



UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA

Diseño de una Nueva Técnica de Control por Modulación de Ancho de Pulso PI'

Felipe Londoño Sepúlveda

Universidad Nacional de Colombia
Facultad de Ingeniería y Arquitectura, Departamento de Ingeniería Eléctrica, Electrónica y
Computación
Manizales, Colombia
2012

Diseño de una Nueva Técnica de Control por Modulación de Ancho de Pulso PI'

Design of a New Control Technique by Means of Pulse Width Modulation PI'

Felipe Londoño Sepúlveda

Tesis presentada como requisito parcial para optar al título de:
Magister en Ingeniería-Automatización Industrial

Directora:
PhD. Fabiola Angulo García

Línea de Investigación:
Teoría de control automático
Grupo de Investigación:
PCI: Percepción y Control Inteligente

Universidad Nacional de Colombia
Facultad de Ingeniería y Arquitectura, Departamento de Ingeniería Eléctrica, Electrónica y
Computación
Manizales, Colombia

2012

A mi padre Silvio Londoño Henao, y a mi madre
Aliria Sepúlveda Noreña

Agradecimientos

Quiero dar las gracias en primer lugar a Dios por permitirme realizar esta tesis, bajo un ambiente de trabajo adecuado en compañía de personas muy solidarias y amables.

A mis padres Silvio Londoño Henao y Aliria Sepúlveda Noreña que lo son todo, por permitirme y proporcionarme una formación llena en valores. Su calidez humana y apoyo absoluto fueron indispensables en el desarrollo de la investigación. Esta tesis es de ustedes.

A mi tutora Fabiola Angulo García, que con su sabiduría, paciencia, y amabilidad, permitió que el desarrollo de la tesis estuviera direccionada por el camino correcto. Gracias por enseñarme y mostrarme la hermosa teoría del control automático.

A los profesores Gustavo Adolfo Osorio Londoño y Gerard Olivar Tost, que siempre estuvieron atentos y dispuestos ante cualquier duda que se generó en el proceso, además de sus invaluable consejos proporcionados.

A Fredy Edimer Hoyos Velasco, por su colaboración en el desarrollo de la fase experimental, para la validación del trabajo propuesto.

A todos mis compañeros del grupo de investigación PCI y ABC Dynamics, por su colaboración, apoyo incondicional, y los buenos ratos de tertulias generados en los tiempos de descanso.

A la Universidad Nacional de Colombia y a Colciencias, por financiar este trabajo por medio del programa: Jóvenes investigadores e innovadores Virginia Gutiérrez de Pineda.

Resumen

En este trabajo, se presentan los resultados teóricos y experimentales de la tesis titulada: “*Diseño de una nueva técnica de control por modulación de ancho de pulso PI*”, la cual propone una estrategia alternativa al control PI implementado industrialmente.

Este método propone reemplazar la parte integral del control PI mediante un feedforward adaptativo, conservando la acción proporcional del control P. La estrategia cumple con su objetivo de ser sencillo en su aplicación, de emular la acción del control PI, y de ofrecer características antiwindup sin requerir de hardware adicional para compensar este efecto adverso.

La técnica de control es aplicada a un sistema lineal invariante en el tiempo con dinámica sobre-amortiguada, y luego es validada en un convertidor electrónico de potencia Buck.

Palabras clave: antiwindup, feedforward, feedback, PWM, PAM, control PI, LQR.

Abstract

In this document, we present the theoretical and experimental results of the thesis entitled "Design of a new control technique by means of pulse width modulation PI' ", which proposes an alternative strategy to PI control.

This method proposes to replace the integral part of PI control by an adaptive feedforward preserving the proportional control P. The strategy meets its goal of being simple in its application, to emulate the action of PI control, and providing antiwindup features without requiring additional hardware to avoid this adverse effect.

The control technique is applied to a linear time-invariant system with over-damped dynamics, and is then validated in a power electronic Buck converter.

Index terms: antiwindup, feedforward, feedback, PWM, PAM, control PI, LQR.

Contenido

Agradecimientos	VII
Resumen	IX
Lista de símbolos	XVI
1. Introducción	1
1.1. Motivación	1
1.2. Referentes Teóricos, Antecedentes y Estado del Arte	3
1.2.1. Automatización	3
1.2.2. Control PI y PID	3
1.3. Estructura de la Tesis	5
2. Diseño del Sistema de Control	7
2.1. Sistema de Control	7
2.2. Controlador PI'	8
2.2.1. Ley de Control	9
2.2.2. Conversión de Esquemas PWM y PAM para PI y PI'	11
2.3. Estimación y Adaptación del $G(0)$	13
2.3.1. Primer Método de Estimación	15
2.3.2. Segundo Método de Estimación	20
2.3.3. Tercer Método de Estimación	28
2.3.4. Sintonización	36
2.4. Antiwindup del Controlador PI'	37
2.5. Conclusiones Parciales	41
3. Dinámica del Sistema de Control	43
3.1. Sistema de Prueba	43
3.2. Dinámica del Sistema	44
3.2.1. Discretizaciones	47
3.3. Bifurcaciones	49
3.3.1. Bifurcaciones Unidimensionales	49
3.3.2. Bifurcaciones Dos-dimensionales	56

3.4. Constante Proporcional K_p	59
3.4.1. Caso Ideal	60
3.4.2. Caso Hipotético	63
3.4.3. Caso Real	66
3.5. Conclusiones Parciales	70
4. Aplicación Experimental de la Técnica PI'	72
4.1. Preliminares	72
4.2. Resultados vía Simulación	75
4.3. Resultados Experimentales	77
5. Contribuciones y Trabajo Futuro	84
5.1. Contribuciones	84
5.2. Trabajo Futuro	85
A. Anexo: Optimización PI	87
Bibliografía	92

Lista de Tablas

2-1. Conversión Esquemas de modulación	13
2-2. Ganancias, halladas en el dominio del tiempo	19
2-3. Transición Condición de estimación	31
2-4. Parámetros del Controlador PI'	36
3-1. Valores para el diagrama de bifurcación unidimensional	51
3-2. Descripción cualitativa por zonas del diagrama de bifurcación	53
3-3. Valores para bifurcaciones codimensión 2	58
3-4. Puntos fijos	65
3-5. Ziegler-Nichols para Control P	70
4-1. Parámetros utilizados en el convertidor	73
A-1. Soluciones Optimización PI	91

Lista de Figuras

2-1. Sistema de control mediante PWM	7
2-2. Sistema de control mediante PAM	8
2-3. Transformación PI \rightarrow PI'	9
2-4. Ley de control	10
2-5. Estructura Señal de Control	11
2-6. Perturbaciones en el Sistema de Control	14
2-7. Señal de control usando PAM y PWM	15
2-8. Comportamiento de la adaptación	18
2-9. Compensación de perturbaciones	19
2-10. Compensación perturbación, valor máximo actuador, 80 %	21
2-11. Compensación salida en el controlador, 15 % mas en d	22
2-12. Compensación salida en el sistema, +0.25 en la y	23
2-13. Diagrama de bloques del sistema de control bajo esta adaptación	24
2-14. Esquema general estimación y adaptación.	25
2-15. Compensación de perturbaciones	26
2-16. Compensación perturbación, valor máximo actuador, 80 %	27
2-17. Compensación salida en el sistema, +0.25 en x_1	28
2-18. Funcionamiento tercer método de estimación	30
2-19. Señal binaria Tramo	30
2-20. Resumen Funcionamiento tercer método	31
2-21. Ilustración sobre las pendientes posibles en un pico de oscilación	34
2-22. Compensación perturbación, valor máximo actuador, 80 %	37
2-23. Compensación salida en el sistema, +0.25 en x_1	38
2-24. Sintonización sistema de control	39
2-25. Evolución $G(0)$ estimado	39
2-26. Comportamiento de la adaptación	40
2-27. Estrategia antiwindup mediante retro-cálculo	41
2-28. Estrategia antiwindup mediante integración condicional	41
3-1. Respuesta al escalón unitario	44
3-2. Evolución del sistema, espacio de estados.	45
3-3. Zoom Evolución del sistema.	45
3-4. Discretización mediante PWM y PAM.	50

3-5. Aplicación de Poincaré	51
3-6. Diagrama de bifurcación codimensión 1 en la salida del sistema.	52
3-7. Diagrama de bifurcación codimensión 1 en la ley de control.	54
3-8. Sensibilidad condiciones iniciales con $kp = 1.6$	54
3-9. Comportamiento espacio de estados con $kp = 1.6$	55
3-10. Comportamiento temporal variables x_1 y x_2 con $kp = 1.6$	55
3-11. Escala de γ , tipos de sistemas	57
3-12. Diagrama de bifurcación $f=10\text{Hz}$, siguiendo la órbita	59
3-13. Diagrama de bifurcación $f=10\text{Hz}$, sin seguir la órbita	60
3-14. Diagrama de bifurcación $f=24.495\text{Hz}$, siguiendo la órbita	61
3-15. Diagrama de bifurcación $f=24.495\text{Hz}$, sin seguir la órbita	62
3-16. Incoherencia en la estimación, con términos faltantes en la ley de control	63
4-1. Convertidor reductor buck	72
4-2. Tipos de modulación PWM	73
4-3. Lugar geométrico de las raíces para el convertidor buck	74
4-4. Selección de la pendiente a vía manual	76
4-5. Controlador PI' aplicado al convertidor <i>buck</i> en simulink	76
4-6. Simulación para una referencia de 32 voltios	77
4-7. Simulación para una referencia de 32 voltios	78
4-8. Simulación para una referencia de 20 voltios	78
4-9. Simulación para una referencia de 20 voltios	79
4-10. Simulación ante cambios de carga R	79
4-11. Simulación ante cambios de carga R	80
4-12. Resultado experimental para una referencia de 32 voltios	80
4-13. Resultado experimental para una referencia de 32 voltios	81
4-14. Resultado experimental para una referencia de 20 voltios	81
4-15. Resultado experimental para una referencia de 20 voltios	82
4-16. Resultado experimental ante cambios de carga R	82
4-17. Resultado experimental ante cambios de carga R	83

Lista de símbolos

Símbolos

Símbolo	Término
α_1, α_2	Parámetros sistema lineal orden 2
α_p	Constante proporcional
a	Pendiente que define condición de estimación método 3
a_{sn}	Pendiente semi-normalizada
a_n	Pendiente normalizada
a_x	Factor de normalización
a_0	Es el mismo a_{sn} y a_n
a_{0n}	Conjunto de pendientes posibles
A, b	Matriz de estados y vector de ganancias
A_e	Matriz del sistema en función del error
β	Constante de ponderación para el funcional
d	Modulación de ancho de pulso
d^*	Modulación necesaria para $y = ref$
$e(t), e_k$	Error en el tiempo continuo y tiempo discreto
e_0	Error inicial de la primera variable de estado
e^{At}	Matriz de transición de estados
$G(s)$	Función de transferencia del sistema
$G(0), \hat{G}(0)$	Ganancia a frecuencia cero del sistema real y estimada
γ	Factor de Amortiguamiento relativo transformado
γ_d	Ganancia del lazo de feedforward en tiempo continuo
h	Función que relaciona $\{R, \hat{G}(0)\}$
H	Momento en el que se realiza la estimación, método 1 y 2
$I(t), I_k$	Acción integral tiempo continuo y discreto
kp	Constante proporcional del controlador tiempo discreto
Kp	Constante proporcional del controlador tiempo continuo
k_s	Ganancia para el re-cálculo del tiempo integral
k_u	Ganancia ultima
k	Ganancia función de transferencia orden 2
M, M_e	Máximo esfuerzo del actuador real y estimada

Símbolo	Término
R	Relación $\frac{y}{ref}$
τ	Escalado de la variable de tiempo t
τ_a	Constante de tiempo aparente en los sistemas
τ_{cr}	Periodo de tiempo crítico
$T = \frac{1}{f}$	Tiempo y frecuencia de muestreo y conmutación
$T(t)$	Señal tramo
u, y	Entrada y salida del sistema
U, Y	Transformación de u, y en la frecuencia
x_1, x_2, ref	Variables de estado y referencia
x_{1k}, x_{2k}	Variables de estado en tiempo discreto
x_0	Condición inicial en el sistema
x^*	Equilibrios del sistema
$\zeta(I)$	Espacio de funciones definidas en un intervalo real I

Expresiones

Expresión	Término
$MRAS$	Sistema adaptativo por modelo de referencia
STR	Regulador auto sintonizado
PWM	Modulación de ancho de pulso
PAM	Modulación de amplitud de pulso
$PWML$	PWM definido con pulso al lado
$PWMC$	PWM definido con pulso centrado
LQR	Regulador cuadrático lineal
$Windup$	Efecto de desborde en la integración de un controlador PI
$feedforward$	Alimentación hacia delante
$feedback$	Alimentación hacia atrás

1. Introducción

1.1. Motivación

La importancia de la automatización en los procesos de la industria ha incrementado dramáticamente en años recientes [18]. En los países industrializados la automatización de procesos es implementada para mejorar la calidad del producto, dominar un gran rango de productos, mejorar la seguridad del proceso, aumentar la disponibilidad de la planta, utilizar eficientemente los recursos y garantizar que las emisiones contaminantes sean bajas. En los países en vía de desarrollo la producción en masa es la principal motivación para aplicar la automatización de procesos [18].

La automatización en Colombia se ha venido dando fundamentalmente para expandir la producción y para fabricar nuevos productos, por tanto los sistemas de automatización están en función de la producción en masa.

En el país, la automatización está basada en dos factores fundamentales, la profundización y la expansión en la producción. Por un lado, la profundización corresponde a todos los cambios técnicos para mejorar la producción, y la expansión a la ampliación de la escala de esta. En el país la expansión se ha favorecido por la inmersión de la tecnología microelectrónica, mientras en la profundización por la tecnología electromecánica. Actualmente la tecnología microelectrónica ayuda al avance de ambas.

Muchos factores han determinado, que las necesidades en automatización y expansión de las plantas, no hayan conocido un crecimiento en Colombia anteriormente. Entre las posibles causas tenemos: fluctuaciones desfavorables en la demanda, políticas gubernamentales inadecuadas sobre exportaciones e importaciones, y la rigidez en el uso de tecnologías antiguas para ser acopladas con tecnologías de aquella época; impidiendo la diversificación de nuevos productos [8].

Las necesidades, la competencia, y la reducción de las importaciones han hecho que las industrias colombianas innoven en sus sistemas de producción, y en especial en sus sistemas de control. Esto ha ocurrido en el sector autopartista colombiano. Este sector es líder en el uso de tecnología microelectrónica en sus sistemas de automatización [8].

Actualmente las industrias se enfrentan a un nuevo paradigma. El antiguo enfoque era diseñar sistemas de control para que el sistema fuera estable. Ahora las industrias enfrentan mercados cambiantes y difíciles de predecir, por lo tanto estas deben implementar sistemas de control, que garanticen equilibrio entre la operación de la planta y la evolución del mercado. Para así mantenerse competitivas y rentables [35].

La incesante presión en los costos debido a las fluctuaciones en los mercados, no deja alternativa para mejorar la productividad. Las industrias por lo tanto necesitan optar por una aproximación holística para la calidad. La ingeniería de automatización juega un rol importante, y el control de procesos por tanto asegura una utilización continua de los activos de la planta en su rango más rentable, logrando calidad usando menos energía [28].

No todas las industrias colombianas tienen la posibilidad, de implementar algoritmos de control avanzados en sus plantas, como el RMPCT ofrecido por Honeywell y DMC+ ofrecido por Aspen Technology. Estas técnicas son MPC (Model Predictive Control) de cuarta generación. Hay que tener en cuenta que el 90 % de los sistemas de control implementados hoy en día, en las industrias de proceso continuo más grandes del mundo son por MPC [18], [12] y [29]. Las grandes demandas por automatización de procesos continuos se encuentran en la industria química, en la industria de generación de energía eléctrica, y en la industria petroquímica [30].

En cierto sector de la industria mundial y en especial la colombiana (pequeñas y medianas industrias), por lo general, la tendencia más habitual para controlar los procesos, es el uso de controladores PI y PID. Uno de los problemas es que este tipo de controladores es de uso general. Se usan para cualquier tipo de necesidad a controlar, independientemente de la naturaleza del sistema. Otro problema es que el 95 % de los controladores PID o PI son mal sintonizados, debido a la no disponibilidad de métodos robustos para sintonización automática [2].

El problema de investigación de este trabajo, es mejorar el funcionamiento de los lazos de control (por ejemplo, controles aplicados a convertidores electrónicos en la industria de la energía eléctrica), dentro de las instalaciones en donde se implementa los DSC (Sistemas de Control Distribuido), para darle mayor eficiencia, rentabilidad y productividad al proceso industrial.

Por lo tanto, lo que se pretende es diseñar una nueva estrategia de control alternativa PI' frente al control PI, para desempeñarse en regulación, y que necesite muy poca información sobre el sistema. Esto implica no tener que realizar alguna estimación del modelo de la planta y por ende una realización del mismo. Además se quiere mitigar los efectos indeseados cuando el efecto *windup* aparece, sin necesidad de recurrir a elementos externos de instrumentación (más costos), que eludan el efecto. Como lo hace el PI convencional muy conocido en la industria.

Esta técnica de control será implementada mediante PWM (modulación de ancho de pulso), debido a que permite el uso de actuadores de más bajo costo (válvulas conmutables, transistores de potencia). Desde los años 90's se ha mostrado mucho interés en el uso de actuadores conmutables en el campo de la electrohidráulica [19], [37].

En el desarrollo de la investigación, también se tomará su contraparte proporcional mediante PAM (modulación de amplitud del pulso), para tener en cuenta que esta técnica también es implementable vía señales de control proporcionales. Este uso también es justificable, cuando el sistema no tolera oscilaciones sostenidas dada por la naturaleza de la señal de control.

Esta nueva técnica de control PI' al igual que el control PI no es una estrategia cerrada, es decir, permite virtualmente aplicar lo que se ha venido desarrollando hasta el momento para el control PI.

Como tendencia principal en desarrollos de controladores (en especial tipo PI), se tiene que la racionalización y la optimización de la planta es la dirección a seguir. La administración del riesgo alcanzará gran importancia en el futuro, en particular, mejor control y anticipación es necesitado a fin de contener los riesgos relacionados a la economía, medio ambiente, energía e infraestructura. Estas tendencias económicas organizacionales y tecnológicas causarán cambios en tecnologías de la automatización durante los próximos años [18].

1.2. Referentes Teóricos, Antecedentes y Estado del Arte

1.2.1. Automatización

La automatización industrial tiene tradicionalmente dos componentes importantes, controladores y lógica por relé. Los PLC integran ambos. Actualmente el control de procesos es llevado a cabo por DSC (sistemas de control distribuido), los cuales descentralizan el mando, y a grosso modo lo constituyen un conjunto de controladores destinados para tareas específicas y un computador central, y conectados en red mediante un canal de comunicaciones rápido y eficiente [34].

Actualmente la instrumentación en la automatización ha adquirido cada vez más inteligencia, esto se refiere a que cada vez adquieren más funciones. Por ejemplo un sensor, anteriormente solo era utilizado para medir, actualmente incluyen funciones de monitoreo e indicadores de salud del mismo. Esto implica una transformación de la forma en como se diseñan los sistemas de automatización, incluyendo una transformación tecnológica para adaptarse a las nuevas necesidades. Además agrega nuevos retos en el área del control teórico para manejar este tipo de redes distribuidas [18].

1.2.2. Control PI y PID

El control PID ha sido ampliamente usado en la industria de procesos por su facilidad de uso y su robustez [6]. Actualmente es el controlador más implementado para controlar servomotores y ciertos tipos de aplicaciones industriales [13].

El control PID no es lo suficiente robusto para lidiar con grandes perturbaciones [13], y muestra pobre desempeño cuando trata con retardos de tiempo y fricciones por ejemplo en servo-mecanismos.

Se han diseñado e introducido varias técnicas de control (por ejemplo, control adaptativo por modelo de referencia, control por lógica difusa etc, a fin de reemplazar los esquemas PID), pero todas ellas requieren de un procedimiento de diseño complicado y una computación

considerable, como para ser implementados en tiempo real [24] y [36]. Otra solución que se ha venido explorando, es volver los PID más inteligentes a fin de que puedan lidiar con sus inconvenientes [13], y así mantener la practicidad y versatilidad del PID.

En cuanto a la sintonización, en 1942 Ziegler y Nichols [40], propusieron un método heurístico para la sintonización de los controladores PI y PID; sin embargo en la práctica, esta sintonización manual no es llevada a cabo por el esfuerzo y el tiempo que ello demanda. Desarrollos en sintonización automática le siguieron para reducir estos problemas, pero obstáculos sobresalieron por la naturaleza de la técnica.

Un problema ocurre, cuando el sistema en lazo abierto es inestable, debido a que para la sintonización es necesario abrir el lazo de control. Otro problema ocurre cuando la sintonización se realiza en lazo cerrado, debido a que es necesario llevar el sistema al límite de la estabilidad (para ciertos sistemas potencialmente peligroso), para su sintonización.

Dos maneras de abordar estos problemas, son mediante controladores de auto ajuste (controladores adaptativos) y los auto sintonizadores (ampliamente aceptados a nivel industrial). El primero necesita información previa acerca del proceso, además de necesitar una estimación de la planta (por ejemplo MRAS y STR). El segundo necesita muy poca información, y no requiere de una estimación de la planta [10], [5], [21] y [2].

Dos métodos novedosos introducidos en 1982, emergieron con aplicabilidad industrial (SattControl y foxboro EXACT [15]), a fin de lidiar con estos problemas. Bristol por un lado basado en el reconocimiento de patrones [9] y Aström [4], mediante sintonización por relé. En 1986, Hang propuso un método de sintonización *off-line*, por la técnica de correlación [14]. En 1991, Hang la extendió para sintonización *on-line*, con el uso de las reglas refinadas de Ziegler-Nichols dadas por él mismo y Aström [14].

En 1997 Besharati [27] y los demás, proponen un controlador de auto ajuste mediante el método de búsqueda de newton raphson. Este algoritmo no requiere de perturbaciones externas, y presenta un mejor desempeño con respecto al SattControl ECA400.

El uso de sistemas inteligentes como redes neuronales, son también utilizados para la sintonización automática de controladores PID. Por lo general se utilizan dos redes, una para identificar el sistema, y otra para sintonizar los parámetros del controlador. Ejemplos pueden verse en trabajos como el de Dhounadi, el cual utiliza redes neuronales recurrentes para un servo-mecanismo, y Xia el cual aplica neuro-controladores PI adaptativos, para controlar motores de reluctancia conmutada [39] y [13].

Otra alternativa, es el uso de controladores basados en lógica difusa de tipo PI. Estos son una respuesta para controlar sistemas que manejan muchas variables, y cuando otras técnicas de control no son apropiadas para manejar incluso sistemas muy simples. No presentan grandes ventajas cuando el orden del sistema es muy alto; en este caso cuando se requiere reducir el tiempo de levantamiento, se producen sobrepasos considerables. Lee [20] propone un método para mejorar el desempeño de este tipo de controladores.

Respecto al *windup* integral, prácticamente el efecto ocurre en conexión con grandes cambios en el valor de consigna, o grandes perturbaciones [17], [26].

El *windup* integral produce grandes sobrepasos, aumento en el tiempo de establecimiento, y algunas veces inestabilidades en el sistema de control [5].

Convencionalmente, los dos métodos industriales más representativos para abordar el problema del *windup* integral son: cálculo de seguimiento posterior o retro-cálculo [7], [33] y [23], e integración condicional [16], [31] y [32]. Estos métodos necesitan elementos adicionales de instrumentación, para medir la entrada y la salida del actuador.

En 1998 H-B Shin [33], propone un método *antiwindup*, el cual re-alimenta la señal de salida del controlador, con las condiciones que garantizan la estabilidad. Este algoritmo es implementado, para controlar la velocidad de un motor de inducción. Este método necesita de elementos adicionales de instrumentación, para medir la entrada y la salida del actuador. En el 2009, Jong Woo y colaboradores [11], proponen un mejoramiento al método por integración condicional. Esta mejora en el control de velocidad, es aplicado a un motor síncrono de imán permanente (PMSM). Como desempeño presenta casi cero sobrepaso, y es fácilmente implementado en controladores PI. Garantiza el desempeño del sistema independiente de las condiciones de operación, cambios en el valor de consigna y torques de carga. Necesita de elementos adicionales de instrumentación, para medir la entrada y la salida del actuador.

1.3. Estructura de la Tesis

La tesis es estructurada como sigue:

- En el capítulo 2, se establece el desarrollo de la técnica de control PI', la cual es una nueva técnica de control alternativa al control PI. Esta es basada en la idea intuitiva del funcionamiento del mismo. Se presentan algunas generalidades e ideas sobre lo que se fundamenta la nueva técnica, y los métodos desarrollados para la realización del controlador. Principalmente el desarrollo se centra en el ajuste del termino I', mediante la estimación de un parámetro del sistema y su correspondiente adaptación al controlador. Se demuestran las facultades añadidas que posee esta técnica de control, para eludir uno de los principales problemas que presenta la técnica de control PI, cuando se exhiben las no linealidades en el sistema (*windup* integral). Se compara con los métodos más usados industrialmente, y se muestran el tipo de perturbaciones que puede manejar el controlador.
- En el capítulo 3, se establecen las pautas acerca del sistema de prueba utilizado en el trabajo, y los motivos que llevaron a la selección de este sistema como punto de partida en la investigación. También se describe brevemente el análisis dinámico del mismo y se incluye un análisis de las discretizaciones definidas para la implementación digital, inducidas por los dos tipos de modulación PWM y PAM y la forma como se relacionan estas discretizaciones. Se realiza una descripción de los diagramas de bifurcaciones uni-dimensionales y dos-dimensionales sobre el comportamiento del sistema de control

en el caso ideal; variando un parámetro en el controlador, y generalizando la planta para una gran variedad de sistemas de orden 2. El objetivo es que se garantice la sintonización del controlador en la zona 1T-periodica, la cual es la zona más eficiente para la regulación. Se analiza brevemente la estabilidad en el sistema debida a esta nueva configuración.

- En el capítulo 4, se valida experimentalmente la técnica de control propuesta PI', en un convertidor electrónico de potencia Buck.
- En el último capítulo se presenta las contribuciones y el trabajo futuro.

2. Diseño del Sistema de Control

2.1. Sistema de Control

El sistema de control PI' es una técnica alternativa, que se propone al control convencional PI, muy utilizado en el control de procesos. La técnica reemplaza la parte integral del controlador PI, por un *feedforward* adaptativo. Ciertas características como el fenómeno del *windup* integral son mejoradas, frente a la técnica anterior.

La idea es explorar este esquema de controlador en principio, en sistemas lineales, a fin de desarrollar la teoría. En el desarrollo del capítulo, primero se desglosa la estructura del controlador y su funcionamiento, tanto en estado estable como en el transitorio. Segundo, se desarrollan tres métodos para estimar la ganancia a frecuencia cero del sistema, y se evalúa el desempeño frente a perturbaciones en la salida, la carga, el actuador y el sistema. Tercero, se compara el desempeño del controlador PI' con los controladores PI óptimo, PI Ziegler-Nichols, PI con retro-cálculo, y PI con integración condicional, cuando se induce el efecto *windup* en el sistema de prueba 3-1. Cuarto, se detalla el proceso de sintonización del *feedforward* del controlador.

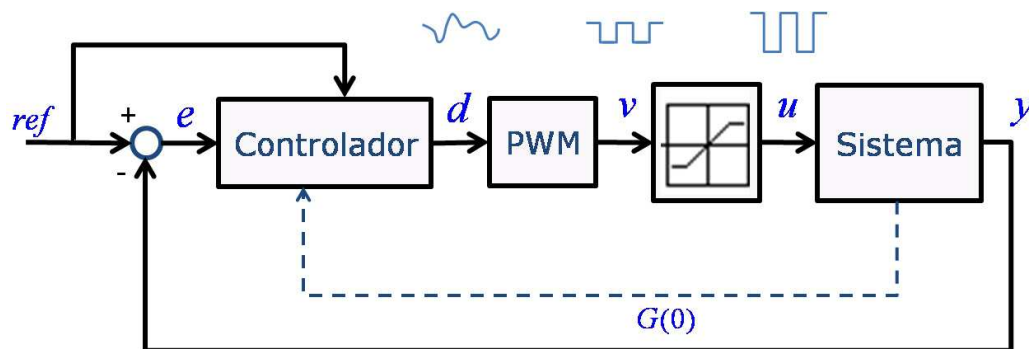


Figura 2-1.: Sistema de control mediante PWM

En el desarrollo del sistema de control PI', se consideran saturaciones en los actuadores. Su implementación, puede ser realizada mediante el uso de actuadores tanto proporcionales como conmutables.

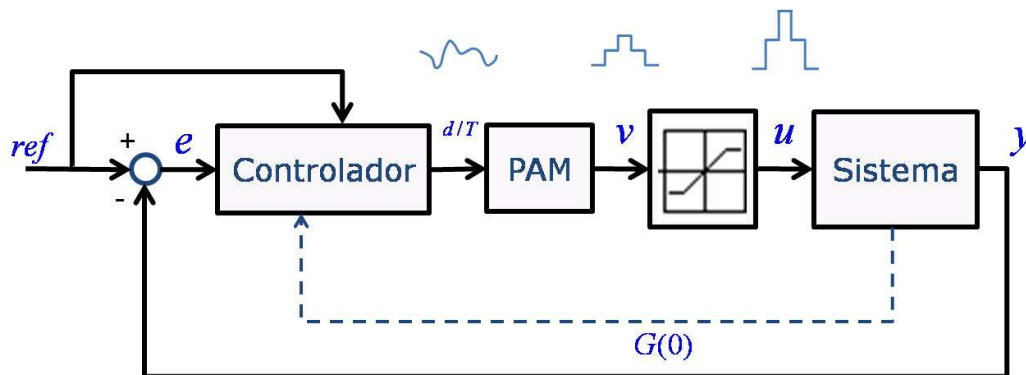


Figura 2-2.: Sistema de control mediante PAM

Las figuras 2-1 y 2-2, representan el sistema de control implementado, mediante dos esquemas de modulación en la señal de control; Uno usando PWM (modulación en ancho del pulso) en actuadores conmutables, y el otro PAM (modulación de amplitud del pulso) en actuadores proporcionales.

El sistema de control visto mediante PWM o PAM (ver figuras 2-1 y 2-2), es caracterizado por ser un sistema no-lineal, debido a la saturación en el actuador y al mecanismo de adaptación del *feedforward*. En el esquema 2-2, la limitación se presenta en la amplitud de la señal de control, cuando se sobrepasa el rango cuasi-lineal del actuador proporcional; sin embargo, en actuadores conmutables manejados mediante PWM (esquema 2-1), la no-linealidad se presenta en la saturación del ancho de pulso.

El sistema de control consta de un lazo de *feedback* y un lazo de *feedforward*, pero en los esquemas de las figuras 2-1 y 2-2 no es evidente. El lazo de *feedforward* no es notable, debido a que el esquema del controlador no ha sido descrito en detalle, solo se ha descrito externamente. Pero hay dos lazos, uno que viene de la referencia, y el otro de la estimación de un parámetro del sistema, que dan alusión al *feedforward*.

De aquí en adelante, se usarán indistintamente las implementaciones PWM y PAM. Se aclara que el funcionamiento del controlador, se realizará mediante el esquema de PWM. Cualquier esquema escogido para diseñar el sistema de control es válido, puesto que mantiene la estructura, del sistema en tiempo discreto con saturaciones.

2.2. Controlador PI'

La estructura del controlador es básicamente lineal. La idea se basa, en que la parte integral en estado estable de un controlador PI, sostiene un valor fijo cuando el error se hace cero. Este es el valor necesario en la acción de control, para que la salida del sistema siga una referencia constante. De este análisis, se puede hallar el valor deseado en el control, no basado en el error, sino en el conocimiento de un parámetro en el sistema, de la referencia y de ciertas

condiciones que deben cumplirse en la respuesta de la planta. Por lo tanto, un determinado tiempo será necesario (como en el control PI), para calcular el valor equivalente en la señal de control.

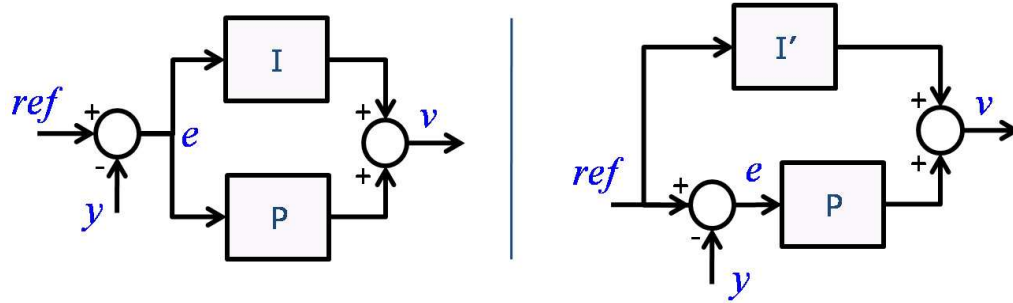


Figura 2-3.: Transformación PI \rightarrow PI'

Lo que se hace es separar el control Proporcional-Integral (PI), ambas acciones se fundamentan en el error, y establecen el *feedback* del sistema. El mecanismo, es sostener la parte proporcional en el *feedback*, e introducir una nueva acción en un lazo de *feedforward* (ver figura 2-3), pero con otras características que difieren del anterior. Una opción es mantener la función de acumulación de la acción integral, y la otra es removerla. Esta última es la alternativa sobre la que se fundamenta el desarrollo posterior del controlador.

Al separar el control PI, y cambiarle una de sus características, se logra evitar el problema del *Windup* Integral. Este fenómeno se presenta, cuando se acumula el error en un controlador con acción integral, en presencia de saturaciones. Este efecto causa que el lazo de *feedback* se rompa, y exponga las no-linealidades de un sistema de control lineal real. Por tanto, el controlador no realizará ningún efecto sobre el sistema, independientemente de la salida. Esto implica al controlador, realizar una integración continua causando sobrepasos largos, transitorios indeseados, y posiblemente inestabilización en el sistema.

Esta separación de las funciones en la ley de control PI, permite conservar el número de elementos almacenadores de energía en la planta; evitando que el sistema en general, fuera más propenso a inestabilizarse, con otro acumulador de energía adicional. Además, no es necesario el uso de un sensor extra adecuado en la salida del actuador (como se verá más adelante en simulaciones), el cual es usado en las estrategias *antiwindup* industriales reportadas en la literatura (ver capítulo 1, sección 1.2.2). Esto implica un mejor desempeño, respecto a los costos de diseño de un sistema de control.

2.2.1. Ley de Control

La ley de control que define la señal de excitación $u(t)$, está constituida por dos partes. La primera, por un término que proviene del lazo de *feedforward* I' , el cual es el responsable de comandar el comportamiento deseado en estado estable. La segunda, por un término que

proviene del lazo de *feedback*, el cual dirige el comportamiento del transitorio, estabiliza el sistema, y cataliza la adaptación del controlador. Si se utiliza PWM, la ley de control queda definida en d , el cual representa la modulación del ancho de pulso (ver figura 2-4).

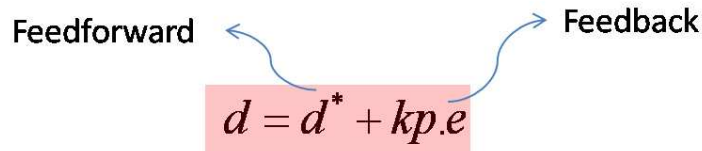


Figura 2-4.: Ley de control

La señal de excitación $u(t)$, es definida mediante una ley de control continua d , en un intervalo fijo de conmutación T , y adecuada a dos valores $\{0, M\}$ mediante PWM. La señal de control es definida de la siguiente manera:

$$u(t) = \begin{cases} M, & \text{si } 0 < t \leq d \\ 0, & \text{si } d < t \leq T \end{cases} \quad (2-1)$$

donde

$$d = d^* + kp.e \quad (2-2)$$

Donde $d^* \in [0, T]$, es el valor necesario en modulación(en estado estable), para que la media de la salida del sistema siga la referencia. Este parámetro constantemente estará adaptándose, si se presenta un cambio en la dinámica del proceso. Será una adaptación en línea, del lazo de *feedforward*.

El error en la regulación e , está definido como $e = ref - y(kT)$ para todo $k \in \mathbb{N}$, ref es la referencia o valor de consigna del sistema, $y(kT)$ es la salida del sistema en instantes kT , y M es el máximo esfuerzo del actuador.

La ganancia del controlador kp , modula de manera lineal el ancho del pulso (si se habla de PWM), o modula de manera lineal la amplitud del pulso (si se habla de PAM).

Y gráficamente se detalla en la figura 2-5.

Si se asume que en estado estable se presenta un $e = 0$, implica un $d = d^*$. Por lo tanto, para que la media de salida y siga la referencia ref , se necesita que la señal dada por el actuador, en promedio, sea la suficiente para producir una media en la salida igual a la referencia. Esto es.

$$\frac{1}{T} \int_T u(t)dt = \frac{ref}{\hat{G}(0)} \quad (2-3)$$

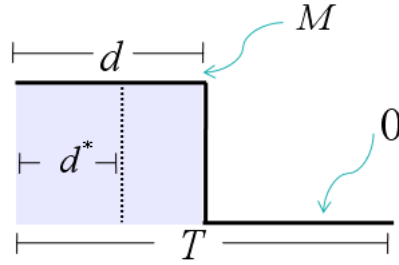


Figura 2-5.: Estructura Señal de Control

Donde el $\hat{G}(0)$ es la ganancia estimada del sistema a frecuencia cero. Simplificando 2-3, se obtiene.

$$\frac{M \cdot d^*}{T} = \frac{ref}{\hat{G}(0)} \quad (2-4)$$

Por tanto, el valor necesario en modulación d^* , para garantizar que la salida siga la referencia es.

$$d^* = \frac{ref \cdot T}{M \cdot \hat{G}(0)} \quad (2-5)$$

La ganancia kp tiene como función, ayudar al proceso de adaptación en el lazo de *feedforward*, agilizando su convergencia. Lo mismo hará estabilizando el sistema en general, suministrando el esfuerzo de control necesario cuando exista siempre un error. En el transitorio, un aumento de esta ganancia causará una disminución en el tiempo de levantamiento, pero a su vez disminuirá la amortiguación del mismo. El máximo esfuerzo M no es conocido para calcular d^* , no obstante, un valor aproximado M_e es suficiente, como se evidencia en la sección 2.3.2.

2.2.2. Conversión de Esquemas PWM y PAM para PI y PI'

Cuando se habla de PWM, solo interesa variar el ancho del pulso d . Con PAM, solo interesa variar la amplitud del pulso am , ambos con la finalidad de estabilizar y compensar perturbaciones. La relación que permite transformar, la señal de control desde PAM a PWM o viceversa, se presenta en la expresión 2-6, la cual se obtiene; tomando el promedio de la señal de la salida del actuador (respuesta de control), durante su ciclo de conmutación.

$$\underbrace{\frac{(d^* + kp \cdot e) \cdot M}{T}}_{PWM} = \underbrace{\frac{ref \cdot M}{M_e \hat{G}(0)} + \frac{kp \cdot M}{T} \cdot e}_{PAM} \quad (2-6)$$

Aunque la relación 2-6 evidencia que la señal de control dada por PAM está normalizada, en la práctica esta señal es pre-amplificada, con el fin de adecuarla al rango de trabajo. Luego es introducida como excitación en el actuador, el cual ofrece otra amplificación. Sin embargo, con la omisión de la pre-amplificación no se altera la validez del concepto. Pero debe tenerse en cuenta en el momento del diseño, puesto que la ganancia proporcional del controlador está siendo modificada por la pre-amplificación.

De esta manera, se puede intercambiar el uso de un esquema de controlador a otro, conociendo su homólogo; siempre y cuando las características que posea el sistema a controlar las tolere.

Se tiene que la parte integral del control PI está dada por.

$$I(t) = \frac{kp}{T_i} \int_T edt = kp.ki \int_T edt \quad (2-7)$$

Mediante la aproximación de Tustin, se obtiene.

$$I_{k+1} = I_k + kp.ki.T.e_k \quad (2-8)$$

$$I_k = kp.ki.T \sum_{n=1}^k e_{n-1}$$

El resultado dado por 2-8, es la representación discreta de la parte integral para PAM, y de manera directa se consigue para PWM; asumiendo I_k como el promedio de oscilación en la señal dada por PWM, se obtiene.

$$I_k = \frac{d}{T} M \quad (2-9)$$

Aca d es la modulación, que le corresponde a la parte discreta de la integral en la aproximación. Por lo tanto d será.

$$d = I_k \frac{T}{M} = \frac{kp.ki.T^2}{M} \sum_{n=1}^k e_{n-1} \quad (2-10)$$

De igual manera, se procede para la parte proporcional. La aproximación de Tustin para la parte proporcional, es la misma por poseer una dinámica estática.

En la tabla 2-1, se resume lo antes expuesto.

Tabla 2-1.: Conversión Esquemas de modulación

Dominio en el tiempo	Integral	Proporcional	I'
Continuo	$kp.ki$	kp	$\frac{1}{\hat{G}(0)}$
Discreto (PAM)	$kp.ki.T$	kp	$\frac{1}{\hat{G}(0)}$
Discreto (PWM)	$\frac{1}{M}kp.ki.T^2$	$\frac{1}{M}kp.T$	$\frac{T}{M\hat{G}(0)}$

Cabe aclarar que en estos resultados, se parte de conocer el controlador en tiempo continuo para conocer el discreto, y además se parte de conocer su equivalente discreto PAM para conocer el discreto PWM, contrario a lo dado en la expresión 2-6, en el cual se parte del esquema PWM para conocer el equivalente PAM.

En cualquier caso, esta tabla permite variar de un esquema a otro, y es útil cuando se conoce los parámetros óptimos de un controlador en tiempo continuo y se requiere implementarlos en el tiempo discreto por PWM.

2.3. Estimación y Adaptación del $G(0)$

La mayoría de los procesos industriales son muy complejos y no muy bien entendidos. Además no es económico ni posible, hacer una investigación de las causas de las variaciones en estos [2]. Sin embargo hay variaciones que si son de antemano entendidas, y en la mayoría de los casos conocidas.

Para que un sistema de control sea eficaz, este debe comandar el comportamiento del sistema hacia la dirección deseada, ser estable, preciso, y tener la capacidad para compensar perturbaciones, tanto internas como externas (ver figura 2-6). Estas perturbaciones pueden ser: cambios en la estructura interna del sistema (desgaste de los componentes físicos), perturbaciones conocidas (cargas y diferentes condiciones de operación), así como perturbaciones desconocidas presentes en la dinámica observada y en la señal actuante (dada por el actuador).

Se debe tener en cuenta, que algún cambio ocasionado por alguna perturbación, hará que la planta no obtenga la máxima salida cuando el actuador se saturó y viceversa. Por tanto, el sistema no dará más de lo que solía hacer, ni responderá adecuadamente ante algún estímulo. Se ve entonces el sistema empobrecido, pero apto para ser compensado en la zona no restringida o no deteriorada.

Existe un parámetro en el sistema, el cual define el núcleo de la técnica propuesta, el $G(0)$, definido como la constante de error de posición estática del sistema, también conocida como la ganancia del sistema a frecuencia cero. Se puede entender como la capacidad que tiene la planta, para atenuar o amplificar el nivel de señal de un estímulo constante, o de variación cero.

Es importante este parámetro, puesto que en estado estable se reflejan allí, los efectos de

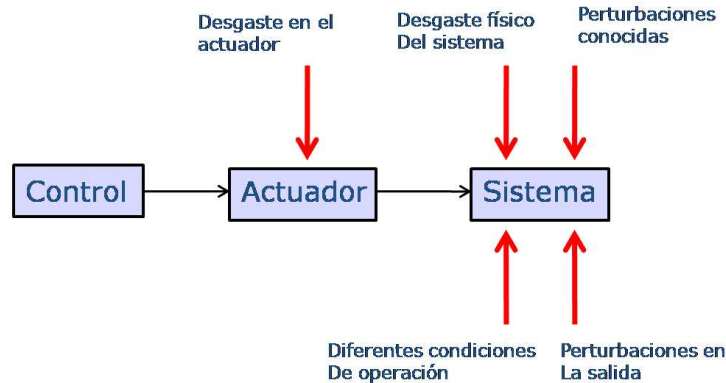


Figura 2-6.: Perturbaciones en el Sistema de Control

las perturbaciones que sufra el sistema. Por lo tanto hay una fuerte correlación entre estas perturbaciones, y el $G(0)$.

Suponiendo que el sistema es asintóticamente estable, y que no posee integradores ni derivadores puros, el $G(0)$ puede ser expresado mediante la relación de los polos y los ceros de la función de transferencia del sistema, dada por la expresión 2-11.

$$G(0) = k \frac{c_1 c_2 \cdots c_m}{p_1 p_2 \cdots p_n} \quad (2-11)$$

Como ejemplo, si se consideran perturbaciones en una válvula hidráulica conmutable (actuador mecánico), se observa que la erosión de una de sus partes móviles (la corredera interna) causada por la fricción con el fluido, ocasiona un no cierre total de la válvula. Esta falla no permite que se suministre la energía necesaria al proceso, para su correcto desempeño.

Este cambio físico en la válvula, se puede trasladar matemáticamente como un cambio en el $G(0)$ del sistema, como se verá en la subsección 2.3.2. Posibilitando extender las perturbaciones en el actuador hacia el $G(0)$ del sistema.

Como estos cambios son reflejados en el $G(0)$, lo más intuitivo es medirlo y cuantificarlo, a fin de obtener implícitamente una medida del cambio en el sistema. Por lo tanto, la modulación de la señal $u(t)$, debe seguir una ley de control conforme $G(0)$ evoluciona, de tal manera que se puedan compensar perturbaciones en el sistema; modulando en ancho de pulso (PWM) o la amplitud de pulso (PAM)(ver figura 2-7).

Por consiguiente, el *feedforward* del controlador es el encargado de solucionar estos inconvenientes.

El funcionamiento del lazo de *feedforward* es el siguiente: se estima de algún modo el $G(0)$ del sistema, cuyo valor es $\hat{G}(0)$. Este valor es adaptado en la expresión dada por 2-5, de esta manera el lazo se convierte en un *feedforward* adaptativo. Su actualización se realiza

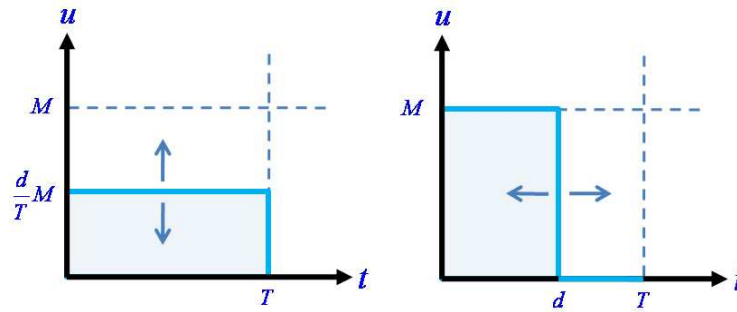


Figura 2-7.: Señal de control usando PAM y PWM

cada mT segundos (para todo $m \in \mathbb{N}$), es decir regularmente, o en determinados instantes de tiempo, si se verifica que el sistema se encuentra en estado estable o cercano a él.

Lo importante de notar y para tener en cuenta, es que la compensación de estos cambios se podrá lograr bajo cierta restricción, dada por la física de la planta. Como es detallada en la desigualdad 2-12.

$$0 \leq ref \leq G(0).M \quad (2-12)$$

Para la estimación del $G(0)$, se han propuesto tres métodos. El primero considera la acumulación y el segundo no. El tercero, es una mejora adaptada a los métodos anteriores. Estos métodos no son basados en las técnicas conocidas del control adaptativo, sino en la lógica y la experiencia.

2.3.1. Primer Método de Estimación

En los problemas de regulación y de rastreo, es deseable que el error $e = ref - y$ tienda a cero, o que la relación entre la salida y la referencia tienda a la unidad.

Esto es definido en la ecuación 2-13, la cual define la relación R .

$$R = \frac{y}{ref} \quad (2-13)$$

De aquí en adelante en esta subsección, R será utilizada para desarrollar el método de estimación.

Teniendo en cuenta el desacople de la parte integral del *feedback*, y de su inmersión en el lazo de *feedforward*, la función de la integración toma otro camino, ya no es acumular una señal para que $e = 0$ (Control PI), sino en acumular una ganancia (en el lazo de *feedforward*), tal

que lleve al sistema a tener $R = 1$ o $e = 0$. Por lo tanto, el efecto de acumular y de llegar a la cantidad de esfuerzo de control necesario será logrado por ambos (PI y PI').

Como la parte I' del controlador es constituido por un modelo inverso de la planta en estado estable, o también visto como el inverso de la ganancia a frecuencia cero del sistema en *feedforward* (ver ecuación 2-3), se puede observar que al aumentar el $\hat{G}(0)$, R empieza a disminuir, y al disminuir $\hat{G}(0)$, R aumenta. Por lo tanto, existe una relación inversamente proporcional entre el $\hat{G}(0)$ y R , siempre y cuando la planta sea estable. (ver figura 2-8). Esto es:

$$R \propto \frac{1}{\hat{G}(0)} \quad (2-14)$$

Estos dos conjuntos $\{R, \hat{G}(0)\}$, se relacionan mediante la siguiente aplicación:

$$\begin{aligned} h : \mathbb{R}^+ &\rightarrow \mathbb{R}^+ \\ \hat{G}(0) &\mapsto h(\hat{G}(0)) = R \end{aligned} \quad (2-15)$$

Y según las expresiones 2-15 y 2-14 se obtiene:

$$R = \frac{\alpha_p}{\hat{G}(0)} \quad (2-16)$$

Conociendo $\hat{G}_1(0)$, un elemento de $\hat{G}(0)$, y un R_1 como consecuencia de utilizar la anterior ganancia en el sistema, se tiene que $\alpha_p = R_1 \hat{G}_1(0)$. Este es el valor evaluado en cualquier par de elementos de los conjuntos.

Lo que se requiere es ajustar el $\hat{G}(0)$, tal que se consiga $R = 1$. Para que el ajuste se haga en un solo paso, se debe asegurar que la medición sea tomada en estado estable. Visto de otra forma, existe una función h la cual enlaza la relación en estado estable de los parámetros involucrados. Si se ubica el sistema en esta función, se permitirá la sintonización en un solo paso. Lo anterior no es posible si se toman datos en intervalos de tiempo regulares. Significa que datos en el transitorio estarán siendo tomados, y la relación R no estará arrojando información precisa. Por lo tanto, el ajuste ya no se hará en un solo paso, y se necesitará de una relación de recurrencia que lo haga en n pasos y converja.

Esto es definido de la siguiente manera:

$$\hat{G}(0) = \frac{\alpha_p}{R}, \quad \hat{G}(0) = \frac{R_1 \hat{G}_1(0)}{R} \quad (2-17)$$

Reemplazando el valor de $R_1 = \frac{y_1}{ref}$ en 2-17.

$$\hat{G}(0) = \frac{\overbrace{y_1 \hat{G}_1(0)}^{\alpha}}{ref} \underbrace{\frac{1}{R}}_{=1}$$

y obligando a que la relación R sea 1.

$$\hat{G}(0) = \frac{y_1}{ref} \hat{G}_1(0) \quad (2-18)$$

Si se considera que el sistema es asintóticamente estable, y de acuerdo a la expresión dada por 2-18, es natural que a partir de un $\hat{G}_1(0)$ inicial, el sistema evolucione de cierta forma y cause un R_1 . Con la información previa del $\hat{G}_1(0)$, y la obtenida en el sistema como consecuencia del mismo, es decir, un $R_1 = \frac{y_1}{ref}$, se proporciona la información que sintoniza relativamente la función h .

La ley de adaptación 2-18, evalúa y ajusta el $\hat{G}(0)$ del controlador, para llevar la relación a $R = 1$. Como la función h hallada no es la función real asociada al sistema, el nuevo $\hat{G}(0)$ del controlador no causará un $R = 1$, pero si uno muy cercano a el. Luego esta información, sintonizará nuevamente la función h . Este procedimiento se repetirá hasta encontrar el $\hat{G}(0)$ que cause $R = 1$.

Como consecuencia, se obtiene un proceso de sintonización de una función. También puede ser visto como una relación de recurrencia (ver la expresión 2-19), convirtiéndose en un proceso iterativo para hallar el valor de $\hat{G}(0)$ indicado.

$$(\hat{G}_1(0), R_1) \rightarrow (\hat{G}_2(0), R_2) \rightarrow \dots \rightarrow (\hat{G}_n(0), R_n)$$

Este comportamiento se puede apreciar en la figura 2-8, y es resumido en la ecuación 2-19.

$$\hat{G}_{k+1}(0) = \frac{y_i}{ref} \hat{G}_k(0) \quad (2-19)$$

Donde $i = nT$, para todo $n \in \mathbb{N}$, i es el instante de tiempo en el que toma la muestra de la respuesta del sistema, n será escogido dependiendo de la dinámica del sistema, $k = mT$ es el paso de cálculo de la evolución de $\hat{G}(0)$ que coincide con el paso i , si y solo si se toma una muestra en la señal de salida para el cálculo.

Esta sucesión por lo tanto converge, mientras el sistema sea asintóticamente estable.

$$G(0) \approx \lim_{k \rightarrow \infty} \hat{G}_k(0) \quad (2-20)$$

Y en su forma más general, si en vez de tomar un solo dato para la estimación, se toman varios.

$$\hat{G}_{k+1}(0) = \frac{\frac{1}{N} \sum_{i=0}^N y_i}{ref} \hat{G}_k(0) \quad (2-21)$$

En este caso, la distancia entre el paso k al $k + 1$, será mayor que entre el paso i al $i + 1$, esto es $mT > nT$.

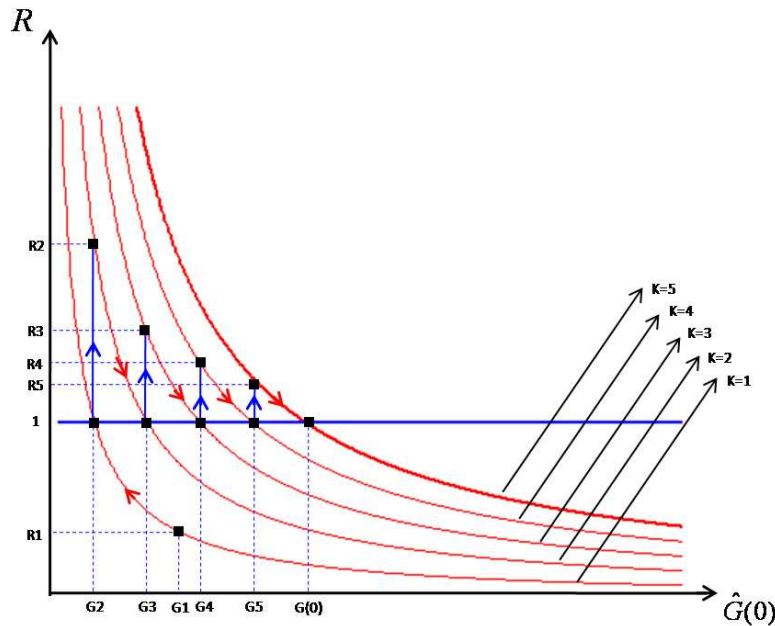


Figura 2-8.: Comportamiento de la adaptación

Por lo tanto, el proceso será una sucesión de funciones h_k , que llegará a converger a la función que sintonice el $\hat{G}(0)$, para que la relación $R = 1$ se imponga en el sistema de control. Para que este método funcione correctamente, se debe tener muy en cuenta que la estimación no se realizará, si la referencia ref o la salida $y(t)$ en el sistema se hacen cero; por lo tanto, el proceso de estimación estará suspendido.

Compensación de Perturbaciones

El diagrama de la figura 2-9, ilustra que tipo de perturbaciones el sistema de control puede compensar, basándose en el método de estimación presentado. Como se observa en la

figura 2-9, las perturbaciones pintadas en azul indican que su compensación es realizable, mientras que las rojas no. La perturbación que no es compensada, es la que se presenta en la medición (sensor). Este efecto se puede pensar como un sensor que no está calibrado; generando un offset en la medición, por lo tanto la señal re-alimentada no será la correcta.

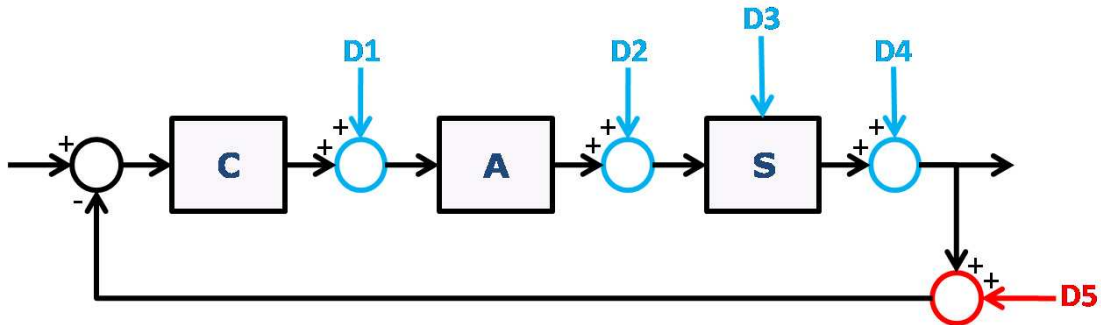


Figura 2-9.: Compensación de perturbaciones

Con relación a la perturbación constante en el sensor, el sistema de control solamente la verá como un cambio en la referencia, y por tanto, llevará al sistema hasta que la salida (y) más el offset del sensor iguale el valor de consigna. Bajo esta situación, el controlador pensará que ha regulado bien, sin darse cuenta que la salida del sistema no es la correcta.

Caso similar ocurre cuando la perturbación es dada en la salida del sistema y , esta es vista también por la medición; indicando la aparición del problema anterior, pero con la diferencia de que la perturbación si es compensada por el controlador. El controlador guiará el comportamiento de tal manera que el error sea cero, es decir, que la salida más el offset presentado por la perturbación iguale al valor de consigna. Por lo tanto, la respuesta en el sistema será la necesaria tal que su suma con la perturbación en la salida, garantice un error de cero. En las simulaciones 2-10, 2-11 y 2-12, se expone el desempeño del controlador PI frente a los controladores: PI Óptimo, y PI por Ziegler-Nichols, cuando se presenta una perturbación en el actuador, en la salida y en el controlador. El algoritmo de control PI utilizado, es el PI serie [3]. La optimización del controlador PI es desarrollada en el apéndice A. La modulación empleada para los controladores es por PWM.

Los valores de las ganancias de los controladores, son dados por la tabla 2-2 y encontradas en el apéndice A.

Tabla 2-2.: Ganancias, halladas en el dominio del tiempo

Controlador	Integral	Proporcional	Tiempo Estimación
PI Óptimo	1.478496364	10.69423550	No Aplica
PI Z-N	2.636239971302465	8.897309903145821	No Aplica
PI'	No Aplica	9.811388301	0.9 seg

Los valores del PI' fueron seleccionados como resultado de extensas simulaciones, encontrándose los valores más apropiados para compararlos con el control PI Óptimo. No se desarrollo un método sistemático para hallarlos, debido a que se proporciona posteriormente un mejor método de estimación, que si amerita ese estudio.

Los controladores son aplicados al sistema de prueba dado por la expresión 3-1. El máximo esfuerzo que puede dar el actuador es $M = 12$. La frecuencia utilizada para conmutar la señal de control $u(t)$ y medir la salida $y(t)$, es de 100 Hz, y no de 10 Hz como se indicó en el capítulo 2. Esto es debido a que los parámetros óptimos del control PI fueron hallados en el dominio del tiempo continuo, y su aplicación en el tiempo discreto requiere una transformación sin deterioro, es decir, para que no se pierda el funcionamiento óptimo del sistema. Este cambio es solo hecho para garantizar la optimalidad en el sistema de control, y así realizar las comparaciones respectivas. Estos parámetros luego son transformados para su aplicación vía PWM mediante la tabla 2-1.

El objetivo es seguir un escalón de amplitud unitaria, y arranca en el primer segundo, como se observa en las figuras 2-10, 2-11 y 2-12.

La columna izquierda de las figuras 2-10, 2-11, y 2-12, ilustra el desempeño de los controladores PI Óptimo y PI por Ziegler-Nichols, y la columna derecha ilustra el desempeño del PI'; indicando la respuesta del sistema $y := x_1$, el ciclo de trabajo $\frac{d}{T}$, y el error $e = y - ref$. En la figura 2-10, la perturbación se presenta como una disminución del 20 % en la magnitud máxima que puede proporcionar el actuador, es decir, $M = 9.6$. La perturbación sucede a los 5,5 segundos, y como se observa en la figura 2-10, es compensada por ambos esquemas de control PI y PI'.

En la figura 2-11, la perturbación se presenta como un aumento del 15 % de T , en el ancho de pulso proporcionado por el controlador d . La perturbación sucede a los 5,5 segundos, y como se observa en la figura 2-11, es compensada por ambos esquemas de control PI y PI'.

En la figura 2-12, la perturbación se presenta como un aumento de 0.25 en la salida y del sistema. La perturbación sucede a los 5,5 segundos, y como se observa en la figura 2-12, es compensada por ambos esquemas de control PI y PI'.

2.3.2. Segundo Método de Estimación

Las necesidades técnicas para realizar la estimación, radican en solo tres elementos; medir la señal de salida, medir la respuesta de control (señal en la salida del actuador o en la entrada en el sistema), e indicar el momento en el que se realizarán las mediciones; siendo el tiempo de medición un múltiplo de T , es decir $H = mT$, para todo $m \in \mathbb{N}$.

El esquema del sistema de control implementado, se aprecia en la figura 2-13. El funcionamiento del sistema es el siguiente; dado un H apropiado, se toman las muestras en la entrada y la salida del sistema, se relacionan mediante una división (esta operación requiere un orden), se toma como dividendo la salida y el divisor como la entrada. Esta operación aritmética si es obtenida bajo el estado estacionario, da como resultado la ganancia apro-

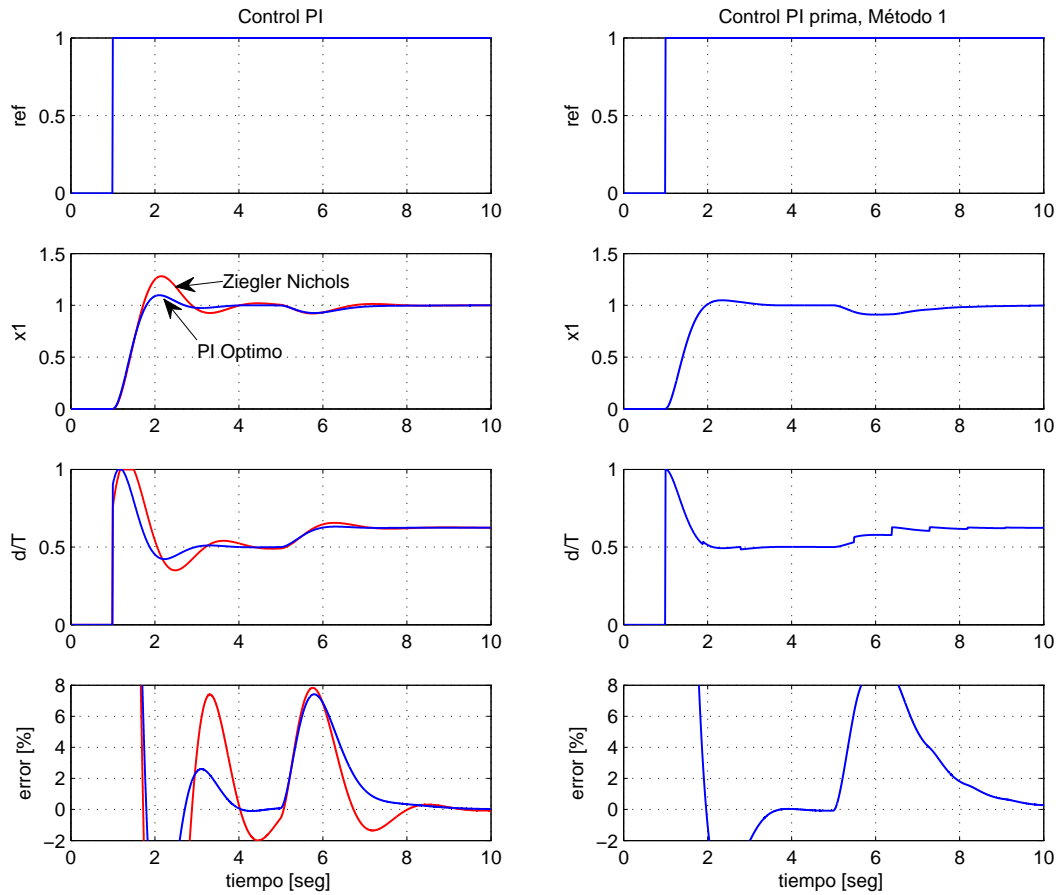


Figura 2-10.: Compensación perturbación, valor máximo actuador, 80 %

ximada a frecuencia cero del sistema $\hat{G}(0)$. Durante el estado transitorio, la estimación es realizada a la espera del valor medio de la señal de salida.

Los siguientes análisis, evidencian algunas características que demuestran las aseveraciones propuestas en el segundo método de estimación.

La salida del sistema de prueba se puede expresar como la combinación lineal de las derivadas de la salida, más los términos de excitación con sus derivadas, como se detalla en la ecuación 2-22. Suponiendo que no se conoce la estructura interna del sistema, y de no implementar algún algoritmo para estimar su estructura, es muy difícil contrarrestar el peso que ejercen los términos desconocidos en la ecuación diferencial 2-22. Por lo tanto, bajo este marco de trabajo es imposible estimar el parámetro real desde el transitorio. Esto implica

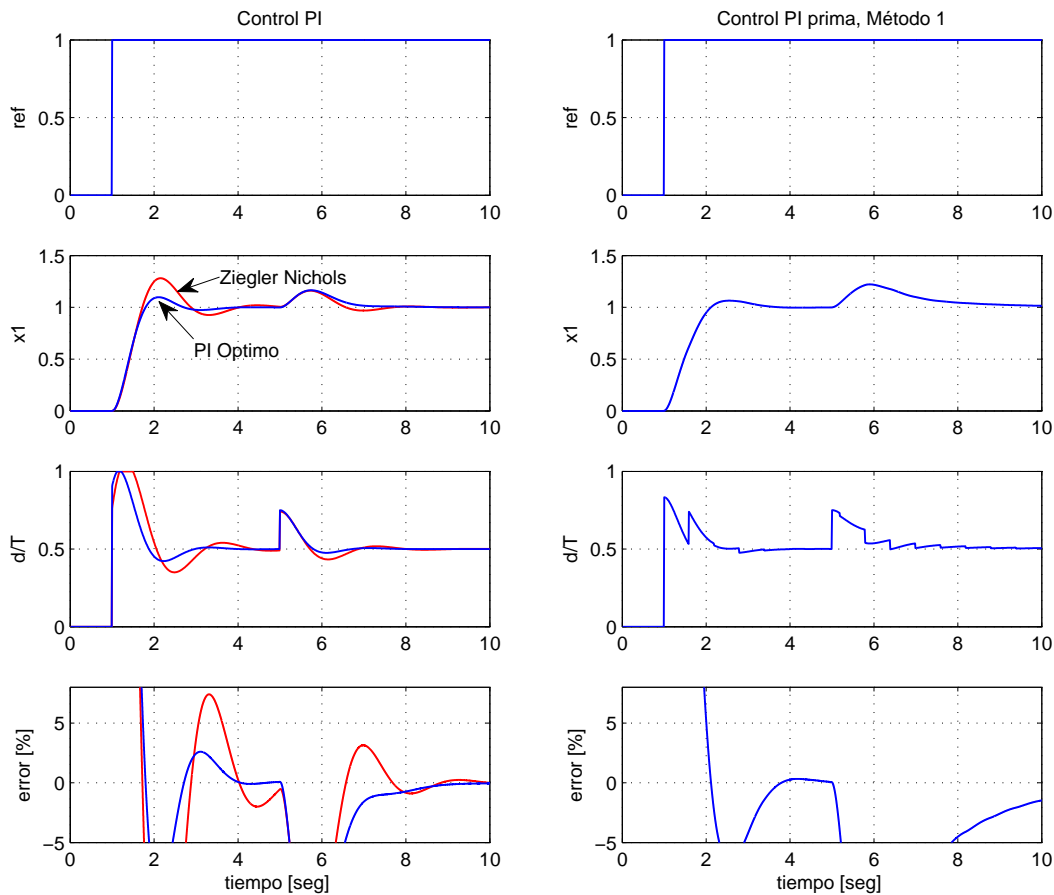


Figura 2-11.: Compensación salida en el controlador, 15% más en d

conocer su valor real en el estado estable, y un tiempo será necesario para su determinación.

$$y = f(u, \dot{u}, \dots, u^{(m)}, \dot{y}, \ddot{y}, \dots, y^{(n)})$$

$$y = \underbrace{\frac{1}{6} u}_{G(0)} - \underbrace{\frac{5}{6} \dot{y} - \frac{1}{6} \ddot{y}}_{\text{Desconocido}} \quad (2-22)$$

Por otro lado, encontrar la ganancia a frecuencia cero del sistema, se podrá lograr además tomando n muestras en la salida y en la entrada del sistema, e inmediatamente tomar sus promedios y relacionarlas. Se procede de manera semejante para las muestras posteriores (ya sea conservando muestras del conjunto anterior o desecharlas y tomar nuevas), hasta alcanzar las muestras en estado estable. Esta forma de encontrar el parámetro real trae sus inconvenientes, ya que toma medidas erróneas durante el transitorio. Entre más estrecha

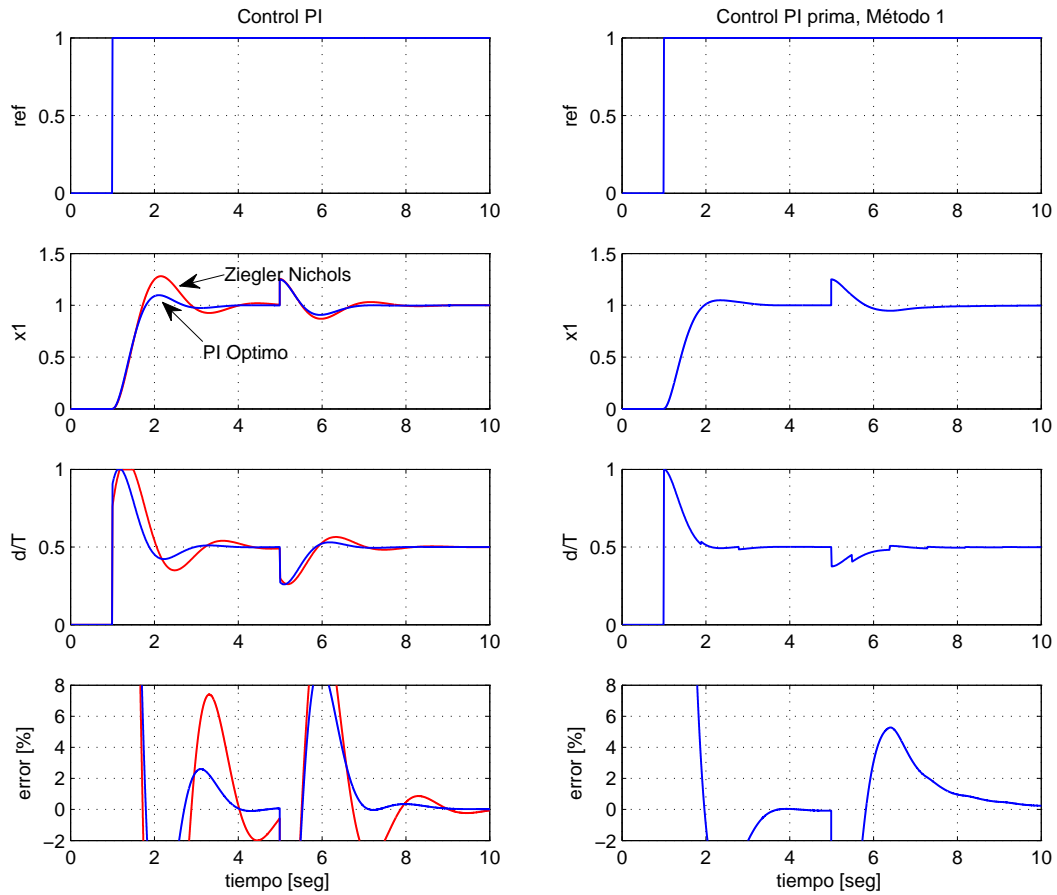


Figura 2-12.: Compensación salida en el sistema, $+0.25$ en la y

en tiempo sea la distancia entre muestras tomadas, más inestabilidad puede inducirse, y dependiendo como se tomen, el sistema se encontrará encerrado en un comportamiento donde no hallará estabilización. (La demostración se da en la subsección 3.4.2).

Al tomar n muestras y obtener su media, implica que cualquier valor durante el transitorio puede jugar como papel de media, por lo tanto, solo basta un muestra para realizar la estimación. También es lógico que la medición de este valor debe estar lo mas cercano al estado estacionario del sistema.

Una consecuencia importante del previo análisis, es que la estimación se realizará tomando solamente una muestra en la señales respectivas, y en un determinado momento H . Esto soluciona el problema de la inestabilización, causada por una estimación y adaptación continua en el controlador, además de evitar el computo de hacer promedios.

La selección de este tiempo H , será un compromiso al que se llegaría entre el desempeño esperado y lo que se sacrificaría en disponibilidad, para que el sistema mida y compense

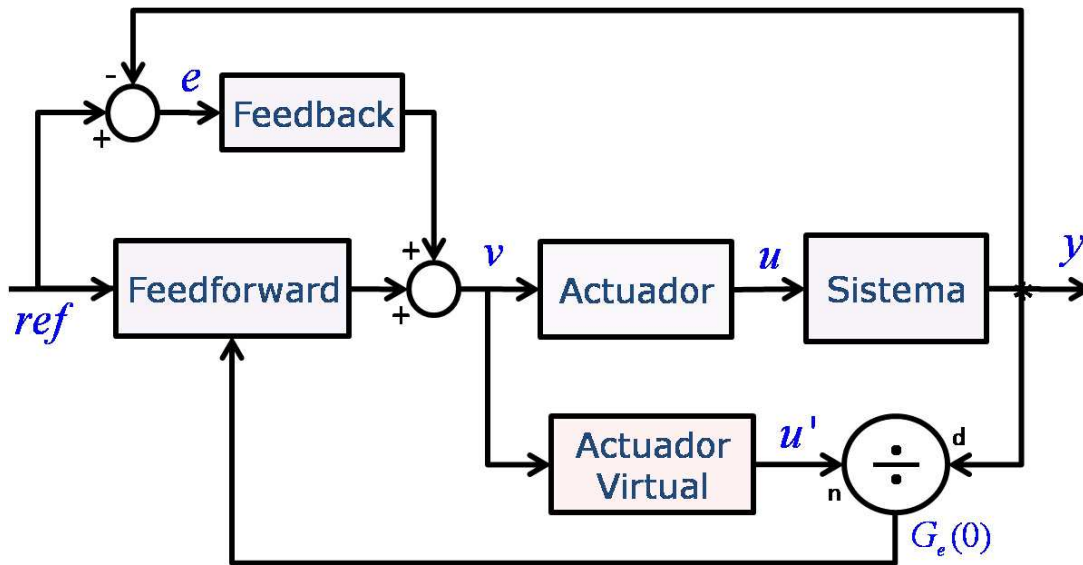


Figura 2-13.: Diagrama de bloques del sistema de control bajo esta adaptación

alguna perturbación.

La ventaja de este método, es que evita la acción de acumular evadiendo el efecto del *windup* integral. Una desventaja temporal es la necesidad de un sensor extra para medir la respuesta de control (salida en el actuador); lo que evidentemente conlleva a costos en la implementación física del sistema.

La solución para ello es virtualizar el actuador, como un comportamiento estático entrada/salida arbitrario M_e , como se detalla en la figura 2-14, tal que se pueda inferir la salida de este. Con esta solución, se puede compensar el hecho de no tener que medir la salida de actuador (un sensor extra), ni estimarla realmente. Esta virtualización implica que el desconocimiento de la ganancia del actuador M , y las perturbaciones implícitas debidas al desgaste o a la falta de mantenimiento, se ven trasladadas en la ganancia a frecuencia cero del sistema. Esto se prueba con el siguiente análisis.

La ganancia estimada del sistema a frecuencia cero es.

$$\frac{y_k}{u_k} = \hat{G}(0) \quad (2-23)$$

Por la virtualización se obtiene una respuesta de control virtual, la cual no es excitación real del sistema. Al relacionar esta señal virtual con la salida actual del sistema, se obtiene lo siguiente.

$$\frac{y_k}{u'_k} = G_e(0) \quad (2-24)$$

Igualando 2-23 y 2-24, se obtiene la siguiente estimación.

$$G_e(0) = \frac{M}{M_e} \hat{G}(0) \quad (2-25)$$

Se observa que los cambios ocasionados en el actuador, serán trasladados matemáticamente a la estimación del $\hat{G}(0)$. Además la estimación proporciona la seguridad de no conocer a M ni a M_e , este último seleccionado arbitrariamente. Con la adaptación de este parámetro en el controlador, la salida seguirá entonces a la referencia.

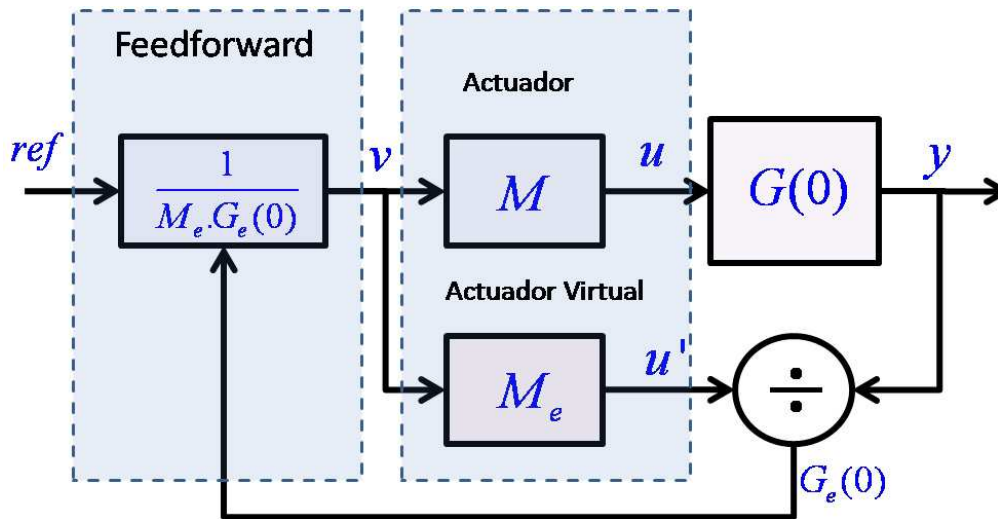


Figura 2-14.: Esquema general estimación y adaptación.

El controlador no acumula energía, pero de manera indirecta conserva la información pasada. Por lo tanto, los valores futuros se convierten en una consecuencia de la información pasada. Esto se aprecia en la ecuación 2-26, la cual no tiene en cuenta el actuador por simplificación y expresa la dinámica de la señal de control u_k .

$$u_{k+1} = ref \frac{1}{\hat{G}_k(0)} = \underbrace{ref \left(\frac{ref}{y_{k-1}} \left(\frac{ref}{y_{k-2}} (\dots) \right) \right)}_{u_k} = \frac{ref^{(k+1)}}{\prod_{i=1}^k y_i} u_1 \quad (2-26)$$

Para que este método funcione correctamente, se debe tener muy en cuenta que la estimación no se realizará, si la salida del actuador o la salida $y(t)$ en el sistema se hacen cero; por lo tanto, en cualquiera de los dos casos el proceso de estimación estará suspendido.

Compensación de Perturbaciones

El diagrama de la figura 2-15, ilustra que tipo de perturbaciones el sistema de control puede compensar, basado en el método de estimación presentado. Como se observa en la figura 2-15, las perturbaciones pintadas en azul indican que su compensación es realizable, mientras que las rojas no. Las perturbaciones que no son compensadas, están en la medición y en la salida del controlador.

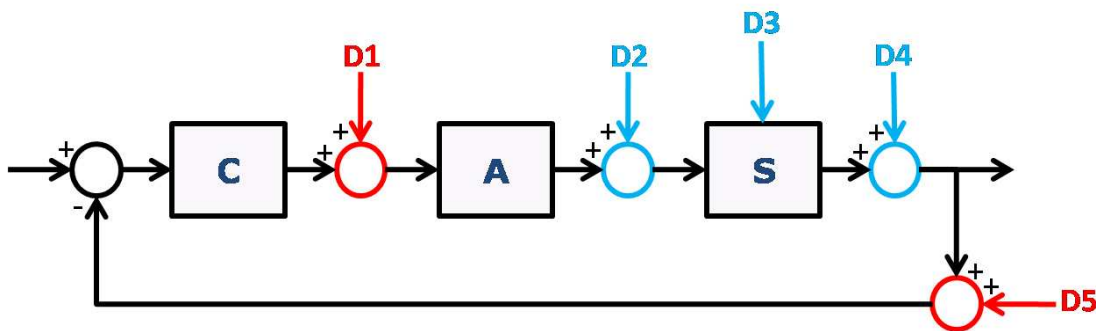


Figura 2-15.: Compensación de perturbaciones

En las simulaciones 2-16 y 2-17, se expone el desempeño del controlador PI' respecto al controlador PI Óptimo, y PI por Ziegler-Nichols, cuando se presenta una perturbación en el actuador y en la salida. El algoritmo de control PI utilizado, es el PI serie [3]. La optimización del controlador PI es desarrollada en el apéndice A. La modulación empleada para los controladores es por PWM.

Los valores de las ganancias de los controladores, son dados por la tabla 2-2 y encontradas en el apéndice A.

Los valores del PI' fueron seleccionados como resultado de extensas simulaciones, encontrándose los valores más apropiados para compararlos con el control PI Óptimo. No se desarrollo un método sistemático para hallarlos, debido a que se proporciona en el método tres un mejor algoritmo, que si amerita ese estudio.

Los controladores son aplicados al sistema de prueba dado por la expresión 3-1. El máximo esfuerzo que puede dar el actuador es $M = 12$. La frecuencia utilizada para conmutar la señal de control $u(t)$ y medir la salida $y(t)$ es de 100 Hz, con el fin de mantener la optimalidad en el sistema de control. Esto es debido a que los parámetros óptimos del control PI, fueron hallados en el dominio del tiempo continuo, y su aplicación en el tiempo discreto requiere una transformación sin deterioro, es decir, para que no se pierda el funcionamiento óptimo del sistema. Estos parámetros luego son transformados para su aplicación vía PWM mediante la tabla 2-1.

El objetivo es seguir un escalón de amplitud unitaria, y arranca en el primer segundo, como se observa en las figuras 2-16 y 2-17.

La columna izquierda de las figuras 2-16, y 2-17, ilustra el desempeño de los controladores PI Óptimo y PI por Ziegler-Nichols, y la columna derecha ilustra el desempeño del PI'; indicando la respuesta del sistema $y := x_1$, el ciclo de trabajo $\frac{d}{T}$, y el error $e = y - ref$.

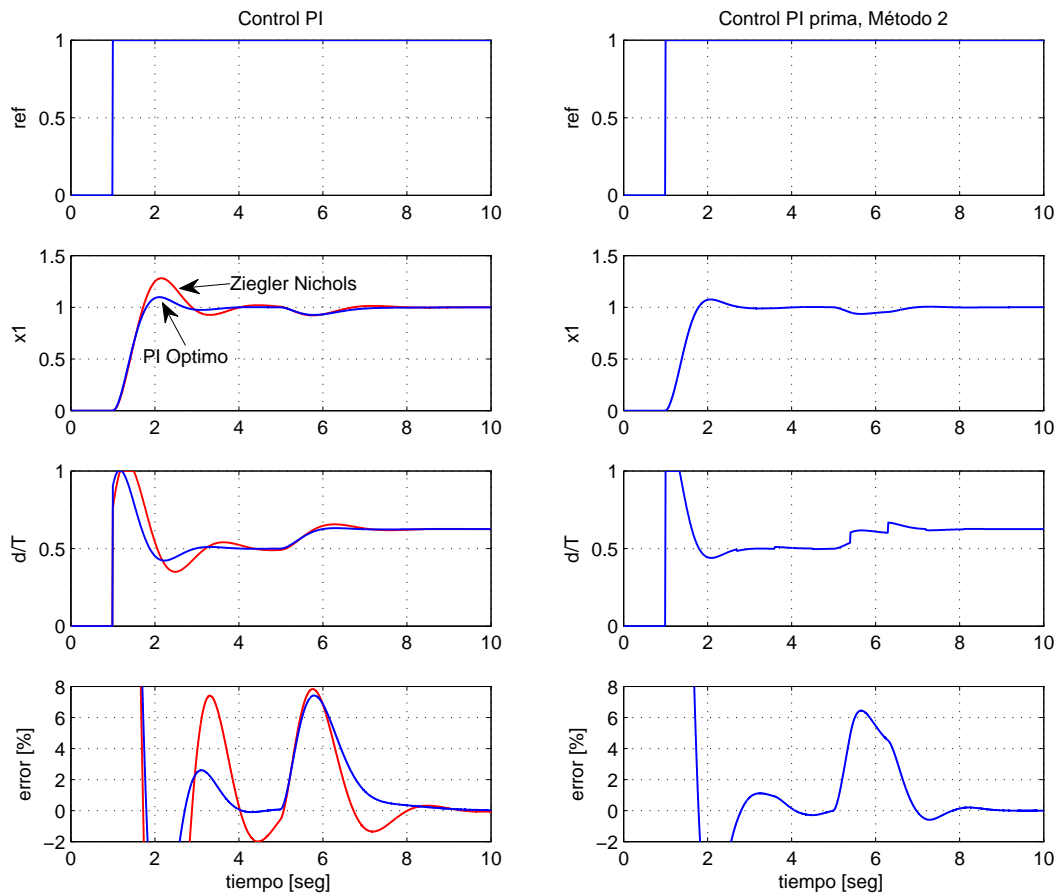


Figura 2-16.: Compensación perturbación, valor máximo actuador, 80 %

En la figura 2-16, la perturbación se presenta como una disminución del 20 % en la magnitud máxima que puede proporcionar el actuador, es decir, $M = 9.6$. La perturbación sucede a los 5,5 segundos, y como se observa en la figura 2-16, es compensada, por ambos esquemas de control PI y PI'.

En la figura 2-17, la perturbación se presenta como un aumento de 0.25 en la salida y del sistema. La perturbación sucede a los 5,5 segundos, y como se observa en la figura 2-17, es compensada, por ambos esquemas de control PI y PI'.

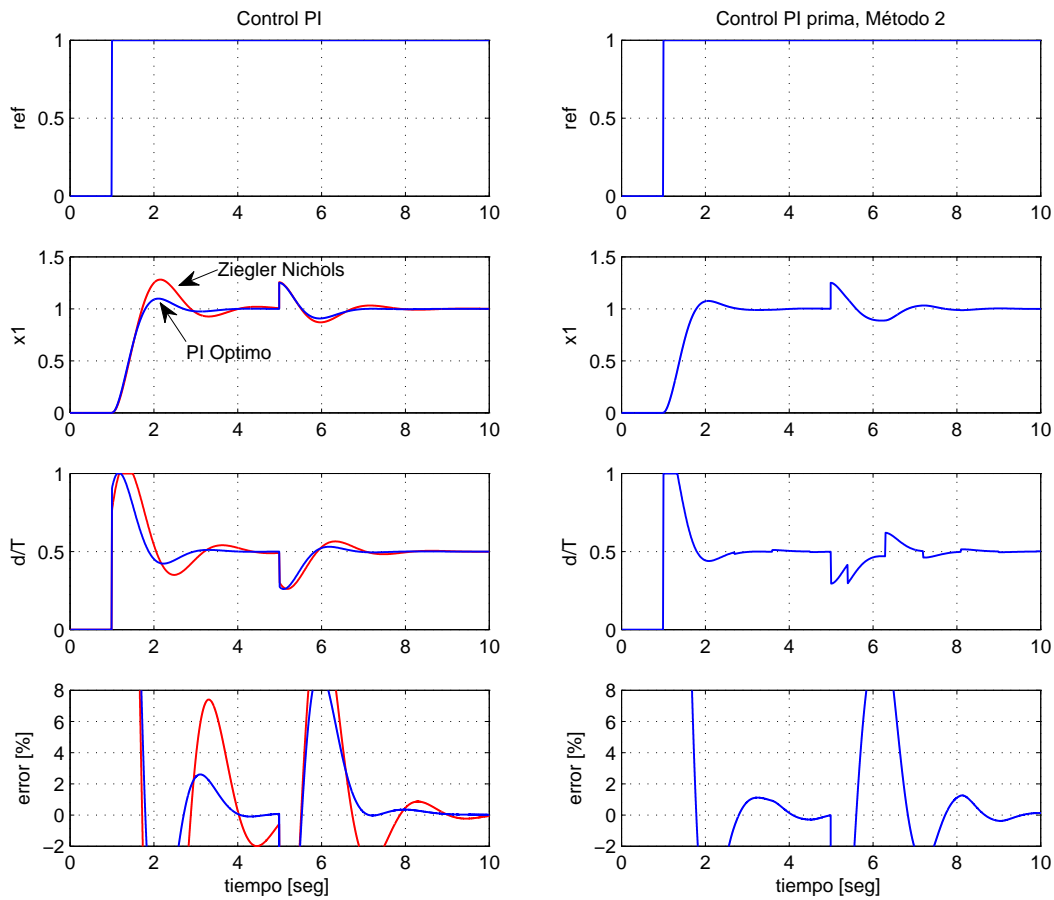


Figura 2-17.: Compensación salida en el sistema, $+0.25$ en x_1

2.3.3. Tercer Método de Estimación

El principal problema de los anteriores métodos, es la necesidad de conocer previamente el momento H , en el que se realiza la estimación para cada sistema a evaluar. Es importante la selección de este parámetro, ya que ajusta el comportamiento deseado del sistema de control. Esto indica que para cada sistema, se tendrá que ajustar el momento en el que se realiza la estimación, y opcionalmente el número de muestras utilizadas.

Como se evidencio en el método dos, la estimación no debe realizarse en el transitorio, puesto que este parámetro evidencia su naturaleza en el estado estacionario, por tanto lo más natural e importante es no entorpecer este proceso durante el estado transitorio. Bajo esta última afirmación, se desprende la solución del problema presentado, y establece las razones por la cual se propone el tercer método.

Para solucionar este problema se introduce la siguiente condición, la cual se llamará de aquí

en adelante como la condición de estimación. Esta es:

$$\frac{1}{T} |y_{k+1} - y_k| < a \quad (2-27)$$

Esta condición indica, que si el ritmo de cambio de la respuesta del sistema sea creciente o decreciente, esta acotada superiormente por a e inferiormente por $-a$, la estimación es realizada, de lo contrario no.

Esta condición soluciona en parte el problema de seleccionar momento y número de muestras, y se reduce la selección a solo manipular la pendiente a . Pero ahora para cada sistema a controlar, una pendiente a será necesaria, ya que para cada sistema existe una constante de tiempo aparente τ_a . Por lo tanto, los ritmos de cambio de las respuestas de los sistemas, no se podrán relacionar a un a específico, único e ideal.

La condición de estimación 2-27 manifiesta otro hecho desfavorable, si y solo si, el cálculo de la estimación es realizada constantemente, es decir, para cada periodo de muestreo mientras se cumpla la condición de estimación. Este proceso inestabiliza y puede inducir al caos al sistema, ya que la estimación y adaptación del d^* nunca es estabilizada, y su inestabilización es acotada por la saturación en el actuador; llegando el proceso de estimación a ser muy sensible frente a cambios pequeños en la salida del sistema. (Ver demostración subsección 3.4.2).

Se observa que se generan dos desventajas con la condición de estimación 2-27, más no se cierra la validez del método, puesto que para estos inconvenientes se generan sus soluciones, y se define en lo siguiente

Desarrollo del Tercer Método

El tercer método, es un acople entre los métodos de estimación previamente presentados, y la condición de estimación 2-27, pero con unos cambios que permiten eludir los dos pasados efectos adversos. Gráficamente se puede ver la idea de su funcionamiento, en la figura 2-18. Del método dos(ver sección 2.3.2), se recoge el hecho de que una sola muestra basta para realizar la estimación y no varias, siempre y cuando el sistema cumpla con la condición preestablecida dada por la expresión 2-27. Para ello se hace lo siguiente.

Se define una señal binaria denominada *Tramo* dada por 2-28 (ver figura 2-19), la cual me indica si la condición de estimación 2-27 se cumple o no.

$$Tramo := T(t) = \begin{cases} 1, & \text{si } \frac{1}{T} |y_{k+1} - y_k| < a \\ 0, & \text{de otra forma} \end{cases} \quad (2-28)$$

Dependiendo de las transiciones de la señal *Tramo*, se dará la indicación de si realizar la estimación o no. Con esta mejora se soluciona la estimación continua, si el sistema se

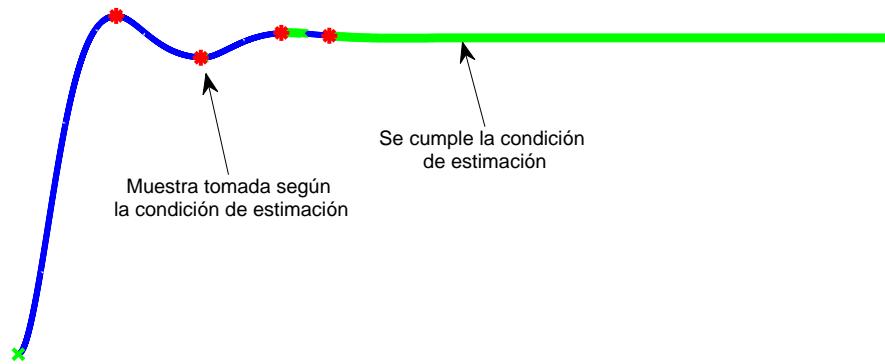


Figura 2-18.: Funcionamiento tercer método de estimación

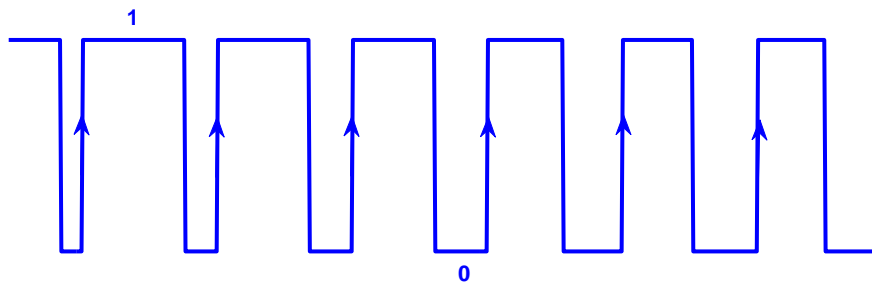


Figura 2-19.: Señal binaria Tramo

encuentra en el tramo apto para estimar. Por lo tanto, solo se tomará un dato por zona que cumpla la condición de estimación en el sistema.

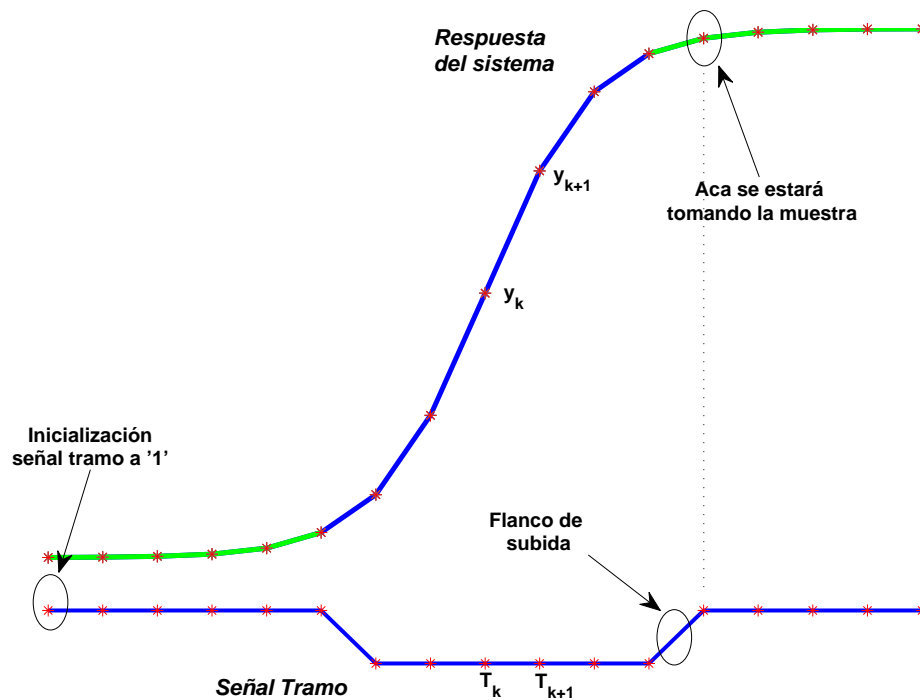
Las transiciones posibles en la señal Tramo son dadas por la tabla 2-3, y según esta, la estimación solo se realiza cuando ocurra un flanco de subida en la señal *Tramo*. Esto implica que la estimación y la adaptación se realizarán lo más cercano posible al estado estacionario, y solo en precisos e indicados momentos de tiempo. Queda solucionado el segundo efecto adverso de la condición de estimación 2-27, y explicado el motivo de la misma.

Tabla 2-3.: Transición Condición de estimación

$T_k - T_{k+1}$	Acción
1-1	No tome la muestra
1-0	No tome la muestra
0-1	Si tome la muestra
0-0	No tome la muestra

Como indicaciones técnicas para la utilización del método, la señal *Tramo* se inicializa a 1, puesto que al inicio de la evolución de la respuesta del sistema, la condición de estimación 2-27 se estará cumpliendo, y no se quiere que se estime en el estado transitorio.

Lo anterior se detalla y se resume en la gráfica 2-20.

**Figura 2-20.:** Resumen Funcionamiento tercer método

Si se supone un conjunto de sistemas de orden dos, con un factor de amortiguamiento relativo definido, una frecuencia natural variable, e imponemos que la condición de estimación este definida para algún valor a , la condición de estimación se impondrá de manera irregular para la respuesta de los sistemas (ya que cada sistema tiene una constante de tiempo aparente). Lo ideal es obtener de manera coherente un patrón de zonas donde se cumpla la condición

de estimación, para todos los sistemas involucrados.

Lo mismo se puede decir, si se abarca un conjunto con una gran cantidad de sistemas de orden dos, con un factor de amortiguamiento relativo variable.

Lo anterior implica que para cada sistema se tendrá que hallar la pendiente a adecuada. Además se evidencia que la selección de a , está relacionada con la velocidad de respuesta del sistema.

Para que la condición de estimación se imponga correctamente, y solucione la dependencia de la pendiente a con respecto a la constante de tiempo aparente de los sistemas τ_a , se procede a normalizar la pendiente y trabajar con ella.

La pendiente está definida como:

$$a = \frac{\Delta y}{\Delta t} \quad (2-29)$$

Normalizando el periodo entre muestras con respecto a la constante de tiempo aparente τ_a del sistema, se obtiene.

$$a_{sn} = \frac{\Delta y}{\frac{\Delta t}{\tau_a}} = \frac{\Delta y}{\Delta t_n} = a\tau_a \quad (2-30)$$

La cual corresponde a la pendiente semi-normalizada.

$$a = \frac{a_{sn}}{\tau_a} \quad (2-31)$$

Si se normaliza además la magnitud de la respuesta del sistema y . Se obtiene.

$$a_n = \frac{\Delta y}{\text{máx } y} \cdot \frac{\tau_a}{\Delta t} = \frac{\Delta y_n}{\Delta t_n} = a \frac{\tau_a}{\text{máx } y} \quad (2-32)$$

La cual es la normalización completa de la pendiente.

Cuando se normaliza el tiempo, se induce a cualquier sistema tener un $\tau_a = 1$ independiente de su dinámica. Cuando se normaliza la magnitud, se induce en cualquier sistema un $\text{máx } y = 1$. El valor de τ_a puede ser calculado, a partir de los métodos de sintonización automática proporcionados para el control PI [15], [9], y [4].

La normalización de la pendiente, implica un pequeño cambio en la condición de estimación 2-27, y se ilustra mediante las dos condiciones equivalentes siguientes.

$$\frac{a_x}{T} |y_{k+1} - y_k| < a_0 \quad (2-33)$$

$$\frac{1}{T} |y_{k+1} - y_k| < \frac{a_0}{a_x} = a \quad (2-34)$$

Donde a_x es el factor de normalización, y es igual a $\frac{\tau_a}{\text{máx } y}$ para normalización completa, o es igual a τ_a para semi-normalización.

$a_0 := a_{n,sn}$, ó $a_0 = a_{sn}$, $a_0 = a_n$, definen el valor deseado para el intervalo de la condición de estimación 2-27. Las condiciones 2-33 y 2-34, establecen dos formas de implementar la condición de estimación para la señal tramo, y cada una de ellas tiene sus implicaciones. Por facilidades técnicas y computacionales, se trabajará con la condición 2-33, debido a que en la condición 2-34, se puede presentar un desborde en $\frac{a_0}{a_x}$, cuando $a_x = 0$. El recíproco, $a_x = \infty$ nunca sucede, debido a que $\text{máx } y$ nunca es cero.

Además la condición 2-34 no es intuitiva, por perderse la idea del umbral fijo para la condición de estimación.

Con el anterior procedimiento, se garantiza que la pendiente sobre la cual se realiza la estimación, sea muy dependiente al sistema. Este resultado establece un marco de trabajo común, para evaluar gran parte de los sistemas de orden dos.

Selección de a_0

La selección de a_0 , es importante y muy dependiente de la frecuencia a la cual se esté trabajando.

En el caso donde los controladores son continuos en el tiempo, es decir, si el sistema trabaja a una frecuencia infinita en la medición y la aplicación de la señal de control, es intuitivo y directo conocer el valor de a_0 , en este caso $a_0 = 0$, pues evidencia el comportamiento en estado estable del sistema.

Lo anterior implica establecer una relación de la siguiente manera: $a_0 = \frac{\epsilon}{f}$. No importa cuanto valga ϵ , es decir, no importa que sistema sea si la frecuencia $f = \infty$, implica un $a_0 = 0$.

Pero la selección se complica si $f \neq \infty$, puesto que $\epsilon = \epsilon(F(x, u), f)$ es muy dependiente de la dinámica del sistema, de la frecuencia, y además es desconocido. Puede verse la selección de ϵ , como un compromiso entre la frecuencia y la dinámica del sistema.

Es un hecho que al reducir a_0 , aumenta la precisión en el sistema (evidencia del estado estable), pero puede volverse más lento para compensar y reaccionar, al esperar un comportamiento más plano en la variación de la salida. Por lo tanto, la pregunta es, hasta donde reducir a_0 .

La solución más intuitiva es observar las posibles pendientes presentes, en un ascenso y descenso de un pico de oscilación con frecuencia definida, generadas tomando pasos de tiempo T en la oscilación. Luego identificar la pendiente más pequeña de este conjunto. Ver figura 2-21.

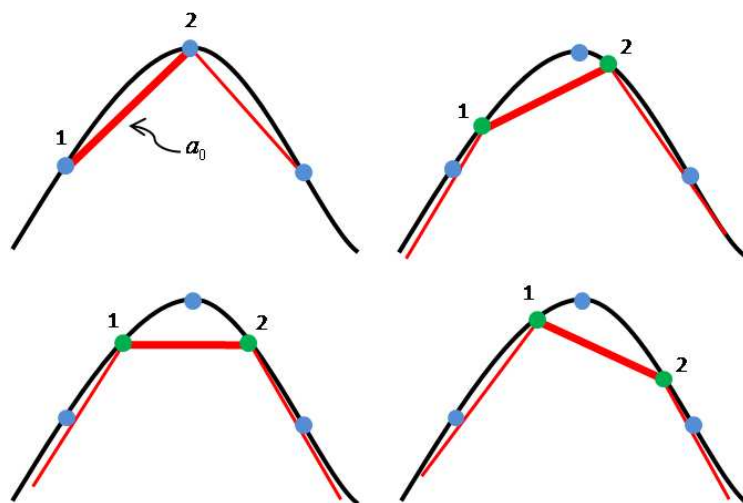


Figura 2-21.: Ilustración sobre las pendientes posibles en un pico de oscilación

Tratar de descubrir la pendiente mínima presentada en una oscilación, es prácticamente imposible, puesto que no hay certeza sobre el lugar donde se tomarán los datos; por lo tanto, no es práctico hacerlo. Una opción es acotar las posibles pendientes, seleccionando el máximo valor del conjunto de pendientes viables.

El conjunto dado por la expresión 2-35, es definido como todas las posibles pendientes, abarcadas por la variación de los puntos 1 y 2 alrededor de la curva dada en la figura 2-21, hasta que el punto 1 llegue a la posición central de los tres puntos establecidos en la figura.

$$A_0 = \{a_{0n} \in \mathbb{R} : n \geq 1\} \quad (2-35)$$

El máximo valor del conjunto es:

$$a_0 = \max\{|a_{01}|, |a_{02}|, |a_{03}|, \dots, |a_{0n}|\} = \max\{A_0\} \quad (2-36)$$

$$|a_{0n}| \leq a_0 \quad (2-37)$$

Además se detalla en la figura 2-21, que el máximo valor de la pendiente se obtiene entre los puntos 1 y 2, este es el valor de a_0 .

Por lo tanto, se garantiza que todas las posibles pendientes en un sistema con frecuencia definida, estarán acotadas superiormente e inferiormente por este valor, sin sobrediseñar el ancho del umbral de la condición de estimación 2-33.

Para hallar una aproximación de a_0 , se asume una función $\sin(\omega t)$, con periodo igual τ_{cr} . Este es definido como el periodo de tiempo crítico, hallado en la oscilación de un sistema al borde de la inestabilidad (ver Ziegler-Nichols [22]). Además se selecciona la magnitud de la función con valor unitario, debido a la previa normalización de la pendiente. La aproximación de a_0 es dada en 2-38

$$a_0 \approx \frac{1}{T} \left| \sin \left(\frac{\pi}{2} - \frac{2\pi}{\tau_{cr}} T \right) - \sin \left(\frac{\pi}{2} \right) \right| \quad (2-38)$$

Esta pendiente es una aproximación, puesto que la selección de la función $\sin(\omega t)$, proviene del hecho de considerar al sistema en su límite de la estabilidad, y no de su evolución real. Seleccionar una pendiente mayor implica un mayor sobrediseño. Seleccionar una menor implica posiblemente descartar la pendiente real.

Conforme se aumente la frecuencia, la distancia entre los elementos del conjunto 2-35 se hará más pequeña. Esto quiere decir que los elementos se agruparán hasta converger a un valor en este caso cero. Se corrobora la suposición planteada acerca de una $f = \infty$ implica $a_0 = 0$. Cuando el a_0 es hallado de esta manera, se llega a un equilibrio en el compromiso ϵ . Puesto que permite una compensación y reacción razonable, y muy cercana a lo que sería el sistema, si se estuviera trabajando con una $f = \infty$.

Compensación de Perturbaciones

El método 3 empleado en las siguientes simulaciones, es basado en el método 2. Por otro parte, el método 1 también podría haberse utilizado como base para realizar las simulaciones. En las simulaciones 2-22 y 2-23, se expone el desempeño del controlador PI' respecto al controlador PI Óptimo, y PI por Ziegler-Nichols, cuando se presenta una perturbación en el actuador y en la salida. El algoritmo de control PI utilizado, es el PI serie [3]. La optimización del controlador PI es desarrollada en el apéndice A. La modulación empleada para los controladores es por PWM.

Los valores de las ganancias de los controladores PI, son dados por la tabla 2-2 y encontradas en el apéndice A.

En el control PI', la constante proporcional kp fue escogida para minimizar el funcional 2-39, y es hallada en la subsección 3.4.3.

$$\min_{u \in \Omega} \int_0^{\infty} (e^2 + 0.1\dot{e}^2) dt \quad (2-39)$$

En la tabla 2-4, se resumen los valores de los parámetros en el controlador PI', para realizar las simulaciones.

Tabla 2-4.: Parámetros del Controlador PI'

τ_a	0.8861
máx y	2
a_0	0.0001
kp	9.811388301

Los controladores son aplicados al sistema de prueba dado por la expresión 3-1. El máximo esfuerzo que puede dar el actuador es $M = 12$. La frecuencia utilizada para conmutar la señal de control $u(t)$ y medir la salida $y(t)$ es de 100 Hz, con el fin de mantener la optimalidad en el sistema de control. Esto es debido a que los parámetros óptimos del control PI, fueron hallados en el dominio del tiempo continuo, y su aplicación en el tiempo discreto requiere una transformación sin deterioro, es decir, para que no se pierda el funcionamiento óptimo del sistema. Estos parámetros luego son transformados para su aplicación vía PWM mediante la tabla 2-1.

El objetivo es seguir un escalón de amplitud unitaria, y arranca en el primer segundo, como se observa en las figuras 2-22 y 2-23.

La columna izquierda de las figuras 2-22, y 2-23, ilustra el desempeño de los controladores PI Óptimo y PI por Ziegler-Nichols, y la columna derecha ilustra el desempeño del PI'; indicando la respuesta del sistema $y := x_1$, el ciclo de trabajo $\frac{d}{T}$, y el error $e = y - ref$.

En la figura 2-22, la perturbación se presenta como una disminución del 20 % en la magnitud máxima que puede proporcionar el actuador, es decir, $M = 9.6$. La perturbación sucede a los 5,5 segundos, y como se observa en la figura 2-22, es compensada, por ambos esquemas de control PI y PI'.

En la figura 2-23, la perturbación se presenta como un aumento de 0.25 en la salida y del sistema. La perturbación sucede a los 5,5 segundos, y como se observa en la figura 2-23, es compensada, por ambos esquemas de control PI y PI'.

2.3.4. Sintonización

En aplicaciones reales, desde el momento en el que sistema empiece a funcionar, es natural que el *feedforward* del controlador no se encuentre sintonizado, si se asume que no se conoce información de la planta. Por lo tanto, el controlador no conocerá la ganancia a frecuencia cero del sistema cuando arranque su funcionamiento por primera vez, o cuando se reinicie este.

El sistema de control solo necesita al inicio un escalón o un pulso para sintonizarse. Luego el sistema encontrará el valor necesario en energía para que la salida siga a la entrada.

Para la figura 2-24, se asume que el controlador no está sintonizado, es decir, difiere del valor real en el sistema, el cual es $G(0) = \frac{1}{6}$, estableciéndose un valor inicial en el controlador de $\hat{G}(0) = \frac{1}{3}$. Se observa que la respuesta inicial en el sistema es iniciada por un pulso,

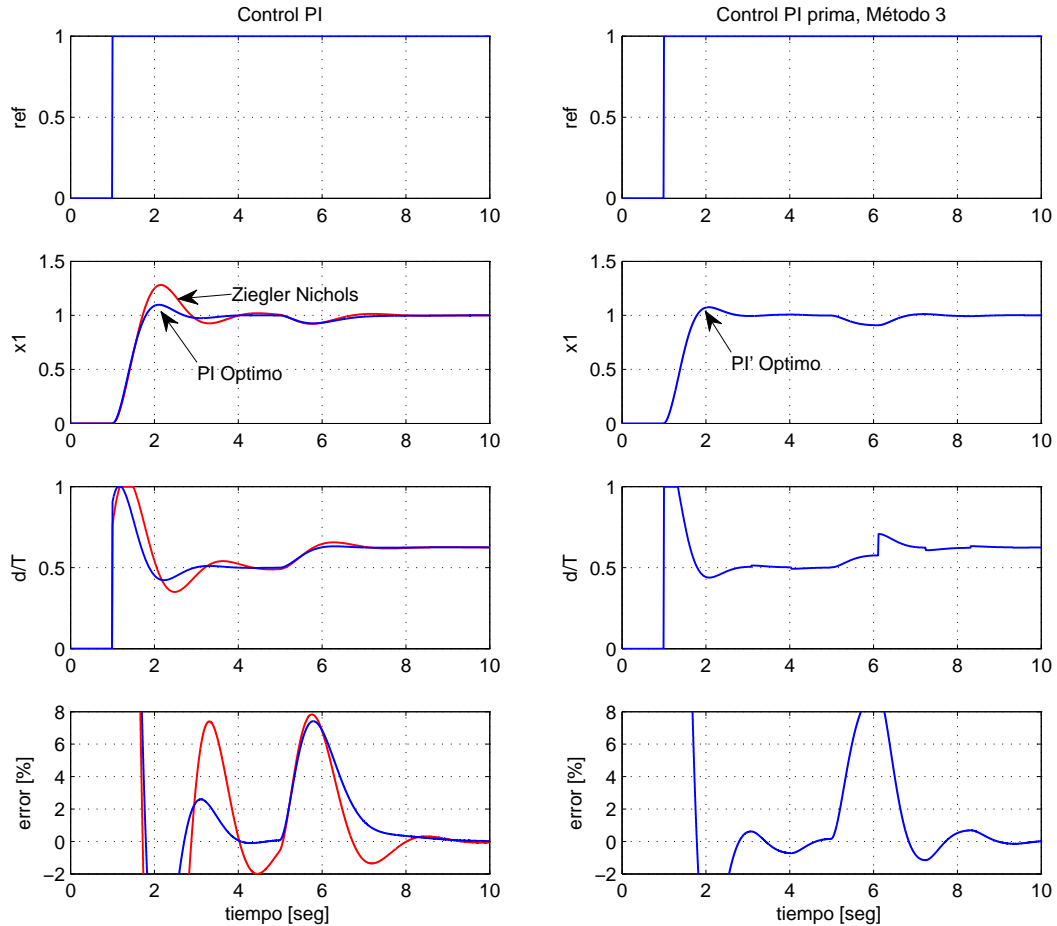


Figura 2-22.: Compensación perturbación, valor máximo actuador, 80 %

presentando un comportamiento lento en el transitorio.

Cuando se dan las condiciones necesarias para la estimación, el sistema se sintoniza; encontrando el valor adecuado para el *feedforward*, esto se puede observar en las figuras 2-24 y 2-25. Los puntos rojos indican el momento donde se realiza la estimación, sintonizando el *feedforward* para $\hat{G}(0) \approx \frac{1}{6}$.

2.4. Antiwindup del Controlador PI'

En la figura 2-26, se observa el desempeño que muestran los controladores PI (columna izquierda) y PI' (columna derecha), cuando se impone un cambio brusco en la referencia; empezando desde el 0 % al 90 %, y luego del 90 % al 20 % del rango dinámico ofrecido por el sistema que va de 0 a 2. Esta es una forma de inducir el efecto *windup* en el sistema de

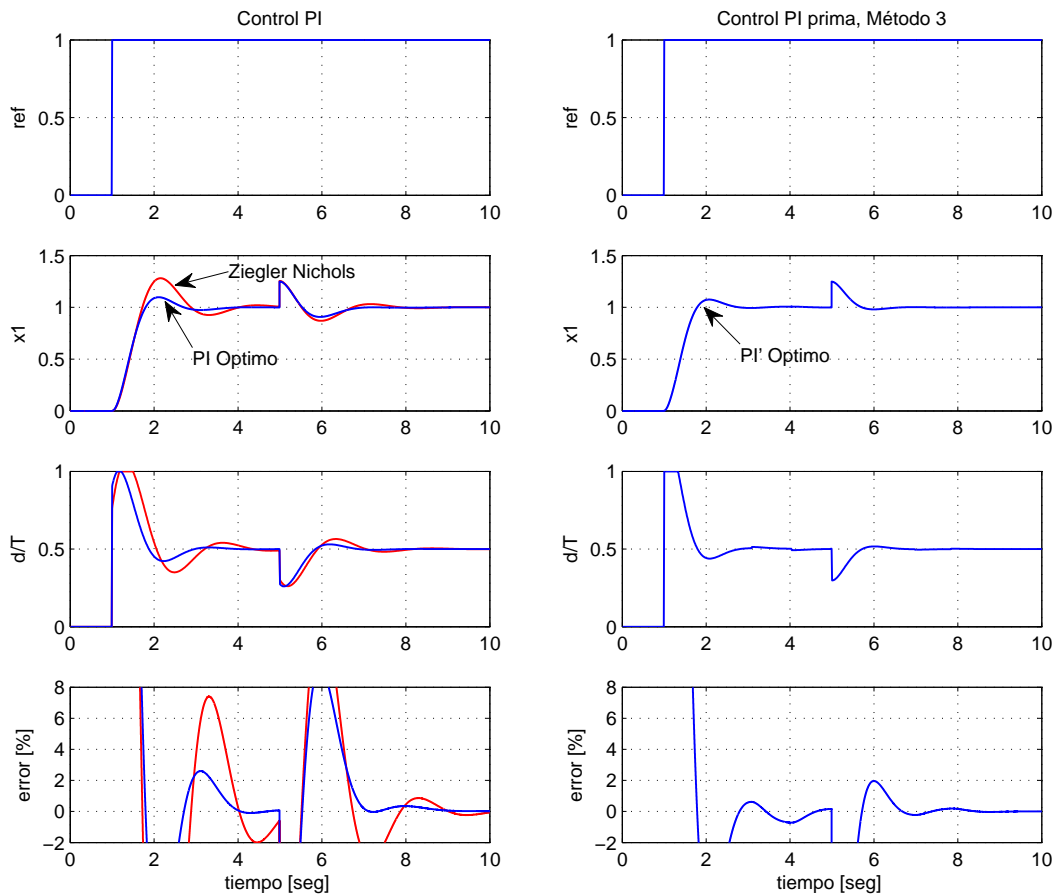


Figura 2-23.: Compensación salida en el sistema, $+0.25$ en x_1

control, usando el controlador PI, para este caso, se conduce al sistema para que siga una $ref = 1.8$, y luego una $ref = 0.2$.

Se pusieron a prueba, por parte de los controladores PI al: PI Óptimo, PI por Ziegler Nichols [40], PI usando retro-cálculo [7], y PI usando integración condicional [16]. Estos dos últimos son las técnicas *antiwindup* convencionales, aplicadas para el control PI en la industria. Estas técnicas fueron utilizadas usando PWM.

Por parte de los controladores PI', se tienen los métodos 1,2 y 3; siendo el último el más importante de todos, puesto que este controlador es la evolución de los dos primeros.

Los controladores son aplicados al sistema de prueba dado por la expresión 3-1. El máximo esfuerzo que puede dar el actuador es $M = 12$. La frecuencia utilizada para conmutar la señal de control $u(t)$ y medir la salida $y(t)$ es de 100 Hz, con el fin de mantener la optimalidad en el sistema de control. Esto es debido a que los parámetros óptimos del control PI, fueron hallados en el dominio del tiempo continuo, y su aplicación en el tiempo discreto requiere una

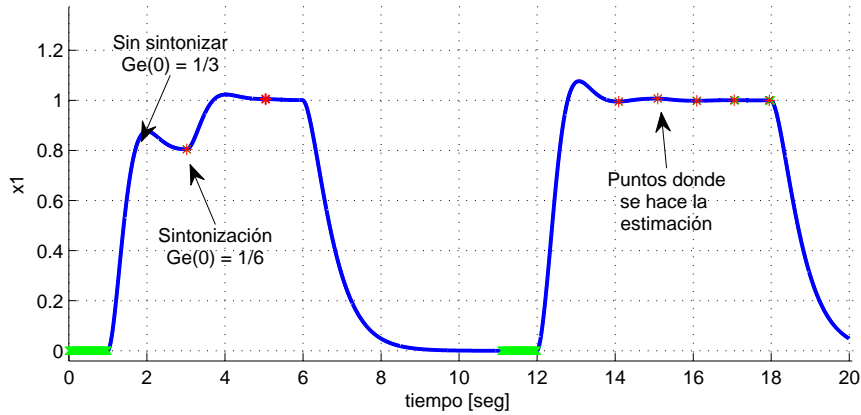


Figura 2-24.: Sintonización sistema de control

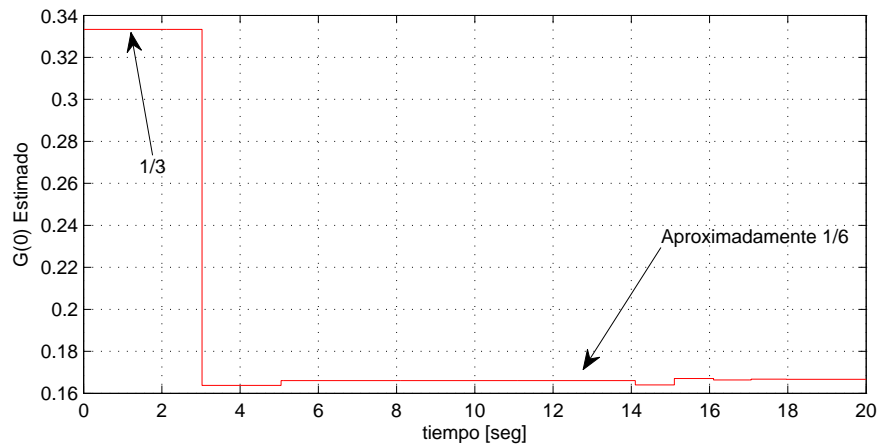


Figura 2-25.: Evolución $G(0)$ estimado

transformación sin deterioro, es decir, para que no se pierda el funcionamiento óptimo del sistema. Estos parámetros luego son transformados para su aplicación vía PWM mediante la tabla 2-1.

Los valores de las ganancias de los controladores PI y PI', son dados por la tabla 2-2 y 2-4. La ganancia utilizada para recalculer el tiempo integral $ks = 0.1$, fue seleccionada como resultado de extensas simulaciones, encontrándose los valores más apropiados para eludir el *windup*.

Como se observa en la figura 2-26, el mejor desempeño se presenta en el control PI' método 3, sin requerir de elementos adicionales de hardware (sensores), o modelamiento de actuadores para poder compensar el efecto *windup*.

El método 3, no presenta problema cuando la señal de control se satura, a diferencia del control PI Óptimo, que acumula un esfuerzo innecesario. Para cuando el control PI necesita

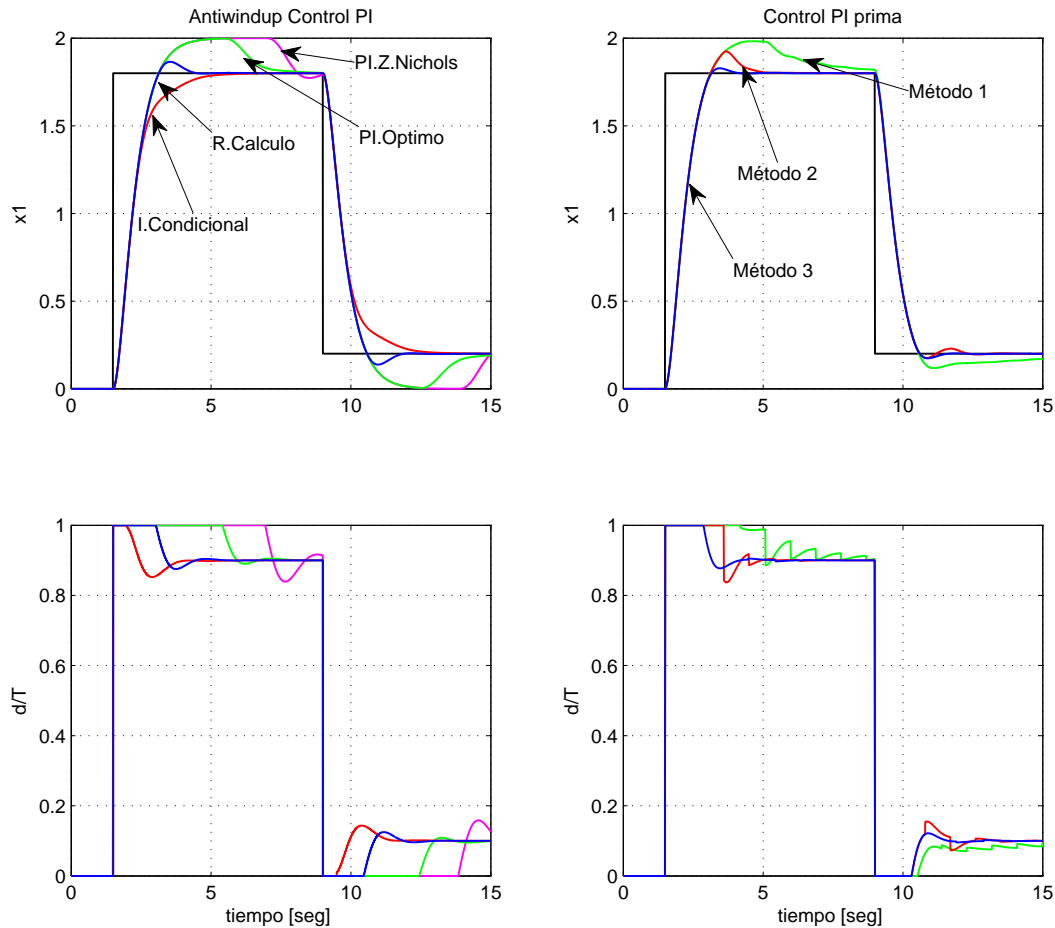


Figura 2-26.: Comportamiento de la adaptación

contrarrestar el esfuerzo acumulado, este no lo logra inmediatamente, incurriendo en un tiempo para realizarlo. Se evidencia en la figura 2-26, que la ley de control d para el PI Óptimo, presenta saturación en un periodo relativamente largo de tiempo.

La integración condicional (ver figura 2-28) por su parte elude el efecto *windup*, pero vuelve lenta la evolución del sistema, puesto que solo la parte proporcional estará trabajando cuando la señal de control este saturada. Cuando la señal de control no esté saturada, el control integral comenzará a funcionar, pero con un valor acumulado inicial de cero. Este problema lo solucionan Woo y colaboradores [11], asemejando su desempeño al retro-cálculo.

El retro-cálculo (ver figura 2-27) elude el efecto *windup* muy bien, puesto que reinicia su acción integral dinámicamente, a diferencia de la integración condicional. Esta estrategia requiere de hardware adicional para eludir el efecto adverso.

El más importante valor agregado que proporciona el controlador PI¹, es su naturaleza *an-*

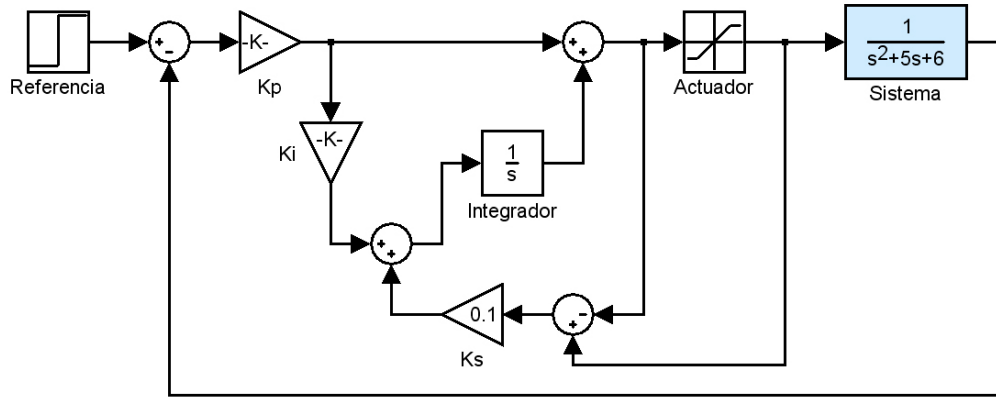


Figura 2-27.: Estrategia antiwindup mediante retro-cálculo

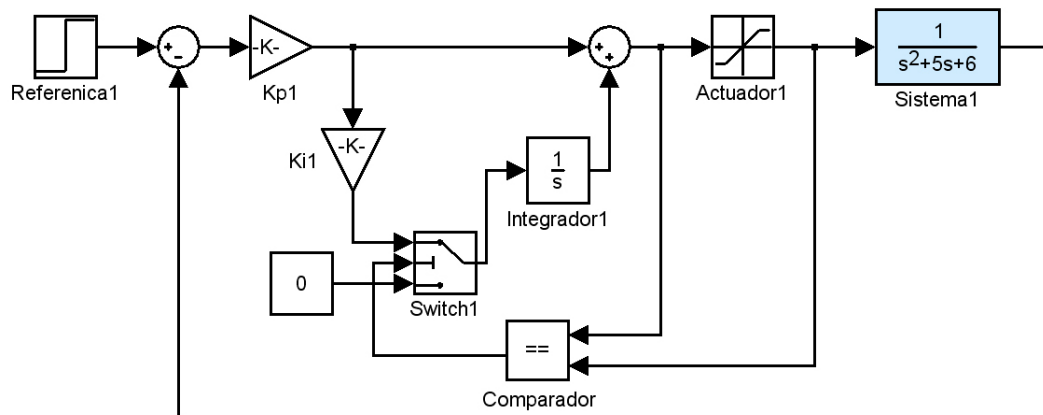


Figura 2-28.: Estrategia antiwindup mediante integración condicional

tiwindup, sin requerir de sensores adecuados en la salida del actuador.

2.5. Conclusiones Parciales

- El controlador propuesto PI' cumple con sus objetivos; es sencillo su funcionamiento, es fácil de implementar y emula al control PI con una mejor característica.
- El controlador propuesto PI' por su naturaleza no acumula energía, evitando que el fenómeno del *windup* integral aparezca. Es una ventaja considerable respecto a la técnica de control PI, que necesita una estrategia *antiwindup* para solucionarlo; incurriendo en el uso de instrumentación adicional (costos) para eludir este efecto adverso.

- El controlador propuesto propone dos cosas, por un lado proporciona la energía necesaria para que la salida del sistema siga la referencia sin acumular en su proceso, y permite que solo la acción proporcional defina la dinámica deseada.
- En las técnicas *antiwindup* industriales, se asume que la zona de no saturación del actuador es lineal, pero en realidad es una dinámica no-lineal estática. Esto implica que el error entre la salida y la entrada del actuador no es cero, en el rango no saturado. Por lo tanto este pequeño error desintoniza el tiempo de reset del control PI, deteriorando el desempeño del mismo.
- En el control PI', se le estará asignando el valor necesario de fuerzas al controlador en el d^* , para que la salida siga a la entrada. Lo anterior implica que el sistema responderá más rápido que el control PI, después de que el controlador PI' haya sido sintonizado.
- Desde el punto de vista del control PI, la selección de las constantes proporcionan un gran conjunto de posibilidades para definir la dinámica deseada, y además le da precisión al sistema; sin embargo, en aplicaciones reales, las limitaciones físicas empobrecen el desempeño de este control, para grandes perturbaciones y cambios en la referencia. Además, desde el punto de vista del control en general, seguir acumulando un esfuerzo, que ya ha llegado a sus límites no tiene sentido, se concluye por lo tanto, por qué no conocer el valor necesario en energía para que el sistema de control sea preciso?. Si es así, implica que la acción proporcional del controlador defina la dinámica del sistema. Por lo tanto, un menor número de dinámicas se podrán seleccionar con solo un parámetro, este es el costo asumido.

3. Dinámica del Sistema de Control

3.1. Sistema de Prueba

El sistema escogido para aplicar los métodos matemáticos desarrollados a lo largo del trabajo, así como para realizar el experimento numérico mediante simulación, es un sistema lineal con dinámica sobre-amortiguada. Este sistema dinámico fue escogido con el objetivo de tener una primera aproximación para controlar sistemas industriales cuyo actuador puede ser una válvula neumática, hidráulica, o un interruptor electrónico. Sin embargo, vale la pena aclarar que el enfoque que se está realizando es además válido para poder controlar una gran cantidad de sistemas lineales de orden dos.

El sistema de prueba es el siguiente:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -6 & -5 \end{bmatrix}}_A \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_b u, \quad u \in \{0, M\} \quad (3-1)$$
$$y = x_1$$

Como se ha dicho, el sistema es lineal, invariante en el tiempo y cuando se cierra el lazo es suave a tramos. El sistema es controlado por la señal u que es pulsante y está compuesta de dos valores $\{0, M\}$.

Las ecuaciones matemáticas no corresponden a un modelo matemático de un sistema físico, solo son una referencia matemática y punto de partida para empezar la investigación. Para este caso el sistema $\ddot{y} + 5\dot{y} + 6y = u$ posee una dinámica sobre amortiguada (como se observa en la figura **3-1**) con valores propios en $\lambda_1 = -2$ y $\lambda_2 = -3$ y un valor de ganancia en estado estacionario de $G(0) = \frac{1}{6}$. Se podría hacer una analogía con un sistema térmico o un sistema de acumulación neumático, los cuales son lentos en su evolución. El máximo valor que dará el actuador será $\max u = M = 12$ y el mínimo $\min u = 0$. La frecuencia del PWM es ajustada a 10Hz y es seleccionada dependiendo de la dinámica del sistema y la precisión requerida, en esencia para que no se pierda información a la hora de medir la evolución de la señal de salida del sistema.

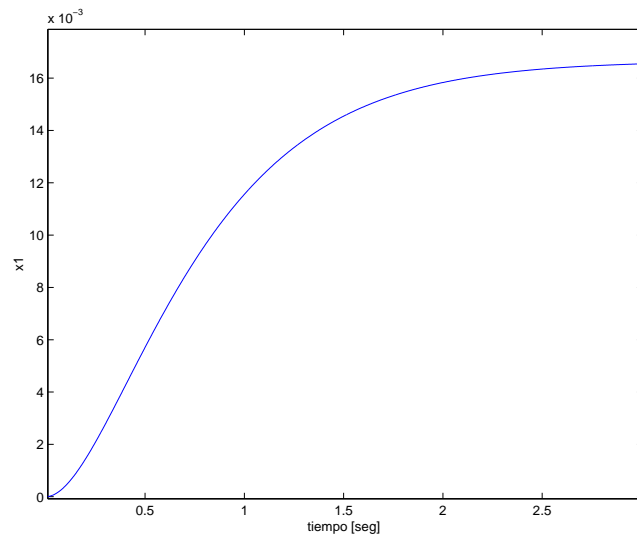


Figura 3-1.: Respuesta al escalón unitario

3.2. Dinámica del Sistema

Haciendo que el campo de las velocidades sea igual a cero $f(x^*, u, t) = 0$ o haciendo la ecuación 3-1 igual a cero, se puede ver que los puntos de equilibrio del sistema descrito se encuentran como $[x_1 \ x_2]^T = [\frac{u}{6} \ 0]^T$. Dado que $u = \{0, M\}$, solo habrá dos puntos de equilibrio, los cuales, de manera independiente son asintóticamente estables, puesto que sus valores propios poseen parte real negativa. Se observa claramente que el sistema está alternando su búsqueda entre dos puntos de equilibrio, para alcanzar su convergencia. Esta característica dinámica permite que existan en la evolución de las órbitas del retrato de fase, intersecciones, como se muestra en las figuras 3-2 y 3-3.

Si se analiza la existencia de la derivada con respecto al tiempo en esta órbita (figura 3-3), se observa que esta existe cuando las trayectorias son suaves; indicando su comportamiento o velocidad, pero se detalla que la evolución cambia bruscamente de dirección en determinados puntos en el espacio de estado (el campo vectorial es discontinuo). Es aquí donde la derivabilidad no existe, dado que el límite de la función derivada no está definida en este punto. Esto es debido a que la conmutación de la señal de control depende del tiempo, es decir, el sistema es no-autónomo.

Ahora bien, si se toma como condición inicial un punto de cualquier intersección en el espacio de estados, la trayectoria que tome la evolución del sistema a partir de esta condición inicial, estará definida por la señal de control u . Esto indica a primera vista, que los retratos de fase asociados a los puntos de equilibrio creados por la señal de control u se cruzan.

La señal de excitación $u(t)$ es definida mediante una ley de control continua y adecuada a dos símbolos $\{M, 0\}$ mediante PWM (Modulación de ancho de pulso). Recordando, la señal

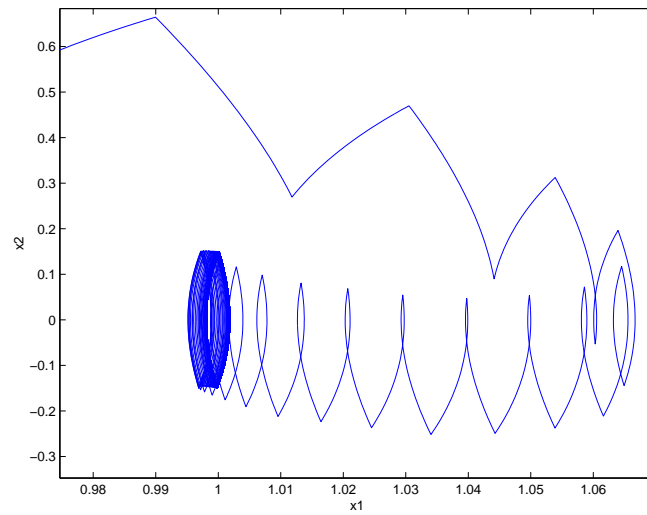


Figura 3-2.: Evolución del sistema, espacio de estados.

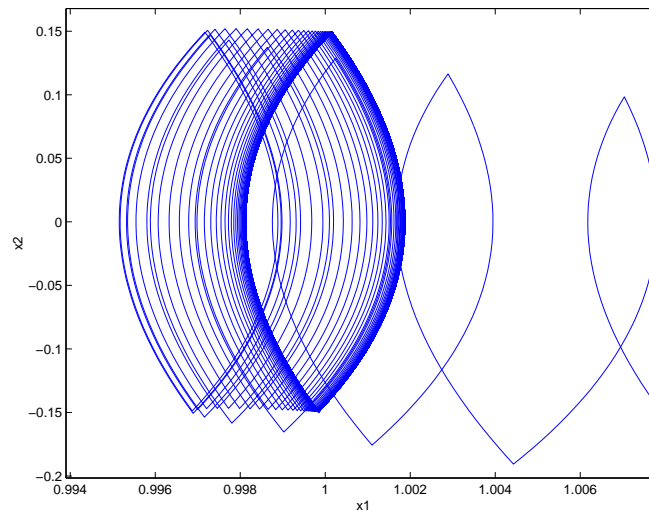


Figura 3-3.: Zoom Evolución del sistema.

de control es definida de la siguiente manera:

$$u(t) = \begin{cases} M, & \text{si } 0 < t \leq d \\ 0, & \text{si } d < t \leq T \end{cases} \quad (3-2)$$

A grandes rasgos la ley de control es definida como: $d = d^* + kp.e$. Donde d es el ancho de pulso, d^* es el valor necesario en modulación para que en estado estable, la salida del

sistema siga la referencia ref , y kp modula de manera lineal el error $e = ref - x_1$ (control proporcional).

Se asume en este capítulo que el funcionamiento del controlador es ideal. Esto indica que el d^* es fijo, y además se asume que es automáticamente adecuado, a la salida deseada que se quiere obtener. (En el capítulo 2 se da todo el detalle acerca del desarrollo del controlador.) Como la señal de control esta definida a tramos en el intervalo de tiempo de $[0, T]$, la evolución del sistema también lo estará.

La solución del sistema 3-1, y de cualquier sistema lineal con excitación constante, con autovalores diferentes de cero asociados a la matriz de estado, es de la siguiente forma:

$$x(t) = e^{At}x(0) + (e^{At} - I)A^{-1}bu \quad (3-3)$$

Considerando la señal de control u , dada por la ecuación 3-2, y la saturación de la ley de control en $d \in [0, T]$, se obtiene la solución general de los sistemas lineales a tramos.

$$x(t) = e^{At}x(0) + (e^{At} - I)A^{-1}bM \quad \text{para } 0 < t \leq d \quad (3-4)$$

$$x(d) = e^{Ad}x(0) + (e^{Ad} - I)A^{-1}bM \quad (3-5)$$

$$x(t) = e^{A(t-d)}x(d) \quad \text{para } d < t \leq T \quad (3-6)$$

Y se aplica para el sistema de prueba 3-1 así.

para $0 < t \leq d$

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [4 - 2x_1(0) - x_2(0)]e^{-3t} + [3x_1(0) + x_2(0) - 6]e^{-2t} + 2 \\ [6x_1(0) + 3x_2(0) - 12]e^{-3t} + [-2x_2(0) - 6x_1(0) + 12]e^{-2t} \end{pmatrix} \quad (3-7)$$

para $d < t \leq T$

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [-2x_1(d) - x_2(d)]e^{-3(t-d)} + [3x_1(d) + x_2(d)]e^{-2(t-d)} \\ [6x_1(d) + 3x_2(d)]e^{-3(t-d)} + [-2x_2(d) - 6x_1(d)]e^{-2(t-d)} \end{pmatrix} \quad (3-8)$$

Esta solución, la cual describe un sistema lineal a tramos funciona de la siguiente manera. La condición final del subsistema dado por la ecuación 3-7 se convierte en condición inicial para el subsistema dado por la ecuación 3-8 y viceversa. El funcionamiento de los subsistemas no está definido en tiempos discretos constantes, debido a que la ley de control d está variando constantemente. Pero el sistema discreto en general considera un periodo fijo T de conmutación, dado que la salida del sistema siempre se está sensando cada T segundos, con la finalidad de calcular nuevamente la modulación en la señal de control.

Se observa que la solución del sistema, sigue un comportamiento similar al de un sistema en tiempo discreto (en función de un reloj cada T segundos) con saturación. Por lo tanto, la discretización del sistema dada por la expresión 3-1, y de cualquier sistema lineal, viene dada mediante el tipo de modulación en la señal de control. Como se verá en la siguiente subsección, para PAM (Modulación de amplitud de pulso) y PWM.

3.2.1. Discretizaciones

Si se considera excitar el sistema con una señal dada mediante PAM, es decir con el valor promedio de la oscilación del PWM, esto es $u = M \frac{d}{T}$ cada T segundos, la dinámica obtenida siguiendo la ecuación 3-3, manteniendo la saturación ahora en $u \in [0, M]$, y evaluada en $t = kT$ segundos, con $k \in \mathbb{N}$ es:

$$x(kT) = e^{AkT} x(0) + (e^{AkT} - I)A^{-1}bu, \quad \text{con } u = M \frac{d}{T}$$

Esta solución proporciona la discretización inducida mediante PAM, si se considera el estado final $x(kT)$ como el nuevo estado inicial del sistema. El sistema discreto inducido por la modulación es el siguiente.

$$x_{k+1} = \underbrace{e^{AT}}_{A_d} x_k + \underbrace{(e^{AT} - I)A^{-1}b}_{b_d} u_k \quad (3-9)$$

Si se continua la dinámica del PWM (sin promediar la señal de control), y en la evolución del sistema se observan los estados cada T segundos, se encuentra de manera natural, el sistema discreto inducido por la modulación. Esto se define siguiendo las ecuaciones dadas en 3-4, como sigue.

$$x(t) = e^{A(t-d)} x(d) \quad (3-10)$$

$$x(t) = e^{At} x(0) + e^{At}(I - e^{-Ad})A^{-1}bM \quad (3-11)$$

Evaluando 3-10 en $t = kT$, se obtiene.

$$x(kT) = e^{AkT} x(0) + e^{AkT}(I - e^{-Ad})A^{-1}bM \quad (3-12)$$

De igual forma, esta solución proporciona la discretización inducida mediante PWM, si se considera el estado final $x(kT)$ como el nuevo estado inicial del sistema. Completando la expresión 3-12, y reorganizando términos se obtiene el siguiente sistema discreto.

$$x_{k+1} = \underbrace{e^{AT}}_{A_d} x_k + \underbrace{(e^{AT} - I)A^{-1}b}_{b_d} M - \underbrace{(e^{A(T-d)} - I)A^{-1}b}_{\tilde{b}_d} M \quad (3-13)$$

$$x_{k+1} = \underbrace{e^{AT}}_{A_d} x_k + (b_d - \tilde{b}_d)M \quad (3-14)$$

Es importante ver que las ecuaciones 3-9 y 3-13 son dos discretizaciones diferentes. Se observa que, si se sigue la discretización dada por PWM, la ley de control d ya no estará en u , si no dentro de la estructura \tilde{b}_d . Por otra parte, si se toma el promedio de la oscilación u (PAM), se tendrá la ley de control explícita en u .

Se detalla que el sistema discreto inducido por PWM mostrado en la ecuación 3-13, resulta en un sistema discreto no-lineal. Debido a que d es función del estado x_{1k} . La no-linealidad no toma lugar en la dinámica, si la variación del d es muy pequeño, o si se considera un T pequeño (esto es $0 < d \leq T$). Por lo tanto, un rango muy lineal en la función exponencial se presentará en la operación.

Reescribiendo el pasado sistema de ecuaciones 3-13 para el sistema de prueba, se obtiene lo siguiente.

$$\begin{pmatrix} x_{1_{k+1}} \\ x_{2_{k+1}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2e^{-3T} + 3e^{-2T} & e^{-2T} - e^{-3T} \\ 6e^{-3T} - 6e^{-2T} & 3e^{-3T} - 2e^{-2T} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{1_k} \\ x_{2_k} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{3}e^{-3T} & -\frac{1}{2}e^{-2T} \\ -e^{-3T} & e^{-2T} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 - e^{3d} \\ 1 - e^{2d} \end{pmatrix} M \quad (3-15)$$

Se observa que para las dos discretizaciones, el sistema ya no se presenta a tramos suaves sino como una ecuación compacta. Se detalla además, que la ley control puede implementarse en la estructura de ganancias del sistema (Sistema discreto inducido por PWM), o en la señal de excitación (Sistema discreto inducido por PAM), como se observa en las ecuaciones 3-9 y 3-13. Esta característica se observa también en los sistemas de estructura variable (Convertidor Boost).

Algo interesante puede notarse con alguna reorganización de los términos del sistema discreto dado por PWM. Se puede convertir el sistema discreto PWM de una entrada a dos entradas de control como se observa en la ecuación 3-15. Esto es $u_1 = 1 - e^{3d}$, y $u_2 = 1 - e^{2d}$.

Se podría pensar que las dos discretizaciones 3-9 y 3-13 son equivalentes, pero las dos exponen dos sistemas discretos diferentes; sin embargo, se aproximan una a la otra, mientras el periodo de muestreo T se haga cada vez más pequeño, esto resulta en:

$$\underbrace{x_{k+1}}_{PAM} \approx \underbrace{x_{k+1}}_{PWM} \quad (3-16)$$

Reemplazando las ecuaciones de los dos sistemas discretos 3-9 y 3-13 en la expresión 3-16, y asociando términos se obtiene lo siguiente:

$$(e^{AT} - I)A^{-1}bu = (e^{AT} - I)A^{-1}b\frac{d}{T}M \approx e^{AT}(I - e^{-Ad})A^{-1}bM \quad (3-17)$$

Relacionando factores se llega a la siguiente aproximación.

$$\underbrace{(e^{AT} - I)\frac{d}{T}}_{PAM} \approx \underbrace{e^{AT}(I - e^{-Ad})}_{PWM} \quad (3-18)$$

Ahora se comprueba que los dos sistemas discretos se aproximan uno del otro, en la medida que T tienda a cero, d por tanto lo hará también.

$$\lim_{(T,d) \rightarrow (0,0)} (e^{AT} - I)\frac{d}{T} = \lim_{(T,d) \rightarrow (0,0)} e^{AT}(I - e^{-Ad}) = 0 \quad (3-19)$$

El segundo límite es directo y resulta en la matriz nula. El primer límite no es trivial puesto que conduce a una matriz de indeterminaciones. Por lo tanto se procede repartiendo los límites.

$$\lim_{T \rightarrow 0} \frac{(e^{AT} - I)}{T} \cdot \lim_{d \rightarrow 0} d \quad (3-20)$$

Reescribiendo términos en el primer límite, se encuentra la derivada de la matriz de transición de estados.

$$\underbrace{\lim_{T \rightarrow 0} \left(\frac{e^{AT} - e^{A \cdot 0}}{T - 0} \right)}_{f'(0)} \lim_{d \rightarrow 0} d = A \cdot 0 = 0, \quad \text{donde } f(T) = e^{AT} \quad (3-21)$$

Queda por tanto demostrado, que los dos sistemas discretos se hacen equivalentes cuando T tiende a cero.

De manera cualitativa se aprecia esta relación en estado estable, en la figura 3-4. Se detalla que ambas discretizaciones (dadas por PAM y PWM) discrepan de cierta manera. Se observa además que la media de la respuesta del sistema en tiempo continuo PWM, es la respuesta del sistema en tiempo continuo PAM.

3.3. Bifurcaciones

3.3.1. Bifurcaciones Unidimensionales

Como se está tratando la dinámica del sistema en este capítulo, y continuando con ello, lo que se quiere es observar el comportamiento cualitativo que presenta el sistema ante cambios

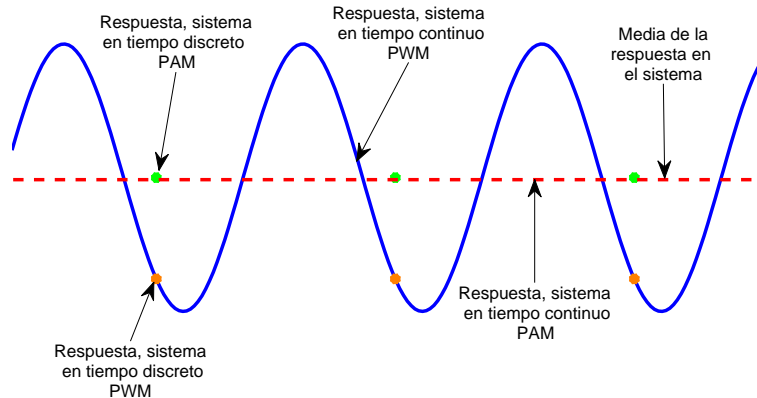


Figura 3-4.: Discretización mediante PWM y PAM.

en la constante proporcional kp del controlador; con el fin de visualizar un rango de trabajo sobre el cual la constante proporcional trabaja de manera adecuada en el compensador.

Las bifurcaciones se harán teniendo en cuenta que la estructura del controlador es dada mediante un PWM, que la ley de control es definida como $d = d^* + kp.e$. Para esto d^* (valor necesario en modulación del PWM para que la salida siga la referencia), se mantendrá fijo para los próximos análisis.

Como la estructura de la señal de control es definida mediante un tren de pulsos, lo más natural es que se encuentren ciclos límites en el espacio de estados. Los cambios ocasionados en la topología matemática del campo vectorial (conocido como bifurcaciones), producidos en este caso por los cambios del kp (constante proporcional del controlador), serán los puntos de referencia para dar conclusiones al respecto. Para esto, se realiza una aplicación de Poincaré al sistema.

Esta aplicación o función, relaciona las órbitas y la intersección de estas sobre una superficie definida π , la cual es un subespacio del espacio de estados asociado.

Como la dinámica es periódicamente forzada, se sabe que la duración del giro o la oscilación completa del ciclo límite, es lo que dura el ciclo de la oscilación de la señal de control, siempre y cuando la señal de control no se haya saturado.

Por lo tanto, si se toman muestras cada T segundos en la variable de salida (lo que equivale a aplicar un mapa estroboscópico en la dinámica del sistema), indirectamente se estará realizando una aplicación de Poincaré en la evolución del mismo en el plano de fase, sin necesidad de definir un subespacio (la superficie π) y así definir el diagrama de bifurcación.

Los diagramas de bifurcación unidimensionales mostrados en las figuras 3-6 y 3-7, se realizaron teniendo en cuenta que las condiciones iniciales se fijan continuando la órbita (considerando las condiciones finales como las iniciales del nuevo cálculo). Los valores escogidos para realizar las simulaciones son dados por la tabla 3-1.

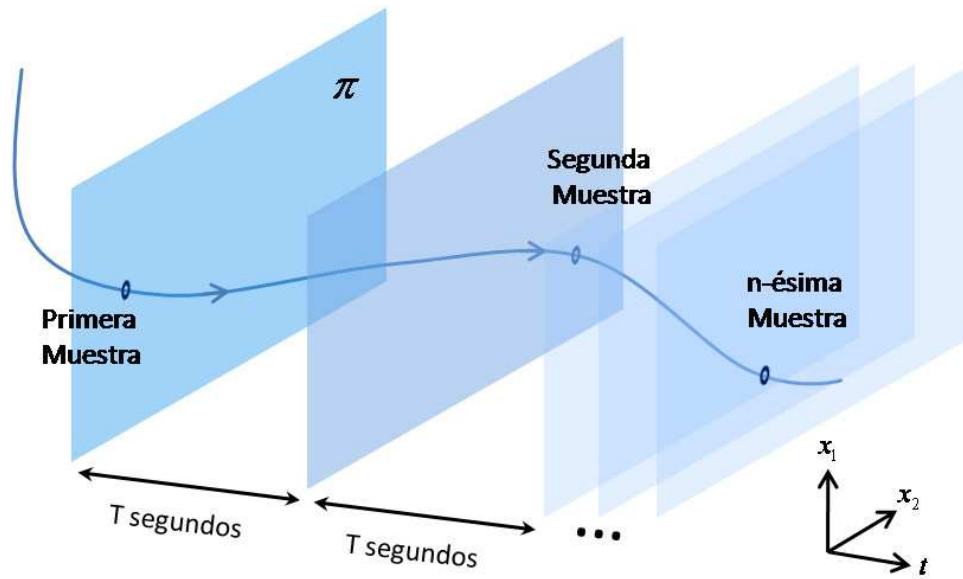


Figura 3-5.: Aplicación de Poincaré

Tabla 3-1.: Valores para el diagrama de bifurcación unidimensional

Descripción	Valor
Muestras	Ultimas 100
Tiempo simulación	100 segundos
Frecuencia ($\frac{1}{T}$)	10Hz
Limite inferior kp	0.9
Limite superior kp	1.8
Paso de kp	0.001
Referencia	1

Los dos diagramas de bifurcaciones son necesarios para realizar el análisis, ya que se complementan en información. El primer diagrama (figura 3-6), muestra la variable de estado x_1 tomada como la salida del sistema ante cambios de kp . El segundo diagrama (figura 3-7), muestra el comportamiento de la modulación del ancho de pulso d . Estos diagramas tienen el propósito de ofrecer mayor información acerca de los cambios cualitativos que sufre el sistema, que de otra manera serían difíciles de obtener.

De manera cualitativa se describe lo que pasa en los diagramas de bifurcaciones 3-6 y 3-7 mediante la tabla 3-2. Se observa que el sistema de control presenta una orbita 1-T periódica estable para valores de kp menores a 0.956 aproximadamente. Es por tanto recomendable que la constante proporcional kp del controlador este situada en esta zona.

El sistema dado por las expresiones 3-1 y 3-2, presenta colisiones de borde cuando el sistema se satura, esto se evidencia en la figura 3-7. Por tanto hay posibilidad de existencia de

bifurcaciones no suaves.

Cuando hay colisión de borde desaparecen periodicidades vistas en el sistema, pero se agregan otras periodicidades como la del sistema saturado a T y a cero.

Como se detalla en la figura 3-6, cuando la ganancia proporcional del controlador kp sobrepasa el valor de 0.956 aproximadamente, el controlador no será capaz de proporcionar en ancho de pulso d que lleve al sistema al comportamiento deseado. Ahora si se mueve el kp hacia 1.6, la ley de control d arrojará todos los valores posibles de 0 a T en el PWM, esto se detalla en la figura 3-7. Si se desplaza el kp más allá de 1.675, el sistema se vuelve muy sensible frente a cambios pequeños en la salida; provocando saturación al máximo posible y al mínimo del ancho del pulso. El incremento desmesurado de kp tendrá un efecto nulo si se sobrepasa un kp determinado, aproximadamente un $kp > 1.675$.

Cuando el kp está en la vecindad cercana a 1.6, el sistema se halla en la zona de caos. A esta región se le denomina caos de una sola banda, y según la variación del kp en el sistema, resulta de una aparición de caos instantáneo, puesto que de repente emerge una banda proveniente de un conjunto de varias bandas caóticas (ver figura 3-6 y tabla 3-2). A este cambio súbito, se le denomina bifurcación tipo crisis [25], de manera cualitativa este efecto ocurre por la unión o choque de varios atractores aledaños.

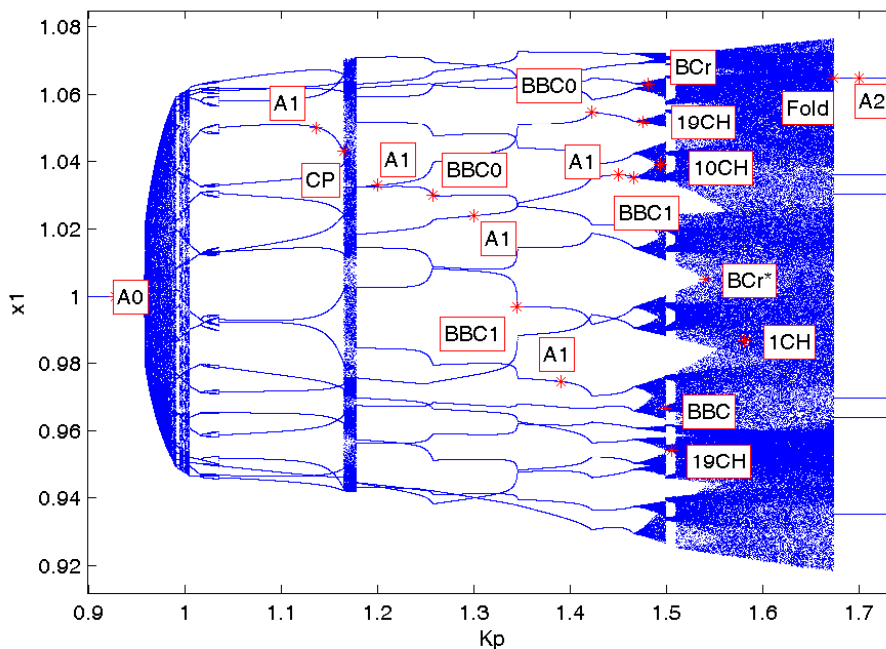


Figura 3-6.: Diagrama de bifurcación codimensión 1 en la salida del sistema.

kp	Tipo	Comportamiento
------	------	----------------

0.95	A0	Se encuentra un comportamiento 1-T periódico estable.
1.15	A1	Se encuentra un comportamiento 19-T periódico, de las cuales 10 periodicidades no son saturadas, 4 saturadas a T y 5 a 0.
1.65	CP	Comportamiento Cuasi periódico.
1.2	A1	Se encuentra un comportamiento 19-T periódico, de las cuales 9 periodicidades no son saturadas, 5 saturadas a T y 5 a 0.
1.257	BBC0	Se presenta una bifurcación BORDER-COLLISION con saturación en 0.
1.3	A1	Se encuentra un comportamiento 19-T periódico, de las cuales 8 periodicidades no son saturadas, 5 saturadas a T y 6 a 0.
1.345	BBC1	Se presenta una bifurcación BORDER-COLLISION con saturación en T.
1.385	A1	Se encuentra un comportamiento 19-T periódico, de las cuales 7 periodicidades no son saturadas, 6 saturadas a T y 6 a 0.
1.422	BBC0	Se presenta una bifurcación BORDER-COLLISION con saturación en 0.
1.45	A1	Se encuentra un comportamiento 19-T periódico, de las cuales 6 periodicidades no son saturadas, 6 saturadas a T y 7 a 0.
1.466	BBC1	Se presenta una bifurcación BORDER-COLLISION con saturación en T.
1.475	19CH	Emergen 19 bandas caóticas de las cuales 6 no son saturadas.
1.488	BCr	Se presenta una bifurcación tipo CRISIS.
1.493	10CH	Emergen 11 bandas caóticas de las cuales 3 no son saturadas.
1.499	BBC	Posible aparición de una bifurcación BORDER-COLLISION con saturación en T.
1.505	19CH	Emergen 18 bandas caóticas.
1.54	BCr	Se presenta una bifurcación tipo CRISIS.
1.581	1CH	Caos de una sola banda.
1.7	A2	Se encuentra un comportamiento 6-T periódico, de las cuales 0 periodicidades no son saturadas, 3 saturadas a T y 3 a 0.

Tabla 3-2.: Descripción cualitativa por zonas del diagrama de bifurcación

Se aprecia en las figuras **3-8** y **3-9**, como el sistema evoluciona bajo régimen caótico. El sistema de control es situado en esta región, asignando a kp un valor de 1.6. Se puede notar en la figura **3-8**, que el sistema es muy sensible a pequeñas variaciones en las condiciones iniciales, además se verifica que la dinámica se mueve en un volumen finito del espacio de estados, estas son condiciones cualitativas que determinan la existencia de caos. Es notorio un desorden, y no se detallan cotas que definan la amplitud superior e inferior de la respuesta del sistema (figura **3-8**), que se observarían como un patrón definido en estado estable, de una dinámica sin caos.

En la figura **3-10**, se puede observar el comportamiento temporal de las variables de estado en la zona de caos ($kp = 1.6$), se ve claramente que la variable x_1 es la que se controla, se encuentra oscilando con media en 1, y el comportamiento dado por la derivada de esta

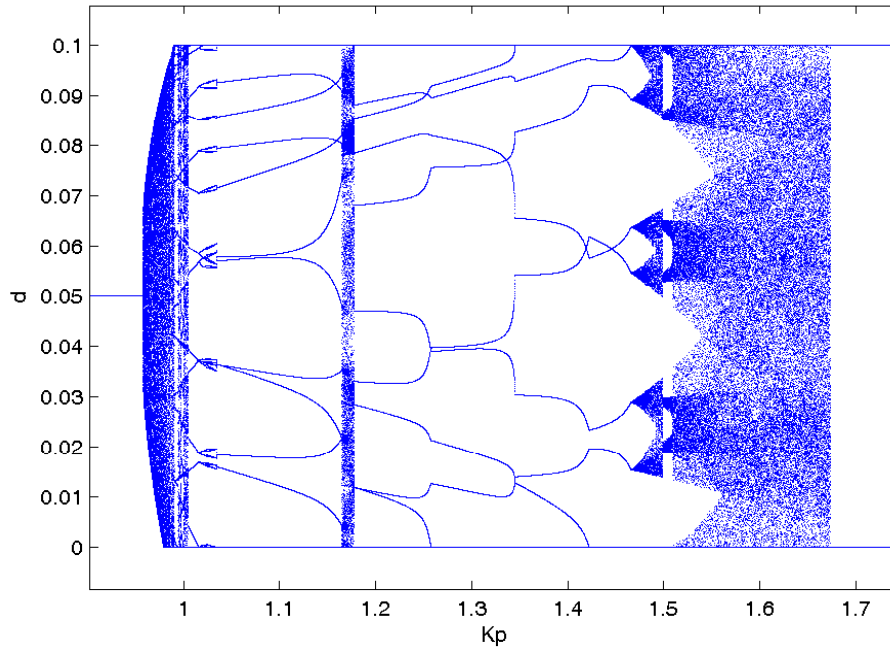


Figura 3-7.: Diagrama de bifurcación codimensión 1 en la ley de control.

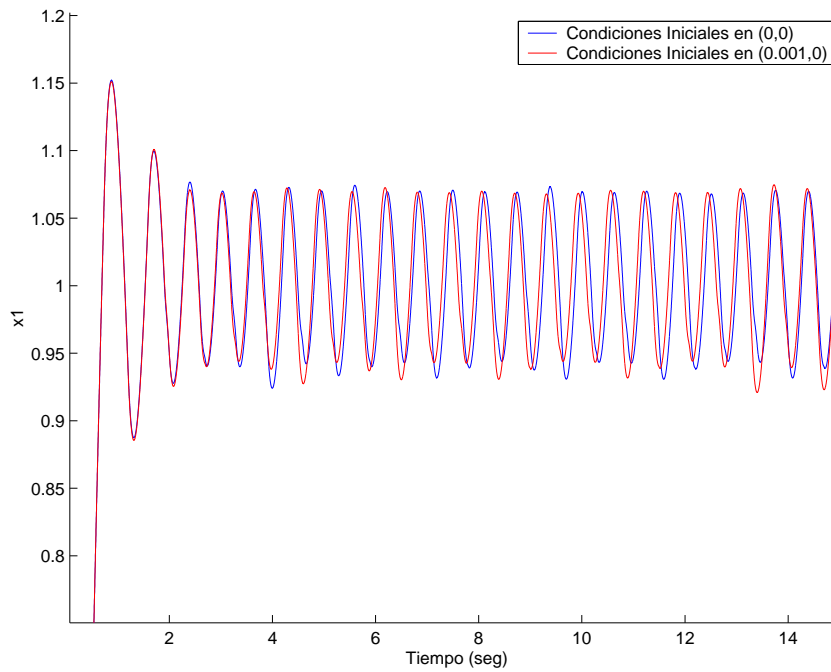


Figura 3-8.: Sensibilidad condiciones iniciales con $k_p = 1.6$

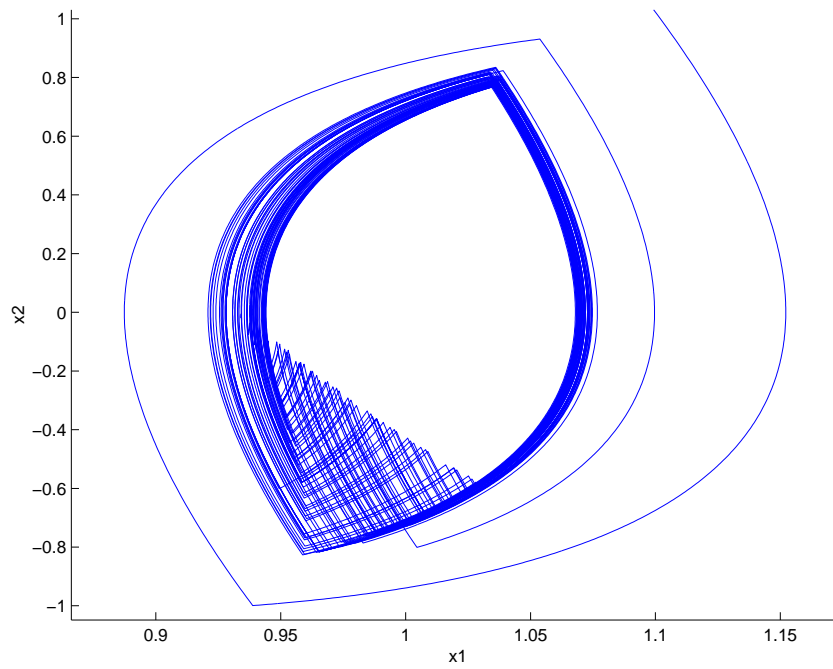


Figura 3-9.: Comportamiento espacio de estados con $k_p = 1.6$

variable de estado tiene media cercana a cero.

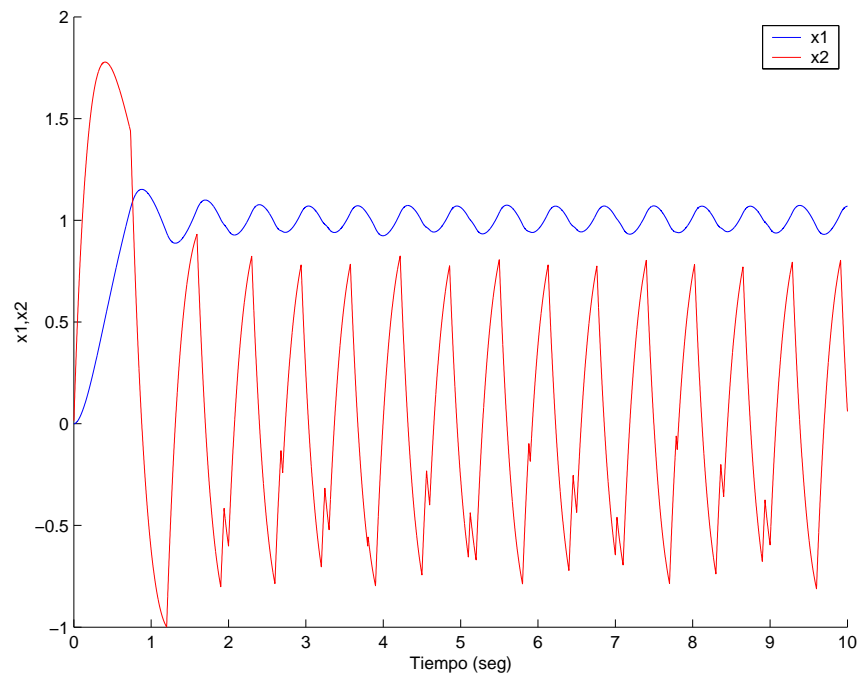


Figura 3-10.: Comportamiento temporal variables x_1 y x_2 con $k_p = 1.6$

3.3.2. Bifurcaciones Dos-dimensionales

En esta subsección, se quiere observar el comportamiento cualitativo de una gran cantidad de sistemas lineales de orden dos (tomando los más representativos), ante cambios en la constante proporcional kp . Para ello se debe generalizar los sistemas de orden dos, por medio de un solo parámetro. Esto se hace reduciendo un grado de libertad, en la selección de los parámetros α_1 y α_2 de la expresión 3-22; por consiguiente, se obtienen todos los sistemas de orden dos variando un solo parámetro, como es propuesto en el dominio del tiempo en la tesis doctoral de F. Angulo [1]. De la misma manera se realizará este procedimiento, pero en el dominio de la frecuencia y consiste en lo siguiente:

Para que esto sea posible, lo primero que se debe hacer es escalar el sistema en el tiempo, lo que es equivalente a escalar en la frecuencia. Por ejemplo, si se contrae el tiempo, implica expansión en la frecuencia y viceversa. Se supone que el sistema es de orden dos y de grado relativo dos. Por tanto la función de transferencia posee la siguiente forma.

$$(s^2 + \alpha_2 s + \alpha_1) Y(s) = kU(s) \quad (3-22)$$

Haciendo unos ajustes y re-acomodando los términos adecuadamente en la expresión 3-22, se obtiene la siguiente relación.

$$\left[\left(\frac{s}{\sqrt{\alpha_1}} \right)^2 + \frac{\alpha_2}{\sqrt{\alpha_1}} \left(\frac{s}{\sqrt{\alpha_1}} \right) + 1 \right] Y(s) = \frac{k}{\alpha_1} U(s) \quad (3-23)$$

Con la expresión 3-23, se puede hacer el siguiente cambio de variable compleja $r = r(s)$, y definir la relación de γ .

$$r = \frac{s}{\sqrt{\alpha_1}}, \quad \gamma = \frac{\alpha_2}{\sqrt{\alpha_1}} \quad (3-24)$$

Re-definiendo la relación entrada-salida del sistema resulta.

$$(r^2 + \gamma r + 1) Y(\sqrt{\alpha_1} r) = \frac{k}{\alpha_1} U(\sqrt{\alpha_1} r) \quad (3-25)$$

Se detalla que al hacer este cambio de variable, la función de transferencia continúa invariable.

$$G(s) = \frac{Y(\sqrt{\alpha_1} r)}{U(\sqrt{\alpha_1} r)} = \frac{1}{\alpha_1} \frac{k}{(r^2 + \gamma r + 1)} \quad (3-26)$$

Haciendo que la ganancia del sistema sea $k = \alpha_1$, el sistema toma la forma que se requiere.

$$G(s) = \frac{1}{(r^2 + \gamma r + 1)} \quad (3-27)$$

Con este arreglo, una gran cantidad de sistemas de orden dos quedan determinados por el valor de γ . Este término se convierte en el nuevo amortiguamiento relativo del sistema; la parte sub-amortiguada ya no va de 0 a 1, sino de 0 a 2, y la sobre-amortiguada ya no va de 1 a ∞ , sino de 2 a ∞ , como se aprecia en la figura 3-11.

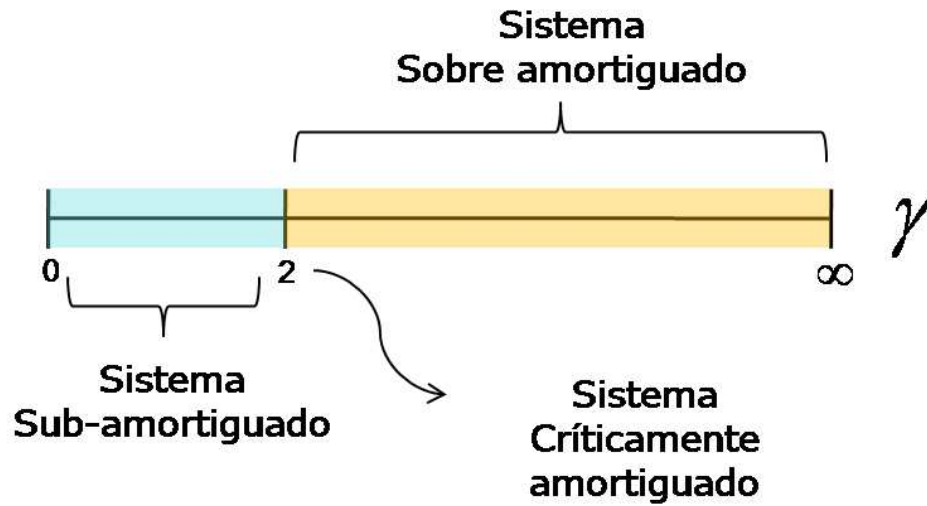


Figura 3-11.: Escala de γ , tipos de sistemas

Se observa que el sistema está escalado en el tiempo, y su nueva variable es $\tau = \sqrt{\alpha_1}t$

$$\mathcal{L}^{-1}\{Y(\sqrt{\alpha_1}r)\} = \frac{1}{\sqrt{\alpha_1}}y\left(\frac{\tau}{\sqrt{\alpha_1}}\right) \quad (3-28)$$

Por lo tanto, el nuevo tiempo escalado toma lugar en la variable temporal τ . Con esto se prepara el sistema para que sea definido por un solo parámetro γ , y con la variación del mismo, poder abarcar gran cantidad, de la variedad de sistemas de orden dos.

Hay que tener en cuenta, que el escalamiento del tiempo debe tenerse presente en los parámetros del controlador, y en la frecuencia de conmutación, para la realización de los diagramas de bifurcación dos-dimensionales.

La tabla 3-3, resume los valores de los parámetros necesarios, para realizar las simulaciones de los diagramas de bifurcación dos-dimensionales. Algunos de estos datos significan lo siguiente: *Max periodicidad*, se refiere a la máxima periodicidad encontrada en el diagrama de bifurcaciones; *Conjunto de datos*, son los últimos valores que se toman de la evolución de la salida, garantizando estado estable en la simulación; el Error es la distancia definida entre las muestras, para que el proceso de clasificación pueda discernir datos que pertenecen a cierta periodicidad.

Tabla 3-3.: Valores para bifurcaciones codimensión 2

Descripción	Valor
Max periodicidad	32
Conjunto datos	150
Iteraciones	7000
Tiempo simulación	700 segundos
Frecuencia en t	10Hz
Frecuencia en τ	4.0824829046
Error	10^{-5}
Rango kp	0 – 12
Rango γ	0.01 – 10
Paso de kp	0.03
Paso de γ	0.0175
Referencia	1

Con el sistema preparado y listo para realizar las simulaciones, se realizan los diagramas de bifurcaciones dos-dimensionales, mostrados en las figuras **3-12**, **3-13**, **3-14**, y **3-15**; variando dos parámetros, el kp (ganancia proporcional del controlador) y γ (el cual representa una gran cantidad de sistemas de orden dos).

Los diagramas **3-12** y **3-13**, reflejan el comportamiento del sistema bajo la frecuencia real de 10Hz, la cual es escalada según la expresión **3-28**. Los diagramas se hicieron siguiendo la órbita y no siguiéndola. Se observa más coherencia en los atractores siguiendo la órbita; por su parte, el otro diagrama demuestra coexistencia de atractores.

Los diagramas **3-14**, **3-15**, reflejan el comportamiento del sistema ante un cambio en la frecuencia, ahora $f = 24.495$ Hz. Los diagramas se hicieron siguiendo la órbita y no siguiéndola. Se observa más coherencia en los atractores siguiendo la órbita; por su parte, el otro diagrama demuestra coexistencia de atractores.

En los diagramas **3-12**, **3-13**, **3-14**, y **3-15**, muestran la periodicidad de las órbitas, dependiendo del tipo de sistema y la ganancia utilizada en el controlador. El máximo de órbitas identificadas para estos diagramas es 32. Por ejemplo, si se aprecia la zona negra de **3-14**, se nota una región en la cual no se puede determinar el número de órbitas (sobrepasa 32). Se intuye por lo tanto, que es una zona con alta probabilidad de presentar caos. La zona azul es la región uno periódica, una región en donde es deseable que habite el controlador en su modo de operación.

Lo mas interesante de rescatar con estos diagramas de bifurcaciones, desde un punto de vista práctico (debido a que el sistema por el momento es un sistema de prueba), es que se tiene un mapa, una guía de sintonización para la constante proporcional del controlador, que puede usar un ingeniero instrumentista. Cómo funciona?, se requiere garantizar que el controlador este en la zona 1-T periódica, o la zona azul oscura en los diagramas **3-14**, **3-15**, **3-12**

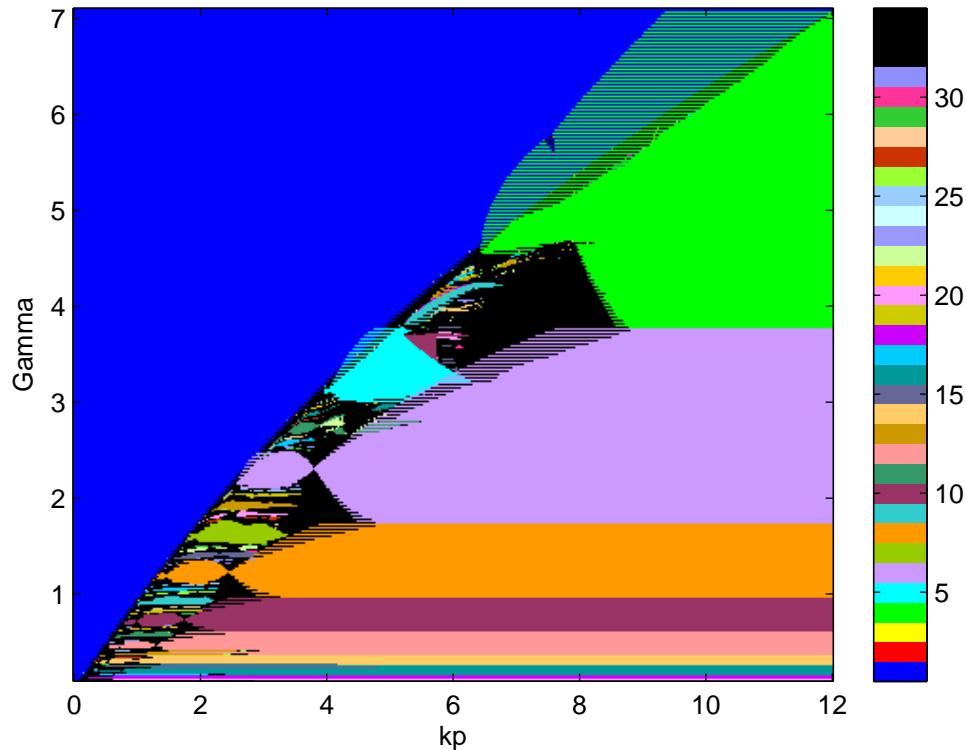


Figura 3-12.: Diagrama de bifurcación $f=10\text{Hz}$, siguiendo la órbita

y **3-13**; puesto que esta zona es lo más cercano que hay a un punto de equilibrio, y no es deseable que el sistema entre a otras zonas o a la zona caótica.

Sería muy perjudicial tener el actuador oscilando erráticamente (zona de caos), posibilitando que algún modo estructural de resonancia se active y deteriore más rápido el sistema.

3.4. Constante Proporcional Kp

La estabilidad del sistema es muy crítica cuando se adapta el d^* , y se resume cualitativamente en las siguientes tres posibilidades.

- Caso ideal: d^* fijo, implica estabilidad por realimentación de la salida, es decir, por la selección de k_p .
- Caso hipotético: d^* varía en cada paso del controlador. Implica inestabilidad como se demuestra en la subsección **3.4.2**.
- Caso real: d^* es adaptado en algún momento cercano al estado estacionario. Implica la combinación de las posibilidades pasadas, pero con mayor ponderación en el caso ideal

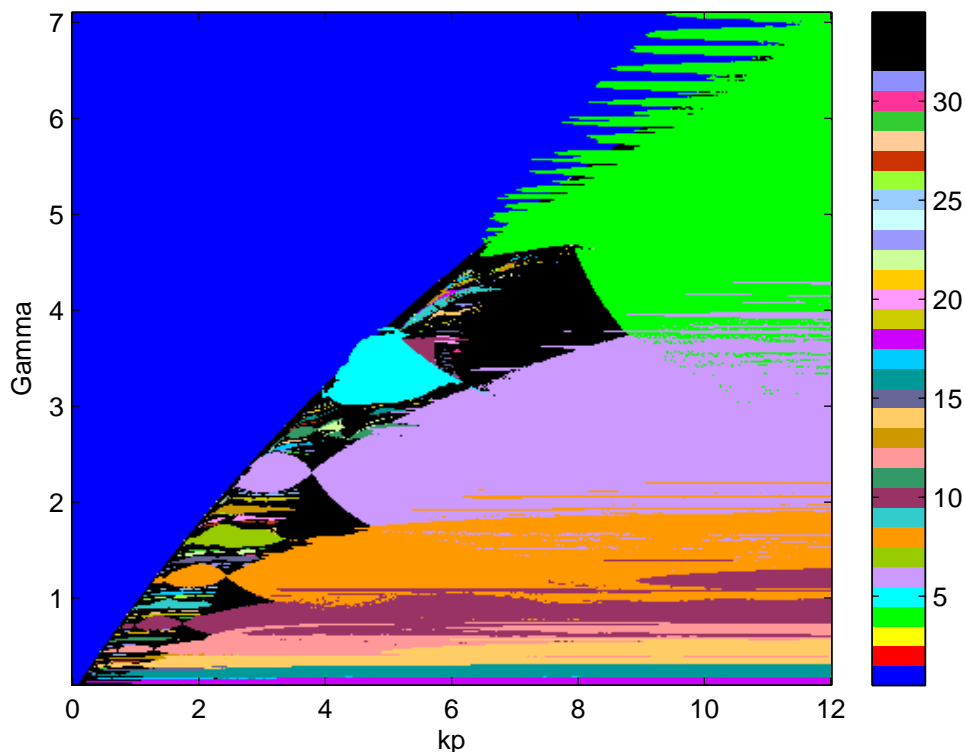


Figura 3-13.: Diagrama de bifurcación $f=10\text{Hz}$, sin seguir la órbita

(método 3 de estimación).

3.4.1. Caso Ideal

En la ley de control $d = d^* + kp.e$, el término d^* es fijo, está bien calculado y no se adapta (en términos generales I' fijo). Se asume además, que es automáticamente adecuado a la salida deseada que se quiere obtener.

Para analizar de manera más intuitiva lo que ocurre en este caso, se trabaja en el dominio del tiempo continuo y la frecuencia. Ahora kp se convierte en Kp , y d^* se convierte en $\gamma_d.ref$. Donde γ_d es definida en 3-29.

$$\gamma_d = \frac{1}{M_e \hat{G}(0)} \quad (3-29)$$

Aplicando la ley de control a un sistema lineal, se obtiene la función de transferencia 3-30.

$$G_T(s) = \frac{y}{ref} = \frac{(kp + \gamma_d)G(s)}{1 + kpG(s)} \quad (3-30)$$

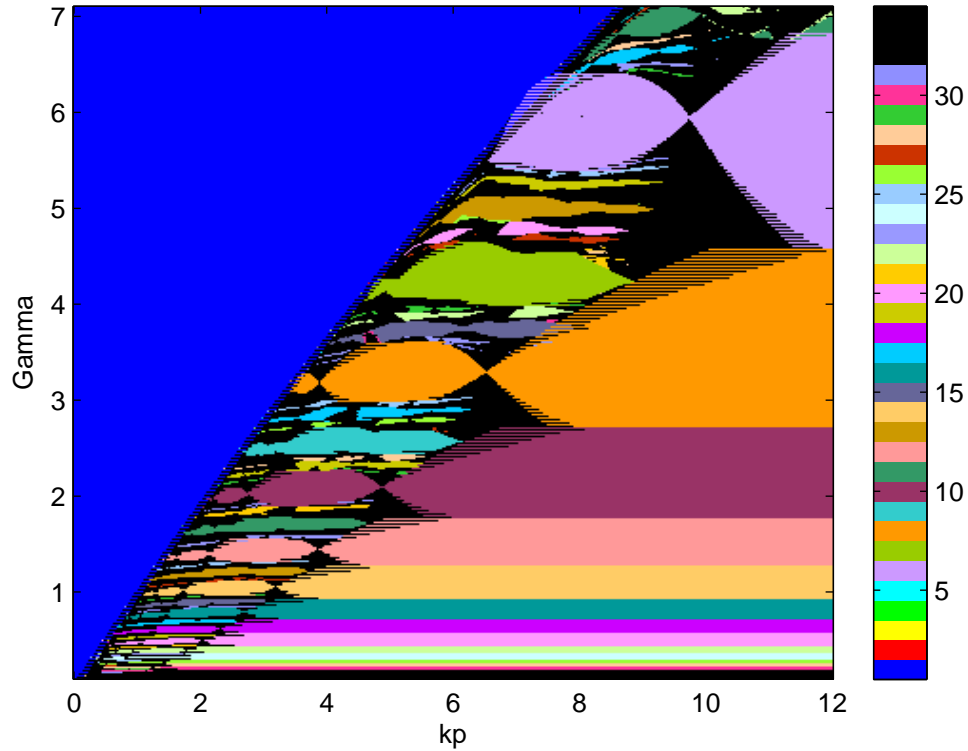


Figura 3-14.: Diagrama de bifurcación $f=24.495\text{Hz}$, siguiendo la órbita

Particularizando a un sistema lineal de orden 2, y grado relativo 2, se obtiene 3-31.

$$G_T(s) = \frac{Kp + \gamma_d}{s^2 + \alpha_1 s + \alpha_2 + Kp} \quad (3-31)$$

Se observa que a frecuencia cero, la ganancia del sistema de control es dada por 3-32, si y solo si, el sistema dado por la expresión 3-31 es estable.

$$G_T(0) = \frac{Kp + \gamma_d}{Kp + \alpha_2} \quad (3-32)$$

La expresión 3-32 evidencia que el cálculo de la ganancia γ_d , solo estará limitada a la ganancia inversa de la planta a frecuencia cero $\alpha_2 = \frac{1}{G(0)}$. Esto implica que si la estimación es correcta, la expresión 3-32 será igual a 1; logrando el objetivo del controlador, es decir, que la salida siga la referencia.

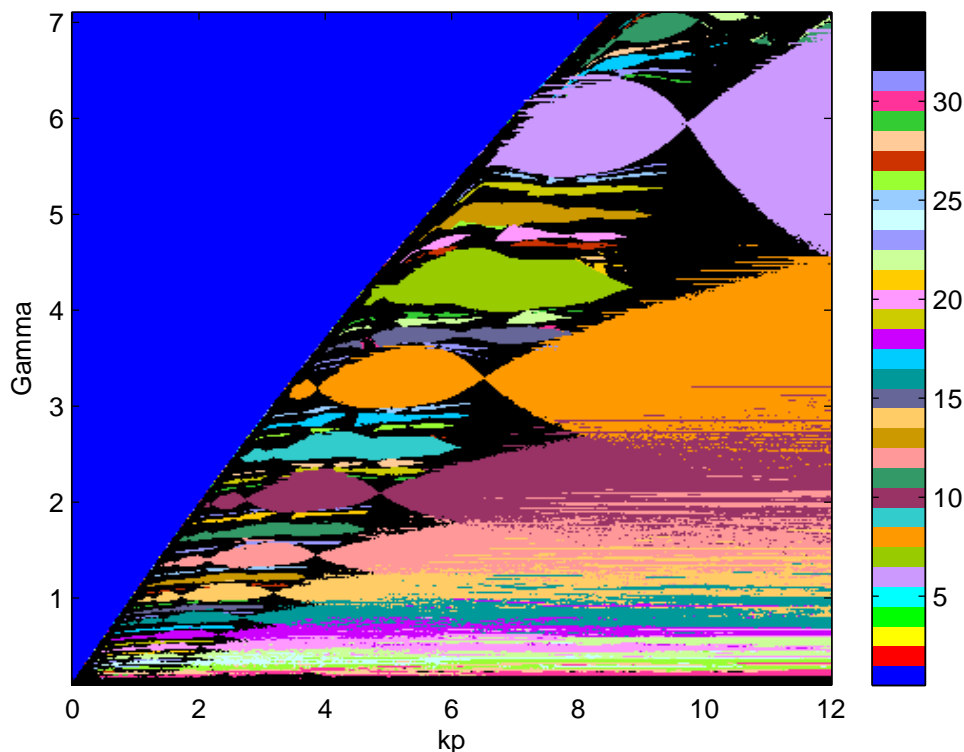


Figura 3-15.: Diagrama de bifurcación $f=24.495\text{Hz}$, sin seguir la órbita

Si se observa la dinámica, los polos del sistema estarán definidos únicamente, por la señal realimentada (sea solo la salida, o todos los estados para generar más consistencia en la estabilidad). Además como se observa en 3-31, la señal dada por el *feedforward* no afecta la estabilidad.

Con los anteriores resultados se generaliza la idea para sistemas lineales de orden y grado relativo n , mediante la expresión 3-33. La esencia de la ley de control propuesta permanece igual, lo único que aumenta son los términos del *feedback* (por la realimentación de estados).

$$f(\underbrace{y, \dot{y}, \ddot{y}, \dots, y^{(n-1)}}_x, y^{(n)}) = \overbrace{-K^T x + k_1 ref + \gamma_d ref}^u \quad (3-33)$$

En la expresión 3-33, $K^T = (k_1 \dots k_n)$ es un vector de ganancias de re-alimentación, y f expresa la estructura de la ecuación diferencial lineal.

El término $\gamma_d.ref$ es el equivalente en tiempo continuo del d^* . El término $k_1.ref$ es necesario para que se cumpla la relación 3-34, de lo contrario la estimación tendrá que ser igual a $\gamma_d = a_n + k_1$. Esto implica que la estimación tendría que hacerse, tomando muestras en la salida

del *feedforward* y en la salida del sistema, como se observa en la figura 3-16; produciendo ambigüedad en la manera en como se han desarrollado los métodos de estimación.

$$G_T(0) = \frac{k_1 + \gamma_d}{k_1 + a_n} \quad (3-34)$$

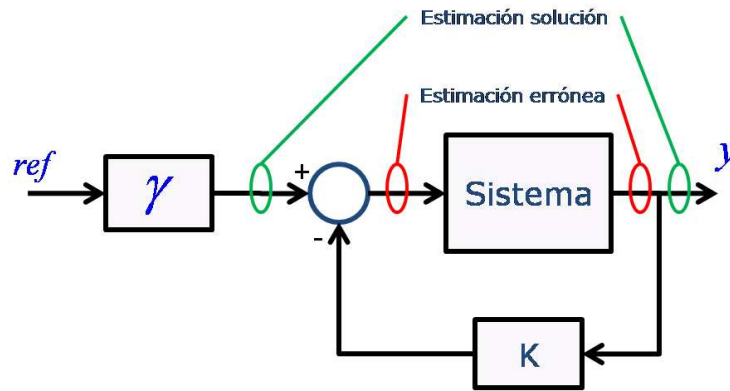


Figura 3-16.: Incoherencia en la estimación, con términos faltantes en la ley de control

3.4.2. Caso Hipotético

Para analizar de manera más intuitiva lo que ocurre en este caso, se trabaja en el dominio del tiempo discreto. Para ello, se utiliza la discretización inducida por PWM dada en la expresión 3-13. Además se toma un caso particular para evaluar la dinámica, es decir, un sistema de control dado y un objetivo de control específico.

En la ley de control $d = d^* + kp.e$, el d^* se ajusta en cada instante de reloj T , bajo la expresión de adaptación dada por 2-5. La ley de control, bajo las condiciones antes mencionadas, y ajustada apropiadamente a un sistema dado, puede ser estabilizante o inestabilizante, para los sistemas lineales de orden 2 a aplicar.

Por lo tanto, la hipótesis planteada es la siguiente: el sistema entrará en una dinámica, en donde no encontrará estabilización, si la actualización del d^* se realiza en cada periodo de reloj T , bajo la expresión de adaptación dada en 2-5.

Para comprobar la hipótesis anterior, solo basta con que una prueba de estabilidad falle en un sistema de control dado. Puesto que proporciona una medida suficiente, para discernir que la estimación continua en el controlador, bajo las condiciones previamente establecidas, no es estabilizante en general.

Para realizar la prueba de estabilidad en un sistema dado, se requiere definir el sistema de control completamente, es decir, se define la ley de control como un estado más en el sistema PWM discreto 3-13.

En el procedimiento se utiliza la ley de estimación $\hat{G}_k(0) = \frac{x_{1k}}{u_k}$, establecida en el método 2 (ver subsección 2.3.2).

Assumiendo adaptación constante, es decir, cada T segundos. Se obtiene la expresión 3-35.

$$d_{k+1} = d_{k+1}^* + kp.(ref - x_{1k}) \quad (3-35)$$

En donde:

$$d_{k+1}^* = \frac{ref.T}{M_e \cdot \hat{G}_k(0)} = \frac{ref.T}{M_e} \cdot \frac{u_k}{x_{1k}} = \frac{ref.T}{M_e} \cdot \frac{d_k \cdot M_e}{T \cdot x_{1k}} = ref \cdot \frac{d_k}{x_{1k}} \quad (3-36)$$

Por lo tanto la ley de control queda definida en la expresión 3-37

$$d_{k+1} = ref \cdot \frac{d_k}{x_{1k}} + kp.(ref - x_{1k}) \quad (3-37)$$

El sistema completo es dado mediante la expresión 3-38.

$$x_{k+1} = e^{AT} x_k + (e^{AT} - I)A^{-1}bM - (e^{A(T-d_k)} - I)A^{-1}bM \quad (3-38)$$

$$d_{k+1} = \underbrace{ref \cdot \frac{d_k}{x_{1k}}}_{d^*} + kp.(ref - x_{1k}) \quad (3-39)$$

Ahora se particulariza el sistema completo dado por la expresión 3-38; tomando el sistema discreto por PWM dado en la expresión 3-15, y luego definiendo $ref = 1$, $kp = 0.05$ y $T = 0.1$ segundos.

Por lo tanto se espera que en estado estable $x_{1k} = 1$ y $d_k = \frac{0.1}{2} = 0.05$, puesto que el rango dinámico de la salida del sistema varía entre 0 y 2.

$$\begin{pmatrix} x_{1k+1} \\ x_{2k+1} \\ d_{k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.97455x_{1k} + 0.07791x_{2k} - 1.94911 - 2.96327.e^{3d_k} + 4.91238.e^{2d_k} \\ -0.46747x_{1k} + 0.58499x_{2k} + 0.93495 + 8.88981.e^{3d_k} - 9.82476.e^{2d_k} \\ -0.05x_{1k} + \frac{d_k}{x_{1k}} + 0.05 \end{pmatrix} \quad (3-40)$$

Para continuar con la prueba de estabilidad, se definen los puntos fijos, el jacobiano, y se utiliza el método de linealización por Lyapunov [3], en el sistema discreto 3-40.

Los puntos fijos del sistema dado en la expresión 3-40, son los vectores de estado definidos como: $X = (x_{1k} \ x_{2k} \ d_k)^T$, que cumplen con la siguiente condición 3-41.

$$X^* = P(X^*) \quad (3-41)$$

Donde P es el sistema discreto, y X^* los puntos fijos.

Aplicando la condición 3-41 en el sistema discreto 3-40, se encuentran los puntos fijos, y son mostrados en la tabla 3-5.

Tabla 3-4.: Puntos fijos

Punto fijo	x_{1k}	x_{2k}	d_k
X_1^*	1	-0.1494098272	0.05000776786
X_2^*	1	79.29586227	0.6977205939

El jacobiano del sistema es definido como:

$$DP(X) = \begin{pmatrix} \frac{\partial P_1}{\partial x_{1k}} & \frac{\partial P_1}{\partial x_{2k}} & \frac{\partial P_1}{\partial d_k} \\ \frac{\partial P_2}{\partial x_{1k}} & \frac{\partial P_2}{\partial x_{2k}} & \frac{\partial P_2}{\partial d_k} \\ \frac{\partial P_3}{\partial x_{1k}} & \frac{\partial P_3}{\partial x_{2k}} & \frac{\partial P_3}{\partial d_k} \end{pmatrix} \quad (3-42)$$

Aplicando el jacobiano 3-42 al sistema discreto 3-40, resulta 3-43.

$$DP(X) = \begin{pmatrix} 0.974555818 & 0.0779125324 & -8.889818649e^{3d_k} + 9.824769038e^{2d_k} \\ -0.467475195 & 0.584993156 & 26.66945594e^{3d_k} - 19.64953807e^{2d_k} \\ -0.05 - \frac{d_k}{x_{1k}^2} & 0 & \frac{1}{x_{1k}} \end{pmatrix} \quad (3-43)$$

Ahora se evalúa el jacobiano 3-43 para los puntos fijos X_1^* y X_2^* , resultando en la linealización del sistema discreto 3-40 alrededor de los puntos fijos.

El punto fijo más importante para analizar es X_1^* , puesto que el objetivo de control es conducir al sistema para que $x_{1k} = 1$. Esto se traduce en la ley de control como un $d_k = 0.05$.

Para el primer punto fijo, el jacobiano asociado es el siguiente.

$$DP(X_1^*) = \begin{pmatrix} 0.974555818 & 0.0779125324 & 0.52948130 \\ -0.467475195 & 0.584993156 & 9.26977382 \\ -0.1000077679 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (3-44)$$

Cuyos multiplicadores característicos son:

$$\lambda_{1,2,3} = \left\{ \begin{array}{l} 1.06045807441764772 + 0.405163062242535010i \\ 1.06045807441764772 - 0.405163062242535010i \\ 0.438632825164705254 \end{array} \right\} \quad (3-45)$$

Para el segundo punto fijo, el jacobiano asociado es el siguiente.

$$DP(X_2^*) = \begin{pmatrix} 0.974555818 & 0.0779125324 & -32.44085036 \\ -0.467475195 & 0.584993156 & 136.9827380 \\ -0.7477205939 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (3-46)$$

Cuyos multiplicadores característicos son:

$$\lambda_{1,2,3} = \left\{ \begin{array}{l} 5.74943527514661668 \\ -4.10380964640276780 \\ 0.913923345256128839 \end{array} \right\} \quad (3-47)$$

Se observa que el sistema es inestable, puesto que para cada punto fijo, la magnitud de al menos un multiplicador característico es mayor a uno.

Por lo tanto, la estimación y adaptación continua no posee características estabilizantes. Se demuestra que este mecanismo, inestabiliza al sistema de control.

3.4.3. Caso Real

El caso real es la combinación entre el caso ideal y el hipotético, con más ponderación en el caso ideal. En otras palabras, se puede ver como un caso ideal; adicionando la estimación y adaptación del término I' , solo cuando la evolución del sistema se encuentra cerca del estado estacionario, y de otras condiciones necesarias (ver tercer método de estimación, detallado en la subsección 2.3.3).

En el caso ideal, la estabilidad es definida por la constante proporcional kp . De igual manera esta afirmación puede extrapolarse al caso real, y así definir en su mayor parte la dinámica del transitorio.

Por tanto, lo que hace el d^* o el término I' , es no alterar la estructura del sistema, solo darle la energía necesaria para conseguir un $e = 0$ en estado estacionario.

Estas ideas tienen una implicación muy importante, y es en la optimización del sistema de control, puesto que la dinámica del transitorio en su mayor parte, queda definida por la constante proporcional kp .

La optimización se define considerando el planteamiento del caso ideal, donde el término I' del controlador (*feedforward*) es fijo, y el sistema de control es definido en la frecuencia según la expresión 3-31.

El método usado para la optimización, es basado en el regulador cuadrático lineal, conocido como LQR [22], el cual posee la ventaja de proporcionar estabilidad en el sistema de control, si la planta es controlable.

En el dominio del tiempo continuo, el sistema de control es definido mediante la expresión 3-48, así.

$$\ddot{y} + 5\dot{y} + (6 + kp)y = (kp + \gamma_d)r \quad (3-48)$$

Donde $r = r(t)$ es definido como una función escalón de amplitud a , definida en $t > 0$. Se asume $\gamma_d = 6$ suponiendo que la estimación se hizo perfectamente (caso ideal).

Realizando el siguiente cambio de variables, $e = r - y$, $\dot{e} = \dot{r} - \dot{y}$, $\ddot{e} = \ddot{r} - \ddot{y}$, y considerando $\dot{r}(0_+) = 0$, y $\ddot{r}(0_+) = 0$. Se obtiene la expresión 3-49.

$$\ddot{e} + 5\dot{e} + (6 + kp)e = 0 \quad (3-49)$$

Por simplicidad se cambia la notación del error e por la letra x . Se define $x_1 := e$, y $x_2 := \dot{e}$. Se lleva la ecuación diferencial 3-49 al espacio de estados, y el campo vectorial resultante $\dot{x} = A_e x$ es detallado en 3-50.

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -(kp + 6) & -5 \end{pmatrix}}_{A_e} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \quad (3-50)$$

Lo que se quiere minimizar, es la penalización incurrida por el error en el sistema. Por lo tanto, se pretende encontrar una ley de control $u(x) = ref.\gamma_d + kp.x_1$, que minimice el índice de desempeño 3-51. Esto es definido en el siguiente funcional.

$$J(x_0, u(x)) = \int_{0_+}^{\infty} (e^2 + \beta \dot{e}^2) dt = \int_{0_+}^{\infty} (x_1^2 + \beta x_2^2) dt \quad (3-51)$$

El funcional es definido como.

$$\begin{aligned} J &: \zeta(I) \times R^2 \rightarrow R \\ (u(x), x_0) &\mapsto J(u(x), x_0) \end{aligned} \quad (3-52)$$

En donde $\zeta(I)$ es el espacio de funciones definidas en el intervalo real I , es decir, donde se albergan todas las leyes de control posibles según el esquema de control $u(x) = ref.\gamma_d + kp.x_1$. En este caso I es un intervalo de tiempo. El problema de optimización queda definido como.

$$J^*(x_0) = J(x_0, u^*) = \min_{u \in \zeta} \int_{0_+}^{\infty} (x_1^2 + \beta x_2^2) dt \quad (3-53)$$

En donde $x_0 = x(0_+)$ es la condición inicial del sistema, u^* es la ley de control óptima, J^* es el valor mínimo del funcional, y $\beta > 0$ es un peso que se le da a la derivada del error. Para la optimización del funcional 3-53, se le da un peso a la derivada del error, $\beta = 0.1$. Escribiendo el funcional de forma matricial se obtiene.

$$J = \int_{0_+}^{\infty} x^T Q x dt, \quad Q = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}}_{\text{Matriz hermitiana}} \quad (3-54)$$

Hallando la primitiva de la integral, resulta.

$$-\frac{d}{dt} x^T P x = x^T Q x \quad (3-55)$$

Aplicando 3-55, al funcional 3-54, resulta.

$$J = \int_{0_+}^{\infty} -\frac{d}{dt} x^T P x dt = x(0_+)^T P x(0_+) - \underbrace{x(\infty)^T P x(\infty)}_{=0} \quad (3-56)$$

Lo interesante de este método es que permite transformar una optimización de un espacio vectorial de dimensión infinita, a uno de dimensión finita, es decir, se paso de buscar una función $u(x)$, a un parámetro kp .

Por lo tanto, el funcional queda definido como un campo escalar.

$$J = x(0_+)^T P x(0_+) \quad (3-57)$$

El término de la expresión 3-56 tiende a cero, si y solo si 3-50 es estable, o la función de Lyapunov generada por 3-55, tiene solución única y es positiva definida P . Esto es definido en la expresión 3-58.

$$A_e^T P + P A_e = -Q \quad (3-58)$$

La solución de la expresión 3-58 es.

$$P = \begin{pmatrix} \frac{0.01(346+22kp+kp^2)}{kp+6} & \frac{0.5}{kp+6} \\ \frac{0.5}{kp+6} & \frac{0.01(16+kp)}{kp+6} \end{pmatrix} \quad (3-59)$$

Se asume condiciones iniciales dadas de la siguiente forma.

$$x_0 = (e_0 \ 0)^T, \text{ donde } e_0 \in [0, 2] \quad (3-60)$$

La restricción dada en la expresión 3-60, se hace para que la optimización no dependa de la condición inicial. Además se acota e_0 a este intervalo, con el fin de obtener consistencia en el error máximo que puede presentarse en el sistema de prueba 3-1.

Reemplazando las expresiones 3-60, y 3-59 en 3-57, se define el campo escalar J en la expresión 3-61.

$$J = 0.01e_0^2 \frac{(346 + 22kp + kp^2)}{kp + 6} \quad (3-61)$$

Ahora la optimización es encontrar los máximos y los mínimos del campo escalar dado por 3-61. Para ello se requiere.

$$\frac{\partial J}{\partial k_p} = 0 \quad (3-62)$$

$$0.01e_0^2 \frac{(22 + 2kp)}{kp + 6} - 0.01e_0^2 \frac{(346 + 22kp + kp^2)}{(kp + 6)^2} = 0 \quad (3-63)$$

Cuyos puntos críticos son $kp = 9.811388301$ y $kp = -21.81138830$. Se observa que para el conjunto de condiciones iniciales dadas en 3-60, la optimización no dependerá de las condiciones iniciales escogidas x_0 . Esto se evidencia en 3-63.

Para $kp = -21.81138830$, la solución 3-59 pierde la calidad de ser positiva definida, por lo tanto no ofrece una solución estable.

Para $kp = 9.811388301$, la solución 3-59 es positiva definida. Escoger este valor de kp permite minimizar el funcional, y define la ley de control u óptima.

Como el controlador es definido en el tiempo discreto, y la ganancia kp es hallada en el tiempo continuo, se usa la tabla dada en 2-1 para convertirla al tiempo discreto.

Por otra parte, la constante proporcional kp del control PI, también puede ajustarse siguiendo las reglas desarrolladas por Ziegler-Nichols [22], y es dada en la tabla 3-5.

Tabla 3-5.: Ziegler-Nichols para Control P

Constante	Lazo abierto	Lazo cerrado
kp	$\frac{\tau_a}{\theta}$	$0.5k_u$

En donde θ es el tiempo muerto aparente del sistema, τ_a la constante de tiempo aparente del sistema, y k_u es la ganancia última, que lleva al sistema al borde de la estabilidad.

3.5. Conclusiones Parciales

- Se puede decir que siendo el sistema aparentemente tan simple, se pueden encontrar allí dinámicas muy extrañas. Es algo que no es nuevo, fue uno de los principales descubrimientos (en la teoría de sistemas dinámicos), encontrar que para sistemas muy simples se encuentran conjuntos invariantes extremadamente complejos .
- Con la ayuda de los diagramas de bifurcaciones, se puede tener un rango más amplio de visión, acerca de cómo el sistema se comporta. Es muy deseable tener esta información para poder re-alimentar, y tomar medidas respectivas acerca de los fenómenos que ocurran en un sistema, o de cualquier sistema que se esté estudiando.
- En el diagrama de bifurcación 3-7, se evidencia que cuando se varía el parámetro kp , la dinámica del sistema entra en desorden, luego se ordena en órbitas periódicas, para luego volver a desordenarse; entrando en una banda caótica. Si se ubica el parámetro en esta banda, el controlador tomará probablemente, todos los valores posibles del ciclo de trabajo definido en el intervalo de $[0, T]$, y no el valor necesario en estado estacionario para regular sin dinámicas extrañas.
- La dinámica de los sistemas puede volverse muy sensible frente a los cambios en sus parámetros, si se encuentran cerca de sus valores de bifurcación. Es deseable que exista

un compromiso entre la posibilidad de presentarse una bifurcación, y el desempeño que se espera tanto en estado estable como en el transitorio. Un diagrama de bifurcación es una solución para adecuar la dinámica del sistema, y alejarlo de esa posibilidad.

- Matemáticamente se pueden encontrar diferentes representaciones del sistema controlado, cuando la señal de control es definida mediante una modulación dada. Mediante un arreglo matemático, es posible convertir el sistema discreto dado por PWM, de una entrada a dos entradas. Cada una de esas representaciones se hacen equivalentes cuando la frecuencia se hace infinito simulando un sistema en tiempo continuo.
- Al permitirle solo a la parte proporcional del controlador definir la dinámica, el proceso de optimización en lazo abierto del sistema se hace computacionalmente más sencillo (solo se calcula el kp), y puede generarse una expresión la cual abarque la optimización de gran parte de todos los sistemas de orden dos; optimizando la expresión dada por 3-27.
- Es una ventaja saber que con solo la selección adecuada de la constante proporcional kp , se puede minimizar la penalización en la que incurra el error. A diferencia del control PI que necesita la optimización de dos constantes, o del control P, el cual minimiza el error intrínseco en el, solo aumentando su constante kp a expensas de su inestabilización.
- El diseño de la técnica de control abre de manera natural las puertas para la extensión, aplicación, e investigación en sistemas lineales de orden superior, como se pudo evidenciar en la subsección para hallar la constante proporcional del controlador, además de los sistemas de estructura variable.

4. Aplicación Experimental de la Técnica PI'

En este capítulo se detalla la primera fase experimental en la validación de la técnica propuesta PI', aplicada a un convertidor electrónico de potencia *buck*. Como la técnica diseñada es formulada para los sistemas lineales invariantes en el tiempo, se debe garantizar el modo de conducción continua en el convertidor, y así asegurar una dinámica muy parecida a la lineal en el rango no saturado.

El prototipo utilizado proviene del desarrollo experimental hecho por un estudiante de doctorado, de los grupos de investigación PCI, ABC Dynamics y GRED&P de la Universidad Nacional de Colombia sede Manizales. El controlador es implementado bajo un sistema integrado *dSPACE*, el cual provee una tarjeta de desarrollo con la referencia DS1104R&D, y un software llamado *Control Desk* para manipulación en tiempo real de la información recibida por la tarjeta. Para mayor información acerca del hardware usado, véase las referencia [38].

4.1. Preliminares

Los parámetros utilizados en el experimento y la simulación son dados en la tabla 4-1, y son escogidos para garantizar el modo de conducción continua en el convertidor.

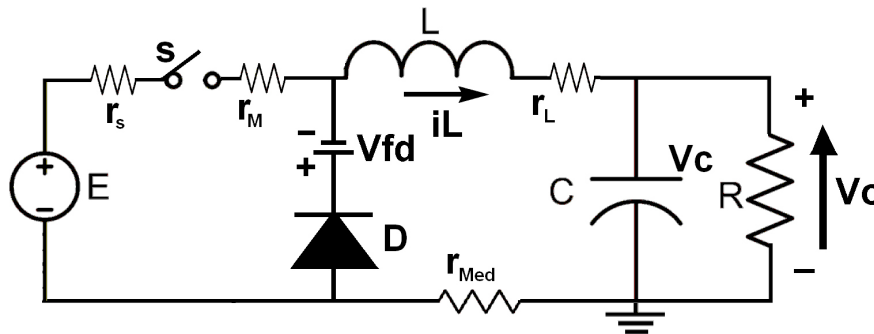


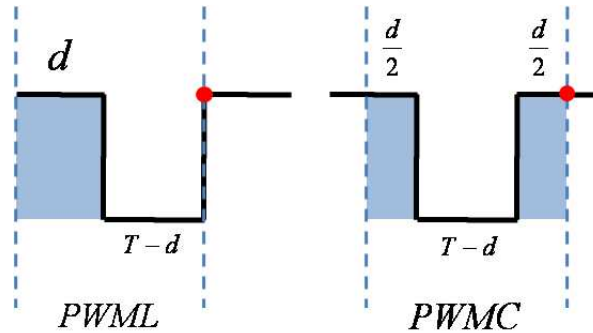
Figura 4-1.: Convertidor reductor buck

El tipo de modulación utilizada es PWMC (modulación de amplitud de pulso centrada), puesto que en la implementación dada por PWML (modulación con la que se ha venido trabajando), la medida se toma cuando la señal de control conmuta, y es aquí donde aparecen

Tabla 4-1.: Parámetros utilizados en el convertidor

Parámetro	Valor
R: Resistencia de carga	20Ω
C: Capacitancia	$46.27\ \mu\text{F}$
L: Inductancia	$25\ \text{mH}$
rS: Resistencia interna de la fuente	0.3887Ω
rM: Resistencia de conducción del MOSFET	0.3Ω
rMed: Resistencia de medida de corriente	1.007Ω
rL: Resistencia interna del inductor	0.338Ω
E: Voltaje de entrada	$40.086\ \text{V}$
Fc: Frecuencia de conmutación	$10\ \text{kHz}$
Fs: Frecuencia de muestreo	$10\ \text{kHz}$

transitorios indeseados como picos de voltaje. Lo anterior implica que la muestra tomada según la conmutación, es alterada de alguna forma (ver figura 4-2).

**Figura 4-2.:** Tipos de modulación PWM

Aplicar el controlador PI' al sistema, no es del todo directo. Resulta que modificar la dinámica del convertidor mediante la acción proporcional, no suministra un gran conjunto de alternativas, esto se aprecia en la figura 4-3.

Si se aproxima el modelo matemático del convertidor *buck* sin considerar las pérdidas, se puede concluir acerca de la selección del parámetro kp .

El modelo matemático es dado por la expresión 4-1, siempre y cuando el modo de conducción continua este presente en el convertidor.

$$\begin{pmatrix} \frac{dv_C}{dt} \\ \frac{di_L}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{RC} & \frac{1}{C} \\ -\frac{1}{L} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_C \\ i_L \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{V_{in}}{L} \end{pmatrix} u, \quad u \in \{0, 1\} \quad (4-1)$$

El sistema presenta un comportamiento discreto, puesto que el esquema de modulación es dado por PWM. Para continuar con el análisis, es necesario una aproximación en tiempo discreto del sistema 4-1, para ello la alimentación del convertidor debe ser el promedio del ciclo de oscilación $u(t)$, multiplicado por el valor de la fuente V_{in} .

Aplicando la aproximación de Tustin al sistema dado por la expresión 4-1, y utilizando los parámetros dados en la tabla 4-1, se obtiene la función de transferencia discreta 4-2.

$$G(z) = \frac{0.08203z^2 + 0.1641z + 0.08203}{z^2 - 1.89z + 0.8977} \quad (4-2)$$

Con el sistema discreto definido por la expresión 4-2, se puede ilustrar el rango de dinámicas que puede presentar el convertidor, a medida que la acción proporcional del controlador varía, mediante el lugar geométrico de las raíces (ver figura 4-3).

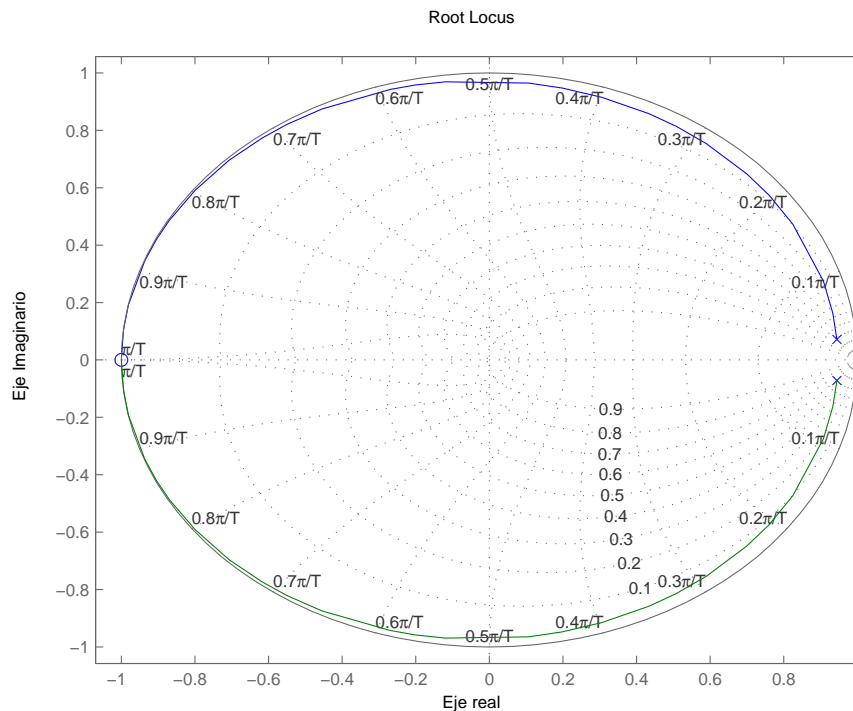


Figura 4-3.: Lugar geométrico de las raíces para el convertidor buck

Como se observa en la figura 4-3, el aumento de la ganancia kp induce más oscilación en el sistema, puesto que para mantener una atenuación σ constante, es necesario disminuir el factor de amortiguamiento relativo ζ , en la medida que la frecuencia natural w_n se incrementa.

La variación del kp no proporciona los medios para incrementar la velocidad de respuesta en el sistema, puesto que mantiene una atenuación σ constante, desde $kp = 0$ hasta $kp = \infty$.

Como consecuencia del lugar geométrico de las raíces [4-3](#), la optimización del kp respecto a un funcional dependiente del error no tiene sentido en este convertidor. Es evidente que al aumentar kp , las oscilaciones estarán presentes y serán de mayor intensidad; por lo tanto, el kp óptimo para este sistema será un $kp = 0$. Sin embargo, la acción proporcional mantiene su función de agilizar la adaptación en el sistema.

Debido a esta circunstancia, la aproximación desarrollada para a_0 dada en la expresión [2-38](#), no es aplicable para este convertidor, puesto que el τ_{cr} se presenta cuando $kp = \infty$ según el lugar geométrico de las raíces mostrado en la figura [4-3](#).

Por lo tanto, otra estrategia debe ser utilizada para hallar a_0 , y la más intuitiva es de forma manual. Esto es, observando la evolución de la condición de estimación, la cual es una aproximación de la derivada de la salida, y escogiendo un valor apropiado sobre el cual se realicen las estimaciones.

Esto se define de la siguiente manera:

El método para hallar la cota a_0 fallo por no conocer τ_{cr} (ver expresión [2-38](#)), por lo tanto, la única solución es hallar directamente la pendiente a , a partir de una prueba en lazo abierto. Esto se realiza excitando al sistema con un ciclo de trabajo fijo, en este caso del 50 %, luego se procede a observar la tasa de cambio de la salida del sistema (pendiente), con el fin de conocer bajo que valor se implementará mejor la condición de estimación [2-27](#). Escoger un ciclo de trabajo del 50 % o de cualquier otro valor es indiferente, puesto que el sistema presentará el mismo patrón de cambio por ser un sistema lineal.

Recordar que entre más pequeña sea a , más cercano el sistema estará en el estado estable. Lo importante en la selección de a , es asegurar que la dinámica de la pendiente del sistema atraviese el valor de a decreciendo, por lo menos más de una vez. Estos cruces aseguran las condiciones para realizar la estimación. En otras palabras, los cruces decreciendo en la dinámica, son los flancos de subida de la señal *Tramo* (ver expresión [2-28](#)).

Lo anterior se resume la figura [4-4](#), y la pendiente a es seleccionada con un valor de 0.03. Esta pendiente es utilizada en las simulaciones y en los resultados experimentales.

La constante kp seleccionada es de 0.4, y transformada para utilizarse con PWM es de $0.01T$ (ver tabla de transformación [2-1](#)). Este valor fue escogido para agilizar el proceso de adaptación, y no se incrementa más, para no correr el riesgo de saturar al sistema de control, y de inducir mayor oscilación como se aprecia en la figura [4-3](#).

4.2. Resultados vía Simulación

Las simulaciones para este convertidor se realizaron en *simulink*, puesto que proporciona una mejor aproximación del sistema real, y facilita el prototipado rápido en una tarjeta de desarrollo.

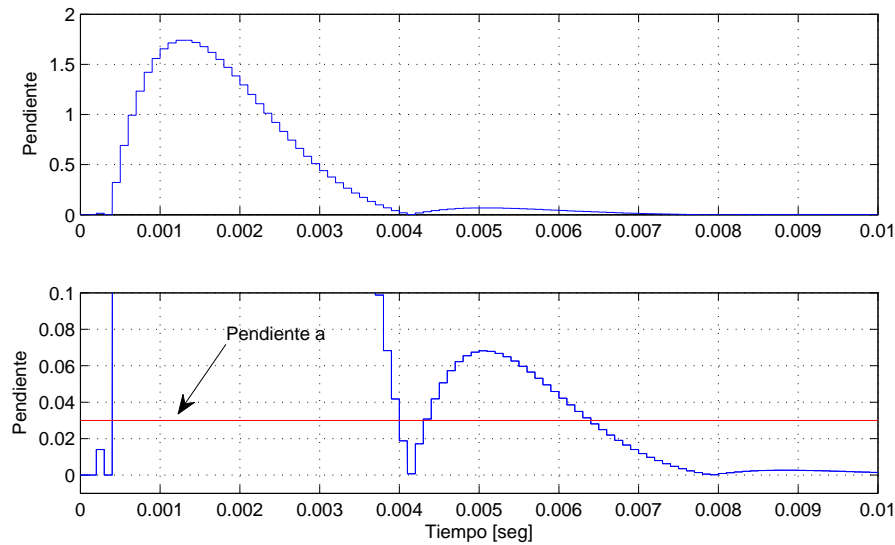


Figura 4-4.: Selección de la pendiente a vía manual

En la evaluación se tuvieron en cuenta las resistencias internas del convertidor, un periodo de atraso estimado T que impone la tarjeta para su funcionamiento, y los efectos de cuantización, 10 bits para la señal de control y 12 bits para tomar la muestra.

El sistema de control se aprecia en la figura 4-5.

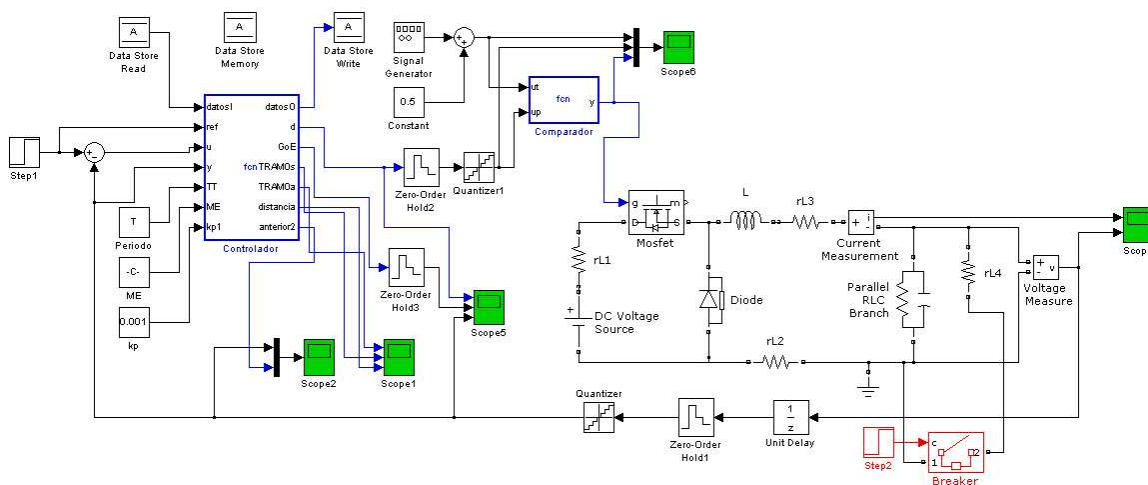


Figura 4-5.: Controlador PI' aplicado al convertidor *buck* en simulink

En las simulaciones dadas por las figuras 4-6, 4-7, 4-8, 4-9, 4-10, y 4-11, se ilustra el desempeño para los dos tipos de modulación PWML y PWM. Se observa que el esquema

de modulación PWMC induce menos amortiguación que PWML, debido al atraso del mismo. Sin embargo, proporciona menos inconvenientes en su aplicación real.

Las figuras 4-6 y 4-7 presentan la evolución del convertidor buck cuando se impone seguir una referencia de 32 voltios. Se presenta un buen desempeño y un error de regulación en estado estable muy cercano al 0%.

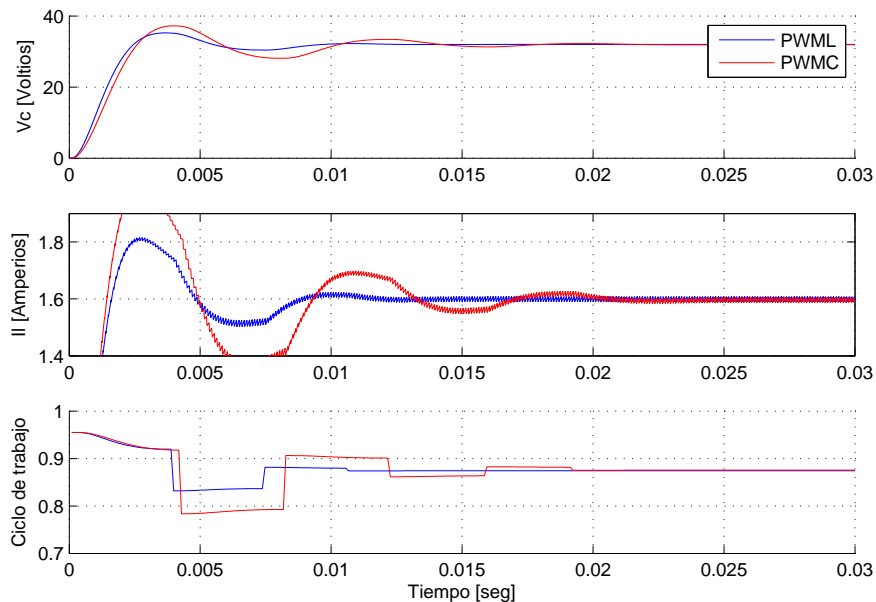


Figura 4-6.: Simulación para una referencia de 32 voltios

Las figuras 4-8 y 4-9 presentan la evolución del convertidor buck cuando se impone seguir una referencia de 20 voltios. Se presenta un buen desempeño y un error de regulación en estado estable muy cercano al 0%.

Para las figuras 4-10 y 4-11, se presenta el desempeño del controlador PI' frente un cambio de carga de 20Ω a 13.333Ω . Esta perturbación sucede a los 0.01 segundos, y se realiza ubicando en paralelo una resistencia de 40Ω con la salida del convertidor. Se presenta un buen desempeño y un error de regulación en estado estable muy cercano a 0%.

4.3. Resultados Experimentales

Los siguientes experimentos son realizados, usando el esquema de modulación PWMC.

Las figuras 4-12 y 4-13 presentan la evolución del convertidor buck cuando se impone seguir una referencia de 32 voltios. Se presenta un buen desempeño y un error de regulación en estado estable muy cercano al 0%. Sin embargo la evolución es más rápida que la versión simulada; indicando que el sistema real posee mayor atenuación σ que su contraparte.

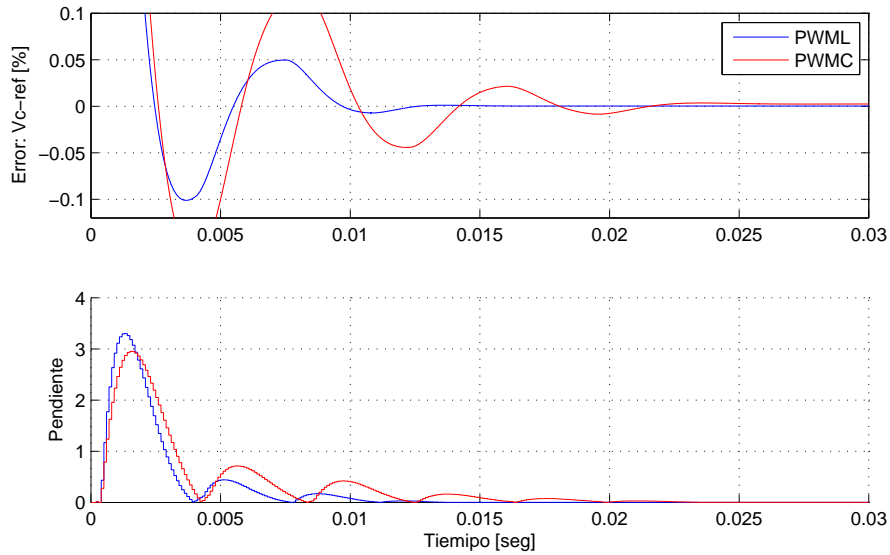


Figura 4-7.: Simulación para una referencia de 32 voltios

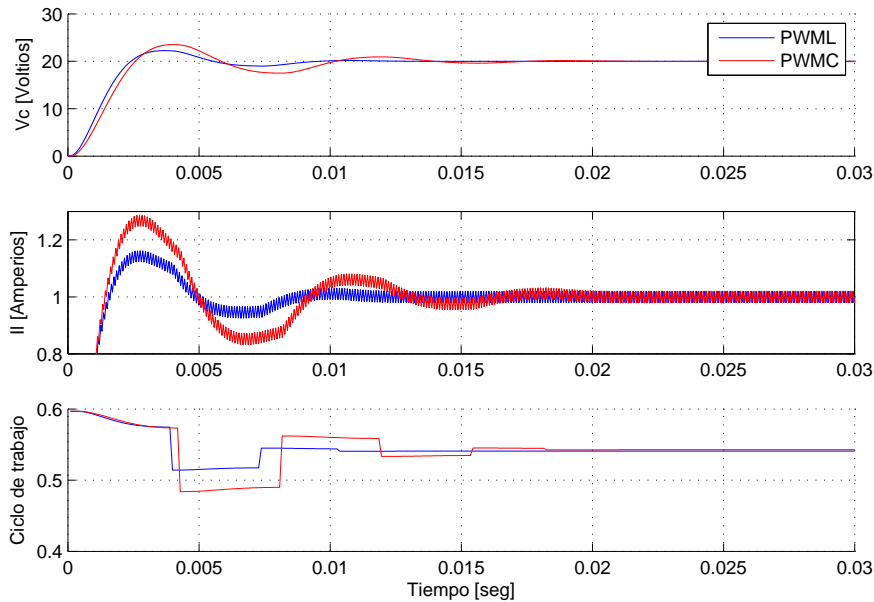


Figura 4-8.: Simulación para una referencia de 20 voltios

Las figuras 4-14 y 4-15 presentan la evolución del convertidor buck cuando se impone seguir una referencia de 20 voltios. El bulto agregado en el transitorio es debido a la estimación realizada en el valor máximo de V_c . Se presenta un buen desempeño y un error de regulación en estado estable muy cercano al 0 %.

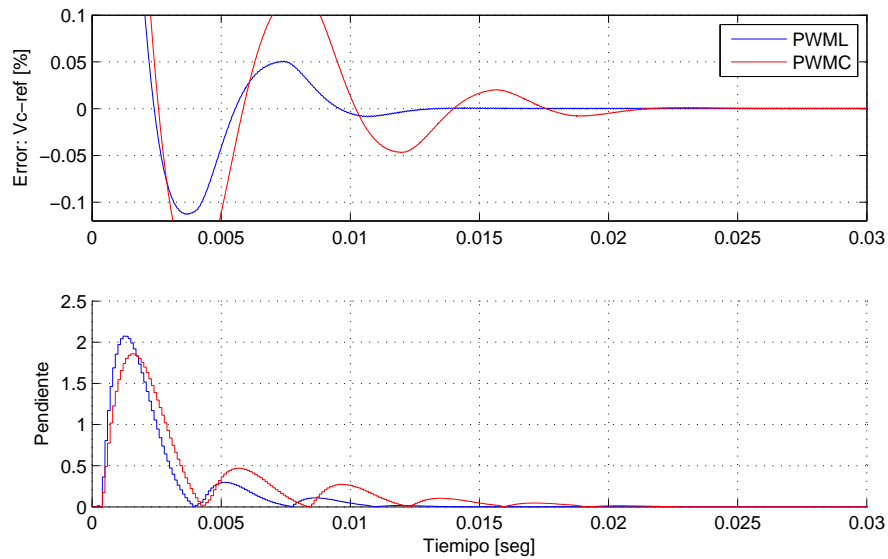


Figura 4-9.: Simulación para una referencia de 20 voltios

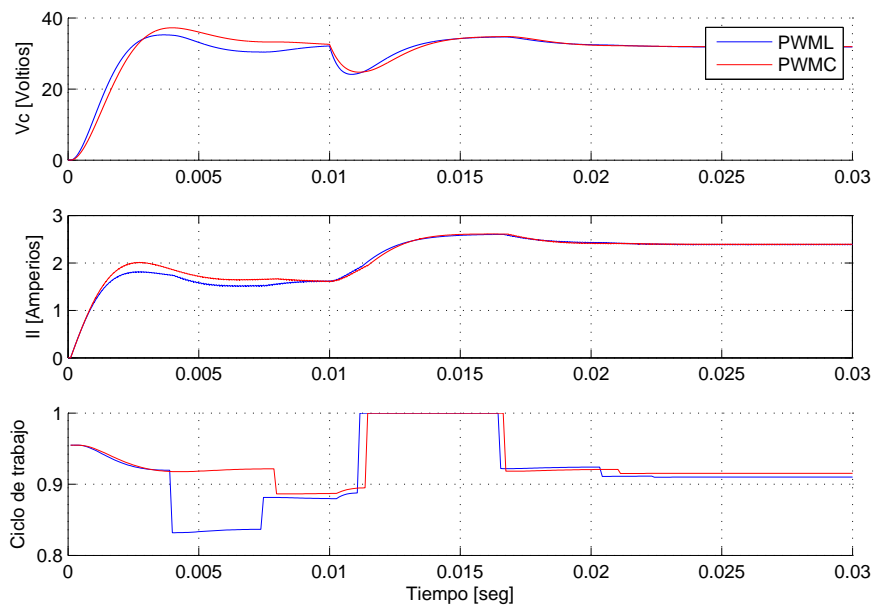


Figura 4-10.: Simulación ante cambios de carga R

Para las figuras 4-16 y 4-17, se presenta un cambio de carga de 25Ω a 20Ω . Esta perturbación sucede entre los 2.7 y los 2.75 segundos. En el transitorio se presentan unas oscilaciones indeseadas, puesto que no se dispuso de un mecanismo adecuado para conmutar las cargas.

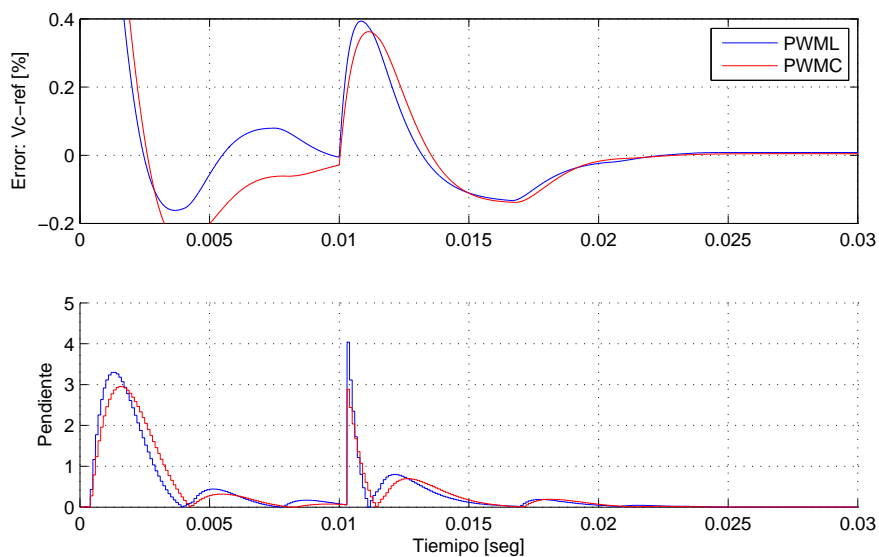


Figura 4-11.: Simulación ante cambios de carga R

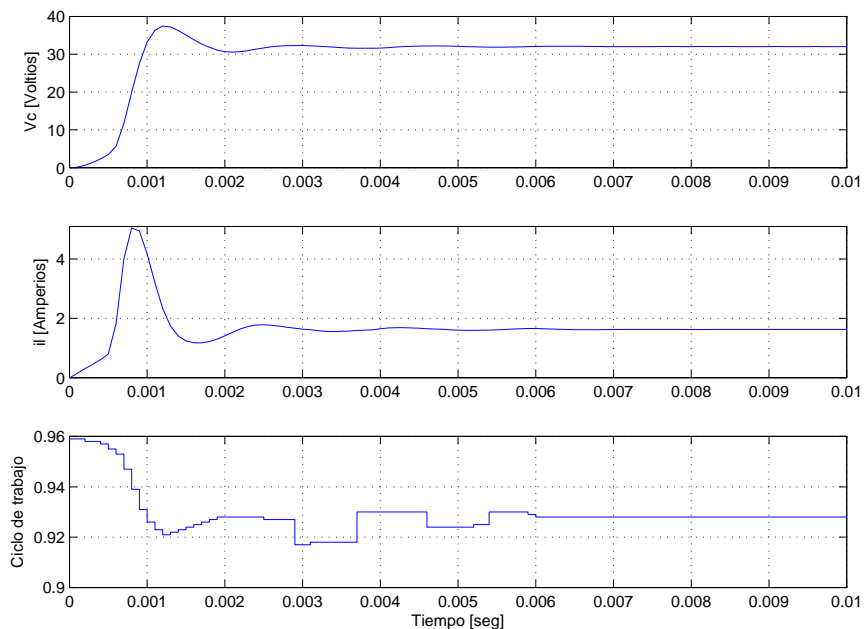


Figura 4-12.: Resultado experimental para una referencia de 32 voltios

En general, se presenta un buen desempeño en estado estable y un error de regulación muy cercano a 0 %.

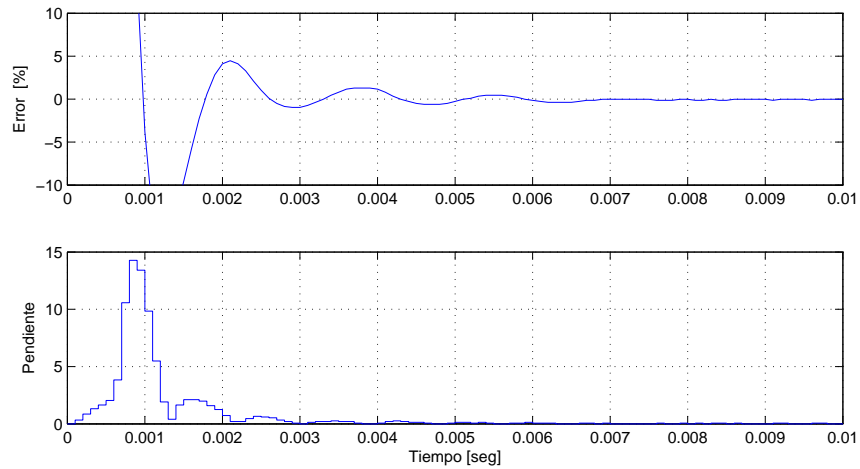


Figura 4-13.: Resultado experimental para una referencia de 32 voltios

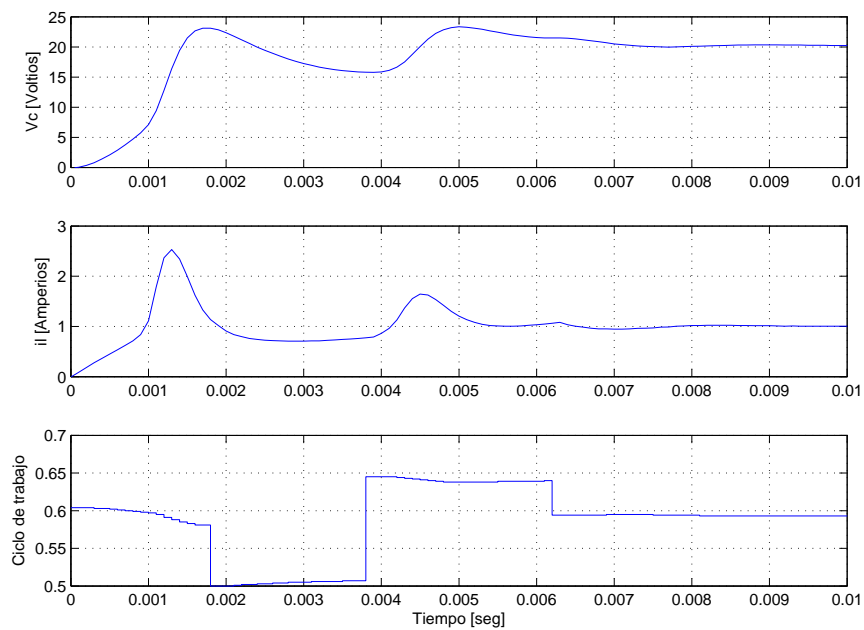


Figura 4-14.: Resultado experimental para una referencia de 20 voltios

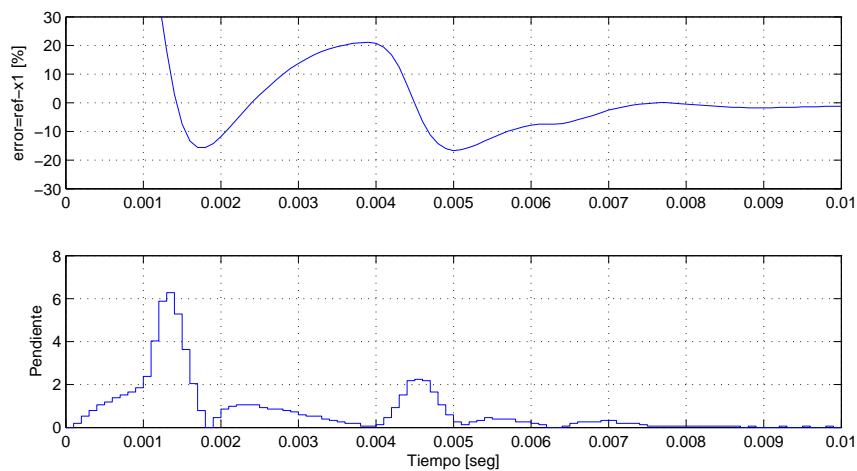


Figura 4-15.: Resultado experimental para una referencia de 20 voltios

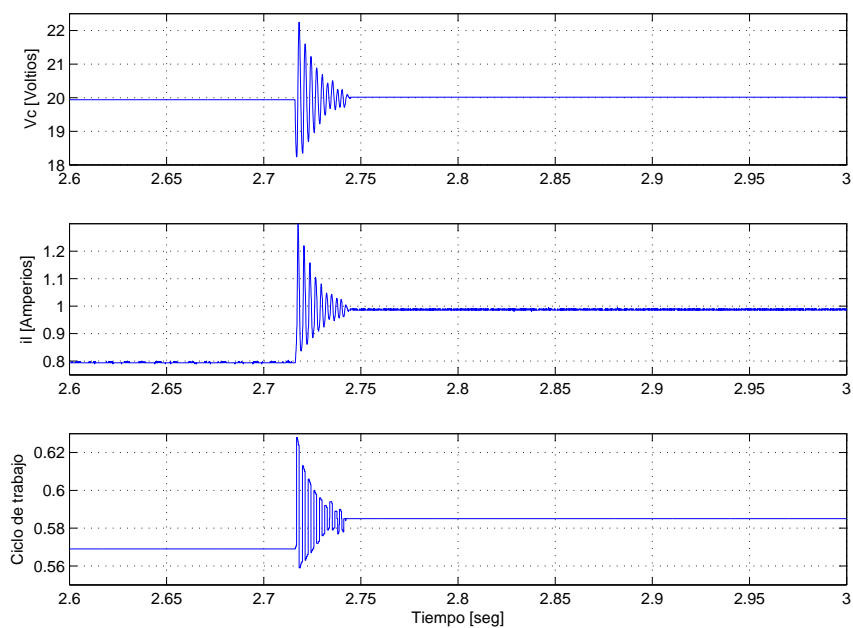


Figura 4-16.: Resultado experimental ante cambios de carga R

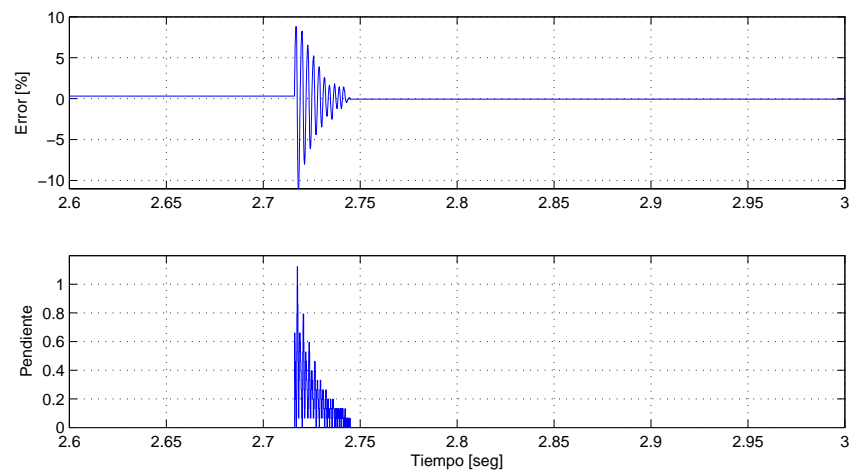


Figura 4-17.: Resultado experimental ante cambios de carga R

5. Contribuciones y Trabajo Futuro

5.1. Contribuciones

- Se diseña una nueva técnica de control alternativa a la técnica de control PI. Esta técnica desarrollada es fácil de implementar y sencilla de manipular. Simula la acción del control PI con mejores prestaciones (produce características *antiwindup*), y tiende a no inestabilizar el sistema. Esta técnica pretende preservar las características del control PI; teniendo en cuenta la idea de su funcionamiento. Este desarrollo tiene potencial aplicación industrial, como contribución en mejorar el desempeño de los sistemas de producción en Colombia, para pequeñas y medianas industrias.
- Como impacto en la comunidad científica, se espera aportar en el desarrollo y mejoramiento de las técnicas de control de uso industrial, utilizados en sistemas lineales de segundo orden, y que a nivel industrial se presenten las metodologías necesarias para que los ingenieros y los técnicos tomen esta alternativa para controlar sistemas lineales de segundo orden.
- A través de los diagramas de bifurcación dos-dimensionales, se desarrolla un primer mapa de sintonización para el controlador, aplicado a todos los sistemas lineales de orden dos. Esta guía de sintonización, ofrece en primera instancia las restricciones paramétricas que deben tomarse en cuenta, para asegurar que el sistema se establezca en la zona 1-T periódica; evitando que el sistema entre en alguna zona de caos y deteriore la vida útil del mismo.
- Se demuestra la relación que existe entre las dos discretizaciones inducidas en el sistema, cuando se implementa físicamente la técnica de control vía PWM y PAM. Estas discretizaciones son importantes, puesto que proporcionan un marco de referencia, para evaluar la dinámica del sistema; empleando la teoría de sistemas dinámicos. Además permite visualizar el sistema de control desde diferentes aproximaciones; siendo diferentes los sistemas resultantes, pero bajo cierta condición, los sistemas se hacen equivalentes.
- Se desarrollan varios métodos para realizar la estimación de la ganancia del sistema a frecuencia cero. Cada uno de ellos presenta sus propias características. El primero de ellos relaciona la salida del sistema con la referencia, y presenta acumulación de

energía. El segundo relaciona la salida del controlador con la salida del sistema. El tercer método es una mejora que se le hace tanto al primer como al segundo método, introduciendo una condición necesaria para poder hacer la estimación. Estos métodos son el núcleo del funcionamiento de la técnica de control propuesta.

5.2. Trabajo Futuro

Como trabajo futuro se tienen los siguientes puntos.

- Realizar una validación experimental más profunda de la técnica PI', utilizando entornos de desarrollo que permitan mayor control sobre los fenómenos involucrados, como es el caso de dispositivos FPGA y DSP. Inicialmente, experimentando con el convertidor *buck*, y luego empleando un motor DC.
- El problema de estimación del $G(0)$ no se cerró cuando se estableció el tercer método. Quedan puntos importantes por mejorar, como el mecanismo para hallar a_0 , puesto que la estrategia desarrollada para el cálculo de este parámetro, proporciona limitaciones según el sistema que se seleccione. Esta limitación está en el $\tau_c r$, debido a que no todos los sistemas lo poseen, por lo tanto el campo de aplicabilidad de la estrategia se ve reducido. Sin embargo, a_0 sigue siendo una cota, y su imprecisión no es muy crítica.
- Considerando el ruido que se presenta en la unidad de medición de un sistema de control, y teniendo en cuenta que el método 3 de estimación no está desarrollado para lidiar con estas perturbaciones, un mejor método será necesario. Una solución es desarrollar una técnica basada en el método directo de Lyapunov, puesto que proporciona información coherente acerca del estado de un sistema pese a sus perturbaciones.

Por lo tanto, continuando con estas ideas y utilizando las características proporcionadas por el método 3, la condición de estimación se reemplazaría por la región acotada del espacio de estados, y definida por la curva de nivel según la función de energía de Lyapunov.

Este posible método, traería consigo algunas ventajas, por un lado, aseguraría que el sistema solo realice la estimación cuando este cercano al estado estable, y por otro lado, si la medición contiene ruido, no afectaría la decisión de tomar la muestra. Esto es debido a que la decisión no estaría hecha sobre una pendiente entre muestras, sino sobre una función de energía del sistema.

- Queda abierto además el problema de cómo adaptar kp cuando suceda un cambio en la dinámica, pero considerando la versatilidad del PI en cuanto a su facilidad de uso, implementación y ajuste. Una opción es mediante la programación dinámica, área de las matemáticas que ha hecho grandes contribuciones a la teoría de optimización y el

control óptimo. Esta puede ser una manera de adecuar al control PI o PI', a los nuevos retos que la teoría de control automático afronta hoy en día.

- Continuar con la investigación de la técnica propuesta PI', para posibilitar su extensión a sistemas de estructura variable, y posiblemente en sistemas no-lineales. Es muy importante abordar estos sistemas, específicamente las máquinas eléctricas, puesto que la transformación energética que ocurre en el mundo, manifiesta un reto por mejorar el desempeño energético de estas máquinas.

A. Anexo: Optimización PI

El método usado para la optimización, es basado en el regulador cuadrático lineal, conocido como LQR [22], el cual posee la ventaja de proporcionar estabilidad en el sistema de control, si la planta es controlable.

En el dominio del tiempo continuo, el sistema de control es definido mediante la expresión A-1, así.

$$\ddot{y} + 5\dot{y} + (6 + kp)y + ki.kp.y = kp.\dot{r} + ki.kp.r \quad (\text{A-1})$$

Donde $r = r(t)$ es definido como una función escalón de amplitud a , definida en $t > 0$.

Realizando el siguiente cambio de variables, $e = r - y$, $\dot{e} = \dot{r} - \dot{y}$, $\ddot{e} = \ddot{r} - \ddot{y}$, $\ddot{\ddot{e}} = \ddot{\ddot{r}} - \ddot{\ddot{y}}$, y considerando $\dot{r}(0_+) = 0$, $\ddot{r}(0_+) = 0$, y $\ddot{\ddot{r}}(0_+) = 0$. Se obtiene la expresión A-2.

$$\ddot{\ddot{e}} + 5\ddot{e} + (6 + kp)\dot{e} + kp.ki.e = 0 \quad (\text{A-2})$$

Por simplicidad se cambia la notación del error e por la letra x . Se define $x_1 := e$, $x_2 := \dot{e}$, y $x_3 := \ddot{e}$.

Se lleva la ecuación diferencial A-2 al espacio de estados, y el campo vectorial resultante $\dot{x} = A_{ei}x$, es detallado en A-3.

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -kp.ki & -(6 + kp) & -5 \end{pmatrix}}_{A_{ei}} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \quad (\text{A-3})$$

Lo que se quiere minimizar, es la penalización incurrida por el error en el sistema. Por lo tanto, se pretende encontrar una ley de control $u(x) = ki.kp \int x_1 dt + kp.x_1$, que minimice el índice de desempeño A-4. Esto es definido en el siguiente funcional.

$$J(x_0, u(x)) = \int_{0_+}^{\infty} (e^2 + \alpha\dot{e}^2 + \beta\ddot{e}^2) dt = \int_{0_+}^{\infty} (x_1^2 + \alpha x_2^2 + \beta x_3^2) dt \quad (\text{A-4})$$

El funcional es definido como.

$$\begin{aligned} J : \zeta(I) \times R^2 &\rightarrow R \\ (u(x), x_0) &\mapsto J(u(x), x_0) \end{aligned} \tag{A-5}$$

En donde $\zeta(I)$ es el espacio de funciones definidas en el intervalo real I , es decir, donde se albergan todas las leyes de control posibles según el esquema de control $u(x) = ki.kp \int x_1 dt + kp.x_1$. En este caso I es un intervalo de tiempo.

El problema de optimización queda definido como.

$$J^*(x_0) = J(x_0, u^*) = \min_{u \in \zeta} \int_{0_+}^{\infty} (x_1^2 + \alpha x_2^2 + \beta x_3^2) dt \tag{A-6}$$

En donde $x_0 = x(0_+)$ es la condición inicial del sistema, u^* es la ley de control óptima, J^* es el valor mínimo del funcional. $\alpha > 0$ y $\beta > 0$, son pesos que se le dan a la rapidez del error y a la aceleración del error. Para la optimización del funcional A-6, se definen los siguientes pesos, $\alpha = 0.1$ y $\beta = 0.1$.

Escribiendo el funcional de forma matricial se obtiene.

$$J = \int_{0_+}^{\infty} x^T Q x dt, \quad Q = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \beta \end{pmatrix}}_{\text{Matriz Hermitiana}} \tag{A-7}$$

Hallando la primitiva de la integral, resulta.

$$-\frac{d}{dt} x^T P x = x^T Q x \tag{A-8}$$

Aplicando A-8, al funcional A-7, resulta.

$$J = \int_{0_+}^{\infty} -\frac{d}{dt} x^T P x dt = x(0_+)^T P x(0_+) - \underbrace{x(\infty)^T P x(\infty)}_{=0} \tag{A-9}$$

Por lo tanto, el funcional queda definido como una campo escalar.

$$J = x(0_+)^T P x(0_+) \quad (\text{A-10})$$

El término de la expresión A-9 tiende a cero, si y solo si A-3 es estable, o la función de lyapunov generada por A-8, tiene solución única y es positiva definida P . Esto es definido en la expresión A-11.

$$A_{ei}^T P + P A_{ei} = -Q \quad (\text{A-11})$$

La solución de la expresión A-11 es.

$$P = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} \end{pmatrix} \quad (\text{A-12})$$

En donde

$$p_{11} = -0.05 \frac{(ki^3 kp^3 + 5ki^2 kp^2 - 10ki.kp^2 + 190ki.kp + 50kp^2 + 600kp + 1800)}{ki.kp(-30 + ki.kp - 5kp)}$$

$$p_{12} = p_{21} = -0.05 \frac{(7ki^2 kp^2 + ki^2 kp^3 + 1500 + 250kp)}{ki.kp(-30 + ki.kp - 5kp)}$$

$$p_{13} = p_{31} = \frac{0.5}{ki.kp}$$

$$p_{22} = -0.05 \frac{(1250 + 77ki.kp + 5ki^2 kp^2 + 13ki.kp^2 + ki.kp^3)}{ki.kp(-30 + ki.kp - 5kp)}$$

$$p_{23} = p_{32} = -0.05 \frac{(ki^2 kp^2 + 5ki.kp + 250)}{ki.kp(-30 + ki.kp - 5kp)}$$

$$p_{33} = -0.05 \frac{(50 + 7ki.kp + ki.kp^2)}{ki.kp(-30 + ki.kp - 5kp)}$$

Se asumen condiciones iniciales dadas de la siguiente forma.

$$x_0 = \begin{pmatrix} e_0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^T, \text{ donde } e_0 \in [0, 2] \quad (\text{A-13})$$

Esta restricción se hace para que la optimización no dependa de la condición inicial. Además se acota e_0 a este intervalo, con el fin de obtener consistencia en el error máximo que puede presentarse en el sistema de prueba 3-1.

Reemplazando las expresiones A-13, y A-12 en A-10, se define el campo escalar J en la expresión A-14.

$$J = -0.05e_0^2 \frac{(ki^3kp^3 + 5ki^2kp^2 - 10ki.kp^2 + 190ki.kp + 50kp^2 + 600kp + 1800)}{ki.kp(-30 + ki.kp - 5kp)} \quad (\text{A-14})$$

Ahora la optimización es encontrar los máximos y los mínimos del campo escalar dado por A-14. Para ello se requiere.

$$\nabla J = \begin{pmatrix} \frac{\partial J}{\partial kp} & \frac{\partial J}{\partial ki} \end{pmatrix}^T = 0 \quad (\text{A-15})$$

$$\frac{\partial J}{\partial kp} = \frac{0.05e_0^2}{ki.kp^2(-30 + ki.kp - 5kp)^2} (54000 + 18000kp - 60ki^3kp^3 - 340ki^2kp^2 + 650ki.kp^2 + 1500kp^2 + ki^4kp^4 - 5ki^3kp^4 - 3600ki.kp) = 0 \quad (\text{A-16})$$

$$\frac{\partial J}{\partial ki} = \frac{0.05e_0^2}{ki^2.kp(-30 + ki.kp - 5kp)^2} (54000 + 27000kp - 60ki^3kp^3 - 340ki^2kp^2 - 1200ki.kp^2 + 4500kp^2 - 100ki.kp^3 - 15ki^2kp^3 + 250kp^3 + ki^4kp^4 - 10ki^3kp^4 - 3600ki.kp) = 0 \quad (\text{A-17})$$

Cuyas soluciones, son dadas en la tabla A-1. Se observa que para el conjunto de condiciones iniciales dadas en A-13, la optimización no dependerá de las condiciones iniciales escogidas x_0 . Esto se evidencia en las expresiones A-16 y A-17.

Las soluciones 1,2,4 y 5 de la tabla A-1, son descartadas, puesto que en el sistema de control, los valores de estos parámetros deben pertenecer a los números reales.

Para la solución 6, la solución A-12 pierde la calidad de ser positiva definida, por lo tanto no ofrece una solución estable.

Para la solución 3, la solución A-12 es positiva definida. Escoger estos valores de kp y ki permite minimizar el funcional, y define la ley de control u óptima.

Tabla A-1.: Soluciones Optimización PI

Solución	kp	ki
1	-6.5+3.122498999i	1.25-1.801441730i
2	-6.5-3.122498999i	1.25+1.801441730i
3	10.69423550	1.478496364
4	-9.16227766+11.53749899i	0.6674077165+0.8404259446i
5	-9.16227766-11.53749899i	0.6674077165-0.8404259446i
6	-16.36968018	-0.9658947595

Bibliografía

- [1] ANGULO, F.: *Análisis de la dinámica de convertidores electrónicos de potencia usando PWM basado en promediado cero de la dinámica del error (ZAD)*. Universidad Politécnica de Cataluña, 2004 [56](#)
- [2] ÅSTRÖM, Karl J. ; WITTENMARK, Bjorn: *Adaptive Control*. Second. Addison-Wesley Publishing Company, 1995. – ISBN 0–201–55866–1 [2](#), [4](#), [13](#)
- [3] ÅSTRÖM, Karl J. ; WITTENMARK, Bjorn: *Computer-Controlled Systems Theory and Design*. Lund Institute of Technology, 1997 [19](#), [26](#), [35](#), [64](#)
- [4] ÅSTRÖM, K.J.: Ziegler-Nichols auto tuners. En: *Report TFRT-3167 Dept. of Automatic Control Lund Institute of Technology* (1982) [4](#), [32](#)
- [5] ÅSTRÖM, K.J. ; HAGGLUND, T.: Automatic tuning of simpler regulators with specification on phase and amplitude margin. En: *Automatica* 20 (1983), Nr. 5, p. 645–651 [4](#), [5](#)
- [6] ÅSTRÖM, K.J. ; HAGGLUND, T.: Automatic tuning of PID controllers. En: *Instrument Society of America* (1988) [3](#)
- [7] ÅSTRÖM, K.J. ; HAGGLUND, T.: *PID Controllers: Theory and Design and Tuning*. Research Triangle Park, NC: ISA, 1995 [5](#), [38](#)
- [8] AYALA, U. ; BERNAL, M.E. ; MÉNDEZ, J.: Aspectos sobresalientes de la automatización industrial en Colombia y su impacto sobre el empleo. En: *Desarrollo y Sociedad* 20 (1987), p. 27–39 [1](#)
- [9] BRISTOL, E. H. ; INALOGLU, G. R. ; STEADMAN, J. F.: Adaptive process control by pattern recognition. En: *Instruments Contr. Syst* (1970), p. 101–105 [4](#), [32](#)
- [10] CAMERON, F. ; SEBORG, D.E.: A self tuning controller with a PID structure. En: *Int. J. Control* 38 (1983), Nr. 2, p. 831–835 [4](#)
- [11] CHOI, J-W ; LEE, S-C: Antiwindup strategy for pi-type speed controller. En: *IEEE Trans. Ind. Electron* 56 (2009), Nr. 6 [5](#), [40](#)

-
- [12] D.DOCHAIN ; MARQUARDT, W. ; WON, S. ; MALIK, O. ; KINNAERT, M.: Monitoring and control of process and power systems: Status report prepared by the IFAC Coordinatin Committee on Process and Power Systems. En: *Annual Reviews in Control* 30 (2006), p. 69–79 2
- [13] DHAOUADI, R. ; JAFARICONTROLLERS, R.: Adaptive pid neuro-controller for a nonlinear servomechanism. En: *IEEE Trans. Ind Electron* (2007) 3, 4
- [14] HAN, C.C ; LIM, C.C. ; SOON, S.H.: A new PID auto-tuner design based on correlation technique. En: *in Proc. 2nd Multinational Instrumentation Conf.(Beijing.China)*, 1986, p. 844–856 4
- [15] HAN, C.C ; SIN, K.K.: A comparative performance study of pid auto-tuners. En: *IEEE Trans, Control Systems* (1991), p. 41–47 4, 32
- [16] HANUS, R. ; KINNAERT, M. ; HENROTTE, J.L.: Conditioning technique, a general anti-windup and bumpless transfer method. En: *IEEE Trans. Ind. Electron* 23 (1987), Nr. 6, p. 729–739 5, 38
- [17] HODEL, A.S. ; HALL, C.E.: Variable-structure PID control to prevent integrator windup. En: *IEEE Trans. Ind. Electron* 48 (2001), Nr. 2, p. 442–451 4
- [18] JÄMSÄ-JOUNELA, S.-L.: Future trends in process automation. En: *Annual Reviews in Control* 31 (2007), p. 211–220 1, 2, 3
- [19] JERONYMO, C.E. ; YAMADA, H. ; MUTO, T.: Application of a unified predictive control to on-off ontrol of hydraulic system driven by fast-switching solenoid valves. En: *Japan Society of Mechanical Engineers* 39 (1996) 2
- [20] LEE, Jihong: On methods for improving performance of pi-type fuzzy logic controllers. En: *IEEE trans. on Fuzzy Systems* 1 (1993), Nr. 4 4
- [21] LI, W. ; ESKINAT, E. ; LUYBEN, L.: An improved autotune identification method. En: *Ind. Eng. Chem* 30 (1991), Nr. 7, p. 1530–1541 4
- [22] OGATA, Katsuhiko: *Modern Control Engineering. Third Edition*. Prentice Hall, 1998 35, 67, 70, 87
- [23] OHISHI, K. ; HAYASAKA, E. ; NAGANO, T. ; HARAKAWA, M. ; KANMACHI, T.: High-performance speed servo system considering voltage saturation of a vector-controlled induction motor. En: *IEEE Trans. Ind. Electron* 53 (2006), Nr. 3, p. 795–802 5
- [24] OHNISHI, K. ; UEDA, Y. ; MIYACHI, K.: Model reference adaptive system against rotor resistance variation in induction motor drive. En: *IEEE Trans. Ind Electron* 4 (1986), p. 217–223 3

-
- [25] OTT, E.: Chaos in Dynamical Systems. En: *NY: Cambridge Univ.Press* (1993) 52
- [26] PENG, Y. ; VRANCIC, D. ; HANUS, R.: Anti-windup bumpless and conditioned transfer techniques for PID controllers. En: *IEEE Control Syst. Mag* 16 (1996), Nr. 4, p. 48–57 4
- [27] RAD, A. B. ; LO, Wai L. ; TSANG, J. M.: Self-tuning pid controller using newton-raphson search method. En: *IEEE Trans. Industrial Electronics* 44 (1997), Nr. 5 4
- [28] R.BENSON: Process control—the future. En: *Computing & Control Engineering Journal* 8 (1997), p. 161–166 2
- [29] RICHALET, J. ; RAULT, A. ; TESTUD, J.L. ; PAPON, J.: Model predictive heuristic control: Applications to industrial processes. En: *Automatica* 14 (1978), p. 413–428 2
- [30] SCHROEDER, N.: Process automation markets in 2010. En: *Report. Intechno Consulting* (2003) 2
- [31] SEOK, J.-K.: Frequency-spectrum-based antiwindup compensator for PI controlled systems. En: *IEEE Trans. Ind. Electron* 53 (2006), Nr. 6, p. 1781–1790 5
- [32] SEOK, J.-K. ; KIM, K.-T. ; LEE, D.-C.: Automatic mode switching of P/PI speed control for industry servo drives using online spectrum analysis of torque command. En: *IEEE Trans. Ind. Electron* 54 (2007), Nr. 5, p. 2642–2647 5
- [33] SHIN, H-B.: New antiwindup pi controller for variable-speed motor drives. En: *IEEE Trans. Ind. Electron* 45 (1998), Nr. 3 5
- [34] STOUT, T.M. ; WILLIAMS, T.J.: Pioneering work in the field of computer process control. En: *Annals of the History of Computing, IEEE* 17 (1995), spring, Nr. 1, p. 6–18 3
- [35] TAKATSU, H. ; ITOH, T. ; ARAKI, M.: Future needs for the control theory in industries.report and topics of the control thechnology survey in japanese industry. En: *Jorunal of Process Control* 8 (1998), p. 369–374 1
- [36] TZOU, Y.Y.: DSP-based robust control of an AC induction servo drive for motion control. En: *IEEE Trans. Contr. Syst. Technol* 4 (1996), p. 614–626 3
- [37] VAUGHAN, N.D. ; GAMBLE, J.: Sliding mode control of a proportional solenoid valve. En: *Four Bath International Fluid Power Workshop, 1991* 2
- [38] VELASCO, Fredy Edimer H.: *Desarrollo de software y hardware para manejo de un convertidor DC-DC y DC-AC controlado con ZAD y FPIC*. Universidad Nacional de Colombia, 2009 72

-
- [39] XIA, C. ; XUE, M. ; CHEN, Z.: Adaptive pid control and on-line identification for switched reluctance motors based on bp neural network. En: *Proceeding of the IEEE international conference on mechatronics and automation. Niagara falls. Canada, 2005* [4](#)
- [40] ZIEGLER, J.G. ; NICHOLS, N.B.: Optimum settings for automatic controllers. En: *Trans. ASME* 65 (1942), p. 433–444 [4](#), [38](#)