

**UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA**  

---

**SEDE MEDELLÍN**

**ENVOLVENTES DE FAMILIAS  
CUADRÁTICAS DE CÓNICAS**

**Carlos Andrés Marín Ospina**

**Universidad Nacional de Colombia  
Sede Medellín  
Facultad de Ciencias  
Escuela de Matemáticas  
Octubre 2011**



# ENVOLVENTES DE FAMILIAS CUADRÁTICAS DE CÓNICAS

por

Carlos Andrés Marín Ospina

Trabajo presentado como requisito parcial  
para optar al Título de

Magister en Ciencias-Matemáticas

Director: Marco Paluszny

Universidad Nacional de Colombia  
Sede Medellín

Facultad de Ciencias

Escuela de Matemáticas

Mayo 2011

# Agradecimientos

Debo un especial agradecimiento al profesor Marco Paluszny, director de esta tesis de maestría, quien con su amabilidad, generosidad y disciplina ha dejado buenas enseñanzas a mi formación académica.

Agradezco a todos mis profesores, compañeros y amigos que de una u otra forma hicieron un ambiente agradable durante todo el proceso de estudio.

# Resumen

En este trabajo se considera la clasificación de haces de cónicas, con la finalidad de aplicarla al estudio de la envolvente de una familia cuadrática monoparamétrica de cónicas, cada envolvente es una curva cuártica correspondiente a una curva de Bézier en  $\mathbb{R}^6$ , cada punto de la curva de Bézier  $[A, B, C, D, E, F] \in \mathbb{R}^6$  etiqueta la cónica proyectiva

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dxz + Eyz + Fz^2 = 0,$$

el espacio de ecuaciones de cónicas es  $P^5(\mathbb{R})$ , espacio proyectivo de dimensión cinco. La clasificación de la morfología de intersección de los haces de cónicas desempeña un papel importante en la construcción de la envolvente, los resultados son derivados del análisis de la teoría algebraica de invariantes de haces de cónicas.

## Palabras Claves

- Familia cuadrática monoparamétrica de cónicas
- Curvas de Bézier
- Espacio proyectivo
- Haces de cónicas

# Abstract

In this thesis we consider the classifications of the pencils of conics and apply it to study the envelope of a quadratic 1-parameter family of conics. Each envelope is a quartic curve corresponding to Bézier curve in  $\mathbb{R}^6$ , each point on the curve labels a projective conic

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dxz + Eyz + Fz^2 = 0,$$

The space of equations of conics is the projective space of dimension five. The classification of the morphology of intersection of the pencils of conics plays an important role in the construction of the envelope, the needed properties of the pencils are derived from algebraic invariant theory.

## Key Words

- Quadratic 1-parameter family of conics
- Bézier curves
- Projective space
- Pencil of conics

# Índice general

<b>Introducción</b>	<b>9</b>
<b>1. Preliminares</b>	<b>12</b>
1.1. Envoltentes de Curvas Planas . . . . .	12
1.2. Algoritmo de Casteljaou y Curvas de Bézier . . . . .	14
<b>2. Envoltentes de Familias Cuadráticas de Círculos</b>	<b>17</b>
2.1. Modelo de Pedoe . . . . .	17
2.2. Construcción de la Envoltente . . . . .	20
<b>3. Teoría Algebraica de Invariantes</b>	<b>24</b>
3.1. Concomitantes de n-Formas . . . . .	24
3.2. Concomitantes Adjuntos . . . . .	25
3.3. Clasificación de Concomitantes . . . . .	25
3.4. Ejemplos . . . . .	26
<b>4. Cónicas Projectivas y Haces de Cónicas</b>	<b>28</b>
4.1. Cónicas y Haces de Cónicas . . . . .	28
4.2. Haces de Cónicas . . . . .	29
4.3. Concomitantes de Pares de Formas Cuadráticas Ternarias Bajo la Acción de $GL_3(\mathbb{R})$ . . . . .	30
4.4. Concomitantes de Pares de Formas Cuadráticas Ternarias Bajo la Acción de $GL_2(\mathbb{R})$ . . . . .	30
4.5. Acción Sobre un Haz de Cónicas . . . . .	31
<b>5. Combinantes</b>	<b>37</b>
5.1. Concomitantes de Pares Bajo la Acción $GL_3(\mathbb{R})$ . . . . .	37
5.2. Invariantes de Pares Bajo la Acción de $GL_3(\mathbb{R})$ . . . . .	37
5.3. Covariantes de Pares Bajo la Acción de $GL_3(\mathbb{R})$ . . . . .	39
5.4. Contravariantes de pares bajo la acción de $GL_3(\mathbb{R})$ . . . . .	40
5.5. Transversión y el $\Omega$ -Proceso de Cayley . . . . .	41

5.6. Combinantes de Pares de Formas Cuadráticas	
Ternarias . . . . .	45
5.7. Combinantes Invariantes . . . . .	45
5.8. Combinantes Covariantes . . . . .	46
<b>6. Clasificación de las Órbitas de los Haces no Degenerados de Cónicas</b>	<b>49</b>
6.1. Ejemplos . . . . .	50
<b>Bibliografía</b>	<b>56</b>



## Introducción

El espacio de cónicas ó de ecuaciones de cónicas en el plano  $2D$  puede ser identificado con puntos de  $\mathbb{R}^6$ . Los puntos  $(A, B, C, D, E, F) \in \mathbb{R}^6$  determinan la cónica  $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ .

Sabiendo que la ecuación de una cónica puede ser multiplicada por  $\lambda \neq 0$ , los puntos  $(A, B, C, D, E, F)$  y  $(\lambda A, \lambda B, \lambda C, \lambda D, \lambda E, \lambda F)$  determinan la misma cónica. El espacio de ecuaciones de cónicas es  $P^5(\mathbb{R})$ , espacio proyectivo real de dimensión 5. Nuestro objetivo es estudiar la envolvente de una familia cuadrática monoparamétrica de cónicas  $F(x, y, t) = 0$  (ver preliminares), para luego construir «path splines» con secciones de este tipo de envolventes.

Dan Pedoe (1970) construyó la envolvente de una familia cuadrática de círculos, basándose en la correspondencia biyectiva entre los puntos del exterior de un paraboloides de revolución y los círculos en el plano. De esta manera, considerando

$$\Psi = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 - z = 0\},$$

el paraboloides de revolución y tomando un punto  $p = (x_p, y_p, z_p)$  en el exterior del paraboloides, le asociamos el plano:  $\prod_p : 2xx_p + 2yy_p - z_p - z = 0$ , llamado el *plano polar* de  $p$ . La *proyección ortogonal* de  $\Psi \cap \prod_p$  es el círculo

$$C_p : (x - x_p)^2 + (y - y_p)^2 - x_p^2 - y_p^2 + z_p = 0,$$

obteniéndose así la correspondencia entre los puntos  $p$  en el exterior del paraboloides y los círculos en el plano.

Las rectas en el exterior del paraboloides corresponden a haces de círculos en el plano (combinaciones lineales de círculos), cuyo tipo de intersección corresponde a dos puntos base. Los puntos que están en el paraboloides se proyectan a puntos en el plano. Luego al considerar una cónica de Bézier en  $\mathbb{R}^6$  (ver ecuación 2.1), cada punto de la cónica determina un círculo en el plano. Ahora, sabiendo que la envolvente de la familia de círculos es una curva que satisface

$$\begin{cases} F(x, y, t) = 0 \\ \frac{\partial F(x, y, t)}{\partial t} = 0, \end{cases}$$

donde  $F(x, y, t)$  es la familia de círculos determinada por la cónica de Bézier. Luego eliminando el parámetro  $t$  en las ecuaciones anteriores se obtiene que la ecuación de la envolvente está dada por una curva algebraica de grado cuatro que consiste en dos ramas dadas por

$$E : C_0C_2 - w^2C_1^2 = 0,$$

donde los  $C_i = 0 \quad i = 0, 1, 2$  son los círculos en el plano correspondientes a los puntos de control de la curva y  $w$  es el peso de la cónica de Bézier. En conclusión al

considerar una curva de Bézier en el exterior del paraboloido, se obtiene una familia cuadrática de círculos para la cual se puede determinar las ecuaciones explícitas de las ramas de la envolvente. En el artículo [1] J.Daza, T.Goncalves y F.Tovar utilizan el modelo de Pedoe para construir «splines» de caminos con secciones de este tipo de envolvente.

El problema de construir la envolvente de una familia uniparamétrica de cónicas en general, es mucho más elaborado, debido a las múltiples formas de intersección que pueden tener cada par de cónicas de la familia. Para construir la envolvente se debe hacer un estudio extenso de los haces de cónicas, los cuales son combinaciones lineales de cónicas cuya morfología de intersección (tipo de intersección de todas las cónicas de un haz) se estudia en el modelo de Briand [5]. Consideremos una cónica en  $P^2(\mathbb{R})$ , la cual está caracterizada por el vector de coeficientes  $[A, B, C, D, E, F] \in P^5(\mathbb{R})$ . Una cónica puede degenerarse a una línea, una línea doble, a un par de líneas distintas, a un punto ó al vacío. El conjunto de puntos  $[A, B, C, D, E, F] \in P^5(\mathbb{R})$  que corresponden a las ecuaciones de cónicas degeneradas determinan la hipersuperficie cúbica

$$4ACF - AE^2 - B^2F + BDE - D^2C = 0.$$

Las líneas en  $P^5(\mathbb{R})$ , que corresponden a haces de cónicas en  $P^2(\mathbb{R})$ , han sido clasificados por Briand en términos de la intersección de puntos que comparten todas las cónicas de un haz. A estos puntos de intersección nos referimos como puntos base del haz. Los haces que interesan son los que tienen dos puntos base reales y otros dos complejos conjugados.

De acuerdo con Briand:

Un haz de cónicas tiene dos puntos base reales distintos y dos complejos conjugados si y sólo si, la línea correspondiente en  $P^5$  tiene un punto de intersección real con la hipersuperficie cúbica  $4ACF - AE^2 - B^2F + BDE - D^2C = 0$  mencionada anteriormente.

Actualmente para tratar de extender el modelo de Pedoe, el Profesor Marco Paluszny y su colega Francisco Tovar se basan en el modelo de Briand, consideran familias cuadráticas de cónicas y analizan su envolvente. Una familia cuadrática de cónicas corresponde a una cónica de Bezier en  $P^5(\mathbb{R})$  (ó a un polinomio cuadrático con coeficientes en  $\mathbb{R}^6$ ), las líneas tangentes de esa cónica son haces cuyos puntos base trazan la envolvente. Sabiendo que cada segmento de envolvente tiene que tener dos ramas, se requiere que cada línea tangente a la curva cuadrática de Bézier corresponda a un haz de cónicas con dos puntos base reales distintos. Para esto es suficiente que cada línea tangente a la curva de Bézier se encuentre con la hipersuperficie cúbica en un punto real.

En este trabajo se aborda el mismo problema, pero con un enfoque más algebraico, el cual consiste en lo siguiente.

Consideremos una cónica del plano proyectivo  $P^2(\mathbb{R})$ , la cual algebraicamente la podemos ver como una forma cuadrática ternaria  $Q_S = X^T S X$  donde  $S$  es una matriz en la proyectización de las matrices simétricas  $S \in P(\text{Sim}(3, \mathbb{R}))$ .

Análogo al trabajo anterior, cada cónica está caracterizada por el vector de coeficientes  $[A, B, C, D, E, F] \in P^5(\mathbb{R})$ , y estudiamos la envolvente de una familia cuadrática de cónicas, correspondiente a una cónica de Bézier en  $P^5(\mathbb{R})$ . Tal como en el modelo de Pedoe y en el modelo de Briand, las dos ramas de la envolvente se construyen a partir de los dos puntos base, obtenidos de los haces de cónicas correspondientes a las líneas tangentes a la cónica de Bézier. El problema que se presenta con los haces de cónicas es que estos se pueden intersectar de diferentes maneras, se presentan nueve órbitas de haces de cónicas no degenerados bajo la acción del grupo lineal. La órbita que nos interesa es aquella en la cual hay dos puntos de intersección. Por lo tanto para poder determinar la envolvente de una familia cuadrática de cónicas, correspondiente a una curva de Bézier en  $\mathbb{R}^6$ , es necesario que cada uno de las rectas tangentes a la curva determine un haz de cónicas perteneciente a la órbita cuya morfología de intersección corresponda a 2 puntos simples, que estarán sobre la envolvente. Ahora bien, lo que se quiere a diferencia del modelo de Briand, es dar condiciones algebraicas sobre la curva de Bézier para que cada haz de cónicas cumpla lo anterior. La herramienta algebraica que permite dar una clasificación de las distintas morfologías de intersección de los haces, es la teoría de invariantes algebraicos de haces de cónicas, que se encuentra en el artículo de Sylvain Petitjean [2], en el cual se hace una clasificación de las órbitas de los haces y su morfología de intersección a partir de la teoría de concomitantes de formas cuadráticas ternarias. De esta manera en el artículo [2], se calculan diferentes invariantes de haces que permiten clasificar algebraicamente las órbitas y la morfología de intersección de los haces.

# Capítulo 1

## Preliminares

### 1.1. Envoltentes de Curvas Planas

#### Definición 1.1

Una familia uniparamétrica de curvas planas  $\{C_\lambda\}_{\lambda \in \mathbb{R}}$ , es un conjunto de curvas en el plano cuyas ecuaciones vienen dadas implícitamente por  $f(x, y, \lambda) = 0$ , con  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

La familia recibe el nombre de haz de curvas cuando  $f$  es lineal con respecto a  $\lambda$ .

#### Definición 1.2

Una *envolvente* de una familia uniparamétrica de curvas planas  $\{C_\lambda\}_{\lambda \in \mathbb{R}}$ , es una curva  $\epsilon$ , no comprendida en la familia, tal que en cada uno de sus puntos es tangente a una curva de la familia.

**Teorema 1.1.** *Dada la familia uniparamétrica de curvas  $\{C_\lambda\}_{\lambda \in \mathbb{R}}$ , en forma implícita  $f(x, y, \lambda) = 0$ , y supongamos que en cierto intervalo del parámetro  $\lambda$  la familia  $\{C_\lambda\}_{\lambda \in \mathbb{R}}$  tiene una envolvente  $\epsilon$  de ecuación paramétrica regular  $x = x(\lambda)$ ,  $y = y(\lambda)$ . Supongamos además que  $f(x, y, \lambda) = 0$  tiene primeras derivadas continuas, que cumplen que  $f_x^2 + f_y^2 \neq 0$  en los puntos de contacto con la envolvente. Entonces la envolvente satisface*

$$\begin{aligned}f(x, y, \lambda) &= 0 \\f_\lambda(x, y, \lambda) &= 0.\end{aligned}$$

#### Demostración.

Como en cierto intervalo del parámetro  $\lambda$  la familia  $\{C_\lambda\}_{\lambda \in \mathbb{R}}$ , tiene una envolvente  $\epsilon =: (x(\lambda), y(\lambda))$  representada paraméricamente y regular respecto a dicho parámetro  $\lambda$ . Esta envolvente debe cumplir la condición  $x'^2 + y'^2 \neq 0$ , al suponerse regular, a fin de que la tangente a  $\epsilon$  exista en todos sus puntos.

El valor del parámetro  $\lambda$  es el correspondiente a la curva de la familia  $\{C_\lambda\}_{\lambda \in \mathbb{R}}$ , que contiene al punto de contacto de la envolvente. Por lo tanto en el intervalo considerado, las ecuaciones de la envolvente deben satisfacer

$$f(x(\lambda), y(\lambda), \lambda) = 0.$$

Luego derivando con respecto a  $\lambda$  se obtiene

$$f_x x'(\lambda) + f_y y'(\lambda) + f_\lambda = 0,$$

pero por otra parte en un punto  $p$  de contacto, la tangente común a la curva de la familia  $\{C_\lambda\}_{\lambda \in \mathbb{R}}$ , y a la envolvente  $\epsilon$  tienen pendientes respectivamente,  $-\frac{f_x}{f_y}$  y  $\frac{y'(\lambda)}{x'(\lambda)}$ . Luego como ambas pendientes deben ser iguales se cumple que

$$f_x x'(\lambda) + f_y y'(\lambda) = 0,$$

de donde se obtiene que la envolvente debe cumplir

$$f_\lambda(x, y, \lambda) = 0.$$

Lo que prueba finalmente que la envolvente debe satisfacer el sistema

$$\begin{aligned} f(x, y, \lambda) &= 0 \\ f_\lambda(x, y, \lambda) &= 0. \end{aligned}$$

**Nota:** Se debe tener en cuenta que el sistema de ecuaciones que permite hallar la envolvente, puede contener no sólo la envolvente de la familia, sino también al lugar de los puntos singulares de la familia y algunas veces, curvas de la propia familia. La razón es que el lugar de los puntos singulares  $(x(\lambda), y(\lambda))$ , se obtiene como solución del sistema

$$\begin{aligned} f_x(x, y, \lambda) &= 0 \\ f_y(x, y, \lambda) &= 0. \end{aligned}$$

Estas soluciones satisfacen no sólo a  $f(x, y, \lambda) = 0$ , sino también a  $f_\lambda(x, y, \lambda) = 0$ , pues derivando en  $f(x, y, \lambda) = 0$  obtenemos,

$$f_x x'(\lambda) + f_y y'(\lambda) + f_\lambda = 0,$$

y como en tales puntos  $f_x = f_y = 0$ , resulta que  $f_\lambda = 0$  en dichos puntos.

## 1.2. Algoritmo de Casteljau y Curvas de Bézier

El algoritmo de Casteljau (1959) descrito a continuación es probablemente el algoritmo más importante en el campo de diseño geométrico de curvas y superficies. Empezaremos considerando una simple construcción de la generación de una parábola y luego generalizaremos la técnica obtenida para generar curvas de grado arbitrario denominadas curvas de Bézier.

### Parábolas:

Sean  $b_0$ ,  $b_1$  y  $b_2$  tres puntos en  $\mathbb{E}^3$  (espacio Euclidiano) y sea  $t \in \mathbb{R}$ . luego por interpolación lineal, obtenemos los siguientes puntos

$$b_0^1(t) =: (1-t)b_0 + tb_1 \quad (1.1)$$

$$b_1^1(t) =: (1-t)b_1 + tb_2. \quad (1.2)$$

Haciendo una interpolación lineal con los puntos anteriores obtenemos

$$b_0^2(t) =: (1-t)b_0^1(t) + tb_1^1(t),$$

luego reemplazando 1.1 y 1.2 se obtiene finalmente la expresión

$$b_0^2 =: (1-t)b_0 + 2t(1-t)b_1 + t^2b_2,$$

la cual es una expresión cuadrática en  $t \in \mathbb{R}$ , y por lo tanto  $b_0^2(t)$  traza una parábola para  $t \in (-\infty, +\infty)$ .

Esta construcción consiste en repetidas interpolaciones lineales partiendo de tres puntos dados  $b_0$ ,  $b_1$  y  $b_2$  que forman un polígono llamado el polígono de control. La construcción de la parábola se ilustra en la figura 1, para  $t \in [0, 1]$ . Obsérvese que los puntos  $b_0^1$  y  $b_1^1$  de la primera interpolación lineal, son puntos que están sobre el polígono de control, y finalmente al ser interpolados se obtiene el punto sobre la curva para el valor de  $t$  asignado.

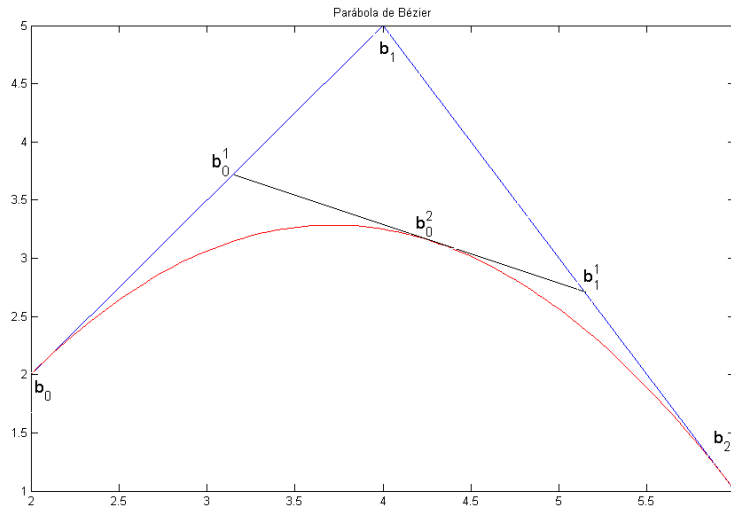


figura 1

### Algoritmo de Casteljau:

La construcción previa de una parábola se puede generalizar para la construcción de curvas polinomiales de grado arbitrario, mediante el algoritmo de Casteljau, el cual consiste en lo siguiente.

Sean  $b_0, b_1, \dots, b_n$  puntos en  $\mathbb{E}^3$ ,  $t \in \mathbb{R}$  y sea

$$b_i^r(t) = (1-t)b_i^{r-1}(t) + tb_{i+1}^{r-1}(t), \quad r = 1 \dots n, \quad i = 0, \dots, n-r, \quad b_i^0(t) = b_i.$$

Luego  $b_0^n(t)$  es el punto con valor en el parámetro  $t$ , que está sobre la curva polinomial de grado  $n$ , denominada Curva de Bézier.

El polígono formado por los puntos  $b_0, b_1, \dots, b_n$ , es llamado el polígono de control de la curva, y los vértices del polígono  $b_i$ , son llamados puntos de control.

Los coeficientes intermedios  $b_i^r(t)$  son escritos convenientemente en forma triangular para ilustrar las sucesivas interpolaciones lineales, hasta obtener en el último paso el punto que está sobre la curva. A continuación lo ilustramos para el caso cúbico.

Sean  $b_0, b_1, b_2$  y  $b_3$  puntos dados en  $\mathbb{E}^3$  y sea  $t \in [0, 1]$ , aplicamos el algoritmo de Casteljau para obtener un punto que está sobre la curva de Bézier de la siguiente manera

$$\begin{array}{r} b_0 \\ b_0^1(t) \leftarrow b_1 \\ b_0^2(t) \leftarrow b_1^1(t) \leftarrow b_2 \\ b_0^3(t) \leftarrow b_1^2(t) \leftarrow b_2^1(t) \leftarrow b_3. \end{array}$$

La figura 2 ilustra los pasos indicados geoméricamente.

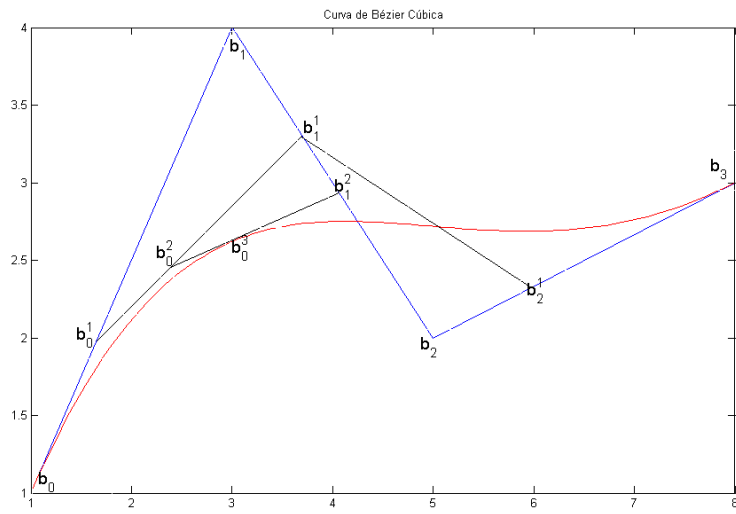


figura 2



## Capítulo 2

# Envolventes de Familias Cuadráticas de Círculos

Empezaremos construyendo secciones de envolventes de familias cuadráticas de círculos, cada sección de envolvente es controlada con una cónica de Bézier en 3D. Para empezar estudiaremos el modelo de Pedoe, el cual nos llevará a expresar la envolvente directamente en términos de la curva de Bézier en 3D. La ecuación de la envolvente será una curva algebraica de grado menor o igual a 4.

### 2.1. Modelo de Pedoe

Dan Pedoe (1970) expresó la envolvente de una familia cuadrática de círculos, en términos de la correspondencia biyectiva entre los puntos del exterior de un paraboloides de revolución y los círculos en el plano. Consideramos el paraboloides de revolución,

$$\Psi = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 - z = 0\}$$

denotemos por  $\Psi^+ = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 > z\}$  el exterior del paraboloides. A cada punto  $P = (x_p, y_p, z_p) \in \Psi^+$  le asociamos el plano,

$$\prod_p : 2xx_p + 2yy_p - z_p - z = 0$$

llamado el *plano polar* de  $P$ . La *proyección ortogonal* de  $\Psi \cap \prod_p$  es el círculo,

$$C_p, (x - x_p)^2 + (y - y_p)^2 - x_p^2 - y_p^2 + z_p = 0.$$

Por lo tanto, cada punto  $P \in \Psi^+$  representa un círculo y recíprocamente cada círculo con centro en  $(x_p, y_p)$  y radio  $r$ , corresponde al punto  $(x_p, y_p, x_p^2 + y_p^2 - r^2) \in \Psi^+$ .

Además, si  $P \in \Psi$ , el círculo correspondiente tiene radio cero y centro en  $(x_p, y_p)$ . Se puede definir un producto interno entre los círculos  $C_A$  y  $C_B$  correspondientes a los puntos  $(x_A, y_A, z_A)$  y  $(x_B, y_B, z_B)$ , respectivamente, de la siguiente manera:

$$[C_A, C_B] = \frac{1}{2}(2x_Ax_B + 2y_Ay_B - z_A - z_B).$$

Geoméricamente este producto interno coincide con:

$$[C_A, C_B] = \frac{1}{2}(r_A^2 + r_B^2 - D^2)$$

donde  $r_A$  y  $r_B$  son los radios de los círculos  $C_A$  y  $C_B$ , respectivamente, y  $D$  es la distancia entre los puntos  $(x_A, y_A, z_A)$  y  $(x_B, y_B, z_B)$ .

**Definición:** Sean  $P = (x_P, y_P, z_P)$  y  $Q = (x_Q, y_Q, z_Q)$  dos puntos en  $\Psi^+$ , y sea  $L_{PQ}(u) = uP + (1 - u)Q$  la recta que pasa por esos dos puntos. Definimos como un *haz de círculos* correspondientes a los puntos  $P$  y  $Q$  en  $\Psi^+$ , al conjunto de círculos en el plano

$$C_{L_{PQ}(u)} : uC_P + (1 - u)C_Q = 0,$$

correspondientes a los puntos de la recta que yacen en  $\Psi^+$ .  $C_P$  y  $C_Q$  son los círculos correspondientes a los puntos  $P$  y  $Q$  según el modelo de Pedoe.

Cada valor de  $u$  determina un círculo. El centro de cada círculo del haz está dado por  $(ux_P + (1 - u)x_Q, uy_P + (1 - u)y_Q)$  y el radio al cuadrado es  $(1 - u)^2[C_Q, C_Q] + 2(1 - u)u[C_Q, C_P] + u^2[C_P, C_P]$ . Todos los círculos de un haz comparten un conjunto de puntos llamados *puntos base del haz*, determinados por la intersección de dos círculos distintos del haz. A cada tipo de intersección de un haz se le conoce como la *morfología de intersección del haz*. Como veremos en lo que sigue, los haces de círculos tienen tres tipos de morfología de intersección.

La figura 4 muestra el haz de círculos correspondiente al segmento de recta que se muestra en la figura 3.

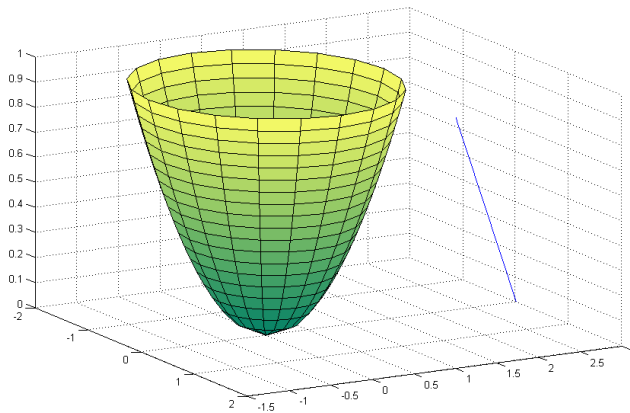


figura 3

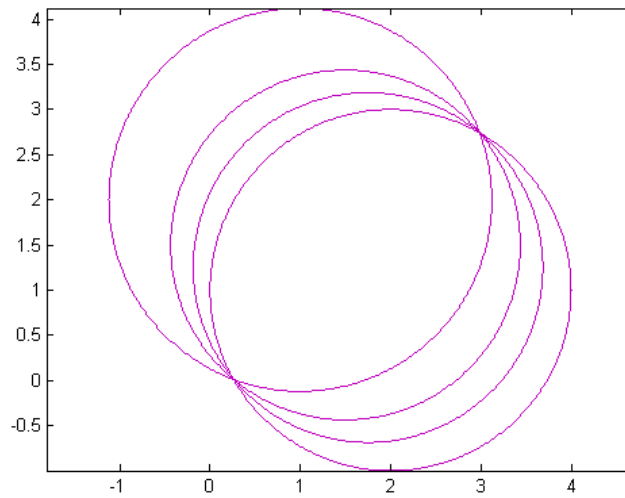


figura 4

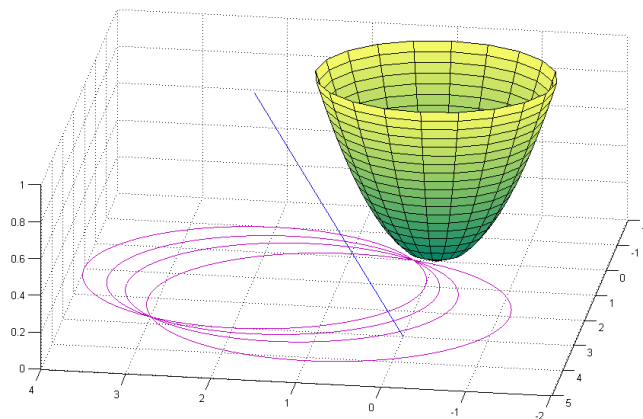


figura 5

Como podemos observar el haz de círculos generado por un segmento de recta en  $\Psi^+$ , tiene una morfología de intersección en dos puntos, llamados *puntos base del haz*. Dicha morfología depende del tipo de intersección de la recta con  $\Psi^+$ . De esta manera podemos observar tres tipos de morfologías en los haces de círculos.

1. Cuando la recta se encuentra en  $\Psi^+$ , la morfología de intersección se da en dos puntos. Este será el caso que nos permitirá construir la envolvente de una familia cuadrática de círculos.
2. Cuando la recta es tangente al paraboloides, el haz de círculos tiene una morfología de intersección de un punto, como se muestra en la figura 6. El punto de tangencia corresponde al círculo de radio cero correspondiente al punto que está sobre el paraboloides.

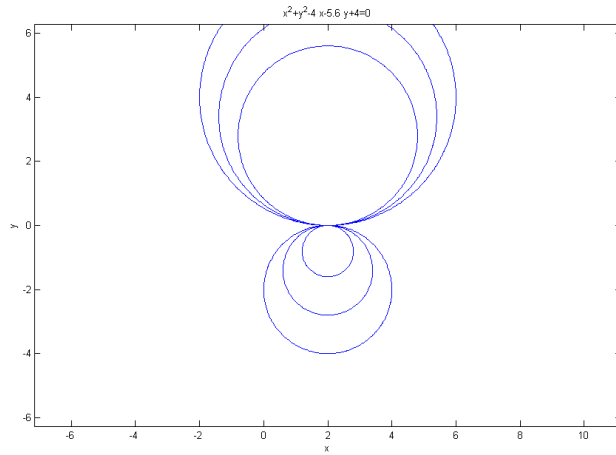


figura 6

3. Cuando la recta es secante al paraboloides, se generan dos ramas de haces de círculos vacíos, tal como se muestra en figura 7, cada rama incluye al círculo de radio cero que corresponden a los dos puntos donde el segmento es secante al paraboloides.

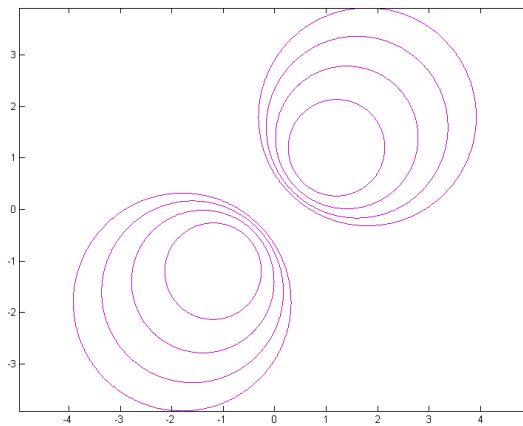


figura 7

## 2.2. Construcción de la Envolvente

Ahora construyamos la envolvente de una familia uniparamétrica de círculos correspondiente a una cónica de Bézier en  $\mathbb{R}^3$ . Consideremos una cónica de Bézier en  $\mathbb{R}^3$ , lo cual dados los puntos  $(x_0, y_0, z_0)$ ,  $(x_1, y_1, z_1)$  y  $(x_2, y_2, z_2)$ , llamados puntos de control, y un parámetro  $w$ , llamado peso de la cónica, es una expresión de la

forma,

$$B(t) = \begin{cases} \frac{x_0(1-t)^2 + 2x_1w(1-t)t + x_2t^2}{(1-t)^2 + 2w(1-t)t + t^2} \\ \frac{y_0(1-t)^2 + 2y_1w(1-t)t + y_2t^2}{(1-t)^2 + 2w(1-t)t + t^2} \\ \frac{z_0(1-t)^2 + 2z_1w(1-t)t + z_2t^2}{(1-t)^2 + 2w(1-t)t + t^2}, \end{cases} \quad (2.1)$$

y consideremos está cónica de tal forma que cada recta tangente a la curva está en  $\Psi^+$ . Cada punto de la cónica etiqueta un círculo en el plano según el modelo de Pedoe, obteniéndose de esta manera una familia de círculos. El hecho de que las rectas tangentes están en  $\Psi^+$ , garantiza la construcción de la envolvente como una curva con dos ramas, ya que el haz de círculos correspondiente a cada recta tangente a la curva tiene una morfología de intersección de dos puntos, cada uno de ellos recorriendo una de las ramas. La figura 9 muestra la familia cuadrática de círculos correspondiente a la curva de Bézier en  $\mathbb{R}^3$  que se muestra en la figura 8.

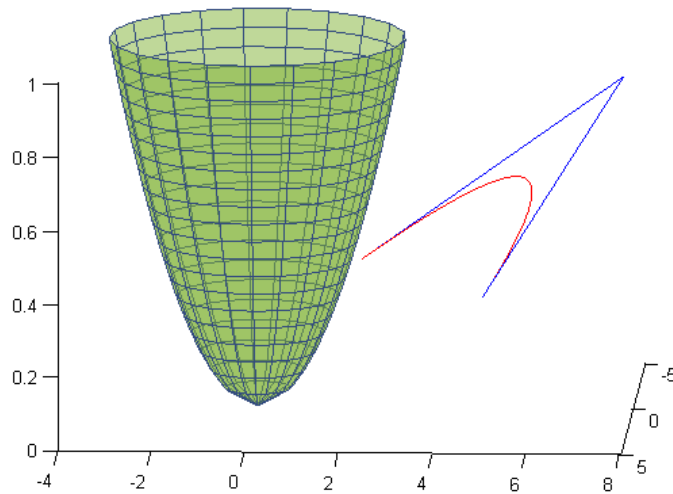


figura 8

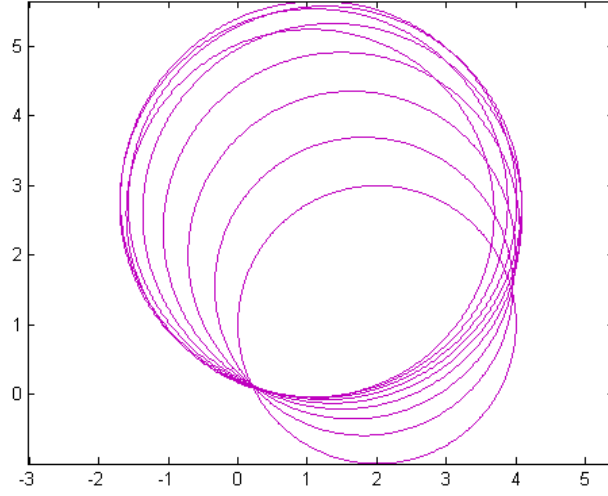


figura 9

Para calcular la envolvente consideremos la cónica de Bézier (2.1), según el modelo de Pedoe, cada punto de la cónica  $B(t)$  determina un círculo  $C_{B(t)}$  dado por  $(x - x(t))^2 + (y - y(t))^2 - x(t)^2 - y(t)^2 + z(t) = 0$ . Ahora sabiendo que la envolvente de la familia de círculos es una curva que satisface:

$$\begin{cases} F(x, y, t) = 0 \\ \frac{\partial F(x, y, t)}{\partial t} = 0, \end{cases}$$

donde  $F(x, y, t) = (x - x(t))^2 + (y - y(t))^2 - x(t)^2 - y(t)^2 + z(t)$ . Eliminando el parámetro  $t$ , y denotando por  $C_i : (x - x_i)^2 + (y - y_i)^2 - x_i^2 - y_i^2 + z_i$  donde  $(x_i, y_i, z_i)$  son los puntos de control de la cónica de Bézier, obtenemos que la envolvente está dada por  $E : C_0 C_2 - w^2 C_1^2 = 0$ , donde  $w$  es el peso de la cónica de Bézier.

La figura 10, muestra la envolvente completa de la familia de círculos correspondiente a la curva de Bézier dada en la figura 8. Esta envolvente se graficó de acuerdo a la ecuación de la envolvente obtenida por el modelo de Pedoe. La envolvente es una curva cerrada de grado 4 cuya gráfica consta de dos ramas, unas de las cuales es una curva cerrada.

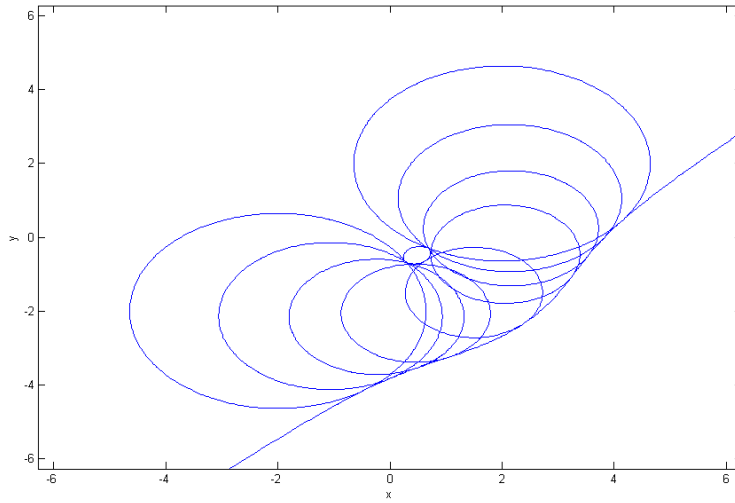


figura 10

En el artículo de Paluszny y Tovar, esta idea se generaliza para envolventes de familias de cónicas. La ecuación de una cónica se representa por medio del vector de coeficientes en  $\mathbb{R}^6$ .

Curvas de Bézier en  $\mathbb{R}^6$ , representan familias monoparamétricas de cónicas cuyas envolventes generan curvas algebraicas que constan de dos ramas, o más explícitamente están constituidas por dos puntos que se mueven simultáneamente: cada uno de ellos determina una rama. Los pares de puntos se obtienen como los puntos comunes de ciertos haces lineales de cónicas. Estos últimos corresponden a las rectas tangentes de la curva en  $\mathbb{R}^6$ .

# Capítulo 3

## Teoría Algebraica de Invariantes

La teoría algebraica de invariantes es el estudio de las propiedades intrínsecas de polinomios y sistemas polinomiales, es decir, propiedades que no se afectan por un cambio de variables y que no dependen de un sistema específico de coordenadas [2]. La teoría que se estudiará a continuación será utilizada más adelante para clasificar haces de cónicas según el tipo de morfología de intersección.

### 3.1. Concomitantes de n-Formas

Consideremos el campo de los reales  $\mathbb{R}$ , y definamos el polinomio homogéneo:

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum a_{i_1 i_2 \dots i_n} x_1^{i_1} x_2^{i_2} \dots x_n^{i_n} \quad (3.1)$$

el cual tiene grado  $d$ , donde  $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  son indeterminadas y los coeficientes  $a_{i_1 i_2 \dots i_n} \in \mathbb{R}$ . La suma en (3.1), es sobre  $\binom{n+d-1}{d}$  n-tuplas de enteros no negativos  $(i_1, i_2, \dots, i_n)$  tales que  $i_1 + i_2 + \dots + i_n = d$ . Así, por ejemplo una 2-forma de grado 1, se puede escribir como:

$$f(x, y) = Ax + By$$

donde  $n = 2$  y  $d = 1$ . Una 3-forma de grado 2 ó forma cuadrática ternaria, tendrá la forma:

$$f(x, y, z) = Ax^2 + By^2 + Cz^2 + 2Dxy + 2Exz + 2Fyz$$

donde  $n = 3$  y  $d = 2$ .

Todas las n-formas de grado  $d$ , forman un  $\mathbb{R}$  espacio vectorial de dimensión  $\binom{n+d-1}{d}$ .

Por lo tanto podemos identificar cada n-forma en (3.1), con el vector de coeficientes  $a = (\dots, a_{i_1, i_2, \dots, i_n}, \dots)$  y la denotaremos por  $f(a, X)$ .

Dada una n-forma  $f(a, X)$ , consideremos ahora  $\mathbb{R}[a, X, U]$  el anillo de polinomios



sobre el campo  $\mathbb{R}$ , en los coeficientes de  $f$ , las variables principales  $X$  y un conjunto de variables  $U = (u_1, u_2, \dots, u_n)$  llamadas *variables duales*.

Definamos una acción del grupo lineal  $GL_n(\mathbb{R})$  sobre los elementos  $(a, X, U)$  de la siguiente manera,

Dada  $P \in GL_n(\mathbb{R})$ ,  $P : (a, X, U) \mapsto (\bar{a}, \bar{X}, \bar{U})$  definida por las ecuaciones,

$$\bar{X} = P^{-1}X \quad \bar{U} = P^T U \quad f(a, X) = f(\bar{a}, \bar{X}).$$

Una observación importante de la acción, es que  $\bar{a}$  se determina a partir de la igualdad  $f(a, X) = f(\bar{a}, \bar{X})$ , es decir al realizar el cambio de variable  $\bar{X}$  en la forma se encuentra  $\bar{a}$  en términos de  $a$  y de  $P \in GL_n(\mathbb{R})$  que cumple la igualdad.

Un polinomio  $C \in \mathbb{R}[a, X, U]$  es un concomitante de  $f(a, X)$  bajo la acción de  $GL_n(\mathbb{R})$  si cumple,

$$C(\bar{a}, \bar{X}, \bar{U}) = (\det P)^w C(a, X, U),$$

donde  $w \in \mathbb{Z}$  es llamado el *peso* de  $C$ .

El grado total de  $C$  en los elementos del vector de coeficientes  $a$ , es llamado el *grado del concomitante*.

El grado total de  $C$  en las variables  $X$ , es llamado *el orden de  $C$* .

El grado total en las variables duales se denomina *la clase de  $C$* .

## 3.2. Concomitantes Adjuntos

Consideremos ahora una colección de  $n$ -formas  $f_i(a_i, X)$  con  $i = 1 \dots p$ , no necesariamente todas con el mismo grado. Un polinomio  $J \in \mathbb{R}[a_1, \dots, a_p, X, U]$  es un *concomitante adjunto* de las formas  $f_1, f_2, \dots, f_p$  bajo la acción de  $GL_n(\mathbb{R})$  si,

$$J(\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_p, \bar{X}, \bar{U}) = (\det P)^w J(a_1, \dots, a_p, X, U), \forall P \in GL_n(\mathbb{R}), w \in \mathbb{Z}.$$

Definimos además el *multigrado del concomitante* como el vector  $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p)$  donde cada  $\alpha_i$  es el grado en los coeficientes  $a_i$ , con  $i = 1, \dots, p$ .

## 3.3. Clasificación de Concomitantes

Los concomitantes se clasifican según su grado, orden y clase de la siguiente manera:

*Invariantes*: Cuando el orden y la clase son cero.

*Covariantes*: Cuando la clase es cero, pero el orden no.

*Contravariantes*: Cuando el orden es cero, pero la clase no.

### 3.4. Ejemplos

#### Ejemplo 3.1

El Hessiano  $\det \left( \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \right)$  de una forma cuadrática ternaria es un invariante de peso dos, grado tres.

Sea  $f(x, y, z) = Ax^2 + By^2 + Cz^2 + 2Dxy + 2Exz + 2Fyz = X^T Q X$ , donde  $Q$  es la matriz simétrica asociado a la forma cuadrática ternaria. Luego, aplicando la acción  $P \in GL_3(\mathbb{R})$  se obtiene que,  $\bar{X} = P^{-1}X$  por lo tanto  $f(\bar{a}, \bar{X}) = \bar{X}^T \bar{Q} \bar{X} = X^T (P^{-1})^T \bar{Q} P^{-1} X$  y como  $f(a, X) = f(\bar{a}, \bar{X})$  se obtiene que  $\bar{Q} = P^T Q P$ . Luego, calculando el Hessiano,

$$C(a, X) = \det \left( \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \right) = \det \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} & \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \end{bmatrix},$$

obtenemos

$$C(a, X) = \det \begin{bmatrix} 2A & 2D & 2E \\ 2D & 2B & 2F \\ 2E & 2F & 2C \end{bmatrix} = 8 \det Q,$$

y observemos que en efecto es un concomitante ya que,

$$C(\bar{a}, \bar{X}) = 8 \det \bar{Q} = 8 \det(P^T Q P) = 8(\det P)^2 \det Q = (\det P)^2 C(a, X).$$

#### Ejemplo 3.2

El jacobiano  $\frac{\partial(f_1, f_2, \dots, f_n)}{\partial(x_1, x_2, \dots, x_n)} = \det \left( \frac{\partial f_j}{\partial x_i} \right)$  de  $n$ ,  $n$ -formas  $f_i$  de grado  $d_i$  con  $i = 1 \dots n$ , es un covariante adjunto de peso 1, orden  $(\sum d_i) - n$  y multigrado  $(1, 1, \dots, 1)$ . Ver secciones (3.1 y 3.2).

Consideramos las dos 2-formas de grado 1, dadas por  $f_1 = Ax + By$  y  $f_2 = Cx + Dy$ , observemos que en este caso,

$$C(A, B, C, D, x, y) = \frac{\partial(f_1, f_2)}{\partial(x, y)} = \det \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} \end{bmatrix} = AD - BC.$$

Notemos que se cumple que el orden está dado por  $(\sum d_i) - n = 1 + 1 - 2 = 0$  y el bigrado  $(1, 1)$ .

Verifiquemos ahora que  $C(A, B, C, D, x, y)$  es un concomitante adjunto de  $f_1$  y  $f_2$ , bajo la acción de  $GL_2(\mathbb{R})$ .

Si  $P \in GL_2(\mathbb{R})$  y  $P^{-1} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$  tenemos que  $\bar{X} = P^{-1}X = \begin{bmatrix} ax + by \\ cx + dy \end{bmatrix}$  luego:

$$f_1(\bar{A}, \bar{B}, \bar{X}) = \bar{A}(ax + by) + \bar{B}(cx + dy)$$

y como queremos que  $f_1(\bar{A}, \bar{B}, \bar{X}) = f_1(A, B, X)$  se obtiene que  $\bar{A} = (dA - cB)detP$  y  $\bar{B} = (aB - bA)detP$ .

Analogamente, de  $f_2(\bar{C}, \bar{D}, \bar{X}) = f_2(C, D, X)$  se obtiene que  $\bar{C} = (dC - cD)detP$  y  $\bar{D} = (aD - bC)detP$ . Luego,

$$C(\bar{A}, \bar{B}, \bar{C}, \bar{D}, \bar{X}) = \bar{A}\bar{D} - \bar{B}\bar{C} = (detP)^2[(ad-bc)AD - (ad-bc)BC] = (detP)[AD - BC],$$

obteniendo finalmente

$$C(\bar{A}, \bar{B}, \bar{C}, \bar{D}, \bar{X}) = (detP)C(A, B, C, D, X).$$

# Capítulo 4

## Cónicas Projectivas y Haces de Cónicas

### 4.1. Cónicas y Haces de Cónicas

$P^k(\mathbb{R})$  denota el espacio proyectivo de dimensión  $k$  sobre el campo  $\mathbb{R}$ . Una cónica del plano proyectivo  $P^2(\mathbb{R})$  está dada por una ecuación no nula homogénea de grado 2. Se expresa de la forma

$$f = Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dxy + Eyz + Fxz = 0 \quad (4.1)$$

determinada por  $[A : B : C : D : E : F] \in P^5(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^6 / \sim$ .

En otras palabras una cónica proyectiva está dada por una sextupla de números, no todos nulos. Dos tales sextuplas determinan la misma cónica si una es un múltiplo escalar de la otra, por un escalar no nulo.

La podemos también escribir como la forma cuadrática ternaria,

$$f = [x \ y \ z] \begin{bmatrix} A & \frac{D}{2} & \frac{F}{2} \\ \frac{D}{2} & B & \frac{E}{2} \\ \frac{F}{2} & \frac{E}{2} & C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = 0$$

cuya matriz está en el espacio  $Sim(3, \mathbb{R})$  y que está bien definida salvo producto por un escalar. La denotaremos como  $Q_S = X^t S X$  donde,

$$X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 \text{ y } S = \begin{bmatrix} A & D & F \\ D & B & E \\ F & E & C \end{bmatrix} \in Sim(3, \mathbb{R}).$$

Por tanto, podemos considerar el espacio de las cónicas como  $P(Sim(3; \mathbb{R}))$ , proyectización del espacio de las matrices semétricas.

Geoméricamente, una cónica es el conjunto de ceros en  $P^2(\mathbb{R})$  de la cónica algebraica  $Q_S = 0$ . Notemos que dos ecuaciones diferentes pueden describir el mismo lugar geométrico, por ejemplo  $x^2 + y^2 = 0$  y  $2x^2 + y^2 = 0$ , describen ambas el mismo

punto  $(0, 0)$  en 2D.

Decimos que la cónica es degenerada si  $\det \begin{bmatrix} A & D & F \\ D & B & E \\ F & E & C \end{bmatrix} = 0$ , una cónica puede degenerarse a una sola línea, a una línea doble, a un par de líneas diferentes, a un punto ó al conjunto vacío.

## 4.2. Haces de Cónicas

Un haz de cónicas es una línea en la proyectización de las matrices simétricas  $P(\text{Sim}(3, \mathbb{R}))$ . Es decir, dadas las formas cuadráticas ternarias  $Q_S = X^t S X$  y  $Q_T = X^t T X$ , el haz de cónicas generado por  $Q_S$  y  $Q_T$  es el conjunto de todas las combinaciones lineales  $\lambda Q_S + \mu Q_T = 0$  donde  $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ . Por ejemplo la figura 11, muestra el haz de cónicas generado por las cónicas  $y^2 - z^2 = 0$  y  $xy = 0$ .

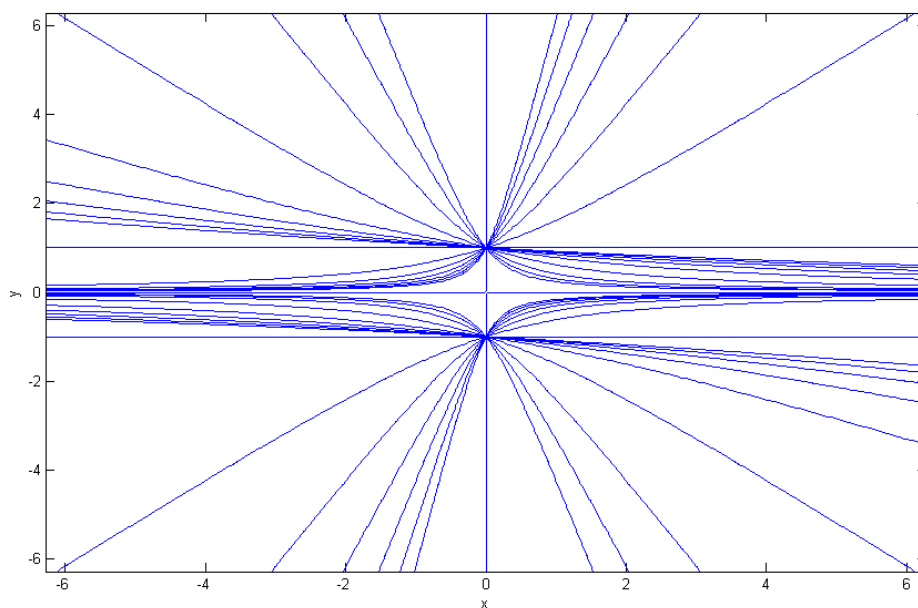


figura 11

Todas las cónicas de un haz comparten un conjunto de puntos llamados *puntos base del haz* [5], determinados por la intersección de dos cónicas distintas del haz. A cada tipo de intersección de un haz se le conoce como *morfología de intersección del haz*. Los haces se clasifican en 9 órbitas bajo la acción del grupo lineal  $GL_3(\mathbb{R})$  según su morfología de intersección, como veremos en la sección (4.5).

En lo que sigue estudiaremos la manera de definir una acción de grupo sobre los haces y un tipo de concomitante con respecto a esta acción, que denominaremos *combinante*. Éstos nos permitirán, una vez identificados, hacer una clasificación de los haces según la morfología de intersección. Para definir esta acción primero explo-

raremos acciones sobre pares de formas cuadráticas ternarias y definiremos un tipo de concomitante con respecto a dichas acciones.

### 4.3. Concomitantes de Pares de Formas Cuadráticas Ternarias Bajo la Acción de $GL_3(\mathbb{R})$

Denotemos por  $\Phi$  el espacio de los pares de formas cuadráticas ternarias y por  $P(\Phi)$  la proyectización de dicho espacio. La acción del grupo lineal  $GL_3(\mathbb{R})$  sobre  $\Phi$  (y  $P(\Phi)$ ) se define por sustitución lineal en el espacio de variables de la siguiente manera: dada una matriz  $\theta \in GL_3(\mathbb{R})$  y un par de formas cuadráticas ternarias  $(Q_S, Q_T) \in \Phi$  la acción está dada por

$$\theta \times (Q_S, Q_T) \longmapsto (Q_S \circ \theta, Q_T \circ \theta) = ((\theta X)^T S (\theta X), (\theta X)^T T (\theta X)).$$

Ahora definimos un *concomitante de un par de formas cuadráticas ternarias con respecto a la acción anterior* como un polinomio  $C$  que satisface

$$C(Q_S \circ \theta, Q_T \circ \theta, x, y, z, \lambda, \mu) = (\det \theta)^n C(Q_S, Q_T, \theta(x, y, z), \lambda, \mu) \quad \forall \theta \in GL_3(\mathbb{R}), n \in \mathbb{Z}.$$

El objetivo de definir este tipo de concomitantes sobre pares de formas cuadráticas ternarias, es medir el grado de invariancia de dos cónicas de un haz, que son enviadas a otras dos cónicas de otro haz con la misma morfología de intersección, mediante el cambio de variables.

Este tipo de concomitantes sobre pares, son diferentes a los concomitantes adjuntos definidos en la sección (3.2), ya que este tipo de polinomios además de depender de los coeficientes y de las variables principales de las cónicas dadas, también dependen de la parametrización  $(\lambda, \mu)$  del haz que genera el par de cónicas. Éstos definirán en las próximas secciones un tipo de concomitante para haces de cónicas llamados combinantes.

### 4.4. Concomitantes de Pares de Formas Cuadráticas Ternarias Bajo la Acción de $GL_2(\mathbb{R})$

También hay una acción natural del grupo  $GL_2(\mathbb{R})$  sobre  $\mathbb{R}^2$  y por lo tanto sobre el conjunto de pares de cónicas. La acción sobre  $\Phi$  es por sustituciones lineales en  $Q_S$  y  $Q_T$  y por parametrizaciones lineales de  $(\lambda, \mu)$  (el parámetro de haz).

Es decir si  $\vartheta = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in GL_2(\mathbb{R})$  y  $(Q_S, Q_T) \in \Phi$  entonces la acción se define como

$$\vartheta \times (Q_S, Q_T) \longmapsto (aQ_S + bQ_T, cQ_S + dQ_T).$$

Un concomitante  $C$  de un par de formas cuadráticas ternarias con respecto a la acción anterior es un polinomio que satisface

$$C(\vartheta(Q_S, Q_T), x, y, z, \lambda, \mu) = (\det \vartheta)^n C(Q_S, Q_T, x, y, z, (\lambda, \mu)\vartheta) \quad \forall \vartheta \in GL_2(\mathbb{R}), n \in \mathbb{Z}.$$

Este tipo de concomitantes sobre pares de formas cuadráticas ternarias, miden el grado de invariancia asociado a un par de cónicas cuando éstas se transforman en otro par de cónicas que generan el mismo haz.

## 4.5. Acción Sobre un Haz de Cónicas

Las acciones anteriores sobre pares de formas cuadráticas ternarias, definen una acción  $P(GL_3(\mathbb{R}))$  (proyctización del grupo lineal) sobre los haces de cónicas, la cual se induce de manera natural a partir de las anteriores.

Así, dado el haz  $\lambda Q_S + \mu Q_T$  generado por el par  $(Q_S, Q_T)$  definimos la acción de  $P(GL_3(\mathbb{R}))$  sobre el haz, por sustituciones lineales de  $Q_S$  y  $Q_T$ .

Es decir, dado  $\theta \in P(GL_3(\mathbb{R}))$  y el par  $(Q_S, Q_T) \in \Phi$  la acción se define como

$$\theta \times (Q_S, Q_T) \longmapsto (Q_S \circ \theta, Q_T \circ \theta).$$

Geoméricamente, la acción toma dos cónicas de un haz y las envía a otras dos cónicas que generan otro haz, pero ¿cómo garantizar que la acción está bien definida? Es decir, ¿cómo podemos garantizar que al tomar otras dos cónicas del haz, la acción los envía al mismo haz generado por las cónicas iniciales  $(Q_S \circ \theta, Q_T \circ \theta)$ ?

La buena definición la garantiza la acción  $GL_2(\mathbb{R})$  sobre  $\Phi$  y la conmutatividad de la acciones  $GL_3(\mathbb{R})$  y  $GL_2(\mathbb{R})$  sobre el haz. Es decir, al tomar el par  $(Q_S, Q_T) \in \Phi$ ,

$\theta \in GL_3(\mathbb{R})$  y  $\vartheta = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in GL_2(\mathbb{R})$  podemos aplicar lo siguiente

$$\vartheta \times (\theta \times (Q_S, Q_T)) \longmapsto \vartheta \begin{bmatrix} X^T(\theta^T S \theta) X \\ X^T(\theta^T T \theta) X \end{bmatrix} \longmapsto \begin{bmatrix} aX^T(\theta^T S \theta) X + bX^T(\theta^T T \theta) X \\ cX^T(\theta^T S \theta) X + dX^T(\theta^T T \theta) X \end{bmatrix}.$$

También podemos aplicar

$$\theta \times (\vartheta \times (Q_S, Q_T)) \longmapsto \theta \begin{bmatrix} aX^T S X + bX^T T X \\ cX^T S X + dX^T T X \end{bmatrix} \longmapsto \begin{bmatrix} aX^T(\theta^T S \theta) X + bX^T(\theta^T T \theta) X \\ cX^T(\theta^T S \theta) X + dX^T(\theta^T T \theta) X \end{bmatrix}.$$

Lo anterior garantiza que dado un haz generado por  $Q_S$  y  $Q_T$ , el cual coincide con el haz generado por  $aQ_S + bQ_T$  y  $cQ_S + dQ_T$ , la acción  $P(GL_3(\mathbb{R}))$  los envía al mismo haz.

La acción de  $P(GL_3(\mathbb{R}))$  sobre los haces de cónicas induce una partición del espacio de haces de cónicas, exactamente de acuerdo con el tipo de intersección. El siguiente teorema establece claramente la afirmación anterior.

**Teorema 4.1.** *Dos haces no degenerados de cónicas (que no constan de cónicas degeneradas) son equivalentes bajo la acción de  $P(GL_3(\mathbb{R}))$  si y sólo si tienen el mismo número de puntos base reales e imaginarios tomando en cuenta multiplicidades, donde un punto base es un punto que satisface las ecuaciones de un haz.*

Es decir, al aplicar la acción de grupo  $P(GL_3(\mathbb{R}))$  sobre un haz de cónicas con una morfología de intersección definida, se obtiene otro haz con la misma morfología de intersección. La figura 13, muestra como el haz mostrado en la figura 12, generado por las cónicas  $x^2 - z^2 = 0$  y  $x^2 - y^2 = 0$  es transformado mediante la acción con la matriz

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

De donde observamos que la morfología de intersección sigue siendo en 4 puntos, dos de los cuales son muy cercanos.

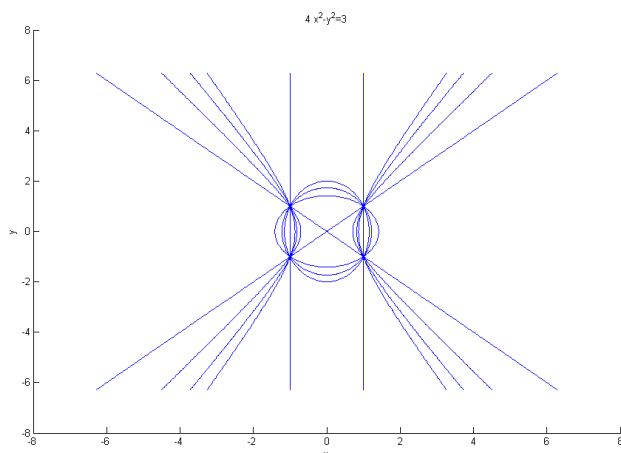


Figura 12

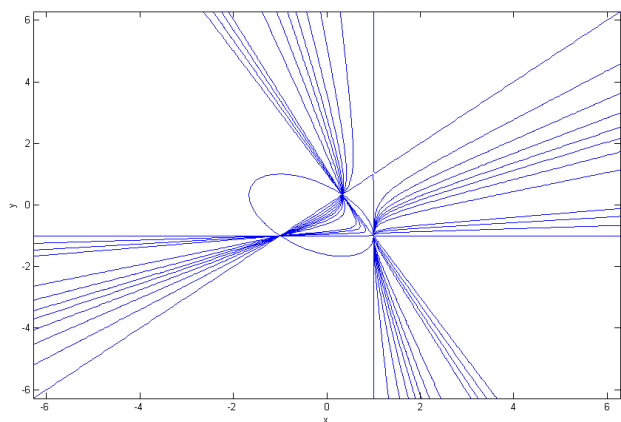


Figura 13



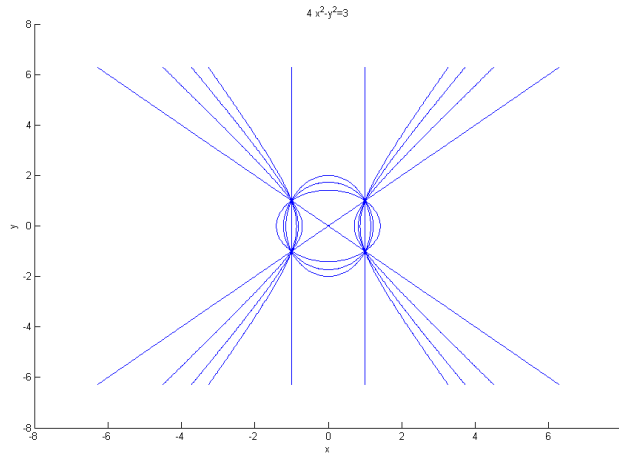
Tabla 1

Orbita	morfología real	$Q_S$	$Q_T$
I	cuatro puntos simples	$x^2 - z^2$	$x^2 - y^2$
Ia	conjunto vacío	$x^2 + z^2$	$x^2 + y^2$
Ib	dos puntos simples	$yz$	$x^2 + y^2 - z^2$
II	dos puntos simples y uno doble	$y^2 - z^2$	$xy$
IIa	un punto doble	$y^2 + z^2$	$xy$
III	dos puntos dobles	$z^2$	$x^2 - y^2$
IIIa	conjunto vacío	$x^2 + y^2$	$z^2$
IV	un punto simple y un punto triple	$xz + y^2$	$yz$
V	un punto cuádruple	$y^2$	$z^2 + xy$

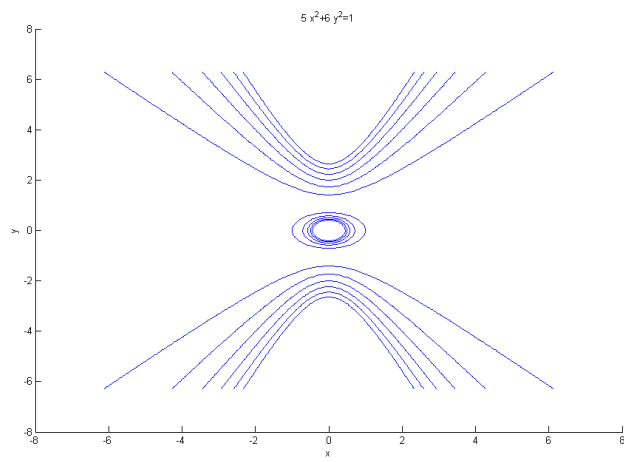
En realidad hay 9 órbitas de haces no degenerados de cónicas bajo la acción del grupo  $P(GL_3(\mathbb{R}))$  sobre los haces.

La tabla 1 da dos representantes de cada órbita y la morfología de la intersección real asociada con cada órbita.

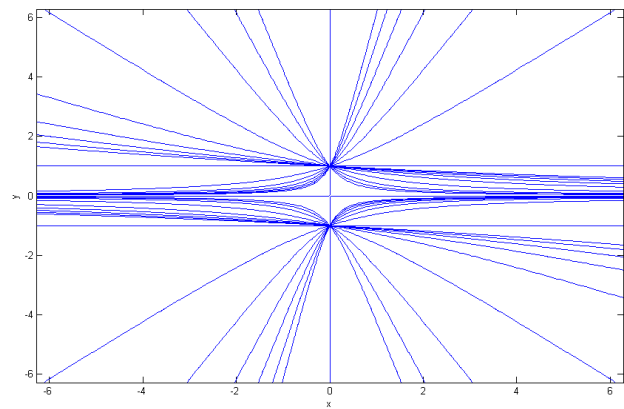
Las siguientes figuras muestran las diferentes órbitas según la morfología de intersección



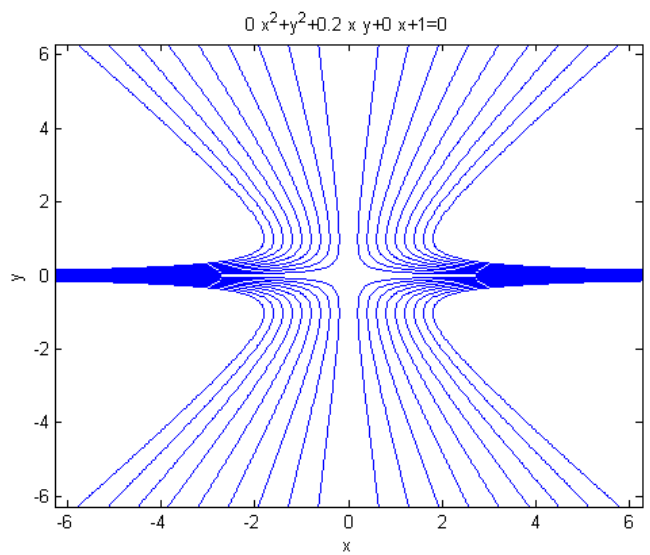
Orbita I



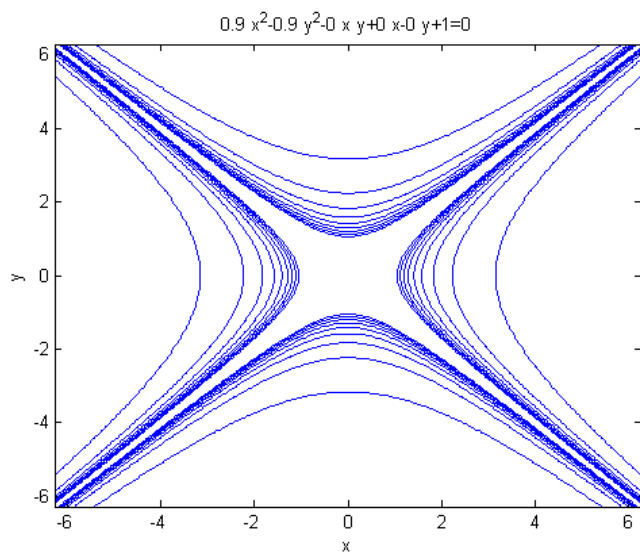
Orbita Ia



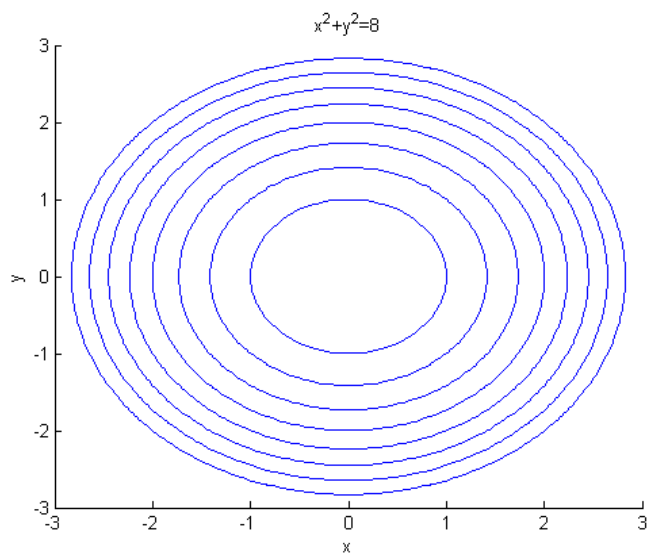
Orbita II



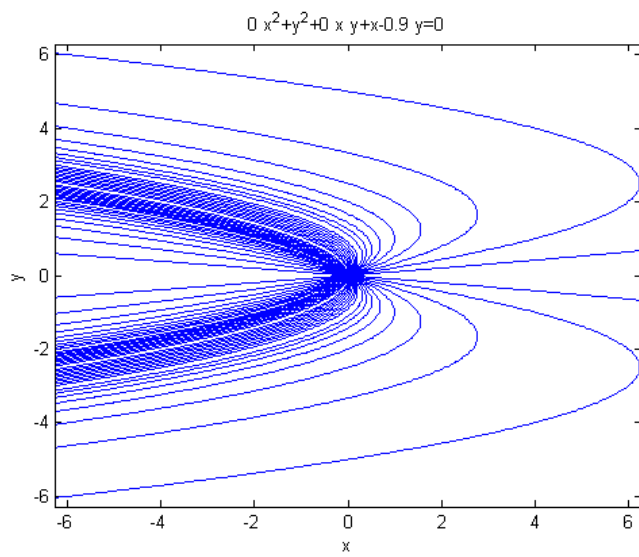
Orbita IIa



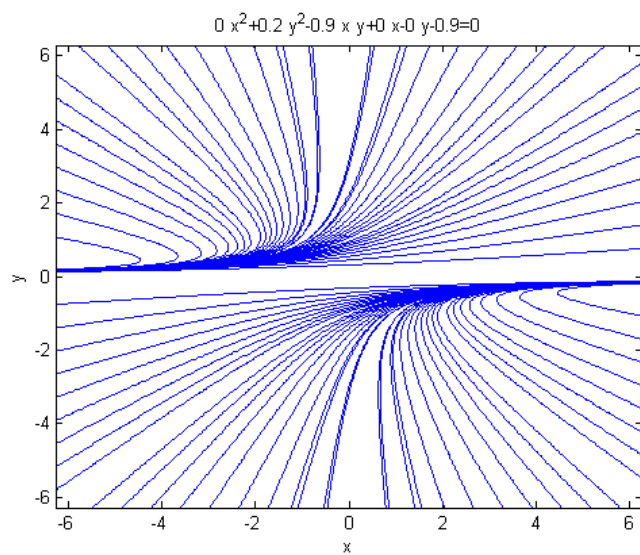
Orbita III



Orbita IIIa



Orbita IV



Orbita V

# Capítulo 5

## Combinantes

**Definición 5.1:** *Un combinante de un haz de cónicas  $\lambda f + \mu g$  es un polinomio  $C \in \mathbb{R}[a, X, U]$  que resulta ser un concomitante del par  $(f, g)$  bajo la acción de  $GL_3(\mathbb{R})$  y bajo la acción de  $GL_2(\mathbb{R})$ .*

En lo que sigue identificaremos algunos concomitantes de pares bajo la acción de  $GL_3(\mathbb{R})$  y algunos combinantes de haces generados por pares  $(f, g)$  que serán clave para la clasificación de los haces según la morfología de intersección.

### 5.1. Concomitantes de Pares Bajo la Acción $GL_3(\mathbb{R})$

En lo que sigue introducimos algunos de los concomitantes de pares de formas cuadráticas ternarias, bajo la sólo acción de  $GL_3(\mathbb{R})$  sobre el espacio de variables. Luego enunciaremos algunos de los combinantes de los haces que serán de gran interés para caracterizar los haces de cónicas según la morfología de intersección. La dependencia de los coeficientes de las cónicas será medida en términos del bigrado  $(d_S, d_T)$  donde  $d_S$  es el grado total en los coeficientes de  $Q_S$  y  $d_T$  el grado total en coeficientes de  $Q_T$ .

### 5.2. Invariantes de Pares Bajo la Acción de $GL_3(\mathbb{R})$

*Un invariante de un par de formas cuadráticas ternarias  $(f, g)$  es un concomitante adjunto del par  $(f, g)$  bajo la sola acción de  $GL_3(\mathbb{R})$  sobre el par, cuyo grado en el espacio de variables es cero, y cuyo grado en el espacio de variables duales también es cero, es decir solo depende de los coeficientes de las dos formas cuadráticas dadas.*

Recordemos que un concomitante adjunto sobre una colección de  $n$ -formas:

$f_i(a_i, X), i = 1 \dots p$ , no necesariamente todas con el mismo grado, es un polinomio

$J \in \mathbb{R}[a_1, \dots, a_p, X, U]$  que satisfice:

$$J(\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_p, \bar{X}, \bar{U}) = (\det P)^w J(a_1, \dots, a_p, X, U), \forall P \in GL_3(\mathbb{R}), w \in \mathbb{Z}.$$

Ver sección (3.2).

Empezaremos considerando un invariante muy especial de pares de formas cuadráticas ternarias bajo la acción de  $GL_3(\mathbb{R})$ .

**Teorema 5.1.** *Dadas dos formas cuadráticas  $Q_S = X^t S X$  y  $Q_T = X^t T X$ , donde*

$$S = \begin{bmatrix} A & D & E \\ D & B & F \\ E & F & C \end{bmatrix}$$

$$T = \begin{bmatrix} G & J & K \\ J & H & L \\ K & L & I \end{bmatrix},$$

la forma característica asociada al par

$$D(\lambda, \mu) = \det(\lambda S + \mu T) = a\lambda^3 + b\lambda^2\mu + c\lambda\mu^2 + d\mu^3 \quad (5.1)$$

es un invariante bajo la acción de  $GL_3(\mathbb{R})$  de peso dos, donde  $a$  tiene bigrado  $(3, 0)$ ,  $b$  tiene bigrado  $(2, 1)$ ,  $c$  tiene bigrado  $(1, 2)$  y  $d$  tiene bigrado  $(0, 3)$ . Más concretamente

$$a = ABC - AF^2 - CD^2 + 2DEF - E^2B,$$

$$b = (AB)I + (AC)H - 2(AF)L + (BC)G - (F^2)G - (D^2)I - (CD)J + (DE)L + (FD)K \\ - (CD)J + (EF)J + (ED)L + (FE)J - (E^2)H - (BE)K + (DE)K - (EB)K,$$

$$c = A(HI) - A(L^2) + B(GI) + C(GH) - 2F(LG) - D(JI) - D(KL) - I(JD) - C(J^2) \\ + E(LJ) + F(KJ) + E(JL) - E(KH) + D(KL) + F(KJ) - E(KH) - B(K^2),$$

y

$$d = GHI - GL^2 - IJ^2 + 2KLJ - HK^2.$$

**Demostración.**

Dado  $\theta \in GL_3(\mathbb{R})$ , la acción de  $GL_3(\mathbb{R})$  sobre el par  $(Q_S, Q_T)$  produce el par,

$$(Q_{S\theta}, Q_{T\theta}) = (X^T(\theta^T S \theta)X, X^T(\theta^T T \theta)X).$$

Comprobemos que mediante esta acción,  $D(\lambda, \mu)$  es un concomitante adjunto del par. En efecto,

$$\det(\lambda(\theta^T S \theta) + \mu(\theta^T T \theta)) = \det(\theta^T(\lambda S + \mu T)\theta) = (\det \theta)^2 \det(\lambda S + \mu T).$$

De donde observamos que  $D(\lambda, \mu)$  es un invariante de peso 2 del par  $(Q_S, Q_T)$ . Desarrollando directamente el cálculo de  $\det(\lambda S + \mu T)$ , obtenemos explícitamente los coeficientes  $a, b, c, d$  que se muestran en el enunciado con sus respectivos bigrados.

### 5.3. Covariantes de Pares Bajo la Acción de $GL_3(\mathbb{R})$

Un covariante de un par de formas cuadráticas ternarias  $(Q_S, Q_T)$  es un con-comitante adjunto del par  $(Q_S, Q_T)$ , ver sección (3.2), bajo la sola acción de  $GL_3(\mathbb{R})$  sobre el par, cuyo grado en el espacio de variables es diferente de cero, y cuyo grado en el espacio de variables duales es cero. Es decir, sólo depende de los coeficientes de las dos formas cuadráticas dadas y de las variables principales.

A continuación estudiaremos dos covariantes que jugarán un papel importante para la clasificación de los haces.

**Teorema 5.2.** Sean  $S$  y  $T$  en  $Sim(3, \mathbb{R})$  y sean  $S' = adjS$  y  $T' = adj(T)$ . Consideremos además  $U$  la matriz simétrica definida por

$$U = \frac{1}{\lambda\mu} [adj(\lambda S' + \mu T') - a\lambda^2 S - d\mu^2 T]$$

donde  $a$  y  $d$  son los invariantes de la forma característica  $D$  (5.1). Denotemos por  $Q_U = X^T U X$  la forma cuadrática asociada y definamos también el jacobiano

$$G(x, y, z) = \frac{1}{8} \frac{\partial(Q_S, Q_T, Q_U)}{\partial(x, y, z)}.$$

Se cumple,

- a.  $Q_U$  es un covariantes adjuntos de  $Q_S$  y  $Q_T$  bajo la acción de  $GL_3(\mathbb{R})$  (sección 3.2), con bigrado  $(2, 2)$  y peso 2.
- b.  $G$  es un covariantes adjuntos de  $Q_S$  y  $Q_T$  bajo la acción de  $GL_3(\mathbb{R})$  (sección 3.2) tiene bigrado  $(3, 3)$  y peso 3.

#### Demostración.

Probaremos que  $Q_U$  es un covariante adjunto de  $Q_S$  y  $Q_T$  de acuerdo a la definición (3.2), bajo la acción de  $GL_3(\mathbb{R})$ . Para la demostración tendremos en cuenta las siguientes propiedades de la adjunta.

Dadas las matrices  $A_{n \times n}$ ,  $\theta_{n \times n}$ , y  $\lambda \in \mathbb{R}$  se cumplen las siguientes propiedades:

1.  $(adj(A))^T = adj(A^T)$ .
2.  $adj(\theta^T S \theta) = (det\theta)^2 [\theta^{-1} adjS(\theta^{-1})^T]$ .
3.  $adj(\lambda A) = \lambda^2 adj(A)$ .

En efecto, por propiedades de la adjunta y dado que  $S$  y  $T$  son simétricas se obtiene que la matriz

$$U = \frac{1}{\lambda\mu} [adj(\lambda S' + \mu T') - a\lambda^2 S - d\mu^2 T]$$

es simétrica.

Sean  $Q_U = X^T U X$  y  $Q_S = X^T S X$  y  $Q_T = X^T T X$ . Veremos solamente que  $Q_U =: C(S, T, X)$  (como polinomio que depende de  $S$ ,  $T$  y  $X$ ) es un concomitante adjunto covariante de  $Q_S$  y  $Q_T$ . Primero observemos el efecto de la acción sobre las matrices  $S$  y  $T$ . Dado que se debe cumplir que  $\bar{Q}_S = Q_S$ , se tiene que

$$\bar{Q}_S = (\theta^{-1} X)^T \bar{S} (\theta^{-1} X) = X^T [(\theta^{-1})^T \bar{S} \theta^{-1}] X,$$

de donde se obtiene que  $\bar{S} = \theta^T S \theta$ .

Análogamente, como se debe cumplir  $\bar{Q}_T = Q_T$  se obtiene que  $\bar{T} = \theta^T T \theta$ .

Aplicando estas transformaciones a la matriz simétrica  $U$  se obtiene que

$$\bar{U} = \frac{1}{\lambda\mu} [\text{adj}(\lambda \text{adj}(\theta^T S \theta) + \mu \text{adj}(\theta^T T \theta)) - a\lambda^2(\theta^T S \theta) - d\mu^2\theta^T T \theta \lambda\mu],$$

y aplicando las propiedades resulta que

$$\bar{U} = (\det\theta)^2 [\theta^T U \theta].$$

Finalmente, observamos que en efecto se cumple que  $Q_U = X^T U X =: C(S, T, X)$  es un concomitante adjunto de  $Q_S$  y  $Q_T$

$$C(\bar{S}, \bar{T}, \bar{X}) =: Q_{\bar{U}} = (\theta^{-1} X)^T [(\det\theta)^2 [\theta^T U \theta]] (\theta^{-1} X) = (\det\theta)^2 C(S, T, X).$$

Lo que finaliza la prueba.

## 5.4. Contravariantes de pares bajo la acción de $\mathbf{GL}_3(\mathbb{R})$

Un contravariante de un par de formas cuadráticas ternarias  $(Q_S, Q_T)$  es un concomitante adjunto del par  $(Q_S, Q_T)$  bajo la sola acción de  $GL_3(\mathbb{R})$  sobre el par (sección 3.2), cuyo grado en el espacio de variables duales es diferente de cero, y cuyo grado en el espacio de variables principales es cero, es decir solo depende de los coeficientes de las dos formas cuadráticas dadas y de las variables duales.

**Teorema 5.3.** Sean  $S$  y  $T$  en  $\text{Sim}(3, \mathbb{R})$  y sean  $S' = \text{adj}S$  y  $T' = \text{adj}(T)$ . Sea  $E$  la matriz simétrica definida por

$$E = \frac{1}{\lambda\mu} [\text{adj}(\lambda S + \mu T) - \lambda^2 S' - \mu^2 T'],$$

y sea  $Q_E = U^T E U$  donde  $U = (u_0, u_1, u_2)$ , la forma cuadrática asociada en las variables duales y sea

$$H = \frac{1}{8} \frac{\partial(Q_{S'}, Q_{T'}, Q_E)}{\partial(u_0, u_1, u_2)}.$$

Análogamente al caso de los covariantes se cumple que,



a.  $Q_E$  es un contravariante adjuntos de  $Q_S$  y  $Q_T$  bajo la acción de  $GL_3(\mathbb{R})$ , con bigrado  $(1,1)$  y peso dos.

b.  $H$  es un contravariante adjunto de  $Q_S$  y  $Q_T$  bajo la acción de  $GL_3(\mathbb{R})$ , con bigrado  $(3,3)$  y peso cinco.

### **Demostración.**

Verifiquemos solamente que  $Q_E$  es un concomitante adjunto de  $Q_S$  y  $Q_T$ . De nuevo, aplicando las propiedades de la adjunta enunciadas en el teorema (5.2), se demuestra facilmente que

$$E = \frac{1}{\lambda\mu} [\text{adj}(\lambda S + \mu T) - \lambda^2 \text{adj} S - \mu^2 \text{adj} T]$$

es una matriz simétrica.

Sean  $Q_E = U^T E U$ ,  $Q_S = X^T S X$  y  $Q_T = X^T T X$  las formas cuadráticas ternarias asociadas a las matrices simétricas  $E$ ,  $S$  y  $T$  respectivamente. Veremos que  $Q_E =: C(S, T, X, U)$ , (como polinomio que depende de  $S$ ,  $T$ ,  $X$  y  $U$ ) es un concomitante adjunto contravariante de  $Q_S$  y  $Q_T$ .

Dado que se debe cumplir que  $\bar{Q}_S = Q_S$  y  $\bar{Q}_T = Q_T$ , tal como en la prueba de (5.2) donde  $\bar{S} = \theta^T S \theta$  y  $\bar{T} = \theta^T T \theta$  y aplicando estas trasformaciones a la matriz  $E$  obtenemos:

$$\bar{E} = \frac{1}{\lambda\mu} [\text{adj}(\lambda \theta^T S \theta + \mu \theta^T T \theta) - \lambda^2 \text{adj}(\theta^T S \theta) - \mu^2 \text{adj}(\theta^T T \theta)].$$

De las propiedades resulta que

$$\bar{E} = (\det \theta)^2 [\theta^{-1} E (\theta^{-1})^T].$$

Finalmente

$$Q_{\bar{E}} =: C(\bar{S}, \bar{T}, \bar{X}, \bar{U}) = (\theta^T U)^T [(\det \theta)^2 \theta^{-1} E (\theta^{-1})^T] (\theta^T U) = (\det \theta)^2 U^T E U.$$

Por lo tanto se ha probado que

$$C(\bar{S}, \bar{T}, \bar{X}, \bar{U}) = (\det \theta)^2 C(S, T, X, U).$$

Lo que finaliza la prueba.

## **5.5. Transversión y el $\Omega$ -Proceso de Cayley**

La transversión se basa en un operador diferencial introducido por Cayley [6]. La propuesta consiste en obtener concomitantes a partir de otros concomitantes. Tomemos dos variables independientes  $X^1 = (x_1^1, x_2^1) \in \mathbb{R}^2$  y  $X^2 = (x_1^2, x_2^2) \in \mathbb{R}^2$  y consideramos la acción de  $GL_2(\mathbb{R})$  sobre el producto cartesiano  $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$ , dadas por

las transformaciones simultáneas

$$P \times (X^1, X^2) =: (P^{-1}X^1, P^{-1}X^2), \quad P \in GL_2(\mathbb{R}) \quad X = (X^1, X^2) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2.$$

El operador diferencial de segundo orden

$$\Omega_X = \det \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1^1} & \frac{\partial}{\partial x_1^2} \\ \frac{\partial}{\partial x_2^1} & \frac{\partial}{\partial x_2^2} \end{bmatrix} = \frac{\partial^2}{\partial x_1^1 \partial x_2^2} - \frac{\partial^2}{\partial x_1^2 \partial x_2^1}$$

es conocido como el  $\Omega$ -proceso de Cayley con respecto a las variables  $X^1$  y  $X^2$ .

**Lema 5.1.** *Bajo las transformaciones siltmultáneas mencionadas arriba, el  $\Omega$ -proceso cumple*

$$\Omega_{\bar{X}} = \det P \Omega_X$$

donde  $P \in GL_2(\mathbb{R})$ ,  $X = (X^1, X^2)$  y  $\bar{X} = (P^{-1}X^1, P^{-1}X^2)$ .

**Demostración.**

Dada una matriz  $P \in GL_2(\mathbb{R})$  tal que  $P^{-1} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ , bajo las trasformaciones simultaneas se cumple

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1^1 \\ x_2^1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ax_1^1 + bx_2^1 \\ cx_1^1 + dx_2^1 \end{bmatrix} =: \begin{bmatrix} \bar{x}_1^1 \\ \bar{x}_2^1 \end{bmatrix}$$

y

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1^2 \\ x_2^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ax_1^2 + bx_2^2 \\ cx_1^2 + dx_2^2 \end{bmatrix} =: \begin{bmatrix} \bar{x}_1^2 \\ \bar{x}_2^2 \end{bmatrix}.$$

Mediante la regla de la cadena se obtiene

$$\begin{aligned} \left[ \frac{\partial}{\partial x_1^1}, \frac{\partial}{\partial x_2^1}, \frac{\partial}{\partial x_1^2}, \frac{\partial}{\partial x_2^2} \right] &= \left[ \frac{\partial}{\partial \bar{x}_1^1}, \frac{\partial}{\partial \bar{x}_2^1}, \frac{\partial}{\partial \bar{x}_1^2}, \frac{\partial}{\partial \bar{x}_2^2} \right] \begin{bmatrix} a & b & 0 & 0 \\ c & d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & b \\ 0 & 0 & c & d \end{bmatrix} \\ &= \left[ a \frac{\partial}{\partial \bar{x}_1^1} + c \frac{\partial}{\partial \bar{x}_2^1}, b \frac{\partial}{\partial \bar{x}_1^1} + d \frac{\partial}{\partial \bar{x}_2^1}, a \frac{\partial}{\partial \bar{x}_1^2} + c \frac{\partial}{\partial \bar{x}_2^2}, b \frac{\partial}{\partial \bar{x}_1^2} + d \frac{\partial}{\partial \bar{x}_2^2} \right]. \end{aligned}$$

Luego, haciendo la sustitución

$$\begin{aligned} \Omega_X &= \left( a \frac{\partial}{\partial \bar{x}_1^1} + c \frac{\partial}{\partial \bar{x}_2^1} \right) \left( b \frac{\partial}{\partial \bar{x}_1^2} + d \frac{\partial}{\partial \bar{x}_2^2} \right) - \left( b \frac{\partial}{\partial \bar{x}_1^1} + d \frac{\partial}{\partial \bar{x}_2^1} \right) \left( a \frac{\partial}{\partial \bar{x}_1^2} + c \frac{\partial}{\partial \bar{x}_2^2} \right) \\ &= (ad - bc) \Omega_{\bar{X}} \\ &= \det P^{-1} \Omega_{\bar{X}} \end{aligned}$$

es decir  $\Omega_{\bar{X}} = \det P \Omega_X$ . Lo que finaliza la prueba.

**Definición 5.2:** Sea  $k \in \mathbb{N}$ , la  $k$ -transversión de dos formas binarias  $f_1(X)$  y  $f_2(X)$ , donde  $X = (x_1, x_2)$ , es la función

$$(f_1, f_2)_k(X) =: (\Omega_X)^k [f_1(X^1) f_2(X^2)] x_1^1 = x_1^2 = x_1, x_2^1 = x_2^2 = x_2$$

donde  $(\Omega_X)^k$  significa aplicar  $k$ -veces sucesivas el operador  $\Omega_X$ , a el producto de las formas binarias  $f_1$  y  $f_2$  evaluadas en  $X^1$  y  $X^2$  respectivamente y finalmente hacemos  $x_1^1 = x_1^2 = x_1$  y  $x_2^1 = x_2^2 = x_2$ .

**Teorema 5.4.** Sean  $f_1$  y  $f_2$  dos formas binarias que tienen grados  $q_1$  y  $q_2$  y pesos  $w_1$  y  $w_2$ , entonces  $(f_1, f_2)_k$  es un covariante adjunto de  $f_1$  y  $f_2$  de peso  $w_1 + w_2 + k$  y orden  $q_1 + q_2 - 2k$  (ver secciones 3.1, 3.2 y 3.3).

En particular, si  $f$  tiene grado  $q$ ,  $(f, f)_k$  es un covariante de  $f$  de peso  $k$ , grado 2 y orden  $2q - 2k$  bajo la acción de  $GL_2(\mathbb{R})$  sobre el espacio de variables (artículo [6]).

### Ejemplo 5.1

Si consideramos la forma binaria de grado 2, dada por  $f_1 = a_1x^2 + a_2xy + a_3y^2$  obtenemos el invariante adjunto (sección 3.2)  $-\frac{1}{2}(f_1, f_1)_2 = a_2^2 - 4a_1a_3$  el cual tiene orden cero y grado 2. Se denomina *el discriminante* de  $f_1$ .

### Ejemplo 5.2

Sean  $f_1(x_1^1, x_2^1)$  y  $f_2(x_1^2, x_2^2)$  dos formas binarias, calculemos la primera transversión de estas formas

$$(f_1, f_2)_1(X) = \Omega_X [f_1(x_1^1, x_2^1) f_2(x_1^2, x_2^2)] = \frac{\partial^2}{\partial x_1^1 \partial x_2^2} [f_1(X^1) f_2(X^2)] - \frac{\partial^2}{\partial x_1^2 \partial x_2^1} [f_1(X^1) f_2(X^2)].$$

De donde obtenemos que

$$(f_1, f_2)_1(X) = \frac{\partial f_1(X^1)}{\partial x_1^1} \frac{\partial f_2(X^2)}{\partial x_2^2} - \frac{\partial f_2(X^2)}{\partial x_1^2} \frac{\partial f_1(X^1)}{\partial x_2^1}.$$

Luego, haciendo  $x_1^1 = x_1^2 = x_1$  y  $x_2^1 = x_2^2 = x_2$ , se obtiene que

$$(f_1, f_2)_1(X) = \frac{\partial f_1(X)}{\partial x_1} \frac{\partial f_2(X)}{\partial x_2} - \frac{\partial f_1(X)}{\partial x_2} \frac{\partial f_2(X)}{\partial x_1},$$

es decir,

$$(f_1, f_2)_1(X) = \det \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{bmatrix} = J(f_1, f_2)(X).$$

De donde, observamos que la primera transversión de dos formas binarias, coincide con el jacobiano de dichas formas.

### Ejemplo 5.3

Sea  $f$  una forma binaria, veamos lo que ocurre con la segunda transversión de  $f$  con ella misma. Es decir

$$(f, f)_2(X) = (\Omega_X)^2[f(x_1^1, x_2^1)f(x_1^2, x_2^2)] = \Omega_X \left[ \frac{\partial f(x_1^1, x_2^1)}{\partial x_1^1} \frac{\partial f(x_1^2, x_2^2)}{\partial x_2^2} - \frac{\partial f(x_1^2, x_2^2)}{\partial x_1^2} \frac{\partial f(x_1^1, x_2^1)}{\partial x_2^1} \right]$$

y aplicando la segunda transversión se obtiene que

$$(f, f)_2(X) = \frac{\partial^2 f(x_1^1, x_2^1)}{\partial (x_1^1)^2} \frac{\partial^2 f(x_1^2, x_2^2)}{\partial (x_2^2)^2} - 2 \frac{\partial^2 f(x_1^1, x_2^1)}{\partial x_1^1 x_2^1} \frac{\partial^2 f(x_1^2, x_2^2)}{\partial x_1^2 x_2^2} + \frac{\partial^2 f(x_1^1, x_2^1)}{\partial (x_2^1)^2} \frac{\partial^2 f(x_1^2, x_2^2)}{\partial (x_1^2)^2}.$$

Finalmente, haciendo  $x_1^1 = x_1^2 = x_1$  y  $x_2^1 = x_2^2 = x_2$ , obtenemos

$$(f, f)_2(X) = 2 \frac{\partial^2 f(x_1, x_2)}{\partial (x_1)^2} \frac{\partial^2 f(x_1, x_2)}{\partial (x_2)^2} - 2 \frac{\partial^2 f(x_1, x_2)}{\partial x_1 \partial x_2} \frac{\partial^2 f(x_1, x_2)}{\partial x_1 \partial x_2}.$$

Esto es

$$(f, f)_2(X) = 2 \det \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial (x_1)^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \frac{\partial^2 f}{\partial (x_2)^2} \end{bmatrix} = 2H(f)(X).$$

Observamos que la segunda transversión de  $f$  con ella misma es dos veces el Hessiano de  $f$ .

Como pudimos ver en los dos últimos ejemplos los concomitantes de una forma o de varias formas pueden ser producidos tomando sucesivas transversiones y composiciones de transversiones de esas formas, como lo indica el siguiente teorema que podemos consultar en el artículo [6].

**Teorema 5.5.** *Todo polinomio en  $\mathbb{R}$ , covariante e invariante de un sistema de formas binarias es una combinación de composiciones de transversiones de la forma*

$$(\dots, ((f, f)_{r_1}), f)_{r_2} \dots, f)_{r_l},$$

donde  $r_1, r_2, \dots, r_l$  son enteros positivos.

Ahora comenzamos con el estudio de combinantes de haces de cónicas, los cuales se dan en términos de transversiones de concomitantes conocidos de formas binarias.

## 5.6. Combinantes de Pares de Formas Cuadráticas Ternarias

Ahora nuestro enfoque es sobre la acción combinada de  $GL_3(\mathbb{R})$  sobre el espacio de variables y  $GL_2(\mathbb{R})$  sobre el haz variable (definición 5.1). Es decir, comenzaremos con el estudio de combinantes de un haz, lo cual será crucial para la clasificación de los haces y la determinación de su morfología de intersección. Empezaremos considerando los combinantes invariantes.

## 5.7. Combinantes Invariantes

Empezaremos con el caso de combinantes que no dependen del espacio de variables principales ni de las variables duales, es decir, los invariantes de un haz, los cuales se identifican mediante el siguiente teorema, que se puede consultar en [7].

**Teorema 5.6.** *Los invariantes de un haz de formas cuadráticas ternarias son los invariantes y covariantes de la forma característica  $D$  dada por (5.1), bajo la acción de  $GL_2(\mathbb{R})$  sobre el espacio de variables.*

Recordemos que la forma característica  $D$  del haz de cónicas es una forma binaria cúbica dada por

$$D(\lambda, \mu) =: \det(\lambda S + \mu T) = a\lambda^3 + b\lambda^2\mu + c\lambda\mu^2 + d\mu^3$$

Los covariantes no constantes de  $D$  son

1.  $D$  es un covariante no constante de él mismo.
2. El Hessiano de  $D$  dado por

$$H(\lambda, \mu) =: -\frac{1}{8}(D, D)_2 = (b^2 - 3ac)\lambda^2 + (bc - 9ad)\lambda\mu + (c^2 - 3bd)\mu^2,$$

el cual tiene grado 2 y orden 2.

3. El jacobiano de  $D$  y  $H$  dado por

$$J(\lambda, \mu) =: (D, H)_1 = (2b^3 + 27a^2d - 9abc)\lambda^3 + (3b^2c - 18ac^2 + 27abd)\lambda^2\mu + (18b^2d - 3c^2b - 27acd)\lambda\mu^2 + (2c^3 - 3bcd - 27ad^2)\mu^3,$$

el cual tiene grado 3 y orden 3.

4. El único invariante de  $D$  bajo la acción de  $GL_2(\mathbb{R})$  es su *discriminante*, el cual es también el discriminante de  $H$ , dado por

$$\Delta =: \frac{1}{6}(H, H)_2 = b^2c^2 - 4ac^3 - 4b^3d - 27a^2d^2 + 18abcd,$$

Estos invariantes no son algebraicamente independientes, satisfacen

$$4H^3 - J^2 - 27\Delta D^2 = 0,$$

lo cual se puede verificar reemplazando en la igualdad.

## 5.8. Combinantes Covariantes

En esta sección nuestro enfoque es sobre la construcción de combinantes del haz de cónicas, que no sean los invariantes y covariantes de la forma característica  $D$  dada en (5.1). El objetivo es describir algunos combinantes que nos permitan distinguir entre las órbitas de los haces.

Empezamos considerando la forma cuadrática,

$$R(\lambda, \mu) =: \lambda Q_S + \mu Q_T = \lambda X^t S X + \mu X^t T X = X^t (\lambda S + \mu T) X,$$

donde  $S, T \in Sim(3, \mathbb{R})$ , veremos que  $R(\lambda, \mu)$  es un combinante del haz generado por  $Q_S$  y  $Q_T$ .

Denotemos por

$$C(Q_S, Q_T, x, y, z, \lambda, \mu) = R(\lambda, \mu),$$

y veamos que es un concomitante bajo las dos acciones de  $GL_3(\mathbb{R})$  y  $GL_2(\mathbb{R})$  sobre el espacio de variables y sobre el haz variable, respectivamente.

Si  $\theta \in GL_3(\mathbb{R})$  se tiene que

$$C(Q_S \circ \theta, Q_T \circ \theta, x, y, z, \lambda, \mu) = C(Q_S, Q_T, \theta(x, y, z), \lambda, \mu).$$

En efecto,

$$\begin{aligned} C(Q_S \circ \theta, Q_T \circ \theta, x, y, z, \lambda, \mu) &= X^t [\lambda (\theta^t S \theta) + \mu (\theta^t T \theta)] X \\ &= (\theta X)^t (\lambda S + \mu T) (\theta X) \\ &= C(Q_S, Q_T, \theta(x, y, z), \lambda, \mu). \end{aligned}$$

Lo que prueba que  $R(\lambda, \mu)$  es un concomitante del par bajo la acción de  $GL_3(\mathbb{R})$ . Ahora, para mostrar que  $R(\lambda, \mu)$  es un concomitante bajo la acción de  $GL_2(\mathbb{R})$  tomemos,  $\vartheta = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in GL_2(\mathbb{R})$  y teniendo en cuenta que la acción de  $GL_2(\mathbb{R})$

sobre el par  $(Q_S, Q_T)$ , produce dos nuevas cónicas del haz dadas por

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_S \\ Q_T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} aQ_S + bQ_T \\ cQ_S + dQ_T \end{bmatrix}.$$

donde  $aQ_S + bQ_T = X^t(aS + bT)X$  y  $cQ_S + dQ_T = X^t(cS + dT)X$ . Luego

$$\begin{aligned} C(\vartheta(Q_S, Q_T), x, y, z, \lambda, \mu) &= X^t[\lambda(aS + bT) + \mu(cS + dT)]X \\ &= X^t[(a\lambda + c\mu)S + (b\lambda + d\mu)T]X \\ &= C(Q_S, Q_T, x, y, z, (\lambda, \mu)\vartheta). \end{aligned}$$

La *forma combinada* dual de  $R$ , es también una forma combinada del haz y está dada por

$$\Sigma(\lambda, \mu) =: \lambda^2 Q_{S'} + \lambda\mu Q_E + \mu^2 Q_{T'},$$

donde la matriz  $E$  es la enunciada en el teorema (5.3). Observemos de nuevo que para  $\vartheta = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in GL_2(C)$ , se tiene

$$C(\vartheta(Q_S, Q_T), x, y, z, \lambda, \mu) = C(Q_S, Q_T, x, y, z, (\lambda, \mu)\vartheta),$$

siendo  $C(\vartheta(Q_S, Q_T), x, y, z, \lambda, \mu) =: \Sigma(\lambda, \mu)$ . En efecto,

$$C(\vartheta(Q_S, Q_T), x, y, z, \lambda, \mu) = X^t[\lambda^2 \text{adj}(aS + bT) + \lambda\mu \hat{E} + \mu^2 \text{adj}(cS + dT)]X,$$

donde,

$$\hat{E} = \frac{1}{\lambda\mu} \{ \text{adj}[\lambda(aS + bT) + \mu(cS + dT)] - \lambda^2 \text{adj}[aS + bT] - \mu^2 \text{adj}[cS + dT] \}.$$

Al reemplazar  $\hat{E}$ , se obtiene,

$$\begin{aligned} C(\vartheta(Q_S, Q_T), x, y, z, \lambda, \mu) &= X^T \text{adj}[\lambda(aS + bT) + \mu(cS + dT)]X \\ &= X^T \text{adj}[(\lambda a + \mu c)S + (\lambda b + \mu d)T]X \\ &= X^T [(\lambda a + \mu c)^2 \text{adj}S + (\lambda a + \mu b)(\lambda b + \mu d)E + (\lambda b + \mu d)^2 \text{adj}T]X \\ &= C(Q_S, Q_T, x, y, z, (\lambda, \mu)\vartheta). \end{aligned}$$

El discriminante de  $\Sigma$  como forma binaria es un combinante(contravariante) del haz,

$$B = -\frac{1}{2}(\Sigma, \Sigma)_2 = Q_E^2 - 4Q_{S'}Q_{T'}, \quad (5.2)$$

donde  $B$  tiene bigrado  $(2, 2)$  en los coeficientes de las cónicas dadas. Finalmente, *el covariante cuadrático* dado por,

$$\tau = -cQ_S - bQ_T + 3Q_U, \quad (5.3)$$

donde  $c, b$  son como en (5.1) y  $U$  es la matriz simétrica enunciada en el teorema 5.2, es un combinante de bigrado  $(2, 2)$  del haz de cónicas generado por  $Q_S$  y  $Q_T$ ; y la matriz  $U$ , es la matriz simétrica enunciada en el teorema (5.2). Este es denominado el *combinante principal* ya que por medio de éste podemos obtener propiedades de invarianza de las órbitas de los haces.

**Definición 5.3:**

Dada una forma cuadrática ternaria  $Q_S = X^T S X$  denotamos por  $\sigma^+$  y por  $\sigma^-$ , el número de autovalores positivos y negativos de  $S$ , respectivamente. *La inercia* de  $S$  es el par ordenado  $(\sigma^+, \sigma^-)$ .

**Teorema 5.7.** *La inercia de  $\tau$  es un invariante de las órbitas de los haces, bajo la acción de  $PGL_3(\mathbb{R})$  (proyctización de  $GL_3(\mathbb{R})$ ).*

La demostración se encuentra en el artículo [2].

La inercia de  $\tau$  se puede determinar por inspección del polinomio característico de la matriz simétrica asociada de  $\tau$ , la cual denotaremos por  $J = -cS - bT + 3U$ . Este polinomio característico está dado por

$$\det(\lambda I - J) = \lambda^3 - tr(\tau)\lambda^2 + \gamma(\tau)\lambda - \Delta, \quad (5.4)$$

donde  $tr(\tau)$  es la traza de la matriz  $J$  y  $\gamma(\tau) = \lambda_1\lambda_2 + \lambda_1\lambda_3 + \lambda_2\lambda_3$  donde los  $\lambda_i$ , son los valores propios de  $J$ , con  $i = 1, 2, 3$ .

Según la regla de signos de Descartes, el número de valores propios positivos es el número de cambios de signo en la secuencia

$$(+, -sgn(tr(\tau)), sgn(\gamma(\tau)), -sgn(\Delta)).$$

Similarmente, el número de valores propios negativos es el número de cambios de signo en la secuencia

$$(-, -sgn(tr(\tau)), -sgn(\gamma(\tau)), -sgn(\Delta)).$$



## Capítulo 6

# Clasificación de las Órbitas de los Haces no Degenerados de Cónicas

Ahora veremos como los invariantes y combinantes que hemos identificado ayudan a distinguir entre las órbitas de los haces. Empezamos con el caso  $D(\lambda, \mu) \neq 0$ , teniendo en cuenta el Teorema 5.6, el discriminante  $\Delta$  es el único invariante del haz bajo la acción de  $PGL_3(\mathbb{R})$ .

Computando el signo de  $\Delta$  sobre los representantes de cada órbita de haces dados en la Tabla 1 (sección 4.5), obtenemos lo siguiente,

- $\Delta > 0$  :  $I, Ia$
- $\Delta < 0$  :  $Ib$
- $\Delta = 0$  :  $II, IIa, III, IIIa, IV, V$ .

Observamos que, cuando  $\Delta < 0$  la órbita queda totalmente determinada. Cuando  $\Delta > 0$ , computamos la inercia para determinar la órbita. Recordemos que la inercia de  $\tau$ , es el par ordenado  $(\sigma^+, \sigma^-)$ , donde  $\sigma^+$  y  $\sigma^-$  son los valores propios positivos y negativos de  $J$ , respectivamente.

$$\bullet I : in(\tau) = (3, 0)$$

$$\bullet Ia : in(\tau) = (1, 2).$$

Para distinguir entre las órbitas  $I$  y  $Ia$ , introducimos la siguiente condición:

$$Z_\tau =: tr(\tau) > 0 \quad y \quad \gamma(\tau) > 0,$$

donde  $\tau$  y  $\gamma$  se pueden obtener como en la Ecuación (5.4).  $Z_\tau$  se cumple en la órbita  $I$  y no se cumple en la órbita  $Ia$ .

Ahora para analizar el caso  $\Delta = 0$  computamos la inercia  $\tau$  en cada una de las órbitas restantes,

- *II* :  $in(\tau) = (2, 0)$
- *IIa* :  $in(\tau) = (1, 1)$
- *III* :  $in(\tau) = (1, 0)$
- *IIIa* :  $in(\tau) = (0, 1)$
- *IV* :  $in(\tau) = (1, 0)$
- *V* :  $in(\tau) = (0, 0)$ .

Cabe destacar que  $in(\tau) = (0, 0)$  en algunos tipos de haces degenerados. Si observamos el signo de  $\gamma(\tau)$  obtenemos otro discriminante,

- $\gamma(\tau) > 0$  : *II*
- $\gamma(\tau) < 0$  : *IIa*
- $\gamma(\tau) = 0$  : *III, IIIa, IV, V*.

De nuevo puede ocurrir que  $\gamma(\tau) = 0$  en algunos haces degenerados. Cuando  $\gamma(\tau) = 0$  el signo de la traza de  $\tau$  nos ayuda a identificar las órbitas,

- $tr(\tau) > 0$  : *III, IV*
- $tr(\tau) < 0$  : *IIIa*
- $tr(\tau) = 0$  : *V*.

Donde, de nuevo,  $tr(\tau) = 0$  en algunos tipos de haces degenerados. Para distinguir entre los demás casos, basta con notar que  $H \neq 0$  y  $G = 0$  en la órbita *III* ( $G$  y  $H$  son los concomitantes mencionados en los teoremas 5.2 y 5.3 respectivamente), mientras que  $H = 0$  y  $G \neq 0$  en la órbita *IV*. Luego,  $B \neq 0$  (ver ecuación 5.2) en la órbita *V* y si  $B = 0$  es un haz degenerado de cónicas.

## 6.1. Ejemplos

### Ejemplo 6.1

Determinemos la órbita del haz generado por las cónicas,

$$Q_S : x^2 - 12xy - 12xz - 3y^2 + 10yz + 12z^2 = 0,$$

$$Q_T : -3x^2 - 20xy - 8xz - 7y^2 + 14yz + 11z^2 = 0.$$

En efecto,

$$Q_S = [x \ y \ z] \begin{bmatrix} 1 & -6 & -6 \\ -6 & -3 & 5 \\ -6 & 5 & 12 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

y

$$Q_T = [x \ y \ z] \begin{bmatrix} -3 & -10 & -4 \\ -10 & -7 & 7 \\ -4 & 7 & 11 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}.$$

Empezamos hallando la forma característica

$$D(\lambda, \mu) = \det(\lambda S + \mu T) = -25\lambda^3 - 100\lambda^2\mu - 125\lambda\mu^2 - 50\mu^3.$$

Luego, calculando el discriminante  $\Delta = b^2c^2 - 4ac^3 - 4b^3d - 27a^2d^2 + 18abcd$  donde  $a = -25$ ,  $b = -100$ ,  $c = -125$  y  $d = -50$ ; se obtiene que  $\Delta = 0$ . Por lo tanto debemos construir el combinante  $\tau = -cQ_S - bQ_T + 3Q_U$  para determinar la órbita del haz.

Empezamos determinando el covariante  $Q_U$ , para el cual computamos la adjunta de  $S$  y  $T$  y extraemos los coeficientes de  $\lambda\mu$  en la ecuación,

$$\text{adj}(\lambda S' + \mu T') = aS\lambda^2 + \lambda\mu U + d\mu^2T.$$

De donde, obtenemos el covariante,

$$Q_U = 25x^2 + 1100xy + 800xz + 325y^2 - 850yz - 875z^2.$$

por lo que,

$$U = \begin{bmatrix} 25 & 550 & 400 \\ 550 & 325 & -425 \\ 400 & -425 & -875 \end{bmatrix}.$$

Luego formamos el combinante,

$$\tau = -cQ_S - bQ_T + 3Q_U = -25(2x + 2y - z)^2,$$

cuya matriz que la representa está dada por,

$$J = \begin{bmatrix} -100 & -100 & 50 \\ -100 & -100 & 50 \\ 50 & 50 & -25 \end{bmatrix}.$$

Esta matriz tiene rango 1 y su polinomio característico está dado por,

$$P(\lambda) = \lambda^3 - 225\lambda^2.$$

De donde se obtiene que  $\gamma(\tau) = 0$  y  $\text{tr}(\tau) < 0$ , lo que indica que el haz de cónicas pertenece a la órbita IIIa, como se muestra en la figura 14. Es decir, la morfología de intersección es vacía.

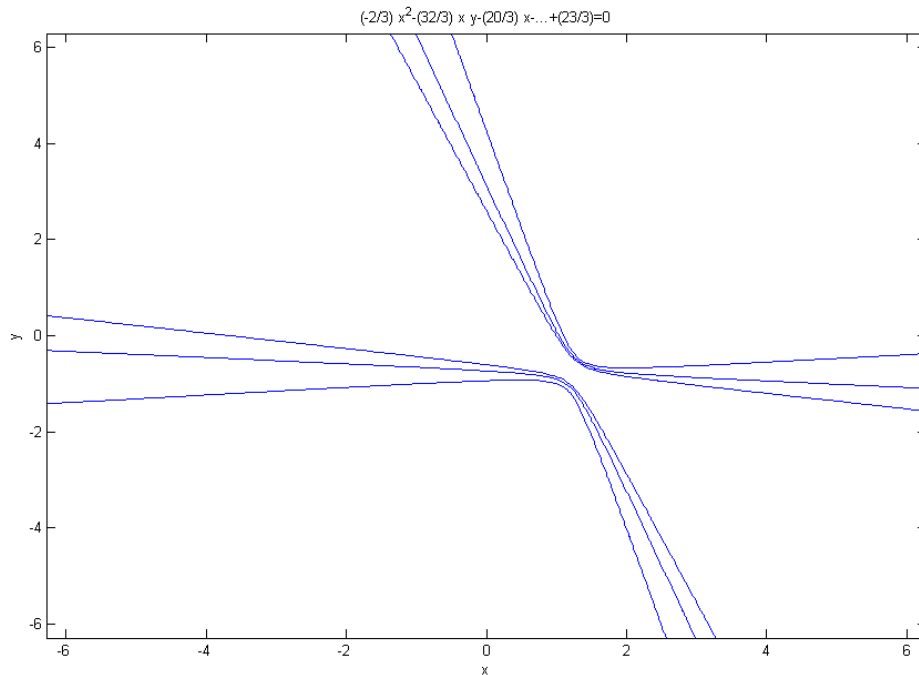


figura 14

### Ejemplo 6.2

Dadas las cónicas  $f_1(x, y, z) = yz$ ,  $f_2(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2$  y  $f_3(x, y, z) = xz$ , las cuales, corresponden a los puntos de  $\mathbb{R}^6$  dados por:  $(0, 0, 0, 0, 0, 1)$ ,  $(1, 1, -1, 0, 0, 0)$  y  $(0, 0, 0, 0, 1, 0)$  respectivamente.

Observemos que estas tres cónicas determinan haces que pertenecen a la órbita Ib, es decir, a la órbita cuya morfología de intersección corresponde a dos puntos simples. Ahora consideremos la curva de Bézier en  $\mathbb{R}^6$  cuyos puntos de control están dados por los puntos anteriores que etiquetan las tres cónicas dadas. De donde obtenemos la curva,

$$\alpha(t) = (2t(1-t), 2t(1-t), -2t(1-t), 0, t^2, (1-t)^2).$$

Nuestro objetivo es estudiar la envolvente de esta familia uniparamétrica de cónicas que etiqueta la curva de Bézier. Para que la envolvente de esta familia conste de dos ramas, lo cual puede ser útil como un segmento de camino (artículo [4]), debe ocurrir que cada recta tangente a la curva de Bézier determine un haz de cónicas perteneciente a la órbita Ib, ya que cada par de puntos simples del haz, son un par de puntos que están sobre la envolvente.

Para estudiar cada haz tangente a la curva necesitamos encontrar dos representantes de cada haz, lo cual nos los proporciona el algoritmo de Castel'jau, con una sola

iteración,

$$\begin{aligned} & (0, 0, 0, 0, 1, 0) \\ (t, t, -t, 0, (1-t), 0) & \longleftarrow (1, 1, -1, 0, 0, 0) \\ (1-t, 1-t, t-1, 0, 0, t) & \longleftarrow (0, 0, 0, 0, 0, 1). \end{aligned}$$

En este caso los dos representantes son formas cuadráticas ternarias dadas por

$$S(t) = [x \ y \ z] \begin{bmatrix} t & 0 & 0 \\ 0 & t & \frac{1-t}{2} \\ 0 & \frac{1-t}{2} & -t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

y

$$T(t) = [x \ y \ z] \begin{bmatrix} 1-t & 0 & \frac{t}{2} \\ 0 & 1-t & 0 \\ \frac{t}{2} & 0 & t-1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}.$$

Ahora, nos interesa saber para que valores de  $t$  se cumple  $\Delta < 0$ , ya que de esta manera podemos determinar el trozo de curva que etiqueta una familia uniparamétrica de cónicas a la cual le podemos calcular la envolvente. Empezamos calculando la forma característica

$$\begin{aligned} \det(\lambda S + \mu T) &= \lambda^3 \left[ -\frac{t}{4} + \frac{t^2}{2} - \frac{5t^3}{4} \right] + \lambda^2 \mu \left[ -\frac{1}{4} + \frac{3t}{4} - \frac{15t^2}{4} + \frac{13t^3}{4} \right] + \\ & \lambda \mu^2 \left[ -3t + 6t^2 - \frac{13t^3}{4} \right] + \mu^3 \left[ -1 + 3t - \frac{13t^2}{4} + \frac{5t^3}{4} \right]. \end{aligned}$$

Ahora calculamos el discriminante  $\Delta = b^2c^2 - 4ac^3 - 4b^3d - 27a^2d^2 + 18abcd$ , donde

$$\begin{aligned} a &= -\frac{t}{4} + \frac{t^2}{2} - \frac{5t^3}{4} \\ b &= -\frac{1}{4} + \frac{3t}{4} - \frac{15t^2}{4} + \frac{13t^3}{4} \\ c &= -3t + 6t^2 - \frac{13t^3}{4} \\ d &= -1 + 3t - \frac{13t^2}{4} + \frac{5t^3}{4}. \end{aligned}$$

Se obtiene el polinomio

$$\begin{aligned} \Delta &= \frac{-1}{16} + \frac{3t}{4} - \frac{265t^2}{64} + \frac{445t^3}{32} - \frac{2037t^4}{64} + \frac{423t^5}{8} - \frac{1061t^6}{16} + \frac{513t^7}{8} - 48t^8 \\ & \quad + \frac{55t^9}{2} - \frac{187t^{10}}{6} + \frac{27t^{11}}{8} - \frac{9}{16}t^{12}. \end{aligned}$$

Este polinomio es negativo en el intervalo  $[0, 1]$ , como lo ilustra la gráfica 15. Esto indica que cada haz tangente a la curva pertenece a la órbita Ib, y por lo tanto podemos construir la envolvente de la familia uniparamétrica de cónicas correspondiente a la curva de Bézier en  $\mathbb{R}^6$ .

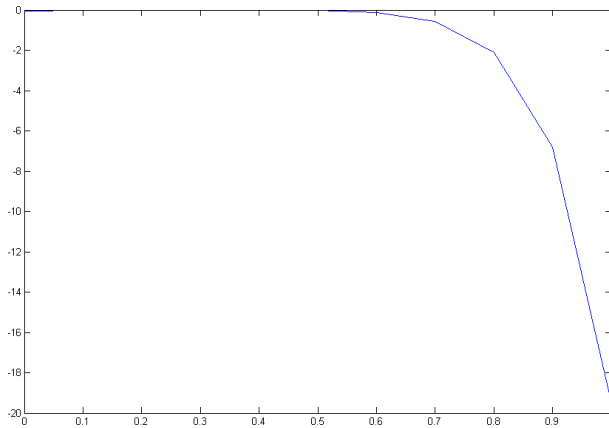


figura 15

La envolvente se puede visualizar graficando diferentes curvas de la familia uniparamétrica de cónicas. Ésto se ilustra en la figura 16. La figura 17 muestra las dos ramas de la envolvente completas.

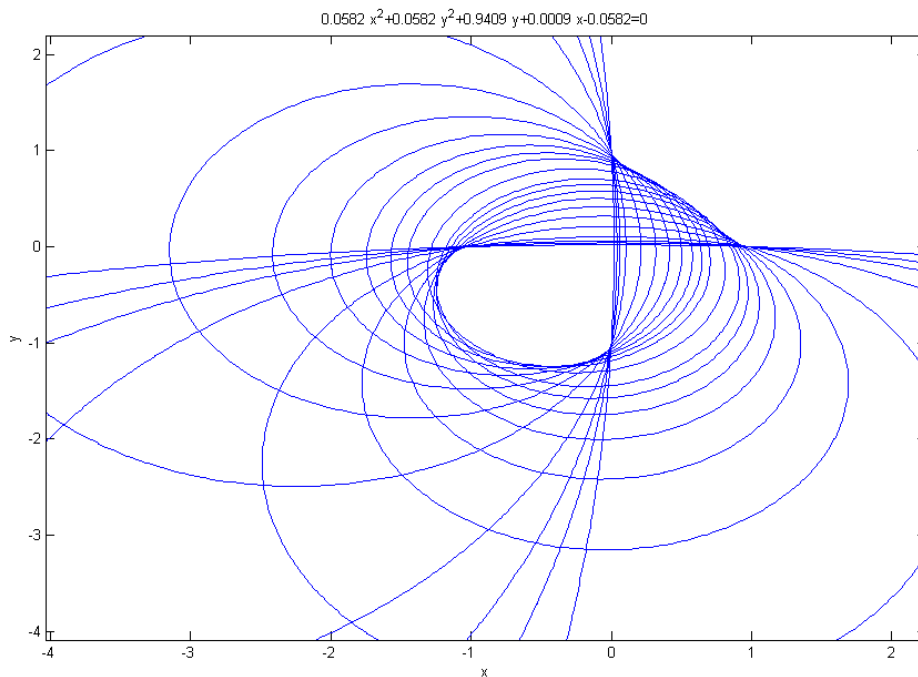


figura 16

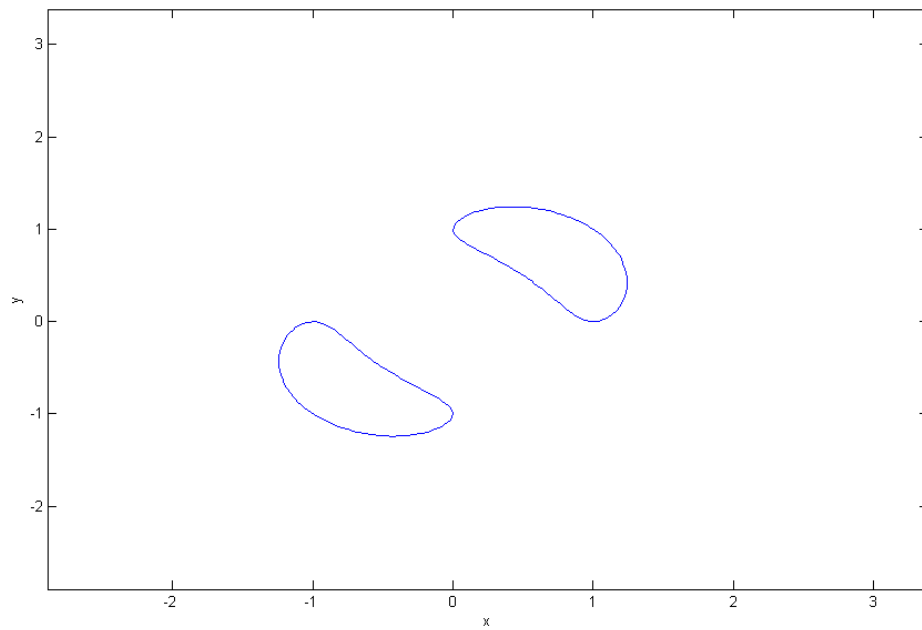


figura 17

# Bibliografía

- [1] J.Daza, T.Goncalves, F.Tovar. (2007), *Path splines with circle envelopes*, (*Computer Aided Geometric Design*), 24, 151-160
- [2] Sylvain Petitjean. (2000), *Invariant-based characterization of the relative position of two projective conics*, (Volumen 151, 189-220. Springer, 2000.), *Non-linear Computational Geometry*
- [3] G.Figeroa, M.Paluszny, F.Tovar. "Curvature and Tangency Handles for Control of Convex Cubic Shapes", *Curve and Surface Design*, pages 91-98. Saint-Malo 1999
- [4] M.Paluszny, F.Tovar. "Path Splines with Conic Envelopes", *Comunicación Privada*
- [5] E.Briand (2007), *Equations, inequations and inequalities characterizing the configurations of two real projective conics*, (*Applicable Algebra in Engineering, Communication and Computing*), 18(1-2):21-52
- [6] P.J.Olver (1999), *Classical Invariant Theory*, (Cambridge University Press), 6, 9, 10, 11
- [7] D.Pervouchine (2002), *Orbits and Invariants of Matrix Pencils*, (PhD thesis), Moscow State University, 16
- [8] Farin.Gerald E (1996), *Curves and Surfaces for CAGD*, (Academic Press 4th ed, New York)