Teorías de cohomología

Cohomology theories

Por

Hugo Alberto Galeano Anaya

Trabajo presentado como requisito parcial para

optar al título de Magíster en Matemáticas

Director

Juan Diego Vélez C.

Universidad Nacional de Colombia

Sede Medellín

Facultad de Ciencias

Escuela de Matemáticas

Noviembre de 2011

Al único,
Al Rey de Reyes
y Señor de Señores,
***Jesucristo**, amigo fiel.*

Contenido

Resumen

En este trabajo se construirán la cohomología singular, la cohomología de Cech relativa a un buen cubrimiento y la cohomología de De Rham en manifolds suaves y se mostrará la equivalencia entre algunas de estas.

Palabras claves

Cohomología, homología, manifold, formas diferenciales, Mayer-Vietoris.

Abstract

In this paper we will construct the singular cohomology, the Cech cohomology relative to a good cover and the De Rham cohomology in smooth manifolds and we will show the equivalence between some of these.

Keywords

Cohomology, homology, manifold, differential forms, Mayer-Vietoris.

Agradecimientos

Quiero expresar mis agradecimientos a:

Mi padre Hugo y mi madre Rossis por el legado de la educación y por el apoyo incondicional.

Mis hermanos y hermanas por que me inspiraron a seguir adelante.

Mi director Juan Diego, por su apoyo y comprensión.

Mi tutor Sigifredo Herrón, su apoyo fue fundamental.

Mis amigos, entre ellos Joan y Marisela, que fueron testigos y me ayudaron en este proceso, y en especial a mi novia y futura esposa María Isabel.

Introducción

Las teorías de cohomología tienen su origen en el trabajo de Poincaré y de los topólogos de la primera mitad del siglo XX. Tras la definición de la homología simplicial, algunos matemáticos notaron que, dualizando algunas nociones de la homología, era posible construir functores más ricos que los homológicos, ya que estos gozaban de un producto interno muy similar al producto exterior que habían desarrollado los geómetras y topólogos diferenciales. Rápidamente, De Rham y otros matemáticos pudieron demostrar que la cohomología de formas y la cohomología singular eran en esencia la misma, para una gran variedad de espacios de interés. Simultánea e independientemente Cech, por su lado, había realizado otra construcción que daba cuenta de las mismas ideas desde un punto de vista combinatorio. Esta nueva cohomología de Cech, resultó también ser equivalente a las anteriores, aunque tenía la gran ventaja de que era fácil computarla. En la década de los años 1960, Cartan, Eilenberg y Grothendieck, desarrollaron una forma categórica general de construir todas estas teorías, usando la noción de functor derivado.

En esta tesis me propongo, por un lado, comprender algunas de las teorías de cohomología más importantes y demostrar que son equivalentes en manifolds suaves. Con este objetivo, me propongo discutir y construir las cohomologías de De Rham, Cech y singular. Otro punto fundamental es reunir en un solo documento algunas de las teorías de cohomología más importantes para el estudio de lectores futuros.

Capítulo 1

Homología y Cohomología singular

1.1. Homología Singular

1.1.1. Conceptos básicos

Sea $A \subseteq \mathbb{R}^n$ un subconjunto de $\mathbb{R}^n$. Definimos la envoltura convexa de A como la intersección de todos los conjuntos convexos en $\mathbb{R}^n$ que contienen a A. Definimos un p-simplejo s en $\mathbb{R}^n$ como la envoltura convexa de $p+1$ puntos, en $\mathbb{R}^n$, el cual denotaremos por $\langle x_0, \ldots, x_p \rangle$, bajo la condición de que $x_1 - x_0, \ldots, x_p - x_0$ formen un conjunto linealmente independiente. Es fácil ver que la definición anterior no depende de la escogencia del punto x_0.

Proposición 1.1. *Sea $\langle x_0, \ldots, x_p \rangle \subseteq \mathbb{R}^n$, la envoltura convexa de $p+1$ puntos, en $\mathbb{R}^n$. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. *$x_1 - x_0, \ldots, x_p - x_0$ forman un conjunto linealmente independiente.*
2. *Si $\sum s_i x_i = \sum t_i x_i$ y $\sum s_i = \sum t_i$, entonces $s_i = t_i$ para todo $i = 0, \ldots, p$.*

Demostración. Ver [4] pag 2. □

La siguiente proposición describe explícitamente el conjunto $\langle x_0, \ldots, x_p \rangle$.

Proposición 1.2. *Sean s un p-simplejo determinado por los puntos $x_0, \ldots, x_p$ en $\mathbb{R}^n$ y sea*

$$A = \{t_0 x_0 + t_1 x_1 + \cdots + t_p x_p : \sum t_i = 1 \text{ y } t_i \geq 0\}$$

entonces $s = A$.

Demostración. Para demostrar la igualdad anterior veamos primero, por inducción, que si $x = t_0 y_0 + t_1 y_1 + \cdots + t_p x_p$, con $\sum t_i = 1$ y $t_i \geq 0$ para todo i, entonces x pertenece a la envoltura convexa de los puntos $y_0, y_1, \ldots, y_p$. En efecto, para $p = 1$, sea $x = t_0 y_0 + t_1 y_1$, con $t_0 + t_1 = 1$ y $t_0, t_1 \geq 0$. Entonces $t_0 = 1 - t_1$ y $x = (1 - t_1) y_0 + t_1 y_1$, con $0 \leq t_1 \leq 1$, lo cual demuestra que x es un elemento de la envoltura convexa de y_0, y_1.

Supongamos que la afirmación se cumple para p y veamos que se cumple para $p+1$. Sea $x = t_0 y_0 + t_1 y_1 + \cdots + t_{p+1} y_{p+1}$, con $\sum t_i = 1$ y $t_i \geq 0$, para todo i. Si $t_0 = 1$ entonces $x = y_0$ y se cumple la afirmación. Si $t_0 \neq 1$, x se puede reescribir como:

$$x = t_0 y_0 + (1 - t_0) \left(\frac{t_1}{1 - t_0} y_1 + \cdots + \frac{t_{p+1}}{1 - t_0} y_{p+1} \right).$$

Ahora, como

$$\frac{t_1}{1 - t_0} + \cdots + \frac{t_p + 1}{1 - t_0} = \frac{t_1 + \cdots + t_{p+1}}{1 - t_0} = \frac{1 - t_0}{1 - t_0} = 1$$

y $\frac{t_i}{1 - t_0} \geq 0$ para todo $i = 1, \ldots, p + 1$, entonces por la hipótesis inductiva el punto

$$\frac{t_1}{1 - t_0} y_1 + \cdots + \frac{t_{p+1}}{1 - t_0} y_{p+1}$$

pertenece a la envoltura convexa de $y_1, \ldots, y_{p+1}$, con lo cual se tiene que x pertenece a la envoltura convexa de $y_0, y_1, \ldots, y_{p+1}$. La afirmación anterior muestra entonces que $A \subseteq s$. Como A es convexo y $\{x_0, x_1, \ldots, x_p\} \subseteq A$, entonces $s \subseteq A$, y por lo tanto $s = A$. $\square$

De lo anterior se sigue la siguiente proposición.

Proposición 1.3. *Sea s un p-simplejo $s = \langle x_0, x_1, \ldots, x_p \rangle$, entonces todo punto de s tiene una única representación de la forma $\sum t_i x_i$, donde $t_i \geq 0$, para todo i y donde $\sum t_i = 1$.*

Si s es la envoltura convexa de $x_0, x_1, \ldots, x_p$, a los puntos x_i se les llama *vértices* de s. Si a los vértices de un simplejo s se les da un orden predeterminado, s se denomina un *simplejo ordenado.*

Definimos Δ_p como el conjunto de todos los puntos de la forma $(t_0, t_1, \ldots, t_p) \in \mathbb{R}^{p+1}$ tales que $\sum t_i = 1$ y $t_i \geq 0$, para todo i. Notemos que Δ_p es precisamente el p-simplejo con vértices $x_0 = (1, 0, \ldots, 0), x_1 = (0, 1, \ldots, 0), \ldots, x_p = (0, 0, \ldots, 1)$. Al conjunto Δ_p, con el orden anterior, se le denomina el *p-simplejo estándar con orden natural.*

Sea s un simplejo ordenado con vértices $x_0, x_1, \ldots, x_p$ y sea $x \in s$, digamos que $x = t_0x_0 + t_1x_1 + \cdots + t_px_p$. Podemos asociar a x con la $p+1$ tupla $(t_0, t_1, \ldots, t_p)$ de $\mathbb{R}^{p+1}$ y definir así una función $f : \Delta_p \to s$ dada por $f(t_0, t_1, \ldots, t_p) = t_0x_0 + t_1x_1 + \cdots + t_px_p$. Es fácil ver que f es continua y biyectiva. Como Δ_p es compacto, f es un homeomorfismo. Deducimos así que *cualquier p-simplejo s es homeomorfo a Δ_p.*

Definición 1.1. *Un p-simplejo singular en un espacio topológico X es una función continua $\phi : \Delta_p \longrightarrow X$.*

Si ϕ es un p-simplejo singular e i es un entero con $0 \leq i \leq p$, definimos la cara i-ésima de ϕ, $\partial_i(\phi)$, como el $(p-1)$-simplejo singular dado por $\partial_i(\phi)(t_0, \ldots, t_{p-1}) = \phi(t_0, \ldots, t_{i-1}, 0, t_i, \ldots, t_{p-1})$

Sea X un espacio topológico. Para todo $n \geq 0$, definimos el grupo de *n-cadenas singulares*, $S_n(X)$, como el grupo abeliano libre cuya base es el conjunto de todos los n-simplejos singulares de X. A un elemento de $S_n(X)$ se le llama *una n-cadena singular de* X. Por definición, los elementos de este grupo tienen la forma $\sum_\phi n_\phi \phi$, donde n_ϕ es un entero, que es diferente de cero solo para finitos valores. Si ϕ es un n-simplejo, $\partial_i \phi$ es un $(n-1)$-simplejo, luego ∂_i puede extenderse a un homomorfismo de cadenas $\partial_i : S_n(X) \to S_{n-1}(X)$ dado por $\partial_i(\sum n_\phi \phi) = \sum n_\phi \partial_i(\phi)$.

Definimos el *operador frontera* $\partial : S_n(X) \to S_{n-1}(X)$ como la suma alternada de los homomorfismos ∂_i, $\partial = \partial_0 - \partial_1 + \cdots + (-1)^n \partial_n = \sum_{i=0}^n (-1)^n \partial_i$.

Proposición 1.4. *La composición $\partial \circ \partial$ en $S_n(X) \xrightarrow{\partial} S_{n-1}(X) \xrightarrow{\partial} S_{n-2}(X)$ es igual a cero.*

Demostración. En efecto, sea ϕ un n-simplejo, entonces

$$\begin{aligned}
\partial(\partial\phi) &= \partial\big(\sum_{i=0}^{n}(-1)^i\partial_i\phi\big) = \sum_{i=0}^{n}(-1)^i\partial(\partial_i\phi)\\
&= \sum_{i=0}^{n}(-1)^i\sum_{j=0}^{n-1}(-1)^j\partial_j\partial_i\phi\\
&= \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n-1}(-1)^i(-1)^j\partial_j\partial_i\phi \qquad 0\le i\le n,\ 0\le j\le n-1\\
&= \sum_{i>j}(-1)^i(-1)^j\partial_j\partial_i\phi + \sum_{i\le j}(-1)^i(-1)^j\partial_j\partial_i\phi.
\end{aligned}$$

Ahora, de la igualdad $\partial_j\partial_i = \partial_{i-1}\partial_j$, para todo $i, j,\ i > j$ con $0 \le i \le n,\ 0 \le j \le n-1$, se deduce que los dos sumandos de la última suma se cancelan, pues cada sumando tiene $\frac{n(n+1)}{2}$ términos y para cada elemento $(-1)^i(-1)^j\partial_j\partial_i$ $(i > j)$ del primero existe un único elemento $(-1)^{i-1}(-1)^j\partial_{i-1}\partial_j$ $(j \le i-1)$ del segundo el cual es el inverso aditivo. Por lo tanto $\partial(\partial\phi) = 0$. □

Sea $f : X \to Y$ una función continua, y ϕ un p-simplejo singular en X. Entonces f determina de manera natural un p-simplejo singular en Y, definido por $f \circ \phi$.

Esta correspondencia induce en forma natural un homomorfismo $f_{\#}(\phi) : S_n(X) \longrightarrow S_n(Y)$, el cual satisface las siguientes propiedades:

1. Si $\mathrm{Id} : X \to X$ denota la función identidad, entonces $(\mathrm{Id})_{\#}(\phi) = \phi$, es el homomorfismo identidad.

2. Si $g : Y \longrightarrow Z$ es otra función continua, entonces $(g \circ f)_{\#}(\phi) = g_{\#}(f_{\#}(\phi))$. Es decir, $(g \circ f)_{\#} = g_{\#} \circ f_{\#}$.

Un elemento $c \in S_n(X)$ se denomina *un n-ciclo* si $\partial(c) = 0$; un elemento $d \in S_n(X)$ se dice que es una *n-frontera* si $d = \partial(e)$, para algún $e \in S_{n+1}(X)$. Como ∂_n es un homomorfismo, su kernel, el conjunto de todos los n-ciclos, es un subgrupo de $S_n(X)$, denotado por $Z_n(X)$. De forma análoga el conjunto de todas las n-fronteras, denotado por $B_n(X)$, es un subgrupo de $S_n(X)$. La proposición anterior nos dice que $B_n(X)$ es un subgupo de $Z_n(X)$. Al grupo cociente $H_n(X) = Z_n(X)/B_n(X)$ se le denomina, el *n-ésimo grupo de homología singular de X.*

Un grupo abeliano graduado G es una colección de grupos abelianos $\{G_i : i \in \mathbb{Z}\}$ indizados por los enteros con operación de grupo dada componente a componente. Si G y G' son grupos graduados, un homomorfismo f de G en G' es una colección de homomorfismos $\{f_i\}$, donde $f_i : G_i \to G'_{i+r}$, para algún entero fijo r, llamado *el grado de f*. Un subgrupo H de G donde G es un grupo graduado es un grupo graduado $\{H_i\}$ donde H_i es un subgrupo de G_i. El grupo cociente G/H se define como el grupo graduado $\{G_i/H_i : i \in \mathbb{Z}\}$.

Una cadena de complejos es una sucesión de grupos abelianos y homomorfismos

$$\cdots \xrightarrow{\partial_{n+1}} C_n \xrightarrow{\partial_n} C_{n-1} \xrightarrow{\partial_{n-1}} \cdots$$

para los cuales se tiene que $\partial_{n-1} \circ \partial_n = 0$, para todo $n \in \mathbb{Z}$.

Si C y C' son cadenas de complejos con operadores frontera ∂ y ∂', un *homomorfismo de cadenas* de C en C' es un homomorfismo $\Phi : C \to C$, de grado cero, tal que $\partial' \circ \Phi_n = \Phi_{n-1} \circ \partial$, para cada n. Si denotamos por $Z_*(C)$ y $B_*(C)$ el kernel e imagen de ∂, respectivamente, *la homología de C es el grupo graduado $H_*(C) = Z_*(C)/B_*(C)$.*

Sea Φ un homomorfismo de cadena de $\{C, \partial\}$ en $\{C', \partial'\}$. Si $d \in Z_n(C)$, $n \in \mathbb{Z}$, entonces

$$\partial'(\Phi_n(d)) = (\partial' \circ \Phi_n)(d) = (\Phi_{n-1} \circ \partial)(d) = \Phi_{n-1}(\partial(d)) = 0.$$

Luego $\Phi_n(d) \in Z_n(C')$, con lo cual $\Phi(Z_n(C)) \subseteq Z_n(C')$ y por tanto $\Phi(Z_*(C)) \subseteq Z_*(C')$. De forma análoga se verifica que $\Phi(B_*(C)) \subseteq B_*(C')$. De esta manera Φ induce un homomorfismo en los grupos de homología $\Phi_* : H_*(C) \to H_*(C')$. Veamos que el homomorfismo $f_\# : S_*(X) \to S_*(Y)$ definido arriba es en efecto un homomorfismo de cadenas; es decir, que $f_\# \circ \partial = \partial \circ f_\#$. En efecto, sea ϕ un n-simplejo. Entonces

$$\begin{aligned} \partial_i f_\#(\phi)(t_0, \ldots, t_{n-1}) &= f_\#(\phi)(t_0, \ldots, t_{i-1}, 0, t_i, \ldots, t_{n-1}) \\ &= f(\phi(t_0, \ldots, t_{i-1}, 0, t_i, \ldots, t_{n-1})) \end{aligned}$$

De otro lado $f_\# \partial_i(\phi)(t_0, \ldots, t_{n-1}) = f(\phi(t_0, \ldots, t_{i-1}, 0, t_i, \ldots, t_{n-1}))$. Luego $f_\# : S_*(X) \to S_*(Y)$ es un homomorfismo de cadenas, el cual induce un homomorfismo de grado cero $f_* : H_*(X) \to H_*(Y)$.

Notemos que si $g : Y \to W$ es una función continua, e $\mathrm{Id} : X \to X$ es la función identidad, entonces $(g \circ f)_* = g_* \circ f_*$ e $(\mathrm{Id})_*$ es el homomorfismo identidad. Es decir, para cada $n \geq 0$, la asignación $X \longmapsto H_n(X)$ *es un functor covariante de la categoría de espacios topológicos a la categoría de grupos abelianos.* De la propiedad functorial se sigue, en particular, que si $f : X \to Y$ es un homeomorfismo, entonces $f_* : H_*(X) \to H_*(Y)$ es un isomorfismo de grupos.

Computemos, a manera de ejemplo, la homología del espacio $X = \{x\}$ que consiste de un solo punto. Para cada $n \geq 0$ existe solo un n-simplejo, digamos ϕ_n. Entonces $S_n(X)$ es el grupo cíclico generado por ϕ_n. Si $n > 0$, entonces $\partial\phi_n = \sum_{i=0}^{n}(-1)^i\partial_i\phi_n = \sum_{i=0}^{n}(-1)^i\phi_{n-1}$. Luego

$$\partial\phi_n = \begin{cases} 0, & \text{si } n \text{ es impar} \\ \phi_{n-1}, & \text{si } n \text{ es par} \end{cases}$$

De esta manera $Z_n(X) = B_n(X) = 0$, para $n > 0$ par y $Z_n(X) = B_n(X) = \mathbb{Z}$, para $n > 0$ impar. En cualquier caso, $H_n(X) = 0$ para $n > 0$. Para $n = 0$, $B_0(X) = 0$ y $Z_0(X) = \mathbb{Z}$; así los grupos de homología de X están dados por:

$$H_n(X) = \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{si } n = 0 \\ 0 & \text{si } n > 0 \end{cases}$$

Un espacio X se llama *conexo por caminos* si dados puntos cualesquiera $x, y \in X$ existe una función continua $\psi : [0,1] \to X$ tal que $\psi(0) = x$ y $\psi(1) = y$.
Supongamos que X es un conjunto conexo por caminos y consideremos la porción de la cadena de complejos singulares de X dada por

$$S_1(X) \xrightarrow{\partial} S_0(X) \to 0$$

Ahora, $S_0(X) = Z_0(X)$ es el grupo abeliano libre generado por los puntos de X y $S_1(X)$ es el grupo abeliano libre generado por todos los caminos en X. Un elemento de $S_0(X)$ tiene la forma $y = \sum_{x\in X} n_x x$. Sea $\alpha : S_0(X) \to \mathbb{Z}$ el homomorfismo de grupos dado por $\alpha(\sum n_x x) = \sum n_x$. Como X no es vacío, entonces α es sobreyectivo. Si ϕ es un 1-simplejo singular con vértices v_0 y v_1, vemos que $\alpha(\partial\phi) = \alpha(\phi(v_1) - \phi(v_0)) = 0$; luego $B_0(X)$ está contenido en el kernel de α.

Recíprocamente, supongamos que $n_1x_1 + \cdots + n_kx_k \in S_0(X)$, con $\sum n_i = 0$. Sea $x \in X$ cualquier punto de X. Como X es conexo por caminos, para cada $i = 1, \ldots, k$ existe un 1-simplejo singular $\phi_i : \Delta_1 \to X$ tal que $\partial_0(\phi_i) = x_i$ y $\partial_1(\phi_i) = x$. Tomando la 1-cadena singular $\sum n_i\phi_i \in S_1(X)$ se tiene que

$$\partial(\sum n_i\phi_i) = \sum n_ix_i - x\sum n_i = \sum n_ix_i,$$

es decir, $\sum n_ix_i \in B_0(X)$. Luego $B_0(X)$ es igual al kernel de α y se concluye lo siguiente.

Proposición 1.5. *Si X es un espacio conexo por caminos se sigue que $H_0(X) \approx \mathbb{Z}$.*

Sea A un conjunto y supongamos que para cada $\alpha \in A$ existe un grupo abeliano G_α. Definimos el grupo abeliano $\sum_{\alpha\in A} G_\alpha$ de la siguiente manera: Los elementos son todas las funciones $f : A \to \bigcup_{\alpha\in A} G_\alpha$ tales que $f(\alpha) \in G_\alpha$, y $f(\alpha) \neq 0$ solo para finitos α. La operación de grupo está definida como $(f + g)(\alpha) = f(\alpha) + g(\alpha)$. Si hacemos $g_\alpha = f(\alpha) \in G_\alpha$, podemos escribir $f = (g_\alpha : \alpha \in A)$ y llamamos a los g_α *las componentes* de f.

El grupo $\sum G_\alpha$ se llama la *suma directa débil* de los G_α. Si se elimina la restricción de $f(\alpha) \neq 0$ solo para finitos índices, entonces el grupo resultante es llamado *la suma directa fuerte o el producto directo fuerte* de los G_α, denotado por $\prod_{\alpha\in A} G_\alpha$.

Si G es un grupo abeliano y $\{G_\alpha\}_{\alpha\in A}$ es una familia de subgrupos de G tales que para cada $g \in G$ existe una única representación $g = \sum_{\alpha\in A} g_\alpha$, con $g_\alpha \in G_\alpha$ y $g_\alpha \neq 0$ solo para finitos α, entonces G es isomorfo a $\sum_{\alpha\in A} G_\alpha$ vía el homomorfismo $h : G \to \sum_{\alpha\in A} G_\alpha$ dado por

$$h(g) = h\left(\sum_{\alpha\in A} g_\alpha\right) = (g_\alpha : \alpha \in A)$$

Supongamos ahora que para cada $\alpha \in A$ se tiene una cadena de complejos C^α

$$\cdots \xrightarrow{\partial^\alpha} C_p^\alpha \xrightarrow{\partial^\alpha} C_{p-1}^\alpha \xrightarrow{\partial^\alpha} \cdots$$

Definamos una cadena de complejos $\sum_{\alpha\in A} C^\alpha$, tomando

$$\left(\sum C^\alpha\right)_p = \left(\sum_{\alpha\in A} C_p^\alpha\right)$$

y $\partial(c_\alpha : \alpha \in A) = (\partial^\alpha c_\alpha : \alpha \in A)$. Notemos que ∂ está bien definido y que si $c = (c_\alpha^p : \alpha \in A)$ y $d = (d_\alpha^p : \alpha \in A)$ son elementos de $(\sum_{\alpha\in A} C_p^\alpha)$, entonces

$$\begin{aligned}\partial(c+d) &= \partial(c_\alpha^p + d_\alpha^p : \alpha \in A) = (\partial^\alpha(c_\alpha^p + d_\alpha^p) : \alpha \in A)\\ &= (\partial^\alpha c_\alpha^p + \partial^\alpha d_\alpha^p) : \alpha \in A) = \partial c + \partial d.\end{aligned}$$

Esto es, ∂ es un homomorfismo. Además, se sigue que ∂ es un operador frontera:

$$\begin{aligned}\partial(\partial(c_\alpha : \alpha \in A)) = \partial(\partial^\alpha c_\alpha : \alpha \in A) = (\partial^\alpha(\partial^\alpha c_\alpha) : \alpha \in A)\\ = (0_\alpha : \alpha \in A) = 0.\end{aligned}$$

Lema 1.6. *$H_k(\sum C^\alpha) \simeq \sum_\alpha H_k(C^\alpha)$.*

Demostración. Veamos que $Z_k(\sum C^\alpha) = \sum Z_k(C^\alpha)$ y $B_k(\sum C^\alpha) = \sum B_k(C^\alpha)$. Sea $f \in Z_k(\sum C^\alpha)$, $f = (f_\alpha^k : \alpha \in A)$ donde $f_\alpha^k \in C_\alpha^k$ y $\partial f = (\partial^\alpha f_\alpha^k : \alpha \in A) = 0$. Esto es $f = (f_\alpha^k : \alpha \in A)$ y $\partial^\alpha f_\alpha^k = 0$, para todo $\alpha \in A$, lo cual demuestra la primera igualdad. La segunda se deduce en forma análoga.

Luego

$$\begin{aligned}H_k\left(\sum C^\alpha\right) = Z_k\left(\sum C^\alpha\right)/B_k\left(\sum C^\alpha\right) = \sum Z_k(C^\alpha)/\sum B_k(C^\alpha)\\ \simeq \sum Z_k(C^\alpha)/B_k(C^\alpha) = H_k(C^\alpha).\end{aligned}$$

□

Sea X un espacio topológico. Para $x, y \in X$ decimos que $x \sim y$ si existe un camino en X de x a y. Es fácil ver que $\sim$ es una relación de equivalencia en X cuyas clases de equivalencia son llamadas las *componentes por camino de X o componentes conexas por camino de X.*

Proposición 1.7. *Sea X un espacio topológico y sean $\{X_\alpha : \alpha \in A\}$ las componentes por camino de X. Entonces $H_k(X) \approx \sum_{\alpha\in A} H_k(X_\alpha)$.*

Demostración. Existe un homomorfismo natural $\Psi : \sum_{\alpha\in A} S_k(X_\alpha) \to S_k(X)$ dado por

$$\Psi\Big(\Big(\sum_{\phi_\alpha}(n_{\phi\alpha})\phi_\alpha\Big) : \alpha \in A\Big) = \sum_{\alpha\in A}\Big(\sum_{\phi_\alpha}(n_{\phi\alpha})\phi_\alpha\Big).$$

Ψ está bien definida, pues solo hay finitos $\sum_{\phi_\alpha}(n_{\phi\alpha})\phi_\alpha$ diferentes de cero y cada uno de estos tiene finitos términos. Como los grupos $S_k(X_\alpha)$ con $\alpha \in A$, son libres, entonces Ψ es inyectiva. Veamos que también es sobreyectiva. Sea $\phi : \Delta_k \to X$ un k-simplejo singular, entonces como Δ_k es conexo, $\phi(\Delta_k)$ es conexo y por lo tanto está contenido en alguna componente conexa por camino de X, digamos X_α. Así, para ϕ existe $\phi_\alpha \in S_k(X_\alpha)$ con $\Psi(\phi_\alpha) = \phi$. Esto muestra que Ψ es sobreyectiva y por lo tanto que es un isomorfismo para cada k; además Ψ es un homomorfismo de cadenas entre las cadenas de complejos dadas. Luego

$$H_k(X) \approx H_k\Big(\sum_{\alpha\in A} S_*(X_\alpha)\Big).$$

Finalmente, por el lema anterior se tiene que

$$H_k\Big(\sum_{\alpha\in A} S_*(X_\alpha)\Big) \approx \sum_{\alpha\in A} H_k(X_\alpha),$$

lo cual completa la demostración. □

Teniendo en cuenta que las propiedades homológicas de un espacio están completamente determinadas por sus componentes conexas, y las propiedades homológicas de cualquier componente conexa son independientes de cualquier otra componente conexa, podemos entonces restringirnos al estudio de los espacios conexos por camino.

En el siguiente teorema computaremos la homología de un subconjunto convexo de $\mathbb{R}^n$.

Teorema 1.8. *Sea X un subconjunto convexo no vacío de $\mathbb{R}^n$. Entonces $H_p(X) = 0$, para todo $p > 0$, y $H_0(X) = \mathbb{Z}$.*

Demostración. Como todo subconjunto convexo es conexo por caminos, vemos que $H_0(X) = \mathbb{Z}$. Sea $x \in X$ y $\phi : \Delta_p \to X$ un p-simplejo singular, $p \geq 0$. Definamos $\theta : \Delta_{p+1} \to X$, un $p+1$-simplejo singular, como:

$$\theta(t_0, \ldots, t_{p+1}) = \begin{cases} (1-t_0)\phi\left(\frac{t_1}{1-t_0}, \ldots, \frac{t_{p+1}}{1-t_0}\right) + t_0 x & \text{si } t_0 < 1 \\ x & \text{si } t_0 = 1. \end{cases}$$

Notemos que $\theta(0, t_1, \ldots, t_{p+1}) = \phi(t_1, \ldots, t_{p+1})$. La función θ es continua excepto posiblemente en $(1, \ldots, 0)$. Para probar la continuidad en este punto es suficiente mostrar que $\text{lím}_{t_0 \to 1} \|\theta(t_0, \ldots, t_{p+1}) - x\| = 0$. En efecto:

$$\begin{aligned} &\lim_{t_0 \to 1} \|\theta(t_0, \ldots, t_{p+1}) - x\| \\ &= \lim_{t_0 \to 1} \left\| (1-t_0)\phi\left(\frac{t_1}{1-t_0}, \ldots, \frac{t_{p+1}}{1-t_0}\right) - (1-t_0)x \right\| \\ &\leq \lim_{t_0 \to 1} (1-t_0) \left(\left\| \phi\left(\frac{t_1}{1-t_0}, \ldots, \frac{t_{p+1}}{1-t_0}\right) \right\| + \|x\| \right). \end{aligned}$$

Como $\phi(\Delta_p)$ es compacto, entonces el conjunto

$$\{\|\phi\left(t_1/(1-t_0), \ldots, t_{p+1}/(1-t_0)\right)\| + \|x\| : t_0, \ldots, t_{p+1} \in [0,1], \text{con } t_0 \neq 1\},$$

es acotado, luego el último límite es cero, y se sigue entonces que θ es continua.

De la construcción es claro que $\partial_0(\theta) = \phi$. Como este procedimiento se puede aplicar a cualquier k-simplejo, entonces existe una única extensión $T : S_k(X) \to$

$S_{k+1}(X)$, tal que $\partial_0 \circ T = \mathrm{Id}$. En forma más general: si ϕ es un k-simplejo singular, y $t_0 \neq 0$, entonces

$$\begin{aligned}\partial_i\left(T(\phi)\right)(t_0\dots,t_k) &= T(\phi)(t_0,\dots,t_{i-1},0,t_i,\dots,t_k)\\ &= (1-t_0)\phi\left(\frac{t_1}{1-t_0},\dots,\frac{t_{i-1}}{1-t_0},0,\frac{t_i}{1-t_0},\dots,\frac{t_k}{1-t_0}\right)+t_0x.\end{aligned}$$

De otra parte

$$\begin{aligned}&T(\partial_{i-1}(\phi))(t_0,\dots,t_k)\\ &=(1-t_0)\left(\partial_{i-1}\phi\left(\frac{t_1}{1-t_0},\dots,\frac{t_k}{1-t_0}\right)+t_0x\right)\\ &=(1-t_0)\phi\left(\frac{t_1}{1-t_0},\dots,\frac{t_{i-1}}{1-t_0},0,\frac{t_i}{1-t_0},\dots,\frac{t_k}{1-t_0}\right)+t_0x.\end{aligned}$$

Si $t_0 = 0$ también se tiene la igualdad. Así, para $1 \leq i \leq k+1$, vemos que $\partial_i T(\phi) = T(\partial_{i-1}\phi)$.

Sea ϕ un k-simplejo singular cualquiera. Entonces:

$$\begin{aligned}\partial T\phi &= \partial_0 T\phi + \sum_{i=1}^{k+1}(-1)^i\partial_i T(\phi)\\ &= \partial_0 T\phi + \sum_{i=1}^{k+1}(-1)^i\partial_i T(\phi) - \left[\sum_{i=1}^{k+1}(-1)^i T\partial_{i-1}(\phi) + \sum_{j=0}^{k}(-1)^j T\partial_j(\phi)\right]\\ &= \phi - T\partial\phi.\end{aligned}$$

Luego $T : S_k(X) \to S_{k+1}(X)$ es un homomorfismo con la propiedad de que $\partial T + T\partial$ es el homomorfismo identidad en $S_k(X)$ para todo $k \geq 1$. En consecuencia, si $z \in Z_p(X)$ $p \geq 1$, se sigue que $T\partial z = 0$; por lo tanto $z = \partial(Tz)$, es decir, $z \in B_p(X)$. Esto implica que $H_p(X) = 0$ para todo $p > 0$. □

La construcción usada en la prueba del teorema anterior es un caso especial de una *cadena de homotopía entre cadenas de complejos.* Supongamos que $C = \{C_i, \partial\}$

y $C' = \{C_i{}', \partial'\}$ son cadenas de complejos y $T : C \to C'$ es un homomorfismo de grupos graduados de grado uno. Consideremos el homomorfismo de grado cero $\partial' T + T\partial : C \to C'$. Este es una función cadena que induce un homomorfismo en la homología $(\partial' T + T\partial)_p : H_p(C) \to H_p(C')$, para cada p. Ahora, si $z \in Z_P(C)$, vemos que $(\partial' T + T\partial)(z) = \partial' T(z)$ y este último elemento está contenido en $B_p(C')$. Luego $(\partial' T + T\partial)_*$ es el homomorfismo cero para cada p.

Dos funciones cadena $f, g : C \to C'$ se dice que son *cadenas homotópicas* si existe un homomorfismo $T : C \to C'$ de grado uno con $\partial' T + T\partial = f - g$.

Proposición 1.9. *Si f y g son funciones cadena, las cuales son cadenas homotópicas, entonces $f_* = g_*$ como homomorfismos de $H_*(C)$ en $H_*(C')$.*

Demostración. Si $T : C \to C'$ es una cadena homotópica entre f y g, entonces

$$0 = (\partial' T + T\partial)_* = (f - g_*) = f_* - g_*$$

□

Supongamos que $C = \{C_n\}$, $D = \{D_n\}$ y $E = \{E_n\}$ son cadenas de complejos y

$$0 \longrightarrow C \xrightarrow{f} D \xrightarrow{g} E \longrightarrow 0$$

es una secuencia exacta corta donde f y g son funciones cadena de grado cero. Luego para cada p se tiene asociada una tripleta en la homología de grupos

$$H_p(C) \xrightarrow{f_*} H_p(D) \xrightarrow{g_*} H_p(E).$$

Examinemos cuánto se desvía de ser una secuencia exacta corta. Estamos suponiendo que tenemos un diagrama infinito, donde cada fila es exacta y cada cuadrado es conmutativo:

$$
\begin{tikzcd}
 & \vdots \arrow[d] & \vdots \arrow[d] & \vdots \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & C_n \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\partial"] & D_n \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\partial"] & E_n \arrow[r] \arrow[d, "\partial"] & 0 \\
0 \arrow[r] & C_{n-1} \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\partial"] & D_{n-1} \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\partial"] & E_{n-1} \arrow[r] \arrow[d, "\partial"] & 0 \\
 & \vdots & \vdots & \vdots &
\end{tikzcd}
$$

Sea $z \in Z_n(E)$, esto es $\partial z = 0$. Como g es sobreyectiva, existe $d \in D_n$ tal que $g(d) = z$. Ahora como cada cuadrado conmuta $g(\partial d) = \partial g(d) = \partial z = 0$. Así, la imagen de ∂d está contenida en el kernel de g, que es igual a la imagen de f. Entonces existe un único $c \in C_{n-1}$ con $f(c) = \partial d$. Ahora, $f(\partial c) = \partial f(c) = \partial(\partial d) = 0$. Luego, como f es inyectiva, $\partial c = 0$.

Así, dado un elemento $z \in Z_n(E)$ existe un elemento no único $c \in Z_{n-1}(C)$ relacionado con éste, y por tanto el procedimiento no da lugar a una función. Sin embargo, esta construcción sí define una correspondencia entre las clases de homología, como veremos a continuación.

Sean $z, z' \in Z_n(E)$ con $z - z' \in B_n(E)$. Entonces existe $e \in E_{n+1}$ con $\partial(e) = z - z'$. Sean $d, d' \in D_n$ con $g(d) = z$ y $g(d') = z'$, y $c, c' \in C_{n-1}$ tales que $f(c) = \partial d$ y $f(c') = \partial d'$. Debemos mostrar que $c - c' \in B_{n-1}(C)$. En efecto, como g es sobreyectiva existe $a \in D_{n+1}$ tal que $g(a) = e$. Ahora, $g(\partial a) = \partial g(a) = \partial e = z - z'$ y por tanto $d - d' - \partial a$ es un elemento del kernel de g, que por tanto está en la imagen de f. En consecuencia, existe $b \in C_n$ con $f(b) = d - d' - \partial a$; además:

$$\begin{aligned} f(\partial b) &= \partial f(b) = \partial(d - d' - \partial a) \\ &= \partial d - \partial d' = f(c) - f(c') \\ &= f(c - c') \end{aligned}$$

y como f es inyectiva, entonces $\partial b = c - c'$.

Así, la correspondencia inducida en los grupos de homología está bien definida y obviamente es un homomorfismo. Este homomorfismo se denota por $\delta : H_n(E) \to H_{n-1}(C)$ y se denomina el *homomorfismo conexión* para la secuencia exacta corta

$$0 \longrightarrow C \xrightarrow{f} D \xrightarrow{g} E \longrightarrow 0$$

Lema 1.10 (Zig-Zag)**.** *Si* $0 \longrightarrow C \xrightarrow{f} D \xrightarrow{g} E \longrightarrow 0$ *es una secuencia exacta corta de cadenas de complejos y homomorfismos cadena de grado cero, entonces la secuencia larga*

$$\cdots \xrightarrow{f_*} H_n(D) \xrightarrow{g_*} H_n(E) \xrightarrow{\delta} H_{n-1}(C) \xrightarrow{f_*} \cdots$$

es exacta.

Demostración. Mostremos primero que $\operatorname{Im} f_* = \ker g_*$. Veamos la inclusión $\ker g_* \subseteq \operatorname{Im} f_*$. Sea $d \in Z_n(D)$, con $g(d) \in B_n(E)$, es decir $\overline{d}$, es un elemento de $\ker g_*$. Existe $e \in E_{n+1}$ tal que $\partial e = g(d)$. Como g es sobreyectiva, existe $a \in D_{n+1}$ con $g(a) = e$. Ahora, $g(\partial a) = \partial g(a) = \partial e = g(d)$. Luego $d - \partial a \in \ker g$ y por tanto existe $c \in C_n$ con $f(c) = d - \partial a$. Solo resta verificar que $\partial c = 0$ y se tendrá que $f_*(\overline{c}) = \overline{d}$. Esto se tiene ya que $\partial f(c) = \partial d = 0$, lo cual implica que $f(\partial c) = 0$. Como f es inyectiva, $\partial c = 0$, y se tiene la inclusión.

Veamos ahora que $\operatorname{Im} g_* = \ker \delta$. Examinemos la inclusión $\ker \delta \subseteq \operatorname{Im} g_*$. Sea $e \in Z_n(E)$. Siguiendo la construcción del homomorfismo conección δ, vemos que existe $d \in D_n$ tal que $g(d) = e$; para ∂d existe $c \in Z_{n-1}(C)$ con $f(c) = \partial d$, tal que $\delta(\overline{e}) = \overline{c}$. Supongamos que $c \in B_{n-1}(C)$, es decir, $\overline{e} \in \ker \delta$. Existe $a \in C_n$ para el cual se tiene $\partial a = c$. Ahora, $f(a)$ es tal que $\partial f(a) = \partial d$. Sea $d' = f(a)$, $d - d' \in Z_n(D)$ y como

$$g(d - d') = g(d) - g(d') = g(d) - g(f(a)) = g(d) - 0 = e$$

se deduce que $g_*(\overline{d - d'}) = \overline{e}$, lo cual muestra la inclusión.

Por último probemos que $\operatorname{Im} \delta = \ker f_*$. Mostremos la inclusión $\ker f_* \subseteq \operatorname{Im} \delta$. Sea $c \in Z_{n-1}(C)$ tal que $f(c) \in B_{n-1}(D)$. Entonces existe $d \in D_n$ tal que $\partial d = f(c)$. Pero $\partial g(d) = g(\partial d) = g(f(c)) = 0$, luego $g(d) \in Z_n(E)$. Así, la clase de $g(d)$ es enviada mediante δ en la clase de c; luego $\ker f_* \subseteq \operatorname{Im} \delta$.

Las demás inclusiones se demuestran en forma similar. $\square$

1.1.2. Cadenas subordinadas a un cubrimiento

Sea X un espacio topológico y $U = \{U_\alpha\}$ cualquier cubrimiento abierto de X. Denotaremos como $S_n^U(X)$ el subgrupo de $S_n(X)$ generado por los n-simplejos $\phi : \Delta_n \to X$ para los cuales $\phi(\Delta_n)$ está contenido en algún $U_\alpha \in U$. Notemos que para cada i, $\operatorname{Im} \partial_i \phi \subseteq \operatorname{Im} \phi$ luego el homomorfismo $\partial : S_n^U(X) \to S_{n-1}^U(X)$ está bien definido. Así, para cualquier cubrimiento U de X, existe una cadena de complejos $S_*^U(X)$ tal que la inclusión natural $i : S_*^U(X) \to S_*(X)$ es una función cadena. Notemos que si W es un cubrimiento de un espacio Y y $f : X \to Y$ es una función continua tal que para cada $U_\alpha \in U$, $f(U_\alpha)$ está contenido en algún V_β de W, entonces existe una función cadena $f_\# : S_*^U(X) \to S_*^W(Y)$ que satisface $f_\# \circ i_X = i_Y \circ f_\#$.

Teorema 1.11. *Si U es una familia de subconjuntos de X tal que sus interiores forman un cubrimiento de X, entonces $i_* : H_n(S_*^U) \to H_n(X)$ es un isomorfismo para cada n.*

Demostración. Ver [4] apéndice I. □

En la prueba de la exactitud de la secuencia generalizada de Mayer-Vietotis para cadenas singulares proposición 1.15, se necesitará de las cadenas subordinadas a un cubrimiento.

1.2. Cohomología singular

Definición 1.2. *Sea X un espacio topológico y $\{S_q(X), \partial_q, q \geq 0\}$ el complejo de cadenas singulares en X. Al aplicar $Hom_{\mathbb{Z}}(\ ,\mathbb{Z})$ se obtiene el complejo*

$$0 \longrightarrow S^0(X) \xrightarrow{d^0} S^1(X) \xrightarrow{d^1} \cdots \xrightarrow{d^{q-1}} S^q(X) \xrightarrow{d^q} \cdots .$$

donde $S^q(X) = Hom_{\mathbb{Z}}(S_q(X), \mathbb{Z})$. Un elemento en $S^q(X)$ se llamará una q-cocadena. d denotará el operador cofrontera definido por $(d^q\sigma)(c) = \sigma(\partial_{q+1}c)$, con $\sigma \in S^{q+1}(X)$ y $c \in S_{q+1}(X)$. Si $c \in S^q(X)$ es tal que $dc = 0$, entonces c se llamará un q-cociclo. Si $b \in S^q(X)$ es tal que existe $a \in S^{q+1}(X)$ con $da = b$, decimos que b es una q-cofrontera. A la homología de este complejo se le llama la cohomología singular de X y se denotará por $H^*_{sing}(X)$.

Sea $f : X \to Y$ un homeomorfismo. Sabemos que f induce una función $f_\#$ entre los complejos de cadenas singulares de X y Y,

$$\begin{array}{ccccccc}
\cdots & \xrightarrow{\partial} & S_n(X) & \xrightarrow{\partial} & S_{n-1}(X) & \xrightarrow{\partial} & \cdots \\
 & & \downarrow{\scriptstyle f_\#} & & \downarrow{\scriptstyle f_\#} & & \\
\cdots & \xrightarrow{\partial} & S_n(Y) & \xrightarrow{\partial} & S_{n-1}(Y) & \xrightarrow{\partial} & \cdots
\end{array}$$

para la cual se tiene $\partial f_\# = f_\# \partial$. Es decir, el diagrama anterior conmuta. $f_\#$ induce un homomorfismo en los grupos de homología, el cual también se denotará por $f_\#$. Se ve fácilmente que este homomorfismo es inyectivo. En forma análoga, la misma propiedad es válida para f^{-1}, donde $(f_\#)^{-1} = (f^{-1})_\#$. Luego $f_\#$ es un isomorfismo entre los grupos de homología de los espacios X y Y. Al aplicar $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\ ,\mathbb{Z})$ en el diagrama anterior se obtiene el siguiente diagrama conmutativo.

$$\begin{tikzcd}
\cdots & \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(S_n(X),\mathbb{Z}) \arrow[l, "d"'] & \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(S_{n-1}(X),\mathbb{Z}) \arrow[l, "d"'] & \cdots \arrow[l, "d"'] \\
\cdots & \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(S_n(Y),\mathbb{Z}) \arrow[l, "d"'] \arrow[u, "f^\#"'] & \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(S_{n-1}(Y),\mathbb{Z}) \arrow[l, "d"'] \arrow[u, "f^\#"'] & \cdots \arrow[l, "d"']
\end{tikzcd}$$

Veamos que en efecto el diagrama anterior conmuta. Sean $c \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(S_{n-1}(Y),\mathbb{Z})$ y $\phi \in S_n(X)$. Entonces

$$\begin{aligned}
[(f^\# d)c](\phi) = (dc)(f(\phi)) &= c(\partial f(\phi)) \\
&= c(f(\partial\phi)), \quad \text{(ya que) } \partial f_\# = f_\# \partial \\
&= (f^\# c)(\partial\phi) = [(df^\#)(c)](\phi).
\end{aligned}$$

Luego $f^\#$ induce un homomorfismo entre los grupos de cohomología de Y y X. De forma análoga se tiene que $(f^{-1})^\#$ induce un homomorfismo entre los grupos de cohomología de X y Y. Además para $c \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(S_n(Y),\mathbb{Z})$ y $\phi \in S_n(Y)$ se tiene

$$[(f^{-1})^\#(f^\# c)](\phi) = (f^{-1}(\phi)) = c[f(f^{-1})(\phi)] = c(\phi),$$

con lo que $(f^{-1})^\# \circ f^\#$ es el homomorfismo identidad. En forma análoga también se prueba que $f^\#((f^{-1})^\# c)](\phi) = c(\phi)$, con $c \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(S_n X,\mathbb{Z})$ y $\phi \in S_n(X)$. Luego $(f^{-1})^\#$ es el homomorfismo inverso de $f^\#$. De lo anterior se tiene

Teorema 1.12. *Sean X y Y espacios topológicos y $f : X \to Y$ un homeomorfismo. Entonces f induce un isomorfismo entre las cohomologías singulares de X y Y.*

Computemos a manera de ejemplo la 0-cohomología singular de un espacio topológico X.

$H^0_{\text{sing}}(X) = \ker(d : S^0(X) \to S^1(X))$. $c \in S^0(X)$ es un 0-cociclo, si y sólo si $dc(\phi) = 0$ para todo $\phi \in S_1(X)$, esto es, $c(\partial\phi = 0)$, para todo $\phi \in S_1(X)$, si y sólo si $c(\phi(1)) = c(\phi(0))$, para todo $\phi \in S_1(X)$. Se tiene entonces que c es constante en cada componente conexa por camino de X, luego $H^0\,(X) = \bigoplus_{p\in B}\mathbb{Z}$, donde $|B|$ es el número de componentes conexas por camino de X.

Teorema 1.13. *Si X es un subconjunto convexo de $\mathbb{R}^n$, entonces $H^q_{sing}(X) = 0$, para todo $q > 0$ y $H^0_{sing}(X) = \mathbb{Z}$.*

Demostración. Sea $L : S^q(X) \to S^{q-1}(X)$ el operador dado por $(L\sigma)(c) = \sigma(Tc)$, donde T es el operador definido en el teorema 1.8, $\sigma \in S^q(X)$ y $c \in S_{q-1}(X)$. Para $\sigma \in S^q(X)$ y $c \in S_{q-1}(X)$, se tiene

$$\begin{aligned}
((dL - Ld)\sigma)c &= (d(L\sigma))c - (L(d\sigma))(c)\\
&= (L\sigma)(\partial c) - (d\sigma)(Tc)\\
&= \sigma(T\partial c) - \sigma(\partial Tc)\\
&= \sigma((T\partial - \partial T)c)\\
&= \sigma(c).
\end{aligned}$$

La última igualdad se tiene por el teorema 1.8. Luego $dL - Ld = \mathrm{Id}$ en $S^q(X)$; esto es, L es un operador de homotopía entre la función identidad y la función cero en las q-cocadenas, $q \geq 1$. De este hecho y del ejemplo anterior se tiene que

$$H^*_{\text{sing}}(X) = \begin{cases} \mathbb{Z}, & \text{si } q = 0\\ 0, & \text{si } q > 0. \end{cases}$$

$\square$

1.2.1. Secuencia de Cech para la homología singular

Sea X un espacio topológico y sea $U = \{U_\alpha : \alpha \in A\}$ un cubrimiento de X, indizado con un cierto conjunto totalmente ordenado A. Denotemos por $S_q(U_{\alpha_0\dots\alpha_p})$ el conjunto de q-simplejos singulares en $U_{\alpha_0\dots\alpha_p}$, donde $U_{\alpha_0\dots\alpha_p}$ denota la intersección $U_{\alpha_0} \cap \dots \cap U_{\alpha_p}$. Sean además

$$B_q^U = \{\phi : \Delta_q \to X : \mathrm{Im}\phi \subset U_\alpha, \text{ para algún } \alpha \in A\}$$

y S_q^U el grupo libre abeliano generado por los elementos de B_q^U. A cada elemento $c \in \bigoplus_{\alpha_0<\dots<\alpha_p} S_q(U_{\alpha_0\dots\alpha_p})$ lo representaremos por $c = (c_{\alpha_0\dots\alpha_p})$, donde $c_{\alpha_0\dots\alpha_p} \in S_q(U_{\alpha_0\dots\alpha_p})$. Adoptamos la convención de que al intercambiar dos índices se introduce un signo menos, esto es, $c_{\alpha_0\dots\alpha\dots\beta\dots\alpha_p} = -c_{\alpha_0\dots\beta\dots\alpha\dots\alpha_p}$.

Definimos el operador *frontera de Cech*

$$\delta : \bigoplus_{\alpha_0<\dots<\alpha_p} S_q(U_{\alpha_0\dots\alpha_p}) \to \bigoplus_{\alpha_0<\dots<\alpha_{p-1}} S_q(U_{\alpha_0\dots\alpha_{p-1}}),$$

como la suma $(\delta c)_{\alpha_0\dots\alpha_{p-1}} = \sum_\alpha c_{\alpha\alpha_0\dots\alpha_{p-1}}$. Notemos que esta suma sólo involucra finitos términos.

No es difícil ver que el complejo resultante es un complejo de cadenas, es decir, que $\delta^2 = 0$. En efecto, si $c \in \bigoplus_{\alpha_0<\dots<\alpha_{p-1}} S_q(U_{\alpha_0\dots\alpha_p})$, entonces

$$\begin{aligned}(\delta^2 c)_{\alpha_0,\dots,\alpha_{p-2}} = \sum_\alpha (\delta c)_{\alpha\alpha_0,\dots,\alpha_{p-2}} &= \sum_\alpha \sum_\beta c_{\beta\alpha\alpha_0,\dots,\alpha_{p-2}} \\ &= 0\end{aligned}$$

La última igualdad se tiene ya que $c_{\alpha\beta\dots} = c_{\beta\alpha\dots}$.

Para el término de grado cero, el operador aumento se denotará por $\varepsilon : \bigoplus_{\alpha_0} S_q(U_{\alpha_0}) \to S_q^U$ y lo definimos como la suma de q-simplejos en los $S_q(U_{\alpha_0})$.

Ejemplo 1.14. *Sea $U = \{U_0, U_1\}$. En este caso el complejo de Cech luce como*

$$0 \leftarrow \quad S_q^U(U_0 \cup U_1) \quad \overset{\varepsilon}{\leftarrow} \quad S_q(U_0) \oplus S_q(U_1) \quad \overset{\delta}{\leftarrow} \quad S_q(U_0 \cap U_1) \quad \leftarrow 0$$

donde $\varepsilon(c_0, c_1) = c_0 + c_1$. Para $c \in S_q(U_0 \cap U_1)$ se tiene

$$(\delta c)_0 = \sum_{\alpha=0}^{1} c_{\alpha 0} = c_{00} + c_{10} = 0 - c_{01} = -c_{01}$$

$$(\delta c)_1 = \sum_{\alpha=0}^{1} c_{\alpha 1} = c_{01} + c_{11} = c_{01} + 0 = c_{01},$$

Esto es, si $c = (c_{01})$, entonces $\delta(c_{01}) = (-c_{01}, c_{01})$.

Proposición 1.15 (Secuencia de Mayer-Vietoris para cadenas singulares)**.** *Sea $U = \{U_\alpha : \alpha \in A,\}$ donde A es un conjunto totalmente ordenado, un cubrimiento contable de un espacio topológico X. La siguiente secuencia es exacta*

$$0 \longleftarrow S_q^U(X) \xleftarrow{\varepsilon} \bigoplus_{\alpha_0} S_q(U_{\alpha_0}) \xleftarrow{\delta} \bigoplus_{\alpha_0<\alpha_1} S_q(U_{\alpha_0\alpha_1}) \xleftarrow{\delta} \cdots .$$

Demostración. Veamos primero, por inducción, que la secuencia es exacta para un cubrimiento finito cualquiera. Después extenderemos el resultado a un cubrimiento infinito numerable.

Para dos conjuntos abiertos, la secuencia se convierte en

$$\begin{array}{ccccccc}
0 \leftarrow & S_q^{\mathcal{A}}(U_0 \cup U_1) & \leftarrow & S_q(U_0) \oplus S_q(U_1) & \leftarrow & S_q(U_0 \cap U_1) & \leftarrow 0 \\
 & & & (-c_{01}, c_{01}) & \longleftarrow & c_{01} & \\
 & c_0 + c_1 & \longleftarrow & (c_0, c_1) & & &
\end{array}$$

Veamos la exactitud en el medio. Ya sabemos que $\delta^2 = 0$. Sean ahora $c_0 = \sum_i n_i \phi_i \in S_q(U_0)$ y $c_1 = \sum_i n_j \psi_j \in S_q(U_1)$ con $c_0 + c_1 = 0$, donde no hay ni repeticiones de los ϕ_i, ni de los ψ_j. Entonces $m_j = -n_i$, $\psi_j = \phi_i$ y por tanto $c_0 = c_1$ y $c_0 \in S_q(U_1)$, $c_1 \in S_q(U_0)$. Así $c_0, c_1 \in S_q(U_0 \cap U_1)$, con lo cual $(c_0, c_1) = (-c_1, c_1)$.

Denotaremos por $U^{\alpha_0\cdots\alpha_p}$ a la unión $\cup_{i=0}^{p}U_{\alpha_i}$.

Para tres conjuntos abiertos la secuencia de Mayer-Vietoris es

$$\begin{array}{cccccccccc}
0\leftarrow & S_q^U(U^{012}) & \leftarrow & S_q(U_0)\oplus S_q(U_1)\oplus S_q(U_2) & \leftarrow & S_q(U_{01})\oplus S_q(U_{02})\oplus S_q(U_{12}) & \leftarrow S_q(U_{012}) & \leftarrow 0\\
 & & & & & (c_{012},-c_{012},c_{012}) & \leftarrow c_{012} & \\
 & & & (-c_{01}-c_{02},c_{01}-c_{12},c_{02}+c_{12}) & \leftarrow & (c_{01},c_{02},c_{12}) & &
\end{array}$$

La secuencia de Mayer-Vietoris para dos conjuntos abiertos se inyecta en la secuencia de Mayer-Vietoris para tres y se forma el siguiente diagrama conmutativo con columnas exactas:

$$\begin{array}{ccccccccccc}
 & & 0 & & 0 & & 0 & & & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & & & \\
0 & \leftarrow & A & \overset{\varepsilon}{\leftarrow} & S_q(U_0)\oplus S_q(U_1) & \overset{\delta}{\leftarrow} & S_q(U_{01}) & \overset{\delta}{\leftarrow} & 0 & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \leftarrow & B & \overset{\varepsilon}{\leftarrow} & S_q(U_0)\oplus S_q(U_1)\oplus S_q(U_2) & \overset{\delta}{\leftarrow} & S_q(U_{01})\oplus S_q(U_{02})\oplus S_q(U_{12}) & \overset{\delta}{\leftarrow} & S_q(U_{012}) & \leftarrow & 0\\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \leftarrow & C & \overset{\overline{\varepsilon}}{\leftarrow} & S_q(U_2) & \overset{\overline{\delta}}{\leftarrow} & S_q(U_{02})\oplus S_q(U_{12}) & \overset{\overline{\delta}}{\leftarrow} & S_q(U_{012}) & \leftarrow & 0\\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & 0 & & 0 & & 0 & & 0 & &
\end{array}$$

donde $A = S_q^U(U^{01})$, $B = S_q^U(U^{012})$ y $C = \frac{S_q^U(U^{012})}{S_q^U(U^{01})}$.

La U en $S_q^U(U^{01})$ corresponde al cubrimiento $\{U_0, U_1\}$, mientras que la U en $S_q^U(U^{012})$ corresponde al cubrimiento $\{U_0, U_1, U_2\}$.

Por el lema 1.10 (Zig-Zag), si probamos que la primera y la última fila son exactas, la intermedia lo será. La primera fila es exacta por ser la secuenia de Mayer-Vietoris para un cubrimiento con dos conjuntos abiertos. Veamos la exactitud de la última fila.

$\overline{\varepsilon}$ es sobre pues las clases que no son cero en $\frac{S_q^U(U^{012})}{S_q^U(U^{01})}$, están representadas por q-cadenas singulares que están contenidas en $S_q(U_2)$, y que no están contenidas en $S_q(U_0)$ o $S_q(U_1)$.

La cola que resta de la última fila es casi la secuencia de Mayer-Vietoris para el cubrimiento abierto $\{U_{02}, U_{12}\}$, ésta es exacta, excepto posiblemente en $S_q(U_2)$.

Sea $c \in S_q\left(U_{02}\right) \oplus S_q\left(U_{12}\right)$, $c = (a,b)$, $a \in S_q(U_0)$ y $b \in S_q(U_1)$. Ahora como $\overline{\delta}$ es el operador aumento, $\overline{\delta}(c) = a + b \in S_q^U(U^{01})$, esto es, $\overline{\varepsilon} \circ \overline{\delta}(c) = 0$.

Sea $c \in S_q(U_2)$ tal que $\overline{\varepsilon}(c) = 0$. Entonces $c \in S_q(U_0)$ o $c \in S_q(U_1)$. Si $c \in S_q(U_0)$, $a = (c,0) \in S_q\left(U_{02}\right) \oplus S_q\left(U_{12}\right)$ es tal que $\overline{\delta}(a) = c$. De forma análoga se tiene si $c \in S_q(U_1)$.

Supongamos ahora que la secuencia de Mayer-Vietoris para cadenas singulares es exacta para $p+1$ conjuntos abiertos, y deduzcamos que también lo es para $p+2$ conjuntos abiertos.

Con un argumento parecido el caso anterior la secuencia de Mayer-Vietoris para $p+1$ conjuntos abiertos se inyecta en la de $p+2$, obteniéndose un diagrama conmutativo donde las columnas son exactas:

$$
\begin{array}{ccccccccccccc}
 & & 0 & & 0 & & & & 0 & & & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & & & \downarrow & & & & \\
0 & \leftarrow & A & \stackrel{\varepsilon}{\leftarrow} & \bigoplus_{\alpha_0} S_q(U_{\alpha_0}) & \stackrel{\delta}{\leftarrow} & \cdots & \leftarrow & S_q\left(U_{\alpha_0\ldots\alpha_p}\right) & \stackrel{\delta}{\leftarrow} & 0 & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \leftarrow & B & \stackrel{\varepsilon}{\leftarrow} & \bigoplus S_q(U_{\alpha_0}) & \stackrel{\delta}{\leftarrow} & \cdots & \leftarrow & \bigoplus S_q\left(U_{\alpha_0\ldots\alpha_p}\right) & \stackrel{\delta}{\leftarrow} & S_q\left(U_{\alpha_0\ldots\alpha_{p+1}}\right) & \leftarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \leftarrow & C & \stackrel{\overline{\varepsilon}}{\leftarrow} & S_q\left(U_{p+1}\right) & \stackrel{\overline{\delta}}{\leftarrow} & \cdots & \leftarrow & \bigoplus_{i\neq p+1} S_q(U_{\alpha_0\ldots\hat{\alpha_i}\ldots\alpha_{p+1}}) & \stackrel{\overline{\delta}}{\leftarrow} & S_q\left(U_{\alpha_0\ldots\alpha_{p+1}}\right) & \leftarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & 0 & & 0 & & & & 0 & & 0 & &
\end{array}
$$

donde $A = S_q^U\left(U^{\alpha_0,\ldots,\alpha_p}\right)$, $B = S_q^U\left(U^{\alpha_0,\ldots,\alpha_{p+1}}\right)$ y $C = \frac{S_q^U(U^{\alpha_0,\ldots,\alpha_{p+1}})}{S_q^U(U^{\alpha_0,\ldots,\alpha_p})}$. $\hat{\alpha}_i$ significa que se ha suprimido el índice α_i.

La primera fila es exacta por hipótesis y la última, como en el caso anterior, también lo es, donde la cola es la secuencia de Mayer-viatoris para los $p+1$ conjuntos $\{U_{\alpha_0\alpha_{p+1}}, \ldots, U_{\alpha_p\alpha_{p+1}}\}$ contenidos todos en $U_{\alpha_{p+1}}$. Luego, por el lema del Zig-Zag, la fila intermedia también es exacta.

Supongamos ahora que el cubrimiento es infinito numerable. Por la definición de suma directa, un elemento $c \in \bigoplus S_q(U_{\alpha_0\ldots\alpha_p})$ tiene solo finitas componentes no nulas. Estas componentes involucran un número finito de conjuntos abiertos. Luego si $\delta c = 0$, por la secuencia de Mayer-Viatoris para un cubrimento finito, existe $b \in \bigoplus S_q(U_{\alpha_0\ldots\alpha_{p+1}})$ tal que

$c = \delta b.$

Esto prueba la exactitud de la secuencia de Mayer-Viatoris para un cubrimiento infinito numerable. $\square$

Capítulo 2

Manifolds y formas diferenciales

2.1. Manifolds

Definición 2.1. *Un espacio topológico M se dice localmente Euclidiano de dimensión n si para todo punto $x \in M$ existen $U_x \subset M$ un entorno abierto de x, $\widetilde{U}_x \subset \mathbb{R}^n$ un abierto y un homeomorfismo $\varphi_x : U_x \to \widetilde{U}_x \subset \mathbb{R}^n$. El par $(U_x, \varphi_x : U_x \to \widetilde{U}_x)$ se llama una carta.*

Definición 2.2. *Un manifold topológico es un espacio Hausdorff, segundo contable y localmente Euclidiano. Se dice de dimensión n si es localmente Euclidiano de dimensión n.*

Si M es un manifold topológico conexo, entonces el n en la definición anterior es el mismo para todos los pares (U_x, φ_x), esto se deduce del *teorema de invarianza de dominio de Brouwer*, ver [2].

Definición 2.3. *Dos cartas $(U, \phi : U \to \mathbb{R}^n), (V, \varphi : V \to \mathbb{R}^n)$ en un manifold* *topológico, se dicen compatibles si las dos funciones*

$$\phi \circ \varphi^{-1} : \varphi(U \cap V) \to \phi(U \cap V),\ \varphi \circ \phi^{-1} : \phi(U \cap V) \to \varphi(U \cap V),$$

son de clase C^∞.

Definición 2.4. *Un atlas en un espacio localmente Euclidiano M, es una colección $\mathcal{A} = \{(U_\alpha, \phi_\alpha)\}$ de cartas compatibles que cubren a M.*
Una carta (V, φ) se dice que es compatible con un atlas $\{(U_\alpha, \phi_\alpha)\}$ si esta es compatible con todas las cartas del atlas.

Definición 2.5. *Un atlas $\mathcal{M}$ en un espacio localmente Euclidiano se dice que es máximal si no existe otro que lo contenga propiamente, es decir, si existe otro atlas $\mathcal{A}$ que contiene a $\mathcal{M}$, entonces $\mathcal{M} = \mathcal{A}$.*

Definición 2.6. *Un manifold suave es un espacio topológico junto con un atlas maximal. Un manifold se dice que tiene dimensión n si todas sus componentes conexas tienen dimensión n.*

Definición 2.7. *Si M, N son manifolds suaves, una función $f : M \to N$ se llama suave si para cada $p \in M$ existe una carta (U_p, φ_p) en M y otra carta $(V_{f(p)}, \psi_{f(p)})$ en N tal que $\psi_{f(p)} \circ f \circ \varphi_p^{-1}$ es C^∞.*

Los manifolds suaves y sus funciones suaves forman una categoría. Si existe $g : N \to M$ suave tal que $g \circ f = \mathrm{Id}_M$ y $f \circ g = \mathrm{Id}_N$, entonces f, g se llaman *difeomorfismos* y M, N se llaman *difeomorfos*.

Denotaremos por $(u^1, \cdots u^n)$ a las coordenadas estándar de $\mathbb{R}^n$, $u^i\left(a_1, \cdots, a_n\right) = a_i$. Si $\varphi : U \subseteq M \to \widetilde{U} \subset \mathbb{R}^n$, es una carta de M, entonces a la función $u^i \circ \varphi$ la denotaremos por x^i, de tal forma que $\varphi\left(p\right) = \left(x^1\left(p\right), \cdots x^n\left(p\right)\right)$.

Definición 2.8. *Si* $f : U \to \mathbb{R}$ *es suave y* $(U, \varphi = (x^1, \cdots x^n))$ *es una carta en* U*, entonces para* $p \in U$ *se define*

$$\frac{\partial f}{\partial x^i}(p) = D_i\left(f \circ \varphi^{-1}\right)(\varphi(p)) = \frac{\partial}{\partial u^i}\left(f \circ \varphi^{-1}\right)(\varphi(p)).$$

Aquí D_i *denota la derivada parcial i-ésima en* $\mathbb{R}^n$*.*

Nota. *No es difícil ver que la definición anterior no depende de la carta escogida.*

2.1.1. Espacio tangente

Sea $f : U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ suave y $p \in U$ un punto. La derivada direccional de f en p en la dirección de $v = (v_1, \ldots, v_n)$ está definida como $D_v f(p) = \frac{d}{dt} f(p + tv)\big|_{t=0}$. Por la regla de la cadena, $D_v f(p) = \frac{\partial f}{\partial u^1}(p) v_1 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial u^n}(p) v_n$. Luego existe una correspondencia biyectiva $v \longmapsto D_v$. Es fácil ver que $D_v : C^\infty(U) \to \mathbb{R}$ es un operador $\mathbb{R}$-lineal, esto es, $D_v(\alpha f + g)(p) = \alpha D_v f(p) + D_v g(p)$ y $D_v(fg)(p) = g(p) D_v f(p) + f(p) D_v g(p)$ (regla de Leibnitz).

Definición 2.9. *Sea* M *un n-manifold y* $p \in M$ *un punto. El espacio tangente de* M *en* p*,* $T_p(M)$*, es por definición el conjunto de todos los operadores* $D : C^\infty(M) \to \mathbb{R}$ *tales que:*

i. $D(\alpha f + g) = \alpha Df + Dg$.

ii. $D(fg) = g(p) Df + f(p) Dg$.

Es claro que $(D_1 + D_2)(f) = D_1 f + D_2 f$, $(\alpha D_1) f = \alpha D_1 f$, luego $T_p(M)$ es un $\mathbb{R}$-espacio vectorial.

Sea (U, φ), $\varphi = (x^1, \ldots, x^n)$ una carta de M. Las derivaciones, $\frac{\partial}{\partial x^i}\big|_p$ $i = 1, \ldots, n$ dadas por $\frac{\partial}{\partial x^i}\big|_p(f) = \frac{\partial f}{\partial x^i}(p)$, $f \in C^\infty(U)$, son elementos de $T_p(M)$.

Lema 2.1. *Sea M un n-manifold suave y $p \in M$. Si (U_p, φ), $\varphi = (x^1, \ldots, x^n)$ es una carta, entonces $\beta_\varphi = \{ \frac{\partial}{\partial x^1}\big|_p, \ldots, \frac{\partial}{\partial x^n}\big|_p \}$ es una base para $T_p(M)$. Si $D \in T_p(M)$, $D : C^\infty(U) \to \mathbb{R}$, se tiene que*

$$D = D(x^1) \left.\frac{\partial}{\partial x^1}\right|_p + \cdots + D(x^n) \left.\frac{\partial}{\partial x^n}\right|_p$$

Demostración. Ver [5] pág 80. □

Sea (V_p, ψ), $\psi = (y^1, \ldots, y^n)$ otra carta alrededor de p, β_y la base $\{ \frac{\partial}{\partial y^1}\Big|_p, \ldots, \frac{\partial}{\partial y^n}\Big|_p \}$ y sea $D = \frac{\partial}{\partial y^j}\Big|_p$. Se sigue que

$$\left.\frac{\partial}{\partial y^j}\right|_p = \frac{\partial x^1}{\partial y^j}(p) \left.\frac{\partial}{\partial x^1}\right|_p + \cdots + \frac{\partial x^n}{\partial y^j}(p) \left.\frac{\partial}{\partial x^n}\right|_p .$$

Entonces la matriz de cambio de base, de β_y a β_x, está dada por

$$[Id]_{\beta_x \beta_y} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x^1}{\partial y^1}(p) & \cdots & \frac{\partial x^1}{\partial y^n}(p) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial x^n}{\partial y^1}(p) & \cdots & \frac{\partial x^n}{\partial y^n}(p) \end{bmatrix}.$$

Esta matriz $[Id]_{\beta_x \beta_y} = \left[\frac{\partial x^i}{\partial y^j}(p) \right]_{n \times n}$ también la denotaremos por $J_{\varphi,\psi}(p)$.

Sean N un n-manifold, M un m-manifold y $f : N \to M$ una función suave. Entonces f induce en forma natural un $\mathbb{R}$-homomorfismo $f_{*p} : T_p N \to T_{f(p)} M$ de la siguiente manera: si $h : V_{f(p)} \to \mathbb{R}$ es suave, donde $V_{f(p)}$ es un abierto de M que contiene a $f(p)$ y $D \in T_p(N)$, entonces $f_{*p}(D)(h) = D(h \circ f)$. f_{*p} se denomina la diferencial de f en p.

Sean $\varphi : U_p = f^{-1}(V_{f(p)}) \to \widetilde{U}$, $\psi : V_{f(p)} \to \widetilde{V}$, $\varphi = (x^1, \ldots, x^n)$, $\psi = (y^1, \ldots, y^m)$ cartas alrededor de p y $f(p)$ respectivamente. Veamos cuál es la matriz de cambio de base $[f_{*p}]_{\beta_M, \beta_N}$, donde $\beta_N = \{ \frac{\partial}{\partial x^1}\big|_p, \ldots, \frac{\partial}{\partial x^n}\big|_p \}$ y $\beta_M = \{ \frac{\partial}{\partial x^1}\big|_p, \ldots, \frac{\partial}{\partial x^n}\big|_p \}$. Sea $D'_j = f_{*p}(\frac{\partial}{\partial x^j})|_p$. Por definición $D'_j(h) = \frac{\partial}{\partial x^j}(h \circ f)(p)$. Del lema 2.1 tenemos

$$D'_j = D'\left(y^1\right) \left.\frac{\partial}{\partial y^1}\right|_p + \cdots + D'\left(y^n\right) \left.\frac{\partial}{\partial y^n}\right|_p .$$

Por tanto $D'_j\left(y^j\right) = \frac{\partial}{\partial x^j}\left(y^i \circ f\right)(p)$. Si denotamos por $f^i = y^i \circ f$, entonces

$$D^j = \frac{\partial f^1}{\partial x^j}(p)\left.\frac{\partial}{\partial y^1}\right|_p + \cdots + \frac{\partial f^n}{\partial x^j}(p)\left.\frac{\partial}{\partial y^n}\right|_p .$$

Luego

$$[df\,(p)]_{\beta_M,\beta_N} = \left[\frac{\partial f^i}{\partial x^j}(p)\right]_{\substack{i=1,\cdots,m\\ j=1,\cdots,n}} .$$

2.2. Formas diferenciales

Sean V y W espacios vectoriales reales con bases $\beta_V = \{v_1,\ldots,v_n\}$ y $\beta_W = \{w_1,\ldots,w_n\}$ respectivamente. El dual de V, V^*, se define como $V^* = Hom_{\mathbb{R}}(V,\mathbb{R})$, el conjunto de funcionales en V con las operaciones estándar. Cada base $\beta_V = \{v_1,\ldots,v_n\}$ para V induce una base para V^*, llamada *base dual*, $\beta_V^* = \{v_1^*,\ldots,v_n^*\}$, con $v_i^* : V \to \mathbb{R}$, el operador $\mathbb{R}$-lineal dado por:

$$v_i^*(v_j) = \begin{cases} 1, & \text{si } j = i \\ 0, & \text{si } j \neq i. \end{cases}$$

Si $f : V \to W$ es una transformación lineal, f induce otra transformación lineal $f^* : W^* \to V^*$ dada por $f^*(\lambda) = \lambda \circ f$, donde λ es un elemento de W^*. Es fácil ver que si $A = [f]_{\beta_W,\beta_V}$ es la matriz de cambio de base respecto a f en las bases dadas, entonces la matriz de cambio de base respecto a f^*, en las bases dadas, es $A^* = [f^*]_{\beta_V^*,\beta_W^*}$, la transpuesta de A.

Para cada $k \geq 0$, f induce una transformación lineal $\wedge^k f : \wedge^k V \to \wedge^k W$ dada por (para la definición de los productos exteriores y sus propiedades ver [5] Pág 15)

$$\wedge^k(f)(v_{i_1} \wedge \cdots \wedge v_{i_k}) = f(v_{i_1}) \wedge \cdots \wedge f(v_{i_k})$$

tal que $\wedge^k(g \circ f) = \wedge^k(g) \circ \wedge^k(f)$, y $\wedge^k(\mathrm{Id}) = \mathrm{Id}$.

Sean las bases en orden lexicográfico

$$\wedge^k \beta_V = \{v_{i_1} \wedge \cdots \wedge v_{i_k} : 1 \leq i_1 < \ldots < i_k \leq n\}$$

y

$$\wedge^k \beta_W = \{w_{j_1} \wedge \cdots \wedge v_{j_k} : 1 \leq j_1 < \ldots < j_k \leq n\}.$$

Entonces, se puede probar que(ver [5] pág 15)

$$[\wedge^k f]_{\wedge^k \beta_W, \wedge^k \beta_V} = [a_{\mathbf{I},\mathbf{J}}],$$

donde $\mathbf{I} = (i_1, \ldots, i_k)$, con $1 < i_1 < \cdots < i_k$, $\mathbf{J} = (j_1, \ldots, j_k)$, $1 < j_1 < \cdots < j_k$, y $a_{\mathbf{I},\mathbf{J}} = det(A_{\mathbf{I},\mathbf{J}})$, donde $(A_{\mathbf{I},\mathbf{J}})_{kk}$ es la matriz que se obtiene seleccionando las filas $\{i_1, \ldots, i_k\}$ y las columnas $\{j_1, \ldots, j_k\}$ de la matriz A.

Definición 2.10. *Sea M un n-manifold suave. Para cada $p \in M$ sean $T_p(M)$ el espacio tangente y $T_p^*(M)$ su dual. Para cada entero $0 \leq k \leq n$,una k-forma en un abierto $U \subset M$ es una función*

$$\omega : U \to \dot{\bigcup}_{p \in U} \wedge^k T_p^*(M)$$

que satisface $\omega(q) \in \wedge^k T_q(M)^*$ para todo $q \in U$, junto con la propiedad siguiente: para cada $p \in U$, existe un entorno $U_p \subset U$, una carta $\varphi : U_p \to \mathbb{R}^n$, $\varphi = (x^1, \ldots, x^n)$ y funciones suaves $f_\alpha : U_p \to \mathbb{R}$ tales que para todo $q \in U_p$

$$\omega(q) = \sum_\alpha f_\alpha(q) dx^{i_1}|_q \wedge \cdots \wedge dx^{i_k}|_q,$$

donde $\{dx^1|_q, \ldots, dx^n|_q\}$ denota la base dual de $\{\frac{\partial}{\partial x^1}|_q, \ldots, \frac{\partial}{\partial x^n}|_q\}$.

Nota. *De ahora en adelante, se omitirá por brevedad el símbolo $|_q$ cuando no haya lugar a confusión.*

Sea ω una forma definida en $U \subset M$ abierto, M un n- manifold suave. Supongamos que $U' \subset U$ es un abierto y $\varphi : U' \to \mathbb{R}^n$, $\psi : U' \to \mathbb{R}^n$ con $\varphi = (x^1, \ldots, x^n)$ y $\psi = (y^1, \ldots, y^n)$ cartas tales que $\omega|_{U'} = \sum f_I dx^I$ y $\omega|_{U'} = \sum g_J dy^J$, con $\mathbf{I} = (i_1, \ldots, i_k)$, $dx^{\mathbf{I}} = dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k}$ y en forma análoga para $\mathbf{J}$ y $dy^{\mathbf{J}}$. En cada $p \in U'$ hay dos bases para $T_p(M)$: $\beta_x = \{\frac{\partial}{\partial x^1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x^n}\}$ y $\beta_y = \{\frac{\partial}{\partial y^1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial y^n}\}$. Sabemos que

$$[\mathrm{Id}]_{\beta_y, \beta_x} = \left[\frac{\partial y^i}{\partial x^j}\right]_{n \times n}.$$

Pasando a los espacios duales obtenemos

$$[\mathrm{Id}]_{\beta_x^*, \beta_y^*} = \left[\frac{\partial y^i}{\partial x^j}\right]_{n \times n}^T,$$

donde $\beta_x^* = \{dx^{\mathbf{J}} : \mathbf{J} = (j_1, \ldots, j_k)\}$ y $\beta_y^* = \{dx^{\mathbf{I}} : \mathbf{I} = (i_1, \ldots, i_k)\}$. Entonces $\omega(p) = \sum_{\mathbf{J}} g_{\mathbf{J}}(p) dy^{\mathbf{J}}|_p$ y $dy^{\mathbf{J}}|_p = \sum_{\mathbf{I}} det(A_{\mathbf{I},\mathbf{J}}) dx^{\mathbf{J}}|p$, donde $A_{\mathbf{I},\mathbf{J}}$ se obtiene seleccionando las filas $\{i_1, \ldots, i_k\}$ y las columnas $\{j_1, \ldots, j_k\}$. Por tanto

$$\omega|_{U'} = \sum_{\mathbf{J}} (\sum_{\mathbf{I}} det(A_{\mathbf{I},\mathbf{J}}) g_{\mathbf{J}} dx^{\mathbf{J}}|p) = \sum_{\mathbf{I}} (\sum_{\mathbf{J}} det(A_{\mathbf{I},\mathbf{J}}) g_{\mathbf{J}}) dx^{\mathbf{J}}|p$$

Luego $f_{\mathbf{I}} = \sum_{\mathbf{J}} det(A_{\mathbf{I},\mathbf{J}}) g_{\mathbf{J}}$.

si ω es una n-forma en U y $U = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha) : \alpha \in A\}$ un atlas tal que $\omega|_{U_\alpha} = f_\alpha dx_\alpha^1 \wedge \cdots \wedge dx_\alpha^n$, entonces en $U_\alpha \cap U_\beta$ se tiene que

$$f_\alpha = f_\beta det J_{\varphi_\beta, \varphi_\alpha} \tag{2.1}$$

De lo anterior vemos que, dar una n-forma en U equivale a dar una colección de funciones suaves $\{f_\alpha; f_\alpha \in C^\infty(U_\alpha)\}$ tales que en $U_\alpha \cap U_\beta$ se cumpla (2.1).

Denotaremos por $\Omega^k(U)$ con $0 \le k \le n$, $U \subset M$ al espacio de k-formas en U.

2.2.1. Pullback de k-formas diferenciales

Sean M y N manifolds suaves y $f : N \to M$ una función suave. Sea $p \in N$, $q = f(p)$ y $f_{*p} : T_p(N) \to T_q(M)$ la diferencial de f en p. El operador f_{*p} induce una transformación lineal, $g_p = \wedge^k (f_{*p})^* : \wedge^k T_q^*(M) \to \wedge^k T_p^*(N)$, (ver [5] Pág 15). Si $U \subset M$ es un abierto, definamos

$$f^* : \Omega_M^k(U) \to \Omega_N^k(f^{-1}(U)) \tag{2.2}$$

como la función que envía a $\omega \in \Omega^k(U)$ en la forma $f^*\omega$, en $f^{-1}(U)$, que está definida por $(f^*\omega)(p) = g_p(\omega(q))$. La función f^* se llama el *pullback determinado por* f. La siguiente proposición nos muestra algunas propiedades básicas del pullback.

Proposición 2.2. *Sean N un n-manifold, M un m-manifold, $f : N \to M$ una función suave, ω y θ k-formas diferenciales en M y h una función suave en M. Entonces*

1. $f^*(\omega + \theta) = f^*\omega + f^*\theta$.

2. $f^*(h\omega) = (h \circ f)\, f^*\omega$.

3. *Sean $(V, \varphi = (x^1, \ldots, x^n))$ y $(U, \psi = (y^1, \ldots, y^m))$ cartas con $V \subset N$, $U \subset M$ y $f(V) \subset U$. Denotemos por $f^j(x^1, \ldots, x^n)$, $j = 1, \ldots, m$, a las coordenadas de f en estas cartas y por $(Jf_{\psi,\varphi})^* = [\partial f^j / \partial x^i]_{n\times m}$ a la transpuesta de la matriz jacobiana. Si $\omega \in \Omega_M^k(U)$ se escribe en estas coordenadas como $\omega = \sum_{\mathbf{J}_k} \omega_{\mathbf{J}_k}\, dy^{\mathbf{J}_k}$, entonces $f^*\omega$ está dada en V por*

$$f^*\omega = \sum_{\mathbf{I}_k, \mathbf{J}_k} (\omega_{\mathbf{J}_k} \circ f)\ \det(((Jf_{\psi,\varphi})^*)_{\mathbf{I}_k \mathbf{J}_k})\ dx^{\mathbf{I}_k}.$$

Demostración. Las propiedades 1 y 2 se siguen directamente de la definición de f^*. Denotemos por $\mathcal{B}_\varphi^* = \{dx^1, \ldots, dx^n\}$, $\mathcal{B}_\psi^* = \{dy^1, \ldots, dy^m\}$ a las bases duales de las bases asociadas a las cartas.

$$\wedge^k \mathcal{B}_{\varphi,p}^* = \{dx^{\mathbf{I}_k}|_p : \mathbf{I}_k \text{ multiíndice ordenado sin repetición}\}$$

y

$$\wedge^k \mathcal{B}^*_{\psi,f(p)} = \left\{ dy^{\mathbf{J}_k}|_{f(p)} : \mathbf{J}_k \text{ multiíndice ordenado sin repetición} \right\}$$

son bases para $\wedge^k T^*_p(N)$ y $\wedge^k T^*_{f(p)}(M)$ en $p \in V$ y $f(p) \in U$, respectivamente , (ver [5] pág 12). Además, con respecto a estas bases la matriz asociada a la transpuesta de la diferencial f_{*p} es precisamente $(Jf_{\psi,\varphi}(p))^*$ y por consiguiente la matriz $C(p)$, que corresponde a la transformación lineal $g_p = \wedge^k (f_{*p})^*$, tiene como entrada $(\mathbf{I}_k, \mathbf{J}_k)$ al elemento $C(p)_{\mathbf{I}_k\mathbf{J}_k} = \det((Jf_{\psi,\varphi}(p))^*{}_{\mathbf{I}_k\mathbf{J}_k})$, (ver [5], pág 12). Explícitamente,

$$C(p)_{\mathbf{I}_k\mathbf{J}_k} = \det \begin{bmatrix} \partial f^{j_1}/\partial x^{i_1}(p) & \cdots & \partial f^{j_k}/\partial x^{i_1}(p) \\ \vdots & & \vdots \\ \partial f^{j_1}/\partial x^{i_k}(p) & \cdots & \partial f^{j_k}/\partial x^{i_k}(p) \end{bmatrix}$$

La imagen de $dy^{\mathbf{J}_k}|_{f(p)}$ bajo g_p viene dada por la columna $\mathbf{J}_k$ de la matriz $\binom{n}{k} \times \binom{m}{k}$, $C(p)_{\mathbf{I}_k\mathbf{J}_k}$, que expresada a su vez en términos de la base $\wedge^k \mathcal{B}^*_{\varphi,p}$ corresponde al vector $g_p(dy^{\mathbf{J}_k}|_{f(p)}) = \sum_{\mathbf{I}_k} C(p)_{\mathbf{I}_k\mathbf{J}_k} dx^{\mathbf{I}_k}|_p$. De aquí se sigue que

$$\begin{aligned} f^*\left(\sum_{\mathbf{J}_k} \omega_{\mathbf{J}_k} dy^{\mathbf{J}_k}\right) &= \sum_{\mathbf{J}_k} (\omega_{\mathbf{J}_k} \circ f) f^*(dy^{\mathbf{J}_k}) \\ &= \sum_{\mathbf{J}_k} (\omega_{\mathbf{J}_k} \circ f) \sum_{\mathbf{I}_k} \det((Jf_{\psi,\varphi})^*{}_{\mathbf{I}_k\mathbf{J}_k}) dx^{\mathbf{I}_k} \\ &= \sum_{\mathbf{J}_k,\mathbf{I}_k} (\omega_{\mathbf{J}_k} \circ f) \det((Jf_{\psi,\varphi})^*{}_{\mathbf{I}_k\mathbf{J}_k}) dx^{\mathbf{I}_k}, \end{aligned}$$

lo cual concluye la demostración de la proposición. □

2.2.2. Derivación de formas

Sean $(U, \varphi = (x^1, \ldots, x^n))$ coordenadas en $U \subset M$ un n-manifold y $f \in C^\infty(U)$. Definimos

$$d_x f = \frac{\partial f}{\partial x^1} dx^1 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x^n} dx^n.$$

Si $\psi = (y^1, \ldots, y^n)$ es otro sistema de coordenadas en U, se tiene que $d_y f = \frac{\partial f}{\partial y^1} dy^1 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial y^n} dy^n$. Ahora $dy^i = \frac{\partial y^i}{\partial x^1} dx^1 + \cdots + \frac{\partial y^i}{\partial x^n} dx^n$. Por tanto

$$\begin{aligned} d_y f &= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial y^i} dy^i = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial y^i} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial y^i}{\partial x^j} dx^j \\ &= \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial y^i} \frac{\partial y^i}{\partial x^j} dx^j = \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial y^i} \frac{\partial y^i}{\partial x^j} \right) dx^j. \end{aligned}$$

Del lema 2.1 se tiene que $\frac{\partial f}{\partial x^i} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial y^i}{\partial x^j} \frac{\partial f}{\partial y^i}$. Por lo tanto $d_y f = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x^j} dx^j = d_x$. Luego si hacemos $d = d_x$, vemos que $d : \Omega^0(U) \to \Omega^1(U)$ no depende de la carta; es decir, el operador diferencial está bien definido. Las siguientes son sus propiedades más esenciales:

Proposición 2.3. *Sea M un n-manifold, para cada $(U, \varphi = (x^1, \ldots, x^n))$ existe un único operador $\mathrm{d} : \Omega^p(U) \to \Omega^{p+1}(U)$ tal que:*

1. *Si $f \in \Omega^0(U) = C^\infty(U)$, entonces $\mathrm{d}f$ coincide con el operador definido arriba.*

2. *$\mathrm{d}(\alpha\omega_1 + \omega_2) = \alpha \mathrm{d}\omega_1 + \mathrm{d}\omega_2$ para todo $\alpha \in \mathbb{R}$ y para todo $\omega_1, \omega_2 \in \Omega^p(U)$.*

3. *$\mathrm{d} \circ \mathrm{d} = 0$.*

Demostración. Ver [5] pág 164. □

2.2.3. Complejo de De Rham

Definición 2.11. *Sea M un n-manifold. El complejo de De Rham de M es el complejo de $\mathbb{R}$-espacios vectoriales $\{\Omega^k(M), \mathrm{d}^k\}_{k \geq 0}$*

$$0 \longrightarrow \Omega^0(M) \xrightarrow{\mathrm{d}^0} \Omega^1(M) \xrightarrow{\mathrm{d}^1} \cdots \xrightarrow{\mathrm{d}^{k-1}} \Omega^k(M) \xrightarrow{\mathrm{d}^k} \cdots$$

Su homología

$$H_k(M) = \frac{ker(\Omega^k(M) \to \Omega^{k+1}(M))}{Im(\Omega^{k-1}(M) \to \Omega^k(M))}$$

se llama la cohomología de De Rham del manifold M y se denota por $H^k_{DR}(M)$.

Definición 2.12. *Sea M un n-manifold y sea $U \subset M$ un abierto. Una k-forma $\omega \in \Omega^k(U)$ se dice que es cerrada si $\mathrm{d}\omega = 0$ y se dice que es exacta si $\omega = 0$, en el caso $k = 0$, o si existe una $(k-1)$-forma $\eta \in \Omega^{k-1}(U)$ tal que $\mathrm{d}\eta = \omega$, si $k \geq 1$.*

Las k-formas cerradas y las k-formas exactas en U forman espacios vectoriales reales, a los que denotaremos por $Z^k(U)$ y $B^k(U)$, respectivamente.

Ejemplo 2.4. Si M es conexo, entonces

$$\begin{aligned} \mathrm{H}^0_{DR}(M) &= Z^0(M)/B^0(M) = \left\{f \in \Omega^0(M) : \mathrm{d}f = 0\right\}/0 \\ &= \left\{f \in \Omega^0(M) : \mathrm{d}f = 0\right\}. \end{aligned}$$

Luego*, del ejemplo se tiene que* $\mathrm{H}^0_{DR}(M)$ consta de todas las funciones con valores reales localmente constantes. Como M es conexo, toda función localmente constante es constante y, por consiguiente, $\mathrm{H}^0_{DR}(M)$ puede identificarse con $\mathbb{R}$.

Proposición 2.5. *Sean M y N manifolds suaves y sea $f : M \to N$ una función suave. Entonces para cada abierto U en N y $\omega \in \Omega^k_N(U)$, se tiene que $f^*\mathrm{d}\omega = \mathrm{d}(f^*\omega)$.*

Demostración. Demostrar la igualdad de estas dos formas es un problema local. Sin pérdida de generalidad, supongamos que $(U, (y^1, \ldots, y^n))$ es una carta de N y $(V, (x^1, \ldots, x^m))$ una carta de M, tal que $f(V) \subset U$. En primer lugar, si $h \in \Omega^0_N(U)$, su derivada exterior es igual a $\mathrm{d}h = \sum_{j=1}^n \partial h/\partial y^i \; dy^j$ y

$$f^*(\mathrm{d}h) = \sum_{\substack{i=1,\ldots,m \\ j=1,\ldots,n}} \frac{\partial f^j}{\partial x^i} \frac{\partial h}{\partial y^j} dx^i.$$

Por otro lado,

$$\mathrm{d}\left(f^{*}h\right) = \mathrm{d}\left(h \circ f\right) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial\left(h \circ f\right)}{\partial x^{i}} dx^{i} = \sum_{\substack{i=1,\ldots,m \\ j=1,\ldots,n}} \frac{\partial h}{\partial y^{j}} \frac{\partial f^{j}}{\partial x^{i}} dx^{i}.$$

Luego la afirmación es cierta para 0-formas. Sea ahora ω una k-forma en U. Como $f^{*}(dy^{j}) = \mathrm{d}\left(f^{*}y^{j}\right)$, se sigue que

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}\left(f^{*}\omega\right) &= \mathrm{d}(f^{*}\sum_{\mathbf{J}_k} \omega_{j_1 \ldots j_k} dy^{j_1} \wedge \cdots \wedge dy^{j_k}) \\
&= \mathrm{d}(\sum_{\mathbf{J}_k} f^{*}\omega_{j_1 \ldots j_k} \left(f^{*}dy^{j_1}\right) \wedge \cdots \wedge \left(f^{*}dy^{j_k}\right)) \\
&= \mathrm{d}(\sum_{\mathbf{J}_k} f^{*}\omega_{j_1 \ldots j_k} \mathrm{d}\left(f^{*}y^{j_1}\right) \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}\left(f^{*}y^{j_k}\right)) \\
&= \sum_{\mathbf{J}_k} \mathrm{d}\left(f^{*}\omega_{j_1 \ldots j_k}\right) \wedge \mathrm{d}\left(f^{*}y^{j_1}\right) \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}\left(f^{*}y^{j_k}\right) \\
&= \sum_{\mathbf{J}_k} f^{*}\mathrm{d}\omega_{j_1 \ldots j_k} \wedge \left(f^{*}dy^{j_1}\right) \wedge \cdots \wedge \left(f^{*}dy^{j_k}\right) \\
&= f^{*}(\sum_{\mathbf{J}_k} \mathrm{d}\omega_{j_1 \ldots j_k} \wedge dy^{j_1} \wedge \cdots \wedge dy^{j_k}) \\
&= f^{*}\mathrm{d}\omega,
\end{aligned}$$

(donde $\mathbf{J}_k$ denota el multiíndice $1 \leq j_1 < \cdots < j_k \leq m$), como queríamos demostrar.

□

2.2.4. Invarianza homotópica de la cohomología

Si M y N son manifolds suaves y $f : M \to N$ es una función suave, el pullback $f^{*} : \Omega^{k}_{N}(N) \to \Omega^{k}_{M}(M)$ es una transformación lineal para cada $k \geq 0$. Si convenimos en definir el pullback f^{*} como la transformación lineal cero cuando $k < 0$, entonces la colección de todos los pullbacks hace conmutar los diagramas

$$\begin{array}{ccc} \Omega^k_N(N) & \xrightarrow{f^*} & \Omega^k_M(M) \\ \mathrm{d}\downarrow & & \mathrm{d}\downarrow \\ \Omega^{k+1}_N(N) & \xrightarrow{f^*} & \Omega^{k+1}_M(M) \end{array}$$

y por tanto, definen un morfismo de complejos de espacios vectoriales. Por otro lado, si $f : M \to N$ y $g : N \to P$ son suaves, entonces $(g \circ f)^* = f^* \circ g^*$ y si Id es la identidad de M, entonces Id^* es la identidad de $\Omega^k_M(M)$. En particular, si f es un difeomorfismo, f^* es un isomorfismo de complejos y $(f^{-1})^* = (f^*)^{-1}$. Por consiguiente, el morfismo f^* induce una transformación lineal, que denotaremos nuevamente por f^* o por f^k, si se quiere hacer énfasis en el entero k. Esto demuestra el siguiente lema.

Lema 2.6. *Sea k un entero fijo. La correspondencia H^k_{DR} que asigna a cada manifold M la k-ésima cohomología de De Rham, $\mathrm{H}^k_{DR}(M)$ y asigna a cada función suave $f : M \to N$ entre manifolds la transformación lineal*

$$\mathrm{H}^k_{DR}(f) = f^k : \mathrm{H}^k_{DR}(N) \to \mathrm{H}^k_{DR}(M),$$

define un functor contravariante de la categoría de manifolds suaves y funciones suaves a la categoría de espacios vectoriales reales (de dimensión no necesariamente finita) y transformaciones lineales.

Definición 2.13. *Sean M y N manifolds suaves. Dos funciones suaves $f, g : M \to N$ se llaman homotópicas si existe una función suave $F : M \times \mathbb{R} \to N$ tal que*

$$F(p,t) = f(p), \quad si\ t \leq 0$$
$$F(p,t) = g(p), \quad si\ t \geq 1,$$

para todo $p \in M$. En este caso escribiremos $f \sim g$. La función F es llamada una homotopía entre f y g. Una función suave $f : M \to N$ se denomina una equivalencia homotópica si existe una función suave $g : N \to M$ tal que $f \circ g \sim Id_N$ y $g \circ f \sim Id_M$.

Nuestro objetivo próximo es demostrar la *invarianza homotópica de la cohomología de De Rham*: si dos funciones suaves $f, g : M \to N$ son homotópicas entonces inducen el mismo homomorfismo en los grupos de cohomología: $f^k = g^k : \mathrm{H}^k_{DR}(N) \to \mathrm{H}^k_{DR}(M)$, para todo $k \geq 0$.

Sea M un manifold, denotemos por $\pi_M : M \times \mathbb{R} \to M$ y $\pi_{\mathbb{R}} : M \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a las proyecciones en cada factor y por $s : M \to M \times \mathbb{R}$ a la función definida por $s(p) = (p, 0)$. Obviamente, $\pi_M \circ s = Id_M$, y en consecuencia la compuesta

$$\mathrm{H}^k_{DR}(M) \xrightarrow{\pi_M^*} \mathrm{H}^k_{DR}(M \times \mathbb{R}) \xrightarrow{s^*} \mathrm{H}^k_{DR}(M)$$

es la identidad en $\mathrm{H}^k_{DR}(M)$. Por otro lado, si bien no es cierto, en general, que $\pi_M^*(s^*(\omega)) = \omega$, sí es cierto que $\pi_M^k \circ s^k$ es la identidad en $\mathrm{H}^k_{DR}(M \times \mathbb{R})$. Este último hecho lo daremos por cierto y para su demostración se puede consultar en [5], pág 189.

Teorema 2.7. *Sean M y N manifolds y sean $f, g : M \to N$ funciones suaves homotópicas. Entonces $f^k = g^k : \mathrm{H}^k_{DR}(N) \to \mathrm{H}^k_{DR}(M)$, para todo $k \geq 0$.*

Demostración. Supongamos que $F : M \times \mathbb{R} \to N$ es una homotopía entre f y g, es decir, F es una función suave tal que

$$F(p,t) = \begin{cases} f(p) & , \ t \leq 0 \\ g(p) & , \ t \geq 1, \end{cases}$$

para todo $p \in M$. Sean $s_0, s_1 : M \to M \times \mathbb{R}$, definidas como $s_0(p) = (p, 0)$ y $s_1(p) = (p, 1)$. Claramente, $F \circ s_0 = f$ y $F \circ s_1 = g$. Por lo tanto $s_0^* \circ F^* = f^*$ y $s_1^* \circ F^* = g^*$. Por otro lado, sabemos que $\pi_M \circ s_0 = \pi_M \circ s_1 = \mathrm{Id}_M$ y, por consiguiente, $s_0^* \circ \pi_M^* = s_1^* \circ \pi_M^* = \mathrm{Id}$. Como π_M^* es invertible, con inversa $(\pi_M^*)^{-1} = s_0^*$, se sigue que $s_0^* = s_1^*$, y por lo tanto, que $f^* = g^*$. $\square$

Corolario 2.8. *Si M y N tienen el mismo tipo de homotopía, es decir, si existen $f : M \longrightarrow N$ y $g : N \longrightarrow M$ tales que $f \circ g$ y $g \circ f$ son homotópicas a la función identidad, entonces $\mathrm{H}^k_{DR}(M) \simeq \mathrm{H}^k_{DR}(N)$, para todo $k \geq 0$.*

Definición 2.14. *Una función suave $f : M \to N$ se denomina homotópicamente nula si es homotópica a una función constante. Decimos que un manifold M es contraíble si la identidad en M es homotópicamente nula.*

Corolario 2.9. *Si M es contraíble, entonces $\mathrm{H}^k_{DR}(M) = 0$, para todo entero $k > 0$.*

Demostración. La función constante $c : M \to M$, $c(p) = p_0$, para un punto $p_0 \in M$, es homotópica a Id_M, y por tanto, $c^* = \mathrm{Id}^*_M$. Ahora si $i : \{p_0\} \subset M$ denota la inclusión, se tiene que $i \circ c = c$, de donde se sigue que $c^* \circ i^* = c^*$. Puesto que $\mathrm{H}^k_{DR}(\{p\}) = 0$, para todo $k > 0$, se sigue que $c^k = 0$ y por tanto, $\mathrm{Id}^k_M = \mathrm{Id}_{\mathrm{H}^k_{DR}(M)} = 0$ y en consecuencia $\mathrm{H}^k_{DR}(M) = 0$, para todo $k > 0$. □

Corolario 2.10 (Poincaré)**.** *Toda forma cerrada en un manifold M es localmente exacta. Es decir, todo punto en M admite un entorno abierto U tal que para toda $\omega \in U^k_M(M)$, $k > 0$, con $\mathrm{d}\omega = 0$, existe una $(k-1)$-forma $\alpha \in U^{k-1}_M(U)$ con $\mathrm{d}\alpha = \omega|_U$.*

Demostración. Basta tomar cualquier entorno abierto contraíble U_p de p y aplicar el corolario anterior. □

Corolario 2.11. *La cohomología k-ésima de $\mathbb{R}^n$ es trivial si $k > 0$ y es $\mathbb{R}$ para $k = 0$.*

2.2.5. Secuencia de Mayer-Vietoris para la cohomología de De Rham

Sean U y V dos conjuntos abiertos de un $n-$manifold M (que no necesariamente cubren a M) y consideremos las inclusiones

$$j_U : U \cap V \to U, \quad j_V : U \cap V \to V,$$
$$i_U : U \to U \cup V, \quad i_V : V \to U \cup V.$$

Lema 2.12. *Estas inclusiones dan origen a una secuencia exacta corta*

$$0 \to U_M^{\bullet}(U \cup V) \xrightarrow{\alpha} U_M^{\bullet}(U) \oplus U_M^{\bullet}(V) \xrightarrow{\beta} U_M^{\bullet}(U \cap V) \to 0$$

de complejos de espacios vectoriales, donde

$$\alpha^k(\omega) = (i_U^* \omega, i_V^* \omega) \quad y \quad \beta^k(\omega_1, \omega_2) = j_U^* \omega_1 - j_V^* \omega_2,$$

para todo $\omega_1 \in U_M^k(U)$ y $\omega_2 \in U_M^k(V)$.

Demostración. Debemos mostrar que α^k es inyectivo, que $\ker(\beta^k) = \operatorname{im}(\alpha^k)$ y que β^k es sobreyectivo, para cada k. La primera afirmación es obvia. Puesto que $j_U^* \circ i_U^* = j_V^* \circ i_V^*$, es claro que $\operatorname{im}(\alpha^k) \subset \ker(\beta^k)$. Para ver la otra inclusión, sea $(\omega_1, \omega_2) \in \ker(\beta^k)$. Esto significa que $\omega_1|_{U \cap V} = \omega_2|_{U \cap V}$, y por tanto, estas formas definen una única forma ω en $U \cup V$, que obviamente satisface $\alpha^k(\omega) = (\omega_1, \omega_2)$. Finalmente, veamos que β^k es sobreyectivo. Sea ω una forma en $U \cap V$ y sea $\{\chi_U, \chi_V\}$ una partición de la unidad en $U \cup V$ subordinada a $\{U, V\}$. Definamos $\omega_1 = \chi_V \omega$ y $\omega_2 = \chi_U \omega$. Como χ_V tiene soporte en V, podemos definir una forma en U por

$$\widetilde{\omega}_1 = \begin{cases} \omega_1 \text{ en } U \cap V \\ 0 \ \text{ en } U - V \end{cases}$$

De manera similar podemos definir una forma en V

$$\widetilde{\omega}_2 = \begin{cases} \omega_2 \text{ en } U \cap V \\ 0 \;\; \text{en } V - U. \end{cases}$$

Es claro que $\beta^k(\widetilde{\omega}_1, -\widetilde{\omega}_2) = \omega_1 + \omega_2 = \omega$. $\square$

Del lema 1.10 (Zig-Zag) se sigue directamente el siguiente teorema.

Teorema 2.13 (Secuencia de Mayer-Vietoris)**.** *Si U y V son abiertos en M, existe una secuencia exacta larga*

$$\begin{aligned} 0 \to \mathrm{H}^0_{DR}(U \cup V) \stackrel{\alpha^0}{\to} \mathrm{H}^0_{DR}(U) \oplus \mathrm{H}^0_{DR}(V) \stackrel{\beta^0}{\to} \mathrm{H}^0_{DR}(U \cap V) \stackrel{\delta^0}{\to} \\ \cdots \to \mathrm{H}^k_{DR}(U \cup V) \stackrel{\alpha^k}{\to} \mathrm{H}^k_{DR}(U) \oplus \mathrm{H}^k_{DR}(V) \stackrel{\beta^k}{\to} \mathrm{H}^k_{DR}(U \cap V) \stackrel{\delta^k}{\to} \cdots \end{aligned} \tag{2.3}$$

La secuencia exacta (2.3) es conocida como la *secuencia de Mayer-Vietoris* del par U, V. Como aplicación del teorema anterior, veamos cómo computar la cohomología de S^n, la esfera n-dimensional.

Para $n \geq 1$ tenemos que

$$\mathrm{H}^k_{DR}(S^n) \simeq \begin{cases} \mathbb{R} & \textit{si } k = 0,\ n \\ 0 & \textit{en caso contrario} \end{cases}$$

y $H^0_{DR}(S^0) \simeq \mathbb{R}^2,\ H^k_{DR}(S^0) = 0$, si $k > 0$. La afirmación para S^0 es obvia y para S^1 es el resultado del ejercicio 4.4.5 propuesto en [5]. Supongamos que $n \geq 2$. Recordemos que

$$S^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : (x^1)^2 + \cdots + (x^{n+1})^2 = 1\}.$$

En primer lugar, $H^0_{DR}(S^n) = \mathbb{R}$, ya que S^n es conexo. Supongamos que $k > 0$ y denotemos por $N = (0, \ldots, 1) \in S^n$ al "polo norte" de S^n. Fijemos $0 < \epsilon < 1$ y definamos $U = \{x \in S^n : x^{n+1} > -\epsilon\}$ y $V = \{x \in S^n : x^{n+1} < \epsilon\}$. U y V son abiertos que cubren los hemisferios norte y sur, respectivamente, y es fácil ver que son difeomorfos a una bola abierta, y por tanto, contraibles. Luego su cohomología es trivial, excepto en dimensión cero, en cuyo caso es isomorfa a $\mathbb{R}$. Por otro lado, $S^n = U \cup V$ y $U \cap V \simeq S^{n-1} \times (-\epsilon, \epsilon)$ que es homotópicamente equivalente a S^{n-1}. Por el teorema anterior, el siguiente segmento de la secuencia de Mayer-Vietoris es exacto

$$\begin{aligned} \mathrm{H}_{DR}^{k}(U) \oplus \mathrm{H}_{DR}^{k}(V) \to \mathrm{H}_{DR}^{k}(U \cap V) \xrightarrow{\delta^k} H^{k+1}(S^n) \to \\ \to H^{k+1}(U) \oplus H^{k+1}(V) \end{aligned}$$

y como empieza y termina en espacios vectoriales triviales, tenemos que

$$\mathrm{H}_{DR}^{k}\left(S^{n-1}\right) \overset{\delta^k}{\simeq} \mathrm{H}^{k+1}(S^n) \tag{2.4}$$

es un isomorfismo, para $k > 0$ y $n \geq 2$.

Ahora, consideremos el segmento inicial de la secuencia de Mayer-Vietoris

$$\begin{aligned} 0 \to \mathrm{H}_{DR}^{0}(S^n) \xrightarrow{\alpha^0} \mathrm{H}_{DR}^{0}(U) \oplus \mathrm{H}_{DR}^{0}(V) \xrightarrow{\beta^0} \mathrm{H}_{DR}^{0}(U \cap V) \xrightarrow{\delta^0} \\ \xrightarrow{\delta^0} \mathrm{H}_{DR}^{1}(S^n) \xrightarrow{\alpha^1} \mathrm{H}_{DR}^{1}(U) \oplus \mathrm{H}_{DR}^{1}(V) \end{aligned}$$

Por la exactitud, tenemos que α^0 es inyectiva. Luego $\dim \ker(\beta^0) = 1$ y por consiguiente β^0 es sobreyectiva, lo que implica que $\delta^0 = 0$. Pero $H_{DR}^1(U) \simeq H_{DR}^1(V) = 0$ y por tanto, $H_{DR}^1(S^n) = 0$, para $n \geq 2$. Como $H_{DR}^k(S^1) = 0$, para $k > 1$ y $H_{DR}^0(S^1) \simeq H_{DR}^1(S^1) \simeq R$, las relaciones (2.4) implican, por inducción sobre n, el resultado.

Capítulo 3

Sheaves y cohomología de Cech relativa a un cubrimiento

3.1. Sheaves

Definición 3.1. *Una presheaf F de grupos abelianos, en un espacio topológico X, es una funci ón que asigna, a cada conjunto U abierto en X, un grupo abeliano $F(U)$, tal que si U es el conjunto vacío, entonces $F(U) = 0$ y a cada inclusión de conjuntos abiertos $i_U^V : V \to U$, un homomorfismo de grupos, llamado restricción $\rho_{VU} : F(U) \to F(V)$ que satisface las siguientes condiciones:*

1. *Para todo abierto U, ρ_{UU} es el homomorfismo identidad.*

2. *Si $W \subset V \subset U$son abiertos, $\rho_{WU} = \rho_{WV} \circ \rho_{VU}$.*

Los elementos de $F(U)$ se denominan secciones de F en U y los de $F(X)$ secciones globales. Llamaremos a los homomorfismos ρ_{VU} homomorfismos restricción y escribiremos $s|_V$ en lugar de $\rho_{VU}(s)$, si $s \in F(U)$.

Ejemplo 3.1. *La presheaf constante con grupo G es la presheaf F que asocia a cada abierto U las funciones localmente constantes: $U \to G$ y a cada inclusión de abiertos $V \subset U$ la retricción de funciones: $F(U) \to F(V)$. Por abuso de notación, la presheaf constante con grupo $\mathbb{R}$ se denotará también por $\mathbb{R}$.*

Definición 3.2. *Una presheaf F en un espacio topológico X es una sheaf, si para cualquier abierto $U \subset X$ y para cualquier cubrimiento abierto $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ de U se satisface la siguiente condición: si $\{s_\alpha \in A : s_\alpha \in F(U_\alpha)\}$, es una colección de secciones tales que $s_\alpha|_{U_\alpha \cap U_\beta} = s_\beta|_{U_\alpha \cap U_\beta}$, para todo U_α y U_β, entonces existe una única sección $s \in F(U)$ tal que $s_\alpha = s|_{U_\alpha}$ en cada U_α.*

Sean M un manifold y $F = \Omega^k$, para $U \subset M$ abierto $F(U) = \Omega^k(U)$, entonces F es una sheaf con la restricción usual en las k-formas (ver [5] pág 156).

3.2. Cohomología de Cech

Definición 3.3. *Sean X un espacio topológico, F una presheaf de grupos abelianos y $U = \{U_\alpha : \alpha \in A\}$ un cubrimiento de X, donde A es un conjunto totalmente ordenado. Denotaremos a la intersección $U_{\alpha_0} \cap \cdots \cap U_{\alpha_p}$ por $U_{\alpha_0 \cdots \alpha_p}$. Para cada $p \geq 0$, sea*

$$C^p(U, F) = \prod_{\alpha_0 < \cdots < \alpha_p} F(U_{\alpha_0 \ldots \alpha_p}).$$

A un elemento $w \in C^p(U, F)$ lo representaremos por $w = (w_{\alpha_0 \ldots \alpha_p})$, $w_{\alpha_0 \ldots \alpha_p} \in F(U_{\alpha_0 \ldots \alpha_p})$.

Nota. *Los índices en $w_{\alpha_0 \ldots \alpha_p}$ son todos en orden creciente. En general, se pueden permitir los índices en cualquier orden, aun con repeticiones, dada la convención $w_{\ldots\alpha\ldots\beta\ldots} = w_{\ldots\beta\ldots\alpha\ldots}$.*

Definición 3.4. *Para cada $p \geq 0$, definimos $\delta^p : C^p(U,F) \to C^{p+1}(U,F)$ de la siguiente manera:*

$$(\delta^p w)_{\alpha_0 \ldots \alpha_{p+1}} = \sum_{i=0}^{p+1} (-1)^i w_{\alpha_0 \ldots \hat{\alpha}_i \ldots \alpha_{p+1}}|_{U_{\alpha_0 \cdots \alpha_{p+1}}}$$

donde $\hat{\alpha}_i$ significa que se ha omitido el índice α_i.

En la notación omitiremos la restricción $|$.

Ejemplo 3.2. *Sean $A = \{0,1,2\}$, $U = \{U_\alpha : \alpha \in A\}$ un cubrimiento de un espacio topológico X y F una sheaf. Consideremos todos los multiíndices $\alpha_0 \ldots \alpha_p$, $\alpha_i \in A$, ordenados de manera creciente.*

$$0 \longrightarrow \prod_{\alpha_0 \in A} F(U_{\alpha_0}) \xrightarrow{\delta_0} \prod_{\alpha_0, \alpha_1 \in A} F(U_{\alpha_0 \alpha_1}) \xrightarrow{\delta_1} \prod_{\alpha_0, \alpha_1 \alpha_2 \in A} F(U_{\alpha_0 \alpha_1 \alpha_2}) \xrightarrow{\delta_2} \cdots$$

Calculemos $ker(\delta^0)$. Sea $w \in ker(\delta^0)$, entonces si $w = (w_{\alpha_0}, w_{\alpha_1}, w_{\alpha_2})$, $w_{\alpha_i} \in F(U_{\alpha_i})$, se tiene que

$$\delta^0 w = (w_{\alpha_1} - w_{\alpha_0}, w_{\alpha_2} - w_{\alpha_0}, w_{\alpha_2} - w_{\alpha_1}) = 0$$

Luego $w_{\alpha_i}|_{U_{\alpha_i \alpha_j}} = w_{\alpha_j}|_{U_{\alpha_i \alpha_j}}$, $i,j \in \{0,1,2\}$. Como F es sheaf existe $s \in F(X)$ tal que $s|_{U_{\alpha_i}} = w_{\alpha_i}$. Ahora, si $s \in F(X)$ y $w = (s|_{U_{\alpha_0}}, s|_{U_{\alpha_1}}, s|_{U_{\alpha_2}})$, entonces $\delta^0 w = 0$. Luego se tiene

$$ker(\delta^0) = \{(w_{\alpha_0}, w_{\alpha_1}, w_{\alpha_2}) \in C^0(U,F) : \{w_{\alpha_i}\}_{i=0}^{2} \text{ define una sección en } F(X),\}$$

esto es, $ker(\delta^0) \simeq F(X)$.

Proposición 3.3. *La composición $\delta \circ \delta = \delta^2$ en*

$$C^p(U,F) \xrightarrow{\delta} C^{p+1}(U,F) \xrightarrow{\delta} C^{p+2}(U,F)$$

es cero.

Demostración. Sean $w \in C^P(U,F)$ y $\eta = \delta w$. Por definición

$$\eta_{\alpha_0 \ldots \alpha_{p+1}} = \sum_{i=0}^{p+1} (-1)^i w_{\alpha_0 \ldots \hat{\alpha}_i \ldots \alpha_{p+1}},$$

luego, como en el caso de la homología singular, tenemos

$$\begin{aligned}
(\delta^2 w)_{\alpha_0 \ldots \alpha_{p+2}} &= (\delta \eta)_{\alpha_0 \ldots \alpha_{p+2}} \\
&= \sum_{j=0}^{p+2} (-1)^j \eta_{\alpha_0 \ldots \hat{\alpha}_i \ldots \alpha_{p+2}} \\
&= \sum_{j=0}^{p+2} (-1)^j \Big[\sum_{j>i} (-1)^i w_{\alpha_0 \ldots \hat{\alpha}_i \ldots \hat{\alpha}_j \ldots \alpha_{p+2}} + \sum_{i>j} (-1)^{i-1} w_{\alpha_0 \ldots \hat{\alpha}_j \ldots \hat{\alpha}_i \ldots \alpha_{p+2}} \Big] \\
&= \sum_{j=0, i<j} (-1)^{i+j} w_{\alpha_0 \ldots \hat{\alpha}_i \ldots \hat{\alpha}_j \ldots \alpha_{p+2}} + \sum_{i<j} (-1)^{i+j-1} w_{\alpha_0 \ldots \hat{\alpha}_j \ldots \hat{\alpha}_i \ldots \alpha_{p+2}} \\
&= -\sum_{i<j} (-1)^{i+j-1} w_{\alpha_0 \ldots \hat{\alpha}_i \ldots \hat{\alpha}_j \ldots \alpha_{p+2}} + \sum_{i<j} (-1)^{i+j-1} w_{\alpha_0 \ldots \hat{\alpha}_i \ldots \hat{\alpha}_j \ldots \alpha_{p+2}} \\
&= 0.
\end{aligned}$$

□

Definición 3.5. *La homología del complejo $\{C^*(U,F), \delta^*\}$ se denomina la cohomología de Cech de X con coeficientes en F, relativa al cubrimiento $U = \{U_\alpha : \alpha \in A\}$ y la denotaremos por $H^*(U,F)$.*

Proposición 3.4. *Sea M un manifold suave y sea $F = \Omega^p$, $p \geq 0$ fijo, la sheaf de p-formas en M. Entonces si $U = \{U_\alpha : \alpha \in A\}$ es un cubrimiento abierto de M se tiene que:*

$$H^i(U, \Omega^p) = \begin{cases} \Omega^p(M), & si\ i = 0 \\ 0, & si\ i > 0 \end{cases}$$

Demostración. El complejo de Cech para F es

$$0 \longrightarrow \prod_{\alpha_0 \in A} \Omega^p(U_{\alpha_0}) \xrightarrow{\delta} \prod_{\alpha_0,\alpha_1 \in A} \Omega^p(U_{\alpha_0\alpha_1}) \longrightarrow \cdots \xrightarrow{\delta} \prod_{\alpha_0,\alpha_1 \in A} \Omega^p(U_{\alpha_0\alpha_1}) \xrightarrow{\delta} \cdots$$

Un elemento de $\prod_{\alpha_0 \in A} \Omega^p(U_{\alpha_0})$ está en el kernel del primer δ si y sólo si sus componentes son iguales en las dobles intersecciones, si y sólo si, es una sección global de F, pues F es sheaf.

Sea ahora $\{\rho_\alpha : \alpha \in A\}$ una partición de la unidad subordinada al cubrimiento U. Supongamos $\omega \in \prod \Omega^p(U_{\alpha_0\ldots\alpha_i})$ es tal que $\delta\omega = 0$. Definamos $\tau \in \prod \Omega^p(U_{\alpha_0\ldots\alpha_{i-1}})$ como

$$\tau_{\alpha_0\ldots\alpha_{i-1}} = \sum_\alpha \rho_\alpha \omega_{\alpha\alpha_0\ldots\alpha_{i-1}},$$

donde, por abuso de notación, $\rho_\alpha\omega_{\alpha\alpha_0\ldots\alpha_{i-1}}$ es en realidad la forma

$$\begin{cases} 0, & \text{en } U_{\alpha\alpha_0\ldots\alpha_{i-1}} - \text{soporte}(\rho_\alpha) \\ \rho_\alpha\omega_{\alpha\alpha_0\ldots\alpha_{i-1}}, & \text{en } U_{\alpha\alpha_0\ldots\alpha_{i-1}}. \end{cases}$$

Por ser $\{\rho_\alpha\}$ una partición de la unidad, $\tau_{\alpha_0\ldots\alpha_{i-1}}$ está bien definida; ahora

$$(\delta\tau)_{\alpha_0\ldots\alpha_i} = \sum_{k=0}^{i} (-1)^k \tau_{\alpha_0\ldots\hat{\alpha_k}\ldots\alpha_i} = \sum_{k,\alpha} (-1)^k \rho_\alpha \omega_{\alpha\alpha_0\ldots\hat{\alpha_k}\ldots\alpha_i}.$$

Como $\delta\omega = 0$, $(\delta\omega)_{\alpha\alpha_0\cdots\alpha_i} = \omega_{\alpha_0\cdots\alpha_i} + \sum_k (-1)^{k+1}\rho_\alpha\omega_{\alpha\alpha_0\ldots\hat{\alpha_k}\ldots\alpha_i} = 0$, y entonces

$$\begin{aligned} (\delta\tau)_{\alpha_0\cdots\alpha_i} &= \sum_\alpha \rho_\alpha \sum_k (-1)^k \omega_{\alpha\alpha_0\ldots\hat{\alpha_k}\ldots\alpha_i} \\ &= \sum_\alpha \rho_\alpha \omega_{\alpha_0\ldots\alpha_i} = \omega_{\alpha_0\ldots\alpha_i}. \end{aligned}$$

□

Capítulo 4

Isomorfismo entre las cohomologías

4.1. Doble complejo

Consideremos el diagrama

$$
\begin{array}{ccccccccc}
 & \vdots & & \vdots & & & & \vdots & \\
 & \uparrow & & \uparrow & & & & \uparrow & \\
0 \to & A^{0,q} & \xrightarrow{\delta} & A^{1,q} & \xrightarrow{\delta} & \cdots & \xrightarrow{\delta} & A^{p,q} & \xrightarrow{\delta} \cdots \\
 & \uparrow d & & \uparrow d & & & & \uparrow d & \\
 & \vdots & & \vdots & & & & \vdots & \\
 & \uparrow d & & \uparrow d & & & & \uparrow d & \\
0 \to & A^{0,1} & \xrightarrow{\delta} & A^{1,1} & \xrightarrow{\delta} & \cdots & \xrightarrow{\delta} & A^{p,1} & \xrightarrow{\delta} \cdots \\
 & \uparrow d & & \uparrow d & & & & \uparrow d & \\
0 \to & A^{0,0} & \xrightarrow{\delta} & A^{1,0} & \xrightarrow{\delta} & \cdots & \xrightarrow{\delta} & A^{p,0} & \to \cdots \\
 & \uparrow & & \uparrow & & & & \uparrow & \\
 & 0 & & 0 & & & & 0 &
\end{array}
$$

El diagrama anterior se llama un doble complejo si cada cuadrado

$$\begin{array}{ccc} A^{p,q+1} & \xrightarrow{\delta} & A^{p+1,q+1} \\ \uparrow d & & \uparrow d \\ A^{p,q} & \xrightarrow{\delta} & A^{p+1,q} \end{array}$$

es conmutativo. Este se denota por $\{A^{p,q}, \delta, d\}_{p,q\geq 0}$.

Dado un doble complejo, definimos el complejo total de $A = \{A^{p,q}, \delta, d\}_{p,q\geq 0}$ como $T^n(A) = \bigoplus_{p+q=n} A^{p,q}$, $n \geq 0$. Definimos $D : T^n(A) \to T^{n+1}(A)$ de la siguiente manera. Si

$$a = \bigoplus_{p+q=n} a^{p,q} \in T^n(A), \quad D(a) = \bigoplus_{p+q=n} \{\delta a^{p,q} + (-1)^p \, d a^{p,q}\}.$$

Proposición 4.1. $\{T^*(A), D^*\}$ *es un complejo.*

Demostración. Sea $a \in T^n(A)$

$$\begin{aligned} D(D(a)) &= D\left(\bigoplus_{p+q=n} \{\delta a^{p,q} + (-1)^p \, d a^{p,q}\}\right) \\ &= \bigoplus_{p+q=n} \left[\delta\delta a^{p,q} + (-1)^{p+1} \, d\delta a^{p,q} + (-1)^p \, \delta d a^{p,q} + (-1)^{2p} \, dd a^{p,q}\right] \\ &= \bigoplus_{p+q=n} \left[(-1)^{p+1} \, d\delta a^{p,q} + (-1)^p \, \delta d a^{p,q}\right] = 0. \end{aligned}$$

□

Proposición 4.2. *Sean* $\{A^{p,q}, \delta, d\}_{p,q\geq 0}$ *un doble complejo y* $\{T^n(A), D = \delta + (-1)^p d\}_{n\geq 0}$ *el complejo total asociado. Supongamos que cada fila*

$$0 \longrightarrow A^{0,q} \xrightarrow{\delta} A^{1,q} \xrightarrow{\delta} \cdots \xrightarrow{\delta} A^{p,q} \xrightarrow{\delta} \cdots$$

es exacta, excepto en $p = 0$. *Esto es, el kernel del primer delta en la secuencia anterior no es necesariamente cero. Entonces, al tomar la homología por filas, el doble complejo se reduce a un doble complejo en que sólo la primera columna es no nula. Además la* *homología de esta columna, con operador d, es isomorfa a la homología del complejo total, es decir, $H_dH_\delta(A^{0,q}) \simeq H^q(T(A))$.*

$$H^q(T(A)) \simeq ker\Big(\; H_\delta(A^{0,q}) \xrightarrow{\;\; d \;\;} H_\delta(A^{0,q+1}) \; \Big)/Im\Big(\; H_\delta(A^{0,q-1}) \xrightarrow{\;\; d \;\;} H_\delta(A^{0,q}) \; \Big)$$

$$H_\delta(A^{p,q}) = ker\Big(\; A^{p,q} \xrightarrow{\;\; \delta \;\;} A^{p+1,q} \; \Big)/Im\Big(\; A^{p-1,q} \xrightarrow{\;\; \delta \;\;} A^{p,q} \; \Big)$$

Demostración. Sea

$$B^q = H_\delta(A^{0,q}) = \ker\Big(\; A^{0,q} \xrightarrow{\;\; \delta \;\;} A^{1,q} \; \Big)$$

$q \geq 0$, con operador d. Veamos que $H^n(B^*) \cong H^n(T^*(A))$. Sean

$$0 \longrightarrow A^{0,q} \xrightarrow{\;\; \delta \;\;} A^{1,q} \xrightarrow{\;\; \delta \;\;} \cdots \xrightarrow{\;\; \delta \;\;} A^{p,q} \xrightarrow{\;\; \delta \;\;} \cdots$$

la n-ésima fila del doble complejo y $H_d^n(B^*)$ la n-ésima homología del complejo $\{B^q, d\}$. Definimos $\phi_n : H_d^n(B^*) \to H^n(T^*(A))$ como $\phi_n(\overline{z_n}) = \overline{(z_n, 0, \ldots, 0)}$ con $\overline{z_n} \in H_d^n(B^*)$. En este caso

$$D(z_n, 0, \ldots, 0) = \delta(z_n) + (-1)^0 dz_n = 0 + 0 = 0,$$

donde $\delta(z_n) = 0$ ya que $z_n \in \ker(\delta)$ y $dz_n = 0$ pues $z_n \in H_d^n(B^*)$.

Afirmación. *Dado un elemento $w_n \in ker(D : T^n(A) \to T^{n+1}(A))$, digamos $w_n = (a_{0,n}, a_{1,n-1}, \ldots, a_{n,0})$, existe $v_n = (b_{0,n}, 0, \ldots, 0)$ tal que $\overline{w_n} = \overline{v_n}$ en $H^n(T^*(A))$, $n > 0$.*

En efecto, si $D(a_{0,n}, a_{1,n-1}, \ldots, a_{n,0}) = 0$, entonces

$$da_{0,n} = 0, \; (-1)da_{1,n-1} + \delta a_{0,n} = 0, \; da_{2,n-2} + \delta a_{1,n-1} = 0, \ldots, \delta a_{n,0} = 0.$$

Como las filas son exactas, excepto en $p = 0$ y $\delta a_{n,0} = 0$, existe un $b \in A^{n-1,0}$, con $\delta b = a_{n,0}$. Sea $\eta = (0, \ldots, b)$, $\eta \in T^{n-1}(A)$ y

$$D\eta = (0, \ldots, (-1)^{n-1}db, \delta b) = (0, \ldots, (-1)^{n-1}db, a_{n,0}).$$

Entonces $\overline{w_n} - \overline{D\eta} = \overline{w_n}$, pues

$$\overline{D\eta} = 0w_n - D\eta = (a_{0,n}, a_{1,n-1}, \ldots, a_{n-1,1} - (-1)^{n-1}db, 0).$$

Claramente $D(w_n - D\eta) = 0$; luego $\delta(a_{n-1,1} - (-1)^{n-1}db) = 0$. Por lo tanto existe $b' \in A^{n-2,1}$ con $\delta b' = a_{n-1,1} - (-1)^{n-1}db$. Si hacemos $\eta' = (0, \ldots, b', 0)$, vemos que $w_n - D\eta - D\eta' = (a_{0,n}, \ldots, 0, 0)$. Podemos continuar de manera similar por inducción, usando la exactitud de todas las filas, con lo cual se sigue la afirmación.

Veamos que ϕ_n es inyectiva. Supongamos que $\phi_n(\overline{z_n}) = \overline{(z_n, 0, \ldots, 0)}$ es la clase del cero en $H_n(T^*(A))$. Existe $\xi = (c_{n-1,0}, \ldots, c_{0,n-1}) \in T^{n-1}(A)$ tal que $D\xi = (z_n, 0, \ldots, 0)$. Esto implica que $\delta c_{n-1,0} = 0$ y $dc_{n-1,0} = z_n$, $c_{n-1,0} \in B^{n-1} = H_\delta(A^{0,n-1})$ y $dc_{n-1,0} = z_n$, $\overline{z_n} = 0$ en $H^n_d(B^*)$.

Veamos que ϕ_n es sobreyectiva. Dado $w_n = (d_n, d_{n-1}, \ldots, d_0) \in T^n(A)$, por la afirmación anterior, existe $v_n = (d'_n, 0, \ldots, 0)$ con $\overline{w_n} = \overline{v_n}$. Sabemos que $Dv_n = 0$, de donde $d(d'_n) = 0$ y $\delta(d'_n) = 0$. Luego $d'_n \in B^n$. Claramente $\overline{\phi_n(d'_n)} = \overline{v_n}$. $\square$

La demostración de la siguiente proposición es análoga a la anterior.

Proposición 4.3. *Sean $\{A^{p,q}, \delta, d\}_{p,q\geq 0}$ un doble complejo y $\{T^n(A), D = \delta + (-1)^p d\}_{n\geq 0}$ el complejo total asociado. Si la homología de cada columna es nula, excepto en la posición $q = 0$, entonces al tomar homología por columnas y luego por filas se obtiene la homología del complejo total, es decir, $H_\delta H_d(A^{p,0}) \simeq H^p(T(A))$.*

4.2. Isomorfismo entre las cohomologías

Definición 4.1. *Sea M un manifold de dimensión n. Un cubrimiento $U = \{U_\alpha\}_{\alpha\in A}$ se denomina un buen cubrimiento si $U_{\alpha_0\ldots\alpha_p} \neq \phi$ es difeomorfo a $\mathbb{R}^n$ para todo $p \geq 0$.*

En la demostración de los resultados principales, se necesitará la existencia de un buen cubrimiento para un manifold suave M.

Teorema 4.4. *Todo Manifold suave M admite un buen cubrimiento.*

Demostración. Ver [1] pág 42. $\square$

Teorema 4.5. *Sean M un manifold suave y $U = \{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ un buen cubrimiento para M. Sea A el doble complejo $\{A^{p,q} = C^p(U, \Omega^q), \delta, d\}_{p,q \geq 0}$.*

$$
\begin{array}{ccccccccc}
 & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \\
 & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \\
0 \rightarrow & & \prod\limits_{\alpha_0} \Omega^q\left(U_{\alpha_0}\right) & \xrightarrow{\delta} & \prod\limits_{\alpha_0<\alpha_1} \Omega^q\left(U_{\alpha_0\alpha_1}\right) & \xrightarrow{\delta} & \prod\limits_{\alpha_0<\cdots<\alpha_p} \Omega^q\left(U_{\alpha_0\cdots\alpha_p}\right) & \xrightarrow{\delta} & \cdots \\
 & & \uparrow d & & \uparrow d & & \uparrow d & & \\
 & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \\
 & & \uparrow d & & \uparrow d & & \uparrow d & & \\
0 \rightarrow & & \prod\limits_{\alpha_0} \Omega^1\left(U_{\alpha_0}\right) & \xrightarrow{\delta} & \prod\limits_{\alpha_0<\alpha_1} \Omega^1\left(U_{\alpha_0\alpha_1}\right) & \xrightarrow{\delta} & \prod\limits_{\alpha_0<\cdots<\alpha_p} \Omega^1\left(U_{\alpha_0\cdots\alpha_p}\right) & \xrightarrow{\delta} & \cdots \\
 & & \uparrow d & & \uparrow d & & \uparrow d & & \\
0 \rightarrow & & \prod\limits_{\alpha_0} \Omega^0\left(U_{\alpha_0}\right) & \xrightarrow{\delta} & \prod\limits_{\alpha_0<\alpha_1} \Omega^0\left(U_{\alpha_0\alpha_1}\right) & \xrightarrow{\delta} & \prod\limits_{\alpha_0<\cdots<\alpha_p} \Omega^0\left(U_{\alpha_0\cdots\alpha_p}\right) & \rightarrow & \cdots \\
 & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \\
 & & 0 & & 0 & & 0 & &
\end{array}
$$

Entonces la n-ésima cohomología de Cech, relativa al cubrimiento U, con coeficientes en la sheaf $\mathbb{R}$, de funciones localmente constantes en $\mathbb{R}$, es isomorfa a la n-ésima cohomología de De Rham, es decir,

$$H^n(U, \mathbb{R}) \cong H^n_{DR}(M).$$

Demostración. Se puede ver que cada cuadrado del diagrama anterior conmuta. En la proposición 3.4, se mostró que cada fila

$$0 \longrightarrow \prod_{\alpha_0 \in A} \Omega^q(U_{\alpha_0}) \xrightarrow{\delta} \prod_{\alpha_0, \alpha_1 \in A} \Omega^q(U_{\alpha_0\alpha_1}) \xrightarrow{\delta} \cdots \xrightarrow{\delta} \prod_{\alpha_0, \alpha_1 \in A} \Omega^q(U_{\alpha_0\alpha_1}) \xrightarrow{\delta} \cdots$$

solo tiene homología no nula en la posición $p = 0$ y es igual a

$$\Omega^q (M) = \ker (\delta : \Pi\Omega^q (U_{\alpha_0}) \to \Pi\Omega^q (U_{\alpha_0\alpha_1})) .$$

Esto es válido independientemente del hecho de que U sea un buen cubrimiento. Luego, al tomar homología H_δ se produce el doble complejo con una sola columna no trivial, $p = 0$.

$$\begin{array}{ccccccc}
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \\
\uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \\
\Omega^q (M) & \to & 0 & \to & 0 & \to & \cdots \\
\uparrow d & & \uparrow & & \uparrow & & \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \\
\uparrow d & & \uparrow & & \uparrow & & \\
\Omega^1 (M) & \to & 0 & \to & 0 & \to & \cdots \\
\uparrow d & & \uparrow & & \uparrow & & \\
\Omega^0 (M) & \to & 0 & \to & 0 & \to & \cdots \\
\uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \\
0 & & 0 & & 0 & &
\end{array}$$

Por definición, $H_d^n (H_\delta (C^* (U, \Omega^*))) \simeq H_{DR}^n (M)$.

De otra parte, al tomar homología por columnas, como U es un buen cubrimiento, se tiene de las propiedades functoriales de la cohomología de De Rham, lema 2.6 y del corolario 2.11, que cada columna

$$\prod_{\alpha_0 < \cdots < \alpha_p} \Omega^0 \left(U_{\alpha_0 \cdots \alpha_p} \right) \xrightarrow{d} \prod_{\alpha_0 < \cdots < \alpha_p} \Omega^1 \left(U_{\alpha_0 \cdots \alpha_p} \right) \xrightarrow{d} \cdots ,$$

solo tiene homología no nula al comienzo, en la posición cero. Se tiene

$$\ker \left(d : \Pi\Omega^0 \left(U_{\alpha_0 \cdots \alpha_p} \right) \to \Pi\Omega^1 \left(U_{\alpha_0 \cdots \alpha_p} \right) \right) = C^p (U, \mathbb{R}) = \Pi_{\alpha_0 \cdots \alpha_p} \mathbb{R} \left(U_{\alpha_0 \cdots \alpha_p} \right) .$$

Entonces, después de tomar homología por columnas, el doble complejo se reduce al complejo

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & \vdots & & \vdots & & & \vdots & \\
 & & \uparrow & & \uparrow & & & \uparrow & \\
0 \to & & 0 & \to & 0 & \to & \cdots \to & 0 & \to \cdots \\
 & & \uparrow & & \uparrow & & & \uparrow & \\
 & & \vdots & & \vdots & & & \vdots & \\
0 \to & & 0 & \to & 0 & \to & \cdots \to & 0 & \to \cdots \\
 & & \uparrow & & \uparrow & & & \uparrow & \\
0 \to & & C^0(U,\mathbb{R}) & \xrightarrow{\delta} & C^1(U,\mathbb{R}) & \xrightarrow{\delta} & \cdots \xrightarrow{\delta} & C^p(U,\mathbb{R}) & \xrightarrow{\delta} \cdots \\
 & & \uparrow & & \uparrow & & & \uparrow & \\
 & & 0 & & 0 & & & 0 &
\end{array}$$

con lo cual se tiene $H^n_\delta(H_d(C^*(U,\Omega^*))) \simeq H^n(U,\mathbb{R})$.

Sea $\{T^n(A), D = \delta + (-1)^p d\}_{n\geq 0}$ el complejo total asociado al doble complejo $A = \{A^{p,q} = C^p(U,\Omega^q), \delta, d\}_{p,q\geq 0}$. Por las proposiciones 4.2 y 4.3 se tiene

$$\begin{aligned}
H^n(U,\mathbb{R}) \simeq H^n_\delta(H_d(C^*(U,\Omega^*))) &\simeq H^n(T(A)) \\
&\simeq H^n_d\left(H_\delta\left(C^*\left(U,\Omega^*\right)\right)\right) \\
&\simeq H^n_{DR}(M)
\end{aligned}$$

Por lo tanto $H^n(U,\mathbb{R}) \simeq H^n_{DR}(M)$. □

Teorema 4.6 (Teorema de De Rham)**.** *La cohomología de De Rham de un manifold suave no depende de su estructura diferenciable.*

Demostración. En efecto, la cohomología de De Rham es isomorfa a la cohomología de Cech relativa a un buen cubrimiento, con la sheaf de funciones localmente constantes en $\mathbb{R}$ y esta última cohomología es meramente combinatoria. □

Teorema 4.7. *Si M es un n-manifold suave y $U = \{U_\alpha : \alpha \in A\}$ es un buen cubrimiento contable, entonces*

$$H^p_{sing}(M) \simeq H^p(U,\mathbb{Z}).$$

Demostración. Se puede ver que cada cuadrado del diagrama anterior conmuta. De la exactitud de la secuencia de Mayer-Vietoris generalizada proposición 1.15, y al considerar el doble complejo cuyas entradas son

$$\begin{aligned} A^{p,q} &= \operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}}\left(\bigoplus_{\alpha_0<\cdots<\alpha_p} S_q^u(U_{\alpha_0\ldots\alpha_p}), \mathbb{Z}\right) \\ &\simeq \prod_{\alpha_0<\cdots<\alpha_p} \operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}}\left(S_q^u\left(U_{\alpha_0\ldots\alpha_p}\right), \mathbb{Z}\right), \end{aligned}$$

esto es,

$$\begin{array}{ccccc} & \vdots & & \vdots & \\ & \uparrow & & \uparrow & \\ 0 \to & \prod_{\alpha_0} S^{u,q}\left(U_{\alpha_0}\right) & \to \cdots \to & \prod_{\alpha_0<\cdots<\alpha_p} S^{u,q}\left(U_{\alpha_0\ldots\alpha_p}\right) & \to \cdots \\ & \vdots & & \vdots & \\ & \uparrow & & \uparrow & \\ 0 \to & \prod_{\alpha_0} S^{u,0}\left(U_{\alpha_0}\right) & \to \cdots \to & \prod_{\alpha_0<\cdots<\alpha_p} S^{u,0}\left(U_{\alpha_0\ldots\alpha_p}\right) & \to \cdots \\ & \uparrow & & \uparrow & \\ & 0 & & 0 & \end{array}$$

donde por notación $S^{u,q}(U_{\alpha_0\ldots\alpha_p}) := \operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}}\left(S_q^u(U_{\alpha_0\ldots\alpha_p}), \mathbb{Z}\right)$.

Un complejo exacto de grupos libres cuando se dualiza, sigue siendo exacto. Luego cada fila del diagrama anterior es exacta, excepto en su término inicial. Luego, al tomar homología por filas, sólo la primera columna es distinta de cero.

$$
\begin{array}{ccccc}
\vdots & & \vdots & & \\
\uparrow & & \uparrow & & \\
S^{u,q}(M) & \to \cdots \to & 0 & \to \cdots \\
\vdots & & \vdots & & \\
\uparrow & & \uparrow & & \\
S^{u,1}(M) & \to \cdots \to & 0 & \to \cdots \\
\uparrow & & \uparrow & & \\
S^{u,0}(M) & \to \cdots \to & 0 & \to \cdots \\
\uparrow & & \uparrow & & \\
0 & & 0 & &
\end{array}
$$

Después de tomar homologías por columnas, se obtiene

$$H_{d\delta}^{q}\left(A^{\cdot,\cdot}\right) = H_{\sin g}^{q}\left(M\right).$$

Computemos ahora $H_{\delta d}$. Notemos que $H_{\text{sing}}^{q}\left(Z\right) = (0)$ si Z es homeomorfo a $\mathbb{R}^{n}$ y $q > 0$. Además $H_0\left(Z\right) = \bigoplus_{p \in B} \mathbb{Z}$, donde $|B|$ es el número de componentes conexas de Z. Notemos también que si Z es un espacio topológico en el cual las componentes conexas y arcoconexas coinciden, por ejemplo si Z es un manifold, entonces:

$$\ker\left(\partial^{0} : \operatorname{Hom}\left(S_0\left(Z\right), \mathbb{Z}\right) \to \operatorname{Hom}\left(S_1\left(Z\right), \mathbb{Z}\right)\right) \simeq K,$$

donde

$$K = \{\sigma : Z \to \mathbb{Z} : \sigma \text{es constante en cada componente conexa de} Z\}.$$

Entonces

$$
\begin{aligned}
\ker\left(\prod_{\alpha_0 < \cdots < \alpha_p} S^{u,0}\left(U_{\alpha_0 \cdots \alpha_p}\right) \to \prod_{\alpha_0 < \cdots < \alpha_p} S^{u,1}\left(U_{\alpha_0 \cdots \alpha_p}\right)\right) &= \prod_{\alpha_0 < \cdots < \alpha_p} \mathbb{Z}\left(U_{\alpha_0 \cdots \alpha_p}\right) \\
&= C^{p}\left(U, \mathbb{Z}\right).
\end{aligned}
$$

Por otro lado, como cada $U_{\alpha_0\cdots\alpha_p}$ es difeomorfo a $\mathbb{R}^n$, la homología por columnas es cero en cualquier punto distinto del comienzo. Así $H_d\left(A^{\cdot,\cdot}\right)$ solo tiene la primera fila distinta de cero.

$$
\begin{array}{cccccccc}
 & \vdots & & \vdots & & & \vdots & \\
 & \uparrow & & \uparrow & & & \uparrow & \\
0 \to & 0 & \to & 0 & \to & \cdots \to & 0 & \to \cdots \\
 & \uparrow & & \uparrow & & & \uparrow & \\
 & \vdots & & \vdots & & & \vdots & \\
0 \to & 0 & \to & 0 & \to & \cdots \to & 0 & \to \cdots \\
 & \uparrow & & \uparrow & & & \uparrow & \\
0 \to & \prod_{\alpha_0} \mathbb{Z}\left(U_{\alpha_0}\right) & \to & \prod_{\alpha_0<\alpha_1} \mathbb{Z}\left(U_{\alpha_0\alpha_1}\right) & \to & \cdots \to & \prod_{\alpha_0<\cdots<\alpha_p} \mathbb{Z}\left(U_{\alpha_0\ldots\alpha_p}\right) & \to \cdots \\
 & \uparrow & & \uparrow & & & \uparrow & \\
 & 0 & & 0 & & & 0 &
\end{array}
$$

Luego, al tomar homología por filas se obtiene $H^p_{\delta d}\left(A^{\cdot,\cdot}\right) = H^p\left(U, \mathbb{Z}\right)$, la $p-$ésima cohomología de Cech con respecto a la sheaf $\mathbb{Z}\left(-\right)$, funciones localmente constantes con valores en $\mathbb{Z}$.

Finalmente de las proposiciones 4.2 y 4.3, se sigue que

$$H^p_{\text{sing}}(M) \simeq H^p(U, \mathbb{Z}).$$

$\square$

Bibliografía

[1] Bott R y Tu L., *Differential Forms in Algebraic Topology*, Springer, 1982.

[2] Munkres J., *Elements of Algebraic Topology,* Benjamin Pub, 1984.

[3] Tu L., *An Introduction to Manifolds*, Springer, 2008.

[4] Vick J., *Homology Theory*, Springer, 1994.

[5] Vélez J y Cadavid C., *Topología y Geometría Diferenciales en el Lenguaje de Sheaves*, Todográficas Ltda, 2005.