) = bu_{yy}+au^n.$$

Ahora se tiene que

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}I_2(u) &= \langle I_2'(u),u_t\rangle\\ &= \langle I_2'(u),(1-b\partial_x^2)^{-1}\partial_x I_2'(u)\rangle\end{aligned}$$

como $(1-b\partial_x^2)^{-1}\partial_x$ es un operador antisimétrico,

$$\frac{d}{dt}I_2(u) = \langle I_2'(u),(1-b\partial_x^2)^{-1}\partial_x I_2'(u)\rangle = 0$$

lo cuál prueba que I_2 es una cantidad conservada.

Para el caso de I_1, si $b=-1$,$a=1/2$ y $n=2$, la ecuación (0.1) queda de la siguiente forma

$$\partial_t(u-u_{xx}) = \partial_x\left(u_{yy}-\frac{u^2}{2}\right). \tag{3.2}$$

Calculamos la derivada de I_1.

$$\begin{aligned}I_1(u+\varepsilon v) &= \int_{\mathbb{R}^2}(u+\varepsilon v)^2+(u_x+\varepsilon v_x)^2\,dxdy\\ \frac{d}{d\varepsilon}I_1(u+\varepsilon v) &= \int_{\mathbb{R}^2}2(u+\varepsilon v)v+2(u_x+\varepsilon v_x)v_x\,dxdy\\ \frac{d}{d\varepsilon}I_1(u+\varepsilon v)\Big|_{\varepsilon=0} &= \int_{\mathbb{R}^2}2\Big(uv+u_xv_x\Big)\,dxdy\end{aligned}$$

integrando por partes el segundo término

$$\begin{aligned}\frac{d}{d\varepsilon}I_1(u+\varepsilon v)\Big|_{\varepsilon=0} &= \int_{\mathbb{R}^2}2\Big(uv+u_{xx}v\Big)\,dxdy\\ &= \int_{\mathbb{R}^2}2\Big(u-u_{xx}\Big)v\,dxdy\end{aligned}$$

luego

$$I_1'(u) = 2(u - u_{xx}).$$

Usando la ecuación (3.2), se observa que

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}I_1(u) &= \langle I_1'(u), u_t\rangle \\
&= \langle I_1'(u), (1-\partial_x^2)^{-1}\partial_x(u_{yy} - \frac{u^2}{2})\rangle \\
&= \frac{1}{2}\langle I_1'(u), (1-\partial_x^2)^{-1}\partial_t\ I_1'(u)\rangle \\
&= 0
\end{aligned}$$

teniéndose así que I_1 es conservada. ■

Proposición 3.1. *Sean $\varphi \in H^s, s > 1$ y $u \in C([0,T], H^s(\mathbb{R}^2))$ la solución de (0.1) obtenida en el corolario (2.1). Entonces*

$$\|u\|_1^2 \leq K(\varphi) + \frac{2a}{b(n+1)} I_1(\varphi)\|u\|_1^{n-1} \tag{3.3}$$

Demostración. Del Lema 3.1, se observa que[1]

$$\begin{aligned}
bI_1 - 2I_2 &= \int_{\mathbb{R}^2}\left(bu^2 + bu_x^2 + bu_y^2 - 2a\frac{u^{n+1}}{n+1}\right)dxdy \\
&= b\int_{\mathbb{R}^2}\left(\varphi^2 + \varphi_x^2 + \varphi_y^2\right)dxdy - \frac{2a}{n+1}\int_{\mathbb{R}^2}\varphi^{n+1}\,dxdy \\
&= b\|\varphi\|_1^2 - \frac{2a}{n+1}\int_{\mathbb{R}^2}\varphi^{n+1}\,dxdy
\end{aligned}$$

Por otra parte

$$\begin{aligned}
\|u\|_1^2 &= I_1 - \frac{2I_2}{b} + \frac{2a}{b(n+1)}\int_{\mathbb{R}^2} u^{n+1}\,dxdy \\
&= \|\varphi\|_1^2 - \frac{2a}{b(n+1)}\int_{\mathbb{R}^2}\varphi^{n+1}\,dxdy + \frac{2a}{b(n+1)}\int_{\mathbb{R}^2} u^{n+1}\,dxdy
\end{aligned}$$

sea $K(\varphi) = \|\varphi\|_1^2 - \frac{2a}{b(n+1)}\int_{\mathbb{R}^2}\varphi^{n+1}\,dxdy$, entonces

$$\begin{aligned}
\|u\|_1^2 &\leq K(\varphi) + \frac{2a}{b(n+1)}\int_{\mathbb{R}^2}|u|^{n+1}\,dxdy \\
&\leq K(\varphi) + \frac{2a}{b(n+1)}\|u\|_{L^{n+1}}^{n+1}
\end{aligned} \tag{3.4}$$

Aplicando la desigualdad de Glagliardo-Nirenberg, se tiene

$$\|u\|_{L^{n+1}} \leq \|\nabla u\|_{L^2}^{\theta}\,\|u\|_{L^2}^{1-\theta} \tag{3.5}$$

[1] $\|u\|_{H^1}^2 = \sum_{|\alpha|\leq 1}\|D^\alpha u\|_2^2 = \|u\|_{W^{1,2}}^2$

donde

$$\frac{1}{n+1} = \theta\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\right) + \frac{1-\theta}{2}$$

es decir $\theta = \frac{n-1}{n+1}$. De esta manera la desigualdad (3.5) queda

$$\|u\|_{L^{n+1}}^{n+1} \leq \|\nabla u\|_{L^2}^{n-1} \|u\|_{L^2}^2.$$

Dado que

$$\|u\|_{L^2}^2 = \int_{\mathbb{R}^2} u^2 \, dxdy \leq \int_{\mathbb{R}^2} u^2 + u^2{}_x \, dxdy = \int_{\mathbb{R}^2} \varphi^2 + \varphi^2{}_x \, dxdy = I_1(\varphi)$$

y $\|\nabla u\|_{L^2} \leq \|u\|_{W^{1,2}} = \|u\|_1$, la ecuación (3.4) se transforma en

$$\|u\|_1^2 \leq K(\varphi) + \frac{2a}{b(n+1)} I_1(\varphi) \|u\|_1^{n-1}$$

Nótese que por la manera en que se definió K, este es acotado ya que $\varphi \in H^s$. ■

En los siguientes tres casos, en donde la norma con respecto al dato inicial es suficiente pequeño, se obtendrán estimaciones *a priori* de $\|u\|_1$.

Teorema 3.1. *Sea $s > 1$, $\varphi \in H^s$, $n = 2$ y . $u \in C([0,T], H^s(\mathbb{R}^2))$ la solución de (0.1), entonces*

$$\|u\|_1 < C(\varphi),$$

donde $C > 0$.

Demostración. Si aplicamos la desigualdad de Young al segundo término del lado derecho de (3.3), con $p = q = 2$, $a = I_1(\varphi)/\varepsilon$ y $b = \varepsilon \|u\|_1$ donde $\varepsilon > 0$, se tiene lo siguiente

$$\|u\|_1^2 \leq K(\varphi) + \frac{a I_1^2(\varphi)}{3\varepsilon^2 b} + \frac{a\varepsilon^2 \|u\|_1^2}{3b}$$

si hacemos $\varepsilon^2 = |b/a|$

$$\begin{aligned} \|u\|_1^2 &\leq K(\varphi) + \frac{a I_1^2(\varphi)}{3\varepsilon^2 b} + \frac{\|u\|_1^2}{3} \\ \frac{2}{3}\|u\|_1^2 &\leq K(\varphi) + \frac{a I_1^2(\varphi)}{3\varepsilon^2 b} \end{aligned}$$

haciendo $I_1(\varphi)$ suficientemente pequeño se tiene entonces

$$\|u\|_1 \leq \frac{3}{2} K(\varphi) < C(\varphi). \tag{3.6}$$

■

Teorema 3.2. *Sean $s > 1$, $\varphi \in H^s$ y $n = 3$. Si $\|\varphi\|_1$ es suficientemente pequeño, entonces*

$$\|u\|_1 < C(\varphi),$$

donde $C > 0$.

Demostración. Si $n = 3$, entonces la ecuación (3.3) se convierte en

$$\begin{aligned}
\|u\|_1^2 &\leq K(\varphi) + \frac{a}{2b} I_1(\varphi)\|u\|_1^2 \\
\|u\|_1^2 &\leq \frac{K(\varphi)}{1 - \frac{a}{2b} I_1(\varphi)} \\
\|u\|_1 &< C(\varphi).
\end{aligned}$$

■

Teorema 3.3. *Sean $s > 1$, $\varphi \in H^s$ y $n > 3$. Si $\|\varphi\|_1$ es suficientemente pequeño, entonces existe una constante $M > 0$ tal que*

$$\|u(t)\|_1 < M,$$

para $t \in [0, T]$.

Demostración. Siguiendo el esquema de demostración de Ponce ([9] página 122 ecuación (6.10)) la ecuación (3.3) tiene la forma

$$\|u\|_1^2 \leq K(\varphi) + \frac{2a}{b(n+1)} I_1(\varphi)\|u\|_1^{2+\gamma}. \tag{3.7}$$

$$\tag{3.8}$$

Si evaluamos en $t = 0$ y hacemos $I_1(\varphi)$ suficientemente pequeño, entonces se cumple que $K(\varphi) > 0$ y existe $M > 0$ tal que

$$\|u(t)\|_1 \leq M. \tag{3.9}$$

para $t \in [0, T]$. ■

Como consecuencia de los teoremas 3.1,3.2 y 3.3 se tiene el siguiente corolario.

Corolario 3.1. *Sean $s > 1$, $\varphi \in H^s$ y $n \geq 2$. Si $\|\varphi\|_1$ es suficientemente pequeño, entonces*

$$\|u\|_1 < \infty.$$

Nota 3.1. *Si $n \geq 2$, la solución posiblemente no explotaría en tiempo finito, si $\|\varphi\|_1$ del dato inicial no es tan pequeña. Esto lo decidiremos en una investigación posterior.*

Nota 3.2. *Lo anterior motiva a preguntarse por el buen planteamiento local en H^1.*

Ahora estamos interesados en el buen planteamiento global del problema de Cauchy para $s > 1$. Los siguientes resultados pretenden ese objetivo.

Lema 3.2. *Si $u \in H^s$, $s > 1$, entonces existe $\alpha > 0$ tal que*

$$\frac{d}{dt}\|u\|_s^2 \leq \alpha \left\{1 + \log\left(1{+}\|u\|_s\right)\right\}^{n-1} \|\Lambda^s u\|_0^2. \tag{3.10}$$

Demostración. A partir de la ecuación (3.1) se tiene

$$\Lambda^s u_t = -b(1 + b\partial_x^2)^{-1}\partial_x\partial_{yy}\Lambda^s u + a(1 + b\partial_x^2)^{-1}\partial_x \Lambda^s u^n.$$

Luego el producto

$$\begin{aligned}
\langle \Lambda^s u_t, \Lambda^s u\rangle_0 &= \langle b(1 + b\partial_x^2)^{-1}\partial_x\partial_{yy}\Lambda^s u, \Lambda^s u\rangle_0 + \langle a(1 + b\partial_x^2)^{-1}\partial_x \Lambda^s u^n, \Lambda^s u\rangle_0 \\
\frac{d}{2dt}\|u\|_s^2 &= \langle a(1 + b\partial_x^2)^{-1}\partial_x \Lambda^s u^n, \Lambda^s u\rangle_0 \\
&\leq \|a(1 + b\partial_x^2)^{-1}\partial_x \Lambda^s u^n\|_0 \|\Lambda^s u\|_0 \\
&\leq |a| \|\Lambda^s(u^{n-1}u)\|_0 \|\Lambda^s u\|_0 \, .
\end{aligned}$$

Aplicando la desigualdad de Kato-Ponce se obtiene

$$\frac{d}{2dt}\|u\|_s^2 \leq \beta |a| \|u\|_{L^\infty}^{n-1} \|\Lambda^s u\|_0^2 \, . \tag{3.11}$$

Por el teorema A.9 ([6], Brezis-Gallouet), existe $c = c(s) > 0$ tal que

$$\|u\|_{L^\infty}^{n-1} \leq c\Big\{1{+}\|u\|_1 \sqrt{\log\left(1{+}\|u\|_s\right)}\,\Big\}^{n-1} \tag{3.12}$$

Por el corolario 3.1, existe $K > 0$ tal que

$$\|u\|_{L^\infty}^{n-1} \leq c\Big\{1 + K\sqrt{\log\left(1{+}\|u\|_s\right)}\,\Big\}^{n-1} \tag{3.13}$$

De (3.12) y (3.13) la desigualdad (3.11) queda

$$\frac{d}{dt}\|u\|_s^2 \leq 2c\beta|a| \{1 + K\sqrt{\log\left(1{+}\|u\|_s\right)}\,\}^{n-1} \|\Lambda^s u\|_0^2 \, . \tag{3.14}$$

Sea $\alpha = \alpha(c, \beta, K) > 0$ tal que

$$\frac{d}{dt}\|u\|_s^2 \leq \alpha \left\{1 + \log\left(1{+}\|u\|_s\right)\right\}^{n-1} \|\Lambda^s u\|_0^2. \tag{3.15}$$

$\blacksquare$

Teorema 3.4. *Sean $\varphi \in H^s$ y $n = 2$. Entonces el problema de Cauchy (0.1) es globalmente bien planteado en H^s para $s > 1$.*

Demostración. Si en la ecuación (3.10) hacemos $n = 2$ entonces

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\|u\|_s^2 &\leq \alpha\,\{1+\log(1+\|u\|_s)\}\|\Lambda^s u\|_0^2 \\ &\leq \alpha\,\{1+\log(1+\|u\|_s)\}\|u\|_s^2 \\ &\leq \alpha\,\{1+\log(1+\|u\|_s^2)\}(1+\|u\|_s^2),\end{aligned} \tag{3.16}$$

luego

$$\frac{\frac{d}{dt}\|u\|_s^2}{(1+\|u\|_s^2)} \leq \alpha\,\{1+\log(1+\|u\|_s^2)\}. \tag{3.17}$$

Si hacemos $f(t) = \log(1+\|u\|_s^2)$ y reemplazamos en la ecuación (3.17), entonces

$$f'(t) \leq \alpha + \alpha f(t).$$

Integrando a ambos lados,

$$\begin{aligned}f(t) &\leq \log(1+\|\varphi\|_s^2) + \alpha t + \alpha \int_0^t f(\tau)d\tau \\ &\leq \log(1+\|\varphi\|_s^2) + \alpha T + \alpha \int_0^t f(\tau)d\tau \\ &\leq k(\|\varphi\|_s^2, T) + \alpha \int_0^t f(\tau)d\tau.\end{aligned}$$

Aplicando Gronwall

$$f(t) \leq k(\|\varphi\|_s^2, T)\, e^{\alpha T},$$

es decir

$$\begin{aligned}\log(1+\|u\|_s^2) &\leq k(\|\varphi\|_s^2, T)\, e^{\alpha T} = P(\|\varphi\|_s^2, T) \\ \|u\|_s^2 &\leq e^{P(\|\varphi\|_s^2, T)} - 1\,,\end{aligned} \tag{3.18}$$

y por tanto $\|u\|_s < \infty$. ■

Teorema 3.5. *Sea $\varphi \in H^s$ suficientemente pequeño. Si $n = 3$ el problema de Cauchy (0.1) es globalmente bien planteado en H^s para $s > 1$.*

Demostración. Si en la ecuación (3.14) hacemos $n = 3$ entonces

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\|u\|_s^2 &\leq 2c\beta|a|\big\{1 + K\sqrt{\log(1+\|u\|_s)}\,\big\}^2\|\Lambda^s u\|_0^2 \\ &\leq 2c\beta|a|\big\{1 + 2K\sqrt{\log(1+\|u\|_s)} + K^2\log(1+\|u\|_s)\,\big\}\|\Lambda^s u\|_0^2.\end{aligned}$$

Sea $\mu = \mu(K)$ tal que

$$\frac{d}{dt}\|u\|_s^2 \leq 2c\beta|a|\big\{1 + 2\mu\log(1+\|u\|_s) + \mu\log(1+\|u\|_s)\,\big\}\|\Lambda^s u\|_0^2\,, \tag{3.19}$$

y $\alpha = \alpha(c, \beta, \mu)$ tal que

$$\frac{d}{dt}\|u\|_s^2 \leq \alpha\big\{1 + \log\left(1+\|u\|_s\right)\big\}\|\Lambda^s u\|_0^2\,, \tag{3.20}$$

teniéndose una desigualdad como en (3.16). Procediendo como en el caso $n = 2$, se concluye de igual manera que $\|u\|_s < \infty$.

■

Bibliografía

[1] A.-M. Wazwaz, *Compact and noncompact physical structures for the ZK-BBM equation* Appl. Math. Comput. 169 (2005) 713-725

[2] Jerry L. Bona, Hongqiu Chen, *Local and global well-posedness results for generalized BBM-type equations.* Lecture Notes in Pure and Appl. Math., 234, Dekker, New York, 2003.

[3] A. A. Alazmani, J. P. Albert, J. L. Bona, M. Chen and J. Wu, *Comparisons between the BBM equation and a boussinesq system.* Adv. Differential Equations 11 (2006), no. 2, 121-166.

[4] M. A. Johnson *The Transverse Instability of Periodic Waves in Zakharov-Kuznetsov Type Equations.* Stud. Appl. Math. 124 (2010), no. 4, 323345

[5] R. J. Iório, Jr., V. de Magalhães Iório, *Equações diferenciais parciais: Uma introdução*, Projeto Euclides, IMPA/CNPq, (1988)

[6] R. J. Iório, W. V. L. Nunes *Introdução às equações de Evolução não Lineares.* 18^{o} Colóquio Brasileiro de Matemática, IMPA.

[7] R. J. Iório, Jr., Valéria de Magalhães Iório, *Fourier Analysis and Partial Differential Equations*, Cambridge studies in avanced mathematics, 70, (2001).

[8] T. Aubin, *Nonlinear analysis on manifolds. Monge-Ampere equations*, Springer-Verlag, 1982.

[9] F. Linares. G. Ponce, *Introduction to nonlinear dispersive equations*, Springer-Verlag, 2009.

[10] G. Ponce, *On the global well-posedness of the Benjamin-Ono equation.* Differential and Integral Equations, Vol 4 No. 3 1991 pág. 527-542.