

Tabla 4-2: Acciones de control obtenidas para puntos del borde de la región  $S_8(X, Y_{sp})$ .

Puntos sobre el borde de la región		Acciones de control en EE		Puntos sobre el borde de la región		Acciones de control en EE	
Ca (mol/l)	Temperatura (K)	F0 (l/min)	Fj (l/min)	Ca (mol/l)	Temperatura (K)	F0 (l/min)	Fj (l/min)
0.0507	402.8231	66.87	69.91	0.0772	405.03	119.90	113.19
0.0542	402.3689	69.77	73.12	0.0755	405.24	118.57	111.82
0.0564	402.083	71.50	75.04	0.0715	405.72	115.09	108.35
0.0593	401.7221	73.75	77.53	0.0671	406.23	110.83	104.19
0.0631	401.2772	76.65	80.72	0.0623	406.76	105.71	99.27
0.0680	400.6874	80.05	84.51	0.0604	406.96	103.57	97.22
0.0703	400.4179	81.58	86.22	0.0588	407.13	101.66	95.42
0.0720	400.2288	82.73	87.47	0.0569	407.32	99.32	93.22
0.0786	399.4854	86.84	92.03	0.0534	407.67	94.84	89.02
0.0796	399.3685	87.40	92.67	0.0513	407.88	92.06	86.42
0.0852	398.7773	90.69	96.28	0.0502	407.97	90.46	84.96
0.0874	398.5449	91.91	97.62	0.0498	408.00	89.86	84.42
0.0878	398.499	92.10	97.84	0.0493	408.03	89.06	83.70
0.0913	398.1727	94.19	100.05	0.0449	408.22	81.67	77.17
0.0980	397.6116	98.31	104.25	0.0433	408.28	78.89	74.72
0.0995	397.4815	99.17	105.13	0.0431	408.27	78.50	74.38
0.1006	397.4246	100.03	105.92	0.0426	408.26	77.48	73.51
0.1036	397.2701	102.35	108.07	0.0422	408.24	76.61	72.79
0.1054	397.1834	103.77	109.37	0.0419	408.21	75.93	72.22
0.1088	397.6834	110.97	114.87	0.0411	408.11	73.96	70.62
0.1098	397.8382	113.22	116.55	0.0407	408.07	73.04	69.86
0.1101	397.9099	114.08	117.18	0.0396	407.92	70.37	67.67

Puntos sobre el borde de la región		Acciones de control en EE		Puntos sobre el borde de la región		Acciones de control en EE	
0.1103	398.0229	115.13	117.92	0.0391	407.86	69.16	66.67
0.1104	398.0651	115.56	118.22	0.0389	407.82	68.66	66.26
0.1110	398.6392	120.54	121.63	0.0383	407.68	67.00	64.92
0.1111	398.7386	121.41	122.23	0.038	407.60	66.14	64.24
0.1112	398.8129	122.10	122.70	0.0374	407.44	64.43	62.86
0.1114	399.1171	124.71	124.44	0.0372	407.38	63.82	62.38
0.1115	399.2307	125.73	125.12	0.0371	407.33	63.46	62.10
0.1116	399.4407	127.52	126.30	0.037	407.10	62.43	61.39
0.1112	399.8438	130.24	127.99	0.0367	406.60	60.03	59.70
0.1111	399.907	130.63	128.22	0.0365	406.19	58.25	58.44
0.1105	400.126	131.62	128.74	0.0365	406.08	57.86	58.18
0.1099	400.3966	133.04	129.54	0.0369	405.80	57.52	58.13
0.1092	400.604	133.80	132.89	0.0376	405.25	56.75	57.93
0.1089	400.6616	133.87	129.88	0.0376	405.23	56.66	57.87
0.1068	401.0717	134.36	129.78	0.0377	405.19	56.70	57.93
0.1063	401.1615	136.40	129.71	0.0383	404.97	57.18	57.95
0.1041	401.4817	133.93	128.95	0.0388	404.78	56.96	58.58
0.1009	401.9613	133.24	127.83	0.0395	404.54	57.19	59.02
0.0969	402.5405	132.03	126.15	0.0436	403.77	60.49	62.90
0.0857	403.9743	125.94	119.47	0.044	403.71	60.94	63.20
0.0789	404.8248	121.23	114.54	0.0507	402.82	66.87	69.91

$$[F_{0min} F_{0max}] = [56.66l /min \ 136.40 \ l/min]$$

$$[F_{jmin} F_{jmax}] = [57.88 \ l/min \ 132.89 \ l/min]$$

Luego a partir de estos límites es posible aproximar y concluir que las válvulas deben restringirse a un intervalo de 60-140 l/min, con el fin de mejorar el funcionamiento del PI y restringir las acciones de control a tomar por el PI.

Posteriormente, se procede a usar la región terminal obtenida, el dominio de atracción y la estrategia de conmutación del CPBM por modo dual, para comparar así los resultados obtenidos por este controlador, con los arrojados por el CPBM convencional y el PI, formulados en la sección 4.1 y 4.3.

## 4.5 Resultados de simulación controladores

Para la evaluación de desempeño de los controladores formulados en esta tesis se procede a variar la condición inicial del proceso, iniciando desde fuera de la región terminal, y evaluar así el comportamiento y la trayectoria seguida hasta alcanzar el punto de operación.

En adelante se presentan las graficas obtenidas para dos condiciones iniciales

*Ensayo 1:  $C_a = 0.0311 \text{ mol/l}$   $T = 395.39 \text{ K}$*

*Ensayo 2:  $C_a = 0.2292 \text{ mol/l}$   $T = 378.73 \text{ K}$ .*

Es preciso mencionar que dichas condiciones iniciales se encuentran al interior del dominio de atracción del CPBM dual hallado en la sección 4.4.1.

La

**Figura 4-14 a** Figura 4-17 muestran los resultados obtenidos para el *ensayo 1*. La

**Figura 4-14**, muestra los resultados obtenidos al simular a lazo cerrado CSTR, la línea color magenta indica la trayectoria seguida por el CPBM por modo dual, mientras la negra indica la trayectoria seguida por el CPBM convencional, mientras la línea color azul representa la trayectoria seguida por el controlador PI. Estos rótulos de colores se conservan a lo largo del capítulo.

**Figura 4-14:** Evolución de los estados a lazo cerrado (CPBM dual, convencional y PI)

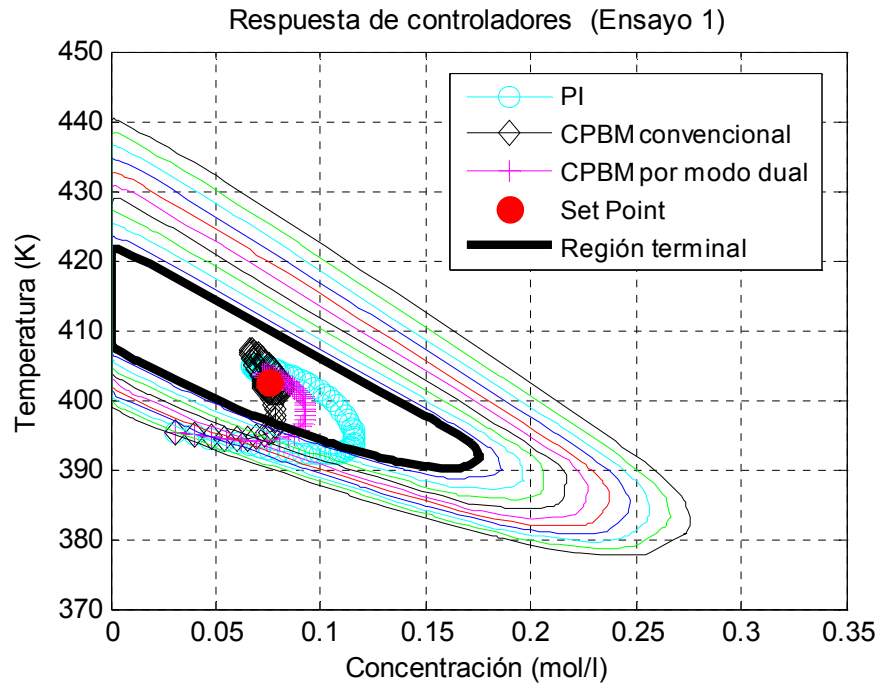


Figura 4-15: Zoom extendido trayectoria del sistema hasta alcanzar la región terminal  $\Omega$ .

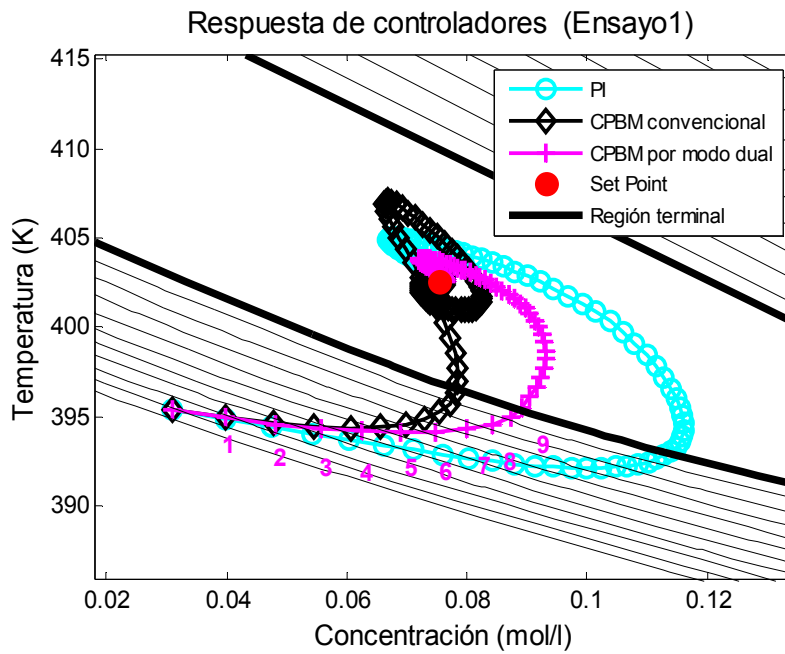


Figura 4-16: Evolución de estados en el tiempo

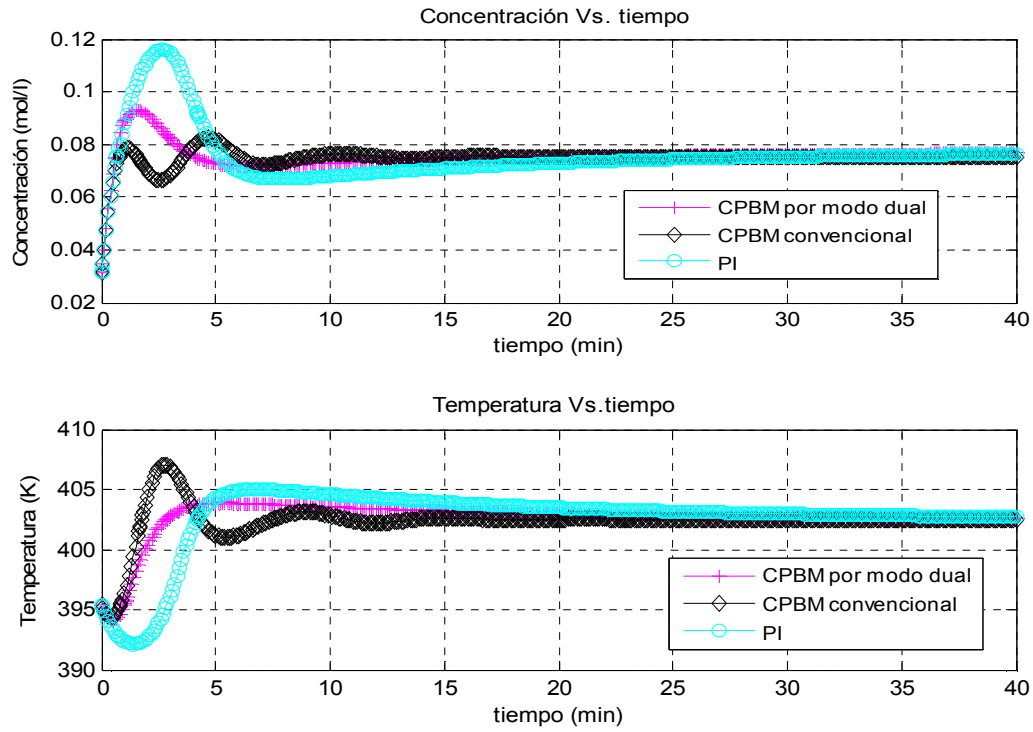
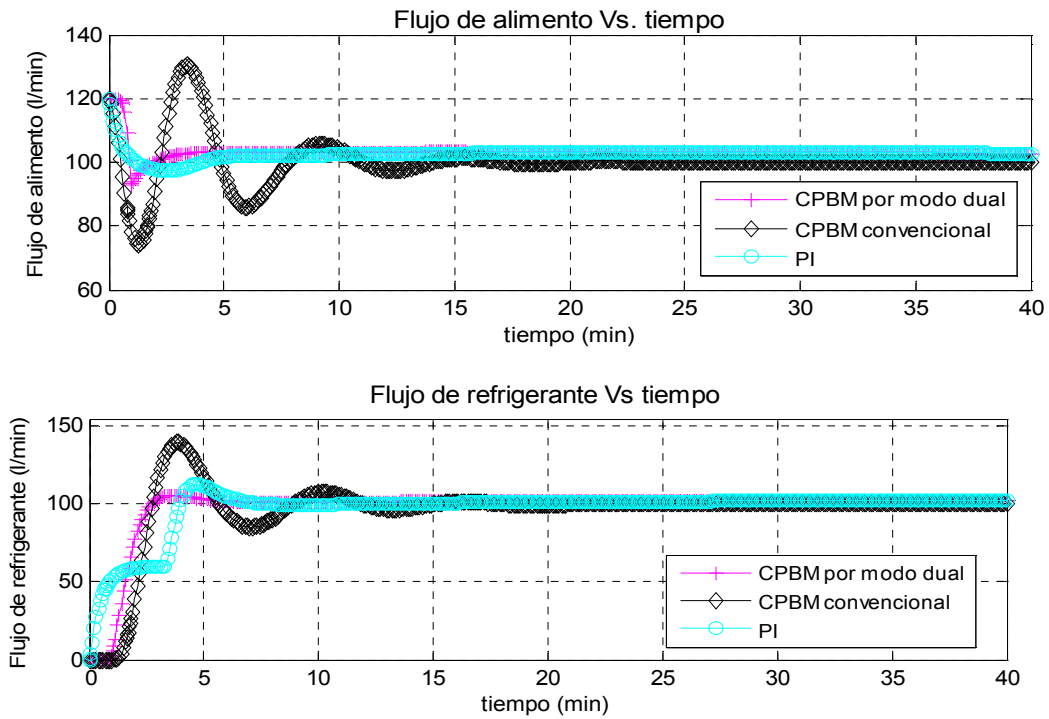
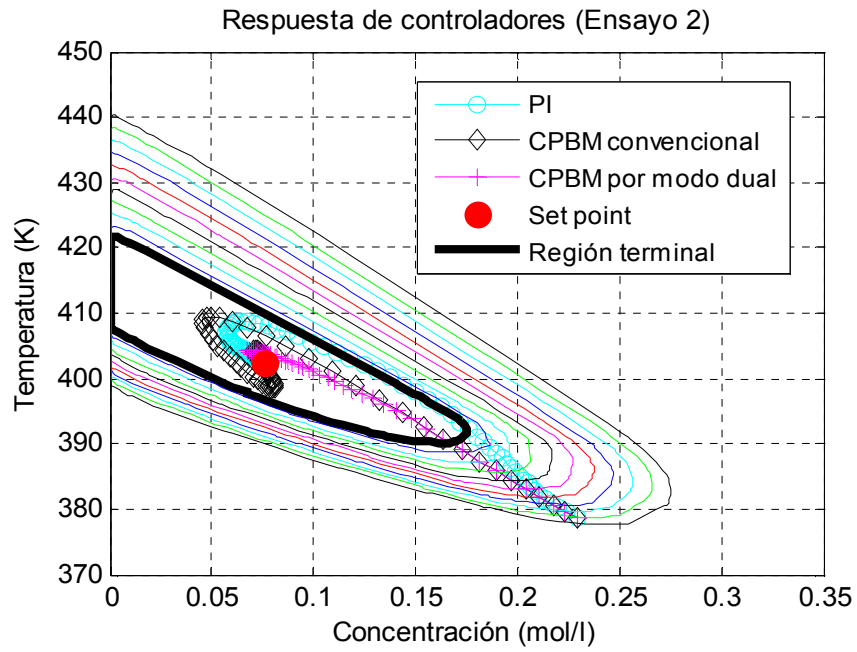


Figura 4-17: Acciones de control ejecutadas

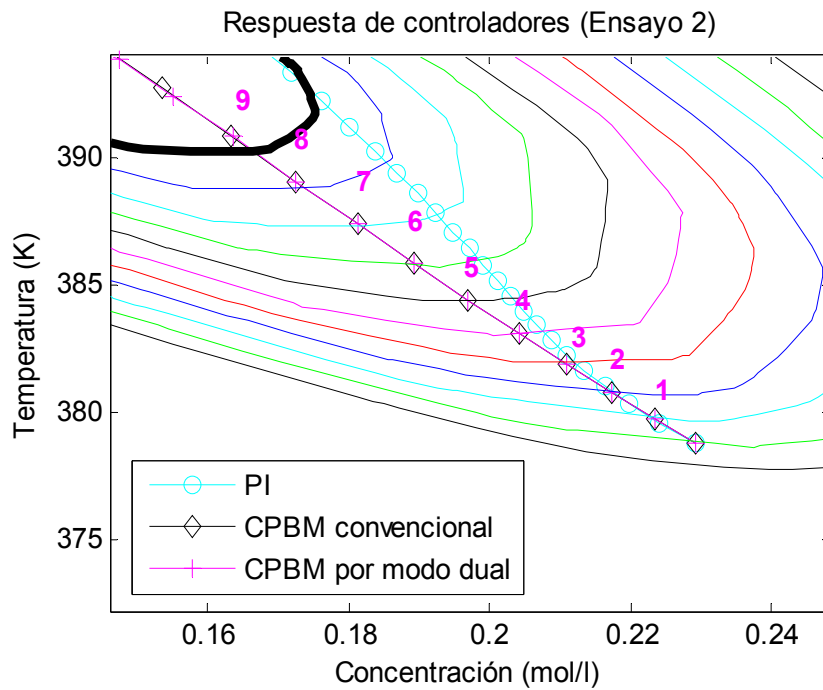


La Figura 4-18 a Figura 4-21, presentan los resultados obtenidos para el Ensayo 2:

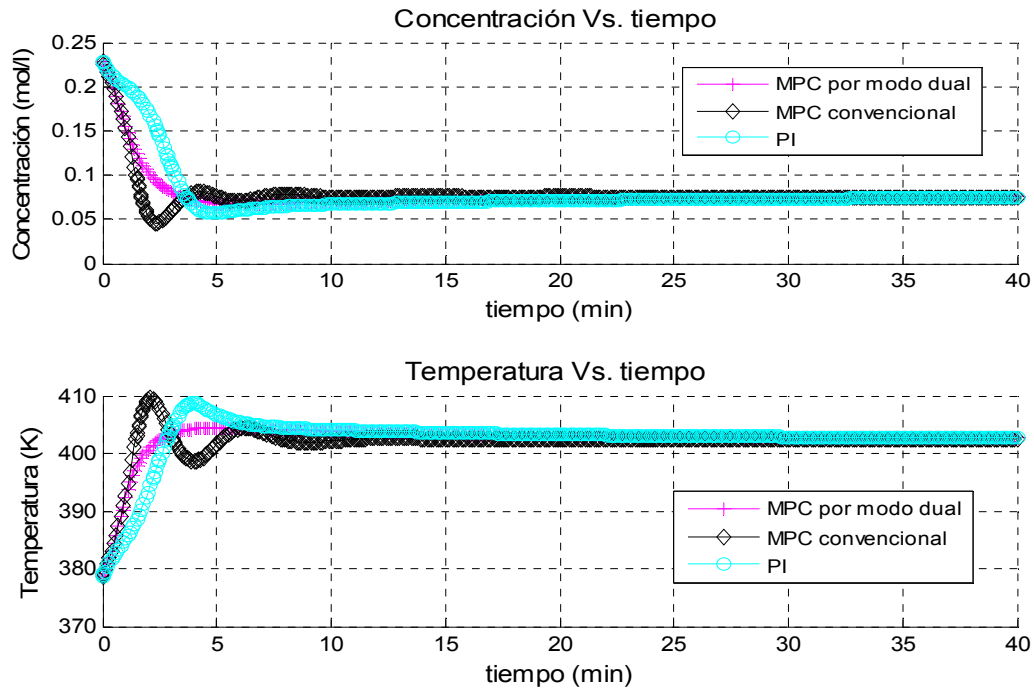
**Figura 4-18:** Evolución de los estados a lazo cerrado (CPBM dual, convencional y PI)



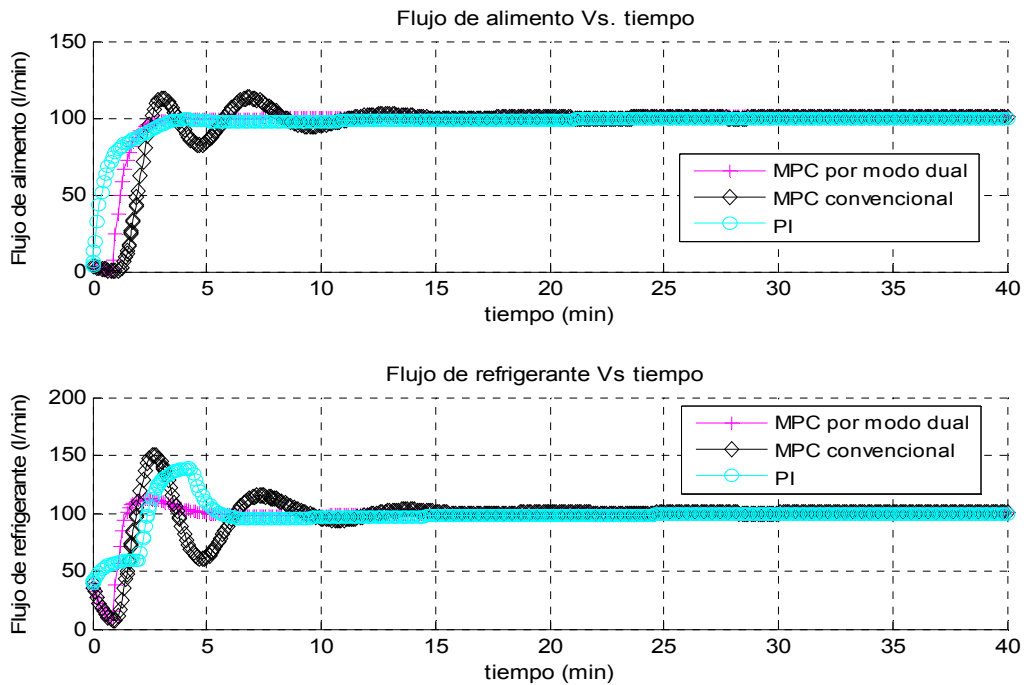
**Figura 4-19:** Zoom extendido Comportamiento CPBM dual fuera de la región terminal  $\Omega$



**Figura 4-20:** Evolución de estados en el tiempo



**Figura 4-21:** Acciones de control ejecutadas





## 4.6 Análisis de resultados

En la Figura 4-15 se muestra un zoom de la trayectoria seguida por los controladores, con el fin de resaltar la importancia del cálculo del dominio de atracción del CPBM. Es decir, al final de la sección 4.4.1, se presentó el procedimiento seguido para hallar el dominio de atracción del CPBM por modo dual, este consistía en hallar una región estabilizable en 10 pasos, lo que implicaba que al agregar la restricción 61, el sistema debía estar dentro de la región terminal en 10 pasos o menos, o lo que es lo mismo en 1 minuto, ya que se garantiza que todos los estados que están dentro de la región de atracción son factibles. Este comportamiento se puede verificar en la Figura 4-15, donde es notorio que el CPBM convencional toma más tiempo en ingresar a la región terminal, mientras el CPBM, haciendo uso de la restricción 61 está adentro al cabo de 10 pasos.

Este mismo comportamiento se puede evidenciar en la Figura 4-18, donde se observa que el sistema parte del conjunto estabilizable a 10 pasos y en 9 ya ha ingresado a la región. En esta figura se presenta una diferencia con respecto a los resultados observados para el ensayo 1, ya que en esta grafica el CPBM por modo dual y el CPBM convencional siguen la misma trayectoria al estar fuera de la región terminal, esto debido a que al final del horizonte de predicción el sistema se encuentra dentro de la región terminal por lo tanto no es necesario activar la restricción 61.

El CPBM convencional presenta un mejor desempeño, como se aprecia en la en la Tabla 4-3, sin embargo, no se debe perder de vista que a pesar de presentar un buen desempeño, esta estrategia no garantiza estabilidad. El hecho de que para los dos ensayos realizados en esta tesis sea estable, no garantiza que lo sea para todos los puntos.

En cuanto al comportamiento observado en las acciones de control es de resaltar que el CPBM convencional genera acciones de control oscilatorias, Ver Figura 4-17 y Figura 4-21. Lo cual no se observa en las acciones generadas por el CPBM por modo dual

En general en todas las figuras que se muestran, el PI aparece como el controlador con menor desempeño, a diferencia de los resultados que arroja este mismo PI al estar implementado en la estrategia de CPBM por modo dual. De allí se concluye que el PI al ser un controlador lineal solo tiene un buen desempeño en regiones cercanas al origen y además se justifica la restricción al elemento final de control realizado en la estrategia de conmutación implementada en CPBM por modo dual.

Finalmente en la Tabla 4-3, se presenta el cálculo del ITAE, para cada uno de los controladores formulados en esta investigación, este índice se calcula según se muestra en el Anexo D y sirve como índice de comparación entre los controladores. Observándose que el CPBM por modo dual tiene un desempeño medio comparado con el PI y el CPBM convencional.

Tabla 4-3: Índices de desempeño de los controladores usados

<i>Controlador</i>	<i>Ensayo 1</i>		<i>Ensayo 2</i>	
	<i>ITAE C<sub>a</sub></i>	<i>ITAE T</i>	<i>ITAE C<sub>a</sub></i>	<i>ITAE T</i>
<i>CPBM dual</i>	0.9447	293.80	1.4579	422.35
<i>CPBM convencional</i>	0.1832	72.20	0.3226	90.1902
<i>PI</i>	1.6493	619.61	3.017	533.17

## 5. Conclusiones y trabajos futuros

### 5.1 Conclusiones

En esta investigación se obtiene una estrategia de CPBM por modo dual implementable a nivel industrial, la cual consta de una región terminal dentro de la cual actúa un controlador PI, mientras fuera de ella actúa el CPBM. Con esta estrategia se pretende cerrar la brecha existente actualmente entre la academia y la industria, debido a que han sido muchas las propuestas de CPBM con estabilidad garantizada propuestas en la academia, pero pocas las implementadas a nivel industrial.

El hecho de usar un controlador PI, dentro de la región terminal del CPBM por modo dual, lo hace una propuesta atractiva a nivel industrial, ya que no debe perderse de vista que el 95% de los controladores implementados a nivel industrial son PI.

En esta investigación se propone además, una metodología para el cálculo de una región, aplicable a procesos continuos no lineal, en ella se fusiona la teoría de conjuntos invariantes y algoritmos aleatorizados del tipo Monte Carlo y como resultado arroja una aproximación (politopos) al verdadero conjunto, resaltando que esta región es más grande que la que se hubiese obtenido por teoría de Lyapunov (elipse) y a menor costo computacional que si se utilizase los procedimientos actuales para hallar poliedros o politopos, mencionados en la sección 3.2.2.

Como complemento para el diseño del CPBM por dual, se propuso una estrategia de conmutación, en la cual se restringe el intervalo de acción del elemento de control, es decir, para el caso puntual del CSTR, se restringe el movimiento de válvula únicamente de 60-140 l/min, correspondiente a una región en la cual el sistema a pesar de ser no lineal, se comporta como un sistema lineal, que es precisamente lo que se asume en la región terminal  $\Omega$ .

En conclusión, en esta tesis se obtiene un controlador CPBM por modo dual de desempeño medio, pero capaz de garantizar la estabilidad del diseño mismo, mediante la fusión de un controlador CPBM y un PI. A nivel operativo se alcanzan dos logros que son; una nueva metodología para el cálculo de la región terminal por medio de algoritmos aleatorizados de Montecarlo y una estrategia de conmutación entre los controladores.

### 5.2 Trabajos futuros

Comparar el desempeño obtenido con el controlador propuesto en esta tesis con otros CPBM con estabilidad garantizada.

En esta investigación se propone una estrategia de cálculo para la región terminal, pero se debe recordar que dicha región no solo es útil para el CPBM por modo dual sino también para otros tipos de CPBM con estabilidad garantizada como CPBM con costo y restricción terminal, entonces, es preciso extender el cálculo de la región propuesto para estos otros controladores.

# A. Anexo: Control predictivo basado en modelo (CPBM)

El CPBM presenta una serie de ventajas y desventajas sobre otros métodos, entre las que destacan (Camacho and Bordons, 2000):

## ***Ventajas:***

- Puede ser usado para controlar una gran variedad de procesos, desde aquellos con dinámica relativamente simple hasta otros con dinámicas más complejas, inclusive sistemas con grandes retardos y sistemas de fase no mínima o inestables.
- Permite tratar con facilidad el caso multivariable.
- Posee intrínsecamente compensación para tiempos muertos (retardo).
- Resulta conceptualmente simple la extensión al tratamiento de restricciones, que pueden ser incluidas de forma sistemática durante el proceso de diseño.
- Es muy útil cuando se conocen las futuras referencias (robótica o procesos por lotes).
- Posee un control prealimentado (*feedforward*) que permite compensar las perturbaciones medibles.
- Es una metodología completamente abierta basada en algunos principios básicos que permite futuras extensiones.

## ***Desventajas:***

- La necesidad de un modelo apropiado, que capture al máximo la dinámica del proceso.
- La carga computacional para realizar algunos casos (CPBM no lineal).
- Sintonización. No existe una clara relación entre los parámetros de sintonía y el comportamiento del sistema.

## ***Elementos que forman el Controlador predictivo basado en modelo.***

Todos los controladores predictivos poseen tres elementos comunes (Figura 1-1), un **modelo de predicción**, un bloque **optimizador**, y una **estrategia deslizante** para obtener la ley de control. Para cada uno de estos elementos se pueden elegir diversas

opciones, dando lugar a distintos algoritmos que difieren entre sí provocando distintos comportamientos en lazo cerrado, por lo que es fundamental utilizar la estrategia más adecuada que garantice el éxito de un determinado algoritmo.

### Modelo de Predicción

El modelo del CPBM es el componente más importante del controlador. Se debe construir un modelo que capture al máximo las dinámicas principales que describen el proceso, y permita el cálculo de las predicciones. Además es importante que represente y describa el proceso para poder hacer un análisis teórico. Estos modelos deben representar las relaciones entre las entradas y salidas (ó estados), al igual que las perturbaciones medibles del sistema.

### Optimizador

Como su nombre lo indica allí se realiza el proceso de optimización de la **función objetivo** teniendo en cuenta las **restricciones**, estos dos términos se definen a continuación.

- *Función Objetivo.* Como se mencionó anteriormente el CPBM halla la acción de control por medio de una optimización que se realiza sobre la función objetivo ó funcional de costo en un instante determinado (cada instante de muestreo). Esta función es elegida por el diseñador del sistema de control, generalmente la función objetivo tiene la forma:

$$V(x(k), u(k)) = \sum_{i=m_1}^{n_1} \alpha_i [\hat{x}(k+i|k) - x_{ref}(k+i)]^2 + \sum_{i=m_2}^{n_2} \beta_i [\Delta u(k+i-1)]^2 + \sum_{i=m_3}^{n_3} \sigma_i [u(k+i|k) - u_{ref}(k+i)]^2 \quad A-1$$

Usualmente,  $m_1, m_2, m_3$ , son iguales a 1,  $n_1$  y  $n_3$ , son iguales a horizonte de predicción  $H_p$ , y  $n_2$  igual al horizonte de control,  $H_c$ . Estos términos se definen en la sección 0.

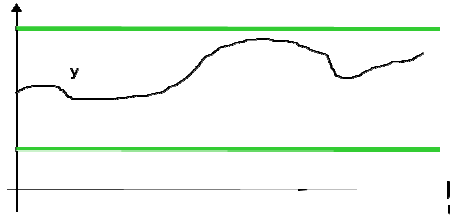
El primer término de la ecuación A-1 penaliza el error entre el estado predicho  $\hat{x}$  y el estado de referencia  $x_{ref}$ , es decir, garantiza una buena regulación o seguimiento del proceso. El segundo término penaliza los cambios en la acción de control, es decir suaviza los cambios en la acción de control. Y el tercero evita que la acción de control se aleje de la acción que se debería tener en estado estacionario (condiciones nominales). Este último caso, en ocasiones, perjudica el sistema de control, ya que luego de una perturbación es necesario que la acción de control se mueva para hacia un nuevo estado estacionario para conservar los estados en el punto de referencia a pesar de las perturbaciones.

**Restricciones.** Indican los límites dentro de los cuales debe discurrir la evolución del sistema. La evolución de las señales de un sistema no debe exceder determinadas restricciones que, ya sea por límites físicos o bien por motivos de seguridad, se imponen

al sistema. Dichas restricciones generalmente se realizan sobre las variables controladas y las manipuladas, como se muestra a continuación.

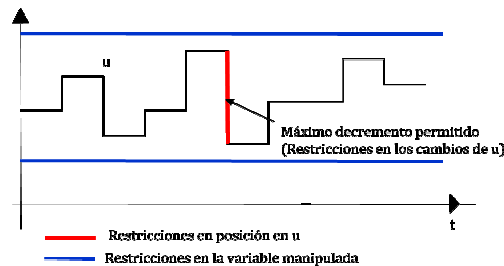
- Restricciones sobre los valores futuros de las variables controladas

**Figura A-1:** Restricciones sobre la variable controlada



Restricciones sobre las velocidades de cambio de las variables manipuladas y sobre los valores futuros de las variables manipuladas

**Figura A-2:** Restricciones sobre la variable manipulada y los cambios de la variable manipulada



### ***Estrategia de horizonte deslizante***

Esta estrategia consiste en desplazar el horizonte hacia el futuro, se aplica la primera señal y se vuelve a realizar los cálculos.

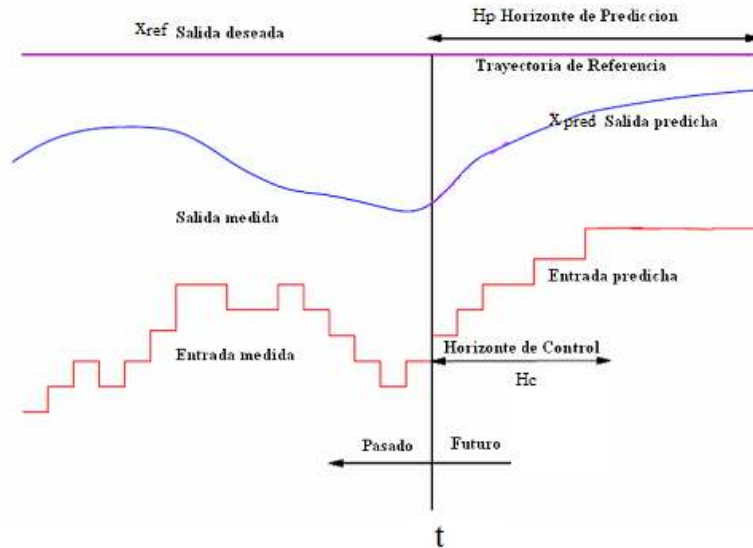
En la Figura A-3, se presenta la estrategia de horizonte deslizante que usa el CPBM. Donde  $t$  es el tiempo actual, la línea morada es la trayectoria deseada en un horizonte de predicción  $H_p$ .

- En cada instante de muestreo  $t$  y haciendo uso del modelo del proceso se predicen las salidas ó estados futuros para un determinado horizonte  $H_p$ , llamado horizonte de predicción. Estas salidas ó estados predichos  $\hat{x}(t+k|t)$ , para  $k = 1, \dots, N$  dependen de las señales de control futuras  $u(t+k|t)$ ,  $k = 0, \dots, N-1$ , estas señales son generadas por el optimizador a partir de las entradas y salidas pasadas.
- Luego se calculan la secuencia de señales de control óptima, minimizando un funcional de costo, que tiene en cuenta los valores de las entradas y salidas

pasadas conocidos hasta el instante  $t$ , generalmente este funcional de costo penaliza el error en la variable controlada y el cambio en la variable manipulada.

- c. Se envía la primera señal de control  $u(t)$  al proceso, mientras las demás señales de control son descartadas.
- d. Se actualizan los valores. Se vuelve al numeral "a" con la nueva medida  $x(t+1)$ .

**Figura A-3:** Estrategia de horizonte deslizante.



En la Figura A-3, el Horizonte de predicción ( $H_p$ ) se refiere al número de tiempos de muestreo en el futuro en los cuales la salida será predicha a través de un modelo del proceso, y el horizonte de control ( $H_c$ ), es el número de tiempos de muestreo en el futuro en los cuales se cambiará la variable manipulada, por encima de este valor la acción de control permanece constante. Si se consideran  $H_c$  tiempos de muestreo, se tienen  $H_c$  grados de libertad para retornar la salida del proceso a su valor deseado sobre el horizonte de predicción  $H_p$ . En general  $H_c < H_p$ .

Cabe resaltar que la acción de control medida varía en cada tiempo de muestreo, esto debido a la estrategia de horizonte deslizante, que actualiza este valor cada vez que se realiza la optimización.



# B. Anexo: Teoría de estabilidad de Lyapunov

La teoría de estabilidad de Lyapunov se inspira en el concepto de energía y disipación de energía (ó preservación). La idea principal de esta teoría se basa en el hecho de que si un punto de equilibrio de un sistema dinámico es un mínimo local de una función de energía y el sistema es disipativo, entonces este punto de equilibrio es localmente estable.

## B.1 Definiciones básicas

A continuación se presentan las definiciones preliminares necesarias para el entendimiento del concepto de estabilidad según Lyapunov. (Vidyasagar, 1993)

*Sistema Autónomo no forzado.* Sistema dinámico que no es función del tiempo y que tampoco puede ser forzado por unas entradas, solo es función del vector de estados  $x$ .

$$\dot{x} = f(x) \quad \text{B-1}$$

*Sistema Autónomo forzado.* Depende de los estados y de unas entradas, o variables manipulables.

$$\dot{x} = f(x, u) \quad \text{B-2}$$

*Sistema no autónomo.* Depende del tiempo.

$$\dot{x} = f(t, x(t)) \quad \text{B-3}$$

Las definiciones que se muestran en adelante, se definen para un sistema continuo, con solución  $s(t, t_0, x_0)$ , asumida como única, la cual corresponde a la condición inicial  $x(t_0) = x_0$ , evaluada en el tiempo  $t$ . Es decir,  $s(t_0, t_0, x_0) = x_0$ .

*Punto de Equilibrio.* Se dice que  $x_e$  es un punto de equilibrio de (17), Si  $f(t, x_e) = 0$  para toda  $t \geq 0$ .

Es común encontrar definiciones en donde se define a  $x_e = 0$  como un punto de equilibrio, y por lo tanto  $f(0) = 0$ .

En adelante se considera el origen "0" como punto de equilibrio del sistema dinámico, teniendo en cuenta que cualquier punto de equilibrio se puede desplazar al origen por un cambio de coordenadas.

*Conjunto invariante positivo.* Se dice que el conjunto  $\Phi \subset \mathbb{R}^n W$ , es un invariante positivo, si para todo  $x_0 \in \Phi$ , la evolución del sistema es tal que nunca abandona  $\Phi$ , es decir,  $s(t, t_0, x_0) \in \Phi, \forall t \geq t_0$ .

## Definición de Estabilidad (Vidyasagar, 1993)

*Estable en el sentido de Lyapunov.* El equilibrio 0 es Estable en el sentido de Lyapunov, si para cada  $\varepsilon > 0$  y  $t_0 > 0$  existe un  $\delta(\varepsilon, t_0)$  tal que,

$$\|x_0\| < \delta(\varepsilon, t_0) \Rightarrow \|s(t, t_0, x_0)\| < \varepsilon, \forall t \geq t_0 \quad \text{B-4}$$

*Uniformemente Estable en el sentido de Lyapunov.* El equilibrio 0 es Uniformemente Estable en el sentido de Lyapunov, si para cada  $\varepsilon > 0$  y  $t_0 > 0$  existe un  $\delta(\varepsilon)$  tal que,

$$\|x_0\| < \delta(\varepsilon), t_0 \geq 0 \Rightarrow \|s(t, t_0, x_0)\| < \varepsilon, \forall t \geq t_0 \quad \text{B-5}$$

Estos conceptos de estabilidad se pueden explicar diciendo que: para cualquier región  $B_\varepsilon$ , existe un  $B_\delta$ , tal que las trayectorias que empiezan en  $B_\delta$ , al evolucionar el tiempo  $t$ , no se alejan de  $B_\varepsilon$ .

*Observación.* La diferencia entre los conceptos *estable* y *uniformemente estable*, radica en que para el primer concepto  $\delta$  depende de  $\varepsilon$  y  $t_0$  ( $\delta(\varepsilon, t_0)$ ), mientras en la definición de *uniformemente estable*  $\delta$ , sólo depende de  $\varepsilon$ , ( $\delta(\varepsilon)$ ).

*Equilibrio Atractivo.* El equilibrio 0 es Atractivo, si para cada  $t_0 \in \mathbb{R}_+$  existe un  $\eta(t_0) > 0$  tal que,

$$\|x_0\| < \eta(t_0) \Rightarrow s(t_0 + t, t_0, x_0) \rightarrow 0 \text{ cuando } t \rightarrow \infty \quad \text{B-6}$$

Es decir, la atractividad significa que para  $t_0 > 0$ , existe una región alrededor de 0, tal que si el sistema comienza dentro de esta región, la evolución de la solución de este sistema tiende a 0.

El equilibrio 0 es *uniformemente atractivo* si existe un número  $\eta > 0$  tal que:

$$\|x_0\| < \eta, t_0 \geq 0 \Rightarrow s(t_0 + t, t_0, x_0) \rightarrow 0 \text{ cuando } t \rightarrow \infty \quad \text{B-7}$$

*Asintóticamente estable.* El equilibrio 0 es asintóticamente estable si:

- Es estable.
- Es atractivo.

*Dominio de atracción* La región más grande de la estabilidad asintótica  $D(0)$ .

*Equilibrio localmente uniformemente asintóticamente.* El equilibrio 0 es localmente uniformemente asintóticamente si:

- Es uniformemente estable.
- Es uniformemente atractivo.

*Exponencialmente estable.* El equilibrio 0 es exponencialmente estable si existen  $r, a, b > 0$  tales que

$$\|s(t_0 + t, t_0, x_0)\| < a\|x_0\|e^{-bt}, \forall t, t_0 \geq 0, \forall x_0 \in B_r \quad \text{B-8}$$

La estabilidad exponencial demanda que  $s(t, t_0, x_0)$  converja a 0, tan o más rápido que alguna función exponencial, lo que claramente la ubica como una propiedad más fuerte que la estabilidad asintótica uniforme.

Si la región  $B_r \rightarrow \infty$ , se dice que el equilibrio 0, es *globalmente exponencialmente estable*.

## B.2 Teoremas de Estabilidad de Lyapunov.

Para verificar la estabilidad en el espacio de estado de un sistema de la forma (B-3), los métodos más empleados son *el método directo de Lyapunov* y *el método de linealización*.

### B.2.1. Método directo de Lyapunov

A continuación se presentan unas definiciones previas necesarias para el entendimiento del Método Directo de Lyapunov.

Una función  $\alpha: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ , se dice que es una *función clase K* si

- $\alpha$  Es una función continua.
- $\alpha$  estrictamente creciente, es decir: si  $a > b$ , entonces  $\alpha(a) > \alpha(b)$ .
- $\alpha(0) = 0$

Una función  $V: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_+$ , se dice que es *localmente definida positiva (lpdf)* si existe una función clase K,  $\alpha(\cdot)$  tal que

$$\alpha(\|x\|) \leq V(x) \quad \text{B-9}$$

$$\forall x \in S(r) = \{x \in \mathbb{R}^n: \|x\| \leq r\} \quad \text{B-10}$$

Si esta condición se extiende a  $\mathbb{R}^n$ , entonces se denomina *globalmente definida positiva*.

$V(\cdot)$  es una *función definida positiva(pdf)* si (52) se mantiene para todo  $x \in \mathbb{R}^n$ .

**Teorema 1.** El equilibrio 0 del sistema (B-3) es *estable* si existe una función continuamente diferenciable, lpdf  $V: \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  y una constante  $r > 0$ , tal que

$$\dot{V}(t, x) \leq 0, \forall t \geq t_0, \forall x \in B_r \quad \text{B-11}$$

Donde  $\dot{V}$ , se calcula a lo largo de la trayectoria de (B-3)

Cabe resaltar que el método directo ofrece una condición suficiente pero no necesaria para que un sistema sea estable. Si se encuentra una función  $V$  que cumpla las condiciones del Teorema 1 entonces la estabilidad de  $\mathbf{0}$  está garantizada; en caso contrario, no puede asegurarse nada.

**Teorema 2.** El equilibrio  $\mathbf{0}$  del sistema (B-3) es uniformemente estable si existe una función continuamente diferenciable, lpdf  $V: \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  y una constante  $r > 0$ , tal que

$$\dot{V}(t, x) \leq 0, \forall t \geq 0, \forall x \in B_r \quad \text{B-12}$$

**Teorema 3.** El equilibrio  $\mathbf{0}$  del sistema (B-3) es uniformemente asintóticamente estable si existe una función continuamente diferenciable, decreciente, lpdf,  $V: \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $-\dot{V}$  es una lpdf.

**Teorema 4.** El equilibrio  $\mathbf{0}$  es *exponencialmente estable*, si existen constantes  $a, b, c, r > 0$ ,  $p \geq 1$ , y una función continuamente diferenciable  $V: \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , tal que

$$a\|x\|^p \leq V(t, x) \leq b\|x\|^p, \forall t \geq 0, \forall x \in B_r \quad \text{B-13}$$

$$\dot{V}(t, x) \leq -c\|x\|^p, \forall t \geq 0, \forall x \in B_r \quad \text{B-14}$$

**Teorema 5.** El equilibrio  $\mathbf{0}$  es globalmente uniformemente asintóticamente estable, si existe una función continuamente diferenciable,  $V: \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  tal que,

- $V$  es lpdf, decreciente y radialmente acotada.
- $-\dot{V}$  es pdf.
- 

**Teorema 6.** El equilibrio  $\mathbf{0}$  es *globalmente exponencialmente estable*, si existen constante  $a, b, c > 0$ ,  $p \geq 1$ , y una función continuamente diferenciable  $V: \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , tal que

$$a\|x\|^p \leq V(t, x) \leq b\|x\|^p \quad \text{B-15}$$

$$\dot{V}(t, x) \leq -c\|x\|^p, \quad \forall t \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}^n \quad \text{B-16}$$

El teorema que se presenta a continuación es aplicable a sistemas autónomos ó a sistemas no autónomos periódicos, a diferencia de los teoremas anteriores los cuales son validos para sistemas no autónomos.

**Teorema 7 (La Salle).** La estabilidad puede estudiarse de manera general con respecto a conjuntos invariantes y no simplemente respecto al equilibrio  $\mathbf{0}$ . El Teorema de La Salle es una de las primeras aproximaciones al estudio de estabilidad con respecto a invariantes y a partir de él es posible derivar un resultado alternativo para determinar la estabilidad asintótica de  $\mathbf{0}$ .

Se considera el sistema (6) y se definen los conjuntos:

$$M_v(c) = \{x \in \mathbb{R}^n: V(x) \leq c\} \quad \text{B-17}$$

Donde  $c \in \mathbb{R}_+$ .

$$L_v(c) = \{\text{Componente conexa de } M_v(c) \text{ que contiene al } 0\} \quad \text{B-1B-3}$$

$L_v(c)$ , también puede definirse como el conjunto de todos los  $x \in \mathbb{R}^n$  con la propiedad de que exista una función  $h: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}^n$ , tal que  $h(0) = x, h(1) = 0$  y  $V[h(r)] \leq c, \forall r \in [0,1]$ .

Adicionalmente se supone que existe una vecindad  $N$  de  $0$ , tal que,

$$\dot{V}(x) \leq 0, \forall t \geq 0, \forall x \in N \quad \text{B-19}$$

Se elige una constante  $c > 0$ , tal que el conjunto  $L_v(c)$  está limitado y contenido en  $N$ .

Se define

$$S = \{x \in L_v(c) / \dot{V}(x) = 0\} \quad \text{B-20}$$

Dado  $M$ , que denota el más grande conjunto invariante de (6) contenido en  $S$ . Luego,

$$x_0 \in L_v(c) \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} d[s(t, x_0), M] \rightarrow 0 \quad \text{B-21}$$

Donde  $d[s(t, x_0), M]$  denota la distancia desde el punto  $s(t, x_0)$ , al conjunto  $M$ .

Luego, si se cumplen las condiciones anteriormente nombradas, del Teorema de La Salle puede extraerse un teorema de estabilidad asintótica respecto al invariante  $M$ .

**Teorema 8.** Sea  $M$  un invariante del sistema (autónomo) que contiene a  $0$ . Si existe una función  $V$  continuamente diferenciable, tal que, en un vecindario  $N$  de  $0$  que contenga a  $M$  se cumpla:

$$\dot{V}(x) = 0, \forall x \in M, \text{ y } \dot{V}(x) < 0, \forall x \in N, \text{ tal que } x \notin M \quad \text{B-22}$$

Entonces  $M$  es un “invariante *localmente asintóticamente estable*.” Lo que indica que:

- El invariante es estable; es decir, para cualquier abierto  $N_1$ , que contenga a  $M$ , existe otro abierto  $N_2$ , tal que, si  $x_0 \in N_2$  entonces  $s(t, x_0) \in N_1$  para todo  $t \geq 0$ .
- *ii)* El invariante es atractivo.

Nótese que si  $M = \{0\}$  esta condición de estabilidad se reduce al teorema 3.

**Corolario (La Salle).** Del teorema de La Salle se deduce un corolario para probar estabilidad asintótica de sistemas autónomos. Según este corolario, si existe una función continuamente diferenciable y  $V$  en un vecindario  $N$  de  $0$ , y si es posible seleccionar una constante  $c$  tal que el conjunto  $L_v(c)$  sea acotado, esté contenido en  $N$  y sea tal que el conjunto  $S$ , sólo contenga a la trayectoria trivial  $\mathbf{x}(t) = 0$ , entonces  $0$  es un equilibrio asintóticamente estable.

**Teorema de inestabilidad.** El equilibrio 0 es *inestable* si existe una función decreciente continuamente diferenciable  $V: \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , y un  $t_0 \geq 0$ , tal que

- $\dot{V}(t, x)$  es lpdf
- $V(t, 0) = 0, \forall t \geq t_0$
- Existe un punto  $x_0 \neq 0$  arbitrariamente cercano a 0, tal que  $V(t_0, x_0) \geq 0$

### B.2.2. Método de linealización.

El método de linealización es con seguridad la prueba de estabilidad más utilizada, ya que no requiere la búsqueda de funciones de Lyapunov y provee de condiciones necesarias y suficientes para la estabilidad de **0**.

**Teorema 3** . Se considera el sistema (B-3) se supone que  $f(t, 0) = 0, \forall t \geq 0$ , se mantiene, y que  $f(\cdot)$  es continuamente diferenciable, se define:

$$A(t) = \left[ \frac{\partial f(t, x)}{\partial x} \right]_{x=0} \quad \text{B-23}$$

$$f_1(t, x) = f(t, x) - A(t)x \quad \text{B-24}$$

Y se asume que:  $\lim_{\|x\| \rightarrow 0} \sup_{t \geq 0} \frac{\|f_1(t, x)\|}{\|x\|} = 0$  se mantiene y  $A(\cdot)$  está limitado.

Bajo estas condiciones, si 0 es un equilibrio exponencialmente estable del sistema lineal

$$z(t) = \dot{A}(t)z(t) \quad \text{B-25}$$

Luego, éste también es un equilibrio exponencialmente estable del sistema (B-3).

## C. Anexo: Métodos de sintonía

### C.1. Métodos empíricos

**Ziegler y Nichols.** Los autores plantean un criterio empírico de desempeño, el cual asume un comportamiento dinámico con razón de decaimiento de un cuarto entre dos oscilaciones sucesivas de la respuesta. Estos métodos fueron diseñados para sistemas de primer orden con retardo. El método de respuesta a un escalón es aplicable a sistemas estables en lazo abierto, mientras el método de la ganancia última es para sistemas inestables en lazo abierto (Smith y Corripio, 1997).

**Mapas de sintonía.** Debido a que los métodos de Ziegler y Nichols son heurísticos, se hace necesario realizar sintonía manual sobre el proceso para obtener el desempeño deseado. Por este motivo se han construido los mapas de sintonía, que sirven como guía en la sintonía manual y proporcionan cierta intuición sobre la influencia que tienen los cambios de los parámetros del controlador en el comportamiento del lazo cerrado (Åström and Hägglund, 1995).

**Método de Chien, Hrones y Reswick.** El método de Chien, Hrones y Reswick es una modificación del método de Ziegler y Nichols, donde proponen usar como criterio de diseño una respuesta más rápida con un sobreimpulso del 20%, y consideran que la sintonía ante cambios en el punto de ajuste y para el rechazo de perturbaciones debe ser diferente (Åström and Hägglund, 1995).

### C.2. Métodos analíticos

En los métodos de sintonía analítica se debe obtener la función de transferencia del controlador  $G_c(s)$ , a partir de las funciones de transferencia del proceso  $G(s)$  y la respuesta del lazo cerrado que se especifique  $G_o(s)$  (Aström y Hägglund. 1995). La función de transferencia del lazo cerrado es mostrada en (12)

$$G_o(s) = \frac{G(s) \cdot G_c(s)}{1 + G(s) \cdot G_c(s)} \quad \text{C-1}$$

Al resolver (12) para  $G_c(s)$  se obtiene (13) que es la función de transferencia del controlador:

$$G_c(s) = \frac{1}{G(s)} \frac{G_0(s)}{[1 - G_0(s)]} \quad \text{C-2}$$

**Síntesis de Dahlin.** Este método también conocido como sintonía  $\lambda$ , fue desarrollado para procesos de primer orden con retardo, donde se supone que la función de transferencia del lazo cerrado es también una función de primer orden con retardo (Aström y Hägglund. 1995).

**El método de Haalman.** Este método consiste en determinar una función de transferencia de lazo cerrado ideal, la cual proporciona el desempeño deseado y hace que la función de transferencia del controlador sea  $G_c = G_1(s)/G(s)$ . Una característica del método de Haalman es que cancela los polos y ceros del proceso a través de los polos y ceros del controlador (Aström y Hägglund. 1995).

**Controlador por Modelo Interno (IMC).** El principio de modelo interno es un método general para diseñar sistemas de control, que puede ser aplicado a control PID. El nombre de controlador por modelo interno se debe a que el controlador tiene un modelo del proceso internamente y este modelo está conectado en paralelo con el proceso (Aström y Hägglund. 1995). Colocación de polos

El método de diseño por colocación de polos está basado en el conocimiento de la función de transferencia del proceso, y simplemente intenta encontrar un controlador que produzca los polos deseados en el lazo cerrado. Para obtener controladores PID es necesario restringir los modelos a sistemas de primer y segundo orden (Aström y Hägglund. 1995)

### C.3. Diseño de polos dominantes

En el método de colocación de polos se intenta asignar todos los polos al proceso en lazo cerrado. Una de las dificultades de este método es que modelos complejos llevan a controladores complejos. Es por esto, que surge el diseño de polos dominantes, donde se intenta asignar sólo unos polos al proceso en lazo cerrado, y así obtener controladores sencillos de modelos complejos (Aström y Hägglund. 1995).

### C.4. Método de Cohen-Coon

Este método está basado en procesos de primer orden con retardo e intenta posicionar polos dominantes para lograr una razón de decaimiento un cuarto en la respuesta del lazo cerrado (Aström y Hägglund. 1995).

### C.5. Un método automatizado por software INCA AptiTune.

Este es un paquete de software que permite sintonizar PID, diseñado especialmente para sintonizar PID en los cuales interviene más de una variable, además en procesos en los que las dinámicas se encuentran acopladas. Tal es el caso de un proceso 3 x 3 de sintonía (como la temperatura de salida de la bobina en un horno de etano) el cual puede tener hasta 15 parámetros para ajustar y cada parámetro afectar la respuesta de cada bucle.



## C.6. Métodos basados en optimización

La optimización es una poderosa herramienta para diseñar controladores. Para una determinada estructura de control con pocos parámetros, las especificaciones son expresadas como desigualdades en función de los parámetros del controlador. Como función a optimizar se elige la especificación más importante.

**López y Rovira.** En este trabajo se proponen tablas de sintonía, obtenidas para controladores optimizados con respecto a los criterios ISE (integral del error cuadrático), IAE (integral del error absoluto) e ITAE (integral temporal absoluta del error) para un modelo de primer orden con retardo (Smith y Corripio, 1997).

**Módulo Óptimo y Simetría Óptima.** Estos son dos métodos para seleccionar y sintonizar controladores. Estos métodos, consisten en encontrar un controlador que hace que la respuesta del punto de ajuste a la salida de la planta, en el dominio de la frecuencia sea tan cercana como sea posible a bajas frecuencias (Aström y Hägglund, 1995).

**Desigualdad Matricial Lineal (LMI).** El diseño de un controlador PID se transforma en el diseño de un controlador por retroalimentación de salida estática. A través de un algoritmo de LMI iterativo (ILMI) se encuentran los parámetros del controlador para alcanzar el desempeño óptimo deseado  $H_2$  ó  $H_\infty$  (Bevrani y Hiyama, 2007) .



## D. Anexo: Índices de desempeño

Cuando se habla de desempeño, cualitativamente se hace referencia al comportamiento deseado que debe tener un controlador, es decir, rechazo a perturbaciones, seguimiento al punto de ajuste, en otras palabras que el lazo de control opere satisfactoriamente.

Cuando lo que se quiere es cuantificar el desempeño de un controlador se usan índices de desempeño, estos arrojan un valor que indica el desempeño del controlador evaluado. Entre menor sea este índice, mejor desempeño tiene el controlador.

Existen diferentes índices de desempeño entre los cuales se encuentran: ISE, IAE, ITAE, ITSE, todos ellos son criterios en los cuales se integra el error.

### D.1. ISE. Integral del cuadrado del error, llamado así por sus siglas en inglés.

$$ISE = \int e^2(t)dt \quad \text{D-1}$$

Este criterio penaliza grandes errores y discrimina entre respuestas excesivamente sobre amortiguadas y su amortiguadas, el mínimo valor de la integral ocurre para un valor crítico de amortiguamiento.

### D.2. IAE. Integral del valor absoluto del error.

$$IAE = \int |e(t)| dt \quad \text{D-2}$$

Este índice es más sensible al error que el ISE, tiende a dar tiempos largos de establecimiento y sobrepicos más altos, se recomienda para evaluación de sistemas en simulación por computador.

### D.3. ITSE. Integral del tiempo multiplicado por el cuadrado del error

$$ITSE = \int t \cdot e^2(t) dt \quad D-3$$

Este se caracteriza por dar poco peso a los errores iniciales grandes pero castiga a los errores presentes tiempo después del inicio de la entrada al sistema. Al igual que el criterio ISE, al disminuir los errores grandes rápidamente se podría obtener un sistema con una estabilidad relativa pobre, debido al aumento en las oscilaciones. (Ogata, 1998).

Finalmente se tiene el índice de desempeño ITAE que reúne características del IAE, agregando el tiempo como un término que premultiplica valor absoluto del error.

### D.4. ITAE. Integral del tiempo multiplicado por el valor absoluto del error.

$$ITAE = \int t \cdot |e(t)| dt \quad D-4$$

En comparación con el criterio ITSE se obtienen respuestas transitorias con sobreimpulsos pequeños y oscilaciones bien amortiguadas. Al estar el valor absoluto del error multiplicado por el tiempo, errores grandes son multiplicados por tiempos pequeños, brindando poco peso a los errores grandes que se dan al inicio del sobreimpulso y gran peso a los errores pequeños. Además, se caracteriza por ser un criterio muy selectivo pero difícil de evaluar analíticamente.

## E. Anexo: Procedimiento cálculo conjunto predecesor

Considere el sistema dinámico lineal invariante (Kerrigan, 2000)

$$x_{k+1} = Ax_k + Bu_k \quad \text{E-1}$$

Y sea el conjunto de restricciones en las entradas y los estados

$$U = \{ \mathbf{u} \in R^m \mid A_U \mathbf{u}(k) \leq \mathbf{b}_U \} \quad \text{E-2}$$

$$X = \{ \mathbf{x} \in R^n \mid A_\Omega \mathbf{x}(k) \leq \mathbf{b}_\Omega \} \quad \text{E-3}$$

Donde,  $b_\Omega \in R^q$  y  $b_u \in R^p$  con  $p$  y  $q$  el número de restricciones de la entrada y el estado respectivamente;  $A_u \in R^{p \times m}$  y  $A_\Omega \in R^{q \times m}$  son las matrices de distribución que representan las restricciones en la entrada y el estado respectivamente.

La determinación del conjunto alcanzable y predecesor a un paso es un cálculo geométrico. Para ello se traslada el problema al espacio de estados extendido  $\mathbf{z} = [\mathbf{x} \quad \mathbf{u}]^T$  y por tanto, el conjunto predecesor a un paso  $Q(\Omega)$  se transforma en

$$Y = \left\{ \mathbf{z} \in R^{n+m} : \begin{bmatrix} f(\mathbf{z}) \\ I_{U \cdot \mathbf{z}} \end{bmatrix} \in \Omega \times U \right\} \quad \text{E-4}$$

Siendo  $I_U = [\emptyset \quad I_m]$  donde  $I_m$  es la matriz identidad de dimensión  $m$ . Entonces, el conjunto  $Y$  será la proyección de  $Q(\Omega)$  sobre las  $n$  primeras componentes de  $\mathbf{z}$ .

En el espacio extendido, el conjunto  $Y$  viene dado por

$$\begin{bmatrix} A_{\Omega} \cdot A & A_{\Omega} \cdot B \\ \emptyset & A_u \end{bmatrix} \cdot \mathbf{z} \leq \begin{bmatrix} b_{\Omega} \\ b_u \end{bmatrix} \quad \text{E-5}$$

Que es otro politopo. Este conjunto se puede proyectar sobre las  $n$  primeras componentes de  $\mathbf{Z}$  utilizando por ejemplo el algoritmo de eliminación de Fourier-Motzkin utilizado en Kerrigan (2000) y que da lugar a  $Q(\Omega)$  que es otro politopo.

Una vez obtenido este conjunto, la intersección con otro politopo da como resultado otro politopo y su determinación es sencilla.

# F. Anexo: Algoritmo aleatorizado para el cálculo de conjuntos alcanzables y controlables.

Existen una gran variedad de problemas en la teoría de control que son intratables, esto es, problemas NP. En Blondel y Tsitsiklis (2000) se realiza una excelente recapitulación de estos problemas donde se destacan el problema de la estabilidad de polinomios, la estabilidad de familias de matrices, la controlabilidad nula de sistemas híbridos, entre otros. De igual forma en Vidyasagar (1998), se indican problemas tanto de análisis como de síntesis de sistemas de control que son difíciles, como el problema de estabilidad robusta de sistemas lineales.

El cálculo de conjuntos alcanzables y controlables de sistemas no lineales son problemas de tipo NP, donde se pueden obtener conjuntos no convexos que no tienen ninguna representación formal hasta el momento, los algoritmos aleatorizados llegan entonces como la mejor opción para tratar este tipo de problemas tan complicados. A continuación se presenta un breve resumen sobre este tema.

## F.1. Definiciones.

### ***Algoritmos aleatorizados.***

Un algoritmo es una lista estructurada o secuencia finita de instrucciones que permite hallar la solución a un problema. Un algoritmo aleatorizado es aquel que durante su ejecución realizan elecciones aleatorias para solucionar el problema, de tal forma que el resultado obtenido termina siendo una variable aleatoria.

### ***Variable aleatoria.***

Es una variable que toma valores aleatorios. Más formalmente, una variable aleatoria es un mapeo que va de un espacio de muestreo a un valor real y que se denota  $f(\omega)$   $f(\omega)$ , donde  $\omega$  es el resultado de algún experimento y  $f(\omega)$  es el resultado de una medición del experimento. Otra mirada de la variable aleatoria consiste en ver a  $\omega$  como una variable de entrada y a  $f(\omega)$  como una señal del proceso. Formalmente se tiene: dado un espacio de probabilidad  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$   $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$  y un espacio medible  $(\mathcal{S}, \Sigma)$ , una (real valuada) variable

aleatoria es una función  $f: \Omega \rightarrow |S|$   $f: \Omega \rightarrow \mathfrak{R}$  con la propiedad que si  $F \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$   $F \in \mathcal{B}(\mathfrak{R})$ , entonces  $f^{-1}(F) = \{\omega: f(\omega) \in F\} \in \mathcal{F}$   $f^{-1}(F) = \{\omega: f(\omega) \in F\} \in \mathcal{F}$ .

### **Proceso aleatorio.**

Es una secuencia de variables aleatorias  $\{X_n; n = 0, 1, 2, \dots\}$   $\{X_n; n = 0, 1, 2, \dots\}$  definidas en un experimento común. De tal forma que un proceso aleatorio puede verse como un vector aleatorio de dimensión infinita. Más aún,  $\{X_n; n = 0, 1, 2, \dots\}$   $\{X_n; n = 0, 1, 2, \dots\}$  puede verse como un ejemplo de un proceso aleatorio de tiempo discreto y de “one-side”, se dice de tiempo discreto pues el índice  $nn$  representa el tiempo y sólo puede tomar valores discretos, y de “one-side” debido a que valores negativos del tiempo no son permitidos. Un proceso aleatorio de tiempo discreto es llamado en la literatura estadística una serie de tiempo. Un proceso es independiente e idénticamente distribuido *i.i.d.* si cualquier colección finita de las variables aleatorias producidas por el proceso son independientes y la distribución marginal *p.m.f.* son todas iguales

### **Tipos de convergencia estocástica.**

A continuación se definen algunos tipos de convergencia estocástica: punto a punto, casi seguro, en probabilidad y media cuadrática.

**Definición convergencia punto a punto.** Sea  $X$  una variable aleatoria, y sea  $X_1, X_2, X_1, X_2, \dots$  una secuencia de variables aleatorias. Se dice que  $\{X_n\}, n = 1, 2, \dots$   $\{X_n\}, n = 1, 2, \dots$  converge punto a punto a  $X$  si.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} X_n(\omega) = X(\omega) \text{ para cada } \omega \in S \quad \text{F-1}$$

La noción de convergencia punto a punto es la noción de convergencia más fuerte posible.

**Definición convergencia casi seguro.** Sea  $X$  una variable aleatoria, y sea  $X_1, X_2, X_1, X_2, \dots$  una secuencia de variables aleatorias. Se dice que  $\{X_n\}, n = 1, 2, \dots$  converge casi seguro a  $X$  o  $X_i$   $X_i$  converge a  $X$  con probabilidad uno si.

$$P \left\{ \omega \in S: \lim_{n \rightarrow \infty} |X_n(\omega) - X(\omega)| = 0 \right\} = 1 \quad \text{F-2}$$

Esta noción de convergencia significa que excepto un conjunto elemental de eventos con probabilidad cero converge punto a punto. Aunque esta noción de convergencia es más débil que la noción de convergencia punto a punto continúa siendo una noción fuerte.

**Definición convergencia en probabilidad.** Sea  $X$  una variable aleatoria, y sea  $X_1, X_2, X_1, X_2, \dots$  una secuencia de variables aleatorias. Se dice que  $\{X_n\}, n = 1, 2, \dots$  converge en probabilidad a  $X$  si, para cada número real  $\varepsilon > 0$ :



$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\{\omega \in S: |X_n(\omega) - X(\omega)| > \varepsilon\} = 0 \quad \text{F-3}$$

A diferencia de las nociones anteriores de convergencia que se cumple para cada realización de la variable aleatoria, en este caso sólo se cumple de manera global. De hecho si una secuencia de variables aleatorias converge con probabilidad cero entonces convergen en probabilidad.

**Definición convergencia en media cuadrática.** Sea  $X$  una variable aleatoria, y sea  $X_1, X_2, \dots$  una secuencia de variables aleatorias. Se dice que  $\{X_n\}, n = 1, 2, \dots$  converge en media cuadrática a  $X$  si.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E[(X_n - X)^2] = 0 \quad \text{F-4}$$

Esta noción de convergencia es bastante diferentes de las nociones anteriores debido a que en este caso se considera es el segundo momento de la distribución conjunta de  $X_n$  y  $X$ .

## F.2. Clasificación de los algoritmos aleatorizados.

De acuerdo con el resultado que obtienen los algoritmos aleatorios se pueden clasificar en:

- *Algoritmos numéricos.* Da la respuesta al problema con una determinada precisión y una determinada probabilidad; es decir, da un rango de confianza de la respuesta al problema.
- *Algoritmos de Monte Carlos.* Aunque siempre da una respuesta al problema, algunas veces esta puede ser errónea; es decir, la calidad de la respuesta es aleatoria. Sin embargo, cuando la respuesta es correcta tiene una determinada probabilidad.
- *Algoritmos de las Vegas.* Siempre arroja una respuesta correcta al problema, pero a veces pueden ocurrir errores y no se obtiene ninguna respuesta. En este caso el tiempo de ejecución es aleatorio.

## F.3. Análisis estadístico de los algoritmos aleatorizados.

El análisis de los algoritmos aleatorizados (RA) es un poco más complejo que en el caso determinístico, pues además de considerar el espacio (memoria utilizada) y el tiempo de ejecución se debe considerar la aleatoriedad. Recuerde que los algoritmos aleatorizados no *siempre* garantizan la solución del problema, sólo la *mayoría* de la veces; es decir, se tiene una determinada probabilidad de errar, ¿cómo determinar entonces cuál es el riesgo que se tiene de fallar?

Existe abundante bibliografía dedicada al análisis de los algoritmos aleatorizados (Vidyasagar, 1993, Fishman, 1996); sin embargo, todos buscan lo mismo: encontrar una relación entre el número de muestras, el error de la respuesta obtenida y la probabilidad de obtener dicho error. Nótese que en las definiciones de convergencia siempre se

considera que se tiene una muestra infinita, ¿qué sucede cuando la muestra es finita, cómo determinar el tamaño de la muestra?

El tamaño de la muestra está en función del error y el riesgo de fallo, en la teoría probabilística se han desarrollado una serie de desigualdades que permiten relacionar el error, con el riesgo de fallo y el tamaño de la muestra.

#### F.4. Desigualdad de Chebyshev.

Sea  $X$  una variable aleatoria con media  $\mu$  y varianza finita  $\sigma^2$ . Para cualquier número real  $k > 0$  se tiene que.

$$pr(|X - \mu| \geq k\sigma) \leq \frac{1}{k^2} \quad \text{F-5}$$

La desigualdad de Chebyshev ofrece una forma de determinar el tamaño de la muestra para garantizar convergencia en probabilidad. Sin embargo, la expresión F-5 sola no es suficiente para determinar el menor tamaño de muestra que garantice un error no mayor que  $\varepsilon$ . Para tener en cuenta la aleatoriedad deberá especificarse también el nivel de confianza  $1 - \delta$  (o riesgo de fallo  $\delta$ ) con  $0 < \delta < 1$  de tal forma que al aplicar la desigualdad de Chebyshev todos los tamaños iguales o mayores a  $n$  satisfacen,

$$pr[|\lambda_n - \lambda| < \varepsilon] \geq 1 - \delta \quad \text{F-6}$$

La expresión anterior se conoce como el *criterio de error absoluto*  $(\varepsilon, \delta)$ .

Una característica de la desigualdad de Chebyshev es que no impone ninguna restricción sobre la variable aleatoria  $X$ .

#### **Teorema central del límite.**

Sea  $X_1, X_2, \dots, X_1, X_2, \dots$  una secuencia *i.i.d.* de variables aleatorias, cada una con media finita  $m$  y varianza  $\sigma^2$ , luego  $n^{-1/2} \sum_{k=0}^{n-1} (X_i - m)$  converge a una variable aleatoria con distribución normal con media  $m$  y varianza  $\sigma^2$ .

Intuitivamente el teorema establece que la suma de una gran cantidad de variables aleatorias y normalizadas por  $n^{-1/2}$  hace que la varianza y la media de la suma normalizada sea constante, por lo tanto, la suma resultante es aproximadamente una normal. Utilizando entonces la distribución normal y definiendo una cota del error es posible obtener un tamaño de la muestra y un intervalo de confianza.

#### **Desigualdad de Hoeffding.**

Sea  $X_1, X_2, \dots, X_1, X_2, \dots$  una secuencia *i.i.d.* de variables aleatorias, se tiene que,

$$P^m\{x \in X^m: |\hat{P}(A; x) - P(A)| \geq \varepsilon\} \leq 2 \exp(-2m\varepsilon^2) \quad \text{F-7}$$

**Muestreo de Monte Carlo para el cálculo del conjunto alcanzable.**

Para el cálculo del conjunto alcanzable se utiliza un algoritmo aleatorizado del tipo muestreo de Monte Carlo, el cual es una técnica de Monte Carlo que permite realizar una estimación puntual de una variable desconocida; esto es, una expresión matemática que produce la estimación de un valor a partir de un muestreo experimental basado en números aleatorios.

Específicamente para el caso del cálculo del conjunto alcanzable a un paso a partir de un muestreo experimental de la acciones de control admisible y del conjunto de condiciones iniciales se obtiene una estimación empírica del conjunto alcanzable a un paso  $R(\Omega)$ .

Sea  $u_j$ , con  $j = 1, \dots, q$   $l = 1, \dots, p$   $j = 1, \dots, q$ , una variable aleatoria con distribución uniforme, independiente e idénticamente en  $U$ .

Sea  $x_l$ , con  $l = 1, \dots, p$ , una variable aleatoria con distribución uniforme, independiente e idénticamente en  $\Omega \subset X \subset \mathbb{R}^n$  el conjunto de condiciones iniciales.

A partir de  $N$  muestras de  $x_l(\cdot)Uniform(\Omega)$  y  $u_j(\cdot)Uniform(U)$ , se obtiene una estimación empírica del conjunto alcanzable a un paso; esto es,

$$R^N(\Omega) = \left\{ \begin{array}{l} x_{k+1}^N \in X' \\ x_l \in \Omega \text{ y } u_j \in U' \end{array} \middle| \begin{array}{l} x_{k+1}^i = f(x_l, u_j) \\ i = 1, \dots, N, l = 1, \dots, p, j = 1, \dots, q \end{array} \right\} \tag{F-8}$$

Obviamente,  $R^N(\Omega) \subset R(\Omega)$  por la definición de  $R(\Omega)$  y  $R^N(\Omega)$  y  $f: X \times U \rightarrow X'$ . Adicionalmente, se hace  $p = \frac{n}{n+m}$   $p$  y  $q = \frac{m}{n+m}$   $q$ .

Es necesario encontrar el tamaño de la muestra  $N$ , para ello se realiza a continuación un análisis del algoritmo.

**Análisis estadístico del muestreo de Monte Carlo para el cálculo del conjunto alcanzable.**

Tal como se indicó el análisis de un algoritmo aleatorizado consiste en determinar una relación entre el tamaño de la muestra, el error y el riesgo de fallo.

Para ello suponga que se tiene una medida de probabilidad  $P$  en el conjunto  $X'$  y que se desea estimar la medida  $P(R(\Omega))$ . Note que en este caso no se tiene una descripción explícita del conjunto  $R(\Omega)$ ; sin embargo, dado un elemento  $x \in X'$  es posible determinar cuándo o no, dicho elemento  $x$  pertenece al conjunto  $R(\Omega)$ . Cuando se tiene un problema de este tipo, una forma de determinar  $P(R(\Omega))$  consiste en generar elementos (en este caso más precisamente vectores)  $x_1, \dots, x_N \in X'$  independientes e idénticamente distribuidos *i.i.d.*, de acuerdo con la medida de probabilidad  $P$ . Luego se prueba para cada  $x_i$  si  $x_i \in R(\Omega)$  o no.

Sea  $x \in X^n$  el vector  $x := [x_1, \dots, x_N]$  de muestras y sea  $\hat{P}(R(\Omega); x)$  la fracción de los  $N$  elementos que pertenecen a  $R(\Omega)$ , luego matemáticamente es posible definir  $\hat{P}(R(\Omega); x)$  como

$$\hat{P}(R(\Omega); x) := \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N I_{R(\Omega)}(x_i) = \frac{\text{No. de veces que } x_i \in R(\Omega)}{N} \quad \text{F-9}$$

Donde  $I_{R(\Omega)}(\cdot)$  denota la función indicadora de  $R(\Omega)$ ; esto es.

$$I_{R(\Omega)}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in R(\Omega) \\ 0 & \text{si } x \notin R(\Omega) \end{cases} \quad \text{F-10}$$

El resultado " $x \in R(\Omega)$ " puede verse como un proceso de Bernoulli, por lo tanto, la probabilidad del suceso es precisamente  $P(R(\Omega))$ . Adicionalmente, el número  $\hat{P}(R(\Omega); x)$  es una estimación empírica del número  $P(R(\Omega))$  basada en las muestras *i.i.d.*,  $x_1, \dots, x_N$ .

Por lo anterior, es posible aplicar la desigualdad de Hoeffding (F-7); es decir,

$$P^N \{x \in X^N: |P(R(\Omega)) - \hat{P}(R(\Omega); x)| \geq \varepsilon\} \leq 2 \exp(-2N\varepsilon^2) \quad \text{F-11}$$

Y por lo tanto, también es posible usar la desigualdad de Chernoff; esto es, para estimar la cantidad desconocida  $P(R(\Omega))$  con una precisión  $\varepsilon$  y con una confianza de  $1 - \delta$ , es suficiente generar  $N$  muestras tales que,

$$N \geq \frac{1}{2\varepsilon^2} \ln \frac{2}{\delta} \quad \text{F-12}$$

Es importante resaltar que la cota anterior es *completamente independiente* de la naturaleza del conjunto  $X'$  y de la **medida de probabilidad  $P$** .

No obstante, en el caso específico de la estimación empírica del conjunto alcanzable a un paso se tiene una manera directa de obtener  $N$  muestras que pertenecen a  $R(\Omega)$ , lo cual se logra mediante la función  $g$ , obteniéndose  $R^N(\Omega)$  (ver ecuación F-8). El conjunto  $R^N(\Omega)$  estará formado entonces por  $N$  muestras en  $X'$  distribuidas de acuerdo con la medida de probabilidad  $Q'$  inducida por la función  $f: \Omega \times U \rightarrow X'$  (o  $f: X \times U \rightarrow X'$  restringida a  $\Omega \subset X$ ).

Como la cota de Chernoff es completamente independiente de la medida de probabilidad  $P$ , es posible considerar una nueva medida de probabilidad  $Q$  en el conjunto  $X'$  y nuevamente se puede determinar cuándo una muestra pertenece o no a  $R(\Omega)$ . Se tiene entonces un experimento donde se toman  $N$  muestras (con  $N$  dado por la cota de Chernoff) que pertenecen a  $R(\Omega)$ . Obviamente ahora el número total de muestras es  $N' \geq N$  y ahora  $\hat{P}(R(\Omega); x) = \frac{N}{N'}$ , esta probabilidad empírica no es inferior a la obtenida antes ya que se toman más muestras *i.i.d.* de  $X'$ .

Adicionalmente, es posible considerar que las  $N$  muestras de  $R(\Omega) \subset X'$  necesarias para  $\hat{P}(R(\Omega); x) = \frac{N}{N}$ , se pueden obtener vía  $f: \Omega \times U \rightarrow X'$  (o  $f: X \times U \rightarrow X'$  restringida a  $\Omega \subset X$ ), lo cual induce una medida de probabilidad  $Q'$  en  $R(\Omega)$  y después basta con extender esta medida a todo  $X'$ , la cual se ha llamado  $Q$ , tal que  $Q' = Q$  para  $x \in R(\Omega)$ .

Finalmente como la cota de Chernoff asegura convergencia casi seguro (Vidyasagar, 1997), entonces  $\hat{P}[R(\Omega); x] \approx P[R(\Omega)]$  implica que  $R^N(\Omega) \approx R(\Omega)$ .



## Bibliografía

Alamir, M. and Bornard, G. (1995). Stability of truncated infinite constrained receding horizon scheme: The general discrete nonlinear case, *Automatica* 31, 1353–1356.

Álvarez, H.D. (2000). Control predictivo basado en modelo borroso para el control del pH. Serie Temas de Automática, Vol. 10. ISBN 950-605-219-0. Editorial Fundación UNSJ, San Juan, Argentina.

Arpornwichanop, A. and Kittisupakorn, P. (2004). Dual Mode NMPC for Regulating the Concentration of Exothermic Reactor under Parametric Uncertainties. *Journal of Chemical Engineering of Japan*, 37, 698-710.

Åström, K.J. and Hägglund, T. (1995). PID Controllers. 2nd. Edition, ISA, USA.

Åström, K.J. y Hägglund, T. (2001). The future of PID control, *Control Engineering Practice*, 9, 1163–1175.

Azuma, Sh. and Imura, J. (2004). A Probabilistic Approach to Controllability/Reachability Analysis of Hybrid Systems. *43rd IEEE Conference on Decision and Control*, December 14-17, Atlantis, Paradise Island, Bahamas, 485-490.

Bevrani, H. and Takashi H. (2007). Multiobjective PI/PID Control Design Using an Iterative Linear Matrix Inequalities Algorithm, *International Journal of Control, Automation and Systems*, 5, pp. 117-127.

Bertsekas, D., and Rhodes, I. (1971). On the minmax reachability of target set and target tubes. *Automatica*, 7, 233–247. Blanchini, F. (1999). Set invariance in control. *Automatica*, 35, 1747-1767.

Blanchini, F., and Miani, S. (2008). Set Theoric Methods in Control. Series Editor Tamer Basar, University of Illinois at Urbana-Champaign, Birkhauser Boston.

Blondel V., Tsitsiklis, J. (2000). A survey of computational complexity results in systems and control. *Automatica*, 36, 1249-1274

Bravo, J.M, Alamo, E.F. Camacho. (2006). Robust MPC of constrained discrete-time nonlinear systems based on approximated reachable sets. *Automatica* 42, 1745 – 1751.

Bravo, J.M, D. Limon, T. Alamo, E.F. Camacho. (2005). On the computation of invariant sets for constrained nonlinear systems: An interval arithmetic approach. *Automatica*, 41, 1583-1589.

- Bravo, J.M. (2004). Control predictivo no lineal robusto basado en técnicas intervalares, Tesis de doctorado, Universidad de Sevilla.
- Bitmead, R. R., Gervers, M. and Wertz, V. (1990). *Adaptive optimal control - The thinking's man GPC*, Prentice-Hall.
- Calafiore, G., Dabbene, F., and Tempo, R. (2000) Randomized Algorithms for Reduced Order  $H_{\infty}$  Controller Design. *Proceedings of the American Control Conference Chicago*, Illinois, 3837-3839.
- Calafiore, G., Dabbene, F., and Tempo, R. (2000a). Randomized Algorithms for Probabilistic Robustness with Real and Complex Structured Uncertainty. *IEEE Transactions on Automatic Control*, **45** (12), 2218-2235.
- Calafiore, G., Dabbene, F., Tempo, R. (2003) Randomized Algorithms in Robust Control. *Proceedings of the 42<sup>nd</sup> IEEE Conference on Decision and Control Maui, Hawaii USA*, December. 1908-1913
- Camacho and Bordons. (2000). Model Predictive Control. Second Edition, Springer. London.
- Cannon, M., B. Kouvaritakis and V. Deshmukh. (2004). Enlargement of polytopic terminal region in NMPC by interpolation and partial invariance. *Automatica*, **34**(2), 311-317.
- Cannon, M., V. Deshmukh, and B. Kouvaritakis. (2003). Nonlinear model predictive control with polytopic invariant sets. *Automatica*, **39**, 1487 –1494.
- Chen, H. and Allgöwer, F., (1998 ). A quasi-infinite horizon nonlinear model predictive control scheme with guaranteed stability, *Automatica* **34**(10), 1205–1218.
- Chen, H. and Allgöwer, F. (1998a). A quasi-infinite horizon nonlinear model predictive control scheme with guaranteed stability, *Automatica* **34**(10), 1205–1218.
- Chen, Wen-Hua, John O'Reilly, Donald J. Balance. On the terminal region of model predictive control for non-linear systems with input/state constraints. *International Journal of Adaptive Control and Signal Processing*, **17**(3), pp. 195 – 207, 2003.
- Chisci, L., Lombardi, A. and Mosca, E. (1996). Dual receding horizon control of constrained discrete-time linear systems, *European Journal of Control* **2**, 278–285.
- Clarke, D., Mohtadi, C. and Tuffs, P. S. (1987). Generalized predictive control. Part I: The basic algorithms, *Automatica* **23**, 137–148.
- Clarke, D. W., Mohtadi, C. and Tuffs, P. S. (1987b). Generalized predictive control. Part II: Extensions and interpretations, *Automatica* **23**, 149–160.
- Cook, S.A. (1983). An overview of Computational Complexity. *Communications of the ACM*, **26** (6), June.



- Cutler, C. R. and Ramaker, B. L. (1980). Dynamic matrix control- a computer control algorithm, *en* 'Proceedings of Automatic Control Conference'.
- De Doná, J.A., Seron, M.M., Mayne, D. Q. and Goodwin, G.C.(2002). Enlarged terminal sets guaranteeing stability of receding horizon control. *Systems and Control Letters*. 47. 57-63.
- De Nicolao, G., Magni, L. and Scattolini, R. (1998). Stabilizing receding-horizon control of non-linear time-varying systems, *IEEE Transactions on Automatic Control* 43, 1030–1036.
- De Oliveira, S., (1996). Model Predictive Control (MPC) for constrained nonlinear systems. Thesis for the degree of PhD. California Institute of Technology. Pasadena.
- Espinosa, T. Boelen y P. Van Overschee.(2006). Robust Advanced PID Control (RaPID) PID Tuning Based on Engineering Specifications. *IEEE Control Systems Magazine*.
- Fishman G. (1996). Monte Carlo, concepts, algorithms and applications. Springer. New York.
- Garcia, P. and Álvarez, H.D.(2009). Aplicación de dos Métodos de Inteligencia Artificial y uno de Gradiente para Controladores Predictivos Basados en Modelo no lineal. Memorias congreso de inteligencia computacional aplicada CICA 2009.
- Gilbert, E. G. and Tan, K. (1991). Linear systems with state and control constraints: The theory and application of maximal output admissible sets, *IEEE Transactions on Automatic Control*, 36, 1008–1020.
- Gómez L. (2009). Una aproximación al control de procesos por lotes, Tesis de Doctorado en ingeniería de sistemas de control, INAUT.
- Goncalves J. and Hamadeh A. (2005). Reachability Analysis of Continuous-Time Piecewise Linear Systems. *Proc. 44th IEEE Conference on Decision and Control and European Control Conference*, December 2005.
- Gutierrez, L.P., (2007). Determinación matemática de la región terminal Omega en un control predictivo basado en modelo no lineal por modo dual. Tesis de Maestría en Ingeniería Química, Universidad Nacional De Colombia. Sede Medellín.
- Gutiérrez L.P., D. Odloak, O.A.Z. Sotomayor and H.D. Álvarez. A dual mode MPC scheme for nonlinear processes. *Paper submitted to the 17th IFAC World Congress*.
- (*IFAC WC 2008*).Hartmanns, J., and Stearns, R.E. (1965). On the Computational Complexity of Algorithms. *Trans. Amer. Math. Soc.* 117, May.
- Henson, M.A. and D.E. Seborg. (1990). Output Linearization of General Nonlinear Processes. *AIChE J.*, 36,. 1753-175.
- Jadbabaie, A., Yu, J. and Hauser, J. (2001). Unconstrained receding-horizon control of nonlinear systems, *IEEE Transactions on Automatic Control* 46(5), 776–783.

Kerrigan, E. (2000). Robust Constraint Satisfaction: Invariant Sets and Predictive Control. Ph. D. Thesis. Control Group, University of Cambridge.

Kerrigan, E. C. and Maciejowski, J. M. (2001). Robust feasibility in model predictive control: Necessary and sufficient conditions, *en* 'Proceedings of the CDC'.

Kouvaritakis, B. M. Cannon, A. Karas, and B. Rohal-Ilkiv and C. Belavy. ( 2002) Asymmetric constraints with polyhedral sets in MPC with application to coupled tanks system, *In:Proceedings of the 41st IEEE Conference on Decision and Control*, 4,. 4107-4112.

Kwon, W. H. and Pearson, A. E. (1977). A modified quadratic cost problem and feedback stabilization of a linear system, *Automatica* 22, 838–842.

Kozen, P. (2006). Theory of computation. Springer.

Limon, D.(2002). Control predictivo de sistemas no lineales con restricciones: estabilidad y robustez. Tesis de doctorado. Universidad de Sevilla.

Limón, D., Gomes da Silva, J.M., Alamo, T. and Camacho, E. F. (2003). Improved MPC design based on saturating on control laws, *in* 'Proceeding of the European Control conference'.

Limon D., Bravo, J.M., Alamo, T. and Camacho, E. F. (2005). Enlarging the domain of attraction of MPC controller. *Automatica* 41 p.629-635

Luyben, W. (1999). Process Modeling, Simulations and Control for Chemical Engineers. Second edition. McGraw Hill. New York.

Mayne, D. Q. and Michalska, H. (1990). Robust horizon control of nonlinear systems, *IEEE Transactions on Automatic Control* 35, 814–824.

Michalska, H. and Mayne, D. Q. (1993). Robust receding horizon control of constrained nonlinear systems, *IEEE Transactions on Automatic Control* 38(11), 1623–1633.

Magni, L., De Nicolao G., Magnani, L. and Scattolini, R.(2001). A stabilizing model based predictive control algorithm for nonlinear systems, *Automatica* 37, 1351– 1362.

Menold, P.H., F. Allgower and R.K. Pearson(1997). Nonlinear structure identification of chemical processes, *Computer an Chemical Engineering*, 21, Suppl., S137-S142.

Niarchos, K.N. and Lygeros, J. (2006). A neural Approximation to Continuous Time Reachability Computations. *Proceedings of the 45<sup>th</sup> IEEE Conference on Decision and Control*, San Diego, USA. 6313-6318.

Ogata, K. (1998). Ingeniería de Control Moderna. Prentice/Hall Internacional, Prentice - Hall, Tercera edición.

Parisini, T. and Zoppoli, R.(1995). A receding-horizon regulator for nonlinear systems and a neural approximation, *Automatica* 31(10), 1443–1451.

- Pottmann, M. and Seborg, D. (1992). Identification of non-linear processes using reciprocal multiquadric functions. *J. Proc. Cont.*, 2(4):189-203.
- Primbs, J. A., Nevistić, V. and Doyle, J. C. (2000). A receding horizon generalization of pointwise min-norm controllers, *IEEE Transactions on Automatic Control* 45, 898–909.
- Rakovic S., Kerrigan E., Mayne D. and Lygeros J. (2006). Reachability Analysis of Discrete-time Systems with Disturbances. *IEEE Transactions on Automatic Control*, In press
- Rawlings, J. B. and Muske, K. R. (1993). Stability of constrained receding horizon control, *IEEE Transactions on Automatic Control* 38, 1512–1516.
- Richalet, J., Rault, A., Testud, J. L. and Papon, J. (1978). Model predictive heuristic control: Applications to industrial processes, *Automatica* 14, 413–428.
- Rohal' Ilkiv, B. (2004). A note to calculation of polytopic invariant and feasible sets for linear continuous-time systems. *Annual Reviews in Control*, 28, 59–64.
- Scokaert, P. O. M., Mayne, D. Q. and Rawlings, J. B. (1999), 'Suboptimal model predictive control (feasibility implies stability)', *IEEE Transactions on Automatic Control* 44(3), 648–654.
- Skogestad, S. (2001). Probably the best simple PID tuning rules in the world. Submitted to *Journal of Process Control*.
- Smith, C. and Corripio, A. (1997). Principles and Practice of automatic Process Control. Second Edition, John Wiley and Sons, New York.
- Sontag, E. (1998). Mathematical Control Theory. Second Edition, Springer, New York.
- Sznaier, M. and Damborg, M. J. (1987). Suboptimal control of linear systems with state and control inequality constraints, en 'Proceedings of the CDC'.
- Vidyasagar, M. (1993). *Nonlinear System Analysis*. Prentice Hall, second edition, New York.
- Vidyasagar, M. (1998). Statistical Learning Theory and Randomized Algorithms for Control. *IEEE Control Systems*.
- Wesselowski, K. and Fierro, A. (2003). A dual-mode model predictive controller for robot formations. *IEEE Conf. on Decision and Control*, Maui, Hawaii, December 9-12. 3615-3620.
- Wills, A. G. Barrier function based model predictive control. (2003). Ph.D thesis, School of Electrical Engineering and Computer Science, University of Newcastle, Australia.
- Yang, T. H. and Polak, E. (1993). Moving horizon control of nonlinear systems with input saturation, disturbances and plant uncertainty, *International Journal of Control* 58, 875–903.

