



UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA

Grupos y Diagramas

Diana Marcela Arango López

**Universidad Nacional de Colombia
Sede Medellín
Facultad de Ciencias
Escuela de Matemáticas
Septiembre 2011**

Grupos y Diagramas

por

Diana Marcela Arango López

Trabajo presentado como requisito parcial para optar al Título de
Magister en Ciencias Matemáticas

Directora: **Olga Patricia Salazar Díaz**

Universidad Nacional de Colombia
Sede Medellín
Facultad de Ciencias
Escuela de Matemáticas
Septiembre de 2011

Agradecimientos

Doy gracias a la vida por haber permitido que las matemáticas llegaran a mi y llenarán mis días de conocimientos y experiencias gratas.

A mi madre, por su completa entrega y dedicación. Eres lo más grande que me ha dado la vida.

A mi hermano, por la colaboración y el apoyo que me brindó en todo este proceso.

A Carlos, mi gran amor. Sin ti no hubiera tenido la fuerza suficiente para hacer realidad este sueño. Te dedico este logro que tanto esfuerzo y empeño nos costo.

A la profesora Olga, por dirigir este trabajo, por su amabilidad y paciencia. Por esas tardes de intenso y ameno trabajo.

A las jurados. La profesora Débora, por ser un ejemplo de vida y la profesora Margarita, porque fue de quien más aprendí en toda mi carrera.

A mis amigos, que compartieron conmigo el día a día en este arduo camino. Gracias por su apoyo desinteresado y su calida amistad.

A todos los profesores, que hicieron parte de este proyecto. Agradezco la formación académica y personal que recibí de todos ellos.

Resumen

En este trabajo se hace una introducción a la Teoría Combinatoria y la Teoría Geométrica de Grupos. Estudiaremos los diagramas Van Kampen y presentaremos los tres problemas fundamentales de Dehn, concentrándonos en el estudio del problema de la palabra, veremos que los diagramas Van Kampen están asociados a una solución para dicho problema. Discutiremos algunas propiedades de los grupos hiperbólicos y la relación existente entre estos grupos y la teoría geométrica. Finalmente, revisaremos algunas de estas ideas en algunos grupos con propiedades interesantes: grupo Diedral Infinito, grupo Heisenberg, grupo Baumslag-Solitar, grupo Lamplighter y grupo Coxeter.

Abstract

In this thesis we give an introduction to Combinatorial and Geometric group theory. We'll study Van Kampen's diagrams and we'll present Dehn's three fundamental problems, focusing in the word problem, we'll see that Van Kampen's diagrams are related to the solution of that problem. We'll discuss some properties of hyperbolic groups and the relation between these groups and geometric theory. Finally, we'll review some of those ideas in some groups with interesting properties: Infinite Dihedral group, Heisenberg group, Baumslag-Solitar, Lamplighter and Coxeter groups.

Contenido

Contenido	6
Introducción	8
1. PRELIMINARES	10
1.1. SOBRE GRUPOS	10
1.2. GRUPOS LIBRES Y PRESENTACIONES	12
1.2.1. Grupos Libres	12
1.2.2. Presentación de Grupos	13
1.3. CONSTRUCCIÓN DE NUEVOS GRUPOS	15
1.3.1. Producto Directo	15
1.3.2. Producto Libre	15
1.3.3. Producto Semidirecto	16
1.3.4. Producto Espiral	16
1.4. GRAFOS DE CAYLEY	17
1.5. DIAGRAMAS DE VAN KAMPEN	19
1.6. PROBLEMAS FUNDAMENTALES DE DEHN	23
1.7. GRUPOS HIPERBÓLICOS	25
2. APLICACIONES	35
2.1. GRUPO DIEDRAL INFINITO	35
2.1.1. Presentación	36
2.1.2. Forma normal	36
2.1.3. Grafo de Cayley de D_∞	37
2.1.4. Algunas Propiedades	38
2.2. GRUPO HEISENBERG	41
2.2.1. Algunas Propiedades	41
2.2.2. Presentación	42

2.2.3.	Forma Normal	42
2.2.4.	Grafo de Cayley en \mathbb{H}	46
2.3.	GRUPO BAUMSLAG-SOLITAR	47
2.3.1.	Presentación	48
2.3.2.	Algunas propiedades	48
2.3.3.	Forma Normal	50
2.3.4.	Grafo de Cayley	51
2.3.5.	Grupo Baumslag	53
2.4.	GRUPO LAMPLIGHTER	63
2.4.1.	Descripción geométrica	65
2.4.2.	Forma normal	68
2.4.3.	Presentación	71
2.4.4.	Embebimiento cuasi-isométrico	71
2.5.	GRUPOS COXETER	73
2.5.1.	Definición Combinatoria	73
2.5.2.	Definición Geométrica	74
2.5.3.	Algunas propiedades	79
2.5.4.	Problema de la Palabra	83
	Bibliografía	87

INTRODUCCIÓN

Un grupo puede ser descrito de diferentes maneras. Las tablas de grupos, por ejemplo, describen la estructura de un grupo finito mediante la organización de todos los posibles productos de todos los elementos del grupo. Muchas de sus propiedades se pueden deducir fácilmente mediante el examen de dicha tabla. Otra forma de definir un grupo, de gran importancia, se hace mediante los generadores y las relaciones entre dichos generadores, también llamada la presentación de un grupo. La teoría combinatoria de grupos estudia los grupos desde esta última perspectiva y su nombre hace referencia a la frecuente aparición de métodos combinatorios que parecen ser característicos de esta disciplina.

La teoría combinatoria de grupos surgió en la década de 1880, época en la cual Walter Von Dyck, discípulo de Felix Klein, introduce por primera vez el concepto de generadores y relaciones. La teoría ha estudiado en gran medida las propiedades de los grupos discretos a través del análisis de las presentaciones del grupo, que describen a los grupos como cocientes de grupos libres. Una primera publicación que estudia con profundidad dicha teoría fue realizada por Magnus, Karrass y Solitar en el año 1966, véase [21].

Esta teoría es particularmente importante cuando se satisfacen supuestos de finitud, por ejemplo, grupos finitamente generados, relacionados o presentados. Hace uso de la conexión de gráficos vía sus grupos fundamentales. Por ejemplo, podemos mostrar que subgrupos de un grupo libre son libres. Dicha afirmación se puede ver haciendo uso de esta teoría [11] o usando conceptos topológicos [20], lo que adicionalmente permite evidenciar la estrecha relación entre ambas áreas.

Cuando definimos un grupo mediante una presentación surgen algunas preguntas. Por ejemplo, cuándo dos palabras representan el mismo elemento del grupo. Cuándo un par de presentaciones definen grupos isomorfos. Si existe un algoritmo que permita determinar cuando dos palabras arbitrarias en el conjunto de generadores del grupo son o no elementos conjugados.

Estos problemas son atacados desde el punto de vista geométrico, por la teoría geométrica de grupos, ya sea viendo los grupos como objetos geométricos o mediante la búsqueda de objetos geométricos en los que actúe el grupo. Es evidente entonces que esta teoría surge de la teoría combinatoria de grupos producto del cuestionamiento de ciertas ideas que no encontraron solución con lo desarrollado hasta el momento.

La teoría geométrica de grupos es, por tanto, un área de la matemática que se dedica al estudio de los grupos finitamente generados mediante las exploraciones entre las propiedades de los grupos y las propiedades topológicas de los espacios donde estos grupos actúan.

La idea de ver los grupos como objetos geométricos surge con el grafo de Cayley, que debe su nombre a Arthur Cayley, cuya idea es presentar el grupo mediante un gráfico cuyos vértices corresponden a los elementos del grupo y las aristas corresponden a la multiplicación a derecha en el grupo. Igualmente Dehn y más recientemente Gromov hacen aportes importantes al respecto, al considerar los grupos finitamente generados como espacios métricos, usando la métrica de la palabra.

El surgimiento de la teoría geométrica de grupos fue impulsada en 1987, cuando Gromov introdujo la noción de grupos hiperbólicos; grupos finitamente generados equipados con una

métrica de la palabra que satisfacen ciertas propiedades características de la geometría hiperbólica. Las publicaciones de Gromov permitieron que se conocieran los trabajos de Nielsen, Reidemeister y Schreier, Whitehead y Van Kampen, ignorados hasta el momento, los cuales introducen ideas topológicas y geométricas en el estudio de grupos discretos. Otros precursores, como Martin Grindlinger, introducen la teoría de la pequeña cancelación que posteriormente es desarrollada por Roger Lyndon y Paul Schupp, véase [13].

Actualmente la teoría geométrica de grupos interactúa estrechamente con la topología de baja dimensión, la geometría hiperbólica, la topología algebraica, la teoría computacional y el análisis geométrico de grupos. Existe también una conexión sustancial con la teoría de la complejidad computacional, la lógica matemática, el estudio de los grupos de Lie y sus subgrupos discretos, los sistemas dinámicos, la teoría de la probabilidad, la teoría K y otras áreas de las matemáticas.

El estudio de los grupos bajo el enfoque de ambas teorías motivó el presente trabajo. En él se pretende hacer un breve estudio de varios conceptos desarrollados en la teoría combinatoria de grupos y en la teoría geométrica de grupos y proveer bajo ambos puntos de vista aplicaciones de algunos aspectos relevantes en grupos conocidos de orden infinito. El trabajo está dividido en dos capítulos que abarcan ampliamente la pretensión del trabajo.

En el primer capítulo se enuncian algunas definiciones sobre grupos que se necesitarán en el transcurso del trabajo. También se presentan algunos resultados de la teoría combinatoria de grupos, en relación con los grupos libres y la presentación de grupos. Finalmente, se introducen los aspectos relacionados con la teoría geométrica de grupos que tienen que ver con los grafos de Cayley, los problemas de Dehn, los diagramas de Van Kampen y los grupos hiperbólicos.

En el capítulo dos se presentan cinco grupos de gran importancia en la actualidad, pues han contribuido al desarrollo de las matemáticas de los últimos dos siglos. El primer grupo que estudiaremos será el Grupo Diedral Infinito, un grupo con el que el lector probablemente está un poco familiarizado. Luego, veremos algunas propiedades del grupo Heisenberg y presentaremos detalles importantes dados en este grupo bajo el enfoque combinatorio y geométrico. En la siguiente sección, se hace referencia a un grupo del que se han hecho numerosas publicaciones y que aporta importantes resultados dentro de la teoría que motivó nuestro estudio, se trata del Grupo Baumslag-Solitar. A continuación, dedicaremos nuestra atención a describir desde una perspectiva geométrica algunas características del Grupo Lamplighter. Por último, definiremos el grupo Coxeter desde un punto de vista combinatorio y geométrico y presentamos un resultado importante que se refiere a la solución del problema de la palabra para este grupo.

Capítulo 1

PRELIMINARES

En el presente capítulo se enunciarán brevemente algunas definiciones básicas de teoría de grupos y se establecerán ciertas notaciones necesarias para el desarrollo del trabajo. Las siguientes secciones se dedican a la Teoría Geométrica de Grupos, se hace una breve descripción del grafo de Cayley y de su construcción, se presentan los diagramas Van Kampen y un resultado de gran importancia que evidencia la relación entre la teoría combinatoria y la geométrica, finalmente se enuncian los problemas de Dehn y centramos nuestra atención en uno de ellos, el problema de la palabra. Concluimos el capítulo presentando un breve estudio de los grupos hiperbólicos, los cuáles dieron inicio a la teoría geométrica de grupos.

1.1. SOBRE GRUPOS

Recordemos las siguientes definiciones sobre grupos.

1. Definimos el **conmutador** de $u, v \in G$ así, $[u, v] = u^{-1}v^{-1}uv$, y decimos que u y v son elementos **conjugados** en G si existe un elemento $w \in G$ tal que $v = wuw^{-1}$.
2. Si R es subconjunto de G . Denotamos por $\langle R \rangle^G$ al subgrupo normal más pequeño de G que contiene a R , el cual llamaremos la **clausura normal** de R en G .

En otras palabras,

$$\langle R \rangle^G = \bigcap_{N \trianglelefteq G, R \subseteq N} N$$

Este subgrupo normal $\langle R \rangle^G$ también puede verse como el conjunto de todos los elementos de G que pueden ser escritos como un producto de conjugados de $r_i \in R$ y sus inversos, esto es

$$\langle R \rangle^G = \{g \in G / g = u_1 r_1^{\epsilon_1} u_1^{-1} u_2 r_2^{\epsilon_2} u_2^{-1} \dots u_k r_k^{\epsilon_k} u_k^{-1}, \forall r_i \in R, u_i \in G \epsilon_i = \pm 1\}$$

3. El subgrupo conmutador $G' = [G, G]$ es llamado algunas veces el **grupo derivado**. Con esto, podemos definir $G'' = [G', G'] = [[G, G], [G, G]]$ el cual es el subgrupo conmutador de G' . Inductivamente, definimos una serie descendente de subgrupos así: $G^{(n+1)} = [G^{(n)}, G^{(n)}]$ llamada la **serie derivada** de G en la cual G' y G'' son los dos primeros términos.

4. Un grupo G es **soluble** si existe una cadena de subgrupos $1 = G_0 \triangleleft G_1 \triangleleft \dots \triangleleft G_s = G$ tal que G_{i+1}/G_i es abeliano $\forall i = 0, 1, \dots, s - 1$.

En términos del conmutador, G es soluble si sus series derivadas terminan en el subgrupo trivial.

5. Si G es soluble, el entero n no-negativo más pequeño para el cual $G^{(n)} = 1$ es llamado la **longitud soluble** de G . En el caso particular que $G^{(2)} = G'' = 1$, el grupo derivado G' de G es abeliano y G es llamado **metabeliano**.
6. Otras series descendentes de subgrupos totalmente invariantes de G , comúnmente estudiados, son las **series centrales inferiores** definidas por $\gamma_1(G) = G$ y $\gamma_{n+1} = [\gamma_n(G), G]$.
7. Un grupo es llamado **nilpotente de clase c** si $\gamma_{c+1}(G) = 1$. Así, un grupo es llamado nilpotente de clase 2 si $[[G, G], G] = 1$, lo cual es equivalente a decir que $[G, G] \subseteq Z(G)$ o que “los conmutadores son centrales en G ”.

A continuación enunciamos algunas definiciones relacionadas con teoría geométrica de grupos.

1. Si X es un objeto geométrico o topológico, entonces la **acción** de un grupo finitamente generado G en X es **discreta** si cada órbita forma un subconjunto discreto de X . Esto es, si para cada $x \in X$ existe una vecindad N_x de x tal que $Orb(x) \cap N_x = x$.
2. Una **acción discreta** de un grupo finitamente generado en un espacio X es **propia** si para algún $x \in X$, $Stab(x)$ es finito.
3. Los **racionales diádicos** son los números racionales que pueden ser expresados como un entero a través de una potencia de 2. Este conjunto es denotado $\mathbb{Z} \left[\frac{1}{2} \right]$ y se puede expresar así:

$$\mathbb{Z} \left[\frac{1}{2} \right] = \left\{ \frac{m}{2^n} / m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N} \right\}$$

4. Un subgrupo H de un grupo G es un **retracto** si existe un homomorfismo $\rho : G \rightarrow H$ tal que $\rho(h) = h, \forall h \in H$. Tal ρ es llamada una **retracción** de G en H .
5. Dado un grupo G , un elemento $g \in G$ y un entero positivo n . Denotaremos d_S a la longitud del producto $g^{-1}h, \forall g, h \in G$. Por tanto,

La **esfera de radio n** es

$$S(g, n) = \{h \in G / d_S(g, h) = n\}$$

La **bola de radio n** es

$$B(g, n) = \{h \in G / d_S(g, h) \leq n\}$$

6. Si (X, d) y (Y, d') son espacios métricos entonces una función $f : X \rightarrow Y$ es llamado un (λ, ϵ) -**embebimiento cuasi-isométrico** si existen constantes $\lambda \geq 1$ y $\epsilon \geq 0$ tal que para cada par de puntos $x, x' \in X$ se cumple que

$$\frac{1}{\lambda}d(x, x') - \epsilon \leq d'(f(x), f(x')) \leq \lambda d(x, x') + \epsilon$$

7. Un embebimiento cuasi-isométrico f es llamado una **cuasi-isometría** si existe una constante $c \geq 0$ tal que $d'(y, f(x)) \leq c, \forall y \in Y$.

1.2. GRUPOS LIBRES Y PRESENTACIONES

Las pruebas de los resultados que sólo se enuncian en esta sección se pueden encontrar en los Capítulos 1 y 4 de [11].

1.2.1. Grupos Libres

Definición. Un grupo F es llamado **grupo libre** si existe algún subconjunto $S \subseteq F$, llamado **base libre** para F , tal que para todo grupo G y toda función $\varphi : S \rightarrow G$ existe un único homomorfismo $\tilde{\varphi} : F \rightarrow G$ tal que $\tilde{\varphi}(s) = \varphi(s)$, $\forall s \in S$ o tal que el diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccc} S & \xrightarrow{i} & F \\ & \searrow \varphi & \vdots \\ & & G \end{array} \quad \begin{array}{c} \vdots \\ \exists! \tilde{\varphi} \\ \downarrow \end{array}$$

Otra forma equivalente de definir grupo libre es si existe un subconjunto S de F con la propiedad que todo elemento de F puede escribirse en forma única como producto de elementos de S y de sus inversos. Véase [11].

En adelante, \equiv_G significa idéntica como palabra y $=_G$ igual como elementos del grupo G .

Definiciones. 1. Dado un conjunto de símbolos S (S no necesariamente tiene que ser contable u ordenado), una **palabra** en S es una expresión de la forma $a_1^{\epsilon_1} a_2^{\epsilon_2} \dots a_k^{\epsilon_k}$ donde $\epsilon_i = \pm 1$ y $a_i \in S$ (no necesariamente símbolos distintos). Esto es, una palabra es una cadena de símbolos de $S \cup S^{-1}$, donde $S^{-1} = \{a^{-1} / a \in S\}$. Usualmente, identificamos a^1 con a . Dada una palabra w el número de términos presentes en w es llamado la **longitud** de la palabra y se denota $l(w)$. La palabra vacía tiene longitud 0.

2. Una palabra en S se llama **libremente reducida** si ésta no contiene una subpalabra (subcadena consecutiva) de la forma aa^{-1} o de la forma $a^{-1}a$; tales subcadenas son llamadas **pares inversos** de generadores.

Si una palabra w contiene un par inverso en un grupo G , por ejemplo, $w \equiv_G ua^{-1}av$, donde u, v son subpalabras, entonces en cualquier grupo que contenga a w podemos tener $w \equiv_G uv$.

Al remover pares inversos, los dos símbolos a y a^{-1} se dicen cancelados.

3. Dada cualquier palabra w , al realizar cancelaciones sucesivas de pares inversos que aparezcan en w , llegamos en un número finito de pasos a la palabra libremente reducida w' , la cual llamaremos **forma reducida de w** .

Lema 1. Dado $w \in S$. Existe una única forma reducida para la palabra w .

Demostración. Véase [16]. □

Definición. Definimos F_s como el conjunto de palabras libremente reducidas en S (incluyendo la palabra vacía, la cual denotaremos por e).

La multiplicación en F_s se define así: $u.v = uv$, esto es, el producto es la reducción libre de una palabra seguida de otra (concatenación).

(F_s, \cdot) es grupo. La asociatividad se verifica fácilmente, la identidad es la palabra vacía e y la inversa de $a_1^{\epsilon_1} a_2^{\epsilon_2} \dots a_k^{\epsilon_k}$ es $a_k^{-\epsilon_k} a_{k-1}^{-\epsilon_{k-1}} \dots a_1^{-\epsilon_1}$.

Teorema 1. F_s es un grupo libre.

Demostración. Se verifica fácilmente. □

Corolario 1. Todo grupo es un grupo cociente de un grupo libre. Así, si G es un grupo, existe un grupo libre F y un subgrupo normal N tal que $G \cong \frac{F}{N}$.

Teorema 2 (Caracterización de Libertad). Sea G un grupo y S un subconjunto de G . Entonces G es libre con base S si y sólo cumple lo siguiente:

1. S genera a G .
2. Si w es una palabra en S y $w =_G 1$, entonces w no es libremente reducida, esto es, w podría contener un par inverso.

Definición. Una palabra w en el grupo libre F_s con base S se dice **cíclicamente reducida** si cada permutación cíclica de w es libremente reducida.

1.2.2. Presentación de Grupos

Definición. Una **presentación** $P = \langle S/R \rangle$ es un par consistente de un conjunto S de generadores y un conjunto R de palabras en S llamadas **relaciones**.

Un **grupo presentado por** P , denotado $gp(P)$, es el grupo F_S/N_R donde F_S es el grupo libre con base libre S y $N_R = \langle R \rangle^G$.

En adelante, si $G = gp(P)$ abusaremos de la notación y escribiremos $G = \langle S/R \rangle$.

Definición. Una presentación $P = \langle S/R \rangle$ se dice: **finitamente generada** si S es un conjunto finito, **finitamente relacionada** si R es un conjunto finito de palabras y **finitamente presentada** si ambos, S y R , son finitos, es decir, si es finitamente generada y relacionada.

Notación. Si $S = \{a_1, a_2, \dots\}$ y $R = \{r_1, r_2, \dots\}$ usamos la siguiente notación para la presentación:

- $P = \langle a_1, a_2, \dots / r_1, r_2, \dots \rangle$ en cuyo caso los r_i son llamados relatores.
- $P = \langle a_1, a_2, \dots / r_1 = 1, r_2 = 1, \dots \rangle$ en cuyo caso las ecuaciones $r_i = 1$ son llamadas relaciones.
- $P = \langle a_1, a_2, \dots / u_1 = v_1, u_2 = v_2, \dots \rangle$ donde $r_i = u_i v_i^{-1}$.

Lema 2. Sea $G = \langle S/D \rangle$ un grupo dado por una presentación. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

1. Si w es cualquier palabra en los generadores de G entonces $w =_G 1$.

2. Para cada elemento w del grupo libre F_S existe una ecuación

$$w =_{F_S} u_1 r_1^{\epsilon_1} u_1^{-1} u_2 r_2^{\epsilon_2} u_2^{-1} \dots u_k r_k^{\epsilon_k} u_k^{-1} \text{ con } u_i \in F_S, r_i \in R \text{ y } \epsilon_i = \pm 1.$$

Demostración. Véase [16]. □

Definición. La **forma normal** para un grupo G con conjunto de generadores S es la elección de una palabra libremente reducida en S para cada elemento de G .

En otras palabras, sea $S \subset G$ un conjunto de generadores para el grupo G y sea $\pi : \{S \cup S^{-1}\}^* \rightarrow G$ la función evaluación que envía cada $s, s^{-1} \in S$ al correspondiente generador de G y una palabra $w \in \{S \cup S^{-1}\}^*$ al correspondiente producto de generadores y sus inversos en G . Definimos la **forma normal** para G como la función $\eta : G \rightarrow \{S \cup S^{-1}\}^*$ tal que la composición $\pi \circ \eta : G \rightarrow G$ es la identidad. En este contexto, la forma normal es un subconjunto de $\{S \cup S^{-1}\}^*$ que mapea biyectivamente a G bajo π .

Lema 3. Sean F_S, G, H grupos y $\pi : F_S \rightarrow G, \tilde{\psi} : F_S \rightarrow H$ homomorfismos tales que:

1. $Im \pi = G$
2. $Ker \pi \subseteq Ker \tilde{\psi}$

Entonces existe un homomorfismo $\varphi : G \rightarrow H$ tal que $\varphi \circ \pi = \tilde{\psi}$.

Teorema 3 (Test de Sustitución). Sean $G = \langle S/R \rangle, H$ un grupo y $\psi : S \rightarrow H$ una función. Entonces ψ extiende a un homomorfismo $\varphi : G \rightarrow H$ si y sólo si $\tilde{\psi}(r) =_H 1$, para todo $r \in R$, donde $\tilde{\psi} : F_S \rightarrow H$ es una extensión formal de ψ de todas las palabras.

Ejemplo 1. Consideremos el grupo G con presentación $G = \langle a, t/t^{-1}at = a^2 \rangle$. Veamos que

$$\begin{aligned} \psi : \quad G &\longrightarrow G \\ a &\longmapsto \psi(a) = a^2 \\ t &\longmapsto \psi(t) = t \end{aligned}$$

extiende a un homomorfismo de G en sí mismo.

Para chequear esto basta computar $\tilde{\psi}$ en ambos lados de la relación definida y mostrar que son iguales.

$$\psi(t^{-1}at) = \psi(t)^{-1}\psi(a)\psi(t) = t^{-1}a^2t = t^{-1}att^{-1}at = (t^{-1}at)^2 = (a^2)^2 = \tilde{\psi}(a^2)$$

Así, ψ define un homomorfismo $\tilde{\psi} : G \rightarrow G$.

Observemos que este homomorfismo es sobreyectivo. Sus imágenes contienen a t y a^2 y dado que $a = t^{-1}a^2t$ se tiene que también contiene a a .

Ahora consideremos la función φ definida así:

$$\begin{aligned} \varphi : \quad G &\longrightarrow G \\ a &\longmapsto \varphi(a) = tat^{-1} \\ t &\longmapsto \varphi(t) = t \end{aligned}$$

Podemos chequear que φ extiende a un homomorfismo.

$$\tilde{\varphi}(t^{-1}at) = \varphi(t)^{-1}\varphi(a)\varphi(t) = t^{-1}tat^{-1}t = a$$

$$\tilde{\varphi}(t) = t.$$

$$\begin{aligned} \text{Adem\'as, } \psi(\varphi(a)) &= \psi(tat^{-1}) = \psi(t)\psi(a)\psi(t)^{-1} = ta^2t^{-1} = a \\ \psi(\varphi(t)) &= \psi(t) = t \quad \varphi(\psi(a)) = \varphi(a^2) = ta^2t^{-1} = a \\ \varphi(\psi(t)) &= \varphi(t) = t \end{aligned}$$

Por tanto, φ y ψ son inversas mutuamente. As\'ı, ambos son automorfismos del grupo G .

Este grupo es actualmente uno de la familia con presentaci3n $B(m, n) = \langle a, t/t^{-1}a^mt = a^n \rangle$ conocidos como grupos Baumslag-Solitar.

1.3. CONSTRUCCI3N DE NUEVOS GRUPOS

1.3.1. Producto Directo

Dados dos grupos H y K , podemos construir el producto directo $H \times K$ como el conjunto de pares ordenados de la siguiente forma:

$$H \times K = \{(h, k) / h \in H, k \in K\}$$

Con la operaci3n multiplicaci3n definida as\'ı $(h_1, k_1) \cdot (h_2, k_2) = (h_1h_2, k_1k_2)$

Los subgrupos H y K son llamados **factores directos** de $H \times K$.

Definici3n. Supongamos que H y K son dados por presentaciones, digamos $H = \langle S/R \rangle$ y $K = \langle T/E \rangle$. Cambiando uno de los alfabetos si es necesario, podemos suponer S y T disjuntos. Entonces una **presentaci3n** para $H \times K$ es:

$$H \times K = \langle S, T/R, E, st = ts, \forall s \in S, t \in T \rangle$$

Observemos que cada elemento $w \in H \times K$ puede ser escrito usando s3lo la relaci3n conmutativa $st = ts$ en la forma $w = uv$ donde u es una palabra en s y v es una palabra en t . Adem\'as, si $w =_{H \times K} 1$ entonces $u =_H 1$ y $v =_K 1$. Esto es equivalente a lo siguiente: si $w = u_1v_1 = u_2v_2$ donde los u_i son palabras en S y los v_i son palabras en T , entonces $u_1 =_H u_2$ y $v_1 =_K v_2$.

1.3.2. Producto Libre

Supongamos que H y K son dos grupos. L es llamado el **producto libre** de H y K , si existen homomorfismos $i_H : H \rightarrow L$ y $i_K : K \rightarrow L$ que satisfacen las siguientes condiciones: para cada par de homomorfismos $\alpha : H \rightarrow G$ y $\beta : K \rightarrow G$ donde G es cualquier grupo, existe un 3nico homomorfismo $\gamma : L \rightarrow G$ tal que $\alpha = \gamma \circ i_H$ y $\beta = \gamma \circ i_K$.

$$\begin{array}{ccc} H & \xrightarrow{i_H} & L & \xleftarrow{i_K} & K \\ & \searrow \alpha & \vdots & & \swarrow \beta \\ & & \exists! \gamma & & \\ & & \downarrow & & \\ & & G & & \end{array}$$

El diagrama muestra que el producto libre de H y K es 3nico y lo denotamos por $H * K$.

Los subgrupos H y K son llamados **factores (libres)** de $H * K$. La construcción puede generalizarse a cualquier número de factores, digamos H_j , $j \in J$, caso en el cual denotamos el producto libre $*_{j \in J} H_j$.

Definición. Supongamos que H y K son dados por presentaciones $H = \langle S/R \rangle$ y $K = \langle T/E \rangle$, respectivamente. Podemos suponer $S \cap T = \emptyset$. Entonces una **presentación** para $H * K$ puede ser obtenida juntando estas presentaciones, así:

$$H * K = \langle S \cup T / R \cup E \rangle$$

1.3.3. Producto Semidirecto

El producto semidirecto es una generalización del producto directo. Sean H y K grupos y sea

$$\begin{aligned} \theta : \quad H &\longrightarrow \text{Aut}(K) \\ h &\longmapsto \theta(h) = \theta_h \end{aligned}$$

un homomorfismo de grupos de H en los autormorfismos de K . Entonces, podemos construir un grupo $K \rtimes H$ como el conjunto de pares hk con $k \in K$ y $h \in H$, así:

$$K \rtimes H = \{hk / k \in K, h \in H\}$$

Con la operación multiplicación definida así:

$$(h_1, k_1) \cdot (h_2, k_2) = (h_1 h_2, \theta_{h_1}(k_2) k_1)$$

El grupo $K \rtimes H$ es llamado el producto semidirecto de K y H .

Teorema 4. Supongamos que G es un grupo con subgrupos H y K tal que

1. $H \trianglelefteq G$
2. $H \cap K = 1$

Sea $\theta : H \longrightarrow \text{Aut}K$ que envía h en $\theta(h) = \theta_h$ donde $\theta_h(k) = h^{-1}kh$. Entonces $HK \cong H \rtimes K$. En particular, si $G = HK$ con H y K satisfaciendo (1) y (2), entonces G es el producto semidirecto de H y K .

Demostración. Véase [6]. □

1.3.4. Producto Espiral

El producto espiral de dos grupos G y H se define usando el producto semidirecto. Comenzamos formando una suma directa de copias de G , una copia para cada $h \in H$. De hecho, indizamos las copias de G con los elementos de H , así, la suma directa puede ser expresada como $\bigoplus_{h \in H} G$. La acción de H en la suma directa se define como la acción estándar de Cayley de H en sí mismo. Así, dada $\vec{g} \in \bigoplus_{h \in H} G$, el elemento $h \in H$ permuta las entradas de \vec{g} , cambiando la entrada en la posición h' a la posición $h \cdot h'$ para cada $h' \in H$.

El producto espiral, denotado $G \wr H$ ó $GwrH$, es el producto semidirecto de $\bigoplus_{h \in H} G$ y H :

$$G \wr H = (\bigoplus_{h \in H} G) \rtimes H$$

En particular, si G y H son finitamente generados entonces $G \wr H$ es finitamente generado.

Ejemplo 2. Consideremos el caso en el que G y H son grupos cíclicos infinitos, digamos $G = \langle a \rangle$ y $H = \langle t \rangle$. Escribimos a_i en lugar de a_i . Entonces $B := \bigoplus_{h \in H} G$ puede ser presentado como $B = \langle a_i, i \in \mathbb{Z} \mid a_i a_j = a_j a_i, i, j \in \mathbb{Z} \rangle$.

Ahora t actúa en B enviando $a_i \mapsto a_{i+1}$, así podemos escribir una presentación para el producto espiral como

$$G \wr H = \langle a \rangle \wr \langle t \rangle = \langle t, a_i, \forall i \in \mathbb{Z} \mid t^{-1} a_i t = a_{i+1}, a_i a_j = a_j a_i, \forall i, j \in \mathbb{Z} \rangle$$

1.4. GRAFOS DE CAYLEY

Antes de definirlos recordemos algunos conceptos sobre teoría de grafos.

Un **grafo** G es una tripleta que consiste de un conjunto de vértices $V(G)$, un conjunto de aristas $E(G)$ y una relación que asocia con cada arista dos vértices (no necesariamente distintos) llamados puntos finales.

Un **loop o lazo** es una arista cuyos puntos finales son iguales.

Un **ciclo** es un grafo con un número de vértices igual al número de aristas, cuyos vértices se pueden ubicar en círculo de tal manera que dos vértices son adyacentes si y sólo si aparecen consecutivos en el círculo.

Un **subgrafo** de un grafo G es un grafo H tal que $V(H) \subseteq V(G)$ y $E(H) \subseteq E(G)$ y lo denotamos $H \subseteq G$.

Un grafo G es **conexo** si cada par de vértices en G pertenece a un camino.

Las **componentes** de un grafo G son los subgrafos conexos.

El **grado** de un vértice v en un grafo G , denotado $d_G(v)$ ó $d(v)$, es el número de aristas incidentes en v . El grado máximo es $\Delta(G)$ y el grado mínimo es $\delta(G)$.

Un grafo G es **regular** si $\Delta(G) = \delta(G)$. Y se dice k -regular si el grado común es k .

Un **vértice de corte** de un grafo es un vértice que al eliminarse incrementa el número de componentes.

Los grafos de Cayley representan una herramienta de gran importancia dentro de la teoría geométrica pues permiten estudiar los grupos como objetos geométricos y determinar muchas propiedades de los grupos que bajo otras circunstancias no se perciben fácilmente.

Definición. Sea S un conjunto de generadores del grupo G . El **grafo de Cayley** de G con respecto a S , denotado $\text{Cay}(G, S)$ ó $\Gamma(G, S)$, tiene un vértice por cada elemento $g \in G$ y para cada vértice, digamos g_1 , y cada $s \in S$ existe una arista orientada (con etiqueta) del vértice g_1 al vértice g_2 si y sólo si $g_2 = g_1 \cdot s$ ó $g_2 = s \cdot g_1$, de acuerdo al autor, en G .

El hecho de que S sea un conjunto generador implica que este grafo sea conexo.

Definición. En G se define una métrica, llamada la **métrica de la palabra** d_S , así, $\forall v, v' \in G$, $d_S(v, v')$ es igual a la longitud del producto $(v')^{-1}v$.

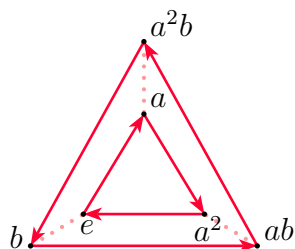
La métrica de la palabra d_S en G , está estrechamente relacionada con el grafo de Cayley $\Gamma(G, S)$ de G , podemos identificar a G con el conjunto de vértices de $\Gamma(G, S)$, y dos vértices $g, h (g \neq h)$ son adyacentes en Γ si y sólo si $g^{-1}h \in S$ ó $h^{-1}g \in S$, en otras palabras, si y sólo si $d_S(g, h) = 1$. Más generalmente, si g, h están unidas por un camino de longitud n en $\Gamma(G, S)$, entonces podemos expresar $g^{-1}h$ como un palabra de longitud n en S , así $d_S(g, h) \leq n$. El recíproco también es cierto. Por tanto, $d_S(g, h)$ es precisamente la longitud del camino más corto (una geodésica) en $\Gamma(G, S)$ de g a h .

Si v es un elemento del grupo G , denotamos por $l_s(v)$ y la llamamos longitud de v relativa a S , al número mínimo de generadores de S necesarios para escribir el elemento v .

Como es usual en el contexto de grafos orientados con etiqueta, un camino entre vértices en el Grafo de Cayley es asociado a una palabra en el grupo libre F_S (esta palabra podría ser no reducida). La palabra es obtenida escribiendo las letras correspondientes como la etiqueta de cada arista en el orden del recorrido, con el exponente ± 1 de acuerdo a la dirección del camino, $+1$ en la dirección del trayecto y -1 en la orientación opuesta.

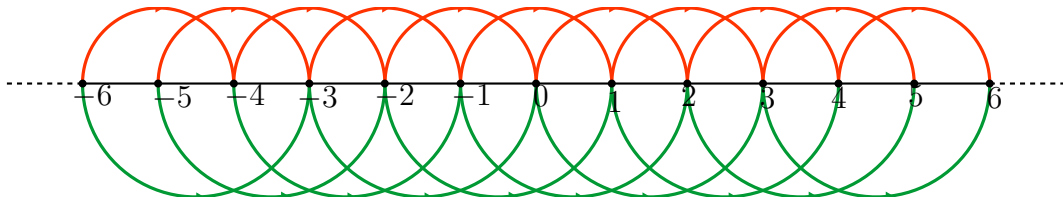
- Observaciones 1.**
1. Si un elemento s del conjunto generador es su propio inverso, $s = s^{-1}$, generalmente se representa con una arista no dirigida.
 2. El grafo de Cayley $\Gamma(G, S)$ depende del conjunto generador S escogido.
 3. El grafo de Cayley es k -regular, con $k = |S|$ (ó $2|S|$).
 4. Los ciclos en el grafo de Cayley indican relaciones entre los elementos de S .
 5. El grafo de Cayley es conexo.
 6. El problema de construir el grafo de Cayley de una presentación dada P es equivalente a resolver el problema de la palabra, véase Sección 2.6, para P .

Ejemplo 3. Consideremos el grupo diedral $D_3 = \{e, a, a^2, b, ab, a^2b\}$ dado por la presentación $D_3 = \langle a, b/a^3 = b^2 = 1, abab = 1 \rangle$. Tomando $S = \{a, b\}$ obtenemos el siguiente grafo:



Nota. Para construir el grafo debemos usar las relaciones de la presentación dada para D_3 , por ejemplo, se tiene que al multiplicar el vértice b por el generador a obtenemos el vértice $b.a = a^{-1}b = a^2b$ al usar la relación $abab = 1$.

Ejemplo 4. Sea $G = \mathbb{Z}$ y $S = \{2, 3\}$. Un grafo de Cayley para este grupo asociado a dicho conjunto de generadores es:
(En el gráfico el generador 2 está coloreado con Rojo y 3 con Verde).



1.5. DIAGRAMAS DE VAN KAMPEN

Fueron introducidos por Edbert Van Kampen en 1933. Intuitivamente los diagramas de Van Kampen son diagramas planos usados para representar el hecho de que una palabra particular en los generadores de un grupo dado por una presentación representa el elemento identidad en tal grupo.

Definición. Sea $G = \langle S/R \rangle$ un grupo dado por dicha presentación, donde todas las relaciones en R son palabras cíclicamente reducidas en F_S . La presentación se asumirá finitamente presentada, aunque esta hipótesis no es necesaria para la definición general de diagramas Van Kampen.

Sea R^c la clausura cíclica de R , es decir, el conjunto de todos los conjugados cíclicos de elementos de R y sus inversos.

$$R^c = \{(prp^{-1})^{\pm 1} / p \text{ un segmento inicial y } r \in R\}$$

Sea D un grafo plano, finito, conexo, orientado, etiquetado, donde cada arista orientada es etiquetada por un elemento de S . El diagrama D está embebido en \mathbb{R}^2 . Tomamos un vértice en la frontera de la región no limitada de $\mathbb{R}^2 \setminus D$, llamado Punto Base.

Supongamos, además, que para cada región acotada (cara) F de $\mathbb{R}^2 \setminus D$, la frontera ∂F está etiquetada por una palabra en R^c ; dicha palabra es obtenida al leer las etiquetas en las aristas empezando en cualquier vértice de la frontera. Cada etiqueta en las aristas recorridas lleva un exponente \pm de acuerdo a si la dirección de recorrido coincide o no con la orientación de la arista. La dirección escogida y el punto inicial alteran la palabra que se lee por la inversión y/o conjugación cíclica.

La **palabra frontera** del diagrama D es la palabra w que se lee en la frontera de la región no limitada de $\mathbb{R}^2 \setminus D$ comenzando desde el punto base.

Entonces decimos que D es un **diagrama Van Kampen** para la palabra frontera w bajo la presentación P .

El número de regiones de D es llamado el **área** de D y se denota $Area(D)$.

Teorema 5. Sea $P = \langle S/R \rangle$ una presentación del grupo G . Entonces, $w =_G 1$ si y sólo si existe un diagrama Van Kampen para w en P .

Demostración. (\Rightarrow) Supongamos que w es una palabra libremente reducida. Como $w \in \langle R \rangle^G$ entonces

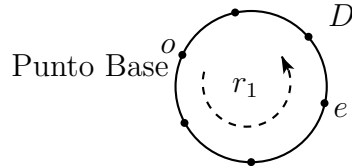
$$w = \prod_{i=1}^M p_i r_i^{\epsilon_i} p_i^{-1}$$

donde $p_i \in F_S$, $r_i \in R$ y $\epsilon_i = \pm 1$, $M \in \mathbb{N}$. Así cada elemento $w \in F_S$.

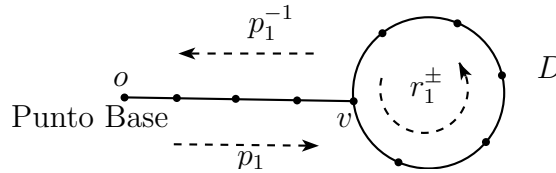
Razonemos por inducción sobre M .

- Si $M = 1$ entonces $w = p_1 r_1^{\epsilon_1} p_1^{-1}$ con $p_1 \in F_S$, $r_1 \in R$, $\epsilon_1 = \pm 1$. Fijamos sobre el plano un punto base o . Dos casos:

Caso 1: Si $p_1 = 1$. Dibujamos un lazo e (círculo o polígono) con punto inicial y final el punto base o y subdividimos el lazo en $l(r_1)$ segmentos orientándolo y etiquetándolo apropiadamente. Así, $w = r_1^\pm$, veamos:



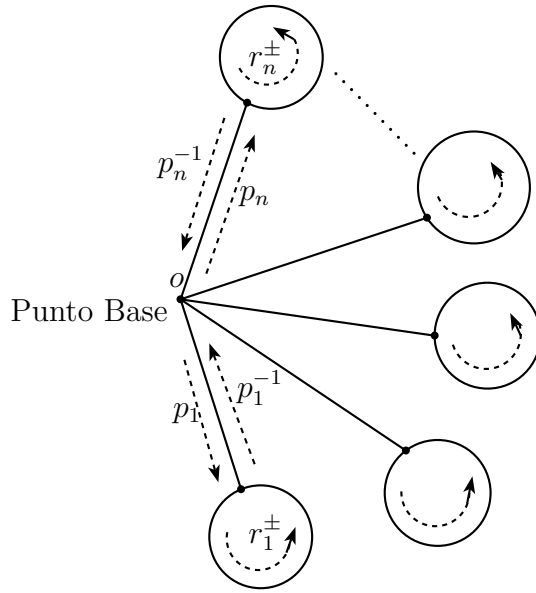
Caso 2: Si $p_1 \neq 1$. Tomamos el lazo e que dibujamos en el caso anterior pero con vértice inicial y final $v \neq o$ (punto base) y agregamos un arco exterior al lazo con vértices (o, v) . Subdividimos el arco en $l(p_1)$ segmentos. Orientamos y etiquetamos cada arista apropiadamente. Así $w = p_1 r_1^\pm p_1^{-1}$, veamos:



En cualquiera de los dos casos, D está construido.

- Si $M > 1$. Consideremos dos casos:

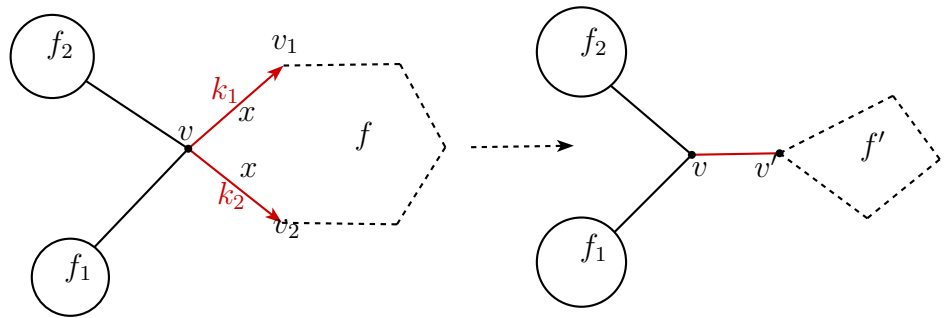
Caso 1: Si en el producto $(p_1 r_1^\pm p_1^{-1})(p_2 r_2^\pm p_2^{-1}) \dots (p_n r_n^\pm p_n^{-1})$, los r_i son cíclicamente reducidos entonces dibujamos M copias del lazo más el arco como en el caso anterior, todos basados en el mismo punto base o en el plano. Subdividimos los arcos y los lazos, los orientamos y etiquetamos apropiadamente. Cuando suponemos que las relaciones en R son palabras cíclicamente reducidas podemos también garantizar que las etiquetas en todas las fronteras de las regiones son palabras libremente reducidas. Veamos:



Caso 2: Supongamos que en el producto existe algún r_i con $1 \leq i \leq M$ que no es cíclicamente reducido. Se producen los siguientes casos:

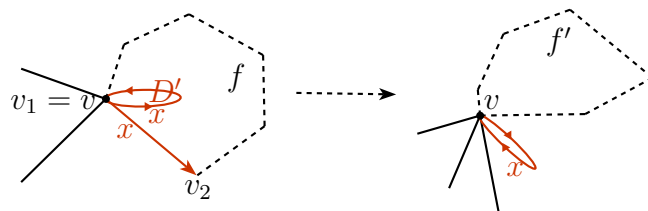
- a) Existen dos arcos $k_1 = (v, v_1)$ y $k_2 = (v, v_2)$ que salen del mismo vértice $v \in D$, ambos arcos son etiquetados por la misma letra $x \in S$, con la misma orientación con respecto a v y tal que k_1 y k_2 son adyacentes en la frontera de alguna cara f de D . Se presentan diferentes casos.

Caso 1: Si $v_1 \neq v \neq v_2$



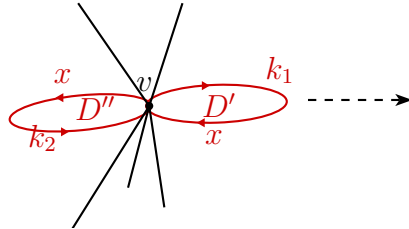
Identificamos los dos arcos k_1 y k_2 y ubicamos los vértices v_1 y v_2 . La identificación se puede realizar mediante una operación semejante a la contracción elemental de teoría de grafos, que esencialmente convierte un triángulo en un arco. La nueva cara f' tiene dos aristas menos y la etiqueta de su frontera es reducida al cancelar $x^{-1}x$. Todas las otras caras etiquetadas no se alteran.

Caso 2: Si $v_1 = v \neq v_2$



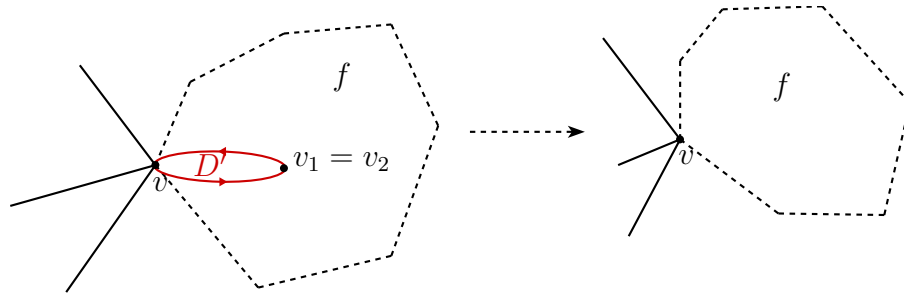
De nuevo, la identificación puede ser realizada usando una operación semejante a la contracción en grafos, que convierte un triángulo en un arco y sólo una etiqueta en la frontera es afectada, el resto de caras no se alteran.

Caso 3: Si $v_1 = v = v_2$



Debemos realizar una reducción de xx^{-1} para obtener un diagrama cíclicamente reducido.

Caso 4: Si $v_1 = v_2 \neq v$

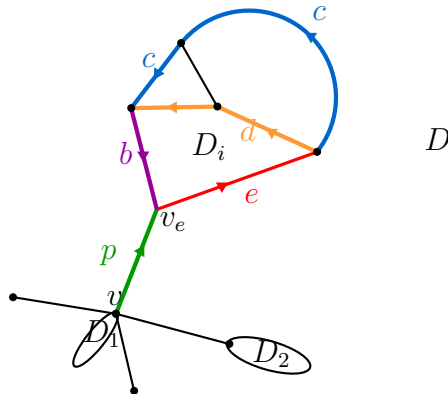


Aquí todo el subdiagrama cerrado D' es removido.

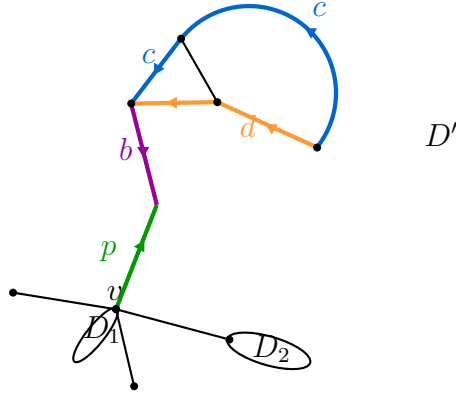
En cualquier caso, existe un diagrama D para w en P .

(\Leftarrow) Sea D un diagrama de Van Kampen conexo y simplemente conexo (por definición) con regiones D_1, \dots, D_m acotadas. Sea α un ciclo frontera de D comenzando en el vértice $v \in \partial D$. Razonemos por inducción sobre m .

Si $m = 0$. Se cumple trivialmente, pues D sería un árbol y así $w =_G 1$, con w la etiqueta de α . Ahora supongamos que la afirmación es cierta para D con k regiones y veamos que se tiene para D con $k + 1$ regiones. Sea $D_i, 1 \leq i \leq k$ la región en D tal que $\partial D_i \cap \partial D$ contiene una arista e y v_e el vértice inicial de e . Sea $r = edb$ la etiqueta en la frontera de D_i cuando se lee a partir de v_e y $\sigma \subset \partial D$ un arco simple en la frontera ∂D de v a v_e con etiqueta p .



Si removemos el interior de la arista e de D obtenemos un diagrama D' de D conexo y simplemente conexo de la siguiente forma:



Ahora el ciclo frontera μ de D' que comienza en v es $pb^{-1}d^{-1}cbp^{-1}$. Por la hipótesis de inducción, las regiones de D' (es decir, las regiones de $D - D_i$) pueden ser numeradas D_1, \dots, D_k ; esto es, $w' = (p_1r_1p_1^{-1}) \dots (pb^{-1}d^{-1}cbp^{-1}) \dots (p_kr_kp_k^{-1})$ donde r_j es la etiqueta de D_j . Ahora:

$$\begin{aligned} w &= (p_1r_1p_1^{-1}) \dots (p_kr_kp_k^{-1}) \\ &= (p_1r_1p_1^{-1}) \dots \underbrace{(pb^{-1}d^{-1}cbp^{-1})}_{\mu} \underbrace{(p_{k+1}^{-1}c^{-1})}_{p_{k+1}} \underbrace{(dbe)}_{r_{k+1}} \underbrace{(cbp^{-1})}_{p_{k+1}^{-1}} \dots (p_kr_kp_k^{-1}) \end{aligned}$$

donde $dbe = r$ es una etiqueta de D .

Tomando D_i como D_{k+1} , dbe como r_{k+1} y $b^{-1}c^{-1}p^{-1}$ como p_{k+1} , vemos que el diagrama puede ser deconstruido para dar un bouquet de lazos que describen a w como un producto

$$w = \prod_{i=1}^m p_i r_i^{\epsilon_i} p_i^{-1}$$

por tanto, $w \in \langle R \rangle^G$, es decir, $w =_G 1$. □

1.6. PROBLEMAS FUNDAMENTALES DE DEHN

En 1912, Max Dehn planteó tres problemas algorítmicos para grupos finitamente presentados. La formulación de los tres problemas es la siguiente:

- *Problema de la palabra:* Sea G un grupo dado por una presentación finita. ¿Existe un algoritmo para determinar si una palabra arbitraria w en el conjunto generador de G es o no la identidad en G ?
- *Problema de la conjugación:* Sea G un grupo dado por una presentación finita. ¿Existe un algoritmo para determinar si un par de palabras arbitrarias w y v en el conjunto generador de G están o no definidas como elementos conjugados de G ?

- *Problema del isomorfismo:* ¿Existe un algoritmo para determinar si un par de presentaciones finitas arbitrarias presentan grupos isomorfos?.

Existe una solución al problema de la palabra para grupos con presentaciones finitas que tienen un **algoritmo de Dehn**.

Definición. Decimos que una presentación de un grupo G tiene un **algoritmo de Dehn** cuando cualquier palabra $w \in \langle R \rangle^G$ siempre contiene más de la mitad de una relación (considerada cíclicamente): es decir, w es una palabra en los generadores de la forma $ur'v$ y existe algún $r \in R \cup R^{-1}$ tal que $r = r'r''$ y $l(r'') < l(r')$. Si este es el caso, entonces el elemento del grupo representado por la subpalabra r' es igual en el grupo al elemento representado por $(r'')^{-1}$ y reemplazando r' por esta palabra más corta se reduce la longitud de w .

Se sigue entonces que w es trivial si y sólo si este procedimiento de buscar una subpalabra de longitud un número finito de los conjugados cíclicos de las relaciones y reemplazando ésta por una palabra más corta que es un elemento igual a w en el grupo, eventualmente conduce a la palabra vacía.

Existe un proceso de enumeración obvio para $\langle R \rangle^G$, que se realiza usando el método de las diagonales de las listas de los diferentes números de conjugados de elementos de R^\pm , ordenados por la lista de conjugaciones de elementos $p_i \in F_S$.

Dado el proceso de enumeración descrito, si sabemos que la palabra w representa el elemento trivial en el grupo G dado por la presentación $\langle S/R \rangle$, la expresión para w como un producto de conjugados de relaciones

$$w = \prod_{i=1}^M p_i r_i^{\epsilon_i} p_i^{-1}$$

donde $p_i \in F_S, r_i \in R, \epsilon_i = \pm 1, M \in \mathbb{N}$, puede ser encontrado.

Definiciones. 1. El más pequeño de tales números M es llamado el **área** de w . También definimos el $Area(w)$ como el costo de convertir la palabra w en la palabra vacía e usando relaciones.

2. La función

$$\begin{aligned} \delta_p : \quad \mathbb{N} &\longrightarrow \mathbb{N} \\ n &\longmapsto \delta_p(n) = \max_{\{w \in \langle R \rangle^G, l(w) \leq n\}} Area_P(w) \end{aligned}$$

es llamada la **función de Dehn** de la presentación P .

3. Una **desigualdad isoperimétrica** para una presentación es una función $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que para todo $n \in \mathbb{N}, \delta_p(n) \leq f(n)$.

Las desigualdades isoperimétricas pueden ser lineales, cuadráticas, cúbicas, ..., ó exponenciales, de acuerdo a si f describe una función polinómica o exponencial, respectivamente.

Teorema 6. Una presentación finita satisface una desigualdad isoperimétrica recursiva si y sólo si el problema de la palabra es soluble.

Demostración. (\Leftarrow) Si el problema de la palabra es soluble entonces para cada $n \in \mathbb{N}$ y cada palabra $w \in G$ de longitud n es posible decidir si w se encuentra o no en $\langle R \rangle^G$. Si se hace esto, entonces el procedimiento de enumeración descrito anteriormente, da alguna expresión para w como producto de relaciones de conjugados. De esta manera, examinando todas las palabras de longitud a lo más n , ésta le da un límite superior a la función de Dehn $\delta_p(n)$ como se quería.

(\Rightarrow) Si una función recursiva f que limita la función de Dehn es conocida y $w \in F_S$ de longitud n es dado, entonces calculamos $f(n)$. Esto se reduce a calcular todos los productos en $f(n)$, en la mayoría conjugados, de las relaciones y sus inversos. De lo anterior, las longitudes de los elementos conjugados, que necesitan ser probados, no están limitados y así todos los elementos de F_S podrían ser probados. Por el Teorema 5, se tiene que es suficiente chequear elementos conjugados de longitud a lo más $f(n)l(r)_{\max r \in R} + l(w)$, esto es, existe un número finito de combinaciones que podrían ser chequeadas, y el mismo teorema demuestra que tal número finito de combinaciones nos llevan a concluir si w es o no la identidad en el grupo. \square

1.7. GRUPOS HIPERBÓLICOS

La clase especial de grupos hiperbólicos es la clase de todos los grupos finitamente presentados que satisfacen una desigualdad isoperimétrica especial. Obtener la equivalencia entre los grupos hiperbólicos y los grupos que tienen una desigualdad isoperimétrica lineal representó un primer avance en el intento de clasificar los grupos, sin embargo, al tratar de extender esta clasificación al caso cuadrático no se pudo establecer una equivalencia. Una definición alternativa se hará vía la definición de “triángulos delgados”.

La presente sección está dedicada a la exposición de una parte de la teoría de grupos hiperbólicos de M. Gromov. Creemos que esta teoría es (y será) fundamental en la teoría de grupos combinatoria, ya que finalmente ofrece una visión global de muchos grupos de presentación finita.

Definiciones. 1. Sean x_0 y x_1 dos puntos de un espacio métrico X y $a = |x_0 - x_1|$ su distancia. Un **segmento geodésico** en X con origen en x_0 y punto final x_1 es una isometría $g : [0, a] \rightarrow X$ tal que $g(0) = x_0$ y $g(a) = x_1$. Diremos que g es un conjunto de segmentos geodésicos y que la imagen de g es un segmento geodésico geométrico.

2. Decimos que X es un **espacio geodésico** si para cualquier par de puntos $x_0, x_1 \in X$ existe un segmento geodésico $[0, |x_0 - x_1|] \rightarrow X$ de extremos x_0 y x_1 .

3. Un **triángulo geodésico** de vértices x, y, z en X es la unión de los vértices de tres segmentos geodésicos dos a dos. Se admiten casos degenerados, como un triángulo donde los puntos y y z coinciden, pero los segmentos de x a y y de x a z son distintos.

Ejemplo 5. Sea G un grupo generado por un conjunto finito S . El grafo de Cayley $\Gamma(G, S)$ es un ejemplo de espacio geodésico.

Definiciones. 1. Sea $\delta \geq 0$. Un espacio métrico geodésico X satisface la **condición de Rips** de constante δ si para todos los triángulos geodésicos Δ de X , la distancia de cualquier punto en un lado de Δ a los otros dos lados está limitada por δ , así, para todo triángulo $\Delta = [x, y] \cup [y, z] \cup [z, x]$, para todo $u \in [y, z]$,

$$d(u, [x, y] \cup [z, x]) \leq \delta.$$

2. Dado un punto base $x \in X$, el **producto de Gromov** de dos puntos $y, z \in X$ está dado por

$$(y/z)_x = \frac{1}{2} \text{mín} \{|y - x| + |z - x| - |z - y|\}.$$

La desigualdad triangular muestra que, $0 \leq (y/z)_x \leq \min\{|y - x|, |z - x|\}$.

3. Un espacio geodésico X se dice **δ -hiperbólico** si existe un número $\delta \geq 0$ tal que X satisface la condición de Rips de constante δ .

De igual forma, dado $\delta \in \mathbb{R}^+$. Decimos que X es **δ -hiperbólico** si $\forall w, x, y, z \in X$,

$$(x/z)_w \geq \text{mín} \{(x/y)_w, (y/z)_w\} - \delta.$$

Ambas definiciones son equivalentes como veremos en la Proposición 2.

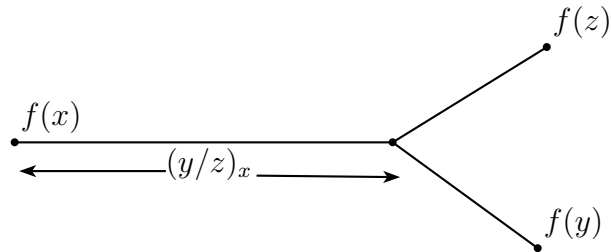
Definición. Un grupo finitamente presentado G es **hiperbólico** si el grafo de Cayley definido por G y un sistema finito de generadores de G es hiperbólico.

Los triángulos $\Delta(x, y, z)$ pueden ser aproximados a trípodes, árboles métricos con a lo más tres aristas y a lo más un vértice de grado mayor que 1. Dados tres números no negativos a, b, c , existe un único árbol con estos números como longitud de sus aristas.

Supongamos que $|x - y|, |y - z|$ y $|z - x|$ son las longitudes de los tres lados de un triángulo en un espacio métrico X (en efecto, cualquier 3 números satisfacen la desigualdad triangular), entonces existen números no negativos a, b, c tales que $|x - y| = a + b$, $|y - z| = b + c$ y $|z - x| = c + a$.

Dados $\Delta = \Delta(x, y, z)$ un triángulo geodésico y $T_\Delta = T(a, b, c)$. Existe una isometría natural f_Δ de los lados del triángulo al trípode, tal y como se enuncia en la siguiente proposición.

Proposición 1. Sean x, y, z tres puntos de un espacio métrico. Entonces existe un trípode T y una isometría $f : \{x, y, z\} \rightarrow T$ con imagen los tres extremos del trípode. Es más $(y/z)_x$ es la longitud de la arista de T cuyo punto extremo es la imagen de x .



Demostración.

Véase [8]. □

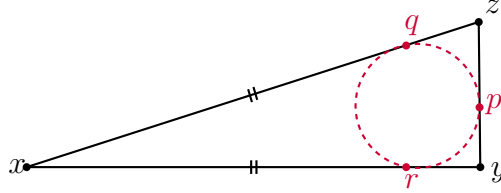
Definición. Sea $\Delta = [x, y] \cup [y, z] \cup [z, x]$ un triángulo geodésico en un espacio métrico X . Sean T_Δ el trípode y $f_\Delta : \{x, y, z\} \rightarrow T_\Delta$ la isometría descrita en la Proposición 2. Dado un número real $\delta \geq 0$, decimos que el triángulo Δ es **δ -delgado** si $f_\Delta(u) = f_\Delta(v)$ entonces $|u - v| \leq \delta$ para todo $u, v \in \Delta$. O de manera equivalente:

$$|u - v| \leq |f_\Delta(u) - f_\Delta(v)| + \delta, \forall u, v \in \Delta$$

Observación 1. El espacio X también es llamado δ -hiperbólico si todo triángulo geodésico es δ -delgado.

Lema 4. Sea $\Delta = [x, y] \cup [y, z] \cup [z, x]$ un triángulo geodésico de un espacio métrico X , notemos a d como la distancia en X .

1. $(y/z)_x \leq d(x, [y, z])$
2. Si Δ es δ -delgado, entonces $d(x, [y, z]) \leq (y/z)_x + \delta$



Demostración.

1. Sean $p \in [y, z]$, $q \in [z, x]$ y $r \in [x, y]$ los tres puntos de Δ enviados por f_Δ al centro del trípode T_Δ tal que

$$|q - x| = |r - x| = (y/z)_x = \frac{1}{2} \{|y - x| + |z - x| - |z - y|\}.$$

Sea $w \in [y, z]$ con $|w - x| = d(x, [y, z])$. Existe un punto $w' \in [x, y] \cup [z, x]$ que es imagen de w bajo f_Δ . Supongamos que $w' \in [z, x]$. Entonces

$$(y/z)_x \leq |w' - x| = |z - x| - |z - w| \leq |x - w| = d(x, [y, z]).$$

2. Además, se tiene que, $d(x, [y, z]) \leq d(x, p) \leq d(x, q) + d(q, p) \leq (y/z)_x + \delta$.

□

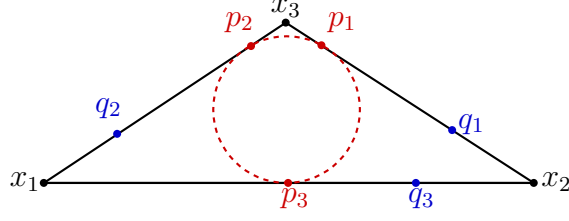
Definiciones. Sean Δ un triángulo geodésico en un espacio métrico X , T_Δ un trípode y $f_\Delta : \{x, y, z\} \rightarrow T_\Delta$ la isometría con imagen los tres extremos del trípode. Llamamos **tripleta inscrita** del triángulo a la imagen inversa bajo f_Δ del centro del trípode y **tamaño** del triángulo al diámetro de la tripleta inscrita.

Llamamos **tamaño mínimo ó malla** del triángulo al mínimo de los diámetros del conjunto $\{u, v, w\}$ con $u \in [y, z]$, $v \in [z, x]$ y $w \in [x, y]$.

Lema 5. Sea $\Delta = [x_1, x_2] \cup [x_2, x_3] \cup [x_3, x_1]$ un triángulo geodésico de malla δ y tamaño δ' . Entonces $\delta \leq \delta' \leq 4\delta$.

Demostración. La desigualdad $\delta \leq \delta'$ resulta de la definición.

Verifiquemos $\delta' \leq 4\delta$. Sean $p_1 \in [x_2, x_3]$, $p_2 \in [x_3, x_1]$ y $p_3 \in [x_1, x_2]$ los puntos en la tripleta inscrita de Δ y sean $q_1 \in [x_2, x_3]$, $q_2 \in [x_3, x_1]$ y $q_3 \in [x_1, x_2]$ tres puntos tales que $\delta = \text{diam} \{q_1, q_2, q_3\}$.



Sea (i, j, k) una permutación de $(1, 2, 3)$. Sean $a_i = |x_j - x_k|$, $b_{i,k} = |p_i - x_k|$ y $c_{i,k} = |q_i - x_k|$. Entonces

$$b_{i,k} = b_{j,k} = \frac{1}{2}(|x_3 - p_1| + |p_1 - x_2| + |x_1 - p_2| + |p_2 - x_3| - |x_1 - p_3| - |p_3 - x_2|) = \frac{1}{2}(2(p_1 - x_3)) = \frac{1}{2}(a_i + a_j - a_k),$$

$$b_{i,j} + b_{i,k} = |p_i - x_j| + |p_i - x_k| = |q_i - x_j| + |q_i - x_k| = c_{i,j} + c_{i,k} = |x_j - x_k| = a_i.$$

Por definición, tenemos que $|q_i - q_j| \leq \delta$, por tanto,

$$|c_{i,k} - c_{j,k}| = |q_i - x_k| - |q_j - x_k| \leq |q_i - q_j| \leq \delta.$$

Así sucesivamente,

$$\begin{aligned} 2b_{i,k} &= a_i + a_j - a_k = c_{i,j} + c_{i,k} + b_{j,i} + b_{j,k} - c_{k,i} - c_{k,j}, \\ c_{i,j} + c_{i,k} + b_{k,i} - b_{i,k} - c_{k,i} - c_{k,j} &= 0, \\ |c_{i,k} - b_{i,k} - c_{k,i} + b_{k,i}| &= |c_{i,j} - c_{k,j}| \leq \delta. \end{aligned} \tag{1.1}$$

Supongamos ahora que (i, j, k) es una permutación circular de $(1, 2, 3)$ y sea $d_i = c_{i,j} - b_{i,j} = -(c_{i,k} - b_{i,k})$

Por una parte $|d_i| = |p_i - q_i|$. De otra parte, de la desigualdad (1.1) obtenemos,

$$|-d_i - d_k| \leq \delta, \quad |-d_j - d_i| \leq \delta, \quad |-d_k - d_j| \leq \delta$$

De donde se sigue que, $|d_i| = \frac{1}{2}|d_i + d_j + d_i + d_k - d_j - d_k| \leq \frac{3}{2}\delta$.

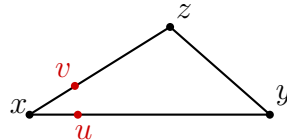
Así, finalmente $|p_j - p_k| \leq |p_j - q_j| + |q_j - q_k| + |q_k - p_k| \leq 4\delta$ y por tanto, $\delta' \leq 4\delta$. \square

Proposición 2. Sea X un espacio métrico geodésico y $\delta \in \mathbb{R}^+$. Las siguientes proposiciones son equivalentes.

1. El espacio X es δ -hiperbólico, usando la definición del producto de Gromov.
2. Todos los triángulos geodésicos de X son δ -delgados.
3. El espacio X satisface la condición de Rips de constante δ .
4. Todo triángulo geodésico de X tiene un tamaño limitado por δ .
5. Todo triángulo geodésico de X tiene una malla limitada por δ .

Demostración. **(1) \Rightarrow (2)** Sea $\Delta = [x, y] \cup [y, z] \cup [z, x]$ un triángulo geodésico de X y sea $f : \Delta \rightarrow T$ la isometría de la Proposición 1. Sean $u, v \in \Delta$, con $u \neq v$ y $f(u) = f(v)$. Veamos que $|u - v| \leq 4\delta$.

Supongamos que $u \in [x, y]$ y $v \in [z, x]$.



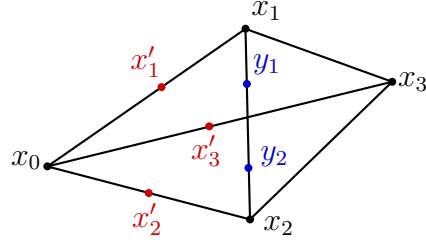
Si $t = |x - u|$ entonces

$$\begin{aligned} |f(x) - f(u)| &= |f(x) - f(v)| = t \leq (y/z)_x, \\ (u/y)_x &= (v/z)_x = t. \end{aligned}$$

de modo que $(u/v)_x \geq \min \{(u/y)_x, (y/z)_x, (z/v)_x\} - 2\delta = t - 2\delta$.

Por tanto, $(u/v)_x = t - \frac{1}{2}|u - v|$ y así $|u - v| \leq 2t - 2(t - 2\delta) = 4\delta$.

(2) \Rightarrow **(1)** Consideremos cuatro puntos $x_0, x_1, x_2, x_3 \in X$, unidos dos a dos por seis segmentos. Por el producto de Gromov aplicado a x_0 tenemos que $t = \min \{(x_1/x_3), (x_2/x_3)\}$. Veamos que $(x_1/x_2) \geq t - 2\delta$.



Supongamos además que $t > (x_1/x_2)$, de lo contrario no habría nada que probar.

Para $j \in \{1, 2, 3\}$, tomamos x'_j un punto de $[x_0, x_j]$ a una distancia t de x_0 . Para $j \in \{1, 2\}$, sea f_{0j3} la función isométrica de la Proposición 1. para el triángulo $[x_0, x_j] \cup [x_j, x_3] \cup [x_3, x_0]$. Como $|x'_j - x_0| = |x'_3 - x_0| \leq (x_j/x_3)$, tenemos que $f_{0j3}(x'_j) = f_{0j3}(x'_3)$ y $|x'_j - x'_3| \leq \delta$. Por tanto, $|x'_1 - x'_2| \leq 2\delta$.

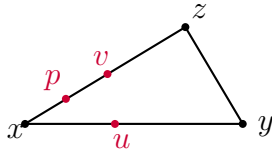
Ahora, como $t > (x_1/x_2)$, existe un punto $y_j \in [x_1, x_2]$ con $f_{012}(x'_j) = f_{012}(y_j)$, de modo que $|x'_j - y_j| \leq \delta$. Entonces,

$$\begin{aligned} 2\delta &\geq |x'_1 - x'_2| \geq |y_1 - y_2| - 2\delta \\ &= |x_1 - x_2| - |x_1 - y_1| - |x_2 - y_2| - 2\delta \\ &= |x_1 - x_2| - (|x_1 - x_0| - |x'_1 - x_0|) - (|x_2 - x_0| - |x'_2 - x_0|) - 2\delta \\ &= 2t - 2(x_1/x_2) - 2\delta. \end{aligned}$$

y en consecuencia, $(x_1/x_2) \geq t - 2\delta$.

(2) \Rightarrow **(3)** Se sigue de las definiciones.

(3) \Rightarrow **(2)** Supongamos que la implicación no es cierta. Por tanto, existe un triángulo geodésico $\Delta = [x, y] \cup [y, z] \cup [z, x]$ en X y los puntos $u \in [x, y]$ y $v \in [z, x]$ tal que $|u - x| = |v - x| = t < (y/z)_x$ y $|u - v| > 4\delta$.



Además, $d(v, [x, y]) = \min \{d(v, [x, u]), d(v, [u, y])\} \geq \min \{(x/u)_v, (u/y)_v\}$ y por el Lema 4 se tiene que $2(x/u)_v = |u - v|$

y $2(u/y)_v = |u - v| + |y - v| - (|x - y| - |x - u|) = |u - v| + (|y - v| + |v - x| - |x - y|) \geq |u - v|$.

Por tanto, $d(v, [x, y]) \geq \frac{1}{2}|u - v| > 2\delta$.

En particular, $|v - x| > 2\delta$ y existe $p \in [x, v]$, tal que $|p - v| = \delta$. Entonces $d(p, [x, y]) \geq$

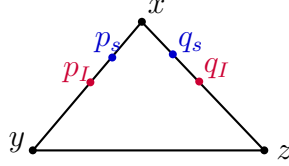
$d(v, [x, y]) - |v - p| > \delta$
y $d(p, [y, z]) \geq d(x, [y, z]) - |x - p| \geq (y/z)_x - |x - p| > t - |x - p| = |v - x| - |x - p| = |p - v| = \delta$.
De donde, $d(p, [x, y] \cup [y, z]) > \delta$, contradiciendo la hipótesis.

(2) \Rightarrow (4) Se sigue de las definiciones.

(4) \Rightarrow (2) Sin pérdida de generalidad supongamos que $\delta > 0$.

Sea $\Delta = [x, y] \cup [y, z] \cup [z, x]$ un triángulo geodésico en X . Tomemos $p_I \in [x, y]$ y $q_I \in [z, x]$ puntos enviados por f_Δ al centro del trípode, y sea $t_I = |p_I - x| = |q_I - x| = (y/x)_x$.

Para cualquier número $s \in [0, t_I]$, notemos p_s el punto de $[x, y]$ a una distancia s de x y q_s el punto de $[z, x]$ a una distancia s de x . Veamos que $|q_s - p_s| \leq 2\delta$.



Primer paso. Definamos por inducción una secuencia $(p_i)_{i \geq 1}$ de puntos de $[x, p_I]$ y una secuencia $(q_i)_{i \geq 1}$ de $[x, q_I]$.

Si $p_1 = p_I$ y $q_1 = q_I$, es claro.

Supongamos que se cumple para p_i y q_i . Teniendo en cuenta la aplicación canónica f_i de un triángulo $[x, p_i] \cup [p_i, q_i] \cup [q_i, x]$ en el trípode correspondiente T_i , se sigue que $p_{i+1} \in [x, p_i]$ y $q_{i+1} \in [q_i, x]$ son los puntos aplicados por f_i al centro de T_i . Para $i \geq 1$, se tiene $|p_i - q_i| \leq \delta$ por hipótesis, por tanto también

$$|p_i - p_{i+1}| + |q_i - q_{i+1}| = |p_i - q_i| \leq \delta. \quad (1.2)$$

Como $|x - p_{i+1}| = |x - q_{i+1}| \leq |x - p_i| = |x - q_i|$, p_i tiene un límite $p_\infty \in [x, p_I]$ y q_i un límite $q_\infty \in [x, q_I]$. Si tomamos $t'_I = |x - p_\infty|$, observamos que $p_\infty = q_\infty$. Si $s \in [t'_I, t_I]$, existe $i \geq 1$ tal que $|p_i - p_s| = |q_i - q_s| \leq \frac{1}{2}\delta$, por (1.2), de modo que $|p_s - q_s| \leq 2\delta$. Si $t'_I \leq \delta$, no hay nada que probar.

Segundo paso. Si $t'_I > \delta$, tomamos $t_{II} = t'_I - \frac{1}{2}\delta$ y $p_{II} \in [x, p_I]$, $q_{II} \in [x, q_I]$ puntos a una distancia t_{II} de x . El argumento anterior produce dos secuencias $(p_i^{(2)})_{i \geq 1}$ y $(q_i^{(2)})_{i \geq 1}$ que convergen respectivamente a un punto $p_\infty^{(2)} = q_\infty^{(2)}$ a una distancia t'_{II} de x , y mostramos así que $|p_s - q_s| \leq 2\delta$ para un punto $s \in [t'_{II}, t'_{II}]$.

Y así, en un número finito (limitado por $\frac{2}{\delta}t_I + 1$) de pasos, se muestra que $|p_s - q_s| \leq 2\delta$ para un punto $s \in [0, t_I]$.

(4) \Rightarrow (5) Se sigue de las definiciones.

(5) \Rightarrow (4) Se sigue del Lema 5. □

Proposición 3. *Sea F un espacio métrico finito 0-hiperbólico. Entonces, existe una inmersión isométrica de F en un árbol métrico.*

Demostración. Sea w un punto base en F . Para todo $x \in F$, escribimos $|x|$ en lugar de $|x - w|$. Notemos a \tilde{T} como la unión disjunta en $x \in F - \{w\}$ de segmentos $[0, |x|]$ de \mathbb{R} . Dado que $t \in [0, |x|]$ y $t' \in [0, |x'|]$, tenemos que $t \sim t'$ si $t = t' \leq (x/x')_w$.

Esto define una relación de equivalencia. En efecto, si $t \sim t' \sim t''$, entonces $t = t'' \leq \min\{(x/x')_w, (x'/x'')_w\} \leq (x/x'')_w$ pues F es 0-hiperbólico.

Sea T el cociente de \tilde{T} por la relación. La función $\tilde{T} \times \tilde{T} \rightarrow \mathbb{R}_+$ definida por $(t, t') \mapsto t + t' - 2\min\{t, t', (x/x')\}$, donde $t \in [0, |x|]$ y $t' \in [0, |x'|]$, induce a una distancia en T y de hecho, a un árbol métrico. La inmersión deseada asocia a $x \in F$ con la clase en T de $|x| \in [0, |x|] \subset \tilde{T}$. \square

Definición. Sea X un espacio métrico y sea I un intervalo de \mathbb{Z} ó \mathbb{R} . Una **isometría** $g : I \rightarrow X$ es un **segmento geodésico** de X si I es acotado.

Sean $\lambda \geq 1$, $c \geq 0$. Una (λ, c) **cuasi-isometría** $f : I \rightarrow X$ es un (λ, c) **cuasi-segmento** si I es acotado.

Definición. La **distancia Hausdorff** de Y y Z , denotada $\mathcal{H}(Y, Z)$, se define como

$$\inf \{H > 0 : Y \subset v_H(Z) \wedge Z \subset v_H(Y)\}$$

y $v_H(Y)$ es la **H -vecindad** de Y en X definida como $\{x \in X : d(x, Y) \leq H\}$, $H \in \mathbb{R}^+$.

Sea X un espacio geodésico, $I = [a, b]$, $J \subseteq \mathbb{R}$ y sean $f : I \rightarrow X$ y $g : J \rightarrow X$. Denotamos $\mathcal{H}(f, g)$ a la distancia Hausdorff de las imágenes $f(I)$ y $g(J)$.

Lema 6. Sean $\lambda \geq 1$, $c \geq 0$ y $H' \geq 0$ números reales, existe una constante $H = H(\lambda, c, H')$ con la siguiente propiedad.

Sea X un espacio métrico, $I = [p, q]$ y $J = [r, s]$ dos intervalos en \mathbb{Z} ó \mathbb{R} y $f : I \rightarrow X$ y $g : J \rightarrow Y$ dos funciones. Además supongamos que, f es un (λ, c) cuasi-segmento y g es un segmento geodésico, $|f(p) - g(r)| \leq H'$ y $|f(q) - g(s)| \leq H'$, $Im(f) \subset v_{H'}(Im(g))$. Entonces $\mathcal{H}(f, f') \leq H$.

Demostración. Sea $H = 2H' + \lambda + c$ y consideremos una partición $p = t_0 < t_1 < \dots < t_n = q$ de I tal que $|t_i - t_{i-1}| \leq 1$ para cualquier $i \in \{1, \dots, n\}$. Por hipótesis, existe $u_i \in J$ tal que $|f(t_i) - g(u_i)| \leq H'$, con $i \in \{0, \dots, n\}$, podemos suponer que $u_0 = r$ y $u_n = s$. Como $|f(t_{i-1}) - f(t_i)| \leq \lambda + c$ y $|g(u_{i-1}) - g(u_i)| \leq 2H' + \lambda + c$. Para todo $u \in J$, existe $i \in \{0, \dots, n\}$ tal que $|u - u_i| = |g(u) - g(u_i)| \leq H' + \frac{1}{2}(\lambda + c)$.
Por tanto, $d(g(u), Im(f)) \leq 2H' + \frac{1}{2}(\lambda + c)$. \square

Teorema 7. Sean $\lambda \geq 1$, $c \geq 0$ y $H' \geq 0$ números reales, existe una constante $H = H(\lambda, c, H')$ con la siguiente propiedad.

Sea X un espacio geodésico δ -hiperbólico, $I = [a, b]$ un intervalo en \mathbb{Z} ó \mathbb{R} y $f : I \rightarrow X$ un (λ, c) cuasi-segmento. Sea $J \subseteq \mathbb{R}$ un intervalo de longitud $|f(a) - f(b)|$ y sea $g : J \rightarrow X$ un segmento geodésico de origen $f(a)$ y punto final $f(b)$. Entonces $\mathcal{H}(f, g) \leq H$.

Demostración. Se sigue de la Proposición 3. y el Lema 6. \square

Teorema 8. Sean X y Y espacios métricos geodésicos cuasi-isométricos. Si Y es hiperbólico entonces X también lo es.

Demostración. Sea $\delta \geq 0$, $\lambda \geq 1$ y $c \geq 0$ constantes tal que Y es δ -hiperbólico y tal que $F : X \rightarrow Y$ es una (λ, c) cuasi-isometría. Sean H la constante $H(\delta, \lambda, c)$ del Teorema 7., I un intervalo acotado de \mathbb{R} (o de \mathbb{Z}) y $g : I \rightarrow X$ un segmento geodésico. Entonces $Fg : I \rightarrow Y$ es un (λ, c) cuasi-segmento. Por tanto, $(Fg)_0$ designa un segmento geodésico con los mismos extremos que Fg , entonces $\mathcal{H}(Fg, (Fg)_0) \leq H$.

Consideremos un triángulo geodésico Δ en X y denotemos $g_j : I_j \rightarrow X$ sus tres lados ($j = 1, 2, 3$). Obtenemos un triángulo geodésico $(F_\Delta)_0$ en Y de lados $(F(g_j))_0 : I_j \rightarrow Y$. Para cualquier punto y en la imagen de $(F(g_3))_0$ tenemos por hipótesis Y y δ y por la Proposición 2,

$$d(y, \text{Im}((F(g_1))_0) \cup \text{Im}((F(g_2))_0)) \leq 4\delta.$$

Para cualquier punto y' en la imagen de Fg_3 se tiene que

$$d(y', \text{Im}(F(g_1)) \cup \text{Im}(F(g_2))) \leq 4\delta + 2H.$$

Y resulta que para todo punto x en la imagen de g_3 se sigue que

$$d(x, \text{Im}(g_1) \cup \text{Im}(g_2)) \leq \frac{1}{\lambda} d_x(x, \text{Im}(g_1) \cup \text{Im}(g_2)) - c \leq d_y(\overbrace{F(x)}^{y'}, \text{Im}(F(g_1)) \cup \text{Im}(F(g_2))) \leq 4\delta + 2H = \lambda(4\delta + 2H + c),$$

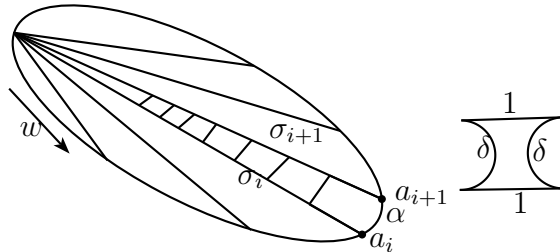
De nuevo aplicando la Proposición 2 vemos que X es un δ -hiperbólico con $\delta' = 8\lambda(4\delta + 2H + c)$. □

Veamos ahora que un grupo hiperbólico satisface una desigualdad isoperimétrica lineal. Pero primero probaremos que satisface una desigualdad isoperimétrica cuadrática.

Proposición 4. *Sea S un conjunto generador finito para el grupo G tal que el grafo de Cayley $\Gamma(G, S)$ es δ -hiperbólico. Entonces G es finitamente presentado y satisface una desigualdad isoperimétrica cuadrática.*

Demostración. Supongamos que en S no hay elementos triviales. Sea $w = a_1 \dots a_n \in F(S)$ una palabra que representa el elemento identidad de G . Entonces la palabra etiqueta un lazo cerrado basado en el vértice identidad de $\Gamma(G, S)$.

Sea γ_i la palabra más corta en $F(S)$ que representa el elemento $a_1 \dots a_i$ en G . Entonces el camino basado en 1 en $\Gamma(G, S)$ con etiqueta γ_i y γ_{i+1} junto con la arista etiquetada α forman un triángulo geodésico en $\Gamma(G, S)$. El hecho de que $\Gamma(G, S)$ sea δ -hiperbólico, significa que todo triángulo geodésico es δ -delgado, es decir, que dado $\delta \geq 0$, $|u - v| < \delta$, para todo u, v en el triángulo. Así el triángulo $\{1, a_i, a_{i+1}\}$ pueden ser descompuesto como una colección de rectángulos cada uno de perímetro a lo más $2\delta + 2$ (el último es tal vez un triángulo de perímetro a lo más $\delta + 2$). Por tanto, existen a lo más, $\max\{l(\gamma_i), l(\gamma_{i+1})\} \leq \frac{n}{2}$ de estos rectángulos.



Se sigue que el conjunto de relaciones $R = \{r \in F(S) / l(r) \leq 2\delta + 2, r =_G 1\}$ da una presentación finita para G y en términos de estas relaciones, $\text{area}(w) \leq \frac{n^2}{2}$. □

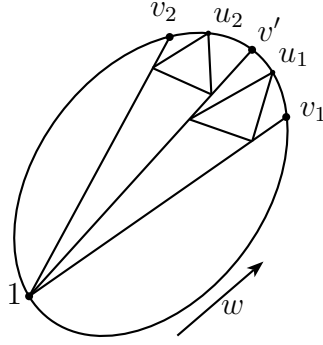
Proposición 5. *Sea S un conjunto generador finito para el grupo G . Si todo triángulo geodésico en $\Gamma(G, S)$ es δ -delgado entonces G es finitamente presentado, tiene una presentación de Dehn y satisface una desigualdad isoperimétrica lineal.*

Demostración. El método usado aquí (debido a Noel Brady) se basa en “geodésicas locales”. Para $k > 0$, una palabra $w \in F(S)$ en $\Gamma(G, S)$ es una k -geodésica local si toda subpalabra de w de longitud a lo más k es una geodésica. Mostraremos que $2\delta + 2$ geodésicas locales no etiquetan lazos.

Si una palabra w no es una $2\delta + 2$ geodésica local entonces existe una subpalabra v de w de longitud a lo más $2\delta + 2$ que no es geodésica, es decir, que existe una palabra más corta u tal que $v =_G u$.

Afirmación: Si $w =_G 1$ (w etiqueta un lazo en $\Gamma(G, S)$) entonces w no es una $2\delta + 2$ geodésica local.

Probemos la afirmación. Razonemos por contradicción. Sea w una palabra no vacía en $F(S)$ que representa el elemento trivial en G (etiqueta un lazo en $\Gamma(G, S)$) y supongamos que w es una $2\delta + 2$ geodésica local, es decir, $l(w) \geq 4\delta + 4$ (si tuvieramos $l(w) < 4\delta + 4$, obtendríamos otro camino más corto para llegar a v y así w no sería $2\delta + 2$ geodésica local).



Sea γ un lazo en $\Gamma(G, S)$ basado en el vértice 1 y etiquetado por la palabra $2\delta + 2$ geodésica local w . Sea v' un vértice en γ , el más lejano del punto base 1. Este punto está a una distancia al menos $2\delta + 1$ del 1 (pues si estuviera a una distancia menor ya no sería el más lejano), así $l(\lambda) \geq 2\delta + 1$. Sean v_1 y v_2 los vértices en γ antes y después de v' a una distancia $2\delta + 1$ de v' . (Trivial, si $l(\lambda) = 2\delta + 1$ se sigue que $v_1 = v_2 = 1$).

Ahora, consideremos un triángulo geodésico Δ_1 (respectivamente Δ_2) con vértices $1, v', v_1$ (respectivamente $1, v', v_2$) con un lado el segmento γ_1 (respectivamente γ_2) de γ entre v' y v_1 (respectivamente v_2) de longitud $2\delta + 1$. Sea u_1 (respectivamente, u_2) el punto en γ_1 (respectivamente γ_2) que mapea el punto central del trípode bajo la función trípode T_{Δ_1} (respectivamente T_{Δ_2}). Así,

$$|d_x(1, v_1) - d_x(1, v')| = |d_x(v_1, u_1) - d_x(u_1, v')|.$$

Si $d_x(u_1, v') < \delta + 1$ entonces $d_x(v_1, u_1) = d(v_1, v') - d(v', u_1) \geq 2\delta + 1 - (\delta + 1) = \delta \geq d_x(u_1, v')$ y así $d_x(v_1, 1) > d_x(v', 1)$ contradiciendo la escogencia de v' . Por tanto, $d(u_1, v') \geq \delta + 1$.

De la misma manera, vemos que $d_x(u_2, v') \geq \delta + 1$.

Tomemos ahora los puntos u'_1, u'_2 a una distancia $\delta + 1$ antes y después de v' en el segmento de γ que contiene a v' que se encuentra entre u_1 y u_2 . Pero como el triángulo es δ -delgado, se tiene que $d(u'_2, s) < \delta$ y $d(u'_1, s) < \delta$, entonces $d(u'_1, u'_2) \leq d(u'_1, s) + d(u'_2, s) \leq 2\delta$. Por tanto,

hemos encontrado otro camino más corto entre $d(u'_1, u'_2)$ que el que se forma en el segmento δ con $d(u'_1, u'_2) = 2\delta + 2$ y esto contradice el hecho que w es $2\delta + 2$ -geodésica local (pues encontramos una subpalabra de w con longitud $2\delta + 2$ que no es geodésica). Se sigue así, que $2\delta + 2$ geodésicas locales no etiquetan lazos.

De acuerdo a la afirmación, definimos el conjunto de relaciones finitas

$$R = \{r \in F(S) / l(r) \leq 4\delta + 3, r =_G 1\}.$$

Por tanto, $Area(w) \leq 1$ pues $w \in \langle R \rangle^G$, es decir, $w =_G 1$. Y como la presentación es finita y tiene problema de la palabra soluble entonces la presentación es de Dehn. \square

En esta prueba, si no suponemos que el camino γ es un lazo, lo que se demuestra es que el punto más lejano v' del punto inicial en γ está dentro de una distancia $2\delta + 1$ del final de γ (es decir, el punto u_2 no puede ser construido). Además, si se mide la distancia de cualquier punto $v \in \Gamma(G, S)$, en lugar de medirlo desde el punto inicial de γ , mostramos que el punto más lejano v' en γ del punto v se encuentra dentro de $2\delta + 1$ de uno de los puntos finales.

Capítulo 2

APLICACIONES

Este capítulo está dedicado a estudiar algunos grupos de orden infinito bajo el enfoque desarrollado en el primer capítulo. Los grupos escogidos son: el Grupo Diedral Infinito, el Grupo Heisenberg, el Grupo Baumslag-Solitar, el Grupo Lamplighter y el Grupo Coxeter. De cada uno de ellos presentamos propiedades y características combinatorias y geométricas diferentes, debido a la particularidad de sus estructuras.

2.1. GRUPO DIEDRAL INFINITO

En esta sección estudiaremos la presentación del grupo diedral infinito, la forma normal de sus elementos, el grafo de Cayley y algunas de sus propiedades algebraicas.

Para $n \geq 3$, el grupo diedral D_n es definido como el conjunto de simetrías del n -ágono regular, donde una simetría es cualquier movimiento rígido del plano que preserva el n -ágono, con la operación composición.

Un polígono regular con n lados tiene $2n$ simetrías diferentes. Estas simetrías son las n rotaciones sobre el centro del polígono y las n reflexiones a través de la línea de simetrías. Las rotaciones y reflexiones asociadas conforman el grupo diedral D_n .

En adelante, notaremos el grupo diedral como D_{2n} .

Sea r la rotación en sentido de las manecillas del reloj alrededor del origen a través de $2\pi/n$ radianes. Sea s la reflexión alrededor de la línea de simetría que pasa por un vértice v y el origen. Haciendo unos cuantos cálculos es fácil ver que D_{2n} es generado por r y s únicamente y que tiene orden $2n$.

Una presentación del grupo diedral está dada por $P = \langle r, s/r^n = s^2 = 1, rs = sr^{-1} \rangle$ y el grafo de Cayley depende del orden del grupo, como vimos en el Ejemplo 3 de la Sección 1.4 donde damos una presentación y el grafo de Cayley del grupo diedral de orden 6.

Hasta ahora hemos visto que cada grupo diedral es generado por una rotación r y una reflexión s , si la rotación es un múltiplo racional de la rotación total, entonces existe algún entero n tal que r^n es la identidad. En este caso tenemos el grupo diedral que hemos descrito, de orden $2n$. Pero si la rotación no es un múltiplo racional de la rotación total, entonces no existe tal n y el grupo resultante tiene infinitos elementos. A dicho grupo lo llamamos el **grupo diedral infinito** y lo denotamos D_∞ .

2.1.1. Presentación

Por la descripción hecha al inicio, se tiene que una **presentación** para el grupo diedral infinito está dada por:

$$P_1 = D_\infty = \langle r, s / s^2 = 1, rs = sr^{-1} \rangle.$$

Sin embargo, podemos considerar otra presentación para el grupo dada por:

$$P_2 = D_\infty = \langle a, b / a^2 = b^2 = 1 \rangle.$$

Antes de verificar que ambas presentaciones son isomorfas, veamos cuál es la forma normal de los elementos del grupo definido por la presentación P_1 .

2.1.2. Forma normal

Consideremos el grupo diedral infinito D_∞ presentado por P_1 . Determinemos cuál es la forma normal de sus elementos. Sabemos que los elementos de D_∞ son:

- $s = r^0 s$
- $r, r^2, r^3, \dots, r^i, \dots = r^n s^0$ con $1 \leq n < \infty$.
- $rs, r^2 s, r^3 s, \dots, r^i s, \dots = r^n s$ con $1 \leq n < \infty$.
- $(rs)^n$ con $2 \leq n < \infty$. Veamos que

$$(rs)^n = \begin{cases} 1 & n \text{ es par} \\ rs & n \text{ es impar} \end{cases}$$

Consideremos dos casos:

- Si n es par. Razonando por inducción sobre n . Si $n = 2$ se tiene que $(rs)^2 = rsrs = r s s r^{-1} = 1$. Supongamos que se cumple que para $n = 2m, \forall m \in \mathbb{N}$, $(rs)^n = 1$. Entonces $(rs)^{n+2} = (rs)^{2m+2} = (rs)^{2m} (rs)^2 = 1$
- Si n es impar. Razonando de nuevo por inducción sobre n . Si $n = 3$ se tiene que $(rs)^3 = (rs)^2 rs = rs$. Supongamos que se tiene para $n = 2m + 1, \forall m \in \mathbb{N}$, $(rs)^n = rs$. Entonces $(rs)^{n+2} = (rs)^{2m+3} = (rs)^{2m} (rs)^3 = rs$.
- $(sr)^n$ con $2 \leq n < \infty$. Análogo al caso anterior, se tiene que:

$$(sr)^n = \begin{cases} 1 & n \text{ es par} \\ sr & n \text{ es impar} \end{cases}$$

- $(rs)^n r^k$ con $2 \leq n < \infty, 1 \leq k < \infty$. Veamos que

$$(rs)^n r^k = \begin{cases} r^k & n \text{ es par} \\ r^{1-k} s & n \text{ es impar} \end{cases}$$

Consideremos dos casos:

- Si n es par. $(rs)^n r^k = r^k$.
 - Si n es impar. $(rs)^n r^k = r s r^k = s r^{-1} r^k = s r^{k-1} = r^{1-k} s$
- $(sr)^n s$ con $2 \leq n < \infty$. Análogo al caso anterior se tiene que:

$$(sr)^n s = \begin{cases} s & n \text{ es par} \\ r^{-1} & n \text{ es impar} \end{cases}$$

En cualquier caso obtenemos que la forma estándar de los elementos de D_∞ es $r^i s^j = s^j r^{-i}$ con $0 \leq j \leq 1, 0 \leq i < \infty$.

Ahora verifiquemos que las presentaciones P_1 y P_2 son isomorfas y que por tanto ambas presentan el grupo.

Consideremos

$$\begin{aligned} \phi : \quad D_{\infty P_1} &\longrightarrow D_{\infty P_2} \\ r &\longmapsto \phi(r) = ab \\ s &\longmapsto \phi(s) = a \end{aligned}$$

Veamos que ϕ es un isomorfismo.

Verifiquemos que se satisfacen las relaciones:

$$\begin{aligned} (\phi(s))^2 &= \phi(s)^2 = a^2 = 1 \text{ y} \\ \phi(rsrs) &= \phi(r)\phi(s)\phi(r)\phi(s) = abaaba = aba^2ba = 1 \end{aligned}$$

En vista de que se verifican las relaciones, se sigue por Teorema 3 de la Sección 1.2.2 que ϕ es un epimorfismo.

Veamos ahora que ϕ es inyectiva.

Sabemos que los elementos del grupo diedral infinito pueden ser escritos en forma única como $s^k r^i$ para algún $0 \leq k \leq 1$. Sea $w = s^k r^i$, entonces

$$\phi(w) = \phi(s^k r^i) = (\phi(s))^k (\phi(r))^i = (ab)^k a^i = \underbrace{abab \dots ab}_{k\text{-veces}} a^i$$

De donde se sigue que, $(ab)^k a^i = 1$ si y sólo si $k = i = 0$. Por tanto, $w = 1_{D_{\infty P_1}}$.

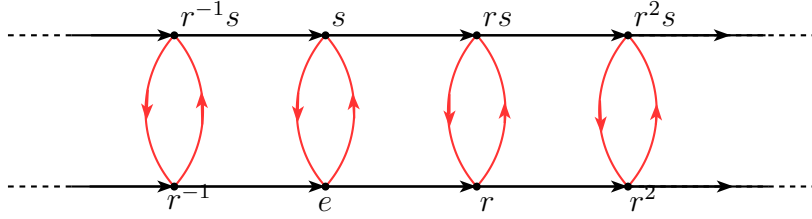
Finalmente, concluimos que ambas presentaciones son isomorfas.

2.1.3. Grafo de Cayley de D_∞

Consideremos el grupo diedral infinito presentado por:

$$D_\infty = \langle r, s / s^2 = 1, rs = sr^{-1} \rangle.$$

Entonces un grafo de Cayley asociado a esta presentación es:



2.1.4. Algunas Propiedades

1. La acción del grupo diedral infinito en \mathbb{R} es discreta.

Para ver esto, probemos que:

- El subgrupo de $\text{Homeo}(\mathbb{R})$ generado por las funciones lineales $a(x) = -x$ y $b(x) = 2 - x$, $\forall x \in \mathbb{R}$ con la operación composición de funciones, tiene la presentación del grupo diedral infinito $D_\infty = \langle a, b/a^2 = b^2 = 1 \rangle$.
- Cada $g \in D_\infty$ puede ser expresado como una función lineal de la forma $g(x) = \pm x \pm 2n$, $\forall n \in \mathbb{Z}$, derivado esto de la composición de las funciones lineales $a(x) = -x$ y $b(x) = 2 - x$.
- Todo número en \mathbb{R} se obtiene de un número múltiplo de $2 \pm r$, r un número entre $[0, 1]$.

Probemos a). Sean $D_\infty = \langle a, b/a^2 = b^2 = 1 \rangle$, G el grupo generado por $a(x)$ y $b(x)$ y la función

$$\begin{aligned} \psi : \quad S = \{a, b\} &\longrightarrow G \\ a &\longmapsto \psi(a) = a(x) \\ b &\longmapsto \psi(b) = b(x) \end{aligned}$$

Veamos que ψ extiende a un homomorfismo $\varphi : D_\infty \rightarrow G$, mostrando que $\tilde{\psi}(w) =_G 1$, w una relación de D_∞ , donde $\tilde{\psi} : F_S \rightarrow G$ es la extensión de ψ .

$$\begin{aligned} \tilde{\psi}(a^2) &= \psi(\psi(a)) = \psi(a(x)) = a(-x) = -(-x) = x \\ \tilde{\psi}(b^2) &= \psi(\psi(b)) = \psi(b(x)) = b(2 - x) = 2 - (2 - x) = x \end{aligned}$$

Luego por Teorema 3 de la Sección 1.2.2 se sigue que ψ extiende a un homomorfismo φ . Sea

$$\begin{aligned} \varphi : \quad D_\infty &\longrightarrow \langle a, b \rangle \subseteq \text{Homeo}(\mathbb{R}) \\ a &\longmapsto \varphi(a) = a(x) = -x \\ b &\longmapsto \varphi(b) = ba(x) = x + 2 \end{aligned}$$

Veamos que φ es un isomorfismo.

- Claramente φ está bien definida.
- φ es sobreyectiva. Basta ver que el generador b se obtiene del producto de los generadores ba en D_∞ y a del generador a .

- φ es inyectiva. Notemos que la preimagen de ab es b^{-1} . Como hemos mostrado, todos los elementos de D_∞ son de la forma $(ab)^n$, $(ab)^n a$, $(ba)^n$ o $(ba)^n b$ con $n \geq 0$. Estos son enviados a b^{-n} , $b^{-n}a = ab^n$, b^n y $b^{n+1}a = ab^{-(n+1)}$, respectivamente, que son todos diferentes (excepto para b^0 y b^{-0} y que resultan de $(ab)^0$ y $(ba)^0$ que son por supuesto el mismo).

Para la parte b), veamos que para todo $g \in D_\infty$ y para todo $n \in \mathbb{Z}$ se tiene $g(x) = \pm x \pm 2n$. Tenemos que:

- $ab(x) = a(b(x)) = a(2 - x) = -(2 - x) = -2 + x = x - 2$.
- $ba(x) = b(a(x)) = b(-x) = 2 - (-x) = 2 + x$.

Probaremos el resultado razonando por inducción sobre n . Consideremos 4 casos:

CASO 1: $(ab)^{n+1}a(x) = -x - 2(n + 1)$, $\forall n \in \mathbb{Z}$.

$$(ab)^1a(x) = aba(x) = a(2 + x) = -x - 2 = -x - 2(1).$$

Supongamos que se tiene para n y veamos que se cumple para $n + 1$.

$$(ab)^{n+1}a(x) = (ab)((ab)^n a(x)) = (ab)(-x - 2n) = a(x + 2(n + 1)) = -x - 2(n + 1).$$

CASO 2: $(ab)^{n+1}(x) = x - 2(n + 1)$, $\forall n \in \mathbb{Z}$.

$$(ab)^2(x) = ab(ab(x)) = (ab)(x - 2) = a(-x + 4) = x - 2(2).$$

Supongamos que se tiene para n y veamos que se cumple para $n + 1$.

$$(ab)^{n+1}(x) = (ab)((ab)^n(x)) = (ab)(x - 2n) = a(-x + 2(n + 1)) = x - 2(n + 1).$$

CASO 3: $(ba)^{n+1}b(x) = -x + 2(n + 2)$, $\forall n \in \mathbb{Z}$.

$$(ba)^1b(x) = bab(x) = b(x - 2) = 2 - (x - 2) = 2 - x + 2 = -x + 2(2).$$

Supongamos que se tiene para n y veamos que se cumple para $n + 1$.

$$(ba)^{n+1}b(x) = (ba)((ba)^n b(x)) = (ba)(-x + 2(n + 1)) = b(x - 2(n + 1)) = -x + 2(n + 2).$$

CASO 4: $(ba)^{n+1}(x) = x + 2(n + 1)$, $\forall n \in \mathbb{Z}$.

$$(ba)^2(x) = (ba)(ba(x)) = ba(2 + x) = b(-2 - x) = x + 2(2).$$

Supongamos que se tiene para n y veamos que se cumple para $n + 1$.

$$(ba)^{n+1}(x) = (ba)(ba)^n(x) = (ba)(x + 2n) = b(-x - 2n) = x + 2(n + 1).$$

En cualquier caso, se puede concluir que todo $g \in D_\infty$ puede verse como una función lineal de la forma $g(x) = \pm x \pm 2n$, $\forall n \in \mathbb{Z}$.

Finalmente, probemos c). Sea $x \in \mathbb{R}$. Veamos que $x = \pm 2n \pm r$ con $r \in [0, 1]$. Por la propiedad arquimediana, consideremos dos casos:

- Existe $n \in \mathbb{Z}$ tal que $2n \leq x \leq 2n + 1$. Entonces $x = 2n + r$ donde $r = x - 2n$, luego $0 \leq r \leq 1$.
- Existe $n \in \mathbb{Z}$ tal que $2n - 1 \leq x \leq 2n$. Entonces $1 - 2n \geq -x \geq -2n$, de donde, $1 \geq -x + 2n \geq 0$, por tanto, $x = 2n - r$ con $0 \leq r \leq 1$.

En cualquier caso $x = \pm 2n \pm r$ para todo $n \in \mathbb{Z}$.

De (a), (b) y (c) se sigue que si $x \in \mathbb{R}$, existe algún $r \in [0, 1]$ y algún $g \in D_\infty$ tal que $g \cdot r = x$, pues $g(r) = \pm r \pm 2n = x$. Luego se tiene que la órbita de $x \in \mathbb{R}$ tiene la forma:

$$Orb(x) = \{\pm r \pm 2n/n \in \mathbb{Z}, r \in [0, 1]\}.$$

Por último, veamos que si $x \in \mathbb{R}$ existe $\epsilon > 0$ tal que $Orb(x) \cap (x - \epsilon, x + \epsilon) = x$. Consideremos los siguientes casos,

CASO 1: Si $x \in \mathbb{Z}$. Entonces $\epsilon = 1/2$. De nuevo, consideremos dos subcasos:

- **Subcaso 1:** Si x es par, entonces $x = \pm 2n$, así
 $Orb(\pm 2n) \cap (\pm 2n - \frac{1}{2}, \pm 2n + \frac{1}{2}) = \pm 2n$.
- **Subcaso 2:** Si x es impar, entonces $x = \pm 2n + 1$, así
 $Orb(\pm 2n + 1) \cap (\pm 2n + \frac{1}{2}, \pm 2n + \frac{3}{2}) = \pm 2n + 1$.

CASO 2: De otro modo, tomemos $\epsilon = \min \left\{ \frac{|n-x|}{2} / n \in \mathbb{Z} \right\}$. Basta mostrar que $\min \left\{ \frac{|n-x|}{2} / n \in \mathbb{Z} \right\} < 2$ pues los elementos en la órbita están alejados uno del otro 2 unidades. Sea $n = 2m$ entonces $x = 2m \pm r$. Entonces, $\frac{n-x}{2} = \frac{|2m-2m \pm r|}{2} = \frac{r}{2} < 1 < 4$. De todo lo anterior, podemos concluir que la acción de $D_\infty \setminus \mathbb{R}$ es discreta.

2. La acción discreta de D_∞ en \mathbb{R} es propia.

Sea $x \in \mathbb{R}$, veamos que el $Stab(x)$ es finito. Sabemos que $Stab(x) = \{g \in D_\infty / g \cdot x = x\}$. Pero $g(x) = \pm x \pm 2n$. Consideremos dos casos:

CASO 1: Si $x \in \mathbb{Z}$, entonces $2n = 0 \vee 2n = 1$ por tanto, $Stab(x) = \mathbb{Z}_2 = \{0, 1\}$.

CASO 2: Si $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$, entonces $2n = 0$, por tanto $Stab(x) = 1$.

Por tanto

$$Stab(x) = \begin{cases} \mathbb{Z}_2, & \text{si } x \in \mathbb{Z}, \\ e, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

De donde se sigue que $Stab(x)$ es finito y así la acción discreta de $D_\infty \setminus \mathbb{R}$ es propia.

3. El grupo diedral infinito es isomorfo al producto semidirecto $\mathbb{Z} \rtimes \mathbb{Z}_2$. La presentación para el producto semidirecto $\mathbb{Z} \rtimes \mathbb{Z}_2$ es:

$$\mathbb{Z} \rtimes \mathbb{Z}_2 = \langle a, b / b^2 = 1, aba^{-1}b^{-1} = 1 \rangle.$$

Trivialmente, se tiene que la presentación del grupo diedral infinito D_∞ dada por P_1 y la presentación del producto semidirecto $\mathbb{Z} \rtimes \mathbb{Z}_2$ son isomorfas.

El grupo diedral infinito también es isomorfo al producto libre $\mathbb{Z}_2 * \mathbb{Z}_2$, cuya presentación está dada por

$$\mathbb{Z}_2 * \mathbb{Z}_2 = \langle x, y / x^2 = y^2 = 1 \rangle.$$

De nuevo, se puede observar que la presentación del grupo diedral infinito D_∞ dada por P_2 y la presentación del producto libre $\mathbb{Z}_2 * \mathbb{Z}_2$ son isomorfas.

2.2. GRUPO HEISENBERG

En esta sección veremos algunas propiedades algebraicas del grupo Heisenberg, una presentación para dicho grupo, la forma normal de sus elementos y el grafo de Cayley.

El grupo Heisenberg es el grupo de las matrices triangulares superiores 3×3 definido así:

$$\mathbb{H} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & x & z \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} : x, y, z \in \mathbb{Z} \right\}$$

bajo la operación usual de matrices.

2.2.1. Algunas Propiedades

1. \mathbb{H} es un grupo no abeliano.

$$\text{Sean } A = \begin{pmatrix} 1 & x & z \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ y } B = \begin{pmatrix} 1 & m & p \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ con } x, y, z, m, n, p \in \mathbb{Z}.$$

Se verifica fácilmente que no siempre se tiene $AB = BA$.

2. \mathbb{H} es un grupo nilpotente, esto es cierto si su serie central inferior es finita.

Sabemos que $\gamma_1(\mathbb{H}) = \mathbb{H}$.

$$\text{Ahora, sean } A = \begin{pmatrix} 1 & x & z \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ y } B = \begin{pmatrix} 1 & m & p \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{H}$$

Calculemos $\gamma_2(\mathbb{H}) = [A, B] = A^{-1}B^{-1}AB$.

$$\text{Tenemos que } A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -x & xy - z \\ 0 & 1 & -y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ y } B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -m & mn - p \\ 0 & 1 & -n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{H}$$

Entonces

$$\begin{aligned} A^{-1}B^{-1}AB &= \begin{pmatrix} 1 & -x & xy - z \\ 0 & 1 & -y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -m & mn - p \\ 0 & 1 & -n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & x & z \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & m & p \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & xn - my \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\text{Ahora, sean } [A, B] = L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & l \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ y } P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & p \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{H}, \text{ donde } l, p \in \mathbb{Z}.$$

Calculemos $\gamma_3(\mathbb{H}) = [L, P] = L^{-1}P^{-1}LP$.

Tenemos que, $L^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -l \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -p \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{H}$.

Entonces,

$$\begin{aligned} L^{-1}P^{-1}LP &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & -l \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -p \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & l \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & p \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Luego \mathbb{H} es nilpotente de clase 2.

3. \mathbb{H} es infinito, pues el subconjunto de matrices triangulares superiores 3×3 con entradas en \mathbb{Z} , $\begin{pmatrix} 1 & 0 & n \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, claramente tiene n , $n \in \mathbb{Z}$, matrices diferentes.

2.2.2. Presentación

Tomemos como elementos del **conjunto generador** S de \mathbb{H} a las matrices triangulares superiores 3×3 con entradas en \mathbb{Z} , A , B y C definidas así:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ y } C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Es fácil chequear que, $A^x = \begin{pmatrix} 1 & x & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B^y = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $C^z = \begin{pmatrix} 1 & 0 & z \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Así, cada elemento de \mathbb{H} es igual a $A^x B^y C^z = \begin{pmatrix} 1 & x & z + xy \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Una **presentación** para \mathbb{H} está dada por,

$$P = \langle A, B, C / C = ABA^{-1}B^{-1}, AC = CA, BC = CB \rangle.$$

Probaremos más adelante que efectivamente P presenta el grupo Heisenberg, veamos primero cuál es la forma normal para los elementos de la presentación.

2.2.3. Forma Normal

Consideremos el conjunto L de palabras, $L = \{U = A^x B^y C^z / x, y, z \in \mathbb{Z}\} \subset P$ y el efecto de multiplicar U a la derecha por cada uno de los elementos $C^{\pm 1}, B^{\pm 1}, A^{\pm 1}$.

Es obvio que, $UC^{\pm 1} = A^x B^y C^{z \pm 1} \in L$ y dado que C conmuta con B en P , $UB^{\pm 1} = A^x B^{y \pm 1} C^z \in L$.

Por otro lado, tenemos que la primera relación en P , $C = ABA^{-1}B^{-1}$ puede ser escrita de la forma $BC = ABA^{-1}$, pues B conmuta con C , entonces para todo $y \in \mathbb{Z}$, $AB^yA^{-1} = (BC)^y = B^yC^y$. Igualmente, usando la primera relación y el hecho de que B y C conmutan, obtenemos $BC = ABA^{-1} \Rightarrow CB = ABA^{-1} \Rightarrow CBA = AB \Rightarrow BA = ABC^{-1} \Rightarrow A^{-1}BA = BC^{-1}$. Por tanto, también se tiene que

$$A^{-1}B^yA = B^yC^{-y}. \quad (2.1)$$

Además,

$$\begin{aligned} UA^{\pm 1} &= A^x B^y C^z A^{\pm 1} \\ &= A^x B^y A^{\pm 1} C^z, \quad \text{pues } AC = CA. \end{aligned}$$

Entonces, distribuyendo el elemento $A^{\pm 1}$, se tiene que,

$$UA^{\pm 1} = A^{x-1}AB^yA^{-1}C^z \quad \text{o} \quad UA^{\pm 1} = A^{x+1}A^{-1}B^yAC^z,$$

de donde se sigue que,

$$UA^{\pm 1} = A^{x-1}B^yC^yC^z \quad \text{o} \quad UA^{\pm 1} = A^{x+1}B^yC^{-y}C^z,$$

y de ambas se obtiene que

$$UA^{\pm 1} = A^x A^{\pm 1} B^y C^{\pm y} C^z = A^{x \pm 1} B^y C^{z \pm y} \in L.$$

De lo anterior, se tiene que $LH \subseteq L$, para todo $H \in \{A, B, C\}^{\pm 1}$. Así, si W es cualquier palabra en $\{A, B, C\}^{\pm 1}$ se sigue por inducción en $l(W)$ que $LW \subseteq L$ y dado que $E \in L$ (tomemos $x = y = z = 0$), entonces $W = EW \in Lw \subseteq L$. Lo cual prueba que cada elemento de P es igual a algún miembro de L . Además es claro que elementos distintos de L son llevados a elementos distintos en P , por tanto, los elementos en P pueden expresarse en la forma normal,

$$A^x B^y C^z \text{ con } x, y, z \in \mathbb{Z}.$$

Veamos ahora que una presentación para \mathbb{H} está dada por

$$P = \langle A, B, C / C = ABA^{-1}B^{-1}, AC = CA, BC = CB \rangle.$$

Consideremos la función

$$\begin{aligned} \varphi: \quad S &\longrightarrow \mathbb{H} \\ A &\longmapsto \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ B &\longmapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ C &\longmapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Verifiquemos que se satisfacen las relaciones:

$$1. \varphi(ABA^{-1}B^{-1}C^{-1}) = Id_{3 \times 3}$$

$$\begin{aligned} \varphi(ABA^{-1}B^{-1}C^{-1}) &= \varphi(A)\varphi(B)\varphi(A)^{-1}\varphi(B)^{-1}\varphi(C)^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$2. \varphi(ACA^{-1}C^{-1}) = Id_{3 \times 3}$$

$$\begin{aligned} \varphi(ACA^{-1}C^{-1}) &= \varphi(A)\varphi(C)\varphi(A)^{-1}\varphi(C)^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$3. \varphi(BCB^{-1}C^{-1}) = Id_{3 \times 3}.$$

$$\begin{aligned} \varphi(BCB^{-1}C^{-1}) &= \varphi(B)\varphi(C)\varphi(B)^{-1}\varphi(C)^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

En vista de que las relaciones se satisfacen, se sigue por el Teorema 3 de la Sección 1.2.2 que φ es un epimorfismo. Veamos ahora que φ es inyectiva. Sabemos que los elementos de P son de la forma $A^x B^y C^z$ con $x, y, z \in \mathbb{Z}$. Por tanto, veamos que para $h = A^x B^y C^z$, si $\varphi(A^x B^y C^z) = Id_{3 \times 3}$ entonces $h = e_P$.

$$\begin{aligned} \varphi(A^x B^y C^z) &= \varphi(A^x)\varphi(B^y)\varphi(C^z) \\ &= \begin{pmatrix} 1 & x & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & z \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & x & x+y \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & z \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & x & z+xy \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Esto es igual a la $Id_{\mathbb{H}}$, si $x = y = z = 0$, es decir, $h = A^x B^y C^z = e_P$.

Otras formas de expresar a \mathbb{H}

1. De lo anterior, vemos que otra forma más conveniente que las matrices para denotar los elementos de este grupo es usar tripletas de números en \mathbb{Z} , usando la siguiente notación:

$$\mathbb{H} = \{(x, y, z)/x, y, z \in \mathbb{Z}\},$$

y la operación multiplicación de elementos puede ser escrita así:

$$(x, y, z) \cdot (x', y', z') = (x + x', y + y', z + z' - x'y'). \quad (2.2)$$

Veamos que notar los elementos de \mathbb{H} como tripletas de números en \mathbb{Z} es equivalente a expresarlos usando matrices triangulares superiores 3×3 .

Sean $A^x B^y C^z, A^{x'} B^{y'} C^{z'} \in \mathbb{H}$ con $x, y, z, x', y', z' \in \mathbb{Z}$. Entonces:

$$\begin{aligned} & A^x B^y C^z A^{x'} B^{y'} C^{z'} \\ &= A^x B^y A^{x'} C^z B^{y'} C^{z'} && \text{pues } AC = CA \\ &= A^{x+1} A^{-1} B^y A A^{x'-1} C^z B^{y'} C^{z'} \\ &= A^{x+1} B^y C^{-y} A^{x'-1} C^z B^{y'} C^{z'} && \text{por (2.1)} \\ &= A^{x+1} B^y A^{x'-1} C^{-y} C^z B^{y'} C^{z'} && \text{pues } AC = CA \\ &= A^{x+2} A^{-1} B^y A A^{x'-2} C^{z-y} B^{y'} C^{z'} \\ &= A^{x+2} B^y C^{-y} A^{x'-2} C^{z-y} B^{y'} C^{z'} && \text{por (2.1)} \\ &= A^{x+2} B^y A^{x'-2} C^{-y} C^{z-y} B^{y'} C^{z'} && \text{pues } AC = CA \\ &\vdots \\ &= A^{x+x'} B^y C^{z-x'y} B^{y'} C^{z'} \\ &= A^{x+x'} B^y B^{y'} C^{z-x'y} C^{z'} && \text{pues } BC = CB \\ &= A^{x+x'} B^{y+y'} C^{z+z'-x'y} \end{aligned}$$

Ahora, como \mathbb{H} es un grupo con la operación multiplicación definida antes, consideremos:

- Inversa: $(x, y, z)^{-1} = (-x, -y, -z - xy)$
- Identidad: $(0, 0, 0)$

2. El grupo de Heisenberg \mathbb{H} puede ser representado como un producto semidirecto de los dos subgrupos:

$$U = \{(0, y, z)/y, z \in \mathbb{Z}\} \cong \mathbb{Z}^2 \text{ y}$$

$$V = \{(x, 0, 0)/x \in \mathbb{Z}\} \cong \mathbb{Z}.$$

Y el homomorfismo

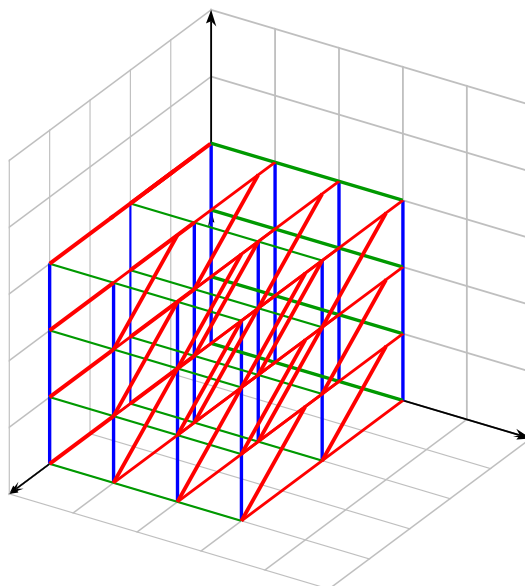
$$\begin{aligned} \theta : \quad V &\longrightarrow \text{Aut}(U) \\ (x, 0, 0) &\longmapsto \theta((x, 0, 0)) = \theta_x, \end{aligned}$$

donde $\theta_x(0, y, z) = (0, y, z - xy)$.

Expresaremos $(x, y, z) \in \mathbb{H}$, como $(x, y, z) = \{(0, y, z), (x, 0, 0)\}$.

Veamos que la operación entre elementos de $(U \rtimes V, \cdot)$ es equivalente a la usada en 2.2.

$$\begin{aligned} (x, y, z) \cdot (x', y', z') &= \{(0, y, z), (x, 0, 0)\} \cdot \{(0, y', z'), (x', 0, 0)\} \\ &= \{(0, y, z)\theta(x, 0, 0)(0, y', z'), (x, 0, 0)(x', 0, 0)\} \\ &= \{(0, y, z)\theta_x(0, y', z'), (x + x', 0, 0)\} \\ &= \{(0, y, z)(0, y', z' - xy'), (x + x', 0, 0)\} \\ &= \{(0, y + y', z + z' - xy'), (x + x', 0, 0)\} \\ &= (x + x', y + y', z + z' - xy'). \end{aligned}$$



2.3. GRUPO BAUMSLAG-SOLITAR

En esta sección veremos una presentación para el grupo Baumslag-Solitar, estudiaremos algunas de sus propiedades que nos permitirán introducir la forma normal de sus elementos y el grafo de Cayley. Finalmente, nos concentraremos en el grupo Baumslag, mostraremos algunas de sus propiedades y la cota superior de su función de Dehn.

En la Sección 2.1 estudiamos el grupo diedral infinito y vimos cómo este grupo actúa en la recta real. Consideremos ahora el subgrupo de $\text{Homeo}(\mathbb{R})$ generado por las funciones lineales a y b , donde $a(x) = 2x$ y $b(x) = x + 1$, y donde la operación binaria es la función composición.

El producto ab es entonces la función

$$ab(x) = a(x + 1) = 2(x + 1) = 2x + 2.$$

Podemos ver también que $ba(x) = 2x + 1$,

De donde se sigue que $ab \neq ba$ y este grupo no es abeliano. Sin embargo,

$$b^2a(x) = b^2(2x) = b(b(2x)) = b(2x + 1) = 2x + 1 + 1 = 2x + 2.$$

Por tanto, $ab = b^2a$ y así este grupo no es un grupo libre con base $\{a, b\}$.

El grupo descrito es llamado el **grupo Baumslag-Solitar** publicado por primera vez en 1962 por Gilbert Baumslag y Donald Solitar.

Los grupos Baumslag-Solitar son por tanto una clase particular de grupos con dos generadores y una relación que han desempeñado un papel sorprendentemente útil en combinatoria y más recientemente en teoría geométrica de grupos. En muchas situaciones han aportado ejemplos que marcan fronteras entre diferentes clases de grupos y proporcionado un banco de pruebas para teorías y técnicas.

En general, si $a(x) = nx$ para algún entero $n \geq 2$ y $b(x)$ es de nuevo $b(x) = x + 1$ entonces el grupo generado por $\{a, b\}$ es el grupo Baumslag-Solitar denotado $B(1, n)$.

2.3.1. Presentación

El grupo $B(1, 2)$ es el grupo con presentación

$$P = \langle a, b/b^2a = ab \rangle.$$

En general, si m y n son enteros positivos, entonces el grupo Baumslag-Solitar $B(m, n)$ es definido como el grupo dado por la presentación

$$P = \langle a, b/b^na = ab^m \rangle.$$

2.3.2. Algunas propiedades

1. Si m es cualquier entero y n un natural, entonces $a^n b^m(0) = a^n \underbrace{((0+1) + (0+1) + \dots + (0+1))}_{m\text{-veces}}$.

$a^n(m) = \underbrace{a^1(a^1(a^1 \dots (a^1(m))))}_{n\text{-veces}} = 2^n m = \frac{m}{2^{-n}}$, pues claramente, $a(n) = 2n$. Por tanto, la

órbita de cero bajo la acción de $B(1, 2)$ contiene a $\mathbb{Z} \left[\frac{1}{2} \right]$, los racionales diádicos. Pero cada generador y su inverso envían a $\mathbb{Z} \left[\frac{1}{2} \right]$ en $\mathbb{Z} \left[\frac{1}{2} \right]$, veamos:

- $a \left(\frac{m}{2^n} \right) = 2 \left(\frac{m}{2^n} \right) = \frac{m}{2^{n-1}}$.
- $b^{-1} \left(\frac{m}{2^n} \right) = \frac{m}{2^n} - 1 = \frac{m-2^n}{2^n}$.

Así, la órbita de cero, o de hecho de cualquier elemento de $\mathbb{Z} \left[\frac{1}{2} \right]$ es $\mathbb{Z} \left[\frac{1}{2} \right]$. Este hecho se sigue también de la siguiente descripción de este grupo.

Proposición 6. *Los elementos de $B(1, 2)$ son las funciones lineales $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ que pueden ser expresados de la forma*

$$g : \quad \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \quad \longmapsto \quad g(x) = 2^n x + \frac{m}{2^k},$$

donde m, n, k son enteros.

Demostración. Dado que $B(1, 2)$ es generado por funciones lineales y la composición de funciones lineales es lineal, se sigue que cada $g \in B(1, 2)$ tiene la forma $g(x) = \alpha x + \beta$. Ahora como $B(1, 2)$ está definido como el grupo generado por a y b , cada elemento puede ser expresado como un producto de a 's, b 's y sus inversos. Razonando por inducción en la longitud de este producto podemos ver que si $g(x) = \alpha x + \beta$ entonces $\alpha = 2^n$ para algún entero n y $\beta \in \mathbb{Z} \left[\frac{1}{2} \right]$. Veamos:

- Si $g(x) = ab(x)$ entonces $g(x) = a(x+1) = 2x+2$. Por tanto, $g(x) = 2x+2 = 2x + \frac{1}{2^{-1}}$.
- Supongamos que se tiene para $a^n b^m(x)$, veamos que se cumple para $a^{n+1} b^{m+1}(x)$. Como $a^n b^m(x) = a^n(b^m(x)) = a^n(x+m) = 2^n(x+m) = 2^n x + 2^n m = 2^n x + \frac{m}{2^k}$

donde $k = -n$. Ahora,

$$\begin{aligned}
a^{n+1}b^{m+1}(x) &= a^{n+1}(x + (m + 1)) = 2^{n+1}(x + m + 1) = 2^{n+1}(x + m) + 2^{n+1} \\
&= 2^n 2(x + m) + 2^{n+1} = 2^n(x + m)2 + 2^{n+1} = \left(2^n x + \frac{m}{2^k}\right) 2 + 2^{n+1} \\
&= 2^{n+1}x + \frac{m}{2^{k-1}} + 2^{n+1} = 2^{n+1}x + \frac{m + 2^{n+1+k-1}}{2^{k-1}} \\
&= 2^{n+1}x + \frac{m + 1}{2^{k-1}}.
\end{aligned}$$

Luego $\alpha = 2^n$ y $\beta \in \mathbb{Z} \left[\frac{1}{2}\right]$. Igualmente la traslación $x \rightarrow x + \frac{m}{2^k}$ puede ser expresada usando los generadores a y b como $a^{-k}b^m a^k$. Por tanto, si $g(x) = 2^n x + \frac{m}{2^k}$ entonces

$$\begin{aligned}
g(x) &= (a^{-k}b^m a^k)a^n(x) = a^{-k}b^m a^k(2^n x) = a^{-k}b^m(2^{k+n}x) \\
&= a^{-k}(2^{k+n}x + m) = 2^{-k}(2^{k+n}x + m) = 2^{-k+k+n}x + 2^{-k}m = 2^n x + \frac{m}{2^k}.
\end{aligned}$$

De aquí que,

$$g(x) = a^{-k}b^m a^{k+n} \quad (2.3)$$

y por tanto $B(1, 2)$ está compuesta enteramente de funciones lineales de la forma descrita. \square

2. A diferencia de la acción del grupo D_∞ en \mathbb{R} , la acción de $B(1, 2)$ en \mathbb{R} no es ni discreta ni propia.

Veamos que la acción no es propia, para esto, veamos que, existe $x \in \mathbb{R}$ tal que $Stab(x)$ es infinito.

Sea $0 \in \mathbb{R}$. Sabemos que $Stab(0) = \{g \in B(1, 2) / g \cdot 0 = 0\}$. Pero de la Proposición 6 de la presente sección, tenemos que $g(x) = 2^n x + \frac{m}{2^k}$ donde $m, n, k \in \mathbb{Z}$.

Si $m = 0$, $g(x) = 2^n x = a^n(x)$ entonces $g(0) = a^n(0) = 2^n 0 = 0$ para todo $n \in \mathbb{Z}$, por tanto, $Stab(0) = \langle a \rangle \approx \mathbb{Z}$.

Veamos que la acción $B(1, 2)$ en \mathbb{R} no es discreta, esto es, veamos que existe $x \in \mathbb{R}$ tal que para $\epsilon > 0$, $Orb(x) \cap (x - \epsilon, x + \epsilon)$ es infinita.

Notemos que si n es algún entero positivo entonces $a^{-n}(b(0)) = a^{-n}(1) = 2^{-n}1 = \frac{1}{2^n}$. Por tanto, dado algún $\epsilon > 0$, la órbita de $0 \in \mathbb{R}$ bajo la acción de $B(1, 2)$ es $\frac{1}{2^n}$ y ésta interseca a $(-\epsilon, \epsilon)$ en infinitos puntos.

3. $B(1, 2)$ actúa en el conjunto de intervalos cerrados $I = \{[x, x + 2^i] / x \in \mathbb{Z} \left[\frac{1}{2}\right], i \in \mathbb{Z}\}$.

Corolario 2. *La órbita del intervalo cerrado $[0, 1]$ bajo la acción de $B(1, 2)$ en \mathbb{R} es el conjunto de intervalos cerrados*

$$I = \{[x, x + 2^i] / x \in \mathbb{Z} \left[\frac{1}{2}\right], i \in \mathbb{Z}\}$$

Además, si $g([0, 1]) = [0, 1]$ entonces $g = e \in B(1, 2)$. Así $g \sim g([0, 1])$ es una biyección entre I y los elementos de $B(1, 2)$.

Demostración. Consideremos la función

$$\begin{aligned} \bullet : \quad B(1, 2) \times I &\longrightarrow I \\ (g, [0, 1]) &\longmapsto g([0, 1]). \end{aligned}$$

Veamos que $B(1, 2)$ actúa en I .

Sea $[x, y] \in I$. Si $g \in B(1, 2)$ entonces por Proposición 6 de la presente sección, podemos expresar a g como $g(x) = 2^n x + \frac{m}{2^k}$. Por tanto,

$$g([x, x + 2^i]) = [2^n x + \frac{m}{2^k}, 2^n x + \frac{m}{2^k} + 2^{n+i}].$$

El extremo izquierdo, $2^n x + \frac{m}{2^k}$ está en $\mathbb{Z}[\frac{1}{2}]$ y el ancho del intervalo es 2^{n+i} , por tanto, la imagen de un intervalo en I es un intervalo en I .

El elemento $(a^{-k} b^m a^{k+i})$ es la función lineal $g(x) = 2^i x + \frac{m}{2^k}$ que envía el intervalo $[0, 1]$ al intervalo $[\frac{m}{2^k}, \frac{m}{2^k} + 2^i]$ probando que la acción de $B(1, 2)$ en I es transitiva.

Por otro lado, tenemos que cualquier función lineal está determinada por la imagen de dos puntos. Si $g([0, 1]) = [0, 1]$ entonces se tiene que g es la identidad ó $g(0) = 1$ y $g(1) = 0$. Pero esto último no es posible, dado que el coeficiente de x en $g(x) = 2^n x + \frac{m}{2^k}$ es positivo y sería creciente. Por tanto, $g = e \in B(1, 2)$.

Finalmente veamos que hay una biyección entre I y los elementos de $B(1, 2)$.

Veamos que \bullet es inyectiva. Sean $g, g' \in B(1, 2)$ tal que $g(x) = 2^n x + \frac{m}{2^k}$ y $g'(y) = 2^j y + \frac{p}{2^q}$. Si $[x, x + 2^n] = [y, y + 2^j]$ entonces $g([0, 1]) = [\frac{m}{2^k}, \frac{m}{2^k} + 2^n] = g'([0, 1]) = [\frac{p}{2^q}, \frac{p}{2^q} + 2^j]$, por tanto se sigue que $x = y, n = j, m = p, k = q$ y así se tendría que $g = g'$.

Veamos que \bullet es sobreyectiva. Claramente dado $l = [\frac{m}{2^k}, \frac{m}{2^k} + 2^n] \in I$ se tiene $g(x) = 2^n x + \frac{m}{2^k} \in B(1, 2)$ tal que $g([0, 1]) = l$. \square

2.3.3. Forma Normal

De 2.3 vimos que cada elemento de $B(1, 2)$ puede ser expresado como una palabra de la forma $a^{-k} b^m a^{k+n}$. Si tomamos el conjunto de todas estas palabras, así

$$W = \{a^{-k} b^m a^{k+n} / k, m, n \in \mathbb{Z}\}.$$

Se sigue que este conjunto de palabras no es una forma normal para $B(1, 2)$. Las palabras aba^{-1} (con $k = -1, m = 1, n = 0$) y b^2 (con $k = n = 0, m = 2$) están ambas en W . Pero $aba^{-1} = b^2 \in B(1, 2)$. Por tanto, la función evaluación restringida en W , $\pi : \{a, b, a^{-1}, b^{-1}\}^* \rightarrow B(1, 2)$ es sobreyectiva pero no es inyectiva. Sin embargo, no estamos lejos de la forma normal.

Proposición 7. *El conjunto $NF = \{a^{-k} b^{2m} a^{k+n} / k, m, n \in \mathbb{Z}\} \cup \{a^n / n \in \mathbb{Z}\}$ es una forma normal para $B(1, 2)$.*

Demostración. Sabemos que cada $g \in B(1, 2)$ puede ser expresado como una función lineal de la forma $g(x) = 2^n x + \frac{m}{2^k}$. Reduciendo $g(x)$ a su mínima expresión podemos suponer que m es impar o cero. Así, cada $g \in B(1, 2)$ tiene la forma $g(x) = 2^n x + \frac{2m+1}{2^k}$ o $g(x) = 2^n x$.

Las palabras $\{a^{-k} b^{2m} a^{k+n} / k, m, n \in \mathbb{Z}\}$ describen la función $g(x) = 2^n x + \frac{2m+1}{2^k}$ y las palabras $\{a^n / n \in \mathbb{Z}\}$ dan $g(x) = 2^n x$, por tanto, nuestro conjunto de palabras mapea sobreyectivamente a $B(1, 2)$ bajo π .

Para establecer la unicidad, supongamos lo contrario, que $a^{-k}b^{2m}a^{k+n} = a^{-K}b^{2M}a^{K+N}$ donde al menos una de las siguientes desigualdades se cumple $k \neq K, m \neq M$ ó $n \neq N$.

La función en el lado izquierdo es $[0, 1] \rightarrow [\frac{m}{2^k}, \frac{2m+1}{2^k} + 2^n]$ mientras que la función del lado derecho es $[0, 1] \rightarrow [\frac{M}{2^K}, \frac{2M+1}{2^K} + 2^N]$. Se sigue que $\frac{2m+1}{2^k} = \frac{2M+1}{2^K}$ y $2^n = 2^N$.

Así $m = M, k = K$ y $n = N$ lo cual es una contradicción.

El mismo argumento muestra que ninguna expresión de la forma $a^{-k}b^{2m}a^{k+n}$ produce una función de la forma $g(x) = 2^n x$, por tanto, NF es la forma normal de $B(1, 2)$. \square

2.3.4. Grafo de Cayley

Es fácil resolver el problema de la palabra para $B(1, 2)$. Dada cualquier palabra $w \in \{a, b\}$ podemos producir el elemento del grupo asociado al componer las funciones lineales apropiadamente. Al final se tendrá $g(x) = x$ si y sólo si $\pi(w) = e$.

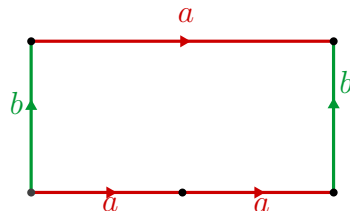
Por ejemplo, consideremos la palabra $w = a^2ba^{-2}ba^2b^{-1}a^{-2}b^{-1}$ y sea $g = \pi(e)$. Entonces veamos que $\pi(w) = \pi(a^2ba^{-2}ba^2b^{-1}a^{-2}b^{-1}) = e$.

$$g : x \xrightarrow{b^{-1}} x - 1 \xrightarrow{a^{-2}} 2^{-2}x - 2^{-2} \xrightarrow{b^{-1}} \frac{1}{4}x - \frac{5}{4} \xrightarrow{a^2} x - 5 \xrightarrow{b} x - 5 + 1 \xrightarrow{a^{-2}} \frac{x}{4} - 1 \xrightarrow{b} \frac{x}{4} \xrightarrow{a^2} x.$$

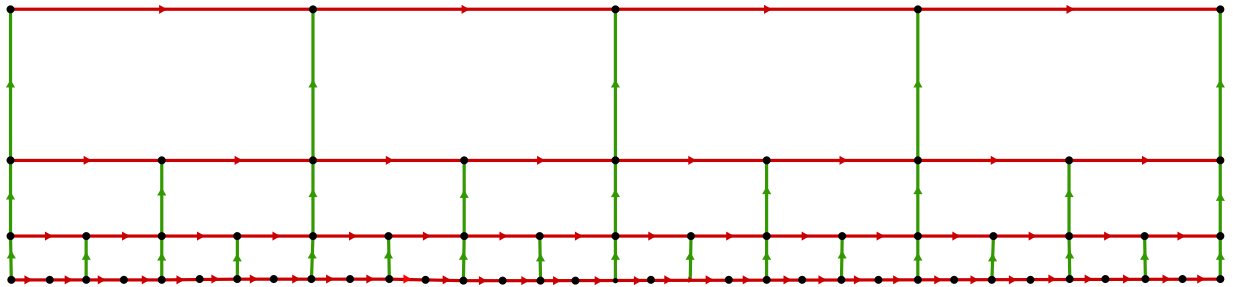
Así $g(x) = x$, luego $\pi(w) = e \in B(1, 2)$.

Dado que podemos resolver el problema de la palabra, por el Teorema 5 de la Sección 1.1.5 tenemos que es posible construir el grafo de Cayley de $B(1, 2)$ asociado a los generadores $\{a, b\}$.

Dibujemos $bab^{-1}a^{-2}$, tendríamos



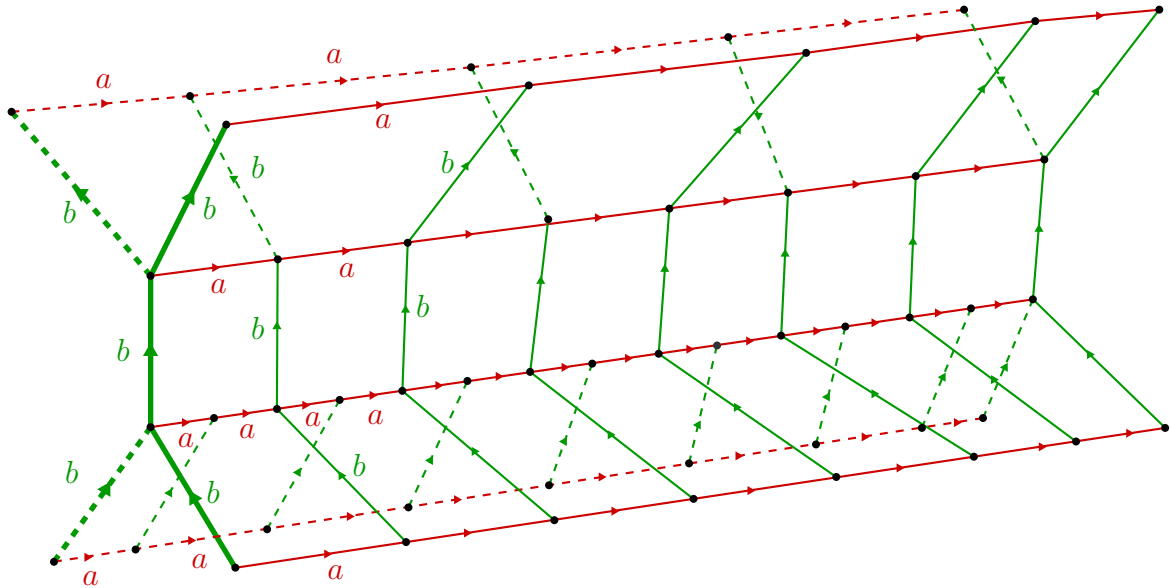
Podemos continuar construyendo el grafo de Cayley uniendo los lazos rectangulares. La red resultante de rectángulos puede continuarse indefinidamente formando lo que se conoce como una hoja en el grafo de Cayley de $B(1, 2)$. Así:



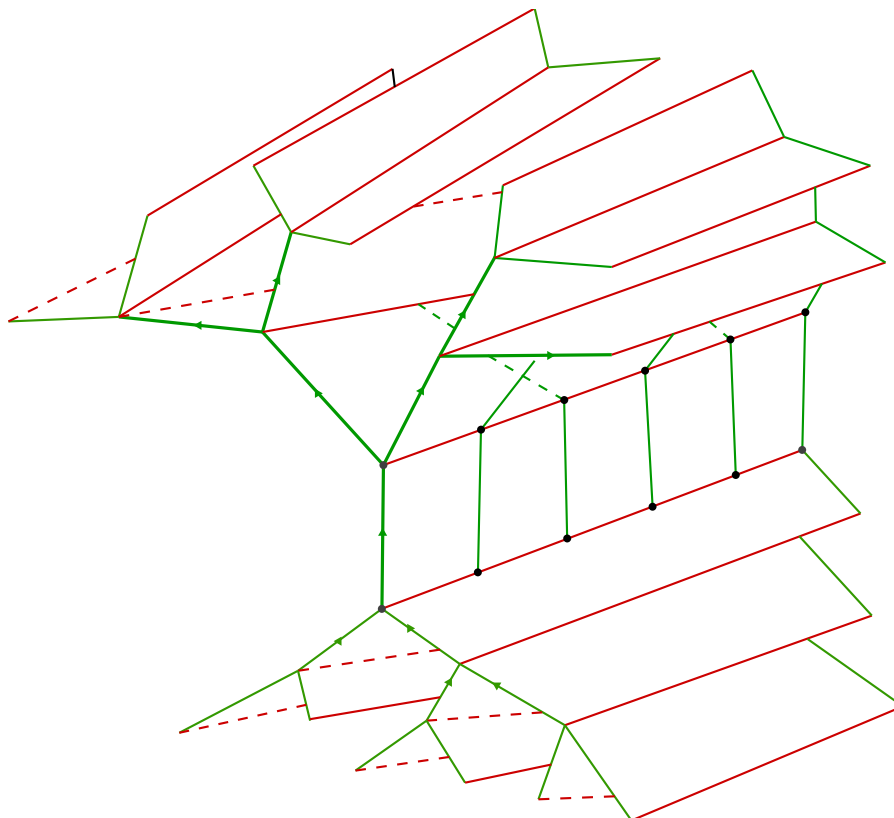
La hoja de la figura anterior no es el grafo de Cayley completo de $B(1, 2)$ con respecto a $\{a, b\}$. Podemos ver que debe haber alguna arista faltante ya que algunos de los vértices en esta red

tienen sólo 3 aristas incidentes y no 4. Sabemos que por las propiedades del grafo de Cayley como el grupo tiene 4 generadores en cada vértice deben incidir 4 aristas. Por tanto, para construir completamente el grafo de Cayley procedemos de la siguiente manera:

Comenzamos pegando copias del modelo rectangular a lo largo de los lados verticales, obteniendo una banda horizontal infinita. Ésta se hace cargo de las aristas a que entran y salen en cada vértice. Para obtener todo el grafo de Cayley, también debemos tener una arista b que entra y una que sale en cada vértice. Por tanto, en la arista superior de nuestra banda horizontal, tenemos que pegar un abanico de nuevas bandas, unidas a lo largo de su arista inferior y en forma escalonada. Similarmente, debe haber bandas abanicando hacia abajo de esta banda en común. Gráficamente tenemos el siguiente esquema.



Finalmente, el *grafo de Cayley* para el grupo Baumslag-Solitar $B(1,2)$ es el siguiente:



En otros casos, debemos comenzar dibujando la única relación $ba^pb^{-1}a^{-q}$ como un lazo rectangular con lados verticales etiquetados b , el lado horizontal menor se divide en q partes de igual longitud, cada uno etiquetado a y el lado horizontal mayor se divide en p partes de longitud igual cada uno etiquetado a . Y procedemos como en el caso anterior.

2.3.5. Grupo Baumslag

En 1972, posterior a la publicación de los grupos Baumslag-Solitar, Gilbert Baumslag define el grupo Baumslag y hace una descripción de él. Este grupo es diferente al grupo Baumslag-Solitar, y veremos algunas de sus propiedades.

1. El grupo Baumslag tiene una **presentación** dada por:
 $B = \langle a, s, t / [a, a^t] = 1, [s, t] = 1, a^s = aa^t \rangle$ donde $(a^n)^t = a^{nt} = t^{-1}a^nt$ para todo $a, t \in G, n \in \mathbb{Z}$.
2. El grupo Baumslag es **metabeliano**

Teorema 9. *El grupo $B = \langle [a, a^t] = 1, [s, t] = 1, a^s = aa^t \rangle$ es un grupo metabeliano cuyo grupo derivado es libre abeliano de rango infinito.*

Demostración. Comencemos probando que B es metabeliano. Se sigue de la definición de las relaciones de B que el grupo derivado B' de B es generado por los conjugados $a^{t^i s^j}$ con i, j enteros arbitrarios. Así, es suficiente probar que estos conjugados conmutan. En realidad basta verificar que el conjugado a^{t^i} para $i = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ conmuta con a^{t^i} para $i = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, pues de las relaciones se tiene que t y s conmutan.

Por otro lado, de la primera relación definida en B tenemos que $gp(a, a^t)$ (donde $gp(x)$ denota el subgrupo de G generado por x) es abeliano. Supongamos que hemos probado que $gp(a, a^t, \dots, a^{t^n})$ es abeliano para algún $n \geq 1$. Entonces $gp(a^t, a^{t^2}, \dots, a^{t^{n+1}})$ es también abeliano.

Por tanto, a^t conmuta con $a, a^{t^n}, a^{t^{n+1}}$ y a^{t^n} conmuta con $a, a^t, a^{t^{n+1}}$. Teniendo esto en cuenta y tomando las relaciones definidas en B nos encontramos con:

$$\begin{aligned} 1 &= [a, a^{t^n}]^s = [a^s, a^{t^n s}] = [a^s, a^{s t^n}] = [a a^t, (a a^t)^{t^n}] \\ &= [a a^t, a^{t^n} a^{t^{n+1}}] = a^{-t} a^{-1} a^{-t^{n+1}} a^{-t^n} a a^t a^{t^n} a^{t^{n+1}} = [a, a^{t^{n+1}}] \end{aligned}$$

De esto, se sigue que $gp(a, a^t, \dots, a^{t^{n+1}})$ es también abeliano. Pero esto implica que

$$[a, a^{t^i}] = 1, \quad i = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (2.4)$$

Ahora, si $j \geq 0$, entonces a^{s^j} es un producto de los elementos a, a^t, \dots, a^{t^j} . Por tanto, por (2.4), $[a, a^{t^i s^j}] = 1$.

Si $j < 0$ entonces $1 = [a^{s^{-j}}, a^{t^i}] = [a^{s^{-j}}, a^{t^i}]^{s^j} = [a, a^{t^i s^j}]$, de nuevo, haciendo uso de (2.4).

Así hemos probado que B' es abeliano y por tanto B es metabeliano.

Falta mostrar que B' es libre abeliano de rango infinito. Para hacer esto, sea F el campo cociente de $\mathbb{Z}[x]$, el anillo de polinomios sobre los enteros \mathbb{Z} en una sola variable x . Entonces las matrices 2×2 sobre F

$$\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \beta = \begin{pmatrix} 1+x & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \tau = \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

generan un grupo Γ .

Verifiquemos que las matrices satisfacen las relaciones dadas en B . Sabemos que:

$$\alpha^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \beta^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{1+x} & 0 \\ 0 & 1+x \end{pmatrix}, \quad \tau^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{x} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

por tanto, fácilmente se verifica que:

- $\beta^\tau = \tau^{-1} \beta \tau = \beta$,
- $\alpha \alpha^\tau = \alpha^\tau \alpha$,
- $\alpha^\beta = \alpha \alpha^\tau$.

Así la función $a \mapsto \alpha, s \mapsto \beta, t \mapsto \tau$ define un homomorfismo ϕ de B en Γ .

Ahora se sigue de la definición de las relaciones en B que los elementos

$$\dots, t a t^{-1}, a, t^{-1} a t, \dots, s a s^{-1}, s^2 a s^{-2}, \dots \quad (2.5)$$

bastan para generar a B' . Sin embargo, la inspección muestra que los elementos

$$\dots, \tau \alpha \tau^{-1}, \alpha, \tau^{-1} \alpha \tau, \dots, \beta \alpha \beta^{-1}, \beta^2 \alpha \beta^{-2}, \dots \quad (2.6)$$

generan libremente a un subgrupo abeliano libre de B . Dado que B' es abeliano y que los elementos (2.5) son enviados por ϕ en los correspondientes elementos de (2.6) se sigue que los elementos de (2.5) generan libremente un grupo abeliano libre. Así B' es abeliano libre de rango infinito. \square

3. La **función de Dehn** del grupo Baumslag está acotada superiormente en forma exponencial.

Sea $B = \langle [a, a^t] = 1, [s, t] = 1, a^s = aa^t \rangle$. Comenzaremos centrándonos en una familia particular de palabras, que veremos representan la identidad en B . Para $n \in \mathbb{Z}$ definimos

$$C(n) = \text{Area}[a, a^{t^n}]$$

el mínimo costo de convertir $[a, a^{t^n}] = a^{-1}a^{-t^n}aa^{t^n}$ en la palabra vacía o de manera equivalente convertir aa^{t^n} en $a^{t^n}a$ en B .

Lema 7. $[a, a^{t^n}] = 1$ en B y $C(n) \leq 4^n$, para todo $n \geq 1$.

Demostración. Razonemos por inducción sobre n .

- Si $n = 1$. $[a, a^t] = 1$ (por la presentación) y $\text{Area}[a, a^t] = 1 < 4$.
- Si $n = 2$. Veamos que $[a, a^{t^2}] = 1$ y $\text{Area}[a, a^{t^2}] \leq 4^2 = 16$. Por el paso anterior, sabemos que $aa^t = a^t a$, de donde $(aa^t)^s = (a^t a)^s$. Entonces:

$$\begin{aligned} s^{-1}aa^t s &= s^{-1}a^t a s && \text{(usando conjugación),} \\ s^{-1}a s s^{-1}a^t s &= s^{-1}a^t s s^{-1}a^t s, \\ a^s a^{ts} &= a^{ts} a^s, \\ a^s a^{st} &= a^{st} a^s && \text{(aplicando } [s, t] = 1 \text{ dos veces),} \\ a^s (a^s)^t &= (a^s)^t a^s, \\ (aa^t)(aa^t)^t &= (aa^t)^t (aa^t) && \text{(aplicando } aa^t = a^s \text{ cuatro veces),} \\ (aa^t)(a^t a)^t &= (a^t a)^t (aa^t) && \text{(aplicando } [a, a^t] = 1 \text{ dos veces),} \\ aa^t a^{t^2} a^t &= a^{t^2} a^t aa^t, \\ aa^t a^{t^2} &= a^{t^2} a^t a, \\ a^t aa^{t^2} &= a^{t^2} a^t a && \text{(aplicando } [a, a^t] = 1 \text{ una vez),} \\ a^t aa^{t^2} &= a^t a^{t^2} a && \text{(aplicando } (a^{t^2}) = (a^t)^t \Rightarrow a^{t^2} = (a^{-1}a^t a)^t \\ &&& \Rightarrow a^{t^2} = a^{-t} a^{t^2} a^t \Rightarrow a^t a^{t^2} = a^{t^2} a^t \text{ una vez),} \\ aa^{t^2} &= a^{t^2} a. \end{aligned}$$

Por tanto, $[a, a^{t^2}] = 1$ y sumando las veces que aplicamos relaciones tenemos que $\text{Area}[a, a^{t^2}] = 10 < 16$.

- Por inducción, supongamos que se tiene para $n \geq 3$. Por tanto, $[a, a^{t^n}] = 1$ y $\text{Area}[a, a^{t^n}] = \mathbf{C(n)} \leq 4^n$.

Del paso anterior tenemos $aa^{t^n} = a^{t^n} a$, por tanto, $(aa^{t^n})^s = (a^{t^n} a)^s$. Entonces:

$$\begin{aligned} s^{-1}aa^{t^n} s &= s^{-1}aa^{t^n} s, \\ s^{-1}a s s^{-1}a^{t^n} s &= s^{-1}a s s^{-1}a^{t^n} s, \\ a^s a^{t^n s} &= a^{t^n s} a^s && \text{(aplicando } [s, t] = 1, \mathbf{2n} \text{ veces),} \\ a^s a^{st^n} &= a^{st^n} a^s, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a^s(a^s)^{t^n} &= (a^s)^{t^n} a^s, \\
(aa^t)(aa^t)^{t^n} &= (aa^t)^{t^n} (aa^t) \quad (\text{aplicando } aa^t = a^s \text{ cuatro veces}), \\
(aa^t)(a^t a)^{t^n} &= (a^t a)^{t^n} (aa^t) \quad (\text{aplicando } [a, a^t] = 1 \text{ dos veces}), \\
aa^t a^{t^{n+1}} a^{t^n} &= a^{t^{n+1}} a^{t^n} aa^t \quad (\text{aplicando } [a, a^{t^n}] = 1, \mathbf{C}(\mathbf{n}) \text{ veces}),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
aa^t a^{t^{n+1}} a^{t^n} &= a^{t^{n+1}} aa^t a^{t^n} \quad (\text{aplicando } a^{t^n} = (a^{t^{n-1}})^t \Rightarrow a^{t^n} = (a^{-1} a^{t^{n-1}} a)^t \\
&\Rightarrow a^{t^n} = a^{-t} a^{t^n} a^t \Rightarrow a^{t^n} a^t = a^t a^{t^n}, \mathbf{C}(\mathbf{n} - 1) \text{ veces}),
\end{aligned}$$

$$aa^t a^{t^{n+1}} = a^{t^{n+1}} aa^t,$$

$$\begin{aligned}
aa^{t^{n+1}} a^t &= a^{t^{n+1}} aa^t \quad (\text{aplicando } a^{t^{n+1}} = (a^{t^n})^t \Rightarrow a^{t^{n+1}} = (a^{-1} a^{t^n} a)^t \\
&\Rightarrow a^{t^{n+1}} = a^{-t} a^{t^{n+1}} a^t \Rightarrow a^t a^{t^{n+1}} = a^{t^{n+1}} a^t, \mathbf{C}(\mathbf{n}) \text{ veces}),
\end{aligned}$$

$$aa^{t^{n+1}} = a^{t^{n+1}} a.$$

Luego, $[a, a^{t^{n+1}}] = 1$.

Ahora veamos que $Area[a, a^{t^{n+1}}] = C(n+1)$, para esto sumamos cada costo que aparece en negrilla.

$$\begin{aligned}
C(n+1) &\leq 3C(n) + C(n-1) + 2n + 6 \\
&\leq 3C(n) + C(n-1) + 4n + 6 \leq 3(4^n) + 4^{n-1} + 4 + 6.
\end{aligned}$$

Se puede probar fácilmente por inducción sobre $n \geq 3$ que $4^{n-1} + 4n + 6 < 4^n$.

Por tanto, $C(n+1) \leq 3(4^n) + 4^{n-1} + 4n + 6 < 3(4^n) + 4^n = 4(4^n) = 4^{n+1}$.

□

Para un polinomio $f(x) = \sum_{i=0}^n C_i x^i$ en $\mathbb{Z}[x]$ y letras a, r definamos la palabra

$$\begin{aligned}
[[a]]_r^{f(x)} &= a^{C_0} r^{-1} a^{C_1} r^{-1} a^{C_2} \dots r^{-1} a^{C_n} r^n \\
&= a^{C_0} r^{-1} a^{C_1} r r^{-2} a^{C_2} r^2 r^{-3} \dots r^{n-1} r^n a^{C_n} r^n \\
&= a^{C_0} a^{C_1 r} a^{C_2 r^2} \dots a^{C_n r^n}.
\end{aligned}$$

Notemos que $[[a]]_r^{f(x+1)} = a^{C_0} a^{C_1(r+1)} a^{C_2(r+1)^2} \dots a^{C_n(r+1)^n}$.

Lema 8. Para todo polinomio $f(x) = \sum_{i=0}^n C_i x^i$ que satisface que $\max_i |C_i| \leq C$, $[[a]]_s^{f(x)} = [[a]]_t^{f(x+1)}$ en B y el costo de la igualdad es a lo más $D_C(n) = C^2 4^{n+1}$.

Demostración. Para $C = 0$, el lema es trivial.

Supongamos que $C \geq 1$. Razonemos por inducción sobre n .

Cuando $n = 0$, las palabras son idénticas: $[[a]]_s^f = a^{C_0} = [[a]]_t^f$.

Para el paso de inducción supongamos $n \geq 1$. Sea $\widehat{f}(x) = \sum_{i=1}^n C_i x^{i-1}$ así que $f(x) = C_0 + x \widehat{f}(x)$. Así tenemos que:

$$\begin{aligned}
[[a]]_s^{f(x)} &\stackrel{a)}{=} a^{C_0} a^{C_1 s} a^{C_2 s^2} \dots a^{C_n s^n} = a^{C_0} (a^{C_1} a^{C_2 s} \dots a^{C_n s^{n-1}})^s = a^{C_0} ([[a]]_s^{\widehat{f}(x)})^s \\
&\stackrel{b)}{=} a^{C_0} ([[a]]_t^{\widehat{f}(x+1)})^s \stackrel{c)}{=} a^{C_0} (a^{C_1} a^{C_2(t+1)} \dots a^{C_n(t+1)^{n-1}})^s \\
&= a^{C_0} (a^{C_1 s} a^{C_2(t+1)s} \dots a^{C_n(t+1)^{n-1}s}) \stackrel{d)}{=} a^{C_0} (a^{C_1 s} a^{C_2 s(t+1)} a^{C_3 s(t+1)^2} \dots a^{C_n s(t+1)^{n-1}}) \\
&= a^{C_0} [(a^s)^{C_1} (a^s)^{C_2(t+1)} (a^s)^{C_3(t+1)^2} \dots (a^s)^{C_n(t+1)^{n-1}}] \\
&\stackrel{e)}{=} a^{C_0} [(aa^t)^{C_1} (aa^t)^{C_2(t+1)} (aa^t)^{C_3(t+1)^2} \dots (aa^t)^{C_n(t+1)^{n-1}}] \\
&\stackrel{f)}{=} a^{C_0} [a^{C_1} a^{C_1 t} a^{C_2(t+1)} a^{C_2 t(t+1)} a^{C_3(t+1)^2} a^{C_3 t(t+1)^2} \dots a^{C_n(t+1)^{n-1}} a^{C_n t(t+1)^{n-1}}] \\
&= a^{C_0} [a^{C_1(t+1)} a^{C_2(t+1)(t+1)} a^{C_3(t+1)(t+1)^2} \dots a^{C_n(t+1)(t+1)^{n-1}}] \\
&= a^{C_0} [[a]]_t^{(x+1)\widehat{f}(x+1)} \stackrel{g)}{=} [[a]]_t^{f(x+1)},
\end{aligned}$$

donde

- a) es libremente igual por la definición de $[[a]]_r^f$.
- b) Usando la hipótesis de inducción. Tiene un costo de a lo más $\mathbf{D}_{\mathbf{C}}(\mathbf{n} - 1)$.
- c) Es libremente igual por la definición de $[[a]]_r^{\widehat{f}}$.
- d) Usando la relación $[s, t] = 1$.
 Probamos adicionalmente que $st^k = t^k s$, para todo $k \geq 1$. Veámoslo por inducción en k .
 Para $k = 1$, claramente $st = ts$.
 Supongamos que se tiene para $k - 1$ y veámoslo para k . Entonces
 $st^k = st^{k-1}t \stackrel{\text{hip.ind.}}{=} t^{k-1}st \stackrel{\text{paso } k=1}{=} t^k s$
 Por tanto, vemos que $st^k = t^k s$, para todo $k \geq 1$ con un costo de sólo 1, es decir, sólo se usó la relación $st = ts$ una vez.

Calculemos ahora el costo de llevar c) a d), usando el hecho de que $st^k = t^k s$, para todo $k \geq 1$. Tenemos que realizar los siguientes cálculos:

$$\begin{aligned}
(t+1)s &= ts + s = st + s = s(t+1) && \text{(aplicando } [s, t] = 1 \text{ una vez),} \\
(t+1)^2 s &= (t^2 + 2t + 1)s = t^2 s + 2ts + s && \text{(aplicando } [s, t] = 1 \text{ dos veces),} \\
&= st^2 + s2t + s = s(t^2 + 2t + 1) = s(t+1)^2, \\
(t+1)^3 s &= (t^3 + 3t^2 + 3t + 1)s && \text{(aplicando } [s, t] = 1 \text{ tres veces),} \\
&= t^3 s + 3t^2 s + 3ts + s = st^3 + s3t^2 + s3t + s = s(t+1)^3, \\
(t+1)^4 s &= (t^4 + 4t^3 + 6t^2 + 4t + 1)s && \text{(aplicando } [s, t] = 1 \text{ cuatro veces),} \\
&= t^4 s + 4t^3 s + 6t^2 s + 4ts + s = st^4 + s4t^3 + s6t^2 + s4t + s = s(t+1)^4, \\
&\vdots \\
(t+1)^{n-1} s &= (t^{n-1} + k_{n-2}t^{n-2} + \dots + k_1 t + 1)s && \text{(aplicando } [s, t] = 1, n-1 \text{ veces),} \\
&= t^{n-1} s + k_{n-2}t^{n-2} s + \dots + k_1 t s + s \\
&= st^{n-1} + sk_{n-2}t^{n-2} + \dots + sk_1 t + s \\
&= s(t+1)^{n-1}, && \text{con } k_{n-2}, \dots, k_1 \text{ constantes.}
\end{aligned}$$

Finalmente, obtenemos un costo total equivalente a

$$\sum_{i=1}^{n-1} i = \frac{(n-1)(n-1+1)}{2} = \frac{(n-1)n}{2} = \frac{\mathbf{n}^2 - \mathbf{n}}{2}$$

e) Usando la relación $a^s = aa^t$. El número de veces que se usa es \mathbf{n} veces.

Si sumamos los costos totales obtenidos en d) y e) obtenemos $\frac{n^2-n}{2} + n = \frac{n^2+n}{2}$. Se puede verificar fácilmente por inducción sobre n que $\frac{n^2-n}{2} + n = \frac{n^2+n}{2} \leq 2C^24^n$, es decir, que $n^2 + n \leq C^24^{n+1}$.

f) Veamos que el costo de convertir $(aa^t)^i$ en $a^i a^{it}$, para todo $i \geq 1$ es i^2 .

Usemos inducción sobre i .

Para $i = 1$, se tiene claramente. Supongamos que se cumple para $i - 1$ y veámoslo para i .

$$\begin{aligned} (aa^t)^i &= (aa^t)^{i-1}(aa^t), \\ &= a^{i-1}(a^t)^{i-1}aa^t \quad (\text{aplicando hipótesis inducción } (i-1)^2 \text{ veces}), \\ &= aa \dots a \underbrace{a^t a^t \dots a^t}_{(i-1)\text{-veces}} aa^t, \\ &= aa \dots aa^t a^t \dots aa^t a^t, \\ &= aa \dots aaa^t a^t \dots a^t \quad (\text{aplicando hipótesis inducción } (i-1) \text{ veces}), \\ &= a^i a^{it}. \end{aligned}$$

Entonces, el costo total es $(i-1)^2 + (i-1) = i^2 - 2i + 1 + i - 1 = i^2 - i \leq i^2$.

Ahora veamos cuál es el costo de llevar $f)$ a $g)$ usando el hecho anterior. Tenemos que:

$$(aa^t)^{C_1} = a^{C_1} a^{C_1 t} \quad (\text{costo } C_1^2),$$

$$\begin{aligned} (aa^t)^{C_2(t+1)} &= (aa^t)^{C_2(1+t)} = (aa^t)^{C_2+C_2 t} = (aa^t)^{C_2} (aa^t)^{C_2 t}, \\ &= (aa^t)^{C_2} (a^t a^{t^2})^{C_2} \quad (\text{sin costo alguno, pues } (aa^t)^t = t^{-1} att^{-1} a^t t = a^t a^{t^2}), \\ &= \underbrace{a^{C_2} a^{C_2 t}}_{\text{Costo } C_2^2} \underbrace{a^{C_2 t} a^{C_2 t^2}}_{\text{Costo } C_2^2}, \\ &= a^{C_2(1+t)} a^{C_2 t(1+t)} \quad (\text{costo total } 2C_2^2). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (aa^t)^{C_3(t+1)^2} &= (aa^t)^{C_3(1+t)^2} = (aa^t)^{C_3(1+2t+t^2)} = (aa^t)^{C_3} (aa^t)^{C_3 2t} (aa^t)^{C_3 t^2}, \\ &= (aa^t)^{C_3} (a^t a^{t^2})^{C_3} (a^t a^{t^2})^{C_3} (a^{t^2} a^{t^3})^{C_3}, \\ &= \underbrace{a^{C_3} a^{C_3 t}}_{\text{Costo } C_3^2} \underbrace{a^{C_3 t} a^{C_3 t^2}}_{\text{Costo } C_3^2} \underbrace{a^{C_3 t} a^{C_3 t^2}}_{\text{Costo } C_3^2} \underbrace{a^{C_3 t^2} a^{C_3 t^3}}_{\text{Costo } C_3^2}, \\ &= a^{C_3(1+2t+t^2)} a^{C_3(t+2t^2+t^3)}, \\ &= a^{C_3(1+t)^2} a^{C_3 t(1+t)^2} \quad (\text{costo total } 4C_3^2). \end{aligned}$$

Continuando por inducción, suponemos que para $(aa^t)^{C_{n-1}(t+1)^{n-2}}$ el costo es $2^{n-2}C_{n-1}^2$ y veamos cuál es el costo para $(aa^t)^{C_n(t+1)^{n-1}}$. Tenemos que $(t+1)^{n-1} = \underbrace{(t+1)^{n-2}}_{2^{n-2}} \underbrace{(t+1)}_2 = 2^{n-1}C_n^2$.

Por tanto, el costo total es:

$$\begin{aligned} C_1^2 + 2C_2^2 + 4C_3^2 + \dots + 2^{n-1}C_n^2 &\leq C^2 + 2^1C^2 + \dots + 2^{n-1}C^2 \text{ (pues } \max_i |C_i| \leq C) \\ &= (1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^{n-1})C^2 \\ &= \left(\sum_{i=1}^n 2^{i-1} \right) C^2 \leq \left(\sum_{i=1}^n 2^{i-1} \right)^2 C^2. \end{aligned}$$

Veamos que $(\sum_{i=1}^n 2^{i-1})^2 C^2 \leq C^2 4^n$, mostrando que $(\sum_{i=1}^n 2^{i-1})^2 \leq 4^n, \forall n \geq 1$. Razonemos por inducción sobre n .

Para $n = 1$, se tiene que $1 \leq 4$, lo cual es cierto.

Supongamos que se tiene para $n - 1$, es decir, $(\sum_{i=1}^{n-1} 2^{i-1})^2 \leq 4^{n-1}$ y veamos que se cumple para n .

$$\begin{aligned} \left(\sum_{i=1}^{n-1} 2^{i-1} \right)^2 &\leq 4^{n-1} \Rightarrow \left(2 \sum_{i=1}^{n-1} 2^{i-1} \right)^2 \leq 4^n \\ \Rightarrow 4 \left(\sum_{i=1}^{n-1} 2^{i-1} \right)^2 &\leq 4^n \Rightarrow \left(\sum_{i=1}^{n-1} 2^i \right)^2 \leq 4^n \end{aligned}$$

Así, $[[a]]_t^{f(x+1)}$ tiene un costo total de:

$$D_C(n-1) + \frac{n^2-n}{2} + n + C^2 4^n \leq C^2 4^n + 2C^2 4^n + C^2 4^n = 4C^2 4^n = C^2 4^{n+1}.$$

□

La siguiente proposición combinada con el Lema 7 prueba que la función de Dehn de B admite un límite superior exponencial, y así completamos esta parte de la demostración.

Proposición 8. *Existe $k > 0$ tal que para todo $n \geq 1$, la función de Dehn del grupo Baumslag satisface*

$$\delta(n) \leq k^n \max \{C(i) \mid 0 \leq i \leq 6n\}.$$

Demostración. Tomemos una palabra $w = w(a, s, t)$ con $l(w) = n$ y tal que w representa la identidad en B . Sea

$$\begin{aligned} \rho : \quad B &\longrightarrow \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} = \langle s, t \rangle \\ s &\longmapsto \rho(s) = s, \\ t &\longmapsto \rho(t) = t, \\ a &\longmapsto \rho(a) = 1, \end{aligned}$$

la retracción que surge de eliminar a a . Veamos por Teorema 3 que ρ es extendido a un homomorfismo, esto es que; para todo $h \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, \rho(h) = h$; y como se tiene que $\langle s, t \rangle \subseteq B$ se sigue que $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ hereda las relaciones de B , por tanto basta verificar que se cumple para las relaciones de B .

- $\rho(a^{-1}a^{t^{-1}}aa^t) = \rho(a^{-1}t^{-1}a^{-1}tat^{-1}at) = \rho(a^{-1})\rho(t^{-1})\rho(a^{-1})\rho(t)\rho(a)\rho(t^{-1})\rho(a)\rho(t) = \rho(a)^{-1}\rho(t)^{-1}\rho(a)^{-1}\rho(t)\rho(a)\rho(t)^{-1}\rho(a)\rho(t) = 1t^{-1}1t1t^{-1}1t = 1_{\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}}$.
- $\rho(s^{-1}t^{-1}st) = \rho(s^{-1})\rho(t^{-1})\rho(s)\rho(t) = \rho(s)^{-1}\rho(t)^{-1}\rho(s)\rho(t) = s^{-1}t^{-1}st = 1_{\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}}$.
- $\rho(a^{-s}aa^t) = \rho(s^{-1}a^{-1}sat^{-1}at) = \rho(s^{-1})\rho(a^{-1})\rho(s)\rho(a)\rho(t^{-1})\rho(a)\rho(t) = \rho(s)^{-1}\rho(a)^{-1}\rho(s)\rho(a)\rho(t)^{-1}\rho(a)\rho(t) = s^{-1}1s1t^{-1}1t = 1_{\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}}$.

Podemos suponer que w contiene al menos una letra $a^{\pm 1}$ pues de lo contrario w representaría la identidad en $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} = \langle s, t \rangle$ y así $Area(w) \leq n^2$.

Convertiremos w en sucesivas palabras w_1, w_2, \dots, w_s hasta llegar a la palabra vacía y, sumaremos cada uno de los costos, para obtener así el costo total de llevar la palabra w a la palabra vacía e usando relaciones.

Sea $w = \underbrace{u'_1 a^{\pm 1}}_{u_1} \underbrace{u'_2 a^{\pm 1}}_{u_2} \dots u'_k a^{\pm 1}$, donde $u'_k = u'_k(s, t)$. Después de cada prefijo u_i ,

$1 \leq i \leq k$ que termina en una letra $a^{\pm 1}$ insertamos la palabra $s^{\alpha} t^{\beta} t^{-\beta} s^{-\alpha}$, y además se tiene que:

$$\rho(u_1) = u'_1 a^{\pm 1} = t^{-\beta_1} s^{-\alpha_1}, \rho(u_2) = u'_1 a^{\pm 1} u'_2 a^{\pm 1} = t^{-\beta_1} s^{-\alpha_1} t^{-\beta_2} s^{-\alpha_2}, \dots, \rho(u_k) = t^{-\beta_1} s^{-\alpha_1} \dots t^{-\beta_k} s^{-\alpha_k}.$$

Así tenemos que

$$w_1 = u'_1 a^{\pm 1} s^{\alpha_1} t^{\beta_1} t^{-\beta_1} s^{-\alpha_1} u'_2 a^{\pm 1} s^{\alpha_2} t^{\beta_2} s^{\alpha_1} t^{\beta_1} t^{-\beta_1} s^{-\alpha_1} t^{-\beta_2} s^{-\alpha_2} \dots \dots u'_k a^{\pm 1} s^{\alpha_k} t^{\beta_k} \dots s^{\alpha_1} t^{\beta_1} t^{-\beta_1} s^{-\alpha_1} \dots t^{-\beta_k} s^{-\alpha_k}.$$

Ahora como $l(w) = n$ y $w = uk = \underbrace{t^{-\beta} s^{-\alpha}}_{|\alpha|+|\beta|} a^{\pm 1} k = 1$. Entonces $n = |w| \geq |\alpha| + |\beta|$. Por

tanto, convertir w a w_1 no tiene costos, pues sólo agregamos palabras que representan la identidad en B .

Ahora llevemos w_1 a w_2 . Si

$$\begin{aligned} w_1 &= u'_1 a^{\pm 1} s^{\alpha_1} t^{\beta_1} t^{-\beta_1} s^{-\alpha_1} u'_2 a^{\pm 1} s^{\alpha_2} t^{\beta_2} s^{\alpha_1} t^{\beta_1} t^{-\beta_1} s^{-\alpha_1} t^{-\beta_2} s^{-\alpha_2} \dots \\ &\quad \dots u'_k a^{\pm 1} s^{\alpha_k} t^{\beta_k} \dots s^{\alpha_1} t^{\beta_1} t^{-\beta_1} s^{-\alpha_1} \dots t^{-\beta_k} s^{-\alpha_k} \\ &= t^{-\beta_1} s^{-\alpha_1} a^{\pm 1} s^{\alpha_1} t^{\beta_1} t^{-\beta_1} s^{-\alpha_1} t^{-\beta_2} s^{-\alpha_2} a^{\pm 1} s^{\alpha_2} t^{\beta_2} s^{\alpha_1} t^{\beta_1} t^{-\beta_1} s^{-\alpha_1} t^{-\beta_2} s^{-\alpha_2} \\ &\quad t^{-\beta_3} s^{-\alpha_3} a^{\pm 1} s^{\alpha_3} t^{\beta_3} s^{\alpha_2} t^{\beta_2} s^{\alpha_1} t^{\beta_1} t^{-\beta_1} s^{-\alpha_1} t^{-\beta_2} s^{-\alpha_2} t^{-\beta_3} s^{-\alpha_3} \dots t^{-\beta_k} s^{-\alpha_k} a^{\pm 1} s^{\alpha_k} t^{\beta_k} \dots t^{-\beta_k} s^{-\alpha_k} \\ &\quad (\text{usando la relación } [s, t] = 1) \\ &= t^{-\beta_1} s^{-\alpha_1} a^{\pm 1} s^{\alpha_1} t^{\beta_1} t^{-\beta_1} t^{-\beta_2} s^{-\alpha_1} s^{-\alpha_2} a^{\pm 1} s^{\alpha_2} s^{\alpha_1} t^{\beta_2} t^{\beta_1} t^{-\beta_1} t^{-\beta_2} t^{-\beta_3} s^{-\alpha_1} s^{-\alpha_2} s^{-\alpha_3} \\ &\quad a^{\pm 1} s^{\alpha_1} s^{\alpha_2} s^{\alpha_3} t^{\beta_1} t^{\beta_2} t^{\beta_3} \dots t^{-\beta_1} t^{-\beta_2} \dots t^{-\beta_k} s^{-\alpha_1} s^{-\alpha_2} \dots s^{-\alpha_k} a^{\pm 1} s^{\alpha_1} s^{\alpha_2} \dots s^{\alpha_k} t^{\beta_1} t^{\beta_2} \dots t^{\beta_k} \\ &\quad (\text{sumando exponentes}) \\ &= t^{-\beta_1} s^{-\alpha_1} a^{\pm 1} s^{\alpha_1} t^{\beta_1} t^{-(\beta_1+\beta_2)} s^{-(\alpha_1+\alpha_2)} a^{\pm 1} s^{(\alpha_1+\alpha_2)} t^{(\beta_1+\beta_2)} t^{-(\beta_1+\beta_2+\beta_3)} s^{-(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)} \\ &\quad a^{\pm 1} s^{(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)} t^{(\beta_1+\beta_2+\beta_3)} \dots t^{-(\beta_1+\beta_2+\dots+\beta_k)} s^{-(\alpha_1+\alpha_2+\dots+\alpha_k)} a^{\pm 1} s^{(\alpha_1+\alpha_2+\dots+\alpha_k)} t^{(\beta_1+\beta_2+\dots+\beta_k)} \\ &\quad (\text{usando definición } x^y = y^{-1}xy) \\ &= a^{\epsilon_1 s^{\alpha_1} t^{\beta_1}} a^{\epsilon_2 s^{\alpha_1+\alpha_2} t^{\beta_1+\beta_2}} a^{\epsilon_3 s^{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3} t^{\beta_1+\beta_2+\beta_3}} \dots a^{\epsilon_k s^{\alpha_1+\dots+\alpha_k} t^{\beta_1+\dots+\beta_k}}. \end{aligned}$$

Por tanto, $w_2 = \prod_{i=1}^k a^{\epsilon_i s^{\alpha_i} t^{\beta_i}}$, donde $\epsilon_i = \pm 1, |\alpha_i| + |\beta_i| \leq n, k \leq n$.

El costo de llevar w_1 a w_2 usando la relación $[s, t] = 1$ es:

$$1 + 1 + 2 + 2 + 3 + 3 + \dots + k + k = 2 \sum_{i=1}^k i = 2 \binom{k(k+1)}{2} = k(k+1)$$

pero, $k^2 + k \leq n^2 + n$.

Adicionalmente, $u'_i = u'_i(s, t)$, $1 \leq i \leq k$, se debe llevar a una palabra de la forma $u'_i = t^{-\beta_i} s^{-\alpha_i}$ usando la relación $[s, t] = 1$. Por tanto, el número de veces que se usa depende de $|\alpha_i|$ y $|\beta_i|$, de donde, el costo es $\max\{|\alpha_i|, |\beta_i|\} < |\alpha_i| + |\beta_i| \leq n \leq n^2$.

Finalmente, tenemos que el costo total de llevar w_1 a w_2 es a lo más

$$n^2 + n + n^2 = 2n^2 + n \leq \mathbf{2n^3}.$$

Lo cual se prueba fácilmente usando inducción.

Ahora, como

$$\begin{aligned} w_2 &= \prod_{i=1}^k a^{\epsilon_i s^{\alpha_i} t^{\beta_i}} \\ &= a^{\epsilon_1 s^{\alpha_1} t^{\beta_1}} a^{\epsilon_2 s^{\alpha_2} t^{\beta_2}} \dots a^{\epsilon_k s^{\alpha_k} t^{\beta_k}} \quad (\text{usando el Lema 8 de la presente sección}) \\ &= \left[[a^{s^{\alpha_i}}]_t \right]^f \quad (\text{con } f(x) = x^{\beta_i}). \end{aligned}$$

Pero esto supone que cada α_i es no negativo, lo cual no podría ocurrir. Para solucionar esto, tomemos $\alpha := \min \alpha_i$. Entonces $0 \leq \alpha_i - \alpha \leq 2n$, para todo i y en lugar de continuar transformando a w_2 trabajaremos con $w_2^{s^{-\alpha}}$. Podemos hacer esto porque en cualquier grupo finitamente presentado el área de la palabra v que representa la identidad es la misma que la de v^u para cualquier palabra u . Así,

$$\begin{aligned} w_2^{s^{-\alpha}} &= (a^{\epsilon_1 s^{\alpha_1} t^{\beta_1}} a^{\epsilon_2 s^{\alpha_2} t^{\beta_2}} \dots a^{\epsilon_k s^{\alpha_k} t^{\beta_k}})^{s^{-\alpha}} \\ &= s^{\alpha} t^{-\beta_1} s^{-\alpha_1} a^{\epsilon_1} s^{\alpha_1} t^{\beta_1} s^{-\alpha} s^{\alpha} t^{-\beta_2} s^{-\alpha_2} a^{\epsilon_2} s^{\alpha_2} t^{\beta_2} s^{-\alpha} \dots s^{\alpha} t^{-\beta_k} s^{-\alpha_k} a^{\epsilon_k} s^{\alpha_k} t^{\beta_k} s^{-\alpha} \\ &= t^{-\beta_1} s^{-(\alpha_1 - \alpha)} a^{\epsilon_1} t^{\beta_1} s^{(\alpha_1 - \alpha)} t^{-\beta_2} s^{-(\alpha_2 - \alpha)} a^{\epsilon_2} t^{\beta_2} s^{(\alpha_2 - \alpha)} \dots t^{-\beta_k} s^{-(\alpha_k - \alpha)} a^{\epsilon_k} t^{\beta_k} s^{(\alpha_k - \alpha)}. \end{aligned}$$

Por tanto, $w_3 = \prod_{i=1}^k a^{\epsilon_i s^{\alpha_i - \alpha} t^{\beta_i}}$.

El costo total de convertir w_2 en w_3 usando $st = ts$ es de:

$$2k \leq 2n \leq 2n^2 \leq \mathbf{2n^3}.$$

Podemos ahora aplicarle a w_3 el Lema 8 de la presente sección, dado que cada $\alpha_i - \alpha \geq 0$. Esto convierte cada $[[a]]_s^{x^j}$, $j = \alpha_i - \alpha$, para todo i ; en w_3 , a $[[a]]_t^{(1+x)^j}$ y así producir a

$$w_4 = \prod_{i=1}^k \left([[a]]_t^{(1+x)^{\alpha_i - \alpha}} \right)^{\epsilon_i t^{\beta_i}}.$$

Con un costo total de $D_1(\alpha_i - \alpha) \leq nD_1(\alpha_i - \alpha) \leq \mathbf{nD_1(2n)}$.

Ahora reescribamos a w_4 para determinar a quien es libremente igual.

$$\begin{aligned} w_4 &= \left([[a]]_t^{(1+x)^{\alpha_1 - \alpha}} \right)^{\epsilon_1 t^{\beta_1}} \left([[a]]_t^{(1+x)^{\alpha_2 - \alpha}} \right)^{\epsilon_2 t^{\beta_2}} \dots \left([[a]]_t^{(1+x)^{\alpha_k - \alpha}} \right)^{\epsilon_k t^{\beta_k}} \\ &= \left(a^{\binom{j_1}{0}} a^{\binom{j_1}{1}(1+t)} \dots a^{\binom{j_1}{j_1}(1+t)^{j_1}} \right)^{\epsilon_1 t^{\beta_1}} \left(a^{\binom{j_2}{0}} a^{\binom{j_2}{1}(1+t)} \dots a^{\binom{j_2}{j_2}(1+t)^{j_2}} \right)^{\epsilon_2 t^{\beta_2}} \dots \\ &\quad \dots \left(a^{\binom{j_k}{0}} a^{\binom{j_k}{1}(1+t)} \dots a^{\binom{j_k}{j_k}(1+t)^{j_k}} \right)^{\epsilon_k t^{\beta_k}} \quad (\text{usando la definición } [[a]]_r^{f(x)}), \end{aligned}$$

donde $j_i = \alpha_i - \alpha$.

a) Si contamos el número de términos l en w_4 , obtenemos que cada factor tiene

$$\begin{aligned} (\alpha_1 - \alpha + 1) + \dots + (\alpha_k - \alpha + 1) &= (\alpha_1 - \alpha) + \dots + (\alpha_k - \alpha) + (1 + \dots + 1) \\ &\leq k2n + k \quad (\text{pues } \alpha_i - \alpha \leq 2n) \\ &= k(2n + 1) \\ &\leq n(2n + 1). \end{aligned}$$

b) Ahora,

$$w_4 = a^{\epsilon_1 \binom{j_1}{0} t^{\beta_1}} a^{\epsilon_1 \binom{j_1}{1} (1+t) t^{\beta_1}} \dots a^{\epsilon_1 \binom{j_1}{j_1} (1+t)^{j_1} t^{\beta_1}} \dots a^{\epsilon_k \binom{j_k}{0} t^{\beta_k}} a^{\epsilon_k \binom{j_k}{1} (1+t) t^{\beta_k}} \dots a^{\epsilon_k \binom{j_k}{j_k} (1+t)^{j_k} t^{\beta_k}}$$

Pero tenemos que cada j_i está entre $1 \leq j_i \leq 2n$ y que el mayor coeficiente $\binom{j_i}{i}$ se obtiene cuando $j_i = 2n$ y $i = n$.

$$\text{Así que, } \binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{n!(2n-n)!} = \frac{(2n)(2n-1)\dots(n+1)n!}{n!\dots n!} = \frac{2n2n-1\dots n+1}{nn-1\dots 1}.$$

Se verifica fácilmente por inducción sobre n que $\frac{2n2n-1\dots n+1}{nn-1\dots 1} \leq 2^{2n}$.

Por tanto, $\max \left\{ \binom{j}{i} / 1 \leq j \leq 2n, 0 \leq i \leq j \right\} \leq 2^{2n}$.

c) Ahora contemos el exponente de los t . Tenemos que:

$$\begin{aligned} (1+t)^{j_i} t^{\beta_i} &= \left(1 + \binom{j_1}{1} t + \dots + \binom{j_i}{j_i} t^{j_i} \right) t^{\beta_i} \\ &= t^{\beta_i} + \binom{j_1}{1} t^{1+\beta_i} + \dots + \binom{j_i}{j_i} t^{j_i+\beta_i}. \end{aligned}$$

Pero $j_i + \beta_i = \alpha_i - \alpha + \beta_i \leq 2n + n = 3n$, pues $|\alpha_i - \alpha| \leq 2n$ y $|\beta_i|$.

Luego $\max_i (\alpha_i - \alpha + \beta_i) \leq 3n$.

Por tanto, podemos escribir a w_4 como w_5 , así:

$$w_5 = \prod_{i=1}^l a^{u_i t^{\sigma_i}},$$

donde, $l \leq (2n + 1)n$, por parte a)

$|u_i| \leq \max \left\{ \binom{j}{i} / 1 \leq j \leq 2n, 0 \leq i \leq j \right\} \leq 2^{2n}$, por parte b) y u_i aparece en valor absoluto por el hecho de que $\epsilon_i = \pm 1$.

$|\sigma_i| \leq \max_i (\alpha_i - \alpha + \beta_i) \leq 3n$, por parte c).

Ahora, w_5 representa la identidad en el subgrupo $\langle a, t \rangle = \mathbb{Z} \wr \mathbb{Z} = \left\langle a, t / [a, a^{t^k}] = 1, k \in \mathbb{Z} \right\rangle$ pues w_5 representa la identidad en B , $\mathbb{Z} \wr \mathbb{Z} \subseteq B$ y $w_5 = w_5(a, t)$.

Además, w_5 es libremente igual al producto de a lo más $2^{2n}(2n + 1)n$ términos de la forma $a^{\pm t^j}$ en el que $|j| \leq 3n$.

Ahora si reordenamos estos términos para unir aquellos en los que la potencia de t coincide, con el fin de eliminarlos entre sí y llegar a la palabra vacía, tenemos que al realizar cada movimiento usando la relación $[a, a^{t^i}]$ con $0 \leq i \leq 3n \leq 6n$ para reordenar los términos lo hacemos con un costo de a lo más $(2^{2n}(2n + 1)n)^2$, así

$$w_5 = \underbrace{a^{u_1 t^{\sigma_1}} a^{u_2 t^{\sigma_2}} \dots a^{u_l t^{\sigma_l}}}_{2^{2n}(2n+1)n \text{ términos}}$$

Si quisiéramos mover el término $a^{u_i t^{\sigma_i}}$ al final tendríamos que usar el conmutador $[a, a^{t^i}]$ a lo más $2^{2n}(2n+1)n$ veces y si hacemos esto con cada término tendríamos un total de movimientos de a lo más

$$(2^{2n}(2n+1)n)^2 \max \{C(i)/0 \leq i \leq 6n\},$$

donde $C(i) = \text{Area}[a, a^{t^i}]$ por Lema 7 de la presente sección.

Sumando todos los costos estimados que aparecen en negrilla en cada paso, tenemos que:

$$\begin{aligned} \delta(n) &\leq 2n^3 + 2n^3 + nD_1(2n) + (2^{2n}(2n+1)n)^2 \max \{C(i)/0 \leq i \leq 6n\} \\ &= 4n^3 + n4^{2n+1} + 4^{2n}(2n+1)^2 n^2 \max \{C(i)/0 \leq i \leq 6n\} \quad \text{Por Lema 8} \\ &= 4n^3 + 4n4^{2n} + 4^{2n}(4n^2 + 4n + 1)n^2 \max \{C(i)/0 \leq i \leq 6n\} \\ &\leq 4^{2n}4n + 4n4^{2n} + 4^{2n}(4n^4 + 4n^3 + n^2) \max \{C(i)/0 \leq i \leq 6n\} \\ &\quad \text{(Se prueba por inducción sobre } n \text{ que } n^2 \leq 4^{2n}) \\ &= 4^{2n}(4n + 4n + 4n^4 + 4n^3 + n^2) \max \{C(i)/0 \leq i \leq 6n\} \\ &= 4^{2n}(8n + 4n^4 + 4n^3 + n^2) \max \{C(i)/0 \leq i \leq 6n\} \\ &\quad \text{(Se prueba por inducción sobre } n \text{ que } 8n + 4n^4 + 4n^3 + n^2 \leq 4^{n+2}) \\ &\leq 4^{2n}4^{n+2} \max \{C(i)/0 \leq i \leq 6n\} \\ &= 4^{3n+2} \max \{C(i)/0 \leq i \leq 6n\}. \end{aligned}$$

Que era lo que se quería probar. □

2.4. GRUPO LAMPLIGHTER

En esta sección describiremos en forma geométrica el grupo Lamplighter, daremos una presentación para el grupo y la forma normal de sus elementos. Además mostraremos que existe un embebimiento cuasi-isométrico entre cualquier dos grupos Lamplighter.

Sabemos que el producto espiral $\mathbb{Z}_2 \wr \mathbb{Z}$, es el producto semidirecto dado por:

$$\begin{aligned} \mathbb{Z}_2 \wr \mathbb{Z} &= (\oplus_{i \in \mathbb{Z}} \mathbb{Z}_2) \rtimes \mathbb{Z} \\ &= (\dots \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus \dots) \rtimes \mathbb{Z} \end{aligned}$$

La suma directa infinita tiene como elementos \mathbb{Z} -étuplas de elementos de \mathbb{Z}_2 , sólo un número finito de los cuales se les permite ser diferente de cero.

Este producto espiral de grupos es llamado el **grupo Lamplighter**, por razones que se aclararán más adelante, y es denotado L_2 . Por conveniencia, llamaremos al subgrupo de L_2 , dado por $\oplus_{i \in \mathbb{Z}} \mathbb{Z}_2 := A$. Dado que un elemento de A es determinado por (número finito) entradas que tienen elementos diferentes de cero, podemos representar los elementos de A como un subconjunto finito de enteros. El conjunto vacío podría corresponder al elemento identidad, $\bar{0} = (\dots, 0, 0, 0, \dots) \in A$. La operación binaria en A es concordante con la adición en \mathbb{Z}_2 . Viendo los elementos de A como subconjuntos de \mathbb{Z} , vemos que dicha operación corresponde a la diferencia simétrica.

Recordemos que, $S\Delta T = \{n \in \mathbb{Z}/n \in S \vee n \in T \text{ pero } n \notin S \cap T\}$.

Así cada elemento en L_2 puede ser representado por un par ordenado $[S, n]$ donde S es un subconjunto de enteros y $n \in \mathbb{Z}$. La operación binaria está dada por:

$$[S, n] \cdot [T, m] = [S\Delta(T + n), n + m]$$

donde $T + n = \{t + n/t \in T\}$.

Veamos que L_2 con esta operación es un grupo.

Verifiquemos asociatividad.

Sean $[S, n], [T, m], [R, l] \in L_2$, donde S, T, R son conjuntos de enteros y $n, m, l \in \mathbb{Z}$. Veamos que $([S, n] \cdot [T, m]) \cdot [R, l] = [S, n] \cdot ([T, m] \cdot [R, l])$. Tenemos que,

$$\begin{aligned} ([S, n] \cdot [T, m]) \cdot [R, l] &= [S\Delta(T + n), n + m] \cdot [R, l] \\ &= [\{S\Delta(T + n)\} \Delta(R + n + m), n + m + l]. \end{aligned}$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned} [S, n] \cdot ([T, m] \cdot [R, l]) &= [S, n] \cdot [T\Delta(R + m), m + l] \\ &= [S\Delta\{(T\Delta(R + m)) + n\}, m + l + n], \quad \text{por propiedades de } \Delta \\ &= [S\Delta\{(T + n)\Delta(R + m + n)\}, m + l + n]. \end{aligned}$$

Que claramente son iguales por la asociatividad de la diferencia simétrica y la conmutatividad de los números enteros.

El elemento identidad es $[\phi, 0]$. Se tiene que para todo $[S, n] \in L_2$,

$$\begin{aligned} [S, n] \cdot [\phi, 0] &= [S\Delta(\phi + n), n + 0] = [S\Delta n, n] = [S, n] \\ [\phi, 0] \cdot [S, n] &= [\phi\Delta(S + 0), n + 0] = [S, n] \end{aligned}$$

El inverso de $[S, n]$ es $[S, -n]$. Dado que,

$$[S, n] \cdot [S, -n] = [S\Delta S + n, n - n] = [S\Delta S, 0] = [\phi, 0], \quad (\text{por propiedades de } \Delta)$$

En forma análoga para $[S, -n] \cdot [S, n] = [\phi, 0]$

Como el subgrupo $A < L_2$ es una suma directa infinita, el siguiente lema puede parecer sorprendente.

Lema 9. *El grupo Lamplighter L_2 puede ser generado por dos elementos, uno de orden 2 y el otro de orden infinito.*

Demostración. Sea t el elemento correspondiente a $[\phi, 1] \in L_2$ y sea a el correspondiente a $[\{0\}, 0] \in L_2$. La acción φ de \mathbb{Z} en A puede ser descrita al notar que $\varphi(1) \in \text{Aut}(A)$ tiene el efecto de sumar 1 a cada coordenada. Así,

$$ta = [\phi, 1] \cdot [\{0\}, 0] = [\phi\Delta\{1\}, 1 + 0] = [\{1\}, 1]$$

y más generalmente,

$$t^n a = [\phi, n] \cdot [\{0\}, 0] = [\phi \Delta \{n\}, n + 0] = [\{n\}, n], \forall n \in \mathbb{Z}.$$

Por tanto,

$$t^n a t^{-n} = [\{n\}, n] \cdot [\phi, -n] = [\{n\} \Delta \phi + n, n + (-n)] = [\{n\}, 0].$$

Se sigue que un elemento arbitrario del subgrupo A puede ser expresado como:

$$[\{n_1, n_2, \dots, n_m\}, 0] = t^{n_1} a t^{-n_1} t^{n_2} a t^{-n_2} \dots t^{n_m} a t^{-n_m}$$

Además, un elemento de L_2 puede ser expresado como:

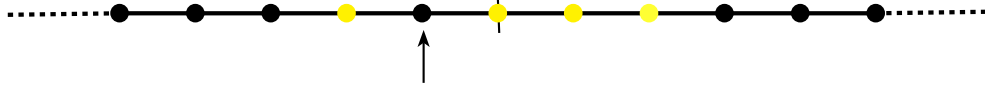
$$[\{n_1, n_2, \dots, n_m\}, k] = t^{n_1} a t^{-n_1} t^{n_2} a t^{-n_2} \dots t^{n_m} a t^{-n_m} t^k$$

Por tanto, el conjunto $\{a, t\}$ es un conjunto generador del grupo Lamplighter pues cualquier elemento lo podemos expresar en términos de t y a . \square

2.4.1. Descripción geométrica

Siguiendo una perspectiva geométrica explicaremos porqué este es llamado el grupo Lamplighter.

Sabemos que un elemento arbitrario de L_2 puede ser expresado como $[\{n_1, n_2, \dots, n_m\}, k]$. Pensando geoméricamente, tomemos el grafo de Cayley de \mathbb{Z} y coloreemos los vértices correspondientes a $\{n_1, n_2, \dots, n_m\}$ de amarillo, todos los otros vértices de negro y agreguemos un puntero señalando el vértice asociado a k . Como en la siguiente figura:



El vértice central corresponde al elemento identidad en \mathbb{Z} , así este elemento de L_2 es $[\{-2, 0, 1, 2\}, -1]$.

Nos referiremos a tal gráfico como la pintura de un elemento. Así, la pintura del elemento identidad consiste de todos los vértices negros con el puntero señalando el cero.

Representación gráfica

Si queremos estudiar la representación gráfica del grupo L_2 con respecto al conjunto de generadores $\{a, t\}$, necesitamos determinar los efectos de multiplicar a derecha por un a ó un t . Si $g = [S, k]$ es un elemento arbitrario de L_2 , entonces:

Multiplicar a derecha por a :

$$ga = [S, k]a = [S, k] \cdot [\{0\}, 0] = [S \Delta \{k\}, k + 0] = [\widehat{S}, k],$$

donde $\widehat{S} \begin{cases} \text{o agrega } k \text{ a } S \text{ (si el vértice en la posición } k \text{ fue coloreado de negro).} \\ \text{o remueve } k \text{ de } S \text{ (si el vértice en la posición } k \text{ fue coloreado de amarillo).} \end{cases}$

Por tanto, en términos de la pintura de elementos, multiplicar a derecha un elemento arbitrario por a tiene el efecto de cambiar el color del vértice que el puntero está señalando.

Multiplicar a derecha por t :

$$gt = [S, k]t = [S, k] \cdot [\phi, 1] = [S, k + 1]$$

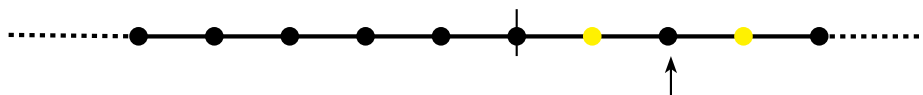
que simplemente, mueve el puntero una unidad a la derecha. Similarmente, multiplicar a derecha por t^{-1} mueve el puntero una unidad a la izquierda.

Ahora estamos en condiciones de explicar intuitivamente lo que pasa en las pinturas de los elementos de L_2 .

Nosotros tenemos “lámparas encendidas” en todas las posiciones donde existen entradas diferentes de cero en la suma directa infinita de copias de \mathbb{Z}_2 , todas las otras lámparas están “apagadas” y nuestro “farolero” está estacionado en la posición k .

Multiplicar a derecha por a tiene el efecto de encender o apagar la lámpara donde el farolero esta estacionado; multiplicar a derecha por t o t^{-1} mueve el farolero a la derecha o a la izquierda.

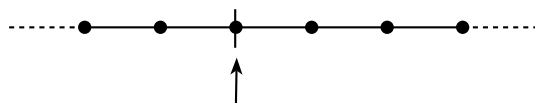
El uso de estas pinturas hace simple el expresar un elemento arbitrario en términos de los generadores. Tomemos por ejemplo el elemento de L_2 que se muestra en la figura.



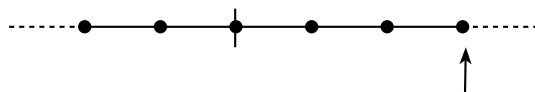
y el cual puede ser expresado como $t^3at^{-2}at$ ó tat^2at^{-1} .

Para crear el elemento correspondiente a la pintura, podemos proceder así:

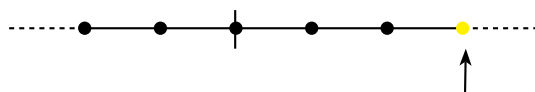
1. Partimos de la identidad.



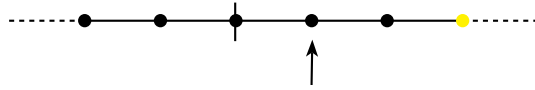
2. Mover el farolero 3 unidades a la derecha (Multiplicar identidad por t^3 a la derecha).



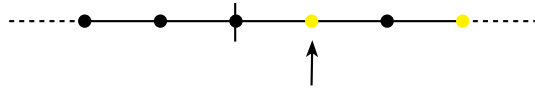
3. Encender la lámpara en $x = 3$ (Multiplicar t^3 por a a la derecha).



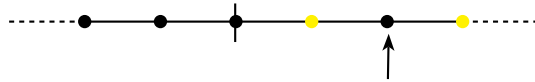
4. Mover el farolero 2 unidades a la izquierda (Multiplicar t^3a por t^{-2} a la derecha).



5. Encender la lámpara en $x = 1$ (Multiplicar t^3at^{-2} por a a la derecha).



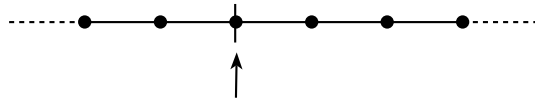
6. Mover el farolero una unidad a la derecha (Multiplicar $t^3at^{-2}a$ por t a la derecha).



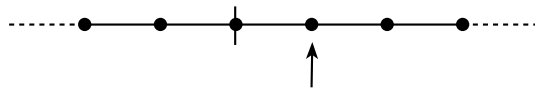
Este procedimiento muestra que estos elementos pueden ser expresados como $t^3at^{-2}at$.

Por supuesto, existe otro camino que podría expresar este elemento en particular. Por ejemplo, podríamos seguir un procedimiento diferente. Veamos,

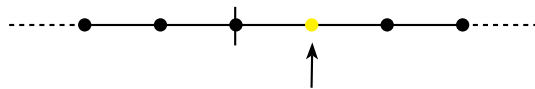
1. Partimos de la identidad.



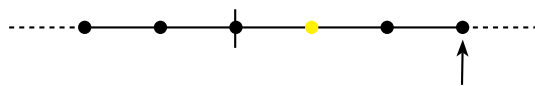
2. Mover el farolero una unidad a la derecha (Multiplicar la identidad por t a la derecha).



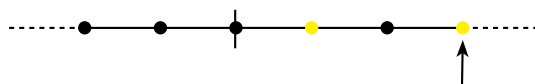
3. Encender la lámpara en $x = 1$ (Multiplicar t por a a la derecha).



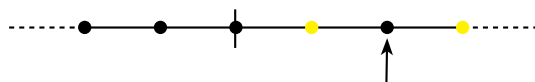
4. Mover el farolero 2 unidades a la derecha (Multiplicar ta por t^2 a la derecha).



5. Encender la lámpara en $x = 3$ (Multiplicar tat^2 por a a la derecha).



6. Mover el farolero una unidad a la izquierda (Multiplicar tat^2a por t^{-1} a la derecha).



De esta forma vemos que el mismo elemento puede ser expresado como tat^2at^{-1} .

En otras palabras, $t^3at^{-2}at = tat^2at^{-1}$ en L_2 .

2.4.2. Forma normal

Una palabra $w \in L_2$ es representada por una configuración de bombillas y la ubicación final del farolero. Esta ubicación final del cursor es computada fácilmente, si w está escrita en términos de los generadores a y t en la presentación dada, la posición final del cursor es justo la suma de exponentes de t .

Comenzamos nuestra descripción de la forma normal de L_2 definiendo $a_k = t^k a t^{-k}$. Dada una cadena infinita de bombillos todos apagados, vemos que a_n mueve el cursor a la n -ésima bombilla, la enciende y retorna el cursor al origen. Es claro, entonces, que los términos en a_n tal y como se definieron conmutan. Repetidas ocurrencias de a_n se cancelan en pares, es decir, corresponden a encender la bombilla y luego apagarla.

En un producto de los generadores a, t , podemos simplemente mover todos los términos t al final de la palabra, cambiando las ocurrencias de a al apropiado a_k da una palabra de la forma:

$$a_{i_1} a_{i_2} \dots a_{i_k} t^m,$$

donde $i_n \in \mathbb{Z}, 1 \leq n \leq k$. Dado que los a_{i_n} conmutan podemos ordenarlos como escojamos. Consideremos 2 posibles formas normales para una palabra $w \in L_2$, separando la palabra en partes cuyas correspondientes bombillas estén indexadas por enteros negativos o no negativos.

Forma a derecha: $rf(w) = a_{i_1} a_{i_2} \dots a_{i_k} a_{-j_1} a_{-j_2} \dots a_{-j_l} t^m$

Forma a izquierda: $lf(w) = a_{-j_1} a_{-j_2} \dots a_{-j_l} a_{i_1} a_{i_2} \dots a_{i_k} t^m$

Con $i_k > \dots > i_2 > i_1 \geq 0$ y $j_l > \dots > j_2 > j_1 > 0$.

En la forma a derecha, $rf(w)$, el cursor se mueve primero a la derecha del origen, encendiendo las bombillas apropiadamente, luego el cursor regresa al origen y comienza a moverse hacia la izquierda del origen encendiendo las bombillas apropiadas en esta dirección. Finalmente el cursor se desplaza a su ubicación final.

En la forma a izquierda, $lf(w)$, es similar, pero en lugar de en un principio ir a la derecha, el cursor comienza a moverse hacia la izquierda y viceversa.

Una o ambas posibilidades de estas formas normales dará lugar a una representación de longitud mínima de w , dependiendo de la ubicación final del cursor en relación con el extremo positivo o negativo de las bombillas iluminadas.

Debemos probar ahora que dicha forma normal es única. Lo veremos para la forma a derecha y en forma análoga se satisface para la forma normal a izquierda.

Supongamos que, $a_{i_1} a_{i_2} \dots a_{i_k} a_{-j_1} a_{-j_2} \dots a_{-j_l} t^m = a_{i'_1} a_{i'_2} \dots a_{i'_t} a_{-j'_1} a_{-j'_2} \dots a_{-j'_r} t^n$.

Entonces, $a_{i_1} a_{i_2} \dots a_{i_k} a_{-j_1} a_{-j_2} \dots a_{-j_l} t^m t^{-n} a_{-j'_r}^{-1} \dots a_{-j'_2}^{-1} a_{-j'_1}^{-1} a_{i'_t}^{-1} \dots a_{i'_2}^{-1} a_{i'_1}^{-1} = 1$.

Pero podemos llevar todos los términos t para el final,

$$a_{i_1} a_{i_2} \dots a_{i_k} a_{-j_1} a_{-j_2} \dots a_{-j_l} a_{-j'_r}^{-1} \dots a_{-j'_2}^{-1} a_{-j'_1}^{-1} a_{i'_t}^{-1} \dots a_{i'_2}^{-1} a_{i'_1}^{-1} t^{m-n} = 1.$$

Pero sabemos que $a^{-1} = a$ pues $a^2 = 1$ entonces,

$$a_{i_1} a_{i_2} \dots a_{i_k} a_{-j_1} a_{-j_2} \dots a_{-j_l} a_{-j'_r} \dots a_{-j'_2} a_{-j'_1} a_{i'_t} \dots a_{i'_2} a_{i'_1} t^{m-n} = 1.$$

Pero si la relación es igual a la identidad es porque todas las bombillas están apagadas y el farolero se encuentra en el origen y para que esto suceda se debe cumplir lo siguiente, $i_1 = i'_1, i_2 = i'_2, \dots, i_k = i'_t, j_1 = j'_1, j_2 = j'_2, \dots, j_l = j'_r$, esto para que las bombillas se enciendan inicialmente y luego se apaguen y $m = n$ para que el farolero quede en el origen.

Así concluimos que la forma normal es única.

Calcularemos ahora la longitud de una palabra en L_2 .

Definición. Dada una palabra $w \in L_2$, en su forma normal derecha o izquierda dada anteriormente, (si no lo está, se lleva a alguna de estas dos formas) definimos,

$$D(w) = k + l + \min \{2j_l + i_k + |m - i_k|, 2i_k + j_l + |m + j_l|\}$$

Geoméricamente, $D(w)$ es la suma de las distintas cantidades relacionadas a la pintura del elemento w , el número de bombillas que están encendidas, 2 veces la distancia de la bombilla más alejada del origen en una dirección, la distancia de la bombilla más alejada del origen en la otra dirección y la distancia de la posición final del cursor de la bombilla iluminada más alejada en la segunda dirección.

Comenzaremos probando que en L_2 , la cantidad $D(w)$ es exactamente la longitud de la palabra w con respecto al conjunto generador $\{a, t\}$.

Proposición 9. Sea L_2 generado por a y t . La longitud de la palabra $w \in L_2$ con respecto al conjunto generador $\{a, t\}$ está dada por $D(w)$.

Esta proposición se demuestra haciendo uso de los siguientes lemas.

Lema 10. La longitud de una palabra $w \in L_2$ con respecto al conjunto de generadores $\{a, t\}$ es a lo más $D(w)$.

Demostración. Escribamos a w en la forma normal a derecha citada anteriormente, así:

$$w = a_{i_1} a_{i_2} \dots a_{i_k} a_{-j_1} a_{-j_2} \dots a_{-j_l} t^m.$$

Reescribimos a w , usando la definición $a_k = t^k a t^{-k}$, de la siguiente manera,

$$w = t^{i_1} a t^{-i_1} t^{i_2} a t^{-i_2} \dots t^{-i_{k-1}} t^{i_k} a t^{-i_k} t^{-j_1} a t^{j_1} t^{-j_2} a t^{j_2} \dots t^{j_{l-1}} t^{-j_l} a t^{j_l} t^m.$$

Sumando potencias tenemos que,

$$w = t^{i_1} a t^{i_2 - i_1} a \dots t^{i_k - i_{k-1}} a t^{-(i_k + j_1)} a t^{-(j_2 - j_1)} a \dots t^{-(j_l - j_{l-1})} a t^{m + j_l}.$$

Note que realizando las cancelaciones adyacentes de potencias opuestas de t , $i_1 + i_2 - i_1 + i_3 - i_2 + \dots + i_k - i_{k-1} + i_k + j_1 + j_2 - j_1 + j_3 - j_2 + \dots + j_l - j_{l-1}$, obtenemos que la expresión para w tiene $k + l$ ocurrencias de a y $2i_k + j_l + |m + j_l|$ ocurrencias de t .

Similarmente, usando la forma normal a izquierda,

$$w = a_{-j_1} a_{-j_2} \dots a_{-j_l} a_{i_1} a_{i_2} \dots a_{i_k} t^m.$$

Se tendría,

$$w = t^{-j_1} a t^{-(j_2 - j_1)} a \dots t^{-(j_l - j_{l-1})} a t^{j_l + i_1} a t^{i_2 - i_1} a \dots t^{i_k - i_{k-1}} a t^{m - i_k},$$

que tiene $k + l$ ocurrencias de a y $2j_l + i_k + |m - i_k|$ ocurrencias de t .

Esto acota la longitud de w por encima en $D(w)$. \square

Lema 11. *La longitud de una palabra $w \in L_2$ con respecto al conjunto de generadores $\{a, t\}$ es al menos $D(w)$.*

Demostración. Para obtener una cota inferior en $|w|$, vemos a w geoméricamente como una colección de bombillas que están encendidas y el cursor en una posición final $m \in \mathbb{Z}$. Debemos relacionar esta pintura con el mínimo número de generadores a y t necesarios para crearla.

Si w tiene n bombillas que están encendidas, entonces una longitud minimal representativa para w podría contener por lo menos n ocurrencias del generador $a = a^{-1}$, una ocurrencia por bombilla que esté encendida. Si w está escrita en cualquiera de las formas normales dadas anteriormente, entonces $n = k + l$.

Cuando contamos el total de ocurrencias del generador t en una representación minimal para w , primero consideramos palabras con bombillas iluminadas a ambos lados (positivo y negativo). Recordando que el exponente suma de t da la posición final del cursor, consideramos el exponente suma parcial en t para una longitud minimal representativa de w . Por ejemplo, en el momento que la bombilla a la derecha en la posición i_k está encendida, el exponente suma del generador t en el prefijo debe ser i_k . Similarmente cuando una bombilla a la izquierda en posición $-j_l$ está encendida, el exponente suma de t debe ser $-j_l$. Adicionalmente, la suma total del exponente de t para la palabra entera w debe ser m .

Consideremos dos casos: Si la bombilla a derecha se enciende primero o si es la bombilla a la izquierda la primera.

- Si la bombilla de la derecha se enciende primero, entonces la representación para w tiene prefijos con suma de exponentes $0, i_k, -j_l$ y m en el generador t . El número total de apariciones de t ó t^{-1} , necesarias para llevar a cabo esto es, $i_k + i_k + j_l + |m + j_l|$.
- Si la bombilla de la izquierda se enciende antes que la de la derecha, la palabra debe tener prefijos con suma de exponentes $0, -j_l, i_k$ y m . Esto requiere al menos $j_l + j_l + i_k + |m - i_k|$ ocurrencias totales de t ó t^{-1} .

Notamos que si la pintura sólo tiene bombillas encendidas por derecha o por izquierda, las palabras de uno de los k ó l serán cero y la misma cota aplica. Si combinamos las cotas obtenidas sobre el número de generadores de a y t que aparecen en una longitud mínima representativa para w , vemos que la menor de estas dos cotas es exactamente $D(w)$. \square

2.4.3. Presentación

Una presentación para el grupo Lamplighter L_2 está dada por:

$$\begin{aligned} P &= \langle a, t/a^2, [t^m a t^{-m}, t^n a t^{-n}], m, n \in \mathbb{Z} \rangle \\ &= \langle a, t/a^2, [a_m, a_n] = 1, m, n \in \mathbb{Z} \rangle. \end{aligned}$$

Verifiquemos que $[t^m a t^{-m}, t^n a t^{-n}] = 1$, para todo $m, n \in \mathbb{Z}$ usando el Lema 9 de la presente sección. Sabemos que,

$$\begin{aligned} [t^m a t^{-m}, t^n a t^{-n}] &= t^m a^{-1} t^{-m} t^n a^{-1} t^{-n} t^m a t^{-m} t^n a t^{-n} \\ &= t^m a t^{-m} t^n a t^{-n} t^m a t^{-m} t^n a t^{-n} \quad (\text{pues } a^2 = 1) \end{aligned}$$

Además tenemos que $t^m a t^{-m} = [\{m\}, 0]$.

Por tanto, $t^m a t^{-m} t^n a t^{-n} = [\{m\}, 0][\{n\}, 0] = [\{m\} \Delta \{n\}, 0] = [\{m, n\}, 0]$.

De donde se sigue que,

$$t^m a t^{-m} t^n a t^{-n} t^m a t^{-m} = [\{m, n\}, 0][\{m\}, 0] = [\{m, n\} \Delta \{m\}, 0] = [\{n\}, 0]$$

Y finalmente, $t^m a t^{-m} t^n a t^{-n} t^m a t^{-m} t^n a t^{-n} = [\{n\}, 0][\{n\}, 0] = [\phi, 0] = id$

Sabemos además que cualquier palabra $w \in L_2$ tiene la forma:

$$w = a_{i_1} a_{i_2} \dots a_{i_k} a_{-j_1} a_{-j_2} \dots a_{-j_l} t^m \quad \text{ó} \quad w = a_{-j_1} a_{-j_2} \dots a_{-j_l} a_{i_1} a_{i_2} \dots a_{i_k} t^m.$$

Tenemos que si una palabra $w \in L_2$ representa la identidad debería poder escribirse únicamente usando las relaciones. Por tanto, supongamos que

$$w = a_{i_1} a_{i_2} \dots a_{i_k} a_{-j_1} a_{-j_2} \dots a_{-j_l} t^m = 1.$$

Siendo así, w representa la pintura cuyas bombillas están todas apagadas y el cursor está en el origen. Para que el cursor esté en el origen es porque $m = 0$.

Ahora cada elemento $a_{i_n}, 1 \leq n \leq k$, representa movimientos hacia la derecha que van hasta la bombilla la encienden o la apagan y vuelven al origen, por tanto, para que la cadena de bombillas quede toda apagada es porque el cursor va primero enciende la bombilla y luego debe volver y apagarla, así debe aparecer una secuencia del estilo $a_{i_1} a_{i_2} a_{i_1} a_{i_2} \dots a_{i_{k-1}} a_{i_k} a_{i_{k-1}} a_{i_k}$. Igualmente, para la parte de los subíndices negativos que se desplazan hacia la izquierda.

Así vemos que la secuencia de a 'es debe seguir la forma de la relación:

$$[a_m, a_n] = a_m^{-1} a_n^{-1} a_m a_n = a_m a_n a_m a_n,$$

para que la secuencia de bombillas quede toda apagada y el cursor en el origen, es decir, para que la palabra represente la identidad.

2.4.4. Embebimiento cuasi-isométrico

Sea G un grupo finito. Un grupo Lamplighter L_G es un producto espiral de G y \mathbb{Z} . Así, $L_G = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} G \rtimes \mathbb{Z}$. Denotemos por G_m la m -ésima copia de G y por a_m un típico elemento de G_m .

Si G y F son dos grupos finitos tal que $\text{ord}(G^k) = \text{ord}(F^l)$ para algún entero positivo k, l , entonces el grupo L_G y L_F son cuasi-isométricos.

Denotemos por L_n el grupo Lamplighter L_G de un grupo finito G de orden n . No se sabe mucho cuando los órdenes de los grupos no satisfacen la condición anterior. De hecho, no sabemos si los grupos L_2 y L_3 son cuasi-isométricos. La teoría geométrica de grupos se ha interesado mucho en la clasificación cuasi-isométrica de los grupos Lamplighter.

En esta sección sólo probaremos que para cualquier par de enteros $n, m > 1$, existe un embebimiento cuasi-isométrico de L_n en L_m .

Comenzaremos fijando el siguiente conjunto generador para L_n .

$$\mathcal{A} = \{a, t, t^{-1}/a \neq e\}$$

Para un entero $k > 0$, el subgrupo H_k de L_n generado por $\{a, t^k, t^{-k}/a \neq e\}$ tiene índice k en L_n , vemos por tanto que L_n y L_{nk} son cuasi-isometrías.

Ahora describamos la métrica de L_n . Como vimos en la Sección 2.4.2, una posible forma normal de una palabra $w \in L_n$ está dada por $w = a_{i_1}a_{i_2}\dots a_{i_r}t^m$ con $i_1 < i_2 < \dots < i_r$.

Si w tiene esta forma, entonces w también puede ser escrito como $w = t^{i_1}at^{-i_1}t^{i_2}at^{-i_2}\dots t^{i_r}at^{-i_r}$, y vimos que la longitud de w está dada por $D(w) = r + \min\{i_r + |m - i_r|, 2i_r + |m|\}$.

Por tanto, la longitud de la palabra $a_0\dots a_r$ es $3r + 1$. Así, por la definición de crecimiento de grupos, en L_n , la bola de radio $3r + 1$ alrededor de la identidad tendrá por lo menos $(n - 1)^{r+1}$ elementos distintos. Esto muestra que L_n tiene un crecimiento exponencial para todo $n > 2$. Pero sabemos que L_2 contiene a L_4 como un subgrupo de índice finito, por tanto, podemos afirmar que L_n tiene un crecimiento exponencial para todo $n > 1$.

Dados dos grupos finitamente generados, es un problema difícil decidir si existe embebimiento cuasi-isométrico entre dos grupos. Incluso, aunque exista un embebimiento cuasi-isométrico en una dirección puede que no exista en la otra. Usando la descripción anterior de la longitud de una palabra en L_n , mostraremos que cualquier dos grupos Lamplighter pueden ser cuasi-isométricamente embebidos uno en el otro.

Teorema 10. *Sean $u, v \in \mathbb{Z}$ tales que $u, v > 1$. Entonces existe un embebimiento cuasi-isométrico $\theta_{u,v} : L_u \rightarrow L_v$.*

Demostración. Sin pérdida de generalidad, supongamos que $1 < u \leq v$. Sea $\theta : \mathbb{Z}_u \rightarrow \mathbb{Z}_v$ una función uno a uno con $\theta(e) = e$. Definamos,

$$\begin{aligned} \Theta_{u,v} : \quad L_u &\longrightarrow L_v \\ t^i x t^{-i} &\longmapsto \Theta_{u,v}(t^i x t^{-i}) = t^i a^{\theta(r)} t^{-i}, \\ a_{i_1} \dots a_{i_r} t^m &\longmapsto \Theta_{u,v}(a_{i_1}) \dots \Theta_{u,v}(a_{i_r}) t^m, \end{aligned}$$

cuando $x = a^r$, con $v < u$, denota un elemento diferente a la identidad en \mathbb{Z}_u .

Si ω, τ son dos elementos de L_u con $\omega = a_{i_1} \dots a_{i_r} t^m$ y $\tau = b_{j_1} \dots b_{j_s} t^n$ entonces $\Theta_{u,v}(\omega^{-1}\tau) = t^{-m} [\Theta_{u,v}(a_{i_r})]^{-1} \dots [\Theta_{u,v}(a_{i_1})]^{-1} \Theta_{u,v}(b_{j_1}) \dots \Theta_{u,v}(b_{j_s}) t^n$.

Dado que $\Theta_{u,v}$ envía la i -ésima copia de \mathbb{Z}_u en L_u a la i -ésima copia de \mathbb{Z}_v en L_v , los índices que se tienen cancelados en la expresión de $\omega^{-1}\tau$ son los mismos que los índices que se tienen

cancelados en $\Theta_{u,v}(\omega)^{-1}\Theta_{u,v}(\tau)$, así, $D(\omega^{-1}\tau) = D(\Theta_{u,v}(\omega)^{-1}\Theta_{u,v}(\tau))$. De donde se sigue que $\Theta_{u,v}$ es una isometría y por tanto una cuasi-isometría.

Para construir el embebimiento cuasi-isométrico $\Theta_{v,u} : L_v \rightarrow L_u$ tomamos un entero k tal que $u^k \geq v$. Como observamos anteriormente, existe una cuasi-isometría $\chi : L_{u^k} \rightarrow L_u$ y además sabemos que $\Theta_{v,u^k} : L_v \rightarrow L_{u^k}$ es una cuasi-isometría. Entonces $\chi \circ \Theta_{v,u^k} : L_v \rightarrow L_u$ es un embebimiento cuasi-isométrico, pues la composición de embebimientos cuasi-isométricos es cuasi-isométrico (Véase [19], Lema 3.4.2). \square

2.5. GRUPOS COXETER

En esta sección haremos una descripción combinatoria y geométrica de los grupos Coxeter, veremos algunas propiedades y mostraremos que éstos grupos tiene el problema de la palabra soluble.

Fueron publicados en 1935 por Harold Scott MacDonald Coxeter. Los grupos Coxeter pueden ser considerados desde diferentes puntos de vista. Desde un punto de vista geométrico son frecuentemente definidos como grupos generados por reflexiones en un espacio vectorial particular en el que es asignada una forma bilineal apropiada. Desde un punto de vista combinatorio, se les define una presentación y se analiza el grupo mediante su estructura geométrica.

2.5.1. Definición Combinatoria

Definición. Un **Sistema Coxeter** es un par (W, S) donde, $S = \{S_i/i \in I\}$ es el conjunto de generadores con conjunto de índices I y W es el grupo $\langle S/R \rangle$ para $R = \{(S_i S_j)^{m_{ij}}/m_{ij} \in \{1, 2, \dots, \infty\}\}$.

Exigimos que, $m_{ij} = m_{ji}$ Y $m_{ij} = 1$ si y sólo si $i = j$, para todo $i, j \in I$.

De lo anterior se verá que:

- El producto $S_i S_j$ tiene orden m_{ij} (Véase Proposición 10).
- Si $m_{ij} = \infty$ significa que $S_i S_j$ tiene orden infinito.
- El conjunto de índices I puede tener cualquier cardinalidad.

Llamamos el conjunto S como el **conjunto fundamental de generadores** para el sistema (W, S) .

Al grupo W dado por la presentación $\langle S, R \rangle$ lo llamamos **Grupo Coxeter**.

Entre los grupos Coxeter finitos más simples están el grupo diedral finito y el grupo de simetrías y entre los infinitos tenemos el grupo diedral infinito.

Definición. Sea (W, S) un sistema Coxeter. Definimos el **diagrama Coxeter** η correspondiente a (W, S) como el grafo cuyo conjunto de vértices están en correspondencia uno a uno con S y para el cual existe una arista $[S_i S_j]$ en η cada vez que $m_{ij} < \infty$. Las aristas $[S_i S_j]$ en η serán etiquetadas con m_{ij} .

Claramente, dado η , la presentación $\langle S/R \rangle$ está completamente determinada y viceversa.

Los sistemas Coxeter se clasifican en términos del diagrama Coxeter, por tanto, podemos decidir a qué clase pertenece un grupo Coxeter analizando su diagrama. Sea (W, S) un sistema Coxeter con diagrama η . Podemos clasificar los sistemas Coxeter en:

- **Rectangulares:** Si cada arista en η tiene etiqueta 2.
- **De ángulo inclinado:** Si ninguna arista en η tiene etiqueta 2.
- **Tipo Extragrande:** Si cada arista en η tiene etiqueta al menos 4.
- **Par:** Si cada arista en η es par.

Si dado el grupo W , un sistema (W, S) existe y es rectangular, de ángulo inclinado, extragrande o par, decimos que W también lo es.

Definición. Un grupo Coxeter W es **irreducible** si no se puede descomponer como producto directo no trivial. Tenemos que W se puede descomponer como un producto directo no trivial, si dado $S = S_1 \cup S_2$ tal que $S_1 \cap S_2 = \emptyset \Rightarrow S_1 S_2 = S_2 S_1$ se tiene $W = W_1 \times W_2$ cuando $W_i = \langle S_i \rangle$.

También decimos que W es irreducible si su grafo Coxeter es conexo.

2.5.2. Definición Geométrica

Sean I un conjunto de índices y $m_{ij} \in \{1, 2, \dots, \infty\}$, $i, j \in I$ una colección de valores que satisfacen que $m_{ij} = m_{ji}$ y $m_{ij} = 1 \Leftrightarrow i = j$, para todo $i, j \in I$.

Sea $A = (a_{ij})$ para

$$\begin{cases} a_{ij} = -\cos \frac{\pi}{m_{ij}} & \text{donde } m_{ij} < \infty, \\ a_{ij} \leq -1 & \text{donde } m_{ij} = \infty, \end{cases}$$

una matriz simétrica, llamada una matriz Coxeter.

Sea V un espacio vectorial de dimensión $|I|$ con base $\{\alpha_i / i \in I\}$ indizada por I . Definimos una forma bilineal simétrica (\cdot, \cdot) en V por medio de la matriz A . Es decir, exigimos que $(\alpha_i, \alpha_j) = a_{ij}$.

Denotaremos por H_i el subespacio de V ortogonal a α_i relativo a esta forma bilineal, H_i es entonces complementario a la línea en V que contiene a α_i .

Definición. Definamos la **reflexión** correspondiente a α_i como

$$\begin{aligned} \gamma_i : \quad V &\longrightarrow V \\ v &\longmapsto \gamma_i(v) = v - 2(\alpha_i, v)\alpha_i. \end{aligned}$$

Veamos que,

1. γ_i preserva la forma bilineal, es decir, veamos que $(\gamma_i(\alpha_k), \gamma_i(\alpha_j)) = a_{kj}$. Tenemos,

$$\begin{aligned} (\gamma_i(\alpha_k), \gamma_i(\alpha_j)) &= (\alpha_k - 2(\alpha_i, \alpha_k)\alpha_i, \alpha_j - 2(\alpha_i, \alpha_j)\alpha_i) \\ &= (\alpha_k, \alpha_j - 2(\alpha_i, \alpha_j)\alpha_i) + (-2(\alpha_i, \alpha_k)\alpha_i, \alpha_j - 2(\alpha_i, \alpha_j)\alpha_i) \\ &\quad \text{(por propiedades de la forma bilineal)} \\ &= (\alpha_k, \alpha_j) - 2(\alpha_i, \alpha_j)(\alpha_k, \alpha_i) - 2(\alpha_i, \alpha_k)(\alpha_i, \alpha_j) + 4(\alpha_i, \alpha_k)(\alpha_i, \alpha_j)(\alpha_i, \alpha_i) \\ &= (\alpha_k, \alpha_j) = -\cos \frac{\pi}{m_{kj}} = a_{kj}. \end{aligned}$$

2. γ_i es reflexión, es decir, $\gamma_i(\gamma_i(v)) = v$.

$$\begin{aligned} \gamma_i(\gamma_i(v)) &= \gamma_i(v - 2(\alpha_i, v)\alpha_i) = v - 2(\alpha_i, v)\alpha_i - 2[\alpha_i, v - 2(\alpha_i, v)\alpha_i]\alpha_i \\ &= v - 2(\alpha_i, v)\alpha_i - 2[(\alpha_i, v) - 2(\alpha_i, v)(\alpha_i, \alpha_i)]\alpha_i \quad \text{(por propiedad forma bilineal)} \\ &= v - 2(\alpha_i, v)\alpha_i - 2(\alpha_i, v)\alpha_i + 4(\alpha_i, v)\alpha_i \quad \text{(pues } (\alpha_i, \alpha_i) = 1) \\ &= v. \end{aligned}$$

3. Cada elemento de H_i sigue siendo fijado por γ_i , pues dado que $(\alpha_i, v) = 0$ entonces $\gamma_i(v) = v - 2(\alpha_i, v)\alpha_i = v$.

4. $\gamma_i(\alpha_i) = -\alpha_i$. Veamos, $\gamma_i(\alpha_i) = \alpha_i - 2(\alpha_i, \alpha_i)\alpha_i = \alpha_i - 2\alpha_i = -\alpha_i$.

Por tanto, la función γ_i (con la operación composición) genera un subgrupo W del grupo $GL(V)$. Este grupo es un grupo Coxeter con sistema $(W, \{\gamma_i/i \in I\})$.

Observación 2. *Alternativamente, podríamos comenzar con W y enviar a cada elemento $s_i \in S$ en $\gamma_i \in GL(V)$ para V un espacio vectorial de dimensión $|S|$ generado por α_i , donde la forma bilineal es $(\alpha_i, \alpha_j) = a_{ij}$ y γ_i es definida como antes.*

Lo anterior nos permite concluir que los grupos Coxeter son lineales y por tanto gozan de un número de propiedades deseables (por ejemplo, todos los grupos lineales tienen problema de la palabra soluble, son finitamente reducidos y son libres de torsión).

Tenemos que, si W es rectangular y α_i, α_j son algún par de vectores distintos definidos como antes, entonces:

- Si $m_{ij} = 2$ entonces, $a_{ij} = -\cos \frac{\pi}{2} = 0 = (\alpha_i, \alpha_j)$ y por tanto α_i, α_j son ortogonales.
- Si $m_{ij} = 1$ entonces $(\alpha_i, \alpha_j) = a_{ij} = -\cos \pi = -1$.

Ahora, si W es de ángulo inclinado ningún par de vectores α_i, α_j son ortogonales entre sí.

Usando la definición anterior, consideremos la siguiente construcción.

Sea $m \geq 3$ un entero, $\lambda = \frac{\pi}{m}$ y sean $k, k' > 0$ números reales tal que $kk' = 4\cos^2 \lambda$.

Escojamos vectores base α, α' en el plano euclidiano \mathbb{E}^2 tal que:

1. El ángulo entre α y α' es λ .
2. Sus longitudes son $|\alpha'| = \frac{2\cos \lambda}{k}|\alpha|$ y $|\alpha| = \frac{2\cos \lambda}{k'}|\alpha'|$

Gráficamente, tenemos:

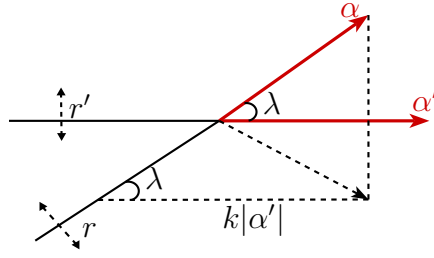


Figura 1

Sean r (respectivamente r') la reflexión ortogonal de \mathbb{E}^2 en la línea generada por α (respectivamente α').

Lema 12. Las coordenadas (q, q') de un punto $q\alpha + q'\alpha'$ son transformadas como sigue por las reflexiones ortogonales:

$$r' : (q, q') \rightarrow (-q, q' + kq); \quad r : (q, q') \rightarrow (q + k'q', -q').$$

Demostración. Tenemos que $r(1, 0) = (1, 0)$ y $r'(0, 1) = (0, 1)$, dado que los puntos en las líneas reflejadas permanecen fijos.

La geometría indicada en la figura anterior muestra que: $r'(1, 0) = \left(-1, \frac{2|\alpha|\cos\lambda}{|\alpha'|}\right) = (-1, k)$

Y por simetría, $r(0, 1) = \left(\frac{2|\alpha'|\cos\lambda}{|\alpha|}, -1\right) = (k', -1)$

Por tanto, las fórmulas indicadas son correctas para los vectores base y así, por linealidad para todo vector en \mathbb{E}^2 . \square

Sea (W, S) un sistema Coxeter dado por una matriz Coxeter M . Definamos una función $k : S \times S \rightarrow \mathbb{R}$ como sigue, $k_{s,s'} = -2 \left(-\cos \frac{\pi}{m_{ss'}}\right)$.

Entonces, para cada par ordenado (s, s') tal que $m_{ss'} \geq 3$, escogemos un número real $k_{s,s'}$ sujeto a las siguientes restricciones,

$$\begin{cases} k_{s,s'} > 0, \\ k_{s,s'}k_{s',s} = 4\cos^2 \frac{\pi}{m_{ss'}}, & \text{si } m_{ss'} \neq \infty, \\ k_{s,s'}k_{s',s} \geq 4, & \text{si } m_{ss'} = \infty. \end{cases}$$

Sea $\{\alpha_s/s \in S\}$ la base canónica para el espacio vectorial \mathbb{R}^s . Para cada $s \in S$ definimos la transformación lineal $\sigma_s(p) : \mathbb{R}^s \rightarrow \mathbb{R}^s$ dada por

$$\sigma_s(p) = p + p_s \sum_{s' \in S} k_{s,s'} \alpha_{s'}, \quad (2.7)$$

donde $p = \sum p_{s'} \alpha_{s'} \in \mathbb{R}^s$.

Adicionalmente, tenemos que

$$(*) \quad (\sigma_s(p))_{s'} = \begin{cases} -p_s & \text{si } s' = s, \\ p_{s'} + k_{ss'} p_s & \text{si } m_{ss'} \geq 3, \\ p_{s'} & \text{si } m_{ss'} = 2. \end{cases}$$

Proposición 10. Para todo $s, s' \in S$ se sigue que:

1. $(\sigma_s)^2 = id$.
2. El orden de $\sigma_s \sigma_{s'}$ es $m_{ss'}$.

Demostración. La primera parte se sigue de la parte (2) de la definición de la reflexión. Para la segunda parte supongamos $m_{ss'} \geq 3$. Consideremos dos casos:

1. Si $m_{ss'} < \infty$. Sea $p^0 \in \mathbb{R}^s$ y consideremos las imágenes sucesivas $p^i = \sigma_s(\sigma_{s'}(p^{i-1}))$, $i \geq 1$. El par de coordenadas $(p_s^i, p_{s'}^i)$ determina un vector $v^i = p_s^i \alpha + p_{s'}^i \alpha'$ en el plano euclidiano \mathbb{E}^2 considerado en la Figura 1, donde ahora llamamos $m = m_{ss'}$, $k = k_{s,s'}$ y $k' = k_{s',s}$.

El producto de dos reflexiones ortogonales a través de la línea que forma un ángulo λ en \mathbb{E}^2 es igual a una rotación a través del ángulo 2λ . Así, el Lema 12 muestra que, dada la ecuación (*), v^i se obtiene de v^{i-1} por una rotación de \mathbb{E}^2 a través del ángulo $\frac{2\pi}{m}$. De esto se sigue que,

$$v^0, v^1, \dots, v^{m-1} \text{ son diferentes y } v^m = v^0 \quad (2.8)$$

y que

$$v^0 + v^1 + \dots + v^{m-1} = 0. \quad (2.9)$$

De 2.8 se sigue que $p_s^m = p_s^0$ y $p_{s'}^m = p_{s'}^0$ y que ningún exponente más pequeño que m tiene esta propiedad. Además, la Ecuación 2.9 muestra que $p_{s''}^m = p_{s''}^0, \forall s'' \neq s, s'$, dado que $p_{s''}^m = \sigma_s(\sigma_{s'}(p_{s''}^{m-1}))$ y por la Ecuación 2.7 se tiene que,

$$\begin{aligned} p_{s''}^m &= \sigma_s(\sigma_{s'}(p_{s''}^{m-1})) \\ &= \sigma_s(p_{s''}^0 + k_{s',s''}(p_{s'}^0 + \dots + p_{s'}^{m-1})) \\ &= p_{s''}^0 + k_{s',s''}(p_{s'}^0 + \dots + p_{s'}^{m-1}) + k_{s,s''}(p_s^0 + \dots + p_s^{m-1}). \end{aligned}$$

Por tanto, el orden de $\sigma_s \sigma_{s'}$ es finalmente m .

2. Si $m_{ss'} = \infty$. Definimos p^i como la imagen iterada de un punto p^0 bajo la función $\sigma_s \sigma_{s'}$. Veamos que el par coordenado $(p_s^i, p_{s'}^i), i \geq 0$, satisface

$$\begin{cases} p_s^{i+1} = k_{s,s'} p_{s'}^i + (k_{s,s'} k_{s',s} - 1) p_s^i, \\ p_{s'}^{i+1} = -p_{s'}^i - k_{s,s'} p_s^i. \end{cases}$$

Tenemos que $p_{s'}^{i+1} = \sigma_s(\sigma_{s'}(p_{s'}^i))$.

Además sabemos que $\sigma_{s'}(p_{s'}^i) = p_{s'}^i - 2(p_{s'}^i, p_{s'}^i) p_{s'}^i = -p_{s'}^i$, por tanto, $\sigma_s(-p_{s'}^i) = -p_{s'}^i + 2(p_s^i, p_{s'}^i) p_s^i = -p_{s'}^i - 2p_s^i = -p_{s'}^i - k_{s,s'} p_s^i$.

Por otro lado, sabemos que $p_s^{i+1} = \sigma_s(\sigma_{s'}(p_s^i))$, de donde,

$\sigma_{s'}(p_s^i) = p_s^i - 2(p_{s'}^i, p_s^i) p_{s'}^i = p_s^i + 2p_{s'}^i$, por tanto,

$$\begin{aligned} \sigma_s(p_s^i + 2p_{s'}^i) &= p_s^i + 2p_{s'}^i - 2(p_s^i, p_s^i + 2p_{s'}^i) p_s^i = p_s^i + 2p_{s'}^i - 2[(p_s^i, p_s^i) + 2(p_s^i, p_{s'}^i)] p_s^i = \\ &= -p_s^i + 2p_{s'}^i + 4p_s^i = 2p_{s'}^i + 3p_s^i = k_{s,s'} p_{s'}^i + (k_{s,s'} k_{s',s} - 1) p_s^i. \end{aligned}$$

Así tenemos que para $i \geq 1$, $p_s^{i+1} + p_s^i = k_{s,s'}(p_{s'}^i + p_{s'}^{i-1}) + (k_{s,s'}k_{s',s} - 1)(p_s^i + p_s^{i-1})$ y $p_{s'}^i + p_{s'}^{i-1} = -k_{s',s}p_s^{i-1}$, y al unir ambos resultados, se tiene lo siguiente:

$$\begin{aligned} p_s^{i+1} &= -p_s^i + k_{s,s'}(-k_{s',s}p_s^{i-1}) + k_{s,s'}k_{s',s}p_s^i + k_{s,s'}k_{s',s}p_s^{i-1} - p_s^i - p_s^{i-1} \\ &= -p_s^i - k_{s,s'}k_{s',s}p_s^{i-1} + k_{s,s'}k_{s',s}p_s^i + k_{s,s'}k_{s',s}p_s^{i-1} - p_s^i - p_s^{i-1} \\ &= (k_{s,s'}k_{s',s} - 2)p_s^i - p_s^{i-1}. \end{aligned}$$

Escogiendo $p^0 = \alpha_s$ tenemos que $p_s^0 = 1$, y así obtenemos que:

$$p_s^1 = (k_{s,s'}k_{s',s} - 2)p_s^0 - p_s^{-1} = k_{s,s'}k_{s',s} - 2 - 1 = k_{s,s'}k_{s',s} - 1 \quad (2.10)$$

y dado que $k_{s,s'}k_{s',s} = -2 \left(-\cos \frac{\pi}{m}\right) \left(-2 \left(-\cos \frac{\pi}{m}\right)\right) = 4\cos^2 \frac{\pi}{m} \geq 4$

Usando esto y la relación de recurrencia 2.10 deducimos que $p_s^0 < p_s^1 < p_s^2 < p_s^3 < \dots$

Por tanto, $\sigma_s \sigma_{s'}$ es de orden infinito. □

Como vimos, la función $s \mapsto \sigma_s (s \in S)$ extiende a un único homomorfismo $\sigma : W \rightarrow GL(\mathbb{R}^s)$.

Proposición 11. Sean (W, S) un sistema Coxeter y s, s' elementos diferentes de S . Entonces,

1. s y s' son distintos en W .
2. El orden de ss' en W es $m_{ss'}$.

Demostración. El homomorfismo σ envía a s y s' en elementos diferentes de $GL(\mathbb{R}^s)$, cuyo producto tiene orden $m_{ss'}$. Esto provee 1. y que si $m_{ss'}$ es finito, divide el orden de ss' . Sin embargo, dado que $(ss')^{m_{ss'}} = e$, el orden de ss' divide a $m_{ss'}$. El caso $m_{ss'} = \infty$ es claro. □

Los vectores α_i son llamados **raíces simples**.

Denotaremos por $\Phi = \{w(\alpha_i)/w \in W, i \in I\}$, donde $w(\alpha_i)$ es el vector que resulta de aplicar la transformación lineal w a α_i . Entonces Φ es conocida como el **sistema raíz** correspondiente a W . Cada elemento de Φ es llamado **raíz**.

Notemos que:

- Se cumple que $\Phi = -\Phi$ dado que $s(\alpha_s) = -\alpha_s$.
- El conjunto Φ es finito si y sólo si W es finito. (Véase Teorema 5.2.4, [4]).
- Como cada α_i es un vector único y cada w preserva la forma bilineal (\cdot, \cdot) se sigue que cada elemento de Φ es un vector único.
- Como $\{\alpha_i/i \in I\}$ es una base de V , cada raíz α puede ser expresada como una única combinación lineal de los vectores α_i . Si todos los coeficientes de esta suma son positivos (respectivamente, negativos); llamamos α una **raíz positiva** (respectivamente, **raíz negativa**).
Denotaremos por π el conjunto de raíces positivas ($-\pi$ el conjunto de raíces negativas).
- Φ es una unión disjunta de π y $-\pi$. (Véase Proposición 4.1.2, [4]).

Dada una colección T de raíces en algún sistema raíz Φ , podemos considerar el subgrupo W_T de W generado por las reflexiones γ_α correspondientes a $\alpha \in T$. Este mismo subgrupo tiene un sistema raíz (algunas veces llamado subsistema de Φ) que puede ser denotado Φ_T y que se define así: $\Phi_T = \{\alpha \in \Phi/\gamma_\alpha \in W_T\}$.

2.5.3. Algunas propiedades

1. Reflexión

Sea (W, S) un sistema Coxeter. Cualquier elemento de la forma $ws w^{-1}$ para $s \in S$ y $w \in W$ es conocido como una reflexión del sistema (W, S) . Los elementos del conjunto fundamental de generadores S son frecuentemente llamados **reflexiones simples**. El conjunto de todas las reflexiones del sistema será denotado $R(S)$. El conjunto $R(S)$, en efecto, depende de S .

2. Longitud de las palabras y geodésicas

Sea (W, S) un sistema Coxeter y sea $w \in W$. Es posible expresar a w como un producto de reflexiones simples $s_1 s_2 \dots s_n$ de más de una manera.

Si $w =_W s_1 s_2 \dots s_n$ y $l_S(w) = n$ decimos que el producto $s_1 s_2 \dots s_n$ es **reducido** o que ésta es una expresión **geodésica** para w .

Por convención $l(1) = 0$.

Claramente, $l(w) = 1$ si y sólo si $w = s_1$ para algún $s_1 \in S$.

De la misma manera, definimos $l_I(w)$ como la longitud en el subgrupo W_I de W con conjunto de generadores $I \subset S$. Claramente $l(w) \leq l_I(w)$, para todo $w \in W_I$.

Proposición 12 (Propiedades de la longitud). *Sea $l(w)$ la longitud de $w \in W$ con respecto al conjunto de generadores S y sea $w' \in W$.*

- a) $l(w) = l(w^{-1})$,
- b) $l(w) = 0 \Leftrightarrow w = 1$,
- c) $l(w w') \leq l(w) + l(w')$,
- d) $l(w w') \geq l(w) - l(w')$,
- e) $l(w) - 1 \leq l(ws) \leq l(w) + 1, \forall s \in S$.

Demostración. Las partes a) y b) se verifican fácilmente.

c) Sean $w = s_1 s_2 \dots s_n$ y $w' = s'_1 s'_2 \dots s'_m$ entonces $ww' = s_1 s_2 \dots s_n s'_1 s'_2 \dots s'_m$. Consideremos dos casos:

- Si ww' está reducido entonces $l(ww') = l(w) + l(w')$.
- Si ww' no está reducido, al cancelar elementos se tendría que $l(ww') < l(w) + l(w')$.

d) Como en caso anterior, $ww' = s_1 s_2 \dots s_n s'_1 s'_2 \dots s'_m$. Por tanto, consideremos los siguientes casos:

- Si ww' está reducido, $l(ww') = l(w) + l(w')$. Pero $l(ww') > l(w) + l(w') - 2l(w') > l(w) - l(w')$.
- Si $w' = w^{-1}$ entonces $l(ww') = 0$.
- Si $n < m$ y $ww' = s_{j_{n+1}} \dots s_{j_m}$ entonces $l(ww') = m - n > n - m$.
- Si $m < n$ y $ww' = s_{i_1} \dots s_{i_{n-m}}$ se tiene que $l(ww') = n - m$.
- No todo w ni todo w' se cancela, entonces $ww' = s_{i_1} \dots s_{i_{n-k}} s_{j_{k+1}} \dots s_{j_m}$ y así $l(ww') = n - k + m - k = n + m - 2k \geq n - m$.

e) Sea $w = s_1 s_2 \dots s_n$ tal que $l(w) = n$ entonces por parte c) se tiene que $l(ws) \leq l(w) + l(s) = l(w) + 1$ y por parte d), $l(ws) \geq l(w) - l(s) = l(w) - 1$. Y tenemos el resultado. □

Existe una buena interacción entre la función longitud $l(w)$ y la acción de W sobre el espacio vectorial V (y su correspondiente sistema de raíces Φ).

Denotaremos a $n(w)$ como el número de raíces positivas en Φ enviadas a raíces negativas de Φ por la acción de w , esto es,

$$n(w) = |\pi \cap w^{-1}(-\pi)|.$$

Observemos que $n(w^{-1}) = n(w)$, es decir, $|\pi \cap w^{-1}(-\pi)| = |\pi \cap w(-\pi)|$. Esto se sigue del hecho que $\pi \cap w^{-1}(-\pi) = w^{-1}(w(\pi) \cap -\pi) = -w^{-1}(\pi \cap w(-\pi))$ que tiene el mismo número de elementos que $\pi \cap w(-\pi)$.

En adelante, tomaremos α, α_i siempre positivos.

Teorema 11. *Sea (W, S) un grupo Coxeter y sea $w \in W$. Entonces $l(w) = n(w)$.*

Antes de probarlo, veremos otros resultados.

Teorema 12. *Sea $w \in W$ y $s \in S$. Si $l(ws) > l(w)$ entonces $w(\alpha_s) > 0$. Si $l(ws) < l(w)$ entonces $w(\alpha_s) < 0$.*

Demostración. Observe que el segundo resultado se sigue del primero aplicado a ws en lugar de w . En efecto, si $l(ws) < l(w)$ entonces, dado que todo generador tiene orden 2, se sigue que $l((ws)s) > l(ws)$ luego $ws(\alpha_s) > 0$, pero $s(\alpha_s) = -\alpha_s$, es decir, $w(-\alpha_s) > 0$ ó $w(\alpha_s) < 0$.

Probaremos por tanto el primer resultado. Procederemos por inducción sobre $l(w)$.

Si $l(w) = 0$ se tiene que $w = 1$ entonces $l(ws) = l(s) = 1 > 0$ y así $w(\alpha_s) = \alpha_s > 0$.

Si $l(w) > 0$ podemos escoger un $s' \in S$ tal que $l(ws') = l(w) - 1$, es decir, elegimos s' como el último factor en una expresión reducida para w . Dado que por hipótesis de inducción $l(ws) > l(w)$, se sigue que $s \neq s'$. Sea $I = \{s, s'\}$ tal que W_I es el grupo diedral. Ahora, hacemos una elección crucial en la clase lateral wW_I . Consideremos el conjunto $A := \{v \in W / v^{-1}w \in W_I \wedge l(v) + l_I(v^{-1}w) = l(w)\}$.

Evidentemente $w \in A$. Escojamos $v \in A$ tal que $l(v)$ sea el más pequeño posible y escribamos $v_I := v^{-1}w \in W_I$. Por tanto, $w = vv_I$, con $l(w) = l(v) + l_I(v_I)$.

Ahora verificaremos que cada uno de los v y v_I actúan en las raíces y lo hacen en forma positiva, para así poder concluir que $w(\alpha_s) > 0$.

Observemos que $ws' \in A$: $(s'w^{-1})w = s' \in W_I$ y $l(ws') + l_I(s') = (l(w) - 1) + 1 = l(w)$.

Ahora, por la escogencia de v se debe tener que $l(v) \leq l(ws') = l(w) - 1$. Esto nos permitirá aplicar la hipótesis de inducción al par $\{v, s\}$. Pero para esto es necesario comparar la longitud de v y vs . Supongamos que se cumple que $l(vs) < l(v)$, es decir, $l(vs) = l(v) - 1$.

Entonces podemos calcular lo siguiente:

$$\begin{aligned}
l(w) &\leq l(vssv^{-1}w) \leq l(vs) + l(sv^{-1}w) && \text{(por Proposición 12 Parte c)} \\
&\leq l(vs) + l_I(sv^{-1}w) && \text{(pues } sv^{-1}w \in W_I \text{ y } l \leq l_I) \\
&= (l(v) - 1) + l_I(sv^{-1}w) \\
&\leq l(v) - 1 + l_I(v^{-1}w) + 1 && \text{(por Proposición 12 Parte e)} \\
&= l(v) + l_I(v^{-1}w) = l(w).
\end{aligned}$$

Para mantener la igualdad en todo, forzamos a $l(w) = l(vs) + l_I(sv^{-1}w)$ y así tendríamos que $vs \in A$. Por tanto, la afirmación $l(vs) < l(v)$ contradice la minimalidad de v en A . De donde se sigue que debemos tener $l(vs) > l(v)$ y por inducción, obtenemos $v(\alpha_s) > 0$.

Un argumento similar muestra que $l(vs') > l(v)$ y por tanto, $v(\alpha'_s) > 0$.

Veamos ahora que v_I mapea α_s a una combinación lineal no-negativa de α_s y α'_s . Afirmamos que $l_I(v_I s) \geq l_I(v_I)$. De lo contrario, tendríamos,

$$l(ws) = l(vv^{-1}ws) \leq l(v) + l(v^{-1}ws) = l(v) + l(v_I s) \leq l(v) + l_I(v_I s) \leq l(v) + l_I(v_I) = l(w)$$

contrario a $l(ws) > l(w)$.

Sucesivamente, se sigue que cualquier expresión reducida de v_I en W_I (o alternativamente, un producto de factores de s y s') debe terminar en s' .

Consideremos dos casos posibles:

1. Si $m_{ss'} = \infty$. Tenemos que $(\alpha_s, \alpha'_s) = -\cos \frac{\pi}{m_{ss'}} = -1$, así que,

$$s'(\alpha_s) = \alpha_s - 2(\alpha'_s, \alpha_s)\alpha'_s = \alpha_s + 2\alpha'_s,$$

$$ss'(\alpha_s) = (\alpha_s + 2\alpha'_s) - 2(\alpha_s, \alpha_s + 2\alpha'_s)\alpha_s = \alpha_s + 2\alpha'_s + 2\alpha_s = 3\alpha_s + 2\alpha'_s,$$

$$s'ss'(\alpha_s) = (3\alpha_s + 2\alpha'_s) - 2(\alpha'_s, 3\alpha_s + 2\alpha'_s)\alpha'_s = 3\alpha_s + 2\alpha'_s + 2\alpha'_s = 3\alpha_s + 4\alpha'_s.$$

Y así sucesivamente, vemos que $v_I(\alpha_s) = a\alpha_s + b\alpha'_s$ con $a, b \geq 0$ y $|a - b| = 1$.

2. Si $m_{ss'} > \infty$. Note que $l_I(v_I) < m$. En efecto, sea $w = vv_I \in W_I$ como antes, tal que $l_I(w) = m$, pues m es claramente el máximo valor posible de l_I . Como tenemos que, $(ss')^m = \underbrace{ss'ss' \dots ss'}_{2m} = 1$ se sigue que un elemento de longitud m en W_I tiene

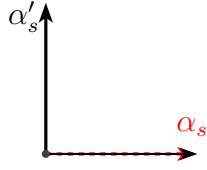
una expresión reducida que termina en s , por tanto, dado que $w = vv_I = \underbrace{ss'ss' \dots s}_m$

se sigue que v_I puede ser escrita como un producto de menos de $m/2$ términos ss' , posiblemente precedidos por un factor s' . Veamos ahora que $v_I(\alpha_s)$ es una combinación lineal no negativa de α_s y α'_s . Recordemos que trabajamos ahora en el plano euclidiano, con vectores unitarios α_s y α'_s con un ángulo de $\pi - \pi/m$.

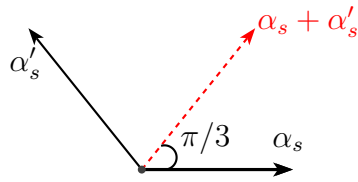
- Si $m = 2$. Entonces $w = ss'$, así $l_I(v_I) \leq m/2 = 1$, por tanto,

$$v_I(\alpha_s) = s'(\alpha_s) = \alpha_s - 2(\alpha'_s, \alpha_s)\alpha'_s = \alpha_s - 2\left(-\cos \frac{\pi}{2}\right)\alpha'_s = \alpha_s$$

Gráficamente tenemos dos vectores unitarios α_s, α'_s separados por un ángulo de $\pi - \pi/2 = \pi/2$ y al realizar la reflexión involucrada en v_I observamos que dicha reflexión mueve el vector α_s a través de un ángulo de 0 radianes, aún dentro del cono positivo definido por α_s y α'_s , así:

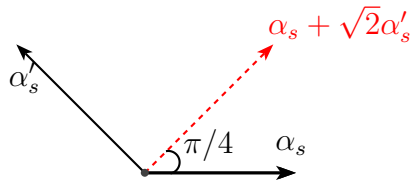


- Si $m = 3$. Entonces $w = s'ss'$, así $l_I(v_I) \leq m/2 = 1,5$, por tanto, $v_I(\alpha_s) = s'(\alpha_s) = \alpha_s - 2(\alpha'_s, \alpha_s)\alpha'_s = \alpha_s - 2(-\cos\frac{\pi}{3})\alpha'_s = \alpha_s + \alpha'_s$. Gráficamente tenemos dos vectores unitarios α_s, α'_s separados por un ángulo de $\pi - \pi/3 = 2\pi/3$ y al realizar la reflexión involucrada en v_I observamos que dicha reflexión mueve el vector α_s al vector resultante $\alpha_s + \alpha'_s$ a través de un ángulo de $\pi/3$, aún dentro del cono positivo definido por α_s y α'_s , así:



- Si $m = 4$. Entonces $w = ss'ss'$, así $l_I(v_I) \leq m/2 = 2$, por tanto, $v_I(\alpha_s) = ss'(\alpha_s)$. Veamos qué obtenemos:
 $s'(\alpha_s) = \alpha_s - 2(\alpha'_s, \alpha_s)\alpha'_s = \alpha_s - 2(-\cos\frac{\pi}{4})\alpha'_s = \alpha_s + \sqrt{2}\alpha'_s$.
 $s(\alpha_s + \sqrt{2}\alpha'_s) = \alpha_s + \sqrt{2}\alpha'_s - 2(\alpha_s, \alpha_s + \sqrt{2}\alpha'_s)\alpha_s = \alpha_s + \sqrt{2}\alpha'_s - 2[(\alpha_s, \alpha_s) + \sqrt{2}(\alpha_s, \alpha'_s)]\alpha_s = \alpha_s + \sqrt{2}\alpha'_s$.

Gráficamente tenemos dos vectores unitarios α_s, α'_s separados por un ángulo de $\pi - \pi/4 = 3\pi/4$ y al realizar la reflexión involucrada en v_I observamos que dicha reflexión mueve el vector α_s al vector resultante $\alpha_s + \sqrt{2}\alpha'_s$ a través de un ángulo de $\pi/4$, aún dentro del cono positivo definido por α_s y α'_s . Véase la figura



Así sucesivamente se sigue que las reflexiones involucradas en v_I mueven a α_s a través de un ángulo de por lo menos de $\pi - 2\pi/m$, aún dentro del cono positivo definido por α_s y α'_s .

□

Teorema 13. *Supongamos que α_i es una raíz simple en Φ correspondiente a $s_i \in S$. Entonces el conjunto $\pi \setminus \{\alpha_i\}$ es estable bajo la acción de s_i . (Esto es, $s_i(\pi \setminus \{\alpha_i\}) = \pi \setminus \{\alpha_i\}$).*

Demostración. Sea α una raíz positiva. Tenemos que $\alpha \neq \alpha_i$ pues todas las raíces son vectores unitarios, por tanto α no puede ser múltiplo de α_i . Podemos entonces escribir $\alpha = \sum_{j \in I} c_j \alpha_j$, donde todos los coeficientes son no negativos y algún $c_j > 0$, $j \neq i$. Aplicando la reflexión s_i a ambos lados de la ecuación $\alpha = c_1 \alpha_1 + c_2 \alpha_2 + \dots + c_j \alpha_j$ tenemos que, $s_i(\alpha) = s_i(c_1 \alpha_1 + \dots +$

$c_j\alpha_j) = (c_1\alpha_1 + \dots + c_j\alpha_j) - 2(\alpha_i, c_1\alpha_1 + \dots + c_j\alpha_j)\alpha_i = \alpha - 2(\alpha_i, \alpha)\alpha_i$, que es una combinación lineal que involucra los mismos coeficientes para todo $\alpha_j, j \neq i$. Así, dado que cada raíz es o negativa o positiva, $s_i(\alpha)$ es de nuevo positiva. Ahora, se tiene que $s_i(\alpha) \neq \alpha_i$, de lo contrario, $\alpha = s_i s_i(\alpha) = s_i(\alpha_i) = -\alpha_i$ contradiciendo la positividad de α . Por tanto, s_i envía a α_i a su raíz negativa pero permuta el resto de raíces positivas. \square

Demostración. (Teorema 11) Notemos que el Teorema 13 implica que $n(s) = 1$, para todo $s \in S$.

Veamos que $n(w)$ se comporta como la función longitud. Primero, verifiquemos que, para todo $s \in S, w \in W$, la condición $w(\alpha_s) > 0$ implica que $n(ws) = n(w) + 1$ y análogamente que $w(\alpha_s) < 0$ implica que $n(ws) = n(w) - 1$. En efecto, si $w(\alpha_s) > 0$, por Teorema 13, se sigue que, $n(ws) = \pi \cap sw^{-1}(-\pi) = s(\pi \cap w^{-1}(-\pi)) \dot{\cup} \{\alpha_s\}$. Veámoslo:

“ \subseteq ” Consideremos dos casos:

Si $\alpha_s \in \pi \cap sw^{-1}(-\pi)$, claramente, $\alpha_s \in s(\pi \cap w^{-1}(-\pi)) \dot{\cup} \{\alpha_s\}$.

Si $\alpha \in \pi \cap sw^{-1}(-\pi)$. Veamos que $\alpha \in s(\pi \cap w^{-1}(-\pi))$. Si $\alpha \in \pi \cap sw^{-1}(-\pi) \Rightarrow \alpha \in \pi$ y $\alpha \in sw^{-1}(-\pi)$ entonces $s(\alpha) \in \pi$ y $s(\alpha) \in w^{-1}(-\pi)$ luego $s(\alpha) \in \pi \cap w^{-1}(-\pi)$ por tanto $\alpha \in s(\pi \cap w^{-1}(-\pi))$.

“ \supseteq ” Sea $\alpha \in s(\pi \cap w^{-1}(-\pi)) \dot{\cup} \{\alpha_s\}$. Dos casos:

Si $\alpha \in \{\alpha_s\}$ entonces $\alpha = \alpha_s > 0$ por tanto, $\alpha \in \pi$. Ahora $\alpha \in w^{-1}(-\pi)$ pues $w(\alpha) > 0$ entonces $w(-\alpha) < 0$, así $w(-\alpha) \in -\pi$ de donde $-\alpha \in w^{-1}(-\pi)$. Pero $s(-\alpha) = \alpha$ entonces $\alpha \in sw^{-1}(-\pi)$.

Si $\alpha \in s(\pi \cap w^{-1}(-\pi))$. Se sigue en forma análoga al caso dos de la contención anterior. Similarmente, si $w(\alpha_s) < 0$ obtenemos $n(ws) = s((\pi \cap w^{-1}(-\pi)) \setminus \{\alpha_s\})$. Ahora, probaremos por inducción en $l(w)$ que $l(w) = n(w)$, para todo $w \in W$. Es claro para $l(w) = 0$ y también (por Teorema 13) para $l(w) = 1$. Ahora, por Teorema 12 se tiene que $l(ws) = l(w) + 1$ (respectivamente $l(w) - 1$) sólo cuando $w(\alpha_s) > 0$ (respectivamente cuando $w(\alpha_s) < 0$). Y usando lo anterior se llega a que $l(ws) = n(ws)$ lo que completa la prueba. \square

2.5.4. Problema de la Palabra

Definición. Decimos que (W, S) es un **sistema pre-Coxeter** si W es un grupo y S es un conjunto de elementos de orden 2 que generan a W .

Dado un sistema pre-Coxeter (W, S) discutiremos tres condiciones para palabras en S y mostraremos que son equivalentes. Veamos cada una de ellas.

Condición de Eliminación (D)

Si $w = s_1 \dots s_k$ es una palabra en S con $l(w) < k$ (es decir, es no reducida), entonces existen índices $1 \leq i < j \leq k$ tales que la subpalabra $w' = s_1 \dots s_{i-1} s_{i+1} \dots s_{j-1} s_{j+1} \dots s_k$ es también una expresión de w .

Es decir, dada $w = s_1 s_2 \dots s_{i-1} \underbrace{s}_{s_i} \underbrace{s'}_{s_{i+1}} ss'ss' \dots ss' \underbrace{s}_{s_j} \underbrace{s'}_{s_{j+1}} \dots ss' \dots s_k$, entonces como $s_i = s_j$, tomamos $\underbrace{s}_{s_i} s'ss'ss' \dots ss' \underbrace{s}_{s_j} = \underbrace{s'}_{s_{j+1}} s \dots ss'$. Reemplazando esto en w tenemos que $w = s_1 s_2 \dots s_{i-1} \underbrace{s'}_{s_{i+1}} s \dots s \underbrace{s'}_{s_{j-1}} \underbrace{s'}_{s_{j+1}} s \dots ss' \dots s_k$. Así se llega a w' que es una expresión de w .

Veamos que la Condición (D) implica una nueva condición que llamaremos Condición Intercambio (E). Supongamos que $w = s_1 \dots s_k$ es una expresión reducida y $s \in S$ tal que $l(sw) \leq k$.

Dado que $ss_1\dots s_k$ es no reducida, la condición (D) nos dice que podemos encontrar una palabra más corta para sw eliminando dos letras. Dado que w es reducida, ambas letras no pueden pertenecer a w , así una de las letras debe ser la inicial s . Por tanto, $(sw)' = s_1\dots s_{i-1}s_{i+1}\dots s_k$ y así $w = ss_1\dots s_{i-1}s_{i+1}\dots s_k$. En otras palabras, hemos intercambiado una letra de w por una s en frente. De acuerdo a esto, enunciemos formalmente la condición.

Condición de Intercambio (E)

Dada una expresión $w = s_1\dots s_k$ para $w \in W$ reducida, entonces ó $l(sw) = k + 1$ ó existe un índice i tal que $w = ss_1\dots s_{i-1}s_{i+1}\dots s_k$.

Ahora veamos que esta condición induce a una nueva condición que llamaremos Condición Plegado (F). Supongamos que $w = s_1\dots s_k$ es una expresión reducida y sean $s, t \in S$ tales que $l(sw) = k + 1 = l(wt)$ y $l(swt) < k + 2$. Aplicando la condición (E) a la palabra $s_1\dots s_k t$ y el elemento s , vemos que una letra puede ser intercambiada por una s en frente. Pero la letra intercambiada no puede ser parte de w , pues w es reducida y además contradiríamos el supuesto que $l(sw) = k + 1$. Así, la letra que se intercambia debe ser la t del final. Esto produce $ss_1\dots s_k = s_1\dots s_k t$ que puede ser escrito como $sw = wt$ ó $swt = w$. Definamos la condición.

Condición de Plegado (F)

Supongamos $w \in W$ y $s, t \in S$ tal que $l(sw) = l(w) + 1$ y $l(wt) = l(w) + 1$. Entonces ó $l(swt) = l(w) + 2$ ó $swt = w$.

Por último, veamos que la condición (F) implica la condición (D). Supongamos que la palabra $w = s_1\dots s_k$ no es reducida. Necesariamente $k \geq 2$. Debemos mostrar que nosotros podemos eliminar dos letras de w sin alterar su longitud. La prueba es por inducción en k . Podemos suponer que las palabras $s_1\dots s_{k-1}$ y $s_2\dots s_k$ son ambas reducidas (de lo contrario se reducen por inducción). Sea $w' = s_2\dots s_{k-1}$. Aplicando la condición (F) con $s = s_1$ y $t = s_k$ tenemos que $s_1 w' s_k = w$, es decir, $w = s_1\dots s_k$ puede ser acortada por eliminación de su primera y última letras.

De lo anterior se tiene el siguiente teorema.

Teorema 14. *Dado un sistema pre-Coxeter (W, S) . Las condiciones (D), (E) y (F) son equivalentes.*

Veremos que el problema de la palabra es soluble para los grupos Coxeter. Sea (W, S) un sistema pre-Coxeter.

Definición. *Una M-operación elemental de una palabra en S es una de las siguientes dos tipos:*

- I) *Eliminar una subpalabra de la forma (s, s) .*
- II) *Reemplazar una subpalabra alternante de la forma $st\dots$ de longitud m_{st} por la palabra alternante $ts\dots$ de la misma longitud m_{st} .*

Definición. *Una palabra es M-reducida si ésta no puede ser acortada por una secuencia de M-operaciones elementales.*

Teorema 15. *Supongamos que (W, S) satisface la condición (E) (ó equivalentemente la condición (D) ó (F)). Entonces:*

- a) *Una palabra w es una expresión reducida si y sólo si w es M-reducida.*

b) *Dos expresiones reducidas s y t representan el mismo elemento de W si y sólo si una puede ser transformada en la otra por una secuencia de M -operaciones elementales de tipo (II).*

Demostración. Probaremos primero b).

Supongamos que $s = s_1 \dots s_k$ y $t = t_1 \dots t_k$ son dos expresiones reducidas para un elemento $w \in W$. La prueba es por inducción sobre $k = l(w)$.

- Si $k = 1$ entonces las dos palabras son la misma y tenemos el resultado.
- Supongamos $k > 1$. Para simplificar la notación, sea $s = s_1$ y $t = t_1$. Consideremos dos casos:

Caso 1: Si $s = t$. Entonces $s_2 \dots s_k$ y $t_2 \dots t_k$ son dos palabras reducidas para el mismo elemento sw . Por inducción podemos transformar uno en el otro por una secuencia de operaciones tipo II. De este modo obtenemos el resultado.

Caso 2: Si $s \neq t$. Hagamos $m = m_{st}$.

Afirmemos que m es finita y podemos encontrar una tercera expresión reducida u para w que comience con una palabra alternante $st\dots$ de longitud m .

Asumiremos por el momento que la afirmación es cierta. Sea u' la palabra obtenida de u por la operación tipo II que reemplaza el segmento inicial de u por la palabra alternante $ts\dots$ que comienza con t . Entonces podemos transformar s en t por una secuencia de movimientos que se indican esquemáticamente como sigue $s \rightarrow u \rightarrow u' \rightarrow t$, donde la primera y tercera flecha representan secuencias de movimientos garantizados por el caso 1 (s y u comienzan con la misma letra al igual que u' y t) y la segunda flecha es la M -operación elemental de tipo II.

Probaremos la afirmación. Dado que $l(tw) < l(w)$, la condición (E) implica que podemos encontrar otra expresión reducida para w intercambiando una letra de $ss_2 \dots s_k$ por una t en frente. La letra intercambiada no puede ser la primera s pues $t \neq s$. Por tanto, obtenemos una expresión reducida que comienza con ts . Este proceso puede continuar. Para algún entero $q \geq 2$, sea s_q la palabra alternante en s y t de longitud q con letra final s . Así, s_q comienza ó con s (si q es impar) ó con t (si q es par). Mostraremos que para algún $q \leq m$, podemos encontrar una palabra reducida para w que comienza con s_q . Supongamos por inducción que tenemos tal palabra s' que comienza con s_{q-1} . Sea r' el elemento de $\{s, t\}$ con el que s_{q-1} no puede comenzar. Dado que $l(r'w) < l(w)$, la condición (E) dice que podemos encontrar otra expresión reducida intercambiando una letra de s' por una r' en frente. La letra intercambiada no puede pertenecer al segmento inicial s_{q-1} , dado que en el grupo diedral de orden $2m$, una expresión reducida para un elemento de longitud diferente a m es única. Así w tiene una expresión reducida que comienza con s_q . Dado que esto funciona para cualquier $q \leq m$ y dado que q es acotada por encima por $l(w)$, debemos tener que $m < \infty$. Así, w tiene una expresión reducida que comienza con s_m . Esta expresión reducida es ó u (si m es impar) ó u' (si m es par). Podemos reemplazar s_m por la otra palabra alternante de longitud m (también una expresión reducida de $w(s_m)$) para obtener la otra. Esto prueba la afirmación.

Finalmente, probaremos a).

" \Rightarrow " Es obvia.

" \Leftarrow " Supongamos que $w = s_1 \dots s_k$ es M -reducida. Mostraremos por inducción en k que esto es una expresión reducida.

Para $k = 1$, es claro.

Supongamos $k > 1$. Por inducción, la palabra $w' = s_2 \dots s_k$ es reducida. Supongamos que w no es reducida. Sea $w = s_1 \dots s_k$. Dado que $l(s_1 w') = l(w) \leq k - 1$, la condición (E) implica que w' tiene otra expresión reducida, llamada w'' , que comienza con s_1 . Por parte b), w' puede ser transformada en w'' por una secuencia de M-operaciones de tipo II. Así, w puede ser transformada usando una secuencia de M-operaciones en una palabra que comienza con $s_1 s_1$, lo que contradice la hipótesis de que esta es M-reducida. Así, w puede ser una expresión reducida. \square

Bibliografía

- [1] G. Baumslag, *A finitely presented metabelian group with a free abelian derived group of infinite rank*, American Mathematical Society (1972), 61–62.
- [2] A. Bjorner and F. Brenti, *Combinatorics of Coxeter groups*, Springer Science+Business Media, Inc, 2005.
- [3] S. Cleary and J. Taback, *Metric properties of the Lamplighter group as an automata group*, American Mathematical Society (2005), 2–7.
- [4] A. M. Cohen, *Coxeter group*, Curso de Maestría, Eindhoven University of Technology (2008), 53–65.
- [5] M. W. Davis, *The geometry and topology of Coxeter group*, Princeton University (2008), 37–40.
- [6] D. S. Dummit and R. M. Foote, *Abstract algebra*, Prentice Hall, INC, 1999.
- [7] D. B. A. Epstein and J. W. Cannon, *Word processing in groups*, Jones and Batlett Publishers, 1992.
- [8] E. Ghys and P. de la Harpe, *Sur les groupes hyperboliques d’après Mikhael Gromov*, Birkhäuser, 1990.
- [9] J. E. Humphreys, *Reflection groups and Coxeter groups*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, 2000.
- [10] S. P. Inamdar and A. C. Naolekar, *On quasi-isometric embeddings of Lamplighter groups*, Indian Statistical Institute Bangalore, India (2006), 1–3.
- [11] D. L. Johnson, *Presentations of groups*, London Mathematical Society, Cambridge, 1997.
- [12] M. Kassabov and T. R. Riley, *The dehn function of Baumslag’s metabelian group*, Cornell University (2000).
- [13] R. C. Lyndon and P. E. Schupp, *Combinatorial group theory*, Springer-Verlag Berlín, Inc, 1977.
- [14] W. S. Massey, *Algebraic topology and introduction*, Springer-Verlag New York, Inc, 1977.
- [15] J. Meier, *Groups, graphs and trees*, Cambridge University Press, 2008.
- [16] Charles F. Miller, *Combinatorial group theory*, Lecture Notes, University of Melbourne (2004), 3–50.

- [17] T. Riley N. Brady and H. Short, *The geometry of the word problem for finitely generated group*, Advanced Courses in Mathematics CRM Barcelona, Berlín, 2007.
- [18] D. J. S. Robinson, *A course in the theory of groups*, Springer-Verlag New York, Inc, 1995.
- [19] G. M. Vergara Ríos, *Teoría geométrica de grupos y algunas aplicaciones*, Tesis de Maestría, Universidad Nacional de Colombia (Octubre, 2009).
- [20] J. Stillwell, *Classical topology and combinatorial group theory*, Springer-Verlag New York, Inc, 1993.
- [21] A. Karrass W. Magnus and D. Solitar, *Combinatorial group theory*, Dover, New York, 1966.