UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA
SEDE MEDELLÍN

# SOBRE EL SOPORTE DE SOLUCIONES DE LA ECUACIÓN DE KORTEWEG DE VRIES

**Diego Alberto López Cardona**

**Universidad Nacional de Colombia**
**Sede Medellín**
**Facultad de Ciencias**
**Escuela de Matemáticas**
**Julio 2011**

# Sobre el soporte de soluciones de la ecuación de Korteweg de Vries


Por:

Diego Alberto López Cardona


Trabajo presentado como requisito parcial para optar al título de

Magíster en Ciencias Matemáticas


Director:

Pedro Isaza Jaramillo

**Universidad Nacional de Colombia**

**Sede Medellín**

**Facultad de Ciencias**

**Posgrado en Matemáticas**



Julio 2011

Este trabajo ha sido apoyado parcialmente por Colciencias
a través del contrato número 574-2009, código 111848925101.

*A mi hija Sara Isabel, con amor*

# Agradecimientos

Quiero hacer una especial mención de agradecimiento y reconocimiento al profesor Pedro Isaza Jaramillo, director de esta tesis de maestría, quien demostró de manera ejemplar una sinceridad y actitud de compromiso ante la labor de orientación y que con su disciplina ha dejado buenas enseñanzas a mi formación académica. A él mi más profunda gratitud.

Agradezco también al profesor Jorge Mejía Laverde y al profesor Eddye Bustamante por sus apreciables sugerencias y correcciones que ayudaron a mejorar la versión final del trabajo.

Agradezco a todos mis profesores, compañeros y amigos que de una u otra forma hicieron un ambiente agradable durante todo el proceso de estudio.

Finalmente a mi madre Ofelia y mi prima María debo un eterno agradecimiento por su apoyo incondicional durante toda mi formación académica.

# Resumen

En este trabajo se considera la ecuación de Korteweg-de Vries (KdV):

$$\partial_t u + \partial_x^3 u + u\partial_x u = 0,$$

$u = u(x,t)$, $x \in \mathbb{R}$, $t \in \mathbb{R}$ y se demuestra que si $u(\cdot,0)$ y $u(\cdot,1)$ tienen soporte en un intervalo espacial $[-\infty, B]$, para cierto $B > 0$, entonces $u$ es idénticamente nula.

# Summary


In this work will be considered the equation of Korteweg-de Vries (KdV):

$$\partial_t u + \partial_x^3 u + u\partial_x u = 0,$$

$u = u(x,t)$, $x \in \mathbb{R}$, $t \in \mathbb{R}$ and will be proved that if $u(\cdot,0)$ y $u(\cdot,1)$ have support in an spatial interval $[-\infty, B]$, for some $B > 0$, then $u$ is identically zero.

# Tabla de Contenido

# Introducción

En este trabajo consideramos la ecuación de Korteweg-de Vries (KdV)

$$\partial_t u + \partial_x^3 u + u\partial_x u = 0, \tag{0.1}$$

donde $u = u(x,t)$ con $x \in \mathbb{R}$ y $t \in \mathbb{R}$. Esta ecuación es un modelo para describir la propagación de una onda unidireccional no lineal en un medio dispersivo. Para la ecuación KdV, y para otras ecuaciones dispersivas no lineales como la ecuación de Schrödinger, se han estudiado en años recientes, entre otros aspectos, el buen planteamiento local y global en espacios de Sobolev de baja regularidad y los principios de continuación única. En estos últimos se pretende obtener condiciones de carácter local sobre dos soluciones de la ecuación que garanticen que ambas soluciones sean idénticas.

Acerca del buen planteamiento local y global, en [KPV1] Kenig, Ponce y Vega demostraron que el problema de Cauchy asociado a la ecuación (0.1) está localmente bien planteado en espacios de Sobolev $H^s(\mathbb{R})$ con $s > -\frac{3}{4}$. Posteriormente, en [CKSTT] Colliander, Keel, Stafillani, Takaoka y Tao probaron que el buen planteamiento global para este problema se presenta también para $s > -\frac{3}{4}$.

Con respecto a los principios de continuación única, en [SS] Saut y Scheurer consideraron una clase de ecuaciones que incluye a la ecuación KdV y probaron que si una solución suficientemente suave de una ecuación de la clase se anula en un abierto espacio-temporal $\Omega$, entonces, la solución se anula en todas las componentes horizontales de $\Omega$, es decir, en $\mathbb{R} \times P_t(\Omega)$ donde $P_t(\Omega) = \{t \mid \exists x\ (x,t) \in \Omega\}$.

Posteriormente, en [B], mediante el uso de funciones analíticas, Bourgain demostró que si $u$ es una solución suficientemente regular de la ecuación KdV, y existe $B > 0$ tal que el soporte de $u(t) := u(\cdot, t)$ está contenido en $[-B, B]$ para todo tiempo $t$ en un intervalo temporal no trivial, entonces $u$ es idénticamente nula. Si bien el resultado de [SS] es más fuerte que el de [B], este último ha sido fácilmente generalizado para estudiar ecuaciones en dimensiones espaciales mayores que uno.

Posteriormente, en [KPV2] Kenig, Ponce y Vega probaron que si $u$ es una solución suficientemente suave de (0.1), que se anula en una semirrecta $x > B$ para dos tiempos diferentes $t_1$ y $t_2$, entonces $u$ es idénticamente nula. Para demostrar este resultado, en [KPV2] se desarrolló un estimativo de tipo Carleman para la parte lineal de la ecuación (0.1) en espacios $L^p(\mathbb{R}^2)$ con peso exponencial con varios índices $p$. Luego, a partir de este estimativo, se demostró que la solución se anula en una semibanda $[R, +\infty) \times [t_1, t_2]$, de lo cual se concluyó, usando el resultado de [SS], que $u \equiv 0$.

En trabajos posteriores, los mismos autores, junto con Escauriaza, han estudiado principios de continuación única para la ecuación KdV con condiciones menos restrictivas y con algunas hipótesis adicionales de decaimiento. Es así como en [KPV3] se estudia un problema análogo al de [KPV2] para dos soluciones $u_1$ y $u_2$ cuya diferencia se anula en dos semirrectas $x > B$ en $t = t_1$ y $t = t_2$, y se prueba que ambas soluciones coinciden. En [EKPV] se demuestra que dos soluciones $u_1$ y $u_2$ son iguales si su diferencia presenta cierto decaimiento exponencial en $x > 0$, para dos tiempos diferentes.

Nuestro propósito es presentar una demostración detallada y simplificada del resultado de [KPV2]. En esta demostración se ha simplificado el estimativo tipo Carleman, considerando sólo espacios con peso exponencial de tipo $L^2$ y dando una demostración que usa técnicas elementales de transformada de Fourier. La obtención de este estimativo tipo Carleman sigue el esquema desarrollado en [IM].

Más concretamente, en este trabajo se demuestra el siguiente teorema:

**Teorema 1.** *Sea $u \in C([0,1]; H^6(\mathbb{R})) \cap C^1([0,1]; H^3(\mathbb{R}))$ una solución de (0.1), es decir, una función tal que*

$$\partial_t u(t) + \partial_x^3 u(t) + u(t)\partial_x u(t) = 0 \quad \textit{en} \;\; H^3(\mathbb{R}) \quad \textit{para todo } t \in [0,1].$$

*Supongamos que para cierto $B > 0$ supp $u(0) \subseteq (-\infty, B]$ y supp $u(1) \subseteq (-\infty, B]$. Entonces $u \equiv 0$.*

El trabajo está organizado como sigue. En el primer capítulo se efectúan estimativos apriori para la solución de la ecuación (0.1) que muestran que si una solución tiene decaimiento exponencial a la derecha ($x > 0$) en el instante $t = 0$, entonces dicho decaimiento se mantiene en el tiempo. Se demuestra además una propiedad similar para las derivadas de la solución.

Esta persistencia en el tiempo del decaimineto exponencial es necesaria para desarrollar, en el capítulo 2, un estimativo de tipo Carleman, el cual expresa una propiedad de acotamiento, en espacios $L^2$ con peso exponencial, del inverso del operador asociado a la parte lineal de la ecuación (0.1). El estimativo tipo Carleman se utiliza luego en la demostración del teorema principal, realizada en el capítulo 3, para mostrar que si una solución de la ecuación (0.1) cumple las hipótesis del Teorema 1, entonces dicha solución es nula en una banda de la forma $[R, \infty) \times [0, 1]$, lo cual, junto con el resultado de Saut y Scheurer mencionado anteriormente, implica que la solución es idénticamente nula.

A lo largo de este trabajo la letra $C$ denotará diversas constantes que pueden variar de línea a línea, pero cuya dependencia de los parámetros que aparecen en los procedimientos está bien determinada en cada caso. En ocasiones, para hacer énfasis en el hecho de que una constante depende de un parámetro, dicho parámetro se usará como subíndice de la constante.

# Capítulo 1

# Decaimiento exponencial

En este capítulo se mostrará que la ecuación de Korteweg-de Vries preserva para tiempos positivos el decaimiento exponencial espacial a la derecha del dato inicial y de sus derivadas.

**Lema 1.1.** *Sea* $u \in C([0,1]; H^6(\mathbb{R}) \cap C^1([0,1]; H^3(\mathbb{R}))$ *una solución de la ecuación KdV, es decir*

$$\partial_t u(t) + \partial_x^3 u(t) + u(t)\partial_x u(t) = 0, en \quad H^3(\mathbb{R}) \quad \forall t \in [0,1]. \tag{1.1}$$

*Supongamos que para algún* $\beta > 0, \quad e^{\beta x} u(0) \in L^2(\mathbb{R})$. *Entonces*

$$\sup_{t \in [0,1]} ||e^{\beta x} u(t)||_{L^2(\mathbb{R})} < \infty.$$

**Prueba.** Sea $\phi \in C^\infty(\mathbb{R})$ una función decreciente tal que $\phi(x) = 1$, si $x < 1$ y $\phi(x) = 0$, si $x > 10$. Para $n \in \mathbb{N}$ definamos $\theta_n(x) := \int_0^x \phi(\frac{s}{n})\, ds$. Consideremos la sucesión de funciones $\varphi_n$ definidas por $\varphi_n(x) := e^{2\beta\theta_n(x)}$. Observemos que $\varphi_n$ es creciente con las siguientes características:

(1) Si $x \leq n$, $\varphi_n(x) = e^{2\beta \int_0^x 1 ds} = e^{2\beta x}$.

(2) Si $x > 10n$, de acuerdo con la definición de $\phi$, la integral de la función $\phi(\frac{\cdot}{n})$ entre 0 y $x$ esta dominada por $10n$. Por lo tanto $\theta_n(x) \leq 10n$. De esto último se concluye que $\varphi_n(x) \leq e^{2\beta 10n}$.

(3) Como para $n \in \mathbb{N}$ $\phi(\frac{x}{n+1}) \geq \phi(\frac{x}{n})$, entonces $\int_0^x \phi(\frac{s}{n})ds \leq \int_0^x \phi(\frac{s}{n+1})ds$. Luego, $\varphi_n(x) \leq \varphi_{n+1}(x)$.

(4) De (1) y de (3) se sigue que $\varphi_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} e^{2\beta x}$, para todo $x \in \mathbb{R}$, de manera monótona.

De otra parte, para $n \in \mathbb{N}$,

$$\varphi_n' = 2\beta\theta_n'(x)e^{2\beta\theta_n(x)} = 2\beta\phi(\frac{x}{n})e^{2\beta\theta_n(x)}.$$

Se tiene entonces que:

$$|\varphi_n'(x)| = 2\beta|\phi(\frac{x}{n})\varphi_n(x)| \leq 2\beta\varphi_n(x).$$

Además,
$$|\varphi_n''(x)| \leq 2\beta|\phi'(\frac{x}{n})\cdot\frac{1}{n}e^{2\beta\theta_n(x)} + \phi(\frac{x}{n})\cdot 2\beta\phi(\frac{x}{n})e^{2\beta\theta_n(x)}|.$$
Luego
$$|\varphi_n''(x)| \leq 2\beta\bigg(C + 2\beta\bigg)\varphi_n(x).$$
En general, puede verse que para $\beta > 0$ y $j \in \mathbb{N}$, existe una constante $C_{j,\beta}$ tal que
$$|\varphi_n^{(j)}(x)| \leq C_{j,\beta}\varphi_n(x), \forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}.$$
Para $t \in [0,1]$, multipliquemos la ecuación (1.1) por $\varphi_n(\cdot_x)u(t)(\cdot_x)$ e integremos respecto a la variable espacial para obtener
$$\int_{\mathbb{R}} \varphi_n u(t)\partial_t u(t)dx + \int_{\mathbb{R}} \varphi_n u(t)\partial_x^3 u(t)dx + \int_{\mathbb{R}} \varphi_n u^2(t)\partial_x u(t)dx = 0. \tag{1.2}$$
Para estudiar el primer término de (1.2) denotemos por $\langle\,\cdot,\cdot\rangle$ el producto interno en el espacio de funciones de valor real $L^2(\mathbb{R})$ y probemos que la función
$$t \longmapsto \int \varphi_n u^2(t)dx = \langle\varphi_n u(t), u(t)\rangle$$
es una función de clase $C^1$ en $[0,1]$ y que
$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int \varphi_n u^2(t)dx = \int \varphi_n u(t)\partial_t u(t)dx. \tag{1.3}$$
En efecto, como $u \in C^1([0,1]; L^2(\mathbb{R}))$, se tiene que
$$\begin{aligned}
&\frac{1}{h}(\langle\varphi_n u(t+h), u(t+h)\rangle - \langle\varphi_n u(t), u(t)\rangle) - 2\langle\varphi_n u(t), \partial_t u(t)\rangle \\
=&\frac{1}{h}(\langle\varphi_n u(t+h), u(t+h)\rangle - \langle\varphi_n u(t+h), u(t)\rangle + \langle\varphi_n u(t+h), u(t)\rangle \\
&- \langle\varphi_n u(t), u(t)\rangle) - 2\langle\varphi_n u(t), \partial_t u(t)\rangle \\
=&\langle\varphi_n u(t+h), \frac{u(t+h)-u(t)}{h}\rangle + \langle\frac{u(t+h)-u(t)}{h}, \varphi_n u(t)\rangle - 2\langle\varphi_n u(t), \partial_t u(t)\rangle \\
&\xrightarrow[h\to 0]{} 0,
\end{aligned}$$
por la bicontinuidad y la conmutatividad del producto interno $\langle\,\cdot,\cdot\rangle$. De esta manera hemos obtenido (1.3).
Realizando integración por partes con respecto a la variable espacial y teniendo en cuenta que

$u \in C([0,1]; H^6(\mathbb{R}))$, para el segundo término de (1.2) tenemos que:

$$\begin{aligned}
\int \varphi_n u(t)\partial_x^3 u(t)dx &= -\int \partial_x[\varphi_n u(t)]\partial_x^2 u(t)dx \\
&= -\int [\varphi_n \partial_x u(t) + \varphi_n' u(t)]\partial_x^2 u(t)dx \\
&= -\int \varphi_n \partial_x u(t)\partial_x^2 u(t)dx - \int \varphi_n' u(t)\partial_x^2 u(t)dx \\
&= -\int \varphi_n \cdot \frac{1}{2}\partial_x[\partial_x u(t)]^2 dx + \int \partial_x[\varphi_n' u(t)]\partial_x u(t)dx \\
&= \frac{1}{2}\int \varphi_n'[\partial_x u(t)]^2 dx + \int [\varphi_n'\partial_x u(t) + \varphi_n''(x)u(t)]\partial_x u(t)dx \\
&= \frac{1}{2}\int \varphi_n'[\partial_x u(t)]^2 dx + \int \varphi_n'[\partial_x u(t)]^2 dx + \int \varphi_n'' u(t)\partial_x u(t)dx \\
&= \frac{3}{2}\int \varphi_n'[\partial_x u(t)]^2 dx + \int \varphi_n'' \frac{1}{2}\partial_x[u(t)]^2 dx \\
&= \frac{3}{2}\int \varphi_n'[\partial_x u(t)]^2 dx - \frac{1}{2}\int \varphi_n^{(3)} u^2(t)dx. \qquad (1.4)
\end{aligned}$$

De otra parte, para el tercer término de (1.2) se sigue que

$$\int \varphi_n u^2(t)\partial_x u(t)dx = \int \varphi_n \frac{1}{3}\partial_x[u(t)]^3 dx = -\frac{1}{3}\int \varphi_n' u^3(t)dx. \qquad (1.5)$$

Por tanto, de (1.2), (1.3), (1.4) y (1.5) se obtiene que

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int \varphi_n u^2(t)dx + \frac{3}{2}\int \varphi_n'[\partial_x u(t)]^2 dx = \frac{1}{2}\int \varphi_n^{(3)} u^2(t)dx + \frac{1}{3}\int \varphi_n' u(t)u^2(t)dx. \qquad (1.6)$$

Como $u \in C([0,1]; H^6(\mathbb{R}))$, existe $M > 0$ tal que

$$||u(t)||_{H^6(\mathbb{R})} \leq M \quad \forall t \in [0,1].$$

Como $||u(t)||_{H^6(\mathbb{R})} \geq ||u(t)||_{H^1(\mathbb{R})}$ para todo $t \in [0,1]$, entonces

$$||u(t)||_{H^1(\mathbb{R})} \leq ||u(t)||_{H^6(\mathbb{R})} \leq M < \infty.$$

Por el teorema de inmersión de Sobolev $H^1(\mathbb{R}) \hookrightarrow L^\infty(\mathbb{R})$, y por tanto existe $C > 0$ tal que

$$||u(t)||_{L^\infty(\mathbb{R})} \leq C||u(t)||_{H^1(\mathbb{R})} \quad \forall t \in [0,1].$$

De esto último se obtiene de la igualdad (1.6) que

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int \varphi_n u^2(t)dx + \frac{3}{2}\int \varphi_n'[\partial_x u(t)]^2 dx \\
&\leq \frac{1}{2}\int \varphi_n^{(3)} u^2(t)dx + \frac{1}{3}||u(t)||_{L^\infty(\mathbb{R})}\int \varphi_n' u^2(t)dx.
\end{aligned}$$

El segundo término del lado izquierdo de la desiguldad anterior es no negativo y como $|\varphi_n^{(j)}(x)| \leq C_{j,\beta}\varphi_n(x)$, se tiene que

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int \varphi_n u^2(t)dx &\leq \frac{1}{2}C_{3,\beta}\int \varphi_n u^2(t)dx + \frac{C_{1,\beta}}{3}||u(t)||_{L^\infty(\mathbb{R})}\int \varphi_n u^2(t)dx \\
&\leq \left(\frac{C_{3,\beta}}{2} + \frac{C_{1,\beta}}{3}||u(t)||_{L^\infty(\mathbb{R})}\right)\int \varphi_n u^2(t)dx \\
&\leq \left(\frac{C_{3,\beta}}{2} + \frac{C_{1,\beta}C}{3}||u(t)||_{H^1(\mathbb{R})}\right)\int \varphi_n u^2(t)dx \\
&\leq \left(\frac{C_{3,\beta}}{3} + \frac{C_{1,\beta}C}{3}M\right)\int \varphi_n u^2(t)dx \\
&\equiv K\int \varphi_n u^2(t)dx,
\end{aligned}$$

donde $K$ depende de $\beta$, $j$, y $u$ pero no de $t$ ni de $n$. Por lo tanto

$$\frac{d}{dt}\int \varphi_n u^2(t)dx \leq 2K\int \varphi_n u^2(t)dx.$$

Si llamamos $g(t) := \int \varphi_n u^2(t)dx$, la anterior expresión queda

$$g'(t) \leq 2Kg(t).$$

Se tiene entonces por lema de Gronwall que $g(t) \leq g(0)e^{2Kt}$, es decir

$$\int \varphi_n u^2(t)dx \leq \left(\int \varphi_n u^2(0)\,dx\right)e^{2Kt} \leq \left(\int e^{2\beta x}u^2(0)\,dx\right)e^{2K} \quad \forall t \in [0,1].$$

Usando el teorema de la convergencia monótona se tiene que

$$\int \varphi_n u^2(t)dx \xrightarrow[n\to\infty]{} \int e^{2\beta x}u^2(t)dx,$$

luego

$$\int e^{2\beta x}u^2(t)dx \leq \left(\int e^{2\beta x}u^2(0)dx\right)e^{2K} < \infty.$$

y por lo tanto

$$\sup_{t\in[0,1]} ||e^{\beta x}u(t)||_{L^2(\mathbb{R})} \leq ||e^{\beta x}u(0)||_{L^2(\mathbb{R})}e^K \quad \forall t \in [0,1],$$

y se tiene el lema. ∎

De modo más general que el expresado por el Lema 1.1 se tiene que las derivadas de la solución $u$ también preservan el decaimiento exponencial a la derecha. Más concretamente, podemos probar el siguiente lema.

**Lema 1.2.** *Para la solución $u$ del Lema 1.1 supongamos que $e^{\beta x}\partial_x^j u(0) \in L^2(\mathbb{R})$, para $j = 0,1,2,3$ entonces*

$$\sup_{t\in[0,1]} ||e^{\beta x}\partial_x^j u(t)||_{L^2(\mathbb{R})} < \infty, \quad \textit{para} \quad j = 0,1,2,3.$$

**Prueba.** Definamos $v(t) = \partial_x u(t)$. Observemos que como $\partial_t u \in C([0,1]; H^3(\mathbb{R}))$ entonces $\partial_x \partial_t u \in C([0,1]; H^2(\mathbb{R}))$.
Probemos que $\partial_t v(t) = \partial_x[\partial_t u(t)]$ en $H^2(\mathbb{R})$. En efecto, sabemos por definición que

$$\frac{u(t+h) - u(t)}{h} \xrightarrow[h\to 0]{} \partial_t u(t) \quad \text{en} \quad H^3(\mathbb{R}).$$

Dado que el operador $\partial_x : H^3(\mathbb{R}) \to H^2(\mathbb{R})$ es continuo, entonces

$$\begin{aligned}\frac{v(t+h) - v(t)}{h} &= \frac{\partial_x u(t+h) - \partial_x u(t)}{h} \\ &= \partial_x \left[\frac{u(t+h) - u(t)}{h}\right] \xrightarrow[h\to 0]{} \partial_x[\partial_t u(t)] \quad en \;\; H^2(\mathbb{R}).\end{aligned}$$

De lo anterior se concluye que $\partial_t v(t) = \partial_x[\partial_t u(t)]$.
Consideremos ahora la ecuación (1.1) y derivemos respecto a $x$ para obtener:

$$\partial_t v(t) + \partial_x^3 v(t) + u(t)\partial_x v(t) + v^2(t) = 0. \tag{1.7}$$

Multipliquemos (1.7) por $v(t)\varphi_n$, donde $\varphi_n$ es la misma función definida en Lema 1.1, e integremos respecto a la variable espacial para obtener:

$$\int \varphi_n v(t)\partial_t v(t)dx + \int \varphi_n v(t)\partial_x^3 v(t)dx + \int \varphi_n v(t)u(t)\partial_x v(t)dx + \int \varphi_n v^3(t)dx = 0. \tag{1.8}$$

Usando integración por partes, como se hizo en la demostración del Lema 1.1, se tiene que:

$$\int \varphi_n v(t)\partial_x^3 v(t)dx = \frac{3}{2}\int \varphi_n'[\partial_x v(t)]^2 dx - \frac{1}{2}\int \varphi_n^{(3)} v^2(t)dx. \tag{1.9}$$

En cuanto al tercer término de (1.8) se tiene que

$$\begin{aligned}\int \varphi_n u(t)v(t)\partial_x v(t)dx &= \int \varphi_n u(t)\frac{1}{2}\partial_x[v(t)]^2 dx \\ &= -\frac{1}{2}\int \partial_x[\varphi_n u(t)]v^2(t)dx \\ &= -\frac{1}{2}\int [\varphi_n \partial_x u(t) + \varphi_n' u(t)]v^2(t)dx \\ &= -\frac{1}{2}\int \varphi_n v(t)v^2(t)dx - \frac{1}{2}\int \varphi_n' u(t)v^2(t)dx.\end{aligned}$$

De (1.8), (1.9) y esta última expresión se obtiene que

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int \varphi_n v^2(t)dx + \frac{3}{2}\int \varphi_n'[\partial_x v(t)]^2 dx \\ &= \frac{1}{2}\int \varphi_n^{(3)} v^2(t)dx + \frac{1}{2}\int \varphi_n' u(t)v^2(t)dx - \frac{1}{2}\int \varphi_n v^3(t)dx.\end{aligned}$$

Luego, teniendo en cuenta que el segundo término del lado izquierdo de la anterior igualdad es positivo obtenemos que

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\int \varphi_n v^2(t)dx &\leq C_{3,\beta}\int \varphi_n v^2(t)dx + C_{1,\beta}C||u(t)||_{C([0,1];H^1(\mathbb{R}))}\int \varphi_n v^2(t)dx\\ &\qquad + C||v(t)||_{C([0,1];H^1(\mathbb{R}))}\int \varphi_n v^2(t)dx\\ &\leq \left(C_{3,\beta} + C_{1,\beta}C||u(t)||_{C([0,1];H^1(\mathbb{R}))} + C||u(t)||_{C([0,1];H^2(\mathbb{R}))}\right)\int \varphi_n v^2(t)dx\\ &\leq K\int \varphi_n v^2(t)\,dx,\end{aligned}$$

donde $K$ es una constante que no depende de $n$ ni de $t$.
De esta última expresión y procediendo como se hizo en la prueba del Lema 1.1, se concluye que

$$||e^{\beta x}\partial_x u(t)||_{L^2(\mathbb{R})} \leq ||e^{\beta x}\partial_x u(0)||_{L^2(\mathbb{R})}e^{K}.$$

Por un razonamiento similar al anterior y procediendo inductivamente se muestra entonces que para una función $u \in C([0,1];H^6)\cap C^1([0,1];H^3)$, solución de la ecuación (1.1) se tiene que

$$\sup_{t\in[0,1]} ||e^{\beta x}\partial_x^j u(t)||_{L^2(\mathbb{R})} < \infty, \quad \text{para} \quad j = 0,1,2,3,$$

si $e^{\beta x}\partial_x^j u(0) \in L^2$, para $j = 0,1,2,3$. ■

A continuación usaremos la inmersión de Sobolev de $H^1(\mathbb{R})$ en $L^\infty(\mathbb{R})$ para mostrar que la función $u$ del lema anterior decae exponencialmente en $x > 0$ de manera puntual y que este decaimiento es uniforme en $t \in [0,1]$.

**Lema 1.3.** *Sea $u$ como en el Lema 1.2, entonces existe $M$ tal que*

$$|e^{\beta x}u(t)(x)| \leq M \quad \forall x \in \mathbb{R}, \forall t \in [0,1] \tag{1.10}$$

*y*

$$|e^{\beta x}\partial_x u(t)(x)| \leq M \quad \forall x \in \mathbb{R}, \forall t \in [0,1]\,. \tag{1.11}$$

**Prueba.** Del Lema 1.2 se tiene que

$$\sup_{t\in[0,1]} ||e^{\beta x}\partial_x^j u(t)||_{L^2(\mathbb{R})} < \infty, \ \text{para} \quad j = 0,1,2,3.$$

Por lo tanto, para todo $t \in [0,1]$

$$\begin{aligned}||e^{\beta x}u(t)||_{H^1(\mathbb{R})} &= ||e^{\beta x}u(t)||_{L^2(\mathbb{R})} + ||\partial_x[e^{\beta x}u(t)]||_{L^2(\mathbb{R})}\\ &= ||e^{\beta x}u(t)||_{L^2(\mathbb{R})} + ||e^{\beta x}\partial_x u(t) + \beta e^{\beta x}u(t)||_{L^2(\mathbb{R})}\\ &\leq ||e^{\beta x}u(t)||_{L^2(\mathbb{R})} + ||e^{\beta x}\partial_x u(t)||_{L^2(\mathbb{R})} + ||\beta e^{\beta x}u(t)||_{L^2(\mathbb{R})}\\ &\leq K,\end{aligned}$$

donde $K$ no depende de $t \in [0,1]$. Por el Teorema de inmersión de Sobolev, $H^1(\mathbb{R}) \hookrightarrow L^\infty(\mathbb{R})$, y así se tiene que

$$||e^{\beta x}u(t)||_{L^\infty(\mathbb{R})} \leq C||e^{\beta x}u(t)||_{H^1(\mathbb{R})} \leq CK \equiv M,$$

donde $M$ no depende de $t \in [0,1]$. Luego, como para todo $t \in [0,1]$, $u(t)$ es una función continua de la variable espacial ya que $u(t) \in H^6(\mathbb{R})$, se sigue que

$$|e^{\beta x} u(t)(x)| \leq ||e^{\beta x} u(t)||_{L^\infty(\mathbb{R})} \leq M, \forall x \in \mathbb{R}, \forall t \in [0,1].$$

y se tiene (1.10). Para mostrar (1.11) observemos que si $t \in [0,1]$, entonces

$$\begin{aligned}
||e^{\beta x} \partial_x u(t)||_{H^1(\mathbb{R})} &= ||e^{\beta x} \partial_x u(t)||_{L^2(\mathbb{R})} + ||\partial_x [e^{\beta x} \partial_x u(t)]||_{L^2(\mathbb{R})} \\
&= ||e^{\beta x} \partial_x u(t)||_{L^2(\mathbb{R})} + ||e^{\beta x} \partial_x^2 u(t) + \beta e^{\beta x} \partial_x u(t)||_{L^2(\mathbb{R})} \\
&\leq ||e^{\beta x} \partial_x u(t)||_{L^2(\mathbb{R})} + ||e^{\beta x} \partial_x^2 u(t)||_{L^2(\mathbb{R})} + ||\beta e^{\beta x} \partial_x u(t)||_{L^2(\mathbb{R})} \\
&\leq K.
\end{aligned}$$

donde $K$ es independiente de $t \in [0,1]$. Nuevamente del Teorema de inmersión de Sobolev, se sigue que

$$||e^{\beta x} \partial_x u(t)||_{L^\infty(\mathbb{R})} \leq C ||e^{\beta x} \partial_x u(t)||_{H^1(\mathbb{R})} \leq CK \equiv M,$$

y por lo tanto

$$|e^{\beta x} \partial_x u(t)(x)| \leq ||e^{\beta x} \partial_x u(t)||_{L^\infty(\mathbb{R})} \leq M, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \forall t \in [0,1]$$

y se tiene (1.11) ■

# Capítulo 2

# Estimativo tipo Carleman.

En este capítulo demostraremos un estimativo de tipo Carleman en el que se expresa una propiedad de acotamiento en espacios $L^2(e^{2\beta x}dx)$ del operador inverso de $\partial_t + \partial_x^3$, el cual es el operador lineal asociado a la ecuación KdV. Este estimativo se enuncia más abajo en el Teorema 2 y se utiliza para demostrar, en el Capítulo 3, que la solución $u$ dada en el Teorema 1 se anula en una banda de la forma $[R, +\infty) \times [0, 1]$. Comenzamos el Capítulo con dos lemas.
El Lema 2.1 afirma que si una función pertenece a $L^2(e^{2\beta x}dx)$ para todo $\beta > 0$, entonces pertenece también a $L^1(e^{\beta x}dx)$ para todo $\beta > 0$.
El Lema 2.2 muestra una propiedad de diferenciación temporal bajo la aplicación de la transformada de Fourier espacial.

**Lema 2.1.** *Sea $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $e^{\beta x} f \in L^2(\mathbb{R})$ para todo $\beta > 0$, entonces $e^{\beta x} f \in L^1(\mathbb{R})$, para todo $\beta > 0$.*

**Prueba.** Estimemos $||e^{\beta x} f||_{L^1(\mathbb{R})}$:

$$\begin{aligned}\int_0^\infty e^{\beta x}|f(x)|dx &= \int_0^\infty e^{-\beta x} e^{2\beta x}|f(x)|dx \\ &\leq \left(\int_0^\infty e^{-2\beta x}dx\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\int_0^\infty e^{4\beta x}|f(x)|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2\beta}}||e^{2\beta x} f||_{L^2(\mathbb{R})} < \infty.\end{aligned} \tag{2.1}$$

De otra parte,

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^0 e^{\beta x}|f(x)|dx &= \int_{-\infty}^0 e^{\frac{\beta}{2}x} e^{\frac{\beta}{2}x}|f(x)| \\ &\leq \left(\int_{-\infty}^0 e^{\beta x}dx\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\int_{-\infty}^0 e^{\beta x}|f|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} \leq \frac{1}{\sqrt{\beta}}||e^{\frac{\beta}{2}} f||_{L^2(\mathbb{R})} < \infty.\end{aligned} \tag{2.2}$$

De esto último y de (2.1) se concluye que $e^{\beta x} f \in L^1(\mathbb{R})$. ∎
En adelante $\widehat{f}$ denotará la transformada de Fourier de una función $f$ de la variable espacial.

**Lema 2.2.** *Sea $w \in C^1([0, 1]; L^2(\mathbb{R}))$ tal que para todo $\beta > 0$ la función $t \longmapsto e^{\beta x} w(t)$ es una función acotada de $[0, 1]$ con valores en $L^2(\mathbb{R})$, y tal que $t \longmapsto e^{\beta x} w'(t) := e^{\beta x} \partial_t w(t)$ es* *un elemento de $L^1([0,1];L^2(\mathbb{R}))$. Entonces, para todo $\xi \in \mathbb{R}$ la función $t \longmapsto \widehat{e^{\beta x}w(t)}(\xi)$ es absolutamente continua con derivada $\widehat{e^{\beta x}w'(t)}(\xi)$, a.e. $t \in [0,1]$.*

**Prueba.** Dado que $e^{\beta x}w(t) \in L^2(\mathbb{R})$ para todo $\beta > 0$, entonces, por lema 2.1 $e^{\beta x}w(t) \in L^1(\mathbb{R})$ para todo $\beta > 0$. Sean $\beta > 0$, $t \in [0,1]$, $\xi \in \mathbb{R}$ y $N \in \mathbb{N}$. Denotemos por $\chi_{[-N,N]}$ la función característica del intervalo $[-N,N]$ y definamos

$$G_N(t) := \int_{\mathbb{R}} e^{\beta x} e^{-i\xi x} \chi_{[-N,N]}(x) w(t)(x) dx. \tag{2.3}$$

Es decir,

$$G_N(t) = \langle w(t), e^{i\xi x} e^{\beta x} \chi_{[-N,N]}(x) \rangle_{L^2(\mathbb{R})}.$$

Como $w \in C^1([0,1];L^2(\mathbb{R}))$ entonces

$$\frac{d}{dt} G_N(t) = \langle w'(t), e^{i\xi x} e^{\beta x} \chi_{[-N,N]}(x) \rangle_{L^2(\mathbb{R})} \text{ para todo } t \in [0,1].$$

En virtud de la continuidad del producto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$ se tiene que la función

$$t \longmapsto \langle w'(t), e^{i\xi x} e^{\beta x} \chi_{[-N,N]}(x) \rangle_{L^2(\mathbb{R})} \in C([0,1];\mathbb{R}).$$

Luego por el teorema Fundamental del Cálculo, para $t \in [0,1]$

$$G_N(t) - G_N(0) = \int_0^t \langle w'(\tau), e^{i\xi x} e^{\beta x} \chi_{[-N,N]}(x) \rangle_{L^2(\mathbb{R})} d\tau. \tag{2.4}$$

Esto es

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} e^{-i\xi x} e^{\beta x} \chi_{[-N,N]}(x) w(t)(x) dx &= \int_0^t \int_{\mathbb{R}} e^{-i\xi x} e^{\beta x} \chi_{[-N,N]}(x) w'(\tau)(x) dx d\tau && (2.5) \\ &+ \int_{\mathbb{R}} e^{-i\xi x} e^{\beta x} \chi_{[-N,N]}(x) w(0)(x) dx. && (2.6) \end{aligned}$$

Como

$$\begin{aligned} |e^{-i\xi x} e^{\beta x} \chi_{[-N,N]}(x) w(t)(x)| &= |e^{\beta x} \chi_{[-N,N]}(x) w(t)(x)| \\ &\leq |e^{\beta x} w(t)(x)|, a.e \;\; x \in \mathbb{R}, \end{aligned}$$

y dado que $e^{\beta x}w(t) \in L^1(\mathbb{R})$, entonces por Teorema de la Convergencia Dominada (T.C.D)

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-i\xi x} e^{\beta x} \chi_{[-N,N]}(x) w(t)(x) dx \xrightarrow[N\to\infty]{} \int_{\mathbb{R}} e^{-i\xi x} e^{\beta x} w(t)(x) dx \tag{2.7}$$

y

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-i\xi x} e^{\beta x} \chi_{[-N,N]}(x) w(0)(x) dx \xrightarrow[N\to\infty]{} \int_{\mathbb{R}} e^{-i\xi x} e^{\beta x} w(0)(x) dx. \tag{2.8}$$

Por otro lado, dado que para todo $\beta > 0$ $e^{\beta x}w' \in L^1([0,1];L^2(\mathbb{R}))$, entonces del Lema 2.1, y teniendo en cuenta los estimativos (2.1) y (2.2) (con $w'(\tau)$ $\tau \in [0,1]$, en lugar de $f$), se tiene que $e^{\beta x}w' \in L^1([0,1];L^1(\mathbb{R}))$. Así, para casi todo $\tau \in [0,1]$ se sigue que

$$|e^{-i\xi x} e^{\beta x} \chi_{[-N,N]}(\cdot_x) w'(\tau)(\cdot_x)| \leq |e^{\beta x} w'(\tau)(\cdot_x)| \in L^1(\mathbb{R}_x), a.e \;\; \tau \in [0,1].$$

Y del T.C.D se tiene que a.e. $\tau \in [0,1]$

$$g_N(\tau) \equiv \int_{\mathbb{R}} e^{-i\xi x} e^{\beta x} \chi_{[-N,N]}(x) w'(\tau)(x) dx \xrightarrow[N\to\infty]{} \int_{\mathbb{R}} e^{-i\xi x} e^{\beta x} w'(\tau)(x) dx \equiv g(\tau).$$

Además,

$$|g_N(\tau)| \leq \int_{\mathbb{R}} e^{\beta x} |w'(\tau)(x)| dx,$$

y como el lado derecho de la anterior desigualdad es integrable en la variable $\tau$ en el intervalo $[0,1]$, por el T.C.D se obtiene entonces que

$$\int_0^t g_N(\tau) d\tau \xrightarrow[N\to\infty]{} \int_0^t g(\tau) d\tau.$$

Es decir,

$$\int_0^t \int_{\mathbb{R}} e^{-i\xi x} e^{\beta x} \chi_{[-N,N]}(x) w'(\tau)(x) dx d\tau \xrightarrow[N\to\infty]{} \int_0^t \int_{\mathbb{R}} e^{-i\xi x} e^{\beta x} w'(\tau)(x) dx \, d\tau. \tag{2.9}$$

De (2.4) a (2.9) se tiene que

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-i\xi x} e^{\beta x} w(t)(x) dx = \int_0^t \int_{\mathbb{R}} e^{-i\xi x} e^{\beta x} w'(\tau)(x) dx d\tau + \int_{\mathbb{R}} e^{-i\xi x} e^{\beta x} w(0)(x) dx.$$

De aquí concluimos que el lado izquierdo de la anterior igualdad define una función absolutamente continua de la variable $t \in [0,1]$ y que

$$\frac{d}{dt} \int e^{-i\xi x} e^{\beta x} w(t)(x) dx = \int_{\mathbb{R}} e^{-i\xi x} e^{\beta x} w'(\tau)(x) dx \;\text{ a.e }\; t \in [0,1].$$

Es decir,

$$\frac{d}{dt} \widehat{e^{\beta x} w(t)}(\xi) = \widehat{e^{\beta x} w'(t)}(\xi) \;\text{ a.e }\; t \in [0,1].$$

■

**Teorema 2.** *(Estimativo tipo Carleman). Sea $w \in C([0,1]; H^3(\mathbb{R})) \cap C^1([0,1]; L^2(\mathbb{R}))$. Supongamos que:*

1. *$t \longmapsto e^{\beta x} \partial_x^j w(t)$ es una función acotada de $[0,1]$ con valores en $L^2(\mathbb{R})$ para todo $\beta > 0$ y para $j = 0,1,2,3$ y*

2. *$t \longmapsto e^{\beta x} w'(t)$ es una función acotada de $[0,1]$ con valores en $L^2(\mathbb{R})$ para todo $\beta > 0$.*

*Entonces para todo $\lambda > 0$,*

$$||e^{\lambda x} w||_{L^2(\mathbb{R}\times[0,1])} \leq ||e^{\lambda x} w(0)||_{L^2(\mathbb{R})} + ||e^{\lambda x} w(1)||_{L^2(\mathbb{R})} + ||e^{\lambda x}(w' + \partial_x^3 w)||_{L^2(\mathbb{R}\times[0,1])}. \tag{2.10}$$

**Prueba.** Del Lema 2.2, para $\xi \in \mathbb{R}$ fijo, la función $t \longmapsto \widehat{e^{\lambda x} w(t)}(\xi)$ es absolutamente continua en $[0,1]$ y $\frac{d}{dt} \widehat{e^{\lambda x} w(t)}(\xi) = \widehat{e^{\lambda x} w'(t)}(\xi)$ a.e $t \in [0,1]$.

Definamos $g := e^{\lambda x} w$ y $h := e^{\lambda x}(w' + \partial_x^3 w)$. Entonces

$$
\begin{aligned}
h =& e^{\lambda x} w' + e^{\lambda x}\partial_x^3 w = e^{\lambda x} w' + e^{\lambda x}\partial_x^3 (e^{-\lambda x} g)\\
=& e^{\lambda x} w' + e^{\lambda x}(\partial_x^3 (e^{-\lambda x}) g + 3\partial_x^2 (e^{-\lambda x})\partial_x g + 3\partial_x (e^{-\lambda x})\partial_x^2 g + e^{-\lambda x}\partial_x^3 g)\\
=& e^{\lambda x} w' + e^{\lambda x}(-\lambda^3 e^{-\lambda x} g + 3\lambda^2 e^{-\lambda x}\partial_x g - 3\lambda e^{-\lambda x}\partial_x^2 g + e^{-\lambda x}\partial_x^3 g)\\
=& e^{\lambda x} w' + \partial_x^3 g - 3\lambda\partial_x^2 g + 3\lambda^2\partial_x g - \lambda^3 g.
\end{aligned}
$$

Notemos que del Lema 2.1, la evaluación en $t \in [0,1]$ de todos los términos del lado derecho de la anterior igualdad (y por tanto también $h(t)$) pertenecen a $L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$. Luego, para todo $\xi \in \mathbb{R}$, aplicando el Lema 2.2 obtenemos que a.e $t \in [0,1]$

$$
\begin{aligned}
\widehat{h(t)}(\xi) =& \widehat{e^{\lambda x} w'(t)}(\xi) + \widehat{\partial_x^3 g(t)}(\xi) - 3\lambda\widehat{\partial_x^2 g(t)}(\xi) + 3\lambda^2\widehat{\partial_x g(t)}(\xi) - \lambda^3\widehat{g(t)}(\xi)\\
=& \frac{d}{dt}\widehat{e^{\lambda x} w(t)}(\xi) + (i\xi)^3\widehat{g(t)}(\xi) - 3\lambda(i\xi)^2\widehat{g(t)}(\xi) + 3\lambda^2(i\xi)\widehat{g(t)}(\xi) - \lambda^3\widehat{g(t)}(\xi)\\
=& \frac{d}{dt}\widehat{e^{\lambda x} w(t)}(\xi) + [i(-\xi^3 + 3\lambda^2\xi) - \lambda^3 + 3\lambda\xi^2]\widehat{g(t)}(\xi)\\
=& \frac{d}{dt}\widehat{g(t)}(\xi) + [-im_\lambda(\xi) - a_\lambda(\xi)]\widehat{g(t)}(\xi),
\end{aligned}
$$

donde $m_\lambda(\xi) = \xi^3 - 3\lambda^2\xi \;\; y \quad a_\lambda(\xi) = \lambda^3 - 3\lambda\xi^2$

Por lo tanto

$$
\frac{d}{dt}[e^{-im_\lambda(\xi)t - a_\lambda(\xi)t}\widehat{g(t)}(\xi)] = e^{[-im_\lambda(\xi) - a_\lambda(\xi)]t}\widehat{h(t)}(\xi), \text{a.e } t \in [0,1].
$$

Como $t \longmapsto e^{-im_\lambda(\xi)t} e^{-a_\lambda(\xi)t}\widehat{g(t)}(\xi)$ es absolutamente continua en $[0,1]$, entonces:

- Si $a_\lambda(\xi) \le 0$, escribimos

$$
e^{-im_\lambda(\xi)t} e^{-a_\lambda(\xi)t}\widehat{g(t)}(\xi) - \widehat{g(0)}(\xi) = \int_0^t e^{-im_\lambda(\xi)\tau} e^{-a_\lambda(\xi)\tau}\widehat{h(\tau)}(\xi) d\tau.
$$

Por lo tanto

$$
\widehat{g(t)}(\xi) = e^{im_\lambda(\xi)t} e^{a_\lambda(\xi)t}\widehat{g(0)}(\xi) + \int_0^t e^{im_\lambda(\xi)[t-\tau]} e^{a_\lambda(\xi)[t-\tau]}\widehat{h(\tau)}(\xi) d\tau. \tag{2.11}
$$

- Si $a_\lambda(\xi) > 0$, escribimos

$$
e^{-im_\lambda(\xi)\cdot 1} e^{-a_\lambda(\xi)\cdot 1}\widehat{g(1)}(\xi) - e^{-im_\lambda(\xi)t} e^{-a_\lambda(\xi)t}\widehat{g(t)}(\xi) = \int_t^1 e^{-im_\lambda(\xi)\tau} e^{-a_\lambda(\xi)\tau}\widehat{h(\tau)}(\xi) d\tau,
$$

y por lo tanto

$$
\widehat{g(t)}(\xi) = e^{-im_\lambda(\xi)[1-t]} e^{-a_\lambda(\xi)[1-t]}\widehat{g(1)}(\xi) - \int_t^1 e^{-im_\lambda(\xi)[t-\tau]} e^{-a_\lambda(\xi)[t-\tau]}\widehat{h(\tau)}(\xi) d\tau. \tag{2.12}
$$

Entonces, para todo $t \in [0,1]$, de (2.11) y (2.12) se puede concluir que

$$|\widehat{g(t)}(\xi)| \leq |\widehat{g(0)}(\xi)| + |\widehat{g(1)}(\xi)| + \int_0^1 |\widehat{h(\tau)}(\xi)| d\tau.$$

Luego de la desigualdad de Minkowski se sigue que

$$\|\widehat{g(t)}\|_{L^2(\mathbb{R})} \leq \|\widehat{g(0)}\|_{L^2(\mathbb{R})} + \|\widehat{g(1)}\|_{L^2(\mathbb{R})} + \Big( \int_{\mathbb{R}} \big( \int_0^1 |\widehat{h(\tau)}(\xi)| d\tau \big)^2 d\xi \Big)^{1/2}.$$

De la desigualdad de Cauchy-Schwarz se obtiene que

$$\begin{aligned}
||\widehat{g(t)}||_{L^2(\mathbb{R})} &\leq ||\widehat{g(0)}||_{L^2(\mathbb{R})} + ||\widehat{g(1)}||_{L^2(\mathbb{R})} + \left( \int_{\mathbb{R}} \left( \int_0^1 1^2 d\tau \right) \cdot \left( \int_0^1 |\widehat{h(\tau)}(\xi)|^2 d\tau \right) d\xi \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq ||\widehat{g(0)}||_{L^2(\mathbb{R})} + ||\widehat{g(1)}||_{L^2(\mathbb{R})} + \left( \int_{\mathbb{R}} \left( \int_0^1 |\widehat{h(\tau)}(\xi)|^2 d\tau \right) d\xi \right)^{\frac{1}{2}} \\
&= ||\widehat{g(0)}||_{L^2(\mathbb{R})} + ||\widehat{g(1)}||_{L^2(\mathbb{R})} + \left( \int_0^1 \left( \int_{\mathbb{R}} |\widehat{h(\tau)}(\xi)|^2 d\xi \right) d\tau \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq ||\widehat{g(0)}||_{L^2(\mathbb{R})} + ||\widehat{g(1)}||_{L^2(\mathbb{R})} + \big( \int_0^1 ||\widehat{h(\tau)}||^2_{L^2(\mathbb{R})} \, d\tau \big)^{\frac{1}{2}}.
\end{aligned}$$

Del teorema de Plancherel se tiene que

$$\begin{aligned}
||g(t)||_{L^2(\mathbb{R})} &\leq ||g(0)||_{L^2(\mathbb{R})} + ||g(1)||_{L^2(\mathbb{R})} + \big( \int_0^1 ||h(\tau)||^2_{L^2(\mathbb{R})} d\tau \big)^{\frac{1}{2}} \\
&= ||g(0)||_{L^2(\mathbb{R})} + ||g(1)||_{L^2(\mathbb{R})} + \|h\|_{L^2(\mathbb{R}\times[0,1])}.
\end{aligned}$$

Observemos que

$$\begin{aligned}
||g||_{L^2(\mathbb{R}\times[0,1])} &= \left( \int_0^1 \int_{\mathbb{R}} |g(t)|^2 dx dt \right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \left( \int_0^1 ||g(t)||^2_{L^2(\mathbb{R})} dt \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq ||g(0)||_{L^2(\mathbb{R})} + ||g(1)||_{L^2(\mathbb{R})} + \|h\|_{L^2(\mathbb{R}\times[0,1])} \big( \int_0^1 dt \big)^{\frac{1}{2}},
\end{aligned}$$

lo que concluye la demostración del Teorema. ■

# Capítulo 3

# Prueba del Teorema 1

En este capítulo utilizamos los estimativos apriori obtenidos en el Capítulo 1 y el estimativo tipo Carleman desarrollado en Capítulo 2 para probar el resultado central de este trabajo.

**Prueba.** Sea $\psi \in C^\infty(\mathbb{R})$ no-decreciente tal que $\psi(x) = 0$, si $x < 0$ y $\psi(x) = 1$, si $x > 1$. Para $R > B$ definamos $\phi_R(x) \equiv \phi(x) = \psi(x - R)$. Consideremos $w$ definida por $w(t) := \phi u(t)$, $t \in [0, 1]$. Veamos que se cumplen las hipótesis del Teorema 2 para $w$:
Dado que $u \in C([0, 1]; H^6(\mathbb{R})) \cap C^1([0, 1]; H^3(\mathbb{R}))$, entonces claramente

$$w \in C([0, 1]; H^3(\mathbb{R})) \cap C^1([0, 1]; L^2(\mathbb{R})).$$

Como supp $u(0) \subset (-\infty, B]$ entonces para todo $\beta > 0$ y para todo $j = 0, 1, 2, 3$,

$$e^{\beta x}\partial_x^j u(0) \in L^2(\mathbb{R}).$$

Luego para $j = 0, 1, 2, 3$, $\beta > 0$ y $t \in [0, 1]$, por el Lema 1.2 se tiene que:

$$\begin{aligned} ||e^{\beta x}\partial_x^j w(t)||_{L^2(\mathbb{R})} &= ||e^{\beta x}\partial_x^j(\phi u(t))||_{L^2(\mathbb{R})} \\ &= ||\sum_{k=0}^{j} e^{\beta x} C_{k,j}\phi^{(j-k)}\partial_x^k u(t)||_{L^2(\mathbb{R})}. \\ &\leq C\sum_{k=0}^{j} ||e^{\beta x}\partial_x^k u(t)||_{L^2(\mathbb{R})}. \\ &\leq C_{j,\beta}. \end{aligned}$$

De lo anterior se concluye que la función $t \longmapsto e^{\beta x}\partial_x^j w(t)$ es acotada de $[0, 1]$ con valores en $L^2(\mathbb{R})$. Por otro lado, para todo $\beta > 0$ se tiene

$$\begin{aligned} ||e^{\beta x}w'(t)||_{L^2(\mathbb{R})} &= ||e^{\beta x}\phi u'(t)||_{L^2(\mathbb{R})} \\ &= ||e^{\beta x}\phi[-\partial_x^3 u(t) - u(t)\partial_x u(t)]||_{L^2(\mathbb{R})} \\ &\leq ||e^{\beta x}\partial_x^3 u(t)||_{L^2(\mathbb{R})} + ||e^{\beta x}u(t)\partial_x u(t)||_{L^2(\mathbb{R})} \\ &\leq ||e^{\beta x}\partial_x^3 u(t)||_{L^2(\mathbb{R})} + ||u||_{C([0,1];H^1)}||e^{\beta x}\partial_x u(t)||_{L^2(\mathbb{R})} \\ &\leq C_\beta, \end{aligned}$$

debido al Lema 1.2. De esta forma se tiene entonces que la función $t \longmapsto e^{\beta x} w'(t)$ es acotada de $[0,1]$ con valores en $L^2(\mathbb{R})$. Así, $w$ satisface las hipótesis del Teorema 2.
Observemos que como supp $u(0) \subseteq (-\infty, B]$ y supp $u(1) \subseteq (-\infty, B]$, y $R > B$, entonces de la definición de $w$ tenemos que $w(0) = w(1) = 0$. Del Teorema 2 se sigue entonces que para todo $\lambda > 0$

$$\begin{aligned} ||e^{\lambda x} w||_{L^2(\mathbb{R}\times[0,1])} &\leq ||e^{\lambda x} w(0)||_{L^2(\mathbb{R})} + ||e^{\lambda x} w(1)||_{L^2(\mathbb{R})} + ||e^{\lambda x}(w' + \partial_x^3 w)||_{L^2(\mathbb{R}\times[0,1])} \\ &= ||e^{\lambda x}(w' + \partial_x^3 w)||_{L^2(\mathbb{R}\times[0,1])}. \end{aligned} \tag{3.1}$$

Como

$$\partial_x^3 w = \partial_x^3(\phi u) = \phi \partial_x^3 u + \{3\phi' \partial_x^2 u + 3\phi'' \partial_x u + \phi''' u\} \equiv \phi \partial_x^3 u + F_{\phi,u},$$

entonces de (3.1) se sigue, usando el hecho de que $u$ es solución de la ecuación KdV, que

$$\begin{aligned} ||e^{\lambda x} w||_{L^2(\mathbb{R}\times[0,1])} &\leq ||e^{\lambda x}(\phi u' + \phi \partial_x^3 u + F_{\phi,u})||_{L^2(\mathbb{R}\times[0,1])} \\ &= ||e^{\lambda x}(-\phi u \partial_x u + F_{\phi,u})||_{L^2(\mathbb{R}\times[0,1])} \\ &\leq ||e^{\lambda x} \phi u \partial_x u||_{L^2(\mathbb{R}\times[0,1])} + ||e^{\lambda x} F_{\phi,u}||_{L^2(\mathbb{R}\times[0,1])}. \end{aligned} \tag{3.2}$$

Dado que las funciones $\phi', \phi''$ y $\phi'''$están soportadas en $[R, R+1]$ y son acotadas con cota independiente de $R$, entonces se tiene que

$$\begin{aligned} ||e^{\lambda x} F_{\phi,u}||^2_{L^2(\mathbb{R}\times[0,1])} &= \int_0^1 \int_R^{R+1} e^{2\lambda x} |3\phi'(x)\partial_x^2 u(t)(x) + 3\phi''(x)\partial_x u(t)(x) + \phi''(x)u(t)(x)|^2 dxdt \\ &\leq C e^{2\lambda(R+1)} \int_0^1 \int_R^{R+1} \Big( |\partial_x^2 u(t)(x)|^2 + |\partial_x u(t)(x)|^2 + |u(t)(x)|^2 \Big) dxdt \\ &\leq C e^{2\lambda(R+1)} \int_0^1 \int_{\mathbb{R}} \Big( |\partial_x^2 u(t)(x)|^2 + |\partial_x u(t)(x)|^2 + |u(t)(x)|^2 \Big) dxdt \\ &\leq C e^{2\lambda(R+1)} ||u||^2_{C([0,1];H^2(\mathbb{R}))} \cdot \int_0^1 1 dt \\ &= C_u e^{2\lambda(R+1)}, \end{aligned} \tag{3.3}$$

donde $C_u$ depende de $u$ pero no de $\lambda$ ni de $R$. Por otro lado, del Lema 1.3 se sabe que para todo $\beta > 0$, $|e^{\beta x}\partial_x u(t)(x)| \leq C_\beta$, para todo $x \in \mathbb{R}$ y para todo $t \in [0,1]$. Así, $|\partial_x u(t)(x)| \leq C_\beta e^{-\beta x}$.
Observamos entonces, con $\beta = 1$, que

$$\begin{aligned} ||e^{\lambda x} \phi u \partial_x u||^2_{L^2(\mathbb{R}\times[0,1])} &= \int_0^1 \int_R^\infty e^{2\lambda x} |\phi(x) u(t)(x)|^2 \cdot |\partial_x u(t)(x)|^2 dxdt \\ &\leq \int_0^1 \int_R^\infty e^{2\lambda x} |\phi(x) u(t)(x)|^2 \cdot C_1^2 e^{-2x} dxdt \\ &\leq C_1^2 e^{-2R} \int_0^1 \int_R^\infty e^{2\lambda x} |\phi(x) u(t)(x)|^2 dxdt \\ &\leq C_1^2 e^{-2R} ||e^{\lambda x} \phi u||^2_{L^2(\mathbb{R}\times[0,1])}. \end{aligned} \tag{3.4}$$

Por tanto, de (3.2), (3.3) y (3.4)

$$||e^{\lambda x} \phi u||_{L^2(\mathbb{R}\times[0,1])} \leq C_1 e^{-R} ||e^{\lambda x} \phi u||_{L^2(\mathbb{R}\times[0,1])} + C_u^{\frac{1}{2}} e^{\lambda(R+1)}.$$

Dado que $\phi \leq 1$, del Lema 1.2 se observa que $||e^{\lambda x}\phi u||_{L^2(\mathbb{R}\times[0,1])} < \infty$. Tomando $R > B$ tal que $C_1 e^{-R} < \frac{1}{2}$ se obtiene que

$$||e^{\lambda x}\phi u||_{L^2(\mathbb{R}\times[0,1])} \leq \frac{1}{2}||e^{\lambda x}\phi u||_{L^2(\mathbb{R}\times[0,1])} + C_u^{\frac{1}{2}} e^{\lambda(R+1)}.$$

Y de esta manera nos queda que

$$\frac{1}{2}||e^{\lambda x}\phi u||_{L^2(\mathbb{R}\times[0,1])} \leq C_u^{\frac{1}{2}} e^{\lambda(R+1)}. \tag{3.5}$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned} ||e^{\lambda x}\phi u||^2_{L^2(\mathbb{R}\times[0,1])} &= \int_0^1 \int_{\mathbb{R}} e^{2\lambda x}\phi^2 u^2(t)(x)dxdt \\ &\geq \int_0^1 \int_{2R}^{\infty} e^{2\lambda x} u^2(t)(x)dxdt \\ &\geq e^{4\lambda R}\int_0^1 \int_{2R}^{\infty} u^2(t)(x)dxdt. \end{aligned} \tag{3.6}$$

Luego de (3.5) y (3.6)

$$e^{2\lambda R}\bigg(\int_0^1 \int_{2R}^{\infty} u^2(t)(x)dxdt\bigg)^{\frac{1}{2}} \leq ||e^{\lambda x}\phi u||_{L^2(\mathbb{R}\times[0,1])} \leq 2C_u^{\frac{1}{2}} e^{\lambda(R+1)}.$$

Obtenemos entonces que para toda $\lambda > 0$

$$\bigg(\int_0^1 \int_{2R}^{\infty} u^2(t)(x)dxdt\bigg)^{\frac{1}{2}} \leq 2C_u^{\frac{1}{2}} e^{-\lambda(R-1)}.$$

En virtud de que $R > 1$, y tomando $\lambda \longrightarrow \infty$ se concluye que

$$\bigg(\int_0^1 \int_{2R}^{\infty} u^2(t)(x)dxdt\bigg)^{\frac{1}{2}} = 0.$$

Por tanto $u \equiv 0$ en $[2R, \infty) \times [0,1]$. Así por el resultado de Saut y Scheurer se tiene que $u \equiv 0$ en $\mathbb{R} \times [0,1]$.

■

# Bibliografía


[B] Bourgain, J., *On the compactness of the support of solutions of dispersive equations,* IMRN, International Mathematics Research Notices **9** (1997), 437-444.

[CKSTT] Colliander, J., Keel, M., Stafillani, G., Takaoka, H., Tao, T., *Sharp global well-posedness for KdV and modified KdV on R and T.* J. Amer. Math. Soc. **16** (2003), no. 3, 705-749.

[EKPV] Escauriaza, L., Kenig, C., Ponce, G., Vega, L., *On uniqueness properties of solutions of the k-generalized KdV equations,* J. Funct. Anal. **244** (2007), 504-535.

[IM] Isaza, P., Mejía, J., *On the support of solutions to the Ostrovsky equation with negative dispersion,* J. Diff. Equations **247** (2009), 1851-1865.

[KPV1] Kenig, C., Ponce, G., Vega, L., *A bilinear estimate with applications to the KdV equation.* J. Amer. Math. Soc. **9** (1996), no. 2, 573-603.

[KPV2] Kenig, C., Ponce, G., Vega, L., *On the support of solutions to the g-KdV equation,* Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire **19** (2002), 191-208.

[KPV3] Kenig, C., Ponce, G., Vega, L., *On unique continuation of solutions to the generalized KdV equation,* Math. Res. Lett. **10** (2003), 833-846.

[SS] Saut, J., Scheurer, B., *Unique continuation for some evolution equations,* J. Differential Equations **66** (1987), 118-139.