Introducción a las Varidades de Hilbert

Pablo Asdrúbal Díaz Sepúlveda
Matemático

Universidad Nacional de Colombia
Facultad de Ciencias
Departamento de Matemáticas
Bogotá, D.C.
Junio de 2011

Introducción a las Varidades de Hilbert

PABLO ASDRÚBAL DÍAZ SEPÚLVEDA
MATEMÁTICO

DIRECTOR
GABRIEL IGNACIO PADILLA LEÓN, PH.D.
PROFESOR ASOCIADO UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA

UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA
FACULTAD DE CIENCIAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS
BOGOTÁ, D.C.
JUNIO DE 2011

Título en español

Introducción a las Variedades de Hilbert

Title in English

Introduction to Hilbert Manifolds

Resumen: En este trabajo se realiza una introducción a las variedades de Hilbert. Se comienza con algunos preliminares relacionados con espacios de Hilbert, derivadas en espacios de Banach y fibrados tangentes sobre espacios de Banach. En seguida se dan unas breves nociones de variedad topológica, cartas, atlas y algunos resultados que conducirán a la definición de una variedad de Hilbert, además se realiza un estudio de las aplicaciones entre variedades. A continuaci ón se estudia el espacio tangente y fibrados vectoriales asociados a una variedad de Hilbert y la definición de tangencial de una aplicación entre este tipo de variedades. Se presentan además las nociones de inmsersión, submersión, embebimiento y subvariedad, que son casos particulares de aplicaciones entre variedades asociadas a su tangencial. Por último se exponen las definiciones de campos vectoriales y derivaciones sobre una variedad, y además se exhibe una relación entre ellas.

Abstract: In this work we make an introduction to Hilbert manifolds. We start giving a brief review in Hilbert spaces, derivatives in Banach spaces and tangent bundles in Banach spaces. Next, we give a summary on main results concerning topological manifolds, charts, and atlas in order to give a definition of Hilbert manifold. Later we study the tangent space and vector bundle associated with a Hilbert manifold, and also the definition of tangential of an application between Hilbert manifolds. We present some notions o immersion, submersion, embedding and submanifold, which are particular cases of applications between manifolds associated with their tangentials. Finally we expose the definitions of vector fields and derivatives on a manifold, and also the relation between them.

Palabras clave: Variedad de Hilbert - Espacio Tangente - Fibrado Vectorial - Campo Vectorial.

Keywords: Hilbert Manifold - Tangent Space - Vector Bundle - Vector Field.

Dedicado a

A la memoria de mi hermano Edwin

Agradecimientos

En primer lugar quiero agradecer a la Universidad Nacional de Colombia, sede Bogotá, en especial al Departamento de Matemáticas, por darme la oportunidad de realizar mis estudios de Maestría. Gracias por la ayuda económica al darme la beca de Auxiliar Docente, como estudiante de Maestría durante dos años, fue de gran ayuda para poder seguir mis estudios de postgrado.

Mis más sinceros agradecimientos a los profesores Dr. Leonardo Rendón Arbeláez y Dr. Gabriel Padilla León. Gracias a ellos mi espíritu nunca decayó y aún en los momentos más complicados, siempre tuve una voz de ánimo por parte de ellos. Al profesor Dr. Leonardo Rendón Arbeláez, le doy mil gracias por todos los conocimientos que me aportó, por las tantas preguntas contestadas de forma respetuosa y atenta, por el apoyo para seguir mis estudios de Doctorado en Matemáticas en el extranjero, mil y mil gracias. Al profesor Dr. Gabriel Padilla León, por aceptar ser mi Director de Tesis apesar de tantas ocupaciones, por las tardes de estudio acompañadas de un buen café, por el apoyo para seguir mi Doctorado, por ser un amigo y un buen consejero.

Un especial agradecimiento a mi familia: Mi Madre Margarita Sepúlveda, mi Padre Asdrúbal Díaz y mis hermanos Edwin Díaz (Q.E.P.D) y Diego Fernando Díaz, quienes siempre han sido el núcleo de apoyo durante todos los años de estudio de mi carrera en Matemáticas, desde pregrado hasta posgrado. A mis amigos: Alejandro Guarnizo, Wilmar Gómez, Oswaldo Chaparro, quienes han sufrido a mi lado por lo momentos duros tanto académicos como personales, gracias por su gran apoyo.

Se quedan muchas personas sin nombrar, personas fundamentales en mi carrera como matemático, en mi vida, personas que me ayudaron en éste largo proceso, a todas ellas mi más sincero agradecimiento.

Índice general

Introducción

El trabajo INTRODUCCIÓN A LAS VARIEDADES DE HILBERT nace de una serie de preguntas que se presentaron en los cursos de Geometría Diferencial y Variedades Diferenciables realizados durante mi maestría. El saber cuánto podemos hacer sobre variedades modeladas en espacios de dimensión infinita, preguntarnos si todas las definiciones y resultados que se tienen en dimensión finita son válidos en este tipo de variedades y de qué manera podrían interactuar el análisis funcional y vectorial con la geometría diferencial, son tan sólo algunas de éstas inquietudes. El objetivo principal de nuestro trabajo es proveer los conocimientos básicos de variedades modeladas sobre espacios de Hilbert separables de dimensión infinita. Vale la pena resaltar que algunas definiciones y resultados aquí dados, son una extensión de lo ya visto en modelos finitos, aunque debe decirse que las pruebas de los resultados y las definiciones no están ligadas a algún texto de geometría de variedades finitas.

El trabajo realizado es una exposición particular de la teoría de variedades de Banach de dimensión arbitraria, la cuál es estudiada en textos como [4] y [6], con un lenguaje algo categórico. La teoría en variedades de Hilbert presenta unas características que no poseen las de Banach por las particularidades que presentan los espacios de Hilbert separables. A diferencia de los libros citados, desarrollaremos la teoría de una forma más geométrica y analítica, basados en conocimientos previos de geometría diferencial y análisis. Para un mejor entendimiento de la teoría desarrollada en cada capítulo es conveniente tener un conocimiento previo de análisis y geometría, el lenguaje utilizado es acorde a estas áreas. Los preliminares serán una breve introducción a los espacios de Hilbert, derivadas entre espacios de Banach de dimensión arbitraria y fibrados tangentes en espacios de Banach. Se mostrarán algunos resultados que en su mayoría serán un punto de apoyo para probar algunas proposiciones de capítulos posteriores. El capítulo será un resumen y no una exposición exhaustiva. En el capítulo 2 daremos algunas definiciones preliminares para poder llegar a la noción de una variedad de Hilbert, hablaremos de algunas características y daremos algunos ejemplos de estas vaierdades. En la segunda parte estudiaremos las aplicaciones entre variedades de Hilbert, además un caso especial que se presenta cuando la variedad de llegada de una aplicación es R. El capítulo 3 será una sección dedicada a los fibrados sobre una veriedad. Empezaremos por el espacio tangente a una variedad M y que denotaremos por TM, cuya definición se realizará bajo unas construcciones locales, además la definición de TM dará paso a la noción de la tangencial de una aplicación entre variedades. Por último se hará un estudio de los fibrados vectoriales asociados a una variedad, y un ejemplo será mostrar que TM es un caso particular de un fibrado vectorial sobre M. En el último capítulo se estudian algunos casos particulares de las aplicaciones entre variedades en términos de su tangencial, éstas nociones son las de inmersión, submersión y embebimientos. A partir de éstas se dará la definición de una subvariedad así como algunos resultados y ejemplos. En la parte final daremos una pequeña introducción a los campos vectoriales y derivaciones sobre una variedad de Hilbert M.

CAPÍTULO 1

Preliminares

La matemática es la ciencia del orden y la medida, de bellas cadenas de razonamientos, todos sencillos y fáciles.
René Decartes.

Los Espacios de Hilbert son una herramienta fundamental en muchas ramas de las matemáticas, y la geometría diferencial no es la excepción.No sólo es fundamental en la geometría de dimensión finita, también es indispensable en la geometría de dimensión infinita. Las nociones de ortogonalidad, convergencia de sucesiones, coeficientes de Fourier, ángulos entre vectores, familia ortonormal, base ortonormal y proyección ortogonal, son tan sólo algunas de las definiciones y conceptos que nacen de estos espacios tan particulares. La primera parte de este capítulo será una breve introducción de los espacios de Hilbert, se darán algunas definiciones y algunos teoremas clásicos del análisis funcional sobre nuestros espacios en cuestión.

Por otra parte, la definición de Derivada es fundamental en la geométria diferencial, sin importar la dimensión en que se esté trabajando, daremos una definición de la derivada entre espacios de Banach de dimensión arbitraria, también hablaremos del espacio tangente y del fibrado tangente asociados a un espacio de Banach. Daremos algunos teoremas fundamentales para el desarrollo de este trabajo, como por ejemplo el teorema de la función inversa §1.4.9, los corolarios §1.4.11 y §1.4.12, además de otros teoremas del análisis vectorial y propiedades de la derivada entre espacios de Banach.

Hablar de isomorfismos entre espacios de Hilbert es realmente importante, pues no es sólo definir una aplicación lineal entre estos espacios, es definir una aplicación lineal que conserve las estructuras, en espacios topológicos tenemos el concepto de homeomorfismo y en álgebra en concepto de isomorfismo que conservan las estruturas, de igual manera se hace en los espacios de Hilbert con estos isomorfismos.

1.1. Espacios de Hilbert, Propiedades Elementales.

Definición 1.1.1. Sea $\mathbb{X}$ un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$, un **producto semi-interno** sobre $\mathbb{X}$ es una función

$$\vartheta : \mathbb{X} \times \mathbb{X} \longrightarrow \mathbb{R},$$

que satisface las siguientes propiedades

- $\vartheta(\alpha u + \beta v, w) = \vartheta(\alpha u, w) + \vartheta(\beta v, w)$,
- $\vartheta(u, \beta v + \alpha w) = \vartheta(u, \beta v) + \vartheta(u, \alpha w)$,
- $\vartheta(u, u) \geq 0$,
- $\vartheta(u, v) = \vartheta(u, v)$.
- $\vartheta(u, 0) = \vartheta(0, v)$ para todo u,v en $\mathbb{X}$.

  Un **producto interno** sobre $\mathbb{X}$ es un producto semi-interno que también satisface lo sigueinte

- Si $\vartheta(u, 0) = 0$, entonces $u = 0$.

Observación 1.1.2. Denotaremos un producto semi-interno como $\vartheta(u, v) = \langle u\, ,\, v\rangle$.

Definición 1.1.3. Dados un espacio vectorial real $\mathbb{X}$ con un producto semi-interno $\langle v\, ,\, w\rangle$ y v, w en $\mathbb{X}$, decimos que v es **ortogonal** a w si $\langle v, w\rangle = 0$. Sea S un subespacio de $\mathbb{X}$, definamos el conjunto $S^{\perp} = \{v \in \mathbb{X} : \langle v, w\rangle = 0, \forall w \in S\}$, entonces S_0 también es un subespacio de $\mathbb{X}$. Sea $\mathbb{X}_0 = \{v \in \mathbb{X} : \langle v, w\rangle = 0, \forall w \in \mathbb{X}\}$. Claramente $\mathbb{X}_0$ es un subespacio de $\mathbb{X}$ y es llamado el **espacio nulo** de $\mathbb{X}$.

Teorema 1.1.4. *Sea $\mathbb{X}$ con un producto semi-interno $\langle\, ,\, \rangle$ y $\|v\| = \langle v\, ,\, v\rangle^{\frac{1}{2}}$, entonces*

1. *Dados v,$w \in \mathbb{X}$, tenemos*

$$|\langle v, w\rangle| \leqslant \|v\|\|w\|,$$

2. *Dado $w \in \mathbb{X}$ tal que $\langle w, w\rangle = 0$, entonces $w \in \mathbb{X}_0$,*
3. *$\forall v \in \mathbb{X}, \|v\| \geqslant 0$, y $\|v\| = 0$ si y sólo si $v \in \mathbb{X}_0$,*
4. *Para todo λ real y para todo $v \in \mathbb{X}$ se tiene que $\|\lambda v\| = |\lambda|\|v\|$,*
5. *Dados $v, w \in \mathbb{X}$ tenemos $\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|$*

DEMOSTRACIÓN: Ver [1] y [2] $\square$

Observación 1.1.5. Sea $w \in \mathbb{X}$ tal que $\|w\| > 0$. Dado $v \in \mathbb{X}$, entonces *existe un único real τ tal que $v - \tau w$ es ortogonal a w.*
Suponiendo que $v - \tau w$ es ortogonal a w tenemos que $\langle v - \tau w, w\rangle = 0$, luego $\langle v, w\rangle - \langle \tau w, w\rangle = 0$ y así $\langle v, w\rangle = \langle \tau w, w\rangle$. Por lo tanto

$$\tau = \tfrac{\langle v,w\rangle}{\langle w,w\rangle}.$$

Recíprocamente, si tomamos a τ de esta forma, tenemos que $v - \tau w$ es ortogonal a w. Llamaremos a τ el **coeficiente de Fourier** de v con respecto a w.
Sean $v_1, v_2, \dots v_n$ elementos de $\mathbb{X}$ que no están en $\mathbb{X}_0$ y $\langle v_i, v_j\rangle = 0 \quad \text{si} \quad i \neq j$, para $i, j = 1, 2, \dots, n$. Sean v en $\mathbb{X}$ y τ_i el coeficiente de Fourier v con respecto a cada v_i. Entonces

$$v - \tau_1 v_1 - \cdots - \tau_n v_n$$

es ortogonal a $v_1, v_2, \dots$ y v_n.

Definición 1.1.6. Un espacio de **Hilbert** real es un espacio vectorial real $\mathbb{H}$ junto con un producto interno $\langle\,,\,\rangle$ tal que es un espacio vectorial normado completo con la norma $\|v\| = \langle v\,,\,v\rangle$ inducida por el producto interno.

Teorema 1.1.7. *Sea $\mathbb{H}$ un espacio de Hilbert.*

1. *Si $v, w \in \mathbb{H}$ son ortogonales entonces*
$$\|v + w\|^2 = \|v\|^2 + \|w\|^2$$
,
2. *Sean $v, w \in \mathbb{H}$ entonces*
$$\|v + w\|^2 + \|v - w\|^2 = 2\|v\|^2 + 2\|w\|^2$$

DEMOSTRACIÓN: ver [1].
□

1.2. Familias y Bases Ortogonales.

Definición 1.2.1. Sea $\{v_i\}_{i\in I}$ una familia de elementos de $\mathbb{H}$ tales que $\|v_i\| \neq 0$ para todo i. Para cada subfamilia finita $\{v_{i_k}\}_{k=1,\dots,n}$, podemos tomar el espacio generado por esta subfamilia, es decir, las combinaciones lineales

$$\alpha_1 v_{i_1} + \cdots + \alpha_n v_{i_n}.$$

donde cada α_i es un número real. La unión de todos estos espacios es llamado el espacio generado por la familia $\{v_i\}_{i\in I}$. Denotamos a este espacio como F. Decimos que esta familia $\{v_i\}_{i\in I}$ es **completa** en $\mathbb{H}$ si $\overline{F} = \mathbb{H}$. Decimos que la familia $\{v_i\}_{i\in I}$ es una familia **ortogonal** si $\langle v_i, v_j \rangle = 0$ cuando $i \neq j$ y $\|v_i\| \neq 0$ para todo i. Decimos que la familia es **ortonormal** si es ortogonal y $\|v_i\| = 1$ para todo i. Una familia ortonormal completa es llamada una **base de Hilbert** o también una **base ortonormal**.

Corolario 1.2.2. *sea $\mathbb{H}$ un espacio de Hilbert.*

1. *Si $\mathbb{H} \neq 0$ entonces existe una base ortogonal completa para $\mathbb{H}$,*
2. *Sea F un subespacio cerrado de $\mathbb{H}$ entonces $\mathbb{H} = F + F^{\perp}$.*

DEMOSTRACIÓN: ver [1].
□

Definición 1.2.3. Un espacio topológico X es llamado **separable** si contiene un conjunto denso y numerable.

Teorema 1.2.4. *Dado un espacio de Hilbert $\mathbb{H}$ entonces dos bases cualesquiera de $\mathbb{H}$ tienen la misma cardinalidad.*

DEMOSTRACIÓN: ver [2].
□

Definición 1.2.5. Dado un espacio de Hilbert $\mathbb{H}$, definimos la **dimensión de** $\mathbb{H}$ como la cardinalidad de una base de $\mathbb{H}$ y es notada como $\mathrm{Dim}(\mathbb{H})$.

Proposición 1.2.6. *Si $\mathbb{H}$ es un espacio de Hilbert de dimesión infinita, entonces $\mathbb{H}$ es separable si y sólo si Dim($\mathbb{H}$)=$\aleph$.*

DEMOSTRACIÓN: ver [2].
□

1.3. Isomorfismos entre Espacios de Hilbert.

Definición 1.3.1. Sean $\mathbb{H}$ y $\mathbb{K}$ dos espacios de Hilbert, decimos que $\mathbb{H}$ y $\mathbb{K}$ son **isomorfismos** si existe una aplicación lineal y sobreyectiva

$$\xi : \mathbb{H} \longrightarrow \mathbb{K},$$

tal que

$$\langle \xi(x), \xi(y) \rangle = \langle x, y \rangle$$

para todo x y y en $\mathbb{H}$.

Proposición 1.3.2. *Veamos unas propiedades importantes de los espacios de Hilbert.*

1. *Si $\xi : \mathbb{H} \longrightarrow \mathbb{K}$, es una aplicación lineal entre espacios de Hilbert, entonces ξ es una isometría si y sólo si $\langle \xi(x), \xi(y) \rangle = \langle x, y \rangle$ para todo x, y en $\mathbb{H}$.*
2. *Dos espacios de Hilbert son isomorfos si y sólo si tienen la misma dimensión.*
3. *Cualquier par de espacios de Hilbert separables de dimesión infinita son isomorfos.*

DEMOSTRACIÓN: ver [2] y [7].

□

1.4. Derivadas entre Espacios de Banach

Definición 1.4.1. Una función de variable real a valor real, definida sobre sobre una vecindad de 0 es llamada $\mathbf{o(t)}$ si

$$\lim_{t \to 0} \frac{o(t)}{t} = 0.$$

Definición 1.4.2. Dados dos espacios espacios vectoriales topológicos $\mathbb{E}, \mathbb{F}$ y φ una aplicación de una vecindad de $0 \in \mathbb{E}$ en $\mathbb{F}$. Decimos que φ es **tangente a 0** si, dada una vecindad W de $0 \in \mathbb{F}$, existe una vecindad V de $0 \in \mathbb{E}$ tal que

$$\varphi(tV) \subset o(t)W$$

para alguna función $o(t)$. Si los espacios $\mathbb{E}, \mathbb{F}$ son normados, entonces esto equivale a las condiciones habituales

$$|\varphi(x)| \leqslant |x| \psi(x)$$

con

$$\lim_{|x| \to 0} \psi(x) = 0.$$

Definición 1.4.3. Dados $\mathbb{E}$ y $\mathbb{F}$ dos espacios de Banach y U un abierto de $\mathbb{E}$, decimos que una aplicación continua

$$f : U \longrightarrow \mathbb{F},$$

es **diferenciable en** $a \in U$ si existen una apliación lineal $\lambda \in \mathbb{L}[\mathbb{E}, \mathbb{F}]$ tal que, si

$$f(a+h) = f(a) + \lambda(h) + \varphi(h)$$

para h pequeño entonces φ es una aplicación tangente a 0.
Notamos que λ es única, es llamada la **derivada** de f en a y la denotamos por $Df(a)$ o $f'(a)$. Decimos que f es diferenciable en U si es diferenciable en cada punto de U y en este caso f' es una aplicación

$$f' : U \longrightarrow \mathbb{L}[\mathbb{E}, \mathbb{F}].$$

Definición 1.4.4. Sean $\mathbb{E}$ y $\mathbb{F}$ dos espacios de Banach y U un abierto en $\mathbb{E}$. Decimos que una aplicación diferenciable $f : U \longrightarrow \mathbb{F}$, es **de clase** C^1, si f' es una aplicación continua. Análogamente definimos una aplicación de **clase** C^p $(p \geqslant 1)$. La p-ésima derivada $D^p f$ es definida como $D(D^{p-1} f)$ y es una aplicación lineal de U sobre $\mathbb{L}(\mathbb{E}, \mathbb{L}(\mathbb{F}, \ldots, \mathbb{L}(\mathbb{E}, \mathbb{F})))$. f es llamada **de clase** C^p si $D^k f$ existe y es continua para $1 \leqslant k \leqslant p$,

Proposición 1.4.5. *Sean U y V dos abiertos de dos espacios de Banach $\mathbb{E}$ y $\mathbb{F}$ respectivamente. Si $f : U \longrightarrow V$ y $g : V \longrightarrow \mathbb{W}$ son de clase C^p, donde $\mathbb{W}$ es un espacio de Banach, entonces $g \circ f$ también es de clase C^p, para todo $p \geqslant 1$.*

DEMOSTRACIÓN: ver [4].
□

Ejemplos 1.4.6. Veamos algunos ejemplos.

- *Sea $\eta : \mathbb{E} \longrightarrow \mathbb{F}$, una aplicación lineal continua entre dos espacios de Banach, entonces η es diferenciable en todo $\mathbb{E}$ y para cada $x \in \mathbb{E}$ se tiene que $\eta'(x) = \eta$.*

- Sean $f : U \longrightarrow \mathbb{F}$, una aplicación diferenciable y $\eta : \mathbb{F} \longrightarrow \mathbb{W}$, una aplicación lineal continua. Entonces

  $$(\eta \circ f)'(x) = \eta \circ f'(x).$$

  Y para cada $v \in U$ tenemos

  $$(\eta \circ f)'(x)v = \eta \circ (f'(x)v)$$

  .

Proposición 1.4.7. *Sean* $\mathbb{E}$ *y* $\mathbb{F}$ *dos espacios de Banach y* U *un abierto en* $\mathbb{E}$. *Supongamos que las aplicaciones* $f, g : U \longrightarrow \mathbb{F}$ *son diferenciables en* $a \in U$, *entonces* $f + g$ *es diferenciable en* a *y*

$$(f + g)'(a) = f'(a) + g'(a).$$

Además si α *es un número real cualquiera entonces la aplicación* αf *es diferenciable en* a *y*

$$(\alpha f)'(a) = \alpha f'(a).$$

DEMOSTRACIÓN: ver [4].

□

Definición 1.4.8. Sean $\mathbb{E}, \mathbb{F}$ dos espacios de Hilbert y $U \subset \mathbb{E}$ abierto, decimos que una aplicación

$$f : U \longrightarrow \mathbb{F},$$

es un **difeomorfismo de clase** C^p si f y f^{-1} son de clase C^p. Además decimos que f es un **difeomorfismo** si f y f^{-1} son de clase C^∞ (suaves).

Ahora veremos un teorema fundamental en el análisis vectorial y que nos será muy útil en el desarrollo de este trabajo. Este teorema es conocido como el teorema de la función inversa.

Teorema 1.4.9. *(Teorema de la Función Inversa.) Sean* $\mathbb{E}, \mathbb{F}$ *espacios de Banach,* $U \subset \mathbb{E}$ *abierto y* $f : U \longrightarrow F$, *una aplicación de clase* C^p *con* $p \geqslant 1$. *Supongamos que exite* $a \in U$ *tal que* $f'(a) : \mathbb{E} \longrightarrow \mathbb{F}$, *es un isomorfismo lineal. Entonces* f *es un* C^p*-difeomorfismo local en* a.

DEMOSTRACIÓN: ver [3].

□

Proposición 1.4.10. *Sean* $\mathbb{E}, \mathbb{F}$ *espacios de Banach,* $U \subset \mathbb{E}$ *y* $V \subset \mathbb{F}$ *abiertos. Supongamos que*

$$f : U \longrightarrow V,$$

es una aplicación de clase C^p *y además es un homeomorfismo. Si* f *es un* C^1*-difeomorfismo, entonces* f *es un* C^p*-difeomorfismo.*

DEMOSTRACIÓN: ver [3].

□

Corolario 1.4.11. *Sean $\mathbb{E}, \mathbb{F}$ espacios de Banach, $U \subset \mathbb{E}$ abierto y $f : U \longrightarrow \mathbb{F}$, una aplicación tal que $f(0) = 0$. Si f cumple que $f'(0) : \mathbb{E} \longrightarrow \mathbb{F}$, es un isomorfismo con un subespacio cerrado $\mathbb{F}_1$ de $\mathbb{F}$. Escribimos $\mathbb{F} = \mathbb{F}_1 \times \mathbb{F}_2$. Entonces existe un difeomorfismo local*

$$g : \mathbb{F} :\longrightarrow \mathbb{F}_1 \times \mathbb{F}_2;\ g(0) = 0$$

y una vecindad abierta $U_1 \subset U$ de $0 \in \mathbb{E}$ tal que

$$g \circ (f|_{U_1}) : U_1 \longrightarrow U_1 \times \{0\} \subset \mathbb{E} \times \{0\} \approxeq \mathbb{F}_1 \times \{0\},$$

es la inyección lineal canónica.

DEMOSTRACIÓN: ver [3].

□

Corolario 1.4.12. *Sean $\mathbb{E}, \mathbb{F}$ espacios de Banach, $U \subset \mathbb{E}$ abierto y $f : U \longrightarrow \mathbb{F}$ una aplicación tal que $f(0) = 0$. Si f cumple que $f'(0) : \mathbb{E} \longrightarrow \mathbb{F}$, es sobreyectiva, escribimos $\mathbb{E} = \mathbb{E}_1 \times \mathbb{E}_2$ con $f'(0)|_{\mathbb{E}_2} : \mathbb{E}_2 \longrightarrow \mathbb{F}$ biyectiva, es decir, $\mathbb{E}_2 \approxeq \mathbb{F}$. Entonces existe un difeomorfismo local*

$$h : (U_1 \times U_2, 0) \subset (\mathbb{E}_1 \times \mathbb{E}_2, 0) \longrightarrow (\mathbb{E}, 0),$$

con U_i una vecindad abierta de $0 \in \mathbb{E}_1$ tal que

$$f \circ h : U_1 \times U_2 \longrightarrow U_2 \subset \mathbb{E}_2 \approxeq \mathbb{F},$$

es la proyección π_2.

DEMOSTRACIÓN: ver [3].

□

1.5. Espacio Tangente y Fibrado Tangente

Definición 1.5.1. Sean $\mathbb{E}$ un espacio de Banach y U un abierto en $\mathbb{E}$. Para cada $a \in U$, definimos el **Espacio Tangente** T_aU de U en a como el conjunto $\{(a, v) : v \in \mathbb{E}\}$, que tiene estructura de espacio vectorial dada por la aplicación canónica

$$\pi_2 : T_aU \longrightarrow \mathbb{E},$$

definida como $\pi_2(a, v) = v$. Así, definimos a $TU := \bigcup_{a \in U} T_aU$

Observación 1.5.2. Dado el isomorfismo canónico $TU \approxeq U \times \mathbb{E}$, podemos ver a TU como un abierto de $\mathbb{E} \times \mathbb{E}$.

Definición 1.5.3. La proyección $\pi_1 : U \times \mathbb{E} \longrightarrow U$, también puede ser notada como $\tau \equiv \tau_U : TU \longrightarrow U$, dada por $\tau_U(a, v) = a$. Definimos (τ_U, TU, U) como el **fibrado tangente** de U. TU es llamado el espacio total tangente de U y τ es llamada la proyección del fibrado tangente.

Definición 1.5.4. Dada una aplicación diferenciable $f : U \subset \mathbb{E} :\longrightarrow V \subset \mathbb{F}$, definimos la **tangencial** de f como

$$Tf : TU \longrightarrow TV,$$

dada por $Tf(a, v) = (f(a), f'(a)(v))$.

Observación 1.5.5. Dado $a \in U$, la restricción $T_a f = Tf|_{T_a U}$, es una aplicación lineal determinada por $f'(a)$.

Proposición 1.5.6. *Sean $F_1 : U_1 \subset \mathbb{E}_1 \longrightarrow U_2 \subset \mathbb{E}_2$ y $F_2 : U_2 \subset \mathbb{E}_2 \longrightarrow U_3 \subset \mathbb{E}_3$, dos aplicaciones difereciables, entonces las aplicaciones $T(F_2 \circ F_1) : TU_1 \longrightarrow TU_3$ y $TF_2 \circ TF_1 : TU_1 \longrightarrow TU_3$ son la misma aplicación. Además el tangencial de la aplicación identidad $id_U : U \longrightarrow U$, es la aplicación identidad $id_{TU} : TU \longrightarrow TU$.*

DEMOSTRACIÓN: Ver [3]. □

CAPÍTULO 2

Variedades de Hilbert

Las proposiciones matemáticas, en cuanto tienen que ver con la realidad, no son ciertas; y en cuanto que son ciertas, no tienen nada que ver con la realidad.
ALBERT EINSTEIN.

En este capítulo daremos la definición de una variedad suave modelada sobre un espacio de Hilbert separable real de dimensión infinita, teniendo en cuenta que la definición sigue siendo válida en dimensión finita como se conoce en geometría diferencial clásica. Además los teoremas, proposiciones y otras definiciones dadas en este capítulo son igualmente válidas en dimensión finita. En principio para llegar nuestra definición principal, se darán las definiciones de espacio topológico localmente Hilbert, variedad topológica, cartas, atlas, compatibilidad de cartas y de atlas y otras definiciones fundamentales. Se darán algunos ejemplos sencillos pero que serán trabajados minuciosamente.

En la segunda parte de este capítulo hablaremos sobre aplicaciones continuas y aplicaciones de clase C^p entre variedades de Hilbert. Es fundamental hablar de estas apliaciones, pues ellas dan origen a otras definiciones posteriores de gran importancia en nuestro trabajo. Para entender este tipo de aplicaciones, se hará de ellas en términos de su representación local dadas por la cartas sobre las variedades. Veremos algunos teoremas, y para sus pruebas serán fundamentales algunos teoremas nombrados en el capítulo anterior.

2.1. Variedad Topológica

Definición 2.1.1. Sea M un espacio topológico. Decimos que M una **localmente Hilbert**, si para cada punto p de M existe un abierto U en la topología de M tal que $p \in U$ y U es homeomorfo a algún abierto de un espacio de Hilbert separable real $\mathbb{H}$. Dado este abierto U que contiene a p y ϕ el homeomorfismo entre U y un abierto de $\mathbb{H}$ decimos que la pareja (U, φ) es una **carta** de p en M de p.

Definición 2.1.2. Sea M un espacio topológico dos contable y Hausdorff, decimos que M es una **variedad topológica** si M es localmente Hilbert.

Definición 2.1.3. Sea M un espacio topológico dos contable y Hausdorff. Un C^p**- atlas** sobre M con $(p \geqslant 0)$, es una familia de parejas $\mathfrak{A} = \{(U_i, \varphi_i)\}_{i\in I}$, que satisface las siguientes condiciones

1. **Cada U_i es un subconjunto abierto de M y $\bigcup_{i\in I} U_i = M$.**
2. **Cada φ_i es un homeomorfismo de U_i en $\varphi_i(U_i)$, donde $\varphi_i(U_i)$ es un abierto de algún espacio de Hilbert separable $\mathbb{H}_i$ y para cada pareja $(i,j) \in I \times I$ se tiene que $\varphi_i(U_i \cap U_j)$ es un abierto de $\mathbb{H}_i$.**
3. **Cada aplicación $(\varphi_i \circ \varphi_j^{-1}) : \varphi_j(U_i \cap U_j) \longrightarrow \varphi_i(U_i \cap U_j)$, es difeomorfismo de clase C^p.**

Observación 2.1.4. La tercera propiedad en la definición anterior se conoce como **compatibilidad entre** (U_j, φ_j) y (U_i, φ_i).

Definición 2.1.5. Dado $\mathfrak{A} = \{(U_i, \varphi_i)\}_{i\in I}$ un C^p-atlas sobre M, decimos que cada pareja (U_i, φ_i) es una **carta del atlas** $\mathfrak{A}$. Sea $p \in M$ tal que $p \in U_i$, entonces decimos que (U_i, φ_i) es **una carta para** p del atlas $\mathfrak{A}$.

Definición 2.1.6. Dados un atlas $\mathfrak{A}$ sobre M y una carta (U, φ) en M, decimos que (U, φ) es **compatible con el atlas** $\mathfrak{A}$ si (U, φ) es compatible con cada carta del atlas $\mathfrak{A}$

Proposición 2.1.7. *Dados $\mathfrak{A} = \{(U_i, \varphi_i)\}_{i\in I}$ un C^p-atlas sobre M y (W, ψ),(V, ϕ) dos cartas compatibles con $\mathfrak{A}$, entonces (U, φ) y (V, ϕ) son compatibles entre sí.*

DEMOSTRACIÓN: Sea a en $V \cap W$, queremos ver que $(\psi \circ \phi^{-1})$ es un difeomorfismo de clase C^p en $\phi(a)$. Ahora, como $\mathfrak{A}$ es un C^p-atlas sobre M entonces existe $\alpha \in I$ tal que $a \in U_\alpha$, por lo tanto $a \in U_\alpha \cap V \cap W$.
Así, $(\psi \circ \phi^{-1}) = (\psi \circ \varphi_\alpha^{-1}) \circ (\varphi_\alpha \circ \phi^{-1})$ es de clase C^p sobre $\phi(U_\alpha \cap V \cap W)$, por lo tanto sobre $\phi(a)$. Como a es cualquier punto en $V \cap W$ entonces hemos probado que $(\psi \circ \phi^{-1})$ es de clase C^p en $\phi(V \cap W)$. De la misma manera podemos probar que $(\phi \circ \psi^{-1})$ es de clase C^p en $\psi(V \cap W)$.

$\square$

Proposición 2.1.8. *Sea $\mathfrak{A} = \{(U_i, \varphi_i)\}_{i\in I}$ un C^p-atlas sobre M. Si $p \geqslant 1$ y si U_i y U_j son tales que $U_i \cap U_j$ es no vacío, entonces $\mathbb{H}_i$ y $\mathbb{H}_j$ son **linealmente isomorfos** (como espacios vectoriales).*

DEMOSTRACIÓN: Para ver la demostración de una forma más clara, tomaremos las siguientes definiciones

- $(U_i, \varphi_i) := (U, \psi)$ y $(U_j, \varphi_j) := (V, \phi)$.
- Dado $a \in U \cap V$, definimos $\psi(a) := p$ y $\phi(a) := q$.
- $\psi(U \cap V) := W_1 \subset \mathbb{H}_i := \mathbb{H}_1$ y $\phi(U \cap V) := W_2 \subset \mathbb{H}_j := \mathbb{H}_2$.

Por lo tanto tenemos que la aplicación

$$(\phi \circ \psi^{-1}) : W_1 \longrightarrow W_2, \tag{2.1}$$

es una biyección y también las aplicaciones

$$T(\phi \circ \psi^{-1}) : TW_1 \longrightarrow TW_2\,,\ T(\psi \circ \phi^{-1}) : TW_2 \longrightarrow TW_1. \tag{2.2}$$

Veamos que $T(\phi \circ \psi^{-1})$ y $T(\psi \circ \phi^{-1})$ son aplicaciones inversas la una de la otra.
Esto es claro, pues por la proposición §1.5.6 tenemos que

$$T(\phi \circ \psi^{-1}) \circ T(\psi \circ \phi^{-1}) = T[(\phi \circ \psi^{-1}) \circ (\psi \circ \phi^{-1})]$$

y

$$T(\psi \circ \phi^{-1}) \circ T(\phi \circ \psi^{-1}) = T[(\psi \circ \phi^{-1}) \circ (\phi \circ \psi^{-1})].$$

Entonces hemos mostrado que TW_1 y TW_2 son linealmente isomorfos y también T_pW_1 y T_qW_2 lo son, por lo tanto $\mathbb{H}_1$ y $\mathbb{H}_2$ son linealmente isomorfos.
□

Proposición 2.1.9. *Sea $\mathfrak{A} = \{(U_i, \varphi_i)\}_{i \in I}$ un C^p-atlas sobre M, con $p \geqslant 1$. Para cada componente conexa $\mathcal{C}$ de M, existe un espacio de Hilbert $\mathbb{H}$, tal que para cada carta (U, φ) que esté en $\mathcal{C}$, si $\varphi(U) \subset \mathbb{H}'$ y $\mathbb{H}'$ es un espacio de Hilbert, entonces $\mathbb{H}'$ y $\mathbb{H}$ son isomorfos (como espacios vectoriales).*

DEMOSTRACIÓN: Sea $\mathcal{C}$ una componente conexa de M, como M es localmente arcoconexa entonces $\mathcal{C}$ es arcoconexa. Sean x un punto fijo en $\mathcal{C}$ y y cualquier punto en $\mathcal{C}$. Por la arcoconexidad de $\mathcal{C}$ sabemos que existe una función continua

$$f : [0, 1] \longrightarrow \mathcal{C},$$

tal que $f(0) = x$ y$f(1) = y$, definamos así $W := f[0, 1]$ y tomemos una familia $\{U_a\}_{a \in W}$,

donde cada U_a es una carta de a del atlas $\mathfrak{A}$, entonces esta familia es un cubrimiento abierto de W, por la compacidad de W podemos reducir este cubrimiento a un cubrimiento finito, supongamos que tal cubrimiento finito está dado por $\{U_i\}_{1\leq i\leq k}$ y sin pérdida de generalidad supongamos que $x \in U_1$ y $y \in U_k$. Por la conexidad de W se tiene que $U_i \cap U_{i+1} \neq \phi$ para $i = 1, ..., k-1$, y por la proposición §2.1.8 tenemos que $\mathbb{H}_1$ es linealmente isomorfo a $\mathbb{H}_2$, $\mathbb{H}_2$ es linealmente isomorfo a $\mathbb{H}_3$ y así sucesivamente $\mathbb{H}_{k-1}$ es linealmente isomorfo a $\mathbb{H}_k$, por lo tanto $\mathbb{H}_1$ y $\mathbb{H}_k$ son linealmente isomorfos (como espacios vectoriales). Entonces podemos tomar $\mathbb{H} = \mathbb{H}_1$ y así encontramos el espacio de Hilbert deseado.
□

Proposición 2.1.10. *Sean $\mathfrak{A} = \{(U_i, \varphi_i)\}_{i\in I}$ un C^p-atlas sobre M con $p \geqslant 1$ y $\mathbb{H}$ un espacio de Hilbert separable. Definamos $A_{\mathbb{H}}$:=$\{x \in M$: existe una carta (U, φ) de x con $\varphi(U) \subseteq \mathbb{H}'$ y $\mathbb{H}'$ linealmente isomorfo a $\mathbb{H}\}$, entonces $A_{\mathbb{H}}$ es abierto y cerrado en M.*

DEMOSTRACIÓN:

- Veamos que $A_{\mathbb{H}}$ es abierto. Supongamos que $A_{\mathbb{H}}$ no es abierto, entonces existe p en $A_{\mathbb{H}}$ tal que p no es punto interior de $A_{\mathbb{H}}$, luego para todo abierto V que contiene a p, existen puntos en V que no están en $A_{\mathbb{H}}$, en particular si $V = U_i$, donde (U_i, φ_i) es una carta de p. Sea entonces $x \in U_i$ tal que x no está $A_{\mathbb{H}}$, si (U_j, φ_j) es un carta de x con $\varphi_j(U_j) \subseteq \mathbb{H}_j$, entonces $\mathbb{H}_i$ es linealmente isomorfo a $\mathbb{H}_j$, por lo tanto $\mathbb{H}_j$ es linealmente isomorfo a $\mathbb{H}$, y así x está en $A_{\mathbb{H}}$, lo cual es una contradición. Por lo tanto $A_{\mathbb{H}}$ es abierto.

- Ahora veamos que $A_{\mathbb{H}}$ es cerrado. Sea $q \in \overline{A}_{\mathbb{H}}$, luego para todo abierto U en M que contiene a q se tiene que $U \cap A_{\mathbb{H}}$ es no vacío, en particular si $U = U_i$, donde (U_i, φ_i) es una carta de q. Sea y en M tal que $y \in U_i \cap A_{\mathbb{H}}$, luego existe (U_j, φ_j) carta de y tal que $\mathbb{H}_j$ es linealmente isomorfo a $\mathbb{H}$, pero también tenemos que $\mathbb{H}_j$ es linealmente isomorfo a $\mathbb{H}_i$, por lo tanto q está en $A_{\mathbb{H}}$ entonces $A_{\mathbb{H}}$ es cerrado.

□

Observación 2.1.11. Como una consecuencia de la proposición §2.1.10 tenemos que cada componente conexa de M es abierta y cerrada en la topología de M.

Definición 2.1.12. Dado un espacio topológico M con la propiedad de ser Hausdorf y dos contable, decimos que M es una C^p-$\mathbb{H}$ **variedad topológica** si existe un C^p-atlas $\mathfrak{A} = \{(U_i, \varphi_i)\}_{i\in I}$ sobre M, donde cada $\varphi_\alpha(U_\alpha) \subset \mathbb{H}$ y $\mathbb{H}$ es un espacio de Hilbert separable.

Ejemplos 2.1.13. Veamos algunos ejemplos de variedades topológicas.

- Sea un espacio de Hilbert separable $\mathbb{H}$, tenemos que $\mathbb{H}$ con el atlas $\{(\mathbb{H}, id)\}$ es una C^∞-$\mathbb{H}$ variedad topológica.

- Dado un abierto U de un espacio de Hilbert separable $\mathbb{H}$, entonces U con el atlas $\{(U, id|_U)\}$ es una C^∞-$\mathbb{H}$ variedad topológica.

♦

Definición 2.1.14. Dados $\mathfrak{A}$=$\{(U_i, \varphi_i)\}_{i\in I}$ y $\mathfrak{B}$=$\{(V_j, \phi_j)\}_{j\in J}$ dos C^p-atlas sobre una C^p-$\mathbb{H}$ variedad topológica M, decimos que son **compatibles** si y sólo si la unión de $\mathfrak{A}$ y $\mathfrak{B}$ es un C^p-atlas sobre M.

Observación 2.1.15. La relación de compatibilidad entre atlas es una **relación de equivalencia**.

2.2. Varidades Suaves

Definición 2.2.1. Definimos una C^p-$\mathbb{H}$ **variedad** o también **variedad suave** a una C^p-$\mathbb{H}$ variedad topológica M con un C^p-atlas maximal $\mathfrak{A}$.

Observación 2.2.2. Sean (U, φ) una carta en M y $p \in U$, entonces $\varphi(p)$ está en $\varphi(U) \subset \mathbb{H}$, tomando una **base ortogonal de Hilbert** $\{e_i\}$ en $\mathbb{H}$ tenemos que φ^i, la proyección de φ sobre la i-ésima componente, es llamada **i-ésima función coordenada.**

Teorema 2.2.3. *Cada C^p-atlas $\mathfrak{A}$ sobre una C^p-$\mathbb{H}$ variedad M está contenido en un único C^p-atlas maximal.*

DEMOSTRACIÓN: Tomemos todas las cartas compatibles con $\mathfrak{A}$, entonces ellas son compatibles entre sí, definamos $\mathfrak{M}$ el atlas formado por la unión de $\mathfrak{A}$ con todas estas cartas, si tomamos todas las cartas compatibles con $\mathfrak{M}$ entonces estas cartas son compatibles con $\mathfrak{A}$ y así ellas deben estar en $\mathfrak{M}$, por lo tanto $\mathfrak{M}$ es maximal.
Veamos que es único. Sea $\mathfrak{N}$ otro atlas maximal que contiene a $\mathfrak{A}$, por lo tanto todas las cartas de $\mathfrak{N}$ son compatibles con $\mathfrak{A}$, entonces $\mathfrak{N} \subset \mathfrak{M}$. Como $\mathfrak{N}$ es maximal, entonces se tiene que $\mathfrak{N}$=$\mathfrak{M}$. Con lo cual se prueba que $\mathfrak{M}$ es único.
□

Observación 2.2.4. Dado el teorema §2.2.3, podemos saber cuando un espacio topológico M es una C^p-$\mathbb{H}$ variedad, y es cuando podemos encontrar un C^p-atlas sobre M.

Ejemplos 2.2.5. Veamos algunos ejemplos teniendo en cuenta el teorema §2.2.3 .

1. Sea $\mathbb{H}$ un espacio de Hilbert separable y definamos el conjunto

$$S^{\mathbb{H}} := \{(x, v) \in \mathbb{R} \times \mathbb{H} : x^2 + \|v\|^2 = 1\}.$$

Sean p_+ y p_- puntos en $S^{\mathbb{H}}$ con $x = 1$ y $x = -1$ respectivamente y definamos las siguientes aplicaciones

$$\phi_+ : S^{\mathbb{H}} \backslash \{p_+\} \longrightarrow \mathbb{H}, \tag{2.3}$$

dada por

$$\phi_+[(x, v)] = \frac{v}{1 - x},$$

y

$$\phi_- : S^{\mathbb{H}} \backslash \{p_-\} \longrightarrow \mathbb{H}, \tag{2.4}$$

dada por

$$\phi_-[(x, v)] = \frac{v}{1 + x}.$$

En este caso, $\mathbb{H}$ es el subespacio $\{x = 0\}$ de $S^{\mathbb{H}}$ de codimesión 1.
Ahora

$$\|\phi_+[(x, v)]\|^2 = \frac{\|v\|^2}{(1 - x)^2} = \frac{1 - x^2}{(1 - x)^2} = \frac{1 + x}{1 - x} \neq 0,$$

y

$$\|\phi_-[(x, v)]\|^2 = \frac{\|v\|^2}{(1 + x)^2} = \frac{1 - x^2}{(1 + x)^2} = \frac{1 - x}{1 + x} \neq 0.$$

Así tenemos que

$$\phi_+^{-1} : \mathbb{H} \backslash \{0\} \longrightarrow S^{\mathbb{H}} \backslash \{p_+\}, \tag{2.5}$$

que está dada por

$$\phi_+^{-1}(v) = \left(\frac{\|v\|^2 - 1}{\|v\|^2 + 1}, \frac{2v}{\|v\|^2 + 1} \right),$$

y

$$\phi_-^{-1} : \mathbb{H} \backslash \{0\} \longrightarrow S^{\mathbb{H}} \backslash \{p_-\}, \tag{2.6}$$

que está dada por

$$\phi_-^{-1}(v) = \left(\frac{1 - \|v\|^2}{\|v\|^2 + 1}, \frac{2v}{\|v\|^2 + 1} \right).$$

Por lo tanto las aplicaciones ϕ_+ y ϕ_- son difeomorfismos.

Ahora

$$(\phi_- \circ \phi_+^{-1}) : \mathbb{H}\backslash\{0\} \longrightarrow \mathbb{H}\backslash\{0\}, \tag{2.7}$$

está dada por

$$(\phi_- \circ \phi_+^{-1})(v) = \phi_- \left(\frac{\|v\|^2 - 1}{\|v\|^2 + 1}, \frac{2v}{\|v\|^2 + 1} \right).$$

Por lo tanto

$$(\phi_- \circ \phi_+^{-1})(v) = \frac{\left(\frac{2v}{\|v\|^2+1}\right)}{1 + \left(\frac{\|v\|^2-1}{\|v\|^2+1}\right)} = \frac{\left(\frac{2v}{\|v\|^2+1}\right)}{\left(\frac{2\|v\|^2}{\|v\|^2+1}\right)} = \frac{v}{\|v\|^2}. \tag{2.8}$$

De igual manera obtenemos que

$$(\phi_+ \circ \phi_-^{-1})(v) = \frac{v}{\|v\|^2}. \tag{2.9}$$

Entonces las aplicaciones $(\phi_+ \circ \phi_-^{-1})$ y $(\phi_- \circ \phi_+^{-1})$ son de clase C^∞.

Así tenemos que $\{(S^{\mathbb{H}}\backslash\{p_\pm\}, \phi_\pm)\}$ es un C^∞-atlas sobre $S^{\mathbb{H}}$. Entonces por el teorema §2.2.3 se tiene que $S^{\mathbb{H}}$ es una C^∞-$\mathbb{H}$ variedad.

2. Dado un espacio de Hilbert separable $\mathbb{H}$, entonces $\{(\mathbb{H}, id)\}$ es un C^∞-atlas sobre $\mathbb{H}$, por lo tanto $\mathbb{H}$ es una C^∞-$\mathbb{H}$ variedad.

3. Dado un abierto U de un espacio de Hilbert separable $\mathbb{H}$, entonces $\{(U, id|_U)\}$ es C^∞-atlas sobre U, así U es una C^∞-$\mathbb{H}$ variedad.

4. Sean M una C^p-$\mathbb{H}_1$ variedad y N una C^p-$\mathbb{H}_2$ variedad. Entonces $M \times N$ es una C^p-$\mathbb{H}_1 \times \mathbb{H}_2$ variedad. En efecto, supongamos que $\mathfrak{A}$=$\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha \in I}$ es un C^p-atlas de M y $\mathfrak{A}$=$\{(V_\alpha, \phi_\beta)\}_{\beta \in J}$ es un C^p-atlas de N. Entonces si definimos $\mathfrak{D}$= $\{(U_\alpha \times V_\beta, \varphi_\alpha \times \phi_\beta)\}_{(\alpha,\beta) \in I \times J}$, tenemos que $\mathfrak{D}$ es un C^p-atlas de $M \times N$. Así por el teorema §2.2.3 tenemos lo deseado.

♦

Observación 2.2.6. De ahora en adelante hablaremos simplemente de una $\mathbb{H}$-variedad o variedad, haciendo referecia a una C^∞-$\mathbb{H}$ variedad sobre cierto espacio de Hilbert separable $\mathbb{H}$. En caso contrario daremos la notación correpondiente.

2.3. Funciones entre Variedades

Definición 2.3.1. Dadas dos variedades M y N y una aplicación continua $F : M \longrightarrow N$, decimos que F es una aplicación de **clase** C^p, si existen un par de atlas $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha\in I}$ de M y $\{(V_\beta, \phi_\beta)\}_{\beta\in J}$ de N tales que las aplicaciones

$$\phi_\beta \circ F \circ \varphi_\alpha^{-1} : \varphi_\alpha(U_\alpha \cap F^{-1}(V_\beta)) \longrightarrow \phi_\beta(V_\beta), \tag{2.10}$$

son de clase C^p para toda pareja $(\alpha, \beta) \in I \times J$.

Definición 2.3.2. Si $F : M \longrightarrow N$ es un homeomorfismo entre variedades y tanto F como F^{-1} son de clase C^p, entonces decimos que F es un **difeomorfismo de clase** C^p entre M y N.

Proposición 2.3.3. *Las definiciones anteriores son independientes de los atlas seleccionados.*
Además si las aplicaciones continuas $F : M \longrightarrow N$ y $G : N \longrightarrow X$ son de clase C^p, entonces $G \circ F$ es una aplicación de clase C^p.

DEMOSTRACIÓN:

- Sean $\{(U_{\alpha'}, \varphi_{\alpha'})\}_{\alpha'\in I'}$ y $\{(V_{\beta'}, \phi_{\beta'})\}_{\beta'\in J'}$ otro par de atlas de M y N respectivamente. Teniendo en cuenta los dominios de restricción de la definición, tenemos que la aplicación

$$(\phi_{\beta'} \circ F \circ \varphi_{\alpha'}^{-1}) = [\phi_{\beta'} \circ \phi_\beta^{-1}] \circ [\phi_\beta \circ F \circ \varphi_\alpha^{-1}] \circ [\varphi_{\alpha'} \circ \varphi_\alpha^{-1}]^{-1}, \tag{2.11}$$

  es de clase C^p para cada pareja $(\alpha, \beta) \in I' \times J'$.

- Para la demostración de la composición $G \circ F$ de F y G, es suficiente demostar que es verdad para las representaciones locales, así la aplicación

$$(\varphi_X \circ G \circ F \circ \phi_M^{-1}) = [\varphi_X \circ G \circ \psi_N^{-1}] \circ [\psi_N \circ F \circ \phi_M^{-1},] \tag{2.12}$$

  es de clase C^p.

□

Proposición 2.3.4. *Sean M una $\mathbb{H}$-variedad y $F : M \longrightarrow \mathbb{H}$ una aplicación suave (C^∞). Si U es un abierto de M tal que la aplicación*

$$F|_U : U \longrightarrow F(U),$$

es un difeomorfismo, entonces $(U, F|_U)$ es una carta del atlas maximal de M.

DEMOSTRACIÓN: Sea $\mathfrak{A} = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha\in I}$ el atlas maximal sobre M, para cada $\alpha \in I$ se tiene que las aplicaciones $(F|_U \circ {\varphi_\alpha}^{-1})$ y $(\varphi_\alpha \circ F|_U)$ son suaves. Entonces $(U, F|_U)$ es compatible con el atlas $\mathfrak{A}$, como $\mathfrak{A}$ es maximal entonces $\varphi_\alpha \circ F|_U$ es una carta de $\mathfrak{A}$.
□

Definición 2.3.5. Dada M una variedad de Hilbert, definimos

$$\mathfrak{F}M := \{f : M \longrightarrow \mathbb{R} : f \textit{ es suave } (C^\infty)\}$$

Proposición 2.3.6. *Dada M una variedad de Hilbert, tenemos que el conjunto $\mathfrak{F}M$ es una $\mathbb{R}$-álgebra bajo la composiciones naturales.*

1. $(f + g)(p) = f(p) + g(p)$,
2. $(\alpha f)(p) = \alpha f(p)$,
3. $(fg)(p) = f(p)g(p)$.

$\forall f, g \in \mathfrak{F}M$, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$.

DEMOSTRACIÓN: Es claro por definición. □

Proposición 2.3.7. *Sean M y N dos variedades de Hilbert y $F : M \longrightarrow N$ una aplicación suave, entonces la aplicación*

$$F^* : \mathfrak{F}M \longrightarrow \mathfrak{F}N, \tag{2.13}$$

definida como

$$F^*(f) = f \circ F. \tag{2.14}$$

Es un morfismo de álgebras.

DEMOSTRACIÓN: Se tiene por definición.
□

Proposición 2.3.8. *Sean M un $\mathbb{H}$-variedad y (U, φ) una carta tal que $\varphi(U) = V$ es una vecindad de $0 \in \mathbb{H}$ y $R > 0$ tal que $B_R(0) \subset V$. Si $f : B_R(0) \longrightarrow \mathbb{R}$, es una función de clase C^∞ y r, t son tales que $0 < r < t < R$, entonces existe una función suave $g : M \longrightarrow \mathbb{R}$, tal que*

1. $(g \circ \varphi^{-1})(v) = f(v)$, *para todo* $v \in B_r(0)$,
2. $g(q) = 0$, *para todo* $q \notin B_t(0)$.

DEMOSTRACIÓN: Sea $\phi : \mathbb{R} \longrightarrow [0, 1]$, una función suave que cumple lo siguiente

1. $\phi(x) = 1, \quad$ para $|x| \leq r$,
2. $\phi(x) = 1, \quad$ para $|x| \geq t$.

Definamos $g \circ \varphi^{-1}$ por $\phi(|v|)f(v)$ y $g(q) = 0$ para $q \in M$, no en $\varphi^{-1}(B_t(0))$.

Probemos la existencia de la función ϕ en los siguientes pasos

1. $$\lambda(x) = \begin{cases} exp^{\frac{1}{(x+r)(x+t)}} & ,\text{si } -t < x < r \\ 0 & ,\text{en otro caso.} \end{cases};$$

2. $$\mu(x) = \frac{\int_{-t}^{-x} \lambda(y)dy}{\int_{-t}^{-r} \lambda(y)dy};$$

3. $$\phi(x) = \begin{cases} \mu(x) & ,\text{si } x > 0 \\ \mu(-x) & ,\text{si } x \leq 0 \end{cases}.$$

$\square$

CAPÍTULO 3

Fibrados

3.1. Fibrado Tangente

Nuestras teorías sobre la naturaleza pueden parecer abstractas y temibles a quienes no las han estudiado, pero no hay que olvidar que son otros locos quienes las han hecho.
RICHARD FEYNMAN.

En las secciones precedentes hemos visto algunas propiedades geométricas de las variedades de Hilbert, así como la definición de los espacios tangentes locales a través del operador diferencial dado por la derivada tipo Fréchet inducida por la norma local. A continuación, en la primera sección de este capítulo, procederemos a construir el fibrado tangente TM de una variedad de Hilbert M siguiendo el procedimiento clásico de Steenrod [N.S99].

Se empezará por dar una construcción local de los vectores tangentes a M en $p \in M$, que dan origen a $T_p(M)$ como veremos en nuestra primera definición. Si M es una $\mathbb{H}$-variedad tendremos que $T_p(M)$ es un espacio vectorial isomorfo a $\mathbb{H}$. Despues de ver la contrucción del fibrado tangente asociado a M definiremos la aplicación τ_M de manera análoga a como se definió en §1.5.3. En §3.1.4 probaremos TM tiene estructura de variedad de Hilbert y que τ_M es suave.

Dada $F : M \longrightarrow N$, entre variedades, daremos la definición de la tangencial de F, la cual está relacionada con las aplicaciones τ_M y τ_N, es decir $(\tau_N \circ F) = (F \circ \tau_M)$ y lo probaremos en §3.1.7.

Por último hablaremos de un fibrado vectorial $\pi : P \longrightarrow M$ sobre M con fibra $\pi^{-1}(\{p\})$ modelada sobre un espacio de Banach $\mathbb{E}$. Se probará que $(TM, \tau_M, M, \mathbb{H})$ es un fibrado tangente sobre M son fibra modelada sobre $\mathbb{H}$.

Definición 3.1.1. Sea M una $\mathbb{H}$-variedad.

1. Dado $p \in M$, (U, φ) una carta de p, y $\varphi(U) = V \subset \mathbb{H}$. Definimos a $T_{\varphi(p)}V$ como **el representante del espacio tangente de M en p**, dado por la carta (U, φ). Los elementos de $T_{\varphi(p)}V$ son denotados por $(\varphi(p), X_{\varphi(p)})$, donde $X_{\varphi(p)}$ está en $\mathbb{H}$ y es llamado la **parte principal del vector** $(\varphi(p), X_{\varphi(p)})$.

2. Dadas dos cartas (U_1, φ) y (U_2, ϕ) de $p \in M$ y tomando $\varphi(U_1) = V_1$ y $\phi(U_2) = V_2$, tenemos que la función de transición

$$(\phi \circ \varphi^{-1}) : \varphi(U_1 \cap U_2) \longrightarrow \phi(U_1 \cap U_2) \tag{3.1}$$

determina un isomorfismo lineal

$$T_{\varphi(p)}(\phi \circ \varphi^{-1}) : T_{\varphi(p)}V_1 \longrightarrow T_{\phi(p)}V_2. \tag{3.2}$$

Definido como:

$$T_{\varphi(p)}(\phi \circ \varphi^{-1})[(\varphi(p), X_{\varphi(p)})] = (\phi(p), D(\phi \circ \varphi^{-1})(\varphi(p))[X_{\varphi(p)}]).$$

Decimos que $(\varphi(p), X_{\varphi(p)})$ y $(\phi(p), X_{\phi(p)})$ están relacionados o representan el mismo vector tangente a M en p, si se tiene lo siguiente

$$D(\phi \circ \varphi^{-1})(\varphi(p))[X_{\varphi(p)}] = X_{\phi(p)}. \tag{3.3}$$

Esta relación entre vectores es una relación de equivalencia.

En efecto, dadas (U, φ),(V, ϕ) y (W, ψ) tres cartas de p, tales que

$$D(\phi \circ \varphi^{-1})(\varphi(p))[X_{\varphi(p)}] = X_{\phi(p)} \tag{3.4}$$

y

$$D(\psi \circ \phi^{-1})(\phi(p))[X_{\phi(p)}] = X_{\psi(p)}. \tag{3.5}$$

Queremos ver que

$$D(\psi \circ \varphi^{-1})(\varphi(p))[X_{\varphi(p)}] = X_{\psi(p)}.$$

Tenemos que

$$D(\psi \circ \varphi^{-1})(\varphi(p))[X_{\varphi(p)}] = D[(\psi \circ \phi^{-1}) \circ (\phi \circ \varphi^{-1})](\varphi(p))[X_{\varphi}(p)], \tag{3.6}$$

por la proposición §1.4.5 tenemos

$$D(\psi \circ \varphi^{-1})(\varphi(p))[X_{\varphi(p)}] = D(\psi \circ \phi^{-1})[(\phi \circ \varphi^{-1})(\varphi(p))][D(\phi \circ \varphi^{-1})(\varphi(p))[X_{\varphi(p)}]] \tag{3.7}$$

$$= D(\psi \circ \phi^{-1})(\phi(p))[D(\phi \circ \varphi^{-1})(\varphi(p))[X_{\varphi(p)}]]. \tag{3.8}$$

Por la ecuación §3.4 se tiene que

$$D(\psi \circ \varphi^{-1})(\varphi(p))[X_{\varphi(p)}] = D(\psi \circ \phi^{-1})(\phi(p))[X_{\phi(p)}], \tag{3.9}$$

y por la ecuación §3.5 tenemos

$$D(\psi \circ \varphi^{-1})(\varphi(p))[X_{\varphi(p)}] = X_{\psi(p)}. \tag{3.10}$$

Luego queda demostrado es que esta relación entre vectores es una relación de equivalencia.
Entonces un vector tangente a M en p es definido por la familia de estos representantes, dados por las cartas de p.

3. Dado $p \in M$, definimos el **espacio tangente** T_pM como el conjunto de vectores tangentes a M en p.
   Cada carta (U, φ) de p con $\varphi(U) = V$, determina un isomorfismo entre T_pM y $T_{\varphi(p)}V$ dada por la siguiente **aplicación representante**:

$$T_p\varphi : T_pM \longrightarrow T_{\varphi(p)}V, \tag{3.11}$$

   definida por:

$$T_p\varphi(\overline{[\varphi(p), X_{\varphi(p)}]}) = (\varphi(p), X_{\varphi(p)}).$$

   Donde $\overline{[\varphi(p), X_{\varphi(p)}]}$ es la clase de equivalencia de la cuál $(\varphi(p), X_\varphi(p))$ es representante. Además con esta aplicación tenemos T_pM tiene estructura de espacio vectorial isomorfo a $\mathbb{H}$.

4. Usando la aplicación (isomorfismo)

$$\pi_2 : T_{\varphi(p)}V = \{\varphi(p)\} \times \mathbb{H} \longrightarrow \mathbb{H}, \tag{3.12}$$

   definimos la aplicación

$$\mathcal{D}\varphi(p) := \pi_2 \circ T_p\varphi, \tag{3.13}$$

   como la **diferencial de φ en p**.

Teorema 3.1.2. *La estructura de espacio vectorial de T_pM es independiente de la aplicación representante selecionada.*

DEMOSTRACIÓN: Sean (U_1, φ) y (U_2, ϕ) dos cartas de p, con $V_1 = \varphi(U_1)$ y $V_2 = \phi(U_2)$. Entonces

$$T_p\phi \circ T_p\varphi^{-1} : T_{\varphi(p)}V_1 \longrightarrow T_{\phi(p)}V_2 \tag{3.14}$$

es un isomorfismo lineal.

Donde

$$T_p\phi \circ T_p\varphi^{-1} = T_{\varphi(p)}(\phi \circ \varphi^{-1}),$$

y

$$T_{\varphi(p)}(\phi \circ \varphi^{-1})[(\varphi(p), X_{\varphi(p)})] = (\phi(p), D(\phi \circ \varphi^{-1})(\varphi(p))[X_{\varphi(p)}]). \tag{3.15}$$

Hay que notar que

$$D(\phi \circ \varphi^{-1})(\varphi(p)) = D\phi(p) \circ (D\varphi(p))^{-1}. \tag{3.16}$$

□

Definición 3.1.3. Sea M una $\mathbb{H}$-variedad. Definimos a

$$TM = \bigcup_{p \in M} T_pM,$$

como el **Espacio Tangente** de M.
También definimos la aplicación

$$\tau \equiv \tau_M : TM \longrightarrow M,$$

que asocia a cada $X \in T_pM$ el punto $p \in M$. La aplicación τ_M es llamada la proyección de TM sobre M.

Proposición 3.1.4. *Sea M una $\mathbb{H}$-variedad. Entonces TM es una $\mathbb{H} \times \mathbb{H}$-variedad y τ es una aplicación suave.*
Más precisamente, cada atlas $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha \in I}$ suave de M, define un atlas $\{(TU_\alpha, T\varphi_\alpha)\}_{\alpha \in I}$ suave de TM, como sigue:

- *Definimos $V_\alpha := \varphi_\alpha(U_\alpha)$, para todo $\alpha \in I$*
- *Definimos $TU_\alpha := \bigcup_{p \in U_\alpha} T_pM$, para todo $\alpha \in I$ y*

- *La aplicación*

$$T\varphi_\alpha : TU_\alpha \longrightarrow TV_\alpha = V_\alpha \times \mathbb{H}, \tag{3.17}$$

definida como

$$T\varphi_\alpha(X) := T_{\tau[X]}\varphi_\alpha(X) = (\varphi_\alpha(\tau[X]), X_{\varphi_\alpha(\tau[X])}).$$

DEMOSTRACIÓN:

- . Lo primero que queremos ver es que cada $T\varphi_\alpha$ es una biyección y que las aplicaciones

$$(T\varphi_\beta \circ T\varphi_\alpha^{-1}) : TV_\alpha \cap TV_\beta \longrightarrow TV_\alpha \cap TV_\beta, \tag{3.18}$$

son suaves para cada par $(\alpha, \beta \in) I \times I$.

Tenemos que

$$T\varphi_\alpha(X) = T_{\tau[X]}\varphi_\alpha(X) = (\varphi_\alpha(\tau[X]), X_{\varphi_\alpha(\tau[X])}) \tag{3.19}$$

y cada φ_α es una biyección, luego cada $T\varphi_\alpha$ es una biyección entre subconjuntos de TM y abiertos de $\mathbb{H} \times \mathbb{H}$.

La suavidad de las aplicaciónes

$$(T\varphi_\beta \circ T\varphi_\alpha^{-1}) : TV_\alpha \cap TV_\beta \longrightarrow TV_\alpha \cap TV_\beta,$$

se tienen porque $(T\varphi_\beta \circ T\varphi_\alpha^{-1}) = T(\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1})$ y por la suavidadd de las aplicaciónes $(\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1})$, para todo par $(\alpha, \beta) \in I \times I$

- Ahora veamos que la aplicación

$$\tau : TM \longrightarrow M \tag{3.20}$$

es suave.
Para demostrar esto, veamos que podemos encontrar un par de atlas para TM y M, que cumplan con la definición §2.3.1.

Tomemos $(TU_\alpha, T\varphi_\alpha)$ una carta en TM y $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ la correspondiente carta en M. Entonces para la aplicación

$$(\varphi_\alpha \circ \tau \circ (T\varphi_\alpha)^{-1}) : TV_\alpha \longrightarrow \varphi_\alpha(U_\alpha) = V_\alpha, \tag{3.21}$$

definida por

$$(\varphi_\alpha \circ \tau \circ (T\varphi_\alpha)^{-1})((\varphi_\alpha, X_{\varphi_\alpha})) = (\varphi_\alpha \circ \tau)(X).$$

Donde $(\varphi_\alpha, X_{\varphi_\alpha})$ está en TV_α y X está en TU_α,
se tiene que

$$(\varphi_\alpha \circ \tau \circ (T\varphi_\alpha)^{-1})((\varphi_\alpha, X_{\varphi_\alpha})) = \varphi_\alpha. \tag{3.22}$$

Por lo tanto τ es suave.

□

Definición 3.1.5. Dada una $\mathbb{H}$-variedad M, definimos el **fibrado tangente de** M con la tripleta (τ_M, TM, M). Donde τ_M es definida como en la definición §3.1.3, TM es una $\mathbb{H} \times \mathbb{H}$-variedad y además decimos que TM es el **espacio tangente total de** M.

Definición 3.1.6. Dadas dos variedades M y N y una aplicación suave

$$F : M \longrightarrow N, \tag{3.23}$$

definimos el **tangencial de** F como la aplicación

$$TF : TM \longrightarrow TN, \tag{3.24}$$

dada como sigue.
Para cada $p \in M$, definimos

$$T_pF : T_pM \longrightarrow T_{F(p)}N; \tag{3.25}$$

como la **tangencial de** F en p, tomando la representación local

$$T_{\varphi(p)}(\phi \circ F \circ \varphi^{-1}) : T_{\varphi(p)}W_1 \longrightarrow T_{\phi(F(P))}W_2. \tag{3.26}$$

Definida como

$$T_{\varphi(p)}(\phi \circ F \circ \varphi^{-1})[(\varphi(p), X_{\varphi(p)})] = (\phi(F(p)), D(\phi \circ F \circ \varphi^{-1})(\varphi(p))[X_{\varphi(p)}]) \tag{3.27}$$

Donde $(\phi \circ F \circ \varphi^{-1})$ es una representación local de F, con (U, φ) y (V, ϕ) dos cartas de p y $F(p)$ respectivamente, además considerando $W_1 = \varphi(U)$ y $W_2 = \phi(V)$.

Proposición 3.1.7. *Veamos algunos resultados importantes.*

1. *La definición anterior es independiente de la representación local de F,*

2. *TF es suave y el siguiente diagrama es conmutativo.*

$$\begin{tikzcd} TM \arrow[r, "TF"] \arrow[d, "\tau_M"'] & TN \arrow[d, "\tau_N"] \\ M \arrow[r, "F"'] & N \end{tikzcd}$$

3. *Sean M_1, M_2 y M_3 variedades de Hilbert y*

$$F_1 : M_1 \longrightarrow M_2 \quad , \quad F_2 : M_2 \longrightarrow M_3 \tag{3.28}$$

dos aplicaciones suaves. Entonces tenemos que $TF_1 \circ TF_2 = T(F_1 \circ F_2)$.

DEMOSTRACIÓN:

1. Veamos la independencia de la representación de F para la definición de T_pF.
   Sean (U, φ),(U', φ') y (V, ϕ) , (V, ϕ') cartas de p y $F(p)$ respectivamente, tales que $(\phi' \circ F \circ \varphi'^{-1})$ y $(\phi \circ F \circ \varphi^{-1})$ son representaciones locales de F.
   Entonces tenemos que la igualdad

$$T(\phi' \circ F \circ \varphi'^{-1}) = T(\phi' \circ \phi^{-1}) \circ T(\phi \circ F \circ \varphi^{-1}) \circ T(\varphi' \circ \varphi^{-1})^{-1}, \tag{3.29}$$

   es válida es una pequeña vecindad de $\varphi'(p)$ en $\varphi'(U')$. Por lo tanto se ha mostrado la independencia de la representación local de F para la definición de TP.

2. Veamos la suavidad de la aplicación TM.

   Para ver esto necesitamos encontrar un par de atlas de TM y TN, de tal manera que se cumpla lo indicado en la definición §2.3.1. Dado F es una aplicación suave, existen un par de atlas $\mathfrak{A}$=$\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha \in I}$ y $\mathfrak{B}$=$\{(V_\beta, \phi_\beta)\}_{\beta \in J}$ de M y N respectivamente tales que las aplicaciones

$$(\phi_\beta \circ F \circ \varphi_{-1}) : \varphi(U_\alpha \cap F_{-1}(V_\beta)) \longrightarrow \phi_\beta(V_\beta),$$

   son suaves para cada pareja $(\alpha, \beta) \in I \times J$.

   Ahora, por la proposición §3.1.4 tenemos que los atlas $\mathfrak{A}$ y $\mathfrak{B}$ determinan un par de atlas $\{(TU_\alpha, T\varphi_\alpha)\}_{\alpha \in I}$ y $\{(TV_\beta, T\phi_\beta)\}_{\beta \in J}$ sobre TM y TN respectivamente, para demostrar lo que queremos, basta con ver que las aplicaciones

$$(T\phi_\beta \circ TF \circ T\varphi_\alpha{}^{-1})$$

   son suaves para cada pareja $(\alpha, \beta) \in I \times J$, pero esto es cierto, pues tenemos la siguiente igual

$$(T\phi_\beta \circ TF \circ T\varphi_\alpha{}^{-1}) = T(\phi_\beta \circ F \circ \varphi_{-1}).$$

Para cada pareja $(\alpha, \beta) \in I \times J$.
Luego queda demostrada la suavidad de la aplicación TM.

3. Veamos que el diagrama conmuta.

   Dado X en T_pM tenemos que

$$(F \circ \tau_M)(X) = F(p) \tag{3.30}$$

   y

$$(\tau_N \circ T_pF)(X) = \tau_N(X_{F(p)}) = F(p). \tag{3.31}$$

   Entonces tenemos que efectivamente el diagrama conmuta.

4. Veamos que $T(F_2 \circ F_1) = TF_2 \circ TF_1$

   Tenemos la siguiente igualdad

$$(\psi \circ F_2 \circ F_1 \circ \varphi^{-1}) = (\psi \circ F_2 \circ \phi^{-1}) \circ (\phi \circ F_1 \circ \varphi^{-1}), \tag{3.32}$$

   donde esté bien definida esta composición, con $(\psi \circ F_2 \circ \phi^{-1})$ una representación local de F_2 y $(\phi \circ F_1 \circ \varphi^{-1})$ una representación local de F_1. Además por el proposición §1.5.6 tenemos que

$$T(\psi \circ F_2 \circ F_1 \circ \varphi^{-1}) = T(\psi \circ F_2 \circ \phi^{-1}) \circ T(\phi \circ F_1 \circ \varphi^{-1}). \tag{3.33}$$

   Luego tenemos la demostración.

□

Definición 3.1.8. Sean M una $\mathbb{H}$-variedad, N un espacio de Hilbert $\mathbb{H}'$ y $F : M \longrightarrow N$, una aplicación suave. Definimos la **Diferencial de** F **en** p, como la siguiente aplicación lineal

$$\mathcal{D}F(p) : T_pM \longrightarrow \mathbb{H}', \tag{3.34}$$

dada por la composición de la aplicación

$$T_pF : T_pM \longrightarrow T_{F(p)}\mathbb{H}' = \{F(p)\} \times \mathbb{H}', \tag{3.35}$$

con la proyección

$$\pi_2 : \{F(p)\} \times \mathbb{H}' \longrightarrow \mathbb{H}'. \tag{3.36}$$

En otras palabras,

$$\mathcal{D}F(p)(X) := (\pi_2 \circ T_p F)(X). \tag{3.37}$$

Proposición 3.1.9. *Sea M una variedad de Hilbert, entonces*

1. $\mathcal{D}(\alpha f + \beta g)(p) \ = \alpha \mathcal{D}f(p) + \beta \mathcal{D}g(p),$
2. $\mathcal{D}(fg)(p) \ = \mathcal{D}f(p)g(p) + f(p)\mathcal{D}g(p)$

   $\forall f, g \in \mathfrak{F}M, \ \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} \ \ y \ \forall p \in M$

Observación 3.1.10. Notaremos en ocasiones X y no $X_{\varphi(p)}$ para simplificar un poco la escritura de la prueba.

DEMOSTRACIÓN:

1. Sean $p \in M$, (U, φ) una carta de p, f y $g \in \mathfrak{F}M$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.
   Tenemos que

   $$(\alpha f + \beta g) \circ \varphi^{-1} : \varphi(U) \longrightarrow \mathfrak{R}, \tag{3.38}$$

   es suave.
   Definamos $h = \alpha f + \beta g$ y así

   $$T_p h : T_p M \longrightarrow T_{h(p)}, \tag{3.39}$$

   y tiene la representación local

   $$T_{\varphi(p)}(h \circ \varphi^{-1}) : T_{\varphi(p)}\varphi(U) \longrightarrow T_{(h(p))}\mathbb{R},$$

   definida como:

   $$T_{\varphi(p)}(h \circ \varphi^{-1})[\varphi(p), X_{\varphi(p)}] = [h(p), D(h \circ \varphi^{-1})(\varphi(p))(X_{\varphi(p)})].$$

Ahora

$$D(h\circ\varphi^{-1})(\varphi(p)) = D((\alpha f+\beta g)\circ\varphi^{-1})(\varphi(p)) = D(\alpha f\circ\varphi^{-1}+\beta g\circ\varphi^{-1})(\varphi(p)), \tag{3.40}$$

así

$$D(h\circ\varphi^{-1})(\varphi(p)) = (D(\alpha f\circ\varphi^{-1}) + D(\beta g\circ\varphi^{-1}))(\varphi(p)) \tag{3.41}$$
$$= \alpha(D(f\circ\varphi^{-1})(\varphi(p))) + \beta(D(g\circ\varphi^{-1})(\varphi(p))). \tag{3.42}$$

Luego

$$D(h\circ\varphi^{-1})(\varphi(p))[X] = \alpha(D(f\circ\varphi^{-1})(\varphi(p))[X]) + \beta(D(g\circ\varphi^{-1})(\varphi(p))[X]), \tag{3.43}$$

por lo tanto

$$T_{\varphi(p)}(h\circ\varphi^{-1})[\varphi(p),X] = [h(p),\alpha(D(f\circ\varphi^{-1})(\varphi(p))[X]) + \beta(D(g\circ\varphi^{-1})(\varphi(p))[X])].$$

Sabemos que

a) $\mathcal{D}h(p)[X] = (\pi_2\circ T_p h)[X]$,

b) $\mathcal{D}f(p)[X] = (\pi_2\circ T_p f)[X]$,

c) $\mathcal{D}g(p)[X] = (\pi_2\circ T_p g)[X]$.

Entonces

$$\mathcal{D}h(p)[X] = \alpha\mathcal{D}f(p)[X] + \mathcal{D}g(p)[X], \tag{3.44}$$

así tenemos que

$$\mathcal{D}(\alpha f+\beta g)(p) = \alpha\mathcal{D}f(p) + \beta\mathcal{D}g(p). \tag{3.45}$$

$\forall f,g\in\mathfrak{F}M$ y $\forall\alpha,\beta\in\mathbb{R}$

2. Sean $p\in M$, (U,φ) una carta de p y $f,g\in\mathfrak{F}M$.
   Tenemos que la aplicación

$$(fg)\circ\varphi^{-1} : \varphi(U) \longrightarrow \mathfrak{R}, \tag{3.46}$$

es suave.
Definamos $h = fg$ y así tenemos que

$$T_p h : T_p M \longrightarrow T_{h(p)}, \tag{3.47}$$

y tiene la representación local

$$T_{\varphi(p)}(h \circ \varphi^{-1}) : T_{\varphi(p)}\varphi(U) \longrightarrow T_{(h(p))}\mathbb{R}, \tag{3.48}$$

definida como

$$T_{\varphi(p)}(h \circ \varphi^{-1})[\varphi(p), X_{\varphi(p)}] = [h(p), D(h \circ \varphi^{-1})(\varphi(p))(X_{\varphi(p)})].$$

Ahora,

$$D(h \circ \varphi^{-1})(\varphi(p)) = D((fg) \circ \varphi^{-1})(\varphi(p)) = D((f \circ \varphi^{-1})(g \circ \varphi^{-1}))(\varphi(p)). \tag{3.49}$$

Sabemos que

$$D(h \circ \varphi^{-1})(\varphi(p)) = D(f \circ \varphi^{-1})(\varphi(p))g(p) + f(p)D(g \circ \varphi^{-1})(\varphi(p)). \tag{3.50}$$

Por lo tanto

$$D(h \circ \varphi^{-1})(\varphi(p))[X] = D(f \circ \varphi^{-1})(\varphi(p))[X]g(p) + f(p)D(g \circ \varphi^{-1})(\varphi(p))[X]. \tag{3.51}$$

Sabemos lo siguiente

a) $\mathcal{D}h(p)[X] = (\pi_2 \circ T_p h)[X]$,

b) $\mathcal{D}f(p)[X] = (\pi_2 \circ T_p f)[X]$,

c) $\mathcal{D}g(p)[X] = (\pi_2 \circ T_p g)[X]$.

Entonces

$$\mathcal{D}h(p)[X] = \mathcal{D}f(p)[X]g(p) + f(p)\mathcal{D}g(p)[X], \tag{3.52}$$

así

$$\mathcal{D}(fg)(p) = \mathcal{D}f(p)g(p) + f(p)\mathcal{D}g(p). \tag{3.53}$$

$\forall f, g \in \mathfrak{F}M$.

Por lo tanto hemos demostrado la proposición. □

3.2. Fibrados Vectoriales

Definición 3.2.1. Sea M una $\mathbb{H}$-variedad.

1. Sean $\mathbb{E}$ un espacio de Banach, P un conjunto y una aplicación sobreyectiva

$$\pi : P \longrightarrow M, \tag{3.54}$$

tal que para cada $p \in M$ se tiene que $\pi^{-1}(\{p\})$ es un espacio de Banach isomorfo a $\mathbb{E}$. Denotamos a $\pi^{-1}(\{p\})$ como $\mathbb{E}_p$ y llamamos a $\mathbb{E}_p$ la **fibra** de π sobre p.

Adicionalmente. Si $\mathfrak{A}$ es un atlas sobre M tal que cada carta (U, φ) de $\mathfrak{A}$ define una **carta fibrada** $(P\varphi, U, \varphi)$, que consiste del siguiente diagrama conmutativo.

$$\begin{tikzcd} PU \equiv \pi^{-1}(U) \arrow[r, "P\varphi"] \arrow[d, "\pi|_{PU}"'] & U \times \mathbb{E} \arrow[d, "\pi_1"] \\ U \arrow[r, "F"'] & \varphi(U) \end{tikzcd}$$

Definido como

- Para $\xi \in \pi^{-1}(U)$, $P\varphi(\xi) = (\varphi(p), \xi_\varphi)$,
- $\pi|_{PU}(\xi) = p$,
- para $p \in U$, $\varphi(p)$,
- $\pi_1(\varphi(p), \xi_\varphi)$=$\varphi(p)$.

Con las siguientes propiedades

a) La aplicación $P\varphi$ es sobreyectiva y

$$P_p\varphi = P\varphi|_{\mathbb{E}_p} : \mathbb{E}_p \longrightarrow \{\varphi(p)\} \times \mathbb{E}, \tag{3.55}$$

es un isomorfismo lineal. Donde la estructura de espacio de Banach sobre el producto $\{\varphi(p)\} \times \mathbb{E}$, está definida por la identificación canónica $\pi_2 : \{\varphi(p)\} \times \mathbb{E} \longrightarrow \mathbb{E}$.

b) Si $(P\varphi_1, U_1, \varphi_1)$ y $(P\varphi_2, U_2, \varphi_2)$ son dos cartas fibradas, entonces

$$P\varphi_1 \circ (P\varphi_2|_{P(U_1 \cap U_2)})^{-1} : \varphi_1(U_1 \cap U_2) \times \mathbb{E} \longrightarrow \varphi_2(U_1 \cap U_2) \times \mathbb{E}, \quad (3.56)$$

es un difeomorfismo, denotado por $P\varphi_1 \circ P\varphi_2^{-1}$.

Entonces el objeto así definido por el atlas $\mathfrak{A}$ es llamado un **fibrado vectorial sobre** M **con atlas fibrado** $\{(P\varphi, U, \varphi)\}_{\mathfrak{A}}$.

2. Dados dos atlas fibrados $\{(P\varphi_\alpha, U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha\in I}$ y $\{(P\phi_\beta, V_\beta, \phi_\beta)\}_{\beta\in J}$ de $(P, \pi, M, \mathbb{E})$, asociados a dos atlas equivalentes $\mathfrak{A}=\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha\in I}$ y $\mathfrak{B}=\{(V_\beta, \phi_\beta)\}_{\beta\in J}$ sobre M respectivamente, son **equivalentes** si la unión de ellos es una atlas fibrado sobre $(P, \pi, M, \mathbb{E})$ asociado a las unión de $\mathfrak{A}$ y $\mathfrak{B}$.
   Una clase de equivalencia de vectores fibrados sobre M es llamado un **fibrado vectorial sobre M con fibra sobre** $\mathbb{E}$.

Observación 3.2.2. Veamos un par de observaciones de la definición anterior.

1. $\mathbb{E}_p$ es isomorfismo a $\mathbb{E}$, pero no es un isomorfismo canónico. Para cada carta fibrada $(P\varphi, U, \varphi)$ que cubre a $\mathbb{E}_p$, tenemos el ismorfismo lineal

$$P\varphi(p) = (\pi_2 \circ P_p\varphi) : \mathbb{E}_p \longrightarrow \mathbb{E}, \quad (3.57)$$

   donde

$$P_p\varphi : \mathbb{E}_p \longrightarrow \{\varphi(p)\} \times \mathbb{E}, \quad (3.58)$$

   es un isomorfismo lineal.

2. Dadas dos cartas fibradas (PU, U, φ) y (PV, V, ϕ), entonces tenemos la aplicación de transición $(P\phi \circ P\varphi^{-1})$, descrita en la definición anterior. Definimos para cada $p \in U \cap V$ el siguiente isomorfismo

$$P(\phi \circ \varphi^{-1})(\varphi(p)) = (P\phi(p) \circ P\varphi(p)^{-1}) : \mathbb{E} \longrightarrow \mathbb{E}, \quad (3.59)$$

   donde la aplicación $(P\phi \circ P\varphi^{-1})$ se puede escribir de la siguiente manera

$$(P\phi \circ P\varphi^{-1})((q, \xi_\varphi)) = ((\phi \circ \varphi^{-1})(q), P(\phi \circ \varphi^{-1})(q)[\xi_\varphi]). \quad (3.60)$$

Dado que la aplicación de transición $(P\phi \circ P\varphi^{-1})$ es suave, tenemos que la aplicación

$$\Phi : \varphi(U \cap V) \longrightarrow \mathbb{GL}(\mathbb{E}), \tag{3.61}$$

definida como:

$$\Phi(a) = P(\phi \circ \varphi^{-1})(a),$$

También es suave.

Ejemplo 3.2.3. Dada una $\mathbb{H}$-variedad M, tenemos que $(TU, \tau_M, M, \mathbb{H})$ es un fibrado vectorial sobre M. El atlas $\mathfrak{A} = \{(TU_\alpha, U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha \in I}$ de TM derivado del atlas $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha\in I}$ de M, es un atlas fibrado y lo denotaremos por $\{(T\varphi_\alpha, U_\alpha, \varphi_\varphi)\}_{\alpha \in I}$.

En efecto:

1. Sabemos que la aplicación τ_M está definida de la siguiente manera

$$\forall X \in T_pM, \tau_M(X) = p. \tag{3.62}$$

Entonces para cada $p \in M$ tenemos $\tau_M^{-1}(\{p\}) = T_pM$ y sabemos que T_pM es isomorfo a $\mathbb{H}$ para todo p en M.

2. Sean $p \in M$ y (U, φ) una carta de p en $\mathcal{A}$, entonces tenemos el siguiente diagrama.

$$\begin{tikzcd}
T_pM \arrow[r, "T\varphi"] \arrow[d, "\tau_M"'] & \varphi(U) \times \mathbb{H} \arrow[d, "\pi_1"] \\
U \arrow[r, "\varphi"'] & \varphi(U)
\end{tikzcd}$$

Veamos que el diagrama conmuta.
Dado X in T_pM tenemos

$$\begin{aligned}
\tau_M(X) = p \ y \ (\varphi \circ \tau_M)(X) = \varphi(p), \\
T\varphi(X) = (\varphi(p), X_{\varphi(p)}), \\
(\pi_1 \circ T\varphi)(X) = \varphi(p).
\end{aligned} \tag{3.63}$$

Luego el diagrama es conmutativo.
Tenemos que la aplicación $T\varphi$ es sobreyectiva y la aplicación

$$T_p\varphi : T_pM \longrightarrow \{\varphi(p)\} \times \mathbb{H}, \tag{3.64}$$

es un isomorfismo lineal por definición de $T_p\varphi$

3. Dada otra carta (V, ϕ) de p en $\mathfrak{A}$, veamos que la aplicación

$$(T\varphi \circ T\phi^{-1}) : \phi(U \cap V) \times \mathbb{H} \longrightarrow \varphi(U \cap V) \times \mathbb{H}. \tag{3.65}$$

es suave.
Pero esto se tiene facilmente pues

$$(T\varphi \circ T\phi^{-1})[(a, X)] := (\varphi \circ \phi^{-1}(a), D(\varphi \circ \phi^{-1})(a)[X]). \tag{3.66}$$

Luego queda probado nuestro ejemplo.
♦

Teorema 3.2.4. *Sean M una $\mathbb{H}$-variedad y $(P, \pi, M, \mathbb{E})$ un vector fibrado sobre M. Entonces el atlas fibrado $\{(P\varphi_\alpha, U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha\in I}$ asociado al atlas $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha\in I}$ de M determina un atlas $\{(PU_\alpha, P\varphi_\alpha)\}_{\alpha\in I}$ sobre P, haciendo de P una $\mathbb{H} \times \mathbb{E}$-variedad.*

Observación 3.2.5. Si $\mathbb{E}$ no es un espacio de Hilbert, entonces hablamos de P como una $\mathbb{H} \times \mathbb{E}$-variedad de Banach.

DEMOSTRACIÓN: Demostremos ahora el teorema.

1. Definimos $PU_\alpha = \pi^{-1}(U_\alpha)$. Sabemos que la aplicación π es sobreyectiva, entonces

$$P = \pi^{-1}(M) = \pi^{-1}(\bigcup_{\alpha\in I} U_\alpha) = \bigcup_{\alpha\in I} \pi^{-1}(U_\alpha) = \bigcup_{\alpha\in I} PU_\alpha.$$

Luego $\{PU_\alpha\}_{\alpha\in I}$ es un cubrimiento de P.

2. Veamos que la aplicación

$$P\varphi_\alpha : PU_\alpha \longrightarrow \varphi(U_\alpha) \times \mathbb{E}, \tag{3.67}$$

dada por $P\varphi_\alpha(\xi) = (\varphi(p), \xi_\varphi)$, es un homeomorfismo.
Sabemos que la aplicación es una una biyección por definición §3.2.1(a) y además la aplicación

$$P_p\varphi_\alpha : \mathbb{E}_p \longrightarrow \{\varphi_\alpha(p)\} \times \mathbb{E}, \tag{3.68}$$

es un isomorfismo también por §3.2.1(a)

3. Veamos que la aplicación

$$(P\varphi_{\alpha} \circ P\varphi_{\beta}^{-1}) : P\varphi_{\beta}(PU_{\alpha} \cap PU_{\beta}) \times \mathbb{E} \longrightarrow P\varphi_{\alpha}(PU_{\alpha} \cap PU_{\beta}) \times \mathbb{E}, \tag{3.69}$$

   es suave.
   Esto se tiene por la definición §3.2.1(b).

Luego queda demostrado el teorema. $\square$

CAPÍTULO 4

Inmersiones, Submersiones y Campos Vectoriales.

El universo es una esfera infinita cuyo centro está en todas partes, y la circunferencia en ninguna.
Blaise Pascal.

En la pimera parte de este capítulo hablaremos de dos definiciones en la geometría y son las nociones de inmersión y submersión, definiciones que vienen dadas a partir de aplicaciónes entre variedades de Hilbert. Las inmersiones se caracterizan por la inyectividad tangencial local en un punto; las submersiones, respectivamente, por la sobreyectividad. Un caso particular de inmersiones son los embebimientos, que proporcionan una idea intuitiva de la noción de subvariedades, cuya caracterización mostraremos en §4.1.7 y §4.1.13.

En la segunda parte del capítulo hablaremos de campos vectoriales, que se pueden ver como secciones de fibrados. Un ejemplo de campos vectoriales será §4.2.5, que trataremos en detalle, pues lo utilizaremos en el ejemplo §4.2.7. Se dará la definición de derivaciones sobre una variedad de Hilbert M y las conexiones que existen entre ellas y los campos vectoriales sobre M, y justamente esas relaciones serán vistas en §4.2.8.

4.1. Inmersiones, Submersiones y Subvariedades

Teorema 4.1.1. *Sean M y N dos variedades de Hilbert y $F : M \longrightarrow N$, una aplicación suave. Si para $p \in M$ tenemos que T_pF es una biyección lineal de $T_p(M)$ sobre $T_{F(p)}(N)$, entonces F es localmente un difeomorfismo.*

Demostración: Como la aplicación

$$T_pF : T_p(M) \longrightarrow T_{F(p)}(N), \tag{4.1}$$

está representada localmente por

$$T_{\varphi(p)}(\phi \circ F \circ \varphi^{-1}) : T_{\varphi(p)}\varphi(U) \longrightarrow T_{\phi(F(p))}\phi(V), \tag{4.2}$$

que es una biyección local, donde (U, φ) y (V, ϕ) son cartas de p y $F(p)$ respectivamente, y está definida como

$$T_{\varphi(p)}(\phi \circ F \circ \varphi^{-1})[(\varphi(p), X_{\varphi(p)})] = (\phi(F(p)), D(\phi \circ F \circ \varphi^{-1})(\varphi(p))[X_{\varphi(p)}]). \tag{4.3}$$

Entonces $D(\phi \circ F \circ \varphi^{-1})(\varphi(p))$ es un isomorfismo lineal, luego por el teorema §1.4.9 tenemos que $(\phi \circ F \circ \varphi^{-1})$ es un difeomorfismo local en $\varphi(p)$.
□

Definición 4.1.2. Sean M y N dos variedades de Hilbert y $F : M \longrightarrow N$ una apliación suave.

1. Decimos que F es una **inmersión en** $p \in M$ si tenemos que la aplicación T_pF es inyectiva y es cerrada. Decimos que F es una **inmersión** si tenemos que la aplicación T_pF es inyectiva para todo $p \in M$.

2. Decimos que F es una **submersión en** $p \in M$ si tenemos que la aplicación T_pF es sobreyectiva. Decimos que F es una **submersión** si la aplicación T_pF es sobreyectiva para todo $p \in M$.

Admitimos los siguientes resultados como una consecuencia de los corolarios §1.4.11 y §1.4.12 respectivamente.

Teorema 4.1.3. *Sean M y N dos variedades de Hilbert y $F : M \longrightarrow N$, una aplicación suave. Sea $p \in M$ tal que F es una inmersión en p, si denotamos a $F(p)$ como $q \in N$, entonces existen un par de cartas (U, φ) y (V, ϕ) de p y q respectivamente de tal manera que la aplicación*

$$(\phi \circ F \circ \varphi^{-1}) : \varphi(U) \longrightarrow \phi(V) = \varphi(U) \times V_2, \tag{4.4}$$

está definida de la siguiente manera

$$\phi \circ F \circ \varphi^{-1}(a) = (a, 0). \tag{4.5}$$

Teorema 4.1.4. *Sean M y N dos variedades de Hilbert y $F : M \longrightarrow N$, una aplicación suave. Sea $p \in M$ tal que F es una submersión en p, si denotamos a $F(p)$ como $q \in N$, entonces existen un par de cartas (U, φ) y (V, ϕ) de p y q respectivamente de tal manera que la aplicación*

$$\phi \circ F \circ \varphi^{-1} : \varphi(U) = U_1 \times \phi(V) \longrightarrow \phi(V), \tag{4.6}$$

está definida de la siguiente manera

$$\phi \circ F \circ \varphi^{-1}[(u_1, b)] = b. \tag{4.7}$$

Definición 4.1.5. Dados un espacio de Banach $\mathbb{F}$ y un subespacio $\mathbb{F}_1$ de $\mathbb{F}$. Decimos que $\mathbb{F}_1$ **divide** a $\mathbb{F}$ si existe un complemento cerrado $\mathbb{F}_2$, de tal manera que $\mathbb{F} \cong \mathbb{F}_1 \times \mathbb{F}_2$.

Definición 4.1.6. Veamos las siguientes definiciones como casos particulares de inmersiones.

- Dadas M y N dos variedades de Hilbert y $F : M \longrightarrow N$ una aplicación suave. Decimos que F es una **embebimiento** si F es una inmersión y además la aplicación

$$F : M \longrightarrow F(M), \tag{4.8}$$

  es un homeomorfismo. Donde $F(M) \subset N$ tiene la topología inducida por N.

- Sean N una variedad de Hilbert y N' un subconjunto de N. Si podemos dar una estructura de variedad sobre N' de tal manera que la aplicación inclusión

$$i : N' \longrightarrow N, \tag{4.9}$$

  sea un embebimiento, entonces decimos que N' es una **subvariedad de** N.

Teorema 4.1.7. *Sean M una $\mathbb{H}$-vaiedad y $N \subset M$. N es una subvariedad de M si y sólo si se tiene lo siguiente.*
Existe una división $\mathbb{H} = \mathbb{E}_1 \times \mathbb{E}_2$ y para cada $p \in N$; existe una carta (U, φ) de p de tal manera que

$$\varphi : U \longrightarrow U_1 \times U_2, \tag{4.10}$$

con $\varphi(p) = (0, 0)$, además $U_i \subset \mathbb{E}_i$ es abierto para $i = 1, 2$, $0 \in \mathbb{E}_i$ y

$$\varphi|_{(U \cap N')} : U \cap N' \longrightarrow U_1 \times \{0\}. \tag{4.11}$$

DEMOSTRACIÓN:

($\Longrightarrow$) Supongamos que N es una subvariedad de M, entonces tenemos que la aplicación inclusión $i : N \longrightarrow M$, es un embebimiento, por el teorema §4.1.3 existe una carta (U, φ) de $p \in N$ tal que $\varphi(U) = U_1 \times U_2$ y además

$$\varphi \circ i \circ (\varphi^{-1}|_{N \cap U}) : U_1 \longrightarrow U_1 \times \{0\}, \tag{4.12}$$

es una inyección lineal y $\varphi \circ i \circ \varphi^{-1}(a) = (a, 0)$.

($\Longleftarrow$) Sea $p \in N$ y supongamos que existe una carta (U, φ) de p tal que

$$\varphi : U \longrightarrow U_1 \times U_2,$$

con $\varphi(p)=(0,0)$, $U_j \subset \mathbb{E}_j$ abierto para $j=1,2$ y $\varphi(a,0)=(a,0)$.
Entonces tenemos que

$$\varphi \circ i \circ \varphi^{-1} : U_1 \times \{0\} \longrightarrow U_1 \times \{0\}, \tag{4.13}$$

y asi tenemos que i es una inmersión.
Ahora veamos que podemos hacer que la aplicación i sea un embebimiento. Tomamos sobre N la topología generada por los subcounjuntos abiertos de $U \cap N$ que son homeomorfos a los subconjuntos abiertos $U_1 \subset \mathbb{E}_1$ por la aplicación $\varphi|_{(U\cap N)}$.
Luego queda demostrado el teorema. □

Definición 4.1.8. Sean M y N dos variedades de Hilbert, $F : M \longrightarrow N$, una aplicación suave y N' una subvariedad de N. Decimos que F es **Transversal a** N' **en** $p \in M$ y lo denotamos $F \perp_p N'$, si $F(p) \notin N'$ o $T_{F(p)}N$ es generado por $T_{F(p)}N'$ y $T_pF(T_pM)$. Si $F \perp_p N'$ para todo $p \in M$, entonces se dice que F es **tranversal a** N' y lo denotamos como $F \perp N'$.

Ejemplo 4.1.9. Sean M y N dos variedades de Hilbert y $F : M \longrightarrow N$, una aplicación suave. Si tomamos $N'=\{q\}$, donde $q \in N$ y $F^{-1}(\{q\})$ es no vacío, entonces decir que $F \perp N'$ es equivalente a tener que la aplicación

$$T_pF : T_p(M) \longrightarrow T_q(N), \tag{4.14}$$

es sobreyectiva para todo $p \in M$ con $F(p) = q$, dado el caso decimos que q es un valor regular de F.

Teorema 4.1.10. *Sean M una $\mathbb{H}_1$-variedad y N una $\mathbb{H}_2$-variedad, $F : M \longrightarrow N$ una aplicación suave y N' una subvariedad de N. Sea $p \in M$ y supongamos que $F(p) = q$, con $q \in N'$. Entonces $F \perp_p N'$ si y sólo si existen cartas (U, φ) y (V, ϕ) de p y q respectivamente, que cumplen lo siguiente*

1. *$\mathbb{H}_1$ se puede dividir en $\mathbb{E}_1 \times \mathbb{F}_2$ y $\varphi(U) = U_1 \times V_2$, con U_1 y V_2 abiertos de $\mathbb{E}_1$ y $\mathbb{F}_2$ respectivamente y $\varphi(p)=(0,0)$. La carta (V, ϕ) está adaptada a las subvariedad N' en q, es decir, $\mathbb{H}_2$ se puede dividir en $\mathbb{F}_1 \times \mathbb{F}_2$ y $\phi(V)=V_1 \times V_2$, con V_1 abierto de $\mathbb{F}_1$, $\phi(q)=(0,0)$ y además $\phi(V \cap N')=V_1 \times \{0\}$.*

2. *La aplicación $F|_U$ tiene su imagen en V y se puede representar de la siguiente manera*

$$\phi \circ F \circ \varphi^{-1} : U_1 \times V_2 \longrightarrow V_1 \times V_2, \tag{4.15}$$

y está definida como

$$(\phi \circ F \circ \varphi^{-1})(u_1, v_2) = (\eta(u_1, v_2), v_2),$$

donde $\eta(u_1, v_2)= 0 \in V_1$.

DEMOSTRACIÓN: Supongamos que $F\perp_p N'$. Tomando (V,ϕ) una carta de q adaptada a N' y (U,φ) una carta de p, tales que $\varphi(p)$=0, $F(u)\subset V$ y tomamos la aplicación

$$(\pi_2\circ\phi\circ F\circ\varphi^{-1}):\varphi(U)\longrightarrow V_2. \tag{4.16}$$

Donde

$$(F\circ\varphi^{-1}):\varphi(U)\longrightarrow V,$$

y

$$\phi\circ F\circ\varphi^{-1}:\varphi(U)\longrightarrow V_1\times V_2.$$

Como suponemos que $F\perp_p N'$, entonces la diferencial en $0\in\varphi(U)$ de §4.16 es sobreyectiva, luego F es una submersión en p, por el teorema §4.1.4 podemos escoger una carta (U,φ) de tal manera que $\varphi(U)$= $U_1\times V_2$ y la aplicación

$$(\phi\circ F\circ\varphi^{-1}):U_1\times V_2\longrightarrow\phi(V), \tag{4.17}$$

que está dada por $(\phi\circ F\circ\varphi^{-1})(u_1,v_2)=v_2$.
Luego se tiene §4.15.

Recíprocamente, por la representación local se tiene que $F\perp_p N'$. □

Teorema 4.1.11. *Sean M una $\mathbb{H}_1$-variedad, N una $\mathbb{H}_2$-variedad y $F:M\longrightarrow N$ una aplicación suave. Supongamos que N' es una subvariedad de N y $F\perp N'$. Si $F^{-1}(N')$ es no vacío y así definimos el conjunto M'= $F^{-1}(N')$, entonces M' es una subvariedad de M y además codim(M') = codim(N'), $T_p(M')=T_pF^{-1}(T_q(N'))$, para $q\in N'$ y $p\in F^{-1}(N')$.*

Observación 4.1.12. La definición de $\mathrm{codim}(M')=\mathrm{codim}(N')$, significa que si $\mathbb{H}_1$ se divide en $\mathbb{E}_1\times\mathbb{E}_2$ y $\mathbb{H}_2$ se divide en $\mathbb{F}_1\times\mathbb{F}_2$, tales divisiones asociadas a las subvariedades $M'\subset M$ y $N'\subset N$ respectivamente, como se describen en el teorema §4.1.7, entonces $\mathbb{E}_2$ es isomorfo a $\mathbb{F}_2$.

DEMOSTRACIÓN: Sea $p\in M'$, como $F\perp N'$, entonces $F\perp_p N'$, por el teorema §4.1.10 existe una carta (U,φ) de p, tal que

$$\varphi:U\longrightarrow U_1\times V_2, \tag{4.18}$$

con $\varphi(p)=(0,0)$, y $\varphi(U\cap F^{-1}(N')=(\varphi\circ F\circ\phi^{-1})(V_1\times\{0\})=U_1\times\{0\}$. Donde (V,ϕ) es una carta de $q=F(p)$, con las cualidades dadas en el teorema anterior, aplicando el teorema §4.1.7 tenemos que M' es una subvariedad de M.
Ahora, por el teorema anterior tenemos que $\mathbb{E}_1\times\mathbb{F}_2$ es una división de $\mathbb{H}_1$ y $\mathbb{F}_1\times\mathbb{F}_2$ es una división de $\mathbb{H}_2$, entonces $\mathrm{codim}(M')=\mathrm{codim}(N')$. □

Ejemplos 4.1.13. Veamos algunos ejemplos de subvariedades.

1. Sean M y N dos variedades de Hilbert, $F:M\longrightarrow N$, una aplicación suave, $q\in N$ con $F^{-1}(\{q\})$ no vacío y q valor regular de F. Si definimos al conjunto $M'=F^{-1}(\{q\})$,

entonces por el teorema §4.1.11 tenemos que M' es una subvariedad de M y cod(M') = Dim(N). Además $T_p(M') = Ker(T_pF)$ para cada $p \in M'$.

2. Sea $M = H$ un espacio de Hilbert separable y definamos la siguiente aplicación.

$$F : M \longrightarrow \mathbb{R}, \tag{4.19}$$

definida como

$$F(x) = \langle x, x\rangle.$$

Entonces F es suave y además $F'(x)(y) = 2\langle x, y\rangle$, por lo tanto tenemos la aplicación

$$T_xF : T_x(M) \longrightarrow T_{\langle x,x\rangle}(R). \tag{4.20}$$

Sea $r \in \mathbb{R}$, con $r > 0$ y definamos el conjunto $\mathbf{S}(r)= \{x \in M : F(x) = r\}$. Para $x \in \mathbf{S}(r)$ tenemos que T_xF es sobreyectiva, luego por el ejemplo §4.1.9 tenemos que r es un valor regular de F, entonces $\mathbf{S}(r)$ es una subvariedad de M.
Además, dado $x \in \mathbf{S}$ tenemos que $T_x(\mathbf{S}(r)) = Ker(T_xF)$, pero sabemos que $Ker(T_xF)$ $= W^{\perp}$, donde $W^{\perp}$ es el complemento ortogonal del subespacio de M generado por x.

3. Sea M una variedad de Hilbert. Sabemos que TM también es una variedad de Hilbert y la aplicación $\tau_M : TM \longrightarrow M$ es suave. Dado cualquier $p \in M$ se tiene que $\overset{-1}{\tau_M}(p)$ $= T_pM$ y además p es un valor regular de τ_M, por lo tanto para cada $p \in M$ tenemos que T_pM es una subvariedad de TM.

4. Sean M una variedad de Hilbert y $\triangle_M = \{(p, q) \in M \times M : p = q\}$. Sabemos que $M \times M$ es una variedad de Hilbert. Sea $\mathfrak{A} = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha\in I}$ un atlas de M, entonces el atlas $\mathfrak{B}$ dado por el producto de $\mathfrak{A}$ con sí mismo es una atlas sobre $M \times M$. Sea $\{(U_\alpha \times U_\alpha, \varphi_\alpha \times \varphi_\alpha)\}_{\alpha\in I}$ una subfamilia del atlas $\mathfrak{B}$ que cubre a $\triangle_M$. Para cada $\alpha \in I$ tenemos que $\varphi_\alpha|_{(U_\alpha\times U_\alpha)\cap\triangle_M}$ tiene como imagen es subespacio $\triangle_{V_\alpha} =$ $\{(v_\alpha, v_\alpha) \in V_\alpha \times V_\alpha\}$ de $V_\alpha \times V_\alpha$, donde $\varphi(U_\alpha) = V_\alpha$. Entonces $\triangle_M$ es una subvariedad de $M \times M$.

4.2. Campos Vectoriales

Definición 4.2.1.

Sea M una variedad de Hilbert y TM el fibrado tangente de M. Una aplicación suave

$$Y : M \longrightarrow TM, \tag{4.21}$$

es llamada un **campo vectorial** sobre M, si cumple que $\tau_M \circ Y = id_M$. En otras palabras, la aplicación Y hace que el siguiente diagrama conmute.

$$\begin{tikzcd} & M \arrow[dl, "Y"'] \arrow[dr, "id"] & \\ TM \arrow[rr, "\tau_M"'] & & M \end{tikzcd}$$

Es decir, para cada p en M se tiene que $Y(p) \in {\tau_M}^{-1}(\{p\}) = T_p(M)$.

Definición 4.2.2. Sea M una variedad de Hilbert, definimos el conjunto $\mathfrak{C}M$ como el conjunto de todo los campos vectoriales sobre M.

Proposición 4.2.3. *Sea M una variedad de Hilbert, el conjunto $\mathfrak{C}M$ es un espacio vectorial real y un $\mathfrak{F}M$-módulo bajo las composiciones naturales, en otras palabras,*

1. $(\alpha Y + \beta X)(p) = \alpha Y(p) + \beta X(p)$,

2. $(fY)(p) = f(p)Y(p)$.

   $\forall Y, X \in \mathfrak{C}M$, $\forall f \in \mathfrak{C}M$, $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ *y* $\forall p \in M$

DEMOSTRACIÓN: Sea $p \in M$, sabemos que $T_p(M)$ tiene estructura de espacio verctorial real, sean entonces $X, Y \in \mathfrak{C}M$ luego $X(p) \in T_p(M)$ y $Y(p) \in T_p(M)$, por lo tanto para todo $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ se tiene que $\alpha X(p) \in T_p(M)$ y $\beta Y(p) \in T_p(M)$, entonces $\alpha X(p) + \beta Y(p) \in T_p(M)$.
$\square$

Proposición 4.2.4. *Sean M una $\mathbb{H}$-variedad y $Y : M \longrightarrow TM$, un campo vectorial sobre M, entonces tenemos lo siguiente*

1. *Para cada carta (U, φ) de M, Y define una aplicación suave*

$$Y_V : V \longrightarrow \mathbb{H}, \tag{4.22}$$

   dado por

$$Y_V(\varphi(p)) = D\varphi(p)(Y(p)) = (\pi_2 \circ T_p\varphi)(Y(p)),$$

   para $p \in U$ *y* $\varphi(U) = V$.

2. *Dada la aplicación §4.22, tenemos un campo vectorial sobre U*

$$Y_U : U \longrightarrow TU, \tag{4.23}$$

dado por

$$Y_U(p) = D\varphi^{-1}[Y_V(\varphi(p))].$$

DEMOSTRACIÓN:

1. Dado que Y es un campo vectorial, entonces Y es una aplicación suave. Sea $p \in M$, entonces si (U, φ) es una carta de p, el campo vectorial Y está representado localmente por la aplicación

$$T\varphi \circ Y \circ \varphi^{-1} : V \longrightarrow TV, \tag{4.24}$$

que es suave, por lo tanto

$$\pi_2 \circ T\varphi \circ Y \circ \varphi^{-1} : V \longrightarrow \mathbb{H}, \tag{4.25}$$

es suave, entonces se tiene Y_V es suave.

2. Supongamos que la aplicación §4.22 es suave. Tenemos que la aplicación

$$Y_U : U \longrightarrow \mathbb{H}, \tag{4.26}$$

tiene la representación local

$$T\varphi \circ Y_U \circ \varphi^{-1} : V \longrightarrow TV, \tag{4.27}$$

dada por $(T\varphi \circ Y_U \circ \varphi^{-1})(\varphi(p)) = [\varphi(p), Y_V(\varphi(p))]$.

Luego Y_U es suave y además se tiene que $\tau_M \circ Y_U = id_M$. Por lo tanto la aplicación Y_U es un campo vectorial sobre U.

$\square$

Ejemplo 4.2.5. Sean M una $\mathbb{H}$-variedad, (U, φ) una carta en M y $\{e_i\}$ una base ortonormal para $\mathbb{H}$. Para cada i, definimos la aplicación

$$e_i : V \longrightarrow TV = V \times \mathbb{H}, \tag{4.28}$$

dada por

$$e_i(v) = (v, e_i),$$

donde $V = \varphi(U)$. Entonces tenemos que para cada i la aplicación e_i es un campo vectorial sobre V.
Sabemos que para cada $p \in U$ la aplicación

$$T_p\varphi : T_p(M) \longrightarrow T_{\varphi(p)}(V), \tag{4.29}$$

es un isomorfismo. Tomando $T_p\varphi^{-1}$, tenemos que para cada i podemos definir el siguiente campo vectorial sobre U

$$e_i^{\,*} : U \longrightarrow TU, \tag{4.30}$$

dado por

$$e_i^{\,*}(p) = (T_p\varphi^{-1} \circ e_i \circ \varphi)(p).$$

Que denotaremos simplemente como $e_i(p)$ para $p \in U$ y será llamado el **i-ésimo campo vectorial básico**.
Dado p en U, tenemos que $\{e_i(p)\}$ es una base de $T_p(U) \cong T_p(M)$.
⧫

Definición 4.2.6. Dada M una variedad de Hilbert, una aplicación

$$\delta : \mathfrak{F}M \longrightarrow \mathfrak{F}M, \tag{4.31}$$

es llamada una **derivación** sobre M, si cumple las siguientes condiciones

1. $\delta(\alpha f + \beta g) = \alpha\delta(f) + \beta\delta(g)$,

2. $\delta(fg) = \delta(f)g + f\delta(g)$.

   $\forall f, g \in \mathfrak{F}M$ y $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Ejemplo 4.2.7. Sean M una $\mathbb{H}$-variedad, $p \in M$ y (U, φ) una carta de p. Entonces para cada campo vectorial básico $e_i(p)$ podemos definir una derivación sobre $\mathfrak{F}U$ dada de la siguiente manera

$$\delta_{e_i} f(p) = Df(p)[e_i(p)] = \frac{\partial f \circ \varphi^{-1}}{\partial \varphi^i}[\varphi(p)], \tag{4.32}$$

con φ^i definida como en §2.2.2.

Claramente $\delta_{e_i}(\alpha f + \beta g) = \alpha\delta_{e_i} f + \beta\delta_{e_i} g$.
Además tenemos

$$\delta_{e_i}(fg) = (\delta_{e_i} f)g + f(\delta_{e_i} g).$$

En efecto, sabemos que

$$\mathcal{D}(fg \circ \varphi^{-1})(\varphi(p))(e_i(p)) = \pi_2(\varphi(p), D(fg \circ \varphi^{-1})(\varphi(p))[e_i]), \tag{4.33}$$

así

$$\begin{aligned}\mathcal{D}(fg\circ\varphi^{-1})(\varphi(p))(e_i(p)) &= D((f\circ\varphi^{-1})\,(g\circ\varphi^{-1}))(\varphi(p))[e_i] \\ &= D(f\circ\varphi^{-1})(\varphi(p))[e_i]\,g(p) + f(p)\,D(g\circ\varphi^{-1})(\varphi(p))[e_i], \\ &= \mathcal{D}(f\circ\varphi^{-1})(\varphi(p))(e_i(p))\,g(p) + f(p)\,\mathcal{D}(g\circ\varphi^{-1})(e_i(p)).\end{aligned} \tag{4.34}$$

Entonces

$$\delta_{e_i}(fg) = (\delta_{e_i} f)g + f(\delta_{e_i} g).$$

En particular tenemos que $\delta_{e_i}(\varphi^j) = \delta_{ij}$.
♦

Proposición 4.2.8. *Sea M una variedad de Hilbert y Y un campo vectorial sobre M. Entonces la aplicación*

$$\delta_Y : \mathfrak{F}M \longrightarrow \mathfrak{F}M, \tag{4.35}$$

definida como

$$\delta_Y f(p) = \mathcal{D}f(Y(p)). \tag{4.36}$$

Es una derivación sobre M y es denotada como Yf.

DEMOSTRACIÓN: Por la proposición §3.1.9 se tiene que

1. $\delta_Y(\alpha f + \beta g) = \alpha\delta_Y(f) + \beta\delta_Y(g)$;
   $\forall f, g \in \mathfrak{F}M$ y $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$.
2. $\mathcal{D}(fg)(p)(Y(p)) = \mathcal{D}f(p)(Y(p))g(p) + f(p)\mathcal{D}g(p)(Y(p))$;
   $\forall f, g \in \mathfrak{F}M$ y $p \in M$.

Por lo tanto se tiene que δ_Y es una derivación sobre M. □

Proposición 4.2.9. *Sea M una variedad de Hilbert entonces*

1. *Sean X y Y dos campos vectoriales sobre M tales que $\delta_X = \delta_Y$.*

DEMOSTRACIÓN:

1. Supongamos que $\delta_X = \delta_Y$ y definamos $Z = X - Y$, entonces existe un punto p en M tal que $Z(p) \neq 0^*$, donde 0^* es el vector nulo de $T^p(M)$. Sea (U, φ) una carta de p tal que $\varphi(p) = 0 \in \mathbb{H}$, entonces la parte principal de $Z(p)$ es no nula y la denotaremos por X_0. Por teorema de Hanh-Banach existe $f \in \mathbb{L}[\mathbb{H}, \mathbb{R}]$ tal que $X_0(f) = D(f)(X_0) \neq 0$, por §2.3.8 existe $g \in \mathfrak{F}M$ tal que $g = f \circ \varphi$ en una vecindad de p, entonces $\delta_Z(g)(p) \neq 0$.

□

Bibliografía

[Con90] J. Conway. *A Course in Functional Analysis.* Springer - Verlag, New York-Heidelberg- Berlin, 2nd edition, 1990.

[Kli78] W. Klingenberg. *A Course in Differential Geometry.* Springer-Verlag, New York-Heidelberg- Berlin, 1978.

[Lan72] S. Lang. *Introduction to Differentiable Manifolds.* Addison-Wesley, New York, 1972.

[Lan93] S. Lang. *Real and Functional Analysis.* Springer- Verlag, New York-Heidelberg-Berlin, 3rd edition, 1993.

[Lan99] S. Lang. *Foundamentals of Differential Geometry.* Springer- Verlag, New York-Heidelberg- Berlin, 1999.

[N.S99] N.Steenrod. *The Topology of Fibre Bundles.* Princeton Landmarks In Mathematics, Princeton New Jersey, 2nd edition, 1999.