

JORGE EDUARDO SALAZAR TRUJILLO

**RESISTENCIA DE MATERIALES  
BÁSICA PARA ESTUDIANTES  
DE INGENIERÍA**

UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA  
SEDE MANIZALES

I.S.B.N 978-958-8280-08-0

© 2007 UNIVERSIDAD NACIONAL  
DE COLOMBIA SEDE MANIZALES

**AUTOR:**

**JORGE EDUARDO SALAZAR TRUJILLO**  
Ingeniero Civil  
Profesor Asociado  
Universidad Nacional de Colombia  
Sede Manizales

**REVISADO:**

**LUIS EDGAR MORENO MONTOYA**  
Ingeniero Industrial  
Especialista en Planeamiento Educativo  
Profesor Asociado  
Universidad Nacional de Colombia  
Sede Manizales

**JOSÉ OSCAR JARAMILLO JIMÉNEZ**  
Ingeniero Civil  
Magíster Ingeniería Civil  
Especialista en Planeamiento Educativo  
Profesor Asociado  
Universidad Nacional de Colombia  
Sede Manizales

**IMPRESO:**

Centro de Publicaciones  
Universidad Nacional de Colombia  
Sede Manizales

Marzo de 2007  
Primera edición

# CONTENIDO

PRESENTACIÓN .....	7
CAPÍTULO 1	
INTRODUCCIÓN Y CONCEPTOS FUNDAMENTALES .....	9
1.1 PRINCIPIOS BÁSICOS DE LA RESISTENCIA DE MATERIALES .....	15
1.2 CONCEPTO DE ESFUERZO Y DEFORMACIÓN .....	17
1.3 TIPOS DE ESFUERZOS .....	18
1.3.1 Esfuerzos normales .....	18
1.3.2 Esfuerzo de aplastamiento o de apoyo .....	31
1.3.3 Deformaciones axiales .....	32
1.4 PROPIEDADES MECÁNICAS DE LOS MATERIALES .....	32
1.4.1 Relaciones esfuerzo-deformación .....	38
1.5 LEY DE HOOKE .....	39
1.5.1 Módulo de elasticidad, ductilidad, resistencia .....	40
1.5.2 Módulos de elasticidad de algunos materiales .....	41
1.6 ELASTICIDAD Y PLASTICIDAD .....	44
1.6.1 Factores de seguridad .....	45
1.7 ESFUERZOS CORTANTES .....	46
1.7.1 Deformaciones por corte .....	48
1.7.2 Ley de Hooke para corte .....	48
1.7.3 Módulo de corte de varios materiales .....	49
1.7.4 Esfuerzo cortante doble .....	49
1.7.5 Relación de Poisson .....	51
1.7.6 Relación entre el módulo de elasticidad y el módulo cortante .....	54
1.8 DEFORMACIONES EN ESTRUCTURAS CUYAS BARRAS ESTÁN SOMETIDAS A FUERZAS AXIALES .....	54
1.9 ESFUERZOS TÉRMICOS .....	57
1.9.1 Coeficientes de dilatación térmica .....	58
1.10 INDETERMINACIÓN ESTÁTICA EN TENSIÓN Y COMPRESIÓN .....	59
1.11 ENERGÍA DE DEFORMACIÓN AXIAL .....	71
CAPÍTULO 2	
ESFUERZOS BIAXIALES Y TRIAXIALES .....	75
Esfuerzos en secciones inclinadas .....	75
Esfuerzos complementarios: .....	77
2.1 LEY DE HOOKE EN DOS Y TRES DIMENSIONES .....	79

2.1.1 Ley de Hooke para esfuerzos biaxiales .....	80
2.1.2 Ley de Hooke para esfuerzos triaxiales .....	81
2.2 ESFUERZOS PRINCIPALES, ESFUERZO PLANO Y CÍRCULO DE MOHR, ESFUERZOS Y PLANOS PRINCIPALES .....	83
2.2.1 Construcción del círculo .....	87
CAPÍTULO 3	
ESFUERZOS PRODUCIDOS POR FLEXIÓN. VIGAS .....	101
Qué caracteriza una viga? .....	101
Cómo trabajan las vigas? .....	102
Los arcos y las cerchas .....	102
3.1 ESFUERZOS NORMALES PRODUCIDOS EN FLEXIÓN .....	106
3.1.1 Flexión pura .....	106
3.1.2 Cálculo de esfuerzos normales .....	108
3.2 FLEXIÓN TRANSVERSAL: ESFUERZOS CORTANTES PRODUCIDOS EN FLEXIÓN .....	121
3.2.1 Efecto de corte horizontal en vigas .....	121
3.3 VIGAS DE DOS MATERIALES .....	134
CAPÍTULO 4	
DEFORMACIONES EN VIGAS .....	145
Tipos de deformaciones .....	147
4.1 MÉTODO DE LA DOBLE INTEGRACIÓN .....	150
4.1.1 Funciones de singularidad .....	165
4.2 MÉTODO DEL ÁREA DE MOMENTOS (TEOREMAS DE MOHR) .....	172
4.3 MÉTODO DE LA VIGA CONJUGADA .....	188
4.4 INTRODUCCIÓN A LOS MÉTODOS DE ENERGÍA .....	197
4.5 VIGAS ESTÁTICAMENTE INDETERMINADAS .....	199
CAPÍTULO 5	
ESFUERZOS COMBINADOS .....	207
Flexo-tensión y flexo-compresión .....	209
Superposición de esfuerzos .....	211
CAPÍTULO 6	
COLUMNAS .....	227
6.1 FENÓMENO DEL PANDEO O INESTABILIDAD LATERAL .....	227
6.2 CARGA CRÍTICA .....	232
6.3 TEORÍA DE EULER .....	233
6.3.1 Cálculo del valor de la carga crítica .....	233
6.4 DIFERENTES CONDICIONES DE APOYOS .....	237
6.5 ESFUERZOS CRÍTICOS .....	240

6.6 CÓDIGOS .....	243
CAPÍTULO 7	
TORSIÓN .....	249
Elementos estructurales sometidos a torsión .....	249
7.1 ESFUERZOS Y DEFORMACIONES EN ELEMENTOS DE SECCIÓN CIRCULAR ..	250
7.2 INDETERMINACIÓN ESTÁTICA.....	261
7.3 TORSIÓN DE ELEMENTOS DE SECCIÓN RECTANGULAR .....	263
7.3.1 Esfuerzos y deformaciones en elementos de sección rectangular a torsión .....	263
7.4 TORSIÓN DE SECCIONES ABIERTAS .....	267
7.5 TORSIÓN DE TUBOS DE PARED DELGADA .....	269
REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS .....	273
Referencias de tablas .....	274
Referencias fotográficas y de gráficos .....	274

# PRESENTACIÓN

El presente "Texto de Resistencia de Materiales básica para estudiantes de ingeniería" elaborado durante el año sabático 2005-2006 tiene el objetivo de servir como ayuda didáctica a los estudiantes de ingeniería en los primeros semestres de estudio del área de la ingeniería estructural.

Consciente de la existencia de un sinnúmero de textos de Resistencia de Materiales (ver referencias), que tratan el tema de manera exhaustiva he querido preparar una guía de apoyo para dichos textos que haga énfasis en aspectos como los siguientes:

Presentación gráfica de las situaciones en tres dimensiones de tal manera que desde el principio del estudio de esta área los estudiantes tengan clara la ubicación de los elementos estructurales en un espacio tridimensional de tal forma que diferencien claramente aspectos como el eje longitudinal de una viga, su sección transversal y el eje neutro de la misma entre otros. Para hacer énfasis en esto me he basado en mi experiencia de casi 30 años como profesor de la asignatura, en los cuales he podido observar las dificultades que los estudiantes tienen al respecto.

Énfasis mediante gráficos y fotografías en el entendimiento del comportamiento mecánico de los elementos estructurales cuya comprensión considero previa a las formulaciones matemáticas y computacionales con los cuales se abordan estos problemas hoy en día. En mi experiencia docente he visto cuan útiles son la ayudas gráficas y las simulaciones hechas con elementos como tizas, resortes, plastilina o balso para explicar muchos conceptos y cómo los estudiantes han apreciado el empleo de estos recursos en las clases.

Con iguales propósitos didácticos, he procurado presentar la resolución de los diferentes problemas de manera similar a como lo haría en el tablero del aula de clase, partiendo de la expresión correspondiente a la incógnita buscada en cada caso y a partir de la misma ir encontrando los diferentes parámetros necesarios para su cálculo.

De esta forma, el cálculo de cada uno de los parámetros mencionados, adquiere sentido para el estudiante quien lo verá como un paso necesario y útil en la solución del problema en cuestión.

He tratado asimismo de ilustrar con fotografías, las diferentes situaciones tratadas en los capítulos del texto con fines similares a los ya expuestos.

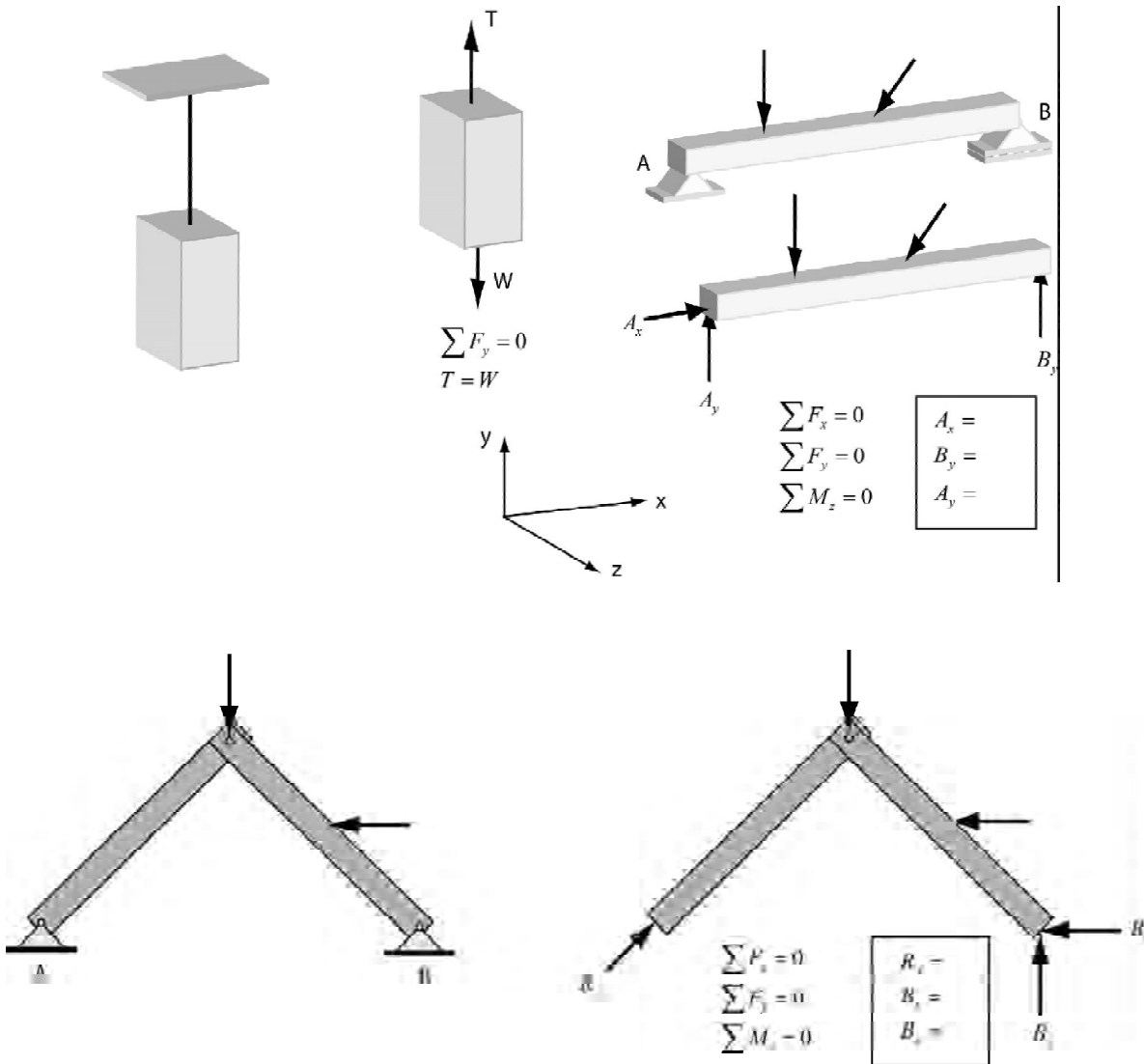
Espero finalmente como lo manifesté al principio, que el texto sea motivador para los estudiantes que se inician en el estudio del área de la ingeniería estructural y agradezco a las directivas de la Facultad de Ingeniería y Arquitectura de la Universidad Nacional de Colombia, Sede Manizales que con la aprobación del año sabático me hayan permitido hacerlo.

# CAPÍTULO 1

## INTRODUCCIÓN Y CONCEPTOS FUNDAMENTALES



En el curso de MECÁNICA se empezaron a estudiar los elementos estructurales y las estructuras desde el punto de vista del EQUILIBRIO ESTÁTICO externo, es decir de la QUIETUD en que deben estar para que cumplan su función. Se tenían por ejemplo las siguientes situaciones y se hacía un DIAGRAMA DE CUERPO LIBRE en el cual se ponían todas las fuerzas externas que actuaban sobre el mismo y a continuación se aplicaban las ecuaciones de equilibrio con el fin de encontrar las reacciones en los apoyos.



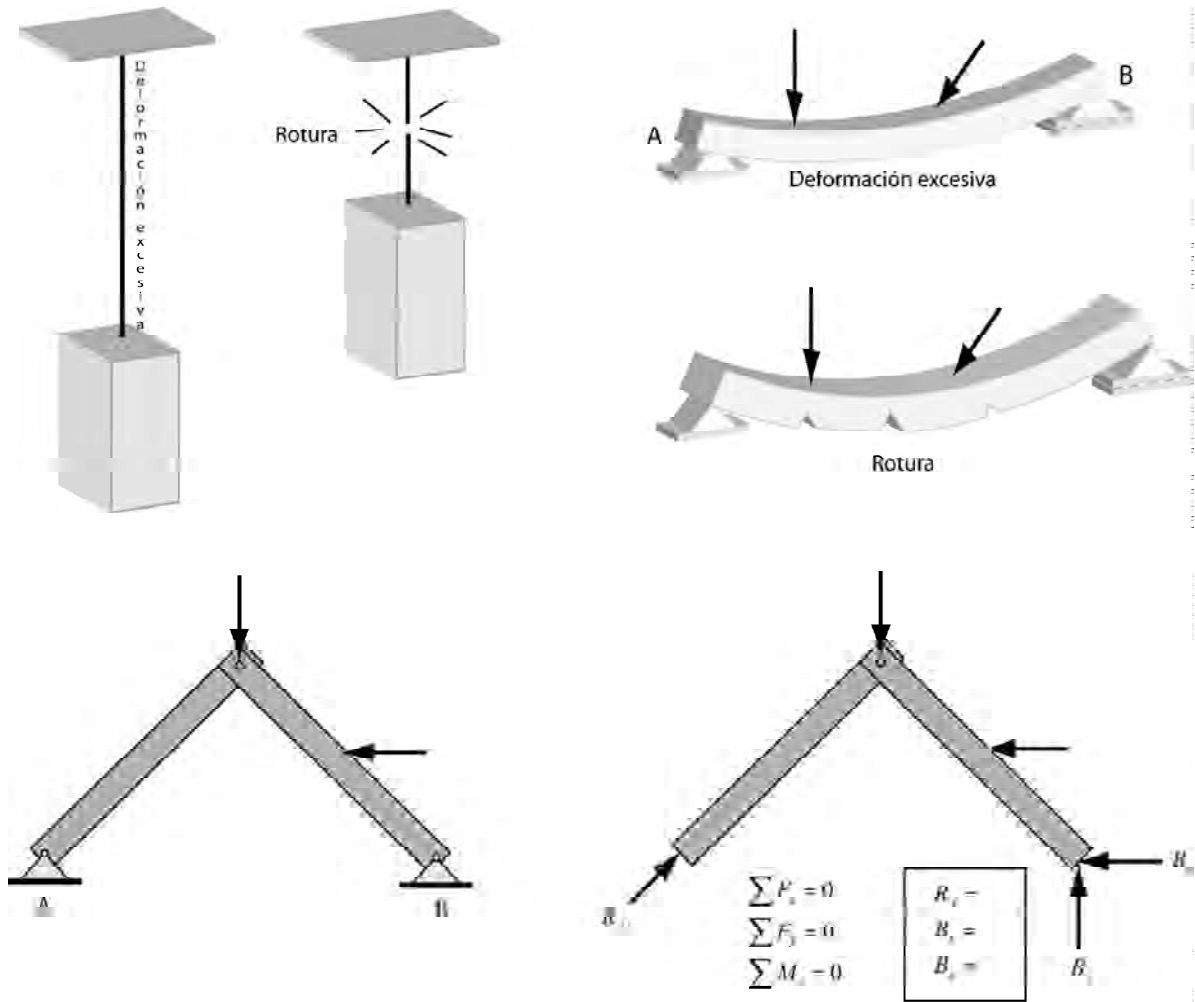
En los casos mostrados en la figura, las reacciones se calculan mediante la aplicación de las ecuaciones de equilibrio (suma de fuerzas igual a cero y suma de momentos igual a cero). Aunque el cálculo de las reacciones que garantizan el reposo es fundamental, éste es solo el primer paso en el proceso de análisis y diseño que en cada situación llevará a la definición del tipo de material, de la forma y de las dimensiones que harán que las estructuras sean seguras y funcionales.

- **Seguras** quiere decir que no se rompan.
- **Funcionales** quiere decir que no se deformen excesivamente afectando el servicio que prestan.

Estas dos condiciones, **RESISTENCIA** y **RIGIDEZ** deberán asegurarse para que las estructuras cumplan su fin.



Es claro que en las situaciones mostradas a continuación las estructuras pueden romperse o deformarse excesivamente.



Como puede verse, cualquiera de las dos situaciones (**Deformación excesiva o Rotura**) es inadmisibles.

Por lo tanto, el ingeniero debe asegurar con una buena probabilidad de éxito que las estructuras que construya sean **RÍGIDAS y RESISTENTES**.

De esto trata la **RESISTENCIA DE MATERIALES**. Debemos ser capaces de garantizar que las estructuras a construir no se deformen excesivamente y que no se fracturen.

Para hacerlo, es necesario que sepamos calcular las fuerzas internas que se producen en los elementos estructurales y que son en últimas las que producirán las deformaciones y la rotura.

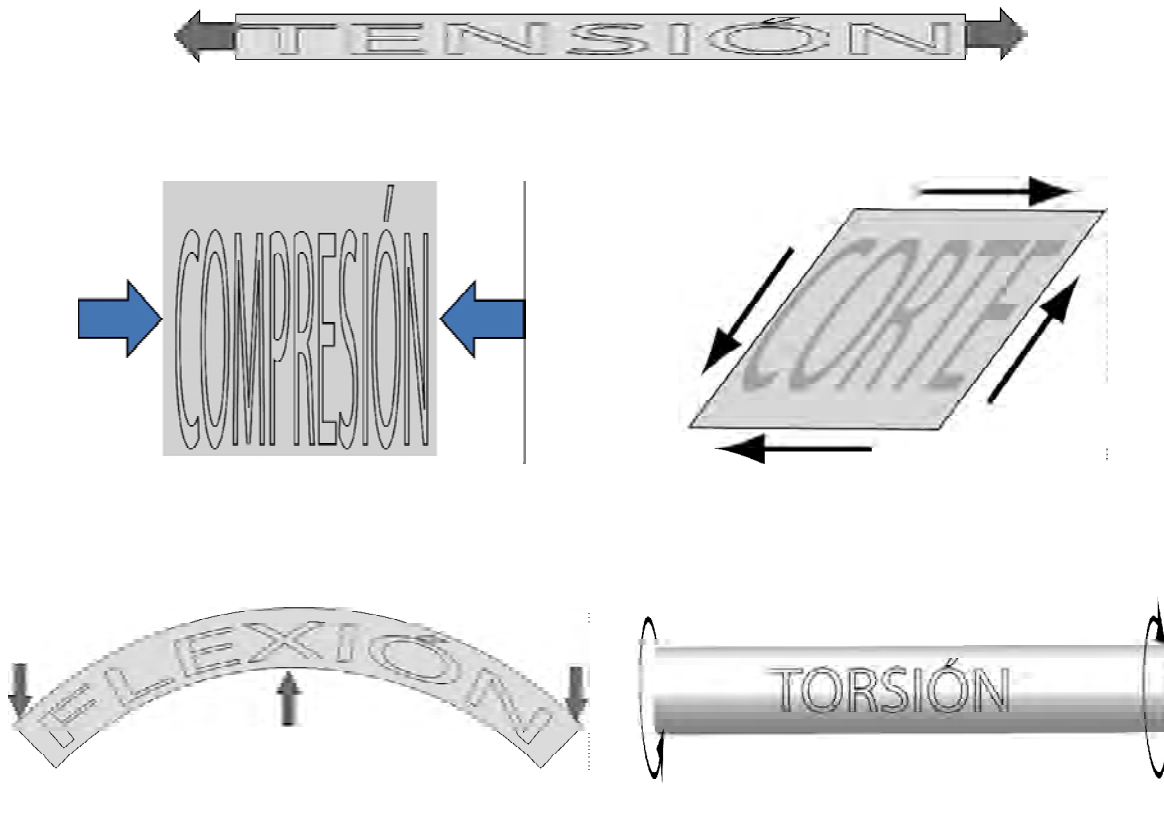
En general podemos afirmar que una fuerza interna produce un esfuerzo actuante que trata de romper el elemento. Que se rompa depende del **esfuerzo resistente** que tenga el elemento el cual dependerá del material y de sus dimensiones transversales.

Análogamente, esas mismas fuerzas internas producirán **deformaciones** del elemento las cuales dependerán igualmente del material y de sus dimensiones.

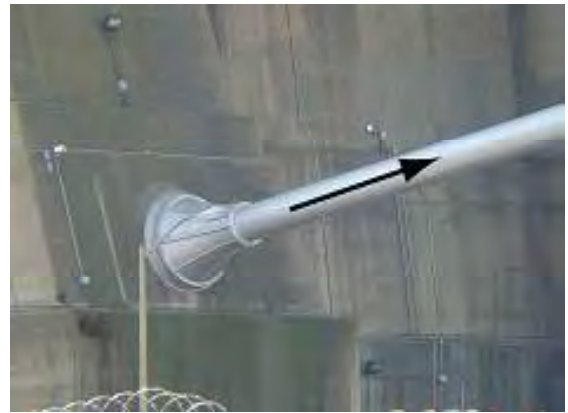
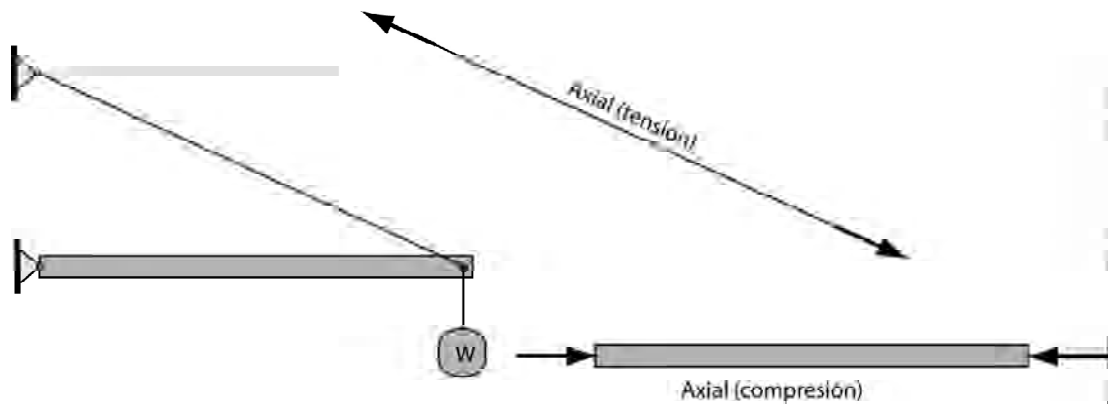
La Resistencia de Materiales se ocupa del cálculo de los esfuerzos y deformaciones que se producirán debiendo garantizar el ingeniero que las deformaciones estén dentro de unos límites permisibles y obviamente que no se produzcan roturas.

Los esfuerzos resistentes del material deben calcularse con el fin de poder compararlos con los esfuerzos actuantes. Estos esfuerzos dependen no solo de las dimensiones del elemento estructural sino de la forma como estén aplicadas las cargas las cuales pueden producir esfuerzos normales o cortantes dependiendo de que las fuerzas o momentos actuantes sean axiales, transversales o combinados.

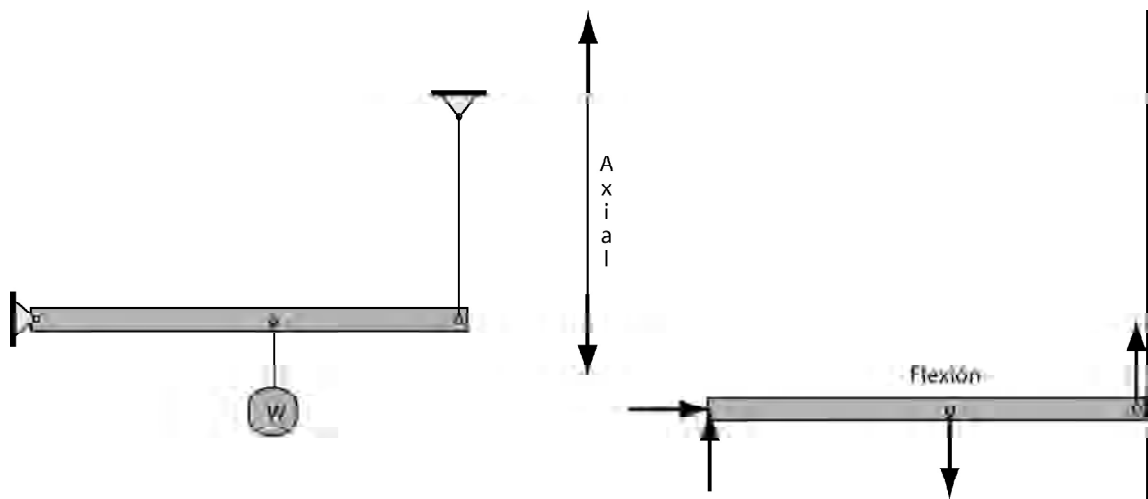
Debe por tanto determinarse primero que todo si el elemento en estudio está sometido a fuerzas axiales, transversales (en cuyo caso se producirá flexión), momentos torsionales (torsión) o una combinación de algunos de ellos.

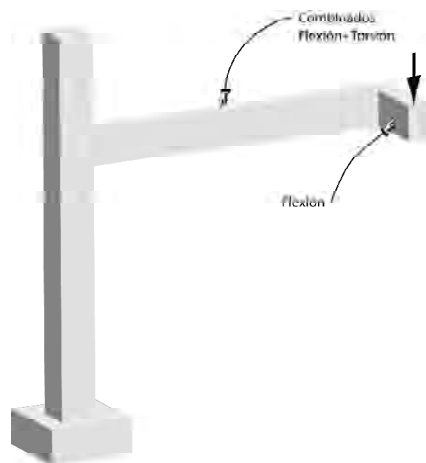
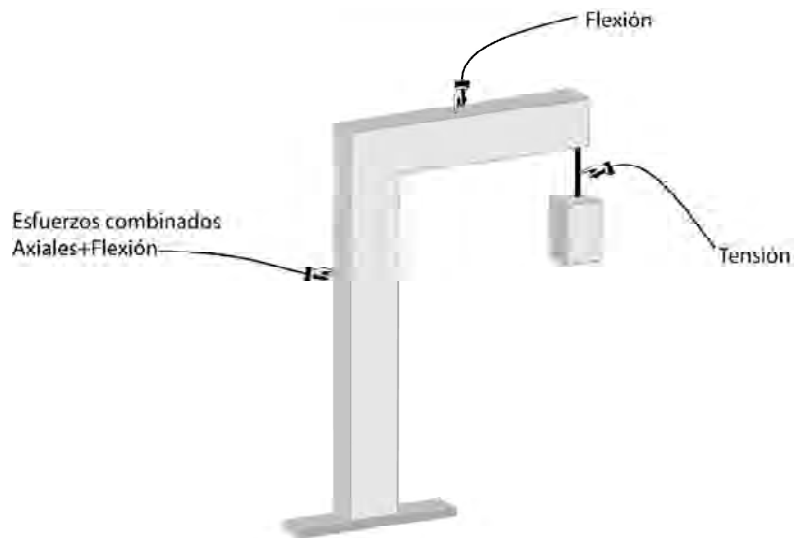
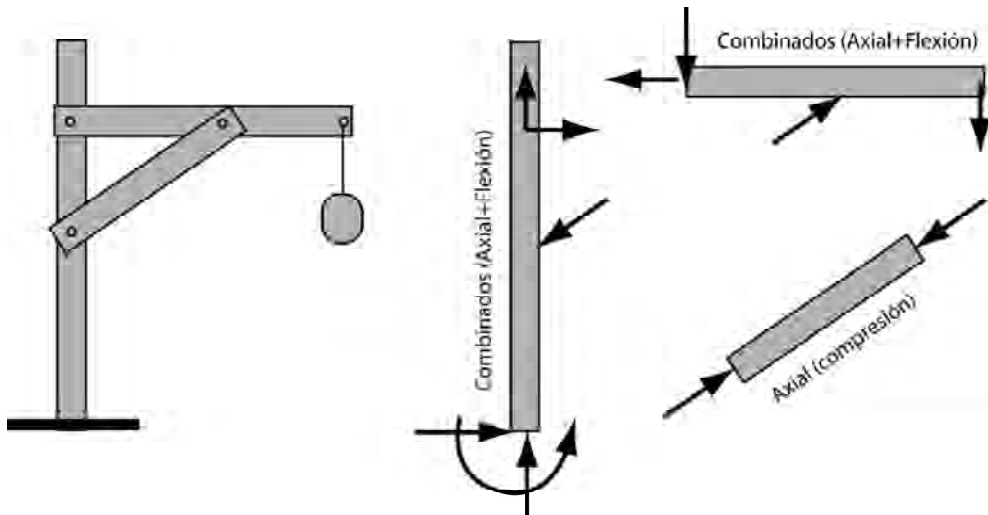


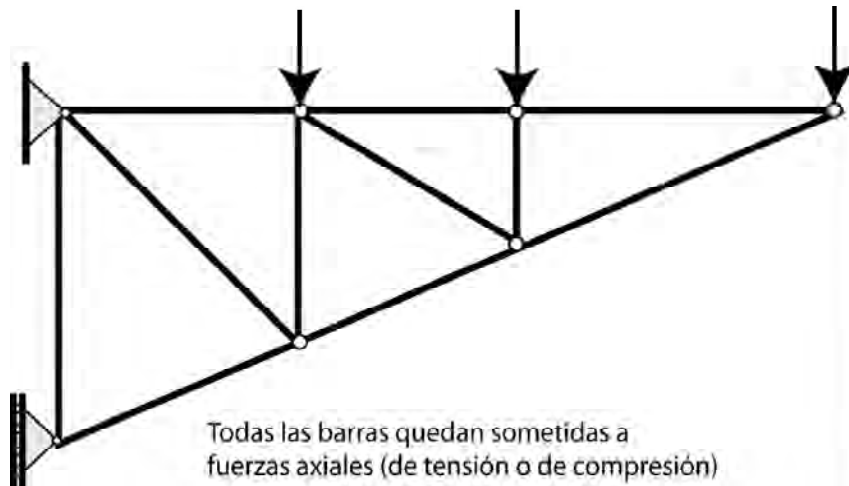
Veamos las siguientes situaciones:



CABLES DE ANCLAJE, PUENTE DE LA BAHÍA, SAN FRANCISCO, ESTADOS UNIDOS. 2005







Como se observa en las figuras anteriores, los elementos estructurales quedan sometidos a diferentes tipos de fuerzas (o sollicitaciones) dependiendo tanto de las acciones que se apliquen como de la conformación de cada estructura y del punto de aplicación de las fuerzas.

En cada situación por tanto, el cálculo de los esfuerzos actuantes será distinto.

En consecuencia, estudiaremos los esfuerzos y deformaciones producidos en elementos estructurales en los siguientes casos:

- Axiales
- Biaxiales
- Triaxiales
- Flexión
- Combinados
- Pandeo (caso particular de esfuerzo axial a compresión)
- Torsión

## 1.1 PRINCIPIOS BÁSICOS DE LA RESISTENCIA DE MATERIALES

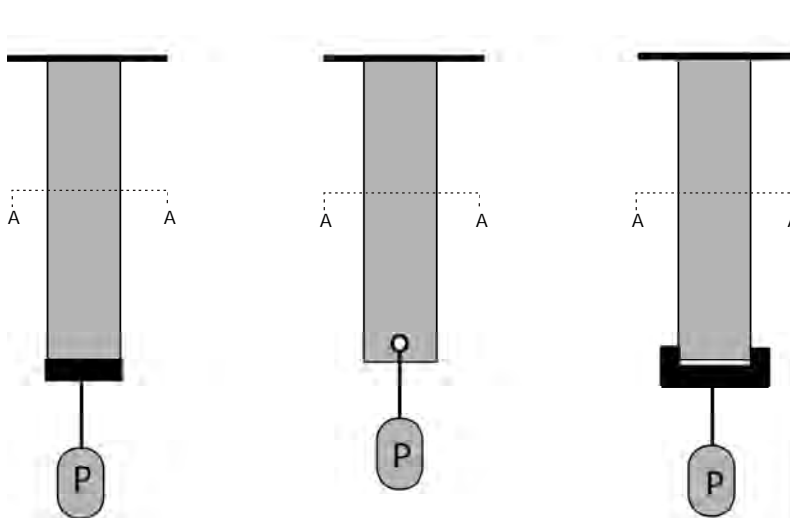
Como en cualquier materia, en la resistencia de materiales se aceptan de entrada unas hipótesis iniciales que sin afectar en su esencia los resultados de los temas de estudio simplifiquen el análisis que, de otra manera, se haría demasiado dispendioso.

Estos principios básicos son:

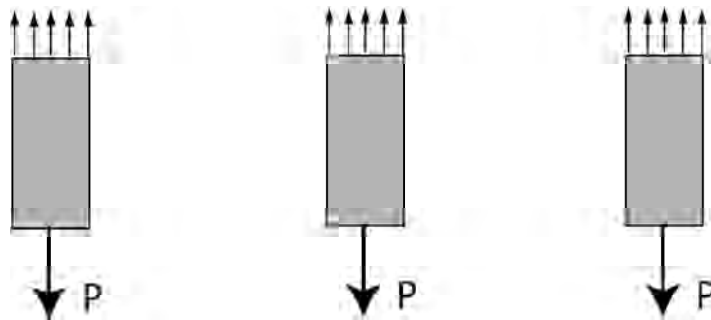
- Los materiales se consideran **homogéneos**: esto quiere decir que se hace caso omiso de las variaciones de composición que de punto a punto de los mismos tienen los materiales reales.

- Los materiales se consideran **contínuos**: tampoco se tienen en cuenta en los análisis las discontinuidades o poros que presentan los materiales. Piénsese en los casos de la madera y del concreto.
- Los materiales se consideran **isótropos**: significa que en los análisis generales no se tienen en cuenta las diferencias de propiedades en distintas direcciones del material. O sea que se supone que sus propiedades son iguales en todas las direcciones. (iso: igual, tropos: dirección).
- No se tienen en cuenta las **fuerzas internas de tipo interatómico** existentes en los materiales. Solo se consideran las fuerzas causadas por la aplicación de fuerzas externas.
- Principio de **superposición**: los efectos de un sistema de fuerzas sobre un elemento son iguales a la suma de los efectos individuales de cada una de las fuerzas. Es válido en el rango elástico lineal como se verá posteriormente.
- Principio de **Saint Venant** (científico francés): Cuando a un elemento estructural se le aplica una fuerza los esfuerzos que esta causa en puntos suficientemente alejados de ella no dependen de la forma concreta en que la carga es aplicada:

#### PRINCIPIO DE SAINT VENANT



Los esfuerzos internos en la sección A-A son iguales en los 3 casos independientemente de la forma como se cuelgue la carga

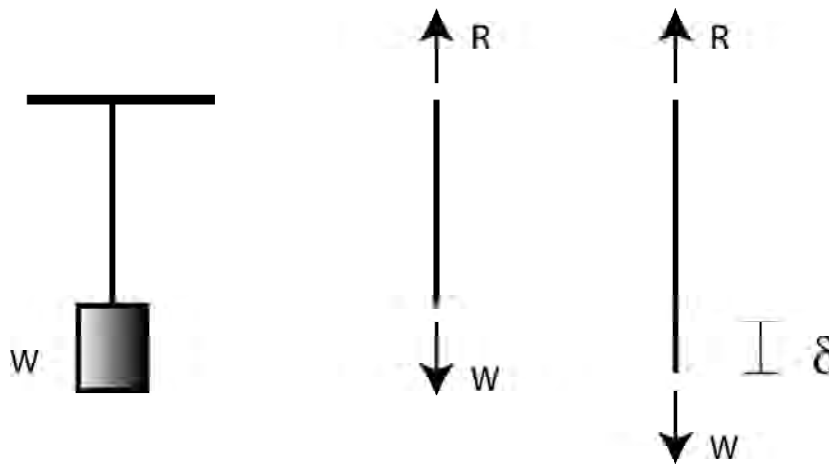


## 1.2 CONCEPTO DE ESFUERZO Y DEFORMACIÓN

Tal como se dejó establecido en el curso de Mecánica, en el análisis estático externo inicial no hay necesidad de considerar las deformaciones de los elementos estructurales (los cuerpos pueden considerarse rígidos) ni el tipo de material del cual están hechos pues estos factores usualmente no tienen incidencia en las reacciones generadas en los apoyos.

Si se tiene un objeto suspendido por un cable no habrá necesidad de considerar el alargamiento del cable para calcular su tensión. El diagrama de cuerpo libre del cable estará sometido a las mismas fuerzas considerándose o no el alargamiento.

Veamos:



Las fuerzas son las mismas ( $R$  y  $W$ ), independientemente que se considere o no el alargamiento  $\delta$

Como muestra el ejemplo, para hacer el análisis externo y calcular las reacciones no es necesario considerar las deformaciones y el tipo de material.

Sin embargo para avanzar en el **proceso de análisis y diseño** con el objetivo de definir finalmente las dimensiones y el tipo de material del cual deberán hacerse los elementos estructurales es necesario considerar las deformaciones que tendrán los elementos y la resistencia de los diferentes tipos de materiales.

Se hace indispensable entonces proceder a considerar las características de:

**RESISTENCIA (oposición a la rotura)**  
y  
**RIGIDEZ (oposición a las deformaciones)**

que tendrán los diferentes elementos estructurales.

En otros términos, antes de construir una estructura es necesario saber la resistencia que tendrá y las deformaciones que sufrirá. Lo anterior es apenas obvio si consideramos que cualquier estructura debe satisfacer unas exigencias mínimas de **seguridad** (resistencia) y de funcionalidad y estética (mínimas deformaciones).

Además cuando se presenten casos de **indeterminación estática** (que se estudiarán más adelante) se requiere contar con ecuaciones adicionales que usualmente surgen de la consideración de deformaciones.

Por las consideraciones anteriores, se hace necesario estudiar tanto los esfuerzos como las deformaciones que sufrirán los elementos sometidos a fuerzas, según se vio al final del curso de Mecánica.

### 1.3 TIPOS DE ESFUERZOS



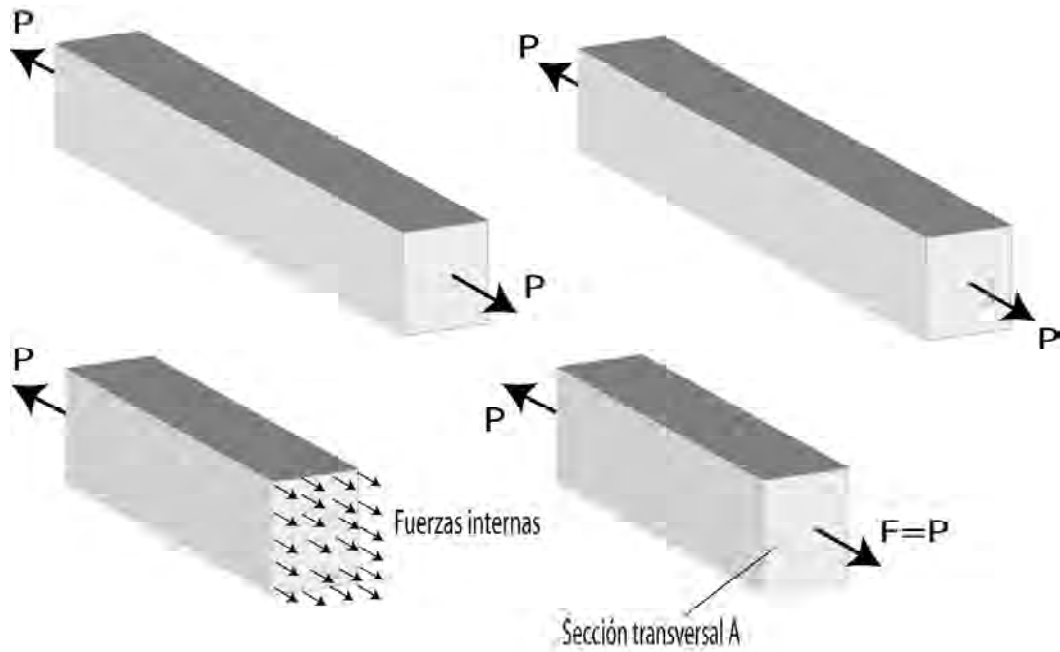
UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA, MANIZALES, CAMPUS LA NUBIA  
(Construcción de estructura metálica)

#### 1.3.1 Esfuerzos normales

Cuando una fuerza **P** actúa a lo largo de una barra su efecto sobre la misma depende no solo del material sino de la sección transversal que tenga la barra, de tal manera que a mayor sección mayor será la resistencia de la misma.

Se define entonces el **esfuerzo axial o normal** como la relación entre la fuerza aplicada y el área de la sección sobre la cual actúa. O en otros términos como la carga que actúa por unidad de área del material.





Esfuerzo normal:

$$\sigma = \frac{P}{A}$$

Siendo P: Fuerza axial  
A: Sección transversal

O a nivel diferencial:

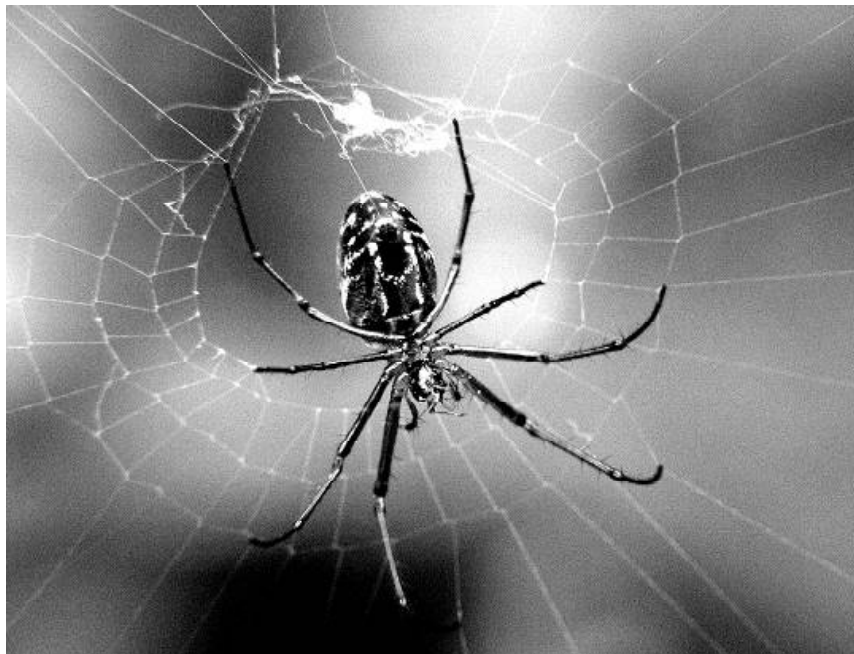
$$\sigma = \frac{dP}{dA}$$

Unidades del esfuerzo normal:

Esfuerzo $\sigma$ :	$\frac{F}{L^2}$	$\frac{Kg}{cm^2}$	$\frac{lb}{in^2} : psi$	$\frac{N}{m^2} : Pascal$
		MKS	Inglés	Sistema internacional



CABLES SOMETIDOS A TENSIÓN. PUENTE DE BROOKLYN, NUEVA YORK, 2005



HILOS DE UNA TELARAÑA SOMETIDOS A TENSIÓN



SECCIÓN TRANSVERSAL DE UNO DE LOS CABLES PRINCIPALES DEL PUENTE GOLDEN GATE EN SAN FRANCISCO. NÓTESE EL GRAN DIÁMETRO (92.4CM) DE UNO DE LOS CABLES PRINCIPALES CON LO CUAL SE GARANTIZA UN ÁREA SUFICIENTEMENTE GRANDE PARA DISMINUIR EL ESFUERZO ACTUANTE Y AUMENTAR LA SEGURIDAD DEL PUENTE.



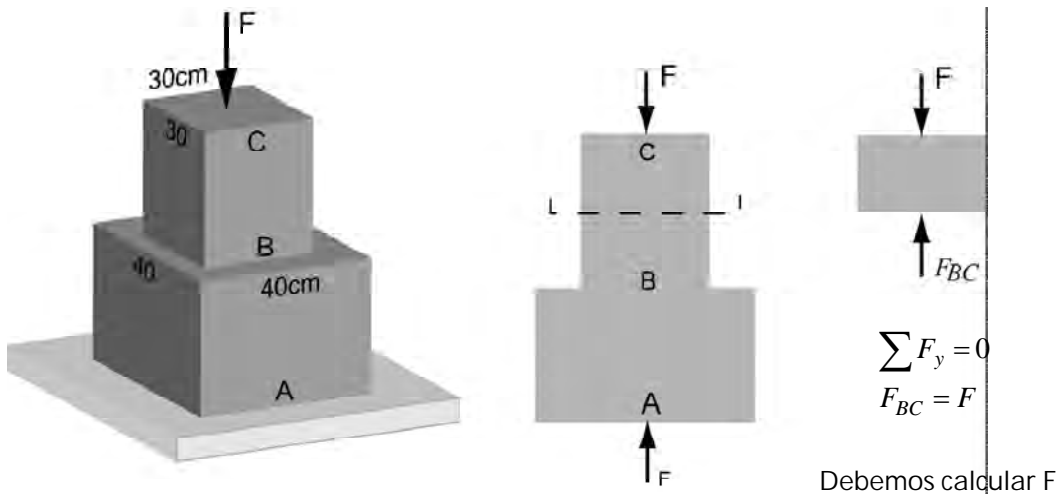
COLUMNA A COMPRESIÓN, CAMPUS LA NUBIA, UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA, MANIZALES

## PROBLEMA

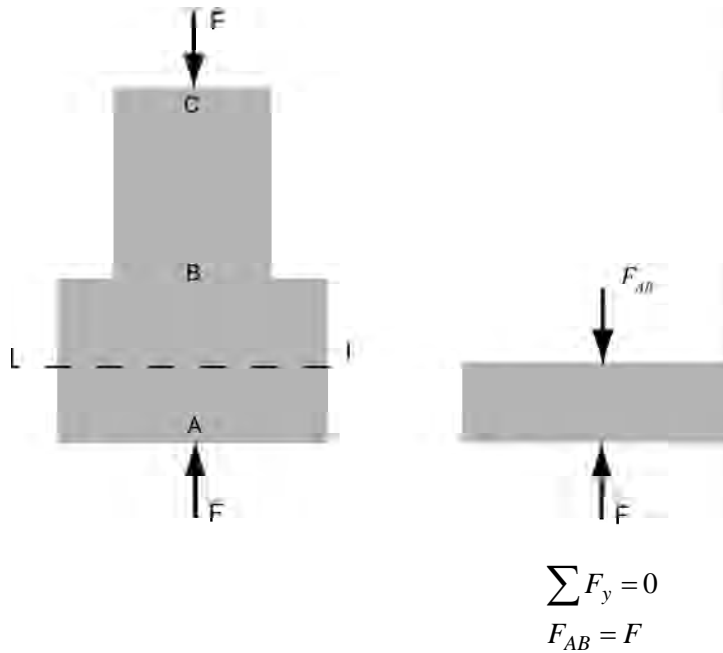
Sabiendo que el esfuerzo normal actuante en el tramo AB (cuya sección es de 40x40cm) es de 48 KPa calcular el esfuerzo correspondiente en el tramo BC (cuya sección es de 30x30cm)

$$\sigma_{BC} = \frac{F_{BC}}{A_{BC}} = \frac{F_{BC}}{0.3 \times 0.3 m^2} = \frac{F_{BC}}{0.09 m^2}$$

Debemos calcular por tanto el valor de  $F_{BC}$



Calculamos F:



Pero en el enunciado del problema se establece que:  $\sigma_{AB} = 48KPa$

$$\text{Por tanto: } \sigma_{AB} = 48KPa = \frac{F_{AB}}{A_{AB}} = \frac{F}{0.4 \times 0.4m^2} = \frac{F}{0.16m^2}$$

$$F = 48KPa \times 0.16m^2 = 48KN / m^2 \times 0.16m^2 = 7.68KN$$

Al principio habíamos encontrado que  $F_{BC} = F$

Entonces:  $F_{BC} = 7.68KN$

$$\text{Y finalmente: } \sigma_{BC} = \frac{F_{BC}}{0.09m^2} = \frac{7.68KN}{0.09m^2} = 85.33KPa$$

## **PROBLEMA**

Se tiene un muro sometido a una carga de 13000 Kg por metro de longitud y soportado por una cimentación de concreto la cual a la vez se apoya sobre el suelo. Calcular los esfuerzos actuantes en el muro, la cimentación y el suelo y compararlos con los esfuerzos admisibles de los tres elementos que son los siguientes:

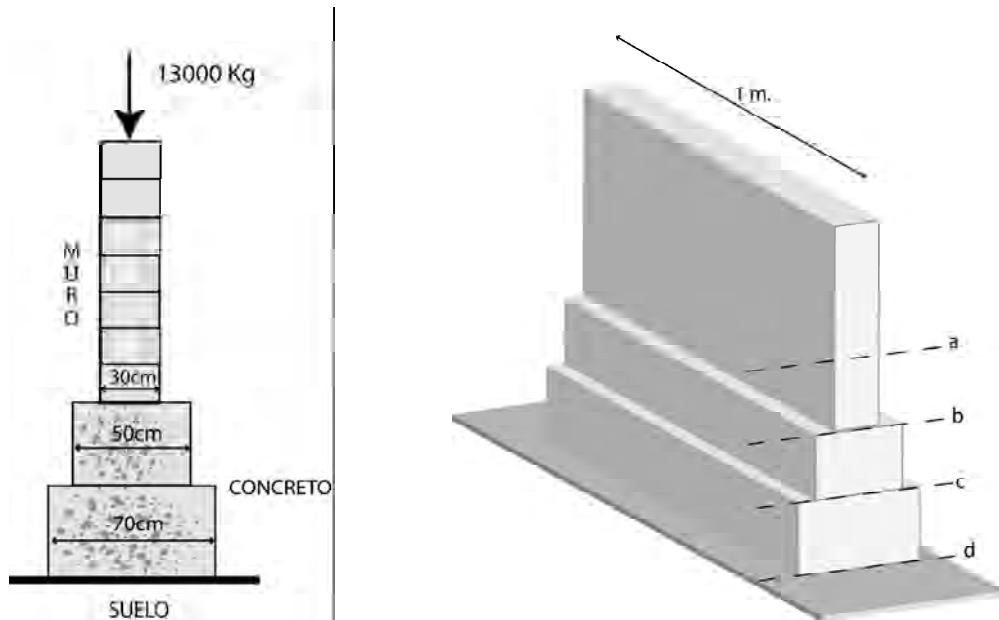
$$\sigma_{admissibleMURO} = 40Kg / cm^2 = 40 \frac{Kg}{cm^2} \times \frac{9.8N}{1Kg} \times \frac{10^4 cm^2}{m^2} = 392 \times 10^4 \frac{N}{m^2} = 3920KPa = 3.92 MPa$$

$$\sigma_{admissibleCIMENTACION-CONCRETO} = 4.83MPa$$

$$\sigma_{admissibleSUELO} = 380KPa = 0.38MPa$$

Para simplificar el problema no consideremos los pesos propios del muro y del concreto.

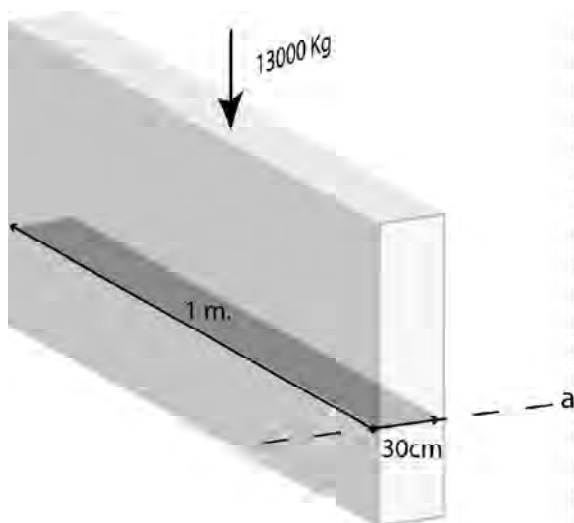
Para el análisis consideremos un tramo de muro de un metro de longitud.



Calculemos los esfuerzos actuantes en los niveles a, b, c y d:

En el nivel a:

$$\sigma_{actuante-a} = \sigma_{actuante-MURO} = \frac{F}{A} = \frac{13000 \text{ Kg}}{1 \times 0.3 \text{ m}^2} = 43333.33 \frac{\text{Kg}}{\text{m}^2} \times \frac{9.8 \text{ N}}{1 \text{ Kg}} = 424666.7 \text{ Pa} = 424.7 \text{ KPa}$$



Como  $\sigma_{admisibleMURO} = 3920 \text{ KPa}$

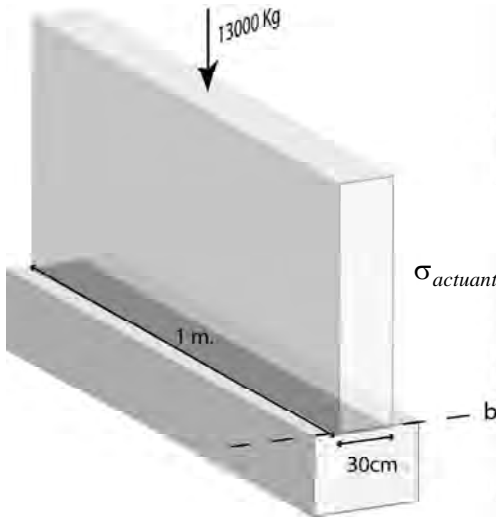
Entonces:

$$\sigma_{actuante-MURO} < \sigma_{admisibleMURO}$$

El muro es seguro

En el nivel b:

$$\sigma_{actuante-b} = \sigma_{actuante-CONCRETO} = \frac{F}{A} = \frac{13000 \text{ Kg}}{1 \times 0.3 \text{ m}^2} = 43333.33 \frac{\text{Kg}}{\text{m}^2} \times \frac{9.8 \text{ N}}{1 \text{ Kg}} = 424666.7 \text{ Pa} = 424.7 \text{ KPa}$$



Como

$$\sigma_{admisibleCIMENTACION-CONCRETO} = 483 \text{ MPa} = 4830 \text{ KPa}$$

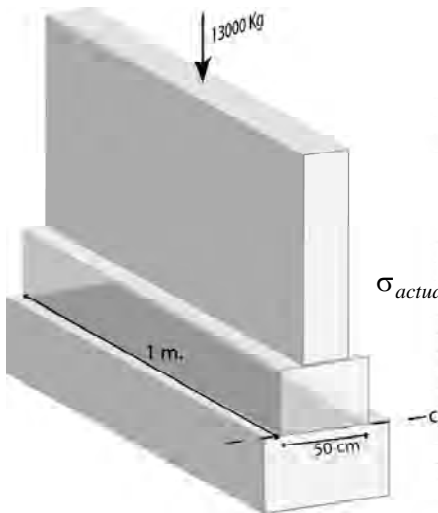
Entonces:

$$\sigma_{actuante-CIMENTACION-CONCRETO} < \sigma_{admisibleCIMENTACION-CONCRETO}$$

La cimentación es segura en el nivel b

En el nivel c:

$$\sigma_{actuante-c} = \sigma_{actuante-CONCRETO} = \frac{F}{A} = \frac{13000 \text{ Kg}}{1 \times 0.5 \text{ m}^2} = 26000 \frac{\text{Kg}}{\text{m}^2} \times \frac{9.8 \text{ N}}{1 \text{ Kg}} = 254800 \text{ Pa} = 254.8 \text{ KPa}$$



Como

$$\sigma_{admisibleCIMENTACION-CONCRETO} = 483 \text{ MPa} = 4830 \text{ KPa}$$

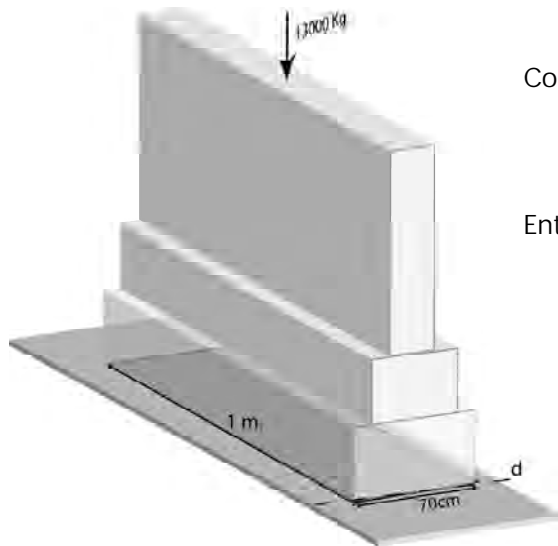
Entonces

$$\sigma_{actuante-CIMENTACION-CONCRETO} < \sigma_{admisibleCIMENTACION-CONCRETO}$$

La cimentación es segura en el nivel c

En el nivel d:

$$\sigma_{actuante-d} = \sigma_{actuante-SUELO} = \frac{F}{A} = \frac{13000 \text{ Kg}}{1 \times 0.7 \text{ m}^2} = 18571.43 \frac{\text{Kg}}{\text{m}^2} \times \frac{9.8 \text{ N}}{1 \text{ Kg}} = 182000 \text{ Pa} = 182 \text{ KPa}$$



Como

$$\sigma_{admissibleSUELO} = 380 \text{ KPa}$$

Entonces

$$\sigma_{actuante-SUELO} < \sigma_{admissibleSUELO}$$

La cimentación también es segura a nivel del suelo

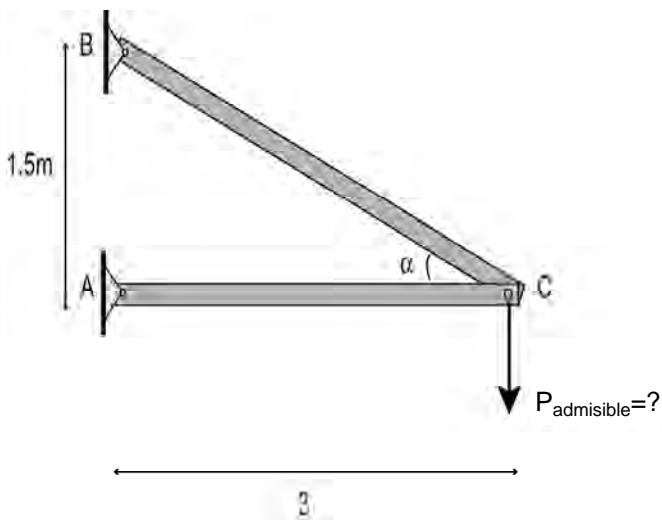
## PROBLEMA

Calcular el valor de la fuerza admisible que puede aplicarse a la estructura sabiendo que los esfuerzos admisibles del material son los siguientes:

$$\sigma_{admissibleTENSION} = 1400 \text{ Kg} / \text{cm}^2$$

$$800 \text{ Kg} / \text{cm}^2$$

cciones transversales de 5x2 cm.



La barra BC está a tensión y la barra AC a compresión. Por lo tanto la condición que debe cumplirse es que el esfuerzo en BC no sobrepase un valor de 1400 Kg/cm<sup>2</sup> y que el esfuerzo en AC no sobrepase un valor de 800 Kg/cm<sup>2</sup>.

En otros términos:



$$\sigma_{actuanteBC} \leq \sigma_{admisibleTENSION} = 1400Kg / cm^2$$

$$\sigma_{actuanteAC} \leq \sigma_{admisibleCOMPRESION} = 800Kg / cm^2$$

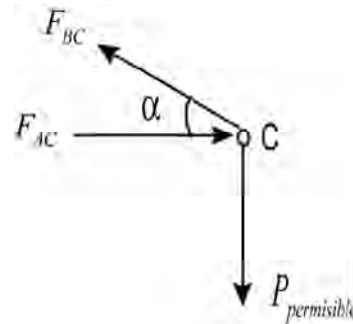
Debemos por tanto calcular los esfuerzos actuantes en las 2 barras:

$$\sigma_{actuanteBC} = \frac{F_{BC}}{A} = \frac{F_{BC}}{5 \times 2cm^2} = \frac{F_{BC}}{10cm^2}$$

$$\sigma_{actuanteAC} = \frac{F_{AC}}{A} = \frac{F_{AC}}{5 \times 2cm^2} = \frac{F_{AC}}{10cm^2}$$

Calculemos  $F_{BC}$  y  $F_{AC}$

$$\alpha = \tan^{-1} \frac{1.5}{3} = 26.56^\circ$$



$$\sum F_y = 0$$

$$\sum F_x = 0$$

$$F_{BC} \text{ Sen } 26.56^\circ - P_{admisible} = 0$$

$$F_{AC} - F_{BC} \text{ Cos } 26.56^\circ = 0$$

$$F_{BC} = 2.24 P_{admisible}$$

$$F_{AC} = 2.24 P_{admisible} \text{ Cos } 26.56^\circ = 2.00 P_{admisible}$$

Por lo tanto:

$$\sigma_{actuanteBC} = \frac{2.24 P_{admisible}}{10cm^2} = \sigma_{admisibleTENSION} = 1400Kg / cm^2$$

$$P_{admisible} = 6250Kg$$

$$\sigma_{actuanteAC} = \frac{2.00 P_{admisible}}{10cm^2} = \sigma_{admisibleCOMPRESION} = 800Kg / cm^2$$

$$P_{admisible} = 4000Kg$$

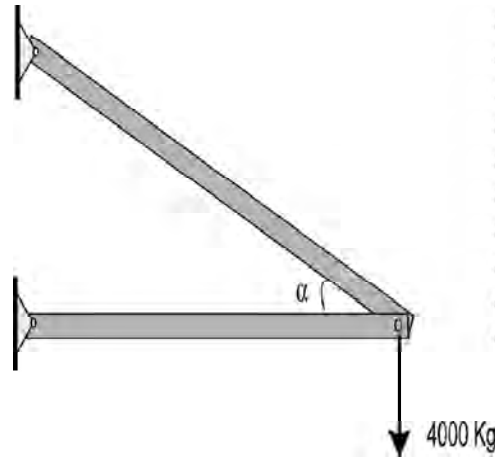
Hemos encontrado 2 valores para la carga permisible: el de 6250 Kg garantiza que la barra BC no se romperá mientras que el de 4000 Kg garantiza que la barra AC no lo hará.

Como debemos asegurarnos de que ninguna de las 2 se rompa escogemos el valor menor que nos lo garantiza.

Por lo tanto:

$$P_{admissible} = 4000 \text{ Kg}$$

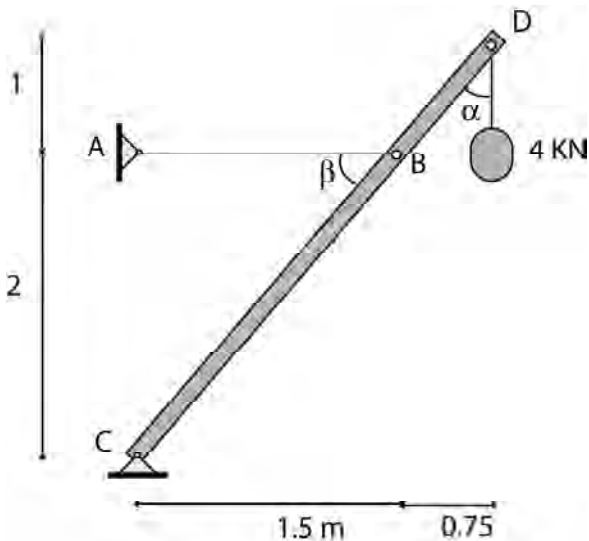
Ninguna de las 2 barras se romperá



## PROBLEMA

Calcular los esfuerzos normales en el cable AB y en los 2 tramos de la barra CBD de la figura:

El cable tiene un diámetro de 1.5 cm y la barra tiene una sección de 2 x 5 cm



$$\alpha = \tan^{-1} \frac{2.25}{3} = 36.87^\circ$$

$$\beta = 90^\circ - 36.87^\circ = 53.13^\circ$$

Los esfuerzos pedidos serán iguales a:

$$\sigma_{AB} = \frac{F_{AB}}{A_{cable}}$$

$$\sigma_{CB} = \frac{F_{CB}}{A_{barra}}$$

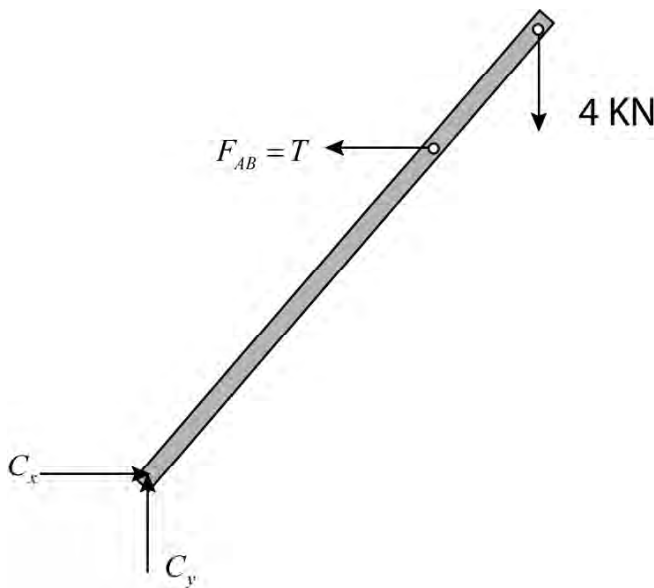
$$\sigma_{BD} = \frac{F_{BD}}{A_{barra}}$$

$$A_{cable} = \frac{\pi D^2}{4} = \frac{\pi (1.5cm)^2}{4} = 1.77cm^2$$

$$A_{barra} = 5cm \times 2cm = 10cm^2$$

Debemos calcular las fuerzas  $F_{AB}$ ,  $F_{CB}$  y  $F_{BD}$

Diagrama de cuerpo libre:



$$\sum M_C = 0$$

$$2F_{AB} - 2.25 \times 4 = 0$$

$$F_{AB} = 4.5KN$$

$$\sum F_y = 0$$

$$C_y = 4KN$$

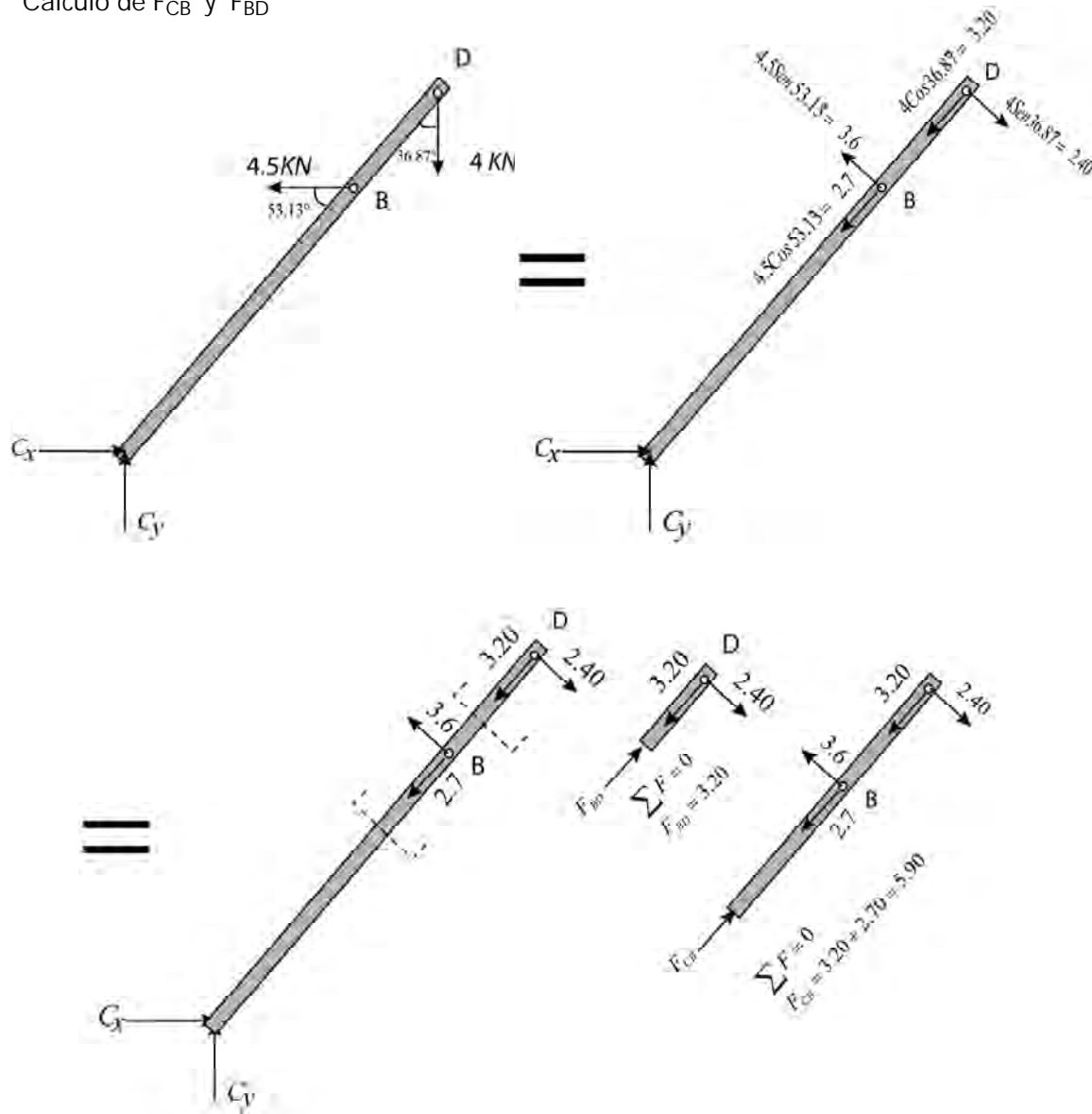
$$\sum F_x = 0$$

$$C_x = F_{AB} = 4.5KN$$

Esfuerzo en el cable AB:

$$\sigma_{AB} = \frac{F_{AB}}{A_{cable}} = \frac{4.5KN}{1.77cm^2} \times \frac{10^4 cm^2}{m^2} = 2.54 \times 10^4 \frac{KN}{m^2} = 25.4MPa$$

Cálculo de  $F_{CB}$  y  $F_{BD}$



Esfuerzos en los tramos CB y BD

$$\sigma_{CB} = \frac{F_{CB}}{A_{barra}} = \frac{5.90 \text{ kN}}{10 \text{ cm}^2} \times \frac{10^4 \text{ cm}^2}{\text{m}^2} = 0.59 \times 10^4 \frac{\text{KN}}{\text{m}^2} = 5.9 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{BD} = \frac{F_{BD}}{A_{barra}} = \frac{3.20 \text{ kN}}{10 \text{ cm}^2} \times \frac{10^4 \text{ cm}^2}{\text{m}^2} = 0.32 \times 10^4 \frac{\text{KN}}{\text{m}^2} = 3.2 \text{ MPa}$$

### 1.3.2 Esfuerzo de aplastamiento o de apoyo

Un caso particular de esfuerzo se presenta cuando hay un contacto entre dos superficies que se presionan entre si, como puede ser el caso de una arandela metálica y una superficie de madera.

En este caso puede presentarse un aplastamiento local de una de las superficies debido al esfuerzo de compresión que se denomina "esfuerzo de aplastamiento".

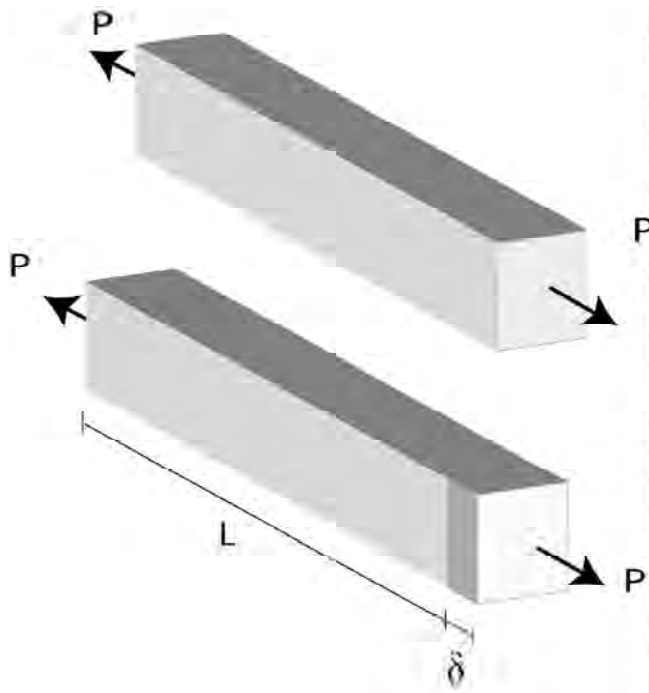
Cuando este tipo de situaciones se presenta, será necesario calcular el esfuerzo permisible del material mas susceptible de aplastarse, en este caso la madera para a partir del mismo calcular el área de la arandela que garantice que no se producirá aplastamiento en la madera.



AL PRODUCIRSE LA FLEXIÓN SE GENERA UNA GRAN COMPRESIÓN DE LA ARANDELA SOBRE LA MADERA ORIGINANDO EL APLASTAMIENTO QUE SE VE EN LA FOTO INFERIOR DERECHA. (Ensayo diseñado por el profesor José Christian Chanchí, Universidad Nacional de Colombia, Sede Manizales)



### 1.3.3 Deformaciones axiales



El alargamiento total que sufre la barra se representa con la letra griega  $\delta$  (**Deformación total**)

Por tanto, **la deformación unitaria** será:  $\varepsilon = \frac{\delta}{l}$

### 1.4 PROPIEDADES MECÁNICAS DE LOS MATERIALES

La resistencia de materiales diferencia claramente la parte teórica y la experimental:

- En la parte teórica estudia mediante modelos matemáticos (ecuaciones) los esfuerzos y deformaciones producidos en el interior de los elementos estructurales por las fuerzas aplicadas. Hace uso intensivo de los diagramas de cuerpo libre y de las ecuaciones de equilibrio, así como de las relaciones geométricas entre las dimensiones de los elementos y sus deformaciones tanto lineales como angulares.

- En la parte experimental ensaya en el laboratorio probetas de materiales sometiéndolas a diferentes tipos de cargas para calcular los esfuerzos resistentes de los materiales y adicionalmente mediante la medición de las deformaciones producidas busca encontrar relaciones entre estas y los esfuerzos aplicados con el fin de determinar lo que se conoce como las características acción-respuesta de los materiales lo cual permitirá determinar parámetros como los módulos de elasticidad y de corte,

la relación de Poisson y la ductilidad de los materiales ensayados (posteriormente veremos el significado de cada uno de estos términos).

En las siguientes fotos se observan algunos ejemplos de probetas sometidas a ensayos en los laboratorios de resistencia de materiales y estructuras de la Universidad Nacional de Colombia, Sede Manizales.



ENSAYO DE COMPRESIÓN DE CONCRETO





PROBETAS METÁLICAS ENSAYADAS  
A TENSIÓN

MADERA ENSAYADA A CORTE

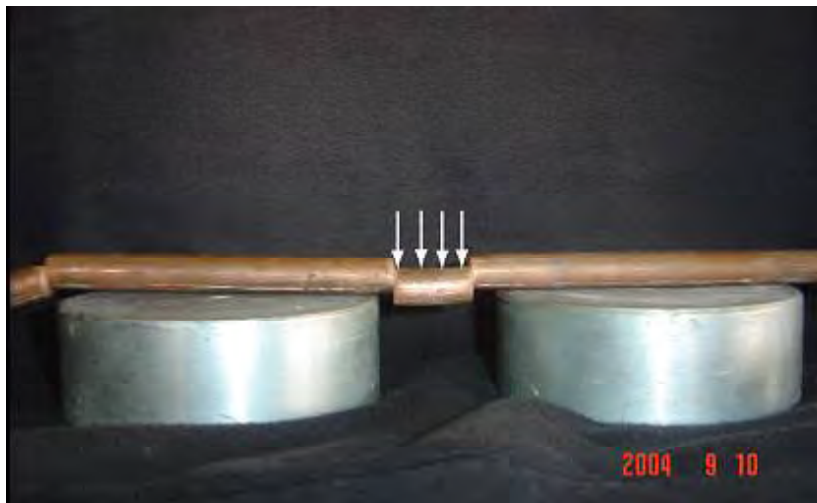


PREPARACIÓN DE LAS VIGUETAS  
A SER ENSAYADAS





FLEXIÓN DE VIGUETA DE CONCRETO SIMPLE



CORTE DOBLE EN COBRE



ENSAYO DE COMPRESIÓN EN BLOQUES DE MORTERO



ENSAYO BRASILEIRO DEL CONCRETO



ENSAYO DE COMPRESIÓN DE MADERA

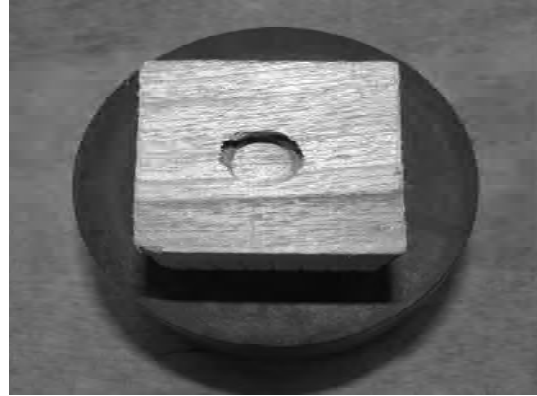


LABORATORIO DE RESISTENCIA  
DE MATERIALES  
UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA,  
SEDE MANIZALES



ENSAYO DE CORTE  
DE TORNILLOS  
(Diseño del profesor José  
Christian Chanchí,  
Universidad Nacional  
de Colombia,  
Sede Manizales)





ENSAYO DE APLASTAMIENTO EN MADERA  
(Diseño del profesor José Christian Chanchí, Universidad Nacional de Colombia, Sede Manizales)



ENSAYO DE MURO. Realizado por los estudiantes William Garzón et al y dirigido por el profesor José Christian Chanchí en la Universidad Nacional de Colombia, Sede Manizales.

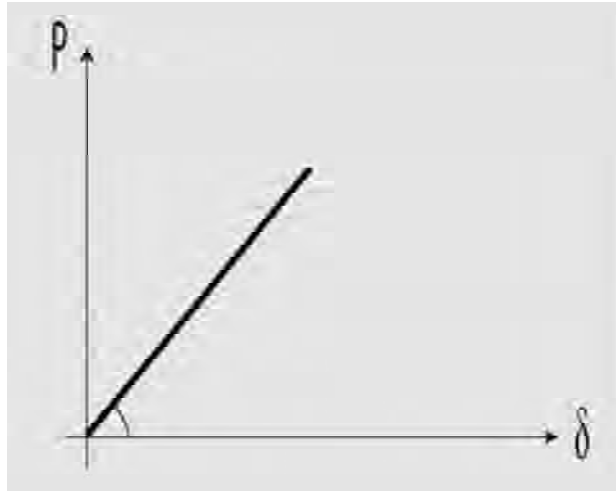
#### 1.4.1 Relaciones esfuerzo - deformación

Se dice que el primero en estudiar sistemáticamente las propiedades de resistencia de un material fue Leonardo Da Vinci a través de ensayos en los cuales suspendía piedras con un alambre a fin de evaluar su resistencia.

## 1.5 LEY DE HOOKE

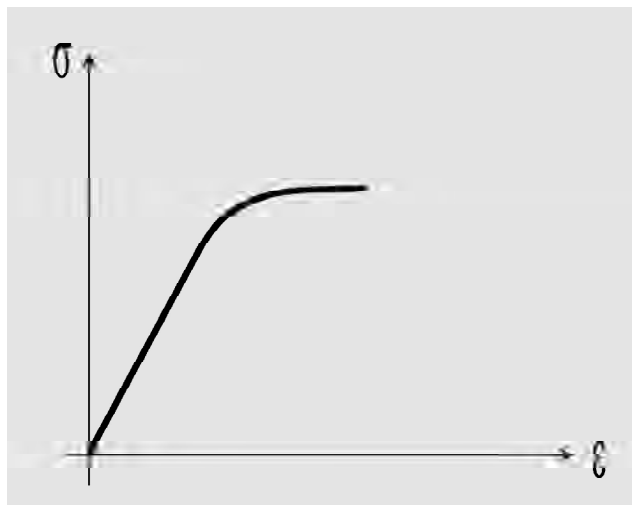
Robert Hooke en su libro *De potentia restitutiva* (1679), estableció la famosa Ley que relaciona fuerzas y deformaciones. Con un sencillo dispositivo en el cual aun plato se le van agregando pesos y se van midiendo las deformaciones producidas progresivamente en el resorte encontró **una proporcionalidad directa entre los pesos aplicados y las deformaciones**.

A partir de un ensayo en el laboratorio puede graficarse la variación de la Fuerza vs la Deformación total:



Ley establecida originalmente por Hooke:  $P = k\delta$

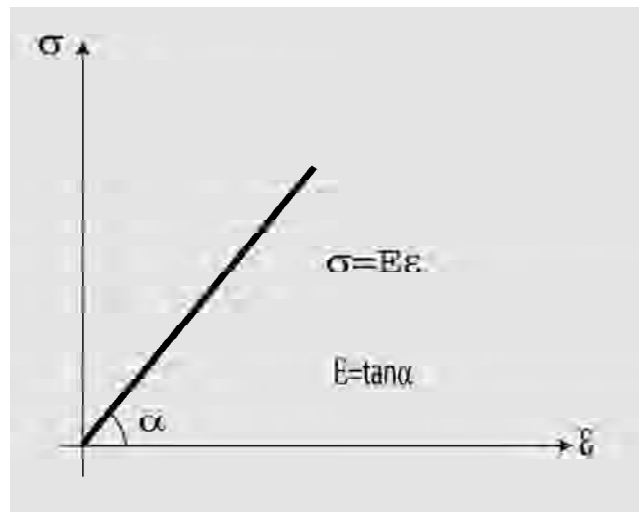
Sin embargo, para estudiar las propiedades de un material, deben relacionarse cantidades unitarias (esfuerzo  $\sigma$  y deformación unitaria  $\epsilon$ ) de tal manera que en la ley queden obviadas el área y la longitud de la probeta ensayada.



Como se ve en la figura, a medida que aumenta el esfuerzo se incrementa la deformación unitaria del material que se está ensayando, pudiendo de esta forma obtenerse las propiedades mecánicas de los materiales a partir de esta **Gráfica Esfuerzo-Deformación**.

### 1.5.1 Módulo de elasticidad, ductilidad, resistencia

La pendiente inicial de la gráfica nos dice cómo varían las deformaciones unitarias al incrementarse los esfuerzos. Para varios materiales esta primera parte de la gráfica es lineal presentándose por tanto una relación directa entre Esfuerzo y Deformación.



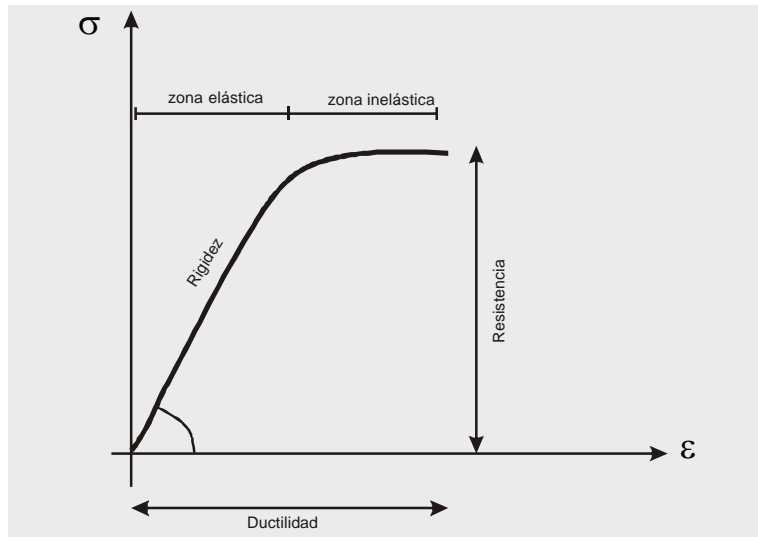
Si escribimos la ecuación de la recta obtendremos la expresión actual de la Ley de Hooke:

$$\sigma = E\varepsilon$$

Siendo **E**, la pendiente de la recta. Este valor que es característico de cada material se conoce como el **módulo de elasticidad o módulo de Young** del material y nos dice que tan rígido es un material.

**La rigidez, la resistencia y la ductilidad** son propiedades mecánicas de los materiales:

- **Rigidez:** Capacidad de oponerse a las deformaciones
- **Resistencia:** Capacidad de oponerse a la rotura
- **Ductilidad:** Capacidad de deformarse antes de romperse.



A partir de la Ley de Hooke puede calcularse la **deformación total** que sufrirá un elemento sometido a fuerza axial.

Según la Ley de Hooke:

$$\sigma = E\varepsilon$$

$$\frac{P}{A} = E \frac{\delta}{L}$$

$$\delta = \frac{PL}{AE}$$

Con esta expresión puede calcularse la deformación conociendo la carga **P** la longitud de la barra **L**, la sección transversal **A** y el módulo de elasticidad **E** (en la zona elástica).

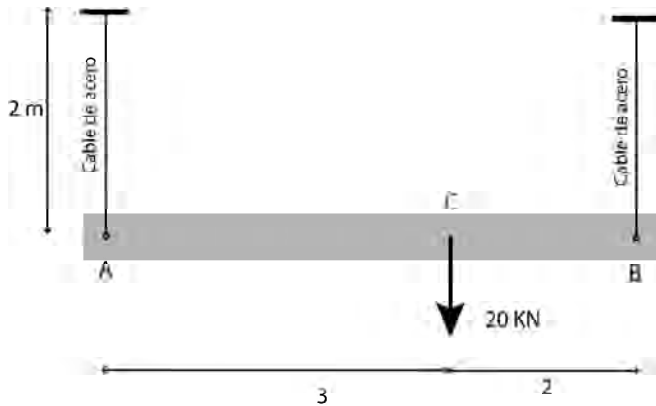
### 1.5.2 Módulos de elasticidad de algunos materiales

Material	GPa	Kg/cm <sup>2</sup>	Lb/pulg <sup>2</sup>
Acero	200	2.1 x 10 <sup>6</sup>	30 x 10 <sup>6</sup>
Aluminio	70	0.7 x 10 <sup>6</sup>	10 x 10 <sup>6</sup>
Cobre	110	1.2 x 10 <sup>6</sup>	17 x 10 <sup>6</sup>
Concreto	17-31	0.18 x 10 <sup>6</sup> - 0.32 x 10 <sup>6</sup>	2.5 x 10 <sup>6</sup> - 4.5 x 10 <sup>6</sup>
Madera	11-14	0.11 x 10 <sup>6</sup> - 0.14 x 10 <sup>6</sup>	1.6 x 10 <sup>6</sup> - 2.0 x 10 <sup>6</sup>

## PROBLEMA

Calcular el alargamiento de cada cable y el desplazamiento vertical del punto C en el cual está aplicada la carga.

Considerar que la barra ACB es rígida (no se flexiona).



Diámetro de los cables: 1.5cm

$$E_{acero} = 200GPa$$

Alargamiento de los cables

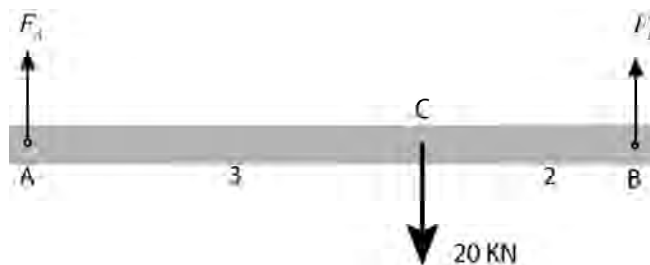
$$\delta_{cableA} = \frac{F_A \times L}{AE} \quad \delta_{cableB} = \frac{F_B \times L}{AE}$$

$$L = 2m$$

$$A = \frac{\pi \times D^2}{4} = \frac{\pi \times (0.015m)^2}{4} = 1.77 \times 10^{-4} m^2$$

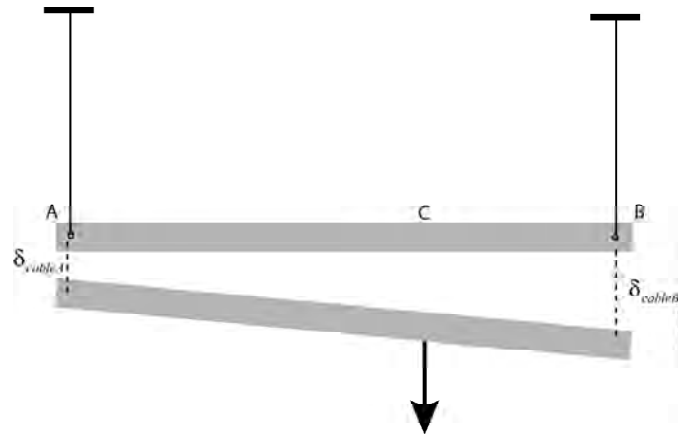
$$E = 200GPa = 200 \times 10^9 N/m^2$$

Cálculo de  $F_A$  y  $F_B$ :



$$\begin{aligned} \sum M_A = 0 & & \sum F_y = 0 \\ 5F_B - 3 \times 20 = 0 & & F_A + F_B - 20 = 0 \\ F_B = 12KN & & F_A = 8KN \end{aligned}$$

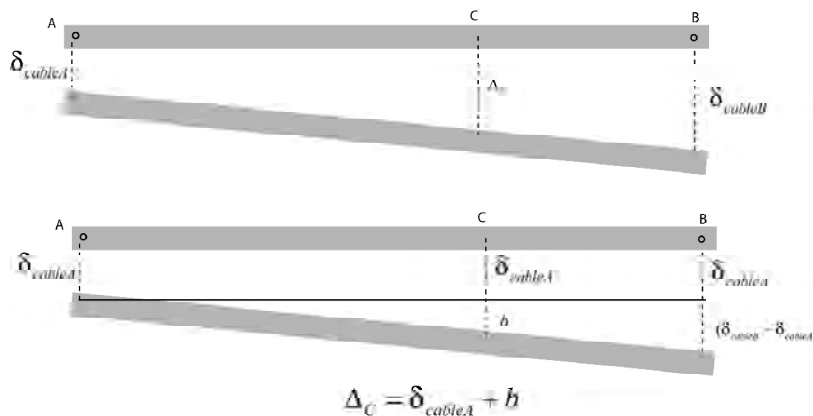




$$\delta_{cableA} = \frac{8KN \times 2m}{1.77 \times 10^{-4} m^2 \times 200 \times 10^9 N/m^2} = \frac{8 \times 10^3 N \times 2m}{1.77 \times 10^{-4} m^2 \times 200 \times 10^9 N/m^2} = 4.52 \times 10^{-4} m$$

$$\delta_{cableB} = \frac{12KN \times 2m}{1.77 \times 10^{-4} m^2 \times 200 \times 10^9 N/m^2} = \frac{12 \times 10^3 N \times 2m}{1.77 \times 10^{-4} m^2 \times 200 \times 10^9 N/m^2} = 6.78 \times 10^{-4} m$$

Cálculo del desplazamiento vertical del punto C:



Por relación de triángulos:

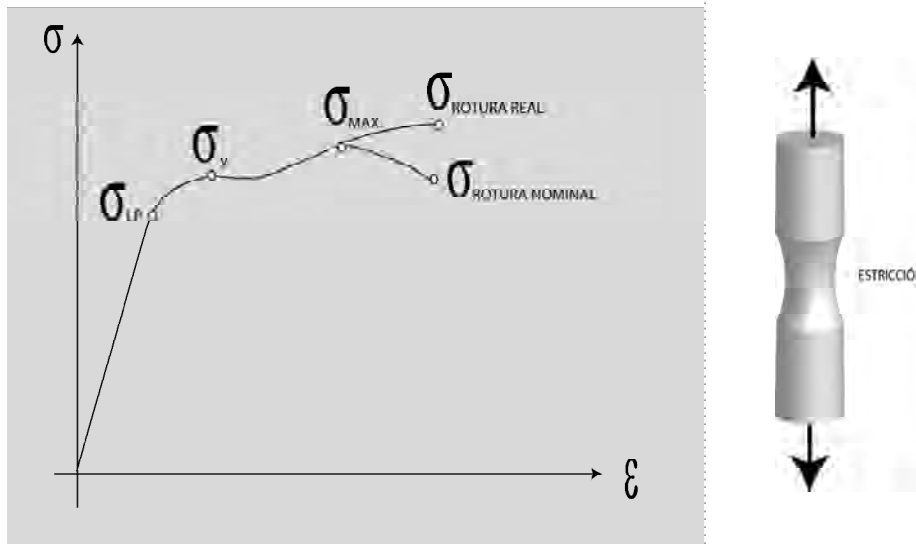
$$\frac{(\delta_{cableB} - \delta_{cableA})}{5} = \frac{b}{3} \quad b = \frac{3(\delta_{cableB} - \delta_{cableA})}{5} = \frac{3 \times 2.26 \times 10^{-4}}{5} = 1.36 \times 10^{-4}$$

Finalmente

$$\Delta_C = 4.52 \times 10^{-4} + 1.36 \times 10^{-4} = 5.88 \times 10^{-4} m$$

## 1.6 ELASTICIDAD Y PLASTICIDAD

Gráfica esfuerzo-deformación para el acero. A partir del ensayo a tensión de una probeta en el laboratorio, se obtiene la siguiente gráfica esfuerzo-deformación:



Con base en la gráfica, pueden obtenerse los siguientes valores del esfuerzo normal:

$\sigma_{LP}$ : Esfuerzo en el límite de proporcionalidad. Hasta este punto la gráfica es lineal. Proporcionalidad directa entre Esfuerzo y Deformación.

$\sigma_y$ : Esfuerzo de fluencia (*yield point*). A partir de este punto el material "fluye" produciéndose un aumento de la deformación sin necesidad de aumentar el esfuerzo.

$\sigma_{max}$ : Después de la fluencia, al producirse un "endurecimiento por deformación" (la energía aplicada calienta el material), el material adquiere capacidad de resistir mas esfuerzo produciéndose un aumento de la pendiente de la gráfica hasta alcanzar el esfuerzo máximo.

$\sigma_{ROTURA NOMINAL}$ : A partir del esfuerzo máximo alcanzado se produce un angostamiento de la sección de la barra ensayada (Estricción) hasta que finalmente se produce la rotura. El rotura nominal es igual a la carga de rotura dividida por el Area inicial de la probeta (sin tener en cuenta la estricción).

$\sigma_{ROTURA REAL}$ : Es igual a la carga de rotura dividida por el área final de la sección transversal (calculada con el diámetro final de la probeta).

### 1.6.1 Factores de seguridad

La ingeniería no es una ciencia exacta. Tanto en el cálculo de las estructuras como en la previsión de las cargas que actuarán sobre ellas, los ingenieros están expuestos a incertidumbres de distinto tipo que hacen que deban tomar previsiones que garanticen con una alta probabilidad que no se producirán fallas. Estas previsiones se denominan factores de seguridad.

Las incertidumbres que se presentan se deben a los siguientes factores:

- **Incetidumbre en las cargas a considerar:** A pesar de todos los estudios estadísticos que se hagan para determinar las cargas máximas que actuarán sobre una estructura durante su vida útil, nunca será posible hacerlo con total exactitud. Pensemos en los casos de los camiones sobre los puentes o en las cargas máximas producidas por sismos y entenderemos cuan incierta es la determinación de sus efectos máximos.
- **Incetidumbre en las propiedades mecánicas de los materiales:** Se calculan a partir de análisis estadísticos de los resultados de ensayos practicados a muestras de los materiales que se emplearán en la construcción de estructuras. Es obvio que los propios materiales con los cuales se construyen las estructuras no se ensayan para cada construcción. Por lo tanto en este caso también se tienen aproximaciones derivadas de los métodos estadísticos empleados y de los procedimientos de los ensayos de laboratorio utilizados.
- **Incetidumbre en las dimensiones de los elementos estructurales:** Es muy difícil garantizar que las dimensiones con que se construyen los elementos de una estructura sean exactamente iguales a los especificados en los planos arquitectónicos y estructurales. Debido a las imprecisiones en los procesos constructivos se introducen incertidumbres que deben ser cubiertas por los factores de seguridad.
- **Incetidumbre en la precisión de los cálculos:** En los métodos de cálculo de estructura se hacen suposiciones que simplifiquen el análisis y disminuyan los tiempos del análisis. Esto obviamente tiene un costo en el sentido de que los modelos matemáticos empleados no siempre representan de manera exacta la manera como se comportará la estructura en la realidad.

Por la relación presentada la ingeniería emplea factores de seguridad. Hay varios enfoques para definir estos factores:

- **Esfuerzos admisibles:** Se calcula dividiendo el esfuerzo que resiste el material por el factor de seguridad (mayor que 1), de tal manera que aunque uno "sabe" que el material tiene una resistencia dada lo "pone a trabajar" a un esfuerzo menor (el esfuerzo admisible).

$$\sigma_{admisible} = \frac{\sigma_{resistenteMATERIAL}}{F.S.}$$

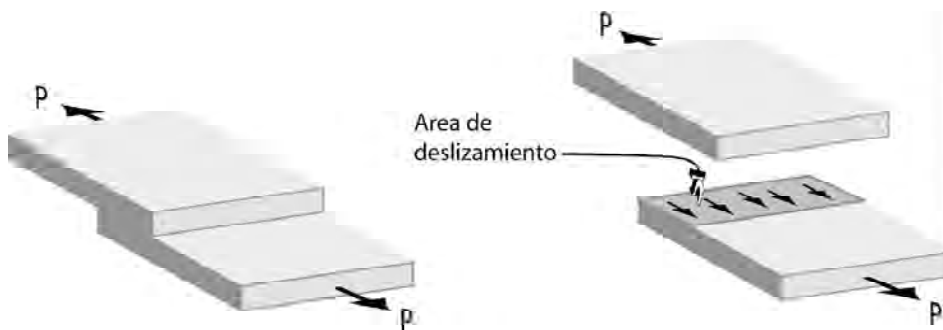
- **Métodos probabilísticos:** la seguridad se relaciona con la probabilidad de falla de la estructura: mientras más baja sea esta probabilidad, mas alto será el factor de seguridad.

- **Diseño por estados límite:** A través de los códigos de estructuras de los diferentes países se definen los aspectos de seguridad de las estructuras a diseñar. La idea consiste en considerar que como una estructura puede colapsar o puede deformarse excesivamente o tener grandes vibraciones, el diseñador debe considerar los límites para los cuales la estructura se hace inaceptable desde los tres puntos de vista y garantizar que esos límites no serán superados.

En los cursos de ingeniería estructural se estudiarán en detalle los métodos mencionados aquí brevemente, cuando se estudia la Norma Sismorresistente Colombiana de 1998.

## 1.7 ESFUERZOS CORTANTES

No en todas las ocasiones los elementos estructurales son tensionados o comprimidos por las fuerzas externas que actúan sobre ellos. En muchas ocasiones un elemento está **tratando de ser cortado**.



En este caso, las dos platinas están intentando ser cortadas a lo largo del área transversal que las une, la cual es paralela a la fuerza P que está siendo aplicada.



EDIFICIO REFORZADO CONTRA SISMOS. BERKELEY, CALIFORNIA 2005



DETALLE DE LA BASE DEL EDIFICIO DE LA FOTO ANTERIOR (LOS PERNOS ESTÁN SOMETIDOS A CORTE)



PERNOS SOMETIDOS A CORTE. Universidad Nacional de Colombia Sede Manizales, Campus La Nubia, 2004

Se define el **Esfuerzo cortante o de cizalladura** como:

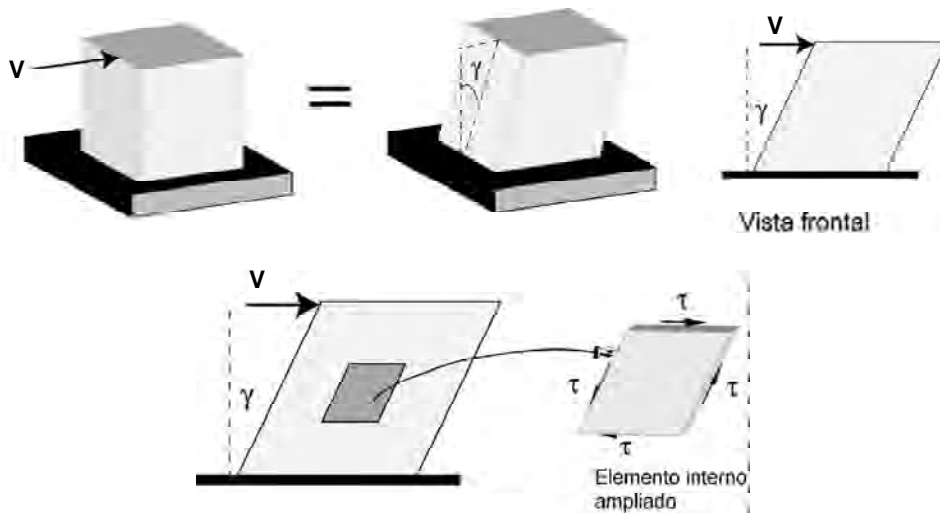
$$\tau = \frac{V}{A}$$

Las unidades son las mismas del esfuerzo normal:

$$\tau = \frac{P}{A} \quad \frac{Kg}{cm^2} \quad \frac{lb}{in^2} :psi \quad \frac{N}{m^2} :Pascal$$

### 1.7.1 Deformaciones por corte

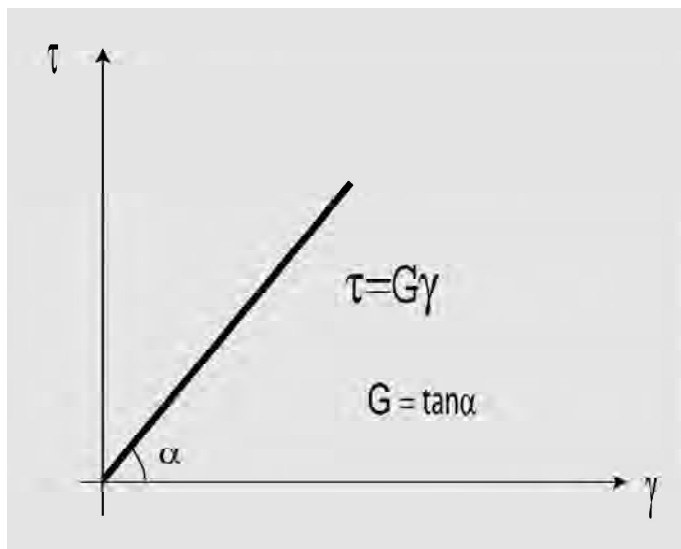
Al producirse una distorsión como la que se ve en la figura, la deformación está dada por la variación angular que sufre el elemento al ser deformado por el esfuerzo cortante.



En el rango elástico lineal del material se ha encontrado relación directa entre los esfuerzos cortantes y las deformaciones angulares sufridas por el elemento.

$$\tau = G\gamma$$

### 1.7.2 Ley de Hooke para corte

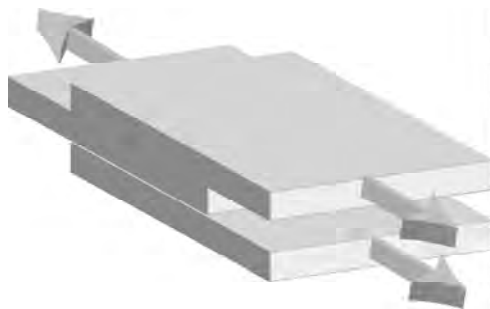


Siendo **G** el módulo cortante o de rigidez del material

### 1.7.3 Módulo de corte de varios materiales

Material	GPa	Kg/cm <sup>2</sup>	Lb/pulg <sup>2</sup>
Acero	77	$0.77 \times 10^6$	$11 \times 10^6$
Aluminio	28	$0.28 \times 10^6$	$4 \times 10^6$
Bronce	36-44	$0.31 \times 10^6 - 0.44 \times 10^6$	$5.2 \times 10^6 - 6.3 \times 10^6$
Cobre	40-47	$0.41 \times 10^6 - 0.48 \times 10^6$	$5.8 \times 10^6 - 6.8 \times 10^6$

### 1.7.4 Esfuerzo cortante doble



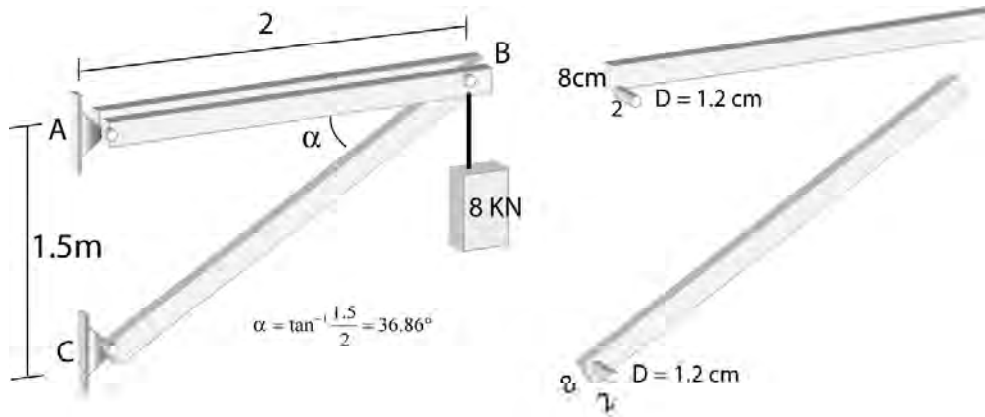
En este caso, el corte se resiste a través de 2 áreas.

Por lo tanto:

$$\tau = \frac{V}{2A}$$

## PROBLEMA

Calcular los esfuerzos normales en las barras AB y CB y los esfuerzos cortantes en los pasadores en A y C, cuyo diámetro es de 1.2 cm.



$$\sigma_{AB} = \frac{F_{AB}}{A} = \frac{F_{AB}}{2 \times 8\text{cm}^2} = \frac{F_{AB}}{16\text{cm}^2}$$

$$\sigma_{CB} = \frac{F_{CB}}{A} = \frac{F_{CB}}{2 \times 8\text{cm}^2} = \frac{F_{CB}}{16\text{cm}^2}$$

$$\tau_{\text{pasadorA}} = \frac{F_A}{2A} = \frac{R_A}{2 \frac{\pi D^2}{4}} = \frac{R_A}{2 \frac{\pi 1.2^2}{4}} = \frac{R_A}{2.26\text{cm}^2}$$

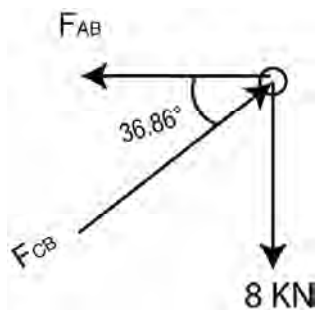
↻  
Corte doble

$$\tau_{\text{pasadorC}} = \frac{F_C}{A} = \frac{R_C}{\frac{\pi D^2}{4}} = \frac{R_C}{\frac{\pi 1.2^2}{4}} = 1.13\text{cm}^2$$

↻  
Corte simple

Debemos calcular  $F_{AB}$ ,  $F_{CB}$ ,  $R_A$  y  $R_C$

Diagrama de cuerpo libre del punto B:

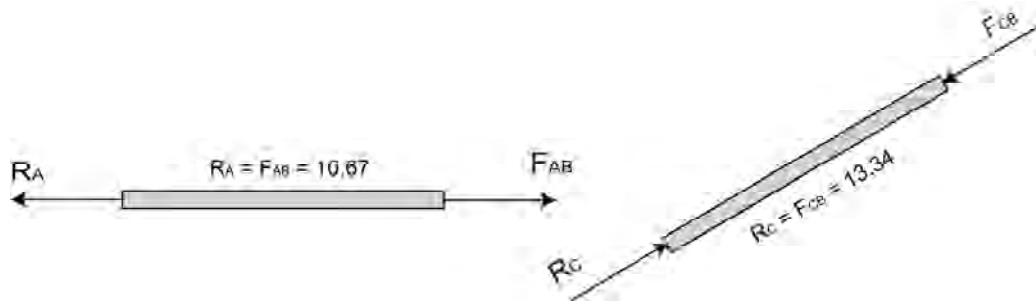


$$\begin{aligned} \sum F_y &= 0 \\ F_{CB} \text{Sen} 36.86^\circ - 8 &= 0 \\ F_{CB} &= 13.34\text{KN} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum F_x &= 0 \\ 13.34 \text{Cos} 36.86 - F_{AB} &= 0 \\ F_{AB} &= 10.67 \end{aligned}$$



Diagramas de cuerpo libre de las barras AB y CB:



Finalmente calculamos los esfuerzos pedidos:

$$\sigma_{CB} = \frac{13.34 \text{ KN}}{16 \text{ cm}^2} = \frac{13.34 \times 10^3 \text{ N} \times 10^4 \text{ cm}^2}{16 \text{ cm}^2 \times 1 \text{ m}^2} = 0.83 \times 10^7 \frac{\text{N}}{\text{m}^2} = 8.3 \text{ MPa}$$

son 2 barras, a cada una le toca la mitad de la fuerza

$$\sigma_{AB} = \frac{\frac{10.67}{2} \text{ KN}}{16 \text{ cm}^2} = \frac{5.34 \times 10^3 \text{ N} \times 10^4 \text{ cm}^2}{16 \text{ cm}^2 \times 1 \text{ m}^2} = 0.33 \times 10^7 \frac{\text{N}}{\text{m}^2} = 3.3 \text{ MPa}$$

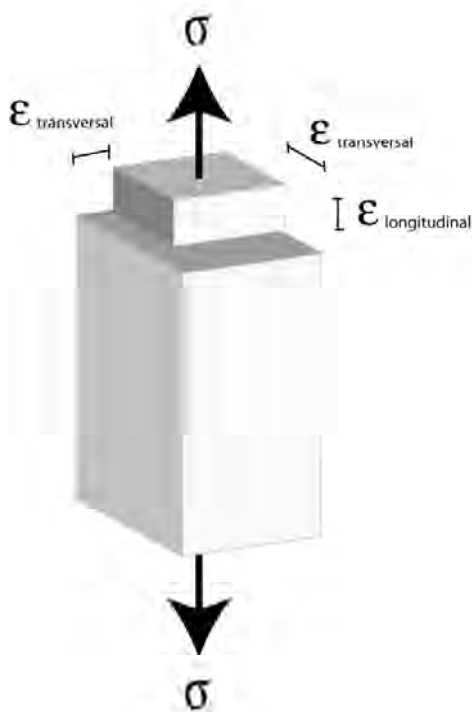
$$\tau_{\text{pasador}C} = \frac{13.34 \times 10^3 \text{ N} \times 10^4 \text{ cm}^2}{1.13 \text{ cm}^2 \times 1 \text{ m}^2} = 11.85 \times 10^7 \frac{\text{N}}{\text{m}^2} = 118.5 \text{ MPa}$$

$$\tau_{\text{pasador}A} = \frac{10.67 \times 10^3 \text{ N} \times 10^4 \text{ cm}^2}{2.26 \text{ cm}^2 \times 1 \text{ m}^2} = 4.72 \times 10^7 \frac{\text{N}}{\text{m}^2} = 47.2 \text{ MPa}$$

### 1.7.5 Relación de Poisson

Cuando a un elemento se le produce un alargamiento en una dirección dada, automáticamente se genera un acortamiento en la dirección perpendicular o viceversa.

Deducida por el francés **Simeon Denis Poisson** (1781-1840) quien encontró que la relación entre la deformación unitaria transversal y la longitudinal era constante para cada material, denominándose por tanto esta constante, Relación de Poisson ( $\mu$ ).



$$\mu = -\frac{\epsilon_{transversal}}{\epsilon_{longitudinal}}$$

El signo menos indica que a un alargamiento en un sentido corresponde un acortamiento en el otro y viceversa.

Valores de la relación de Poisson para diferentes materiales

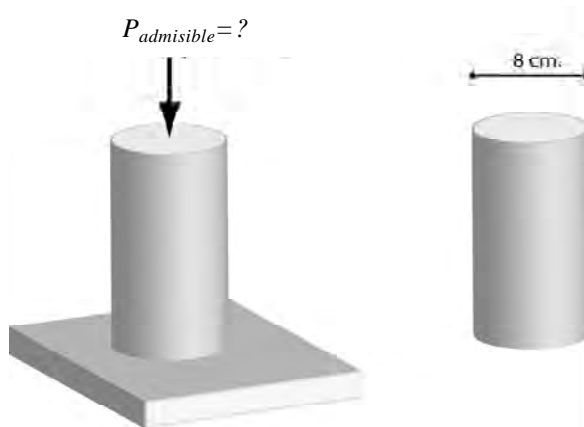
Material	Relación de Poisson $\mu$
Corcho	0.0
Concreto	0.1 – 0.2
Acero	0.27 – 0.30
Caucho	0.47

$$0 \leq \mu \leq 0,5$$

## PROBLEMA

Calcular la carga admisible que se puede aplicar a un cilindro de concreto de 8cm de diámetro para que no sufra una expansión lateral mayor de 0.002cm.

El módulo de elasticidad del concreto es de 20GPa y su relación de Poisson es igual a 0.15



$$P_{admissible} = \sigma_y \times A$$

$$P_{admissible} = \sigma_{admissible} \times A$$

$$A = \frac{\pi D^2}{4} = \frac{\pi \times (8cm)^2}{4} = 50.27cm^2$$

Calculemos  $\sigma_{admissible}$

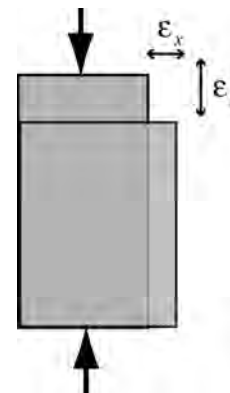
Según la ley de Hooke  $\sigma_y = E \varepsilon_y$

Aplicando la relación de Poisson:

$$\mu = \frac{\varepsilon_x}{\varepsilon_y} \Rightarrow \varepsilon_y = \frac{\varepsilon_x}{\mu}$$

$$\sigma_y = E \frac{\varepsilon_x}{\mu} = \sigma_{admissible}$$

$$P_{admissible} = E \frac{\varepsilon_x}{\mu} \times A$$



$$\text{Ahora: } \varepsilon_x = \frac{\delta_x}{\text{Diámetro}} = \frac{0.002cm}{8cm} = 0.00025$$

Finalmente:

$$P_{admissible} = E \frac{\varepsilon_x}{\mu} \times A = 20GPa \frac{0.00025}{0.15} \times 50.27cm^2 \times \frac{1m^2}{10^4cm^2} = 20 \times 10^9 \frac{N}{m^2} \times \frac{0.00025}{0.15} \times 50.27cm^2 \times \frac{1m^2}{10^4cm^2} = 16756.67N = 16.76KN$$

### 1.7.6 Relación entre el módulo de elasticidad y el módulo cortante

A partir de un análisis que puede consultarse en alguno de los libros de resistencia de materiales mencionados en la bibliografía, se ha encontrado que:

$$G = \frac{E}{2(1 + \mu)}$$

Como  $0 \leq \mu \leq 0.5$  entonces  $0.33E \leq G \leq 0.5E$

Las constantes E (módulo de elasticidad), G (módulo de corte) y  $\mu$  (relación de Poisson) se denominan constantes elásticas de los materiales.

### 1.8 DEFORMACIONES EN ESTRUCTURAS CUYAS BARRAS ESTÁN SOMETIDAS A FUERZAS AXIALES

Si se aplica la fuerza P a la estructura de la figura, calcular el desplazamiento tanto horizontal como vertical del punto C.

Primero que todo encontremos las fuerzas en las barras AC y BC:

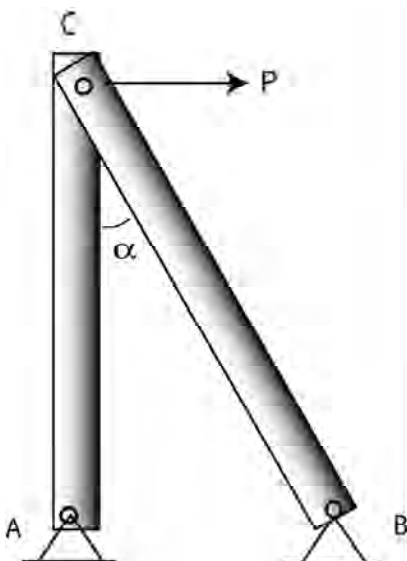
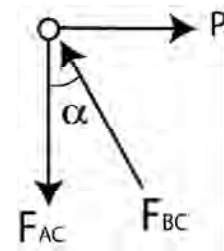


Diagrama de cuerpo libre del punto C:

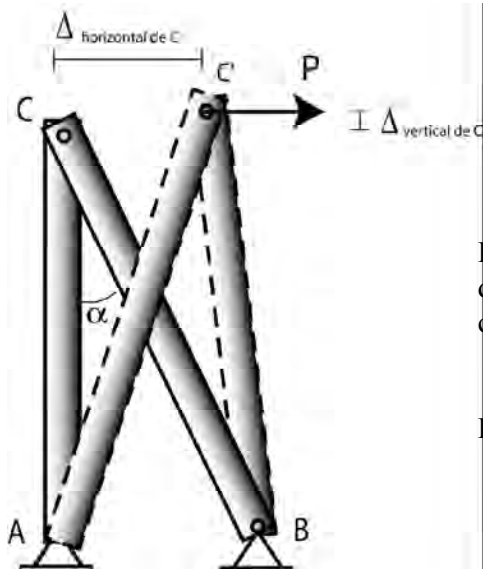


$$\sum F_x = 0 \quad P - F_{BC} \cos \alpha = 0$$

$$F_{BC} = P / \cos \alpha \quad (\text{Compresión})$$

$$\sum F_y = 0 \quad F_{BC} \cos \alpha - F_{AC} = 0$$

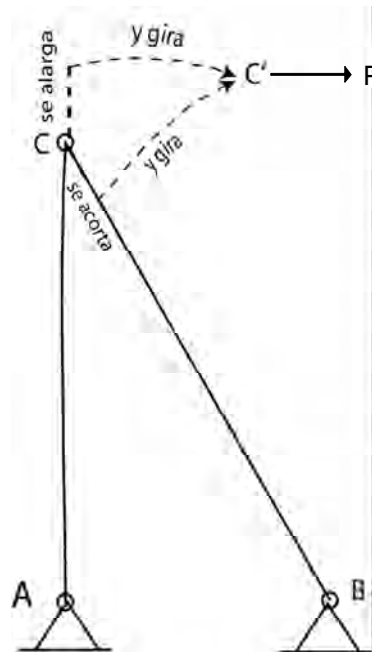
$$F_{AC} = F_{BC} \cos \alpha \quad (\text{Tensión o tracción})$$



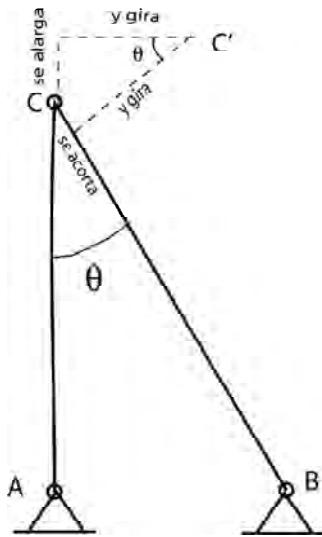
La barra AC al quedar a tensión se alarga y gira alrededor de A. Por su parte la barra BC se acorta por quedar a compresión y gira alrededor de B.

Por lo tanto el punto C se desplaza a C'

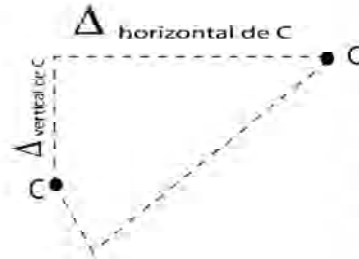
Esquemáticamente sucede lo siguiente:



Debido a que en la realidad las deformaciones son muy pequeñas, los arcos se pueden considerar perpendiculares a los radios de giro quedando el esquema de deformaciones o "diagrama de Williot" como sigue:

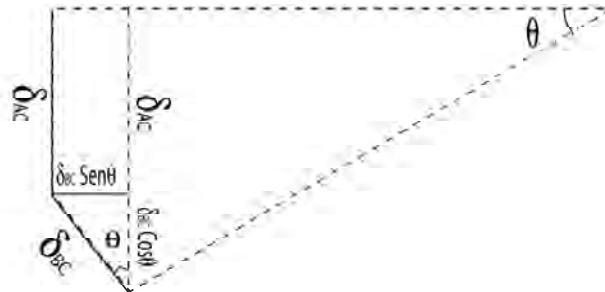
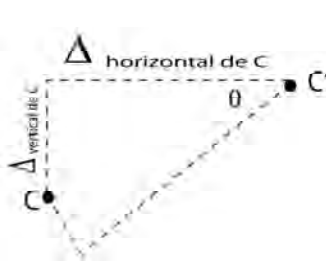


### Vista ampliada del Diagrama de Willot



Al aplicarse la carga P, la barra AC se estira una cantidad  $\delta_{AC}$  y gira mediante un arco. La barra BC se comprime una cantidad  $\delta_{BC}$  y gira mediante otro arco. Al final de este proceso, el punto C se ha movido a una nueva posición C'. Se trata ahora de calcular tanto el movimiento horizontal como vertical del punto C. Para hacerlo se aproximan los arcos a perpendiculares como se ve en la figura (aproximación válida por la pequeñez de las cantidades involucradas en el gráfico). En la gráfica, que se ve ampliada a continuación pueden determinarse mediante relaciones geométricas y trigonométricas los dos desplazamientos mencionados del punto C.

Cálculo de los desplazamientos horizontal y vertical del punto C:



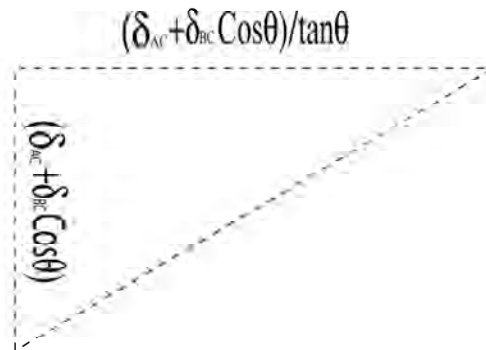
Observando los gráficos tenemos

$$\Delta_{\text{vertical de C}} = \delta_{AC} \quad (\text{alargamiento de la barra AC})$$

$$\Delta_{\text{horizontal de C}} = \delta_{BC} \text{ Sen } \theta + (\delta_{AC} + \delta_{BC} \text{ Cos } \theta) / \tan \theta$$

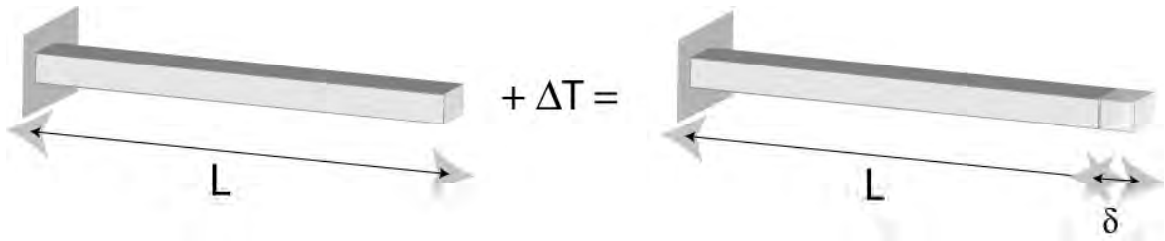
Recordando que:

$$\delta_{AC} = \frac{F_{AC} L_{AC}}{AE} \quad \delta_{BC} = \frac{F_{BC} L_{BC}}{AE}$$



## 1.9 ESFUERZOS TÉRMICOS

Cuando un material se somete a un incremento de temperatura se produce una dilatación:



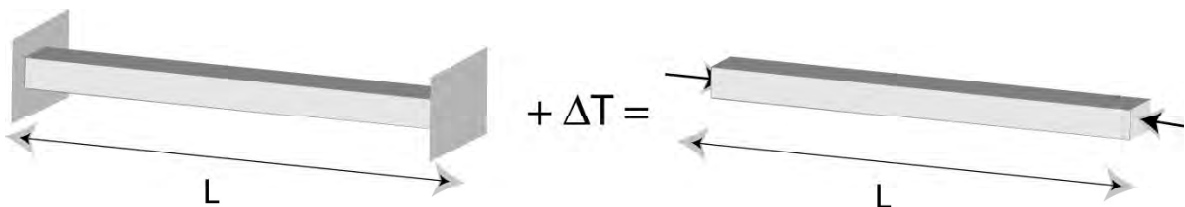
AL INCREMENTARSE LA TEMPERATURA SE PRODUCE UNA DILATACIÓN  $\delta$

Como se recordará, en los cursos de Física se ha estudiado que:

$$\delta = \alpha L \Delta T$$

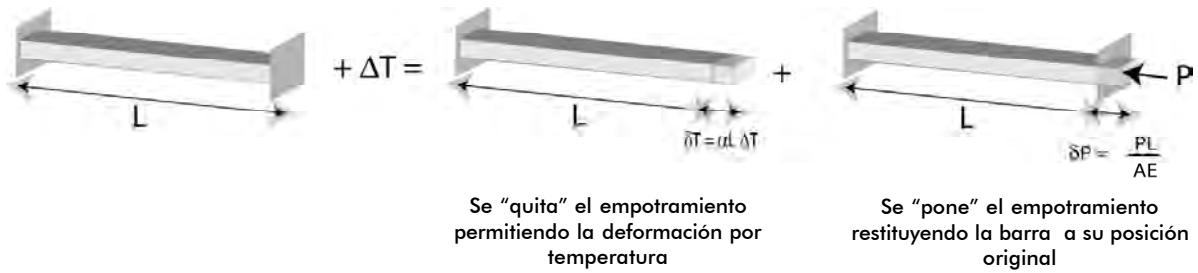
Siendo  $\alpha$ : Coeficiente de dilatación térmica  
 $\Delta T$ : Incremento de temperatura

Si al elemento se le impide la libre dilatación mediante una restricción como un empotramiento, el elemento quedará sometido a un esfuerzo al ser impedido el alargamiento por medio de los dos empotramientos.



AL MEDIRSE LA DILATACIÓN SE GENERAN ESFUERZOS DE COMPRESIÓN

La fuerza ejercida por el empotramiento se puede calcular quitándolo y dejando que se produzca la deformación y volviéndolo a poner de tal manera que obligue a la barra a recobrar su tamaño original.



Como en la realidad los empotramientos están impidiendo completamente la deformación debe cumplirse que:

$$\delta_{Temperatura} = \delta_{carga}$$

$$\alpha L \Delta T = \frac{PL}{AE} = \sigma \frac{L}{E}$$

Por lo tanto el esfuerzo generado por el cambio de temperatura es:

$$\sigma = \alpha E \Delta T$$

Siendo  $\alpha$ : Coeficiente de dilatación térmica  
 $\Delta T$ : Incremento de temperatura  
 $E$ : Módulo de elasticidad del material

### 1.9.1 Coeficientes de dilatación térmica

Material	$10^{-6}/^{\circ}\text{C}$	$10^{-6}/^{\circ}\text{F}$
Acero	14	8
Aluminio	23	13
Bronce	18 – 21	9.9 – 11.6
Cobre	16.6 – 17.6	9.2 – 9.8



## PROBLEMA

Calcular los esfuerzos inducidos en un riel de ferrocarril cuando la temperatura se incrementa de 12 a 30 grados centígrados.

Coefficiente de dilatación térmica del acero:  $\alpha = 14 \times 10^{-6} / ^\circ C$



Como se vió, los esfuerzos inducidos por un incremento de temperatura son iguales a:

$$\sigma = \alpha E \Delta T$$

Como:  $\alpha = 14 \times 10^{-6} / ^\circ C$        $E = 200 GPa = 200 \times 10^9 N / m^2$        $\Delta T = 30 - 12 = 18^\circ C$

Entonces, el esfuerzo debido al incremento de temperatura será:

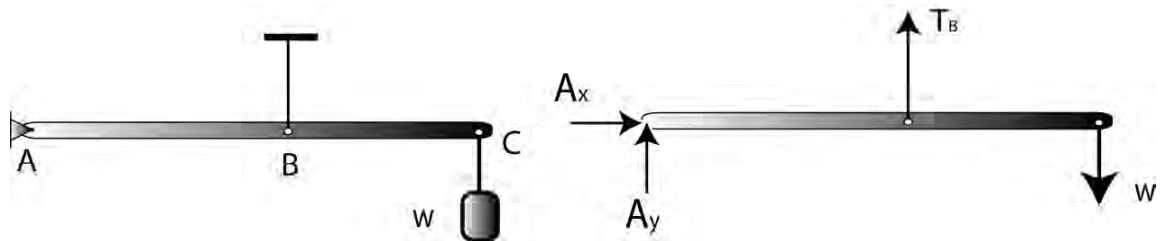
$$\sigma = 14 \times 10^{-6} / ^\circ C \times 200 \times 10^9 N / m^2 \times 18^\circ C = 50400000 N / m^2$$

$$\sigma = 50.4 MPa$$

### 1.10 INDETERMINACIÓN ESTÁTICA EN TENSIÓN Y COMPRESIÓN

Existen situaciones en las cuales por razones de seguridad es necesario colocar elementos estructurales adicionales que al tiempo que suministren más seguridad a la estructura (resistencia), disminuyan las deformaciones que se presentarán (al aumentar la rigidez)

Veamos:



En este caso, mediante la aplicación de las condiciones de equilibrio estático pueden encontrarse las reacciones  $A_x$ ,  $A_y$  y la tensión en el cable  $T_B$ .

$$\sum F_x = 0 \quad \sum F_y = 0 \quad \sum M = 0$$

3 ecuaciones de equilibrio

$A_x$ ,  $A_y$ ,  $T_B$   
3 incógnitas

Al existir un número igual de ecuaciones y de incógnitas se dice que el problema es *Estáticamente determinado*.

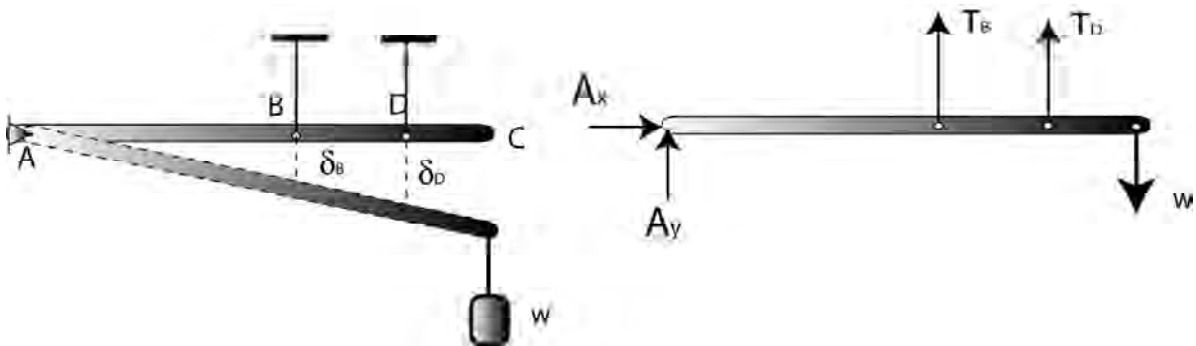
Una vez calculadas las reacciones y la tensión en el cable pueden calcularse, por ejemplo, el esfuerzo cortante en el pasador del apoyo A y el esfuerzo normal en el cable B. Igualmente el alargamiento del cable  $\delta_B = T_B L / AE$ .

Con los esfuerzos actuantes encontrados en el pasador y el cable se tendrá una idea de los factores de seguridad con que trabajará la estructura (comparándolos con los esfuerzos admisibles de los materiales a emplear).

El alargamiento calculado del cable se comparará con las deformaciones admisibles.

A partir del análisis anterior puede encontrarse la necesidad de colocar otro cable con el fin de incrementar la resistencia y la rigidez de la estructura.

Supongamos que se agrega un cable adicional en el punto D:



Evidentemente con el cable adicional en B se tendrá una estructura mas segura y mas rígida.

Sin embargo surge la siguiente situación:

$$\sum F_x = 0 \quad \sum F_y = 0 \quad \sum M = 0$$

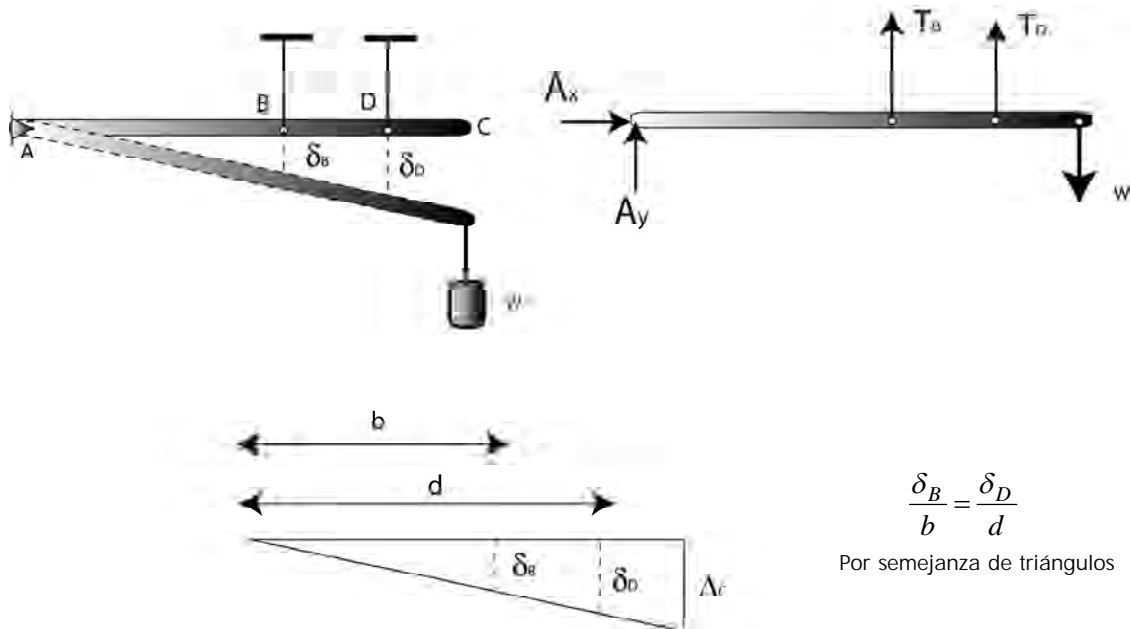
3 ecuaciones de equilibrio

$A_x, A_y, T_B, T_D$   
4 incógnitas

Es obvia la dificultad para calcular 4 incógnitas con las 3 ecuaciones disponibles. Esta situación configura lo que en mecánica estructural se conoce como un problema **Estáticamente indeterminado**.

La única posibilidad de resolverlo es a través de la obtención de una ecuación adicional.

Esta ecuación surge a partir del análisis de las deformaciones como se muestra enseguida:



Como se ve, la ecuación adicional se obtiene a partir de la semejanza de triángulos y se expresa según la siguiente proporción:

$$\frac{\delta_B}{b} = \frac{\delta_D}{d}$$

Como  $\delta_B = T_B L / AE$  y  $\delta_D = T_D L / AE$

$$\frac{T_B L / AE}{b} = \frac{T_D L / AE}{d}$$

y por tanto:  $\frac{T_B}{b} = \frac{T_D}{d}$

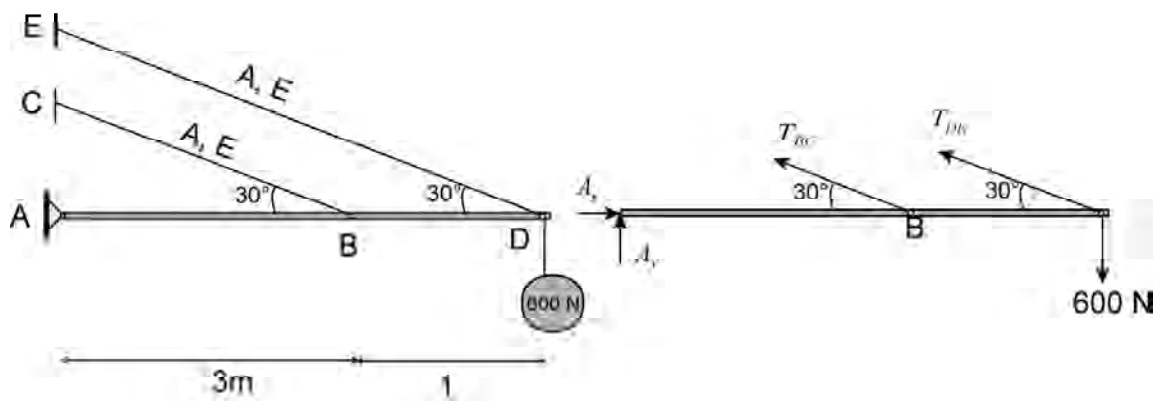
Esta es la cuarta ecuación que necesitamos para levantar la indeterminación estática.

### PROBLEMA

Calcular las tensiones en los cables BC y DE. Sección transversal: A Módulo de elasticidad: E

Considerar que la barra ABD es rígida (no se flexiona)

Diagrama de cuerpo libre de la barra ABD:



$$\sum F_x = 0 \quad A_x - T_{BC} \cos 30^\circ - T_{DE} \cos 30^\circ = 0$$

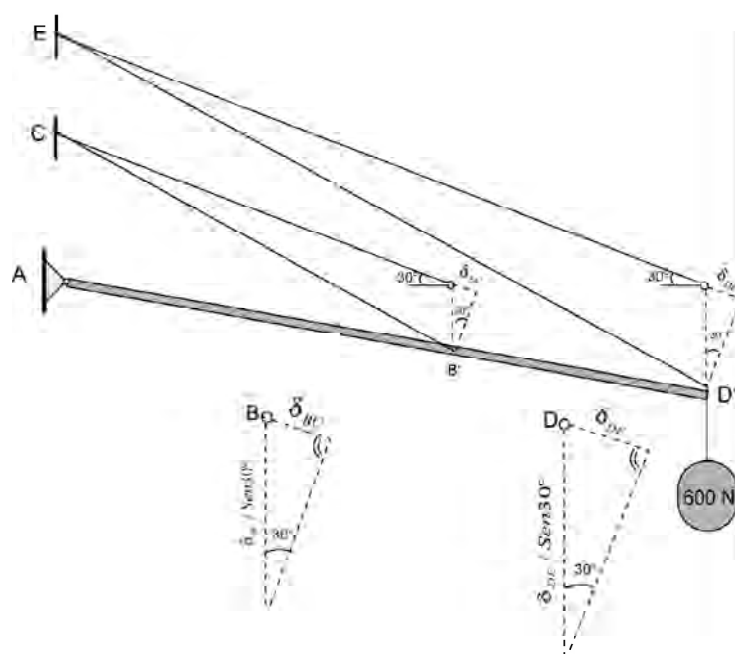
$$\sum F_y = 0 \quad A_y + T_{BC} \sin 30^\circ - T_{DE} \sin 30^\circ - 600 = 0$$

$$\sum M_A = 0 \quad 3T_{BC} \sin 30^\circ + 3T_{DE} \sin 30^\circ - 4 \times 600 = 0$$

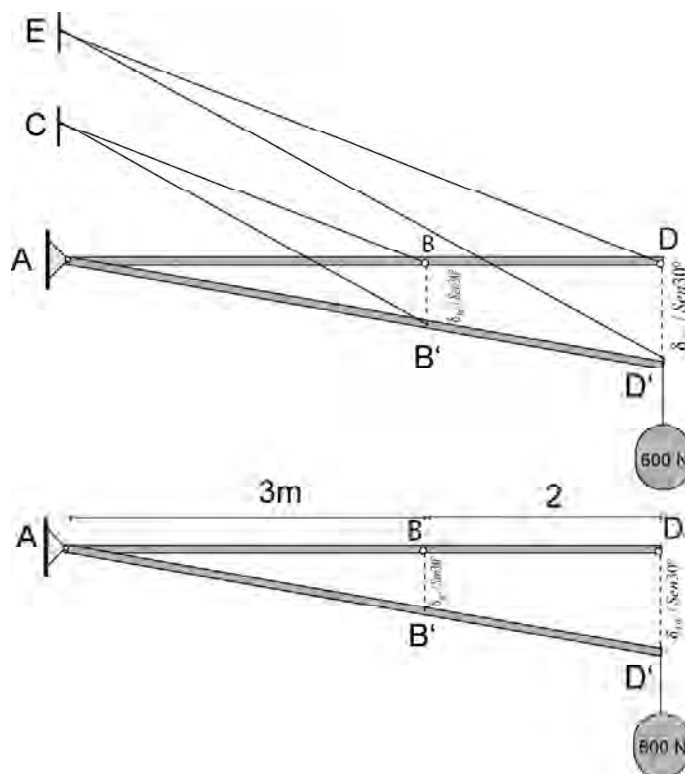
3 ecuaciones, 4 incógnitas  
Estáticamente Indeterminado

Por tanto, debemos encontrar una 4ª ecuación mediante la compatibilidad de deformaciones.

Los dos cables se alargan, quedando la estructura deformada (ampliada) de la siguiente forma:



Por lo tanto:



Por semejanza de triángulos:

$$\frac{\delta_{BC} / \text{Sen}30^\circ}{3} = \frac{\delta_{DE} / \text{Sen}30^\circ}{5}$$

Pero:

$$\delta_{BC} = \frac{T_{BC} \times L_{BC}}{AE} = \frac{T_{BC} \times 3 / \text{Cos}30^\circ}{AE} = \frac{T_{BC} \times 3.46}{AE}$$

$$\delta_{DE} = \frac{T_{DE} \times L_{BC}}{AE} = \frac{T_{DE} \times 5 / \text{Cos}30^\circ}{AE} = \frac{T_{DE} \times 5.77}{AE}$$

Por tanto:

$$\frac{\frac{T_{BC} \times 3.46}{AE} / \text{Sen}30^\circ}{3} = \frac{\frac{T_{DE} \times 5.77}{AE} / \text{Sen}30^\circ}{5}$$

$$\frac{T_{BC} \times 3.46}{3 \text{Sen}30^\circ} = \frac{T_{DE} \times 5.7}{5 \text{Sen}30^\circ}$$

4 ecuación que  
estábamos buscando

$$T_{BC} = T_{DE}$$

Combinamos esta 4ª ecuación con las 3 ecuaciones de equilibrio que teníamos y obtenemos las tensiones en los cables:

$$\sum F_x = 0 \quad A_x - T_{BC} \text{Cos}30^\circ - T_{DE} \text{Cos}30^\circ = 0$$

$$\sum F_y = 0 \quad A_y - T_{BC} \text{Sen}30^\circ - T_{DE} \text{Sen}30^\circ - 600 = 0$$

$$\sum M_A = 0 \quad 3T_{BC} \text{Sen}30^\circ + 5T_{DE} \text{Sen}30^\circ - 5 \times 600 = 0 \quad \longrightarrow \quad T_{BC} = 750N$$

$$T_{BC} = T_{DE} \quad \longrightarrow \quad T_{DE} = 750N$$

## PROBLEMA

Calcular las reacciones en A y B

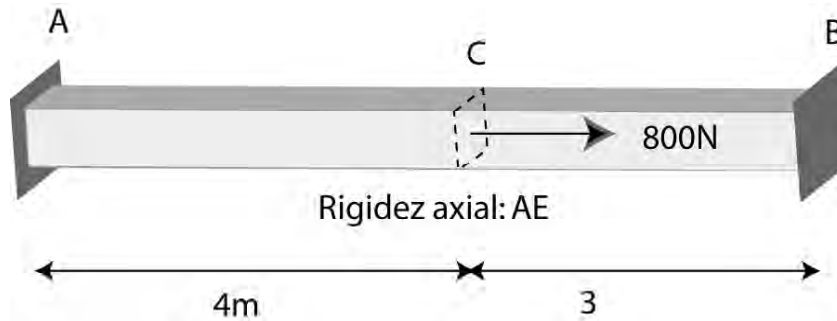


Diagrama de cuerpo libre de toda la barra:

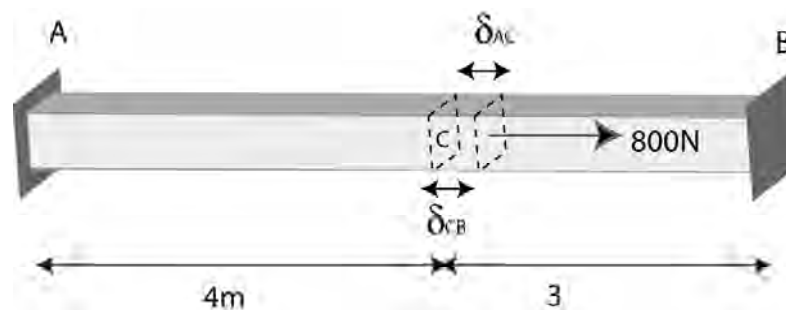


$$\sum F_x = 0 \quad R_A + R_B = 800 \quad 1 \text{ ecuación, 2 incógnitas}$$

Estáticamente indeterminado

Debe obtenerse una ecuación basada en la compatibilidad de las deformaciones:

El alargamiento del tramo AC de la barra debe ser igual al acortamiento del tramo CB (porque la barra está empotrada en los extremos).



$$\delta_{AC} = \delta_{CB}$$

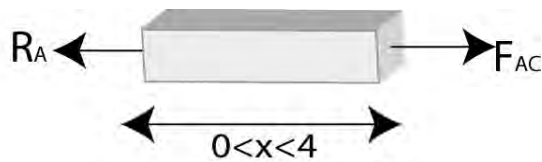
Pero:  $\delta_{AC} = \frac{F_{AC} \times 4}{AE}$  y  $\delta_{CB} = \frac{F_{CB} \times 3}{AE}$

Siendo  $F_{AC}$  y  $F_{CB}$  las fuerzas internas en los respectivos tramos.

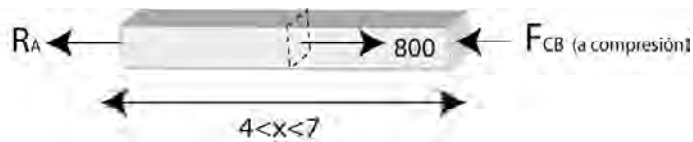
Por tanto:  $\frac{F_{AC} \times 4}{AE} = \frac{F_{CB} \times 3}{AE}$  Esta es la segunda ecuación.

Como está en función de  $\frac{1}{AE}$  (Flexibilidad) se conoce como el Método de la Flexibilidad o de las fuerzas (porque las incógnitas son las fuerzas).

Calculemos  $F_{AC}$  y  $F_{CB}$ : Hacemos dos cortes en la barra, uno en el tramo AC y otro en el tramo CB:



$$\sum F_x = 0 \quad F_{AC} = R_A$$



$$\sum F_x = 0 \quad F_{CB} = 800 - R_A$$

Reemplazando en 2:

$$R_A \times 4 = (800 - R_A) \times 3$$

$$R_A = 342.85N$$



Y por tanto:

$$R_B = 457.15N$$

Resolver el mismo problema considerando las deformaciones como incógnitas: Método de la Rigidez.

El análisis externo es igual:

Diagrama de cuerpo libre de toda la barra:

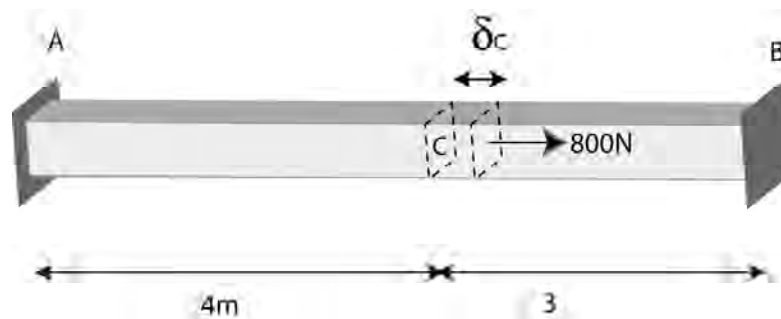


$$\sum F_x = 0 \quad R_A + R_B = 800 \quad 1 \text{ ecuación, } 2 \text{ incógnitas}$$

Estáticamente indeterminado

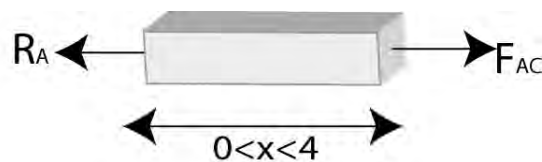
Análisis interno

Tomemos el desplazamiento del punto C como incógnita:



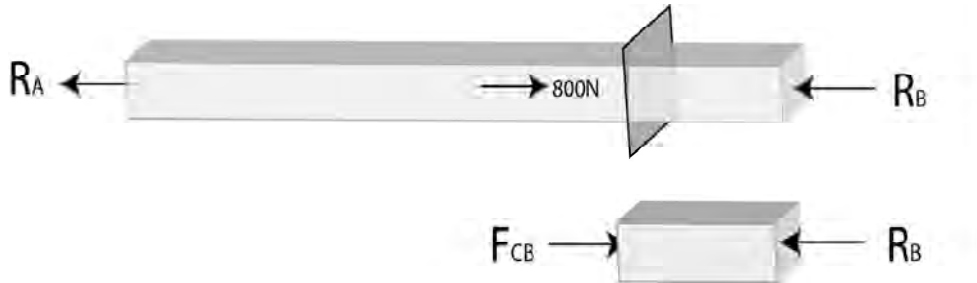
Como se puede ver:  $\delta_C = \delta_{AC} = \delta_{CB}$

Haciendo cortes nuevamente:



$$\sum F_x = 0 \quad F_{AC} = R_A$$

$$\delta_C = \delta_{AC} = \frac{R_A \times 4}{AE} \quad \text{Por tanto } R_A = \frac{\delta_C \times AE}{4}$$



$$\sum F_x = 0 \quad F_{CB} = R_B$$

$$\delta_C = \delta_{CB} = \frac{R_B \times 3}{AE} \quad \text{Por tanto } R_B = \frac{\delta_C \times AE}{3}$$

Ahora como:  $R_A + R_B = 800$

$$\frac{\delta_C \times AE}{4} + \frac{\delta_C \times AE}{3} = 800$$

La ecuación está en función de las rigideces  $AE$ : Método de la Rigidez, y las incógnitas son los desplazamientos

$$\frac{7\delta_C AE}{12} = 800$$

$$\delta_C = \frac{1371.43}{AE}$$

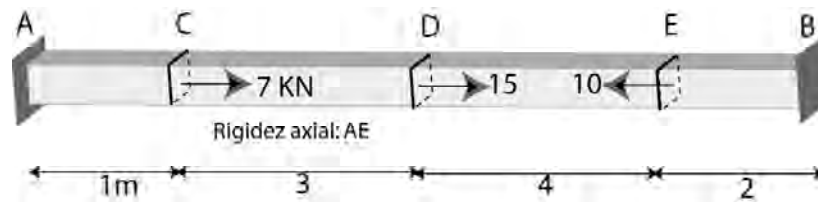
Y finalmente:  $R_A = \frac{\delta_C \times AE}{4} = \frac{1371.43 \times AE}{3AE} = 342.85$

$$R_B = \frac{\delta_C \times AE}{3} = \frac{1371.43 \times AE}{3AE} = 457.15$$

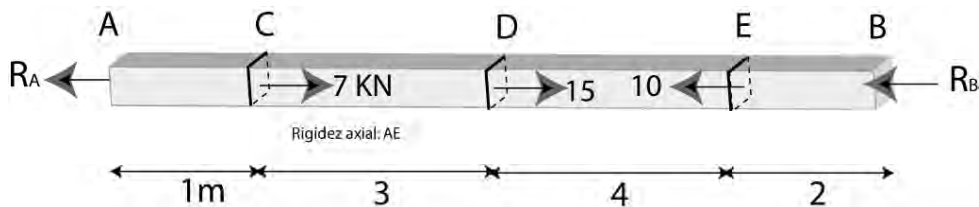
En los dos problemas anteriores al calcular las fuerzas internas ha sido necesario tener en cuenta si cada tramo en consideración estaba sometido a tensión o a compresión. Para evitar incurrir en errores derivados de este hecho puede asumirse que todos los tramos estarán sometidos a tensión y por lo tanto sufrirán alargamientos. Al final el signo de las fuerzas halladas nos dirá cuáles están efectivamente a tensión y cuáles a compresión.

## PROBLEMA

Calcular las reacciones en los empotramientos A y B:



Análisis externo:



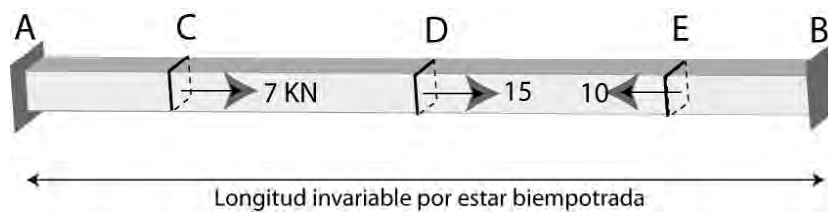
$$\sum F_x = 0 \quad R_A + R_B = 12 \quad 1 \text{ Ecuación, } 2 \text{ Incógnitas}$$

Estáticamente indeterminado

Debe obtenerse una ecuación basada en la compatibilidad de las deformaciones.

La deformación resultante de la barra es igual a cero pues los dos extremos son apoyos rígidos. Esto equivale a decir que la suma de las deformaciones internas de los diferentes tramos es igual a cero.

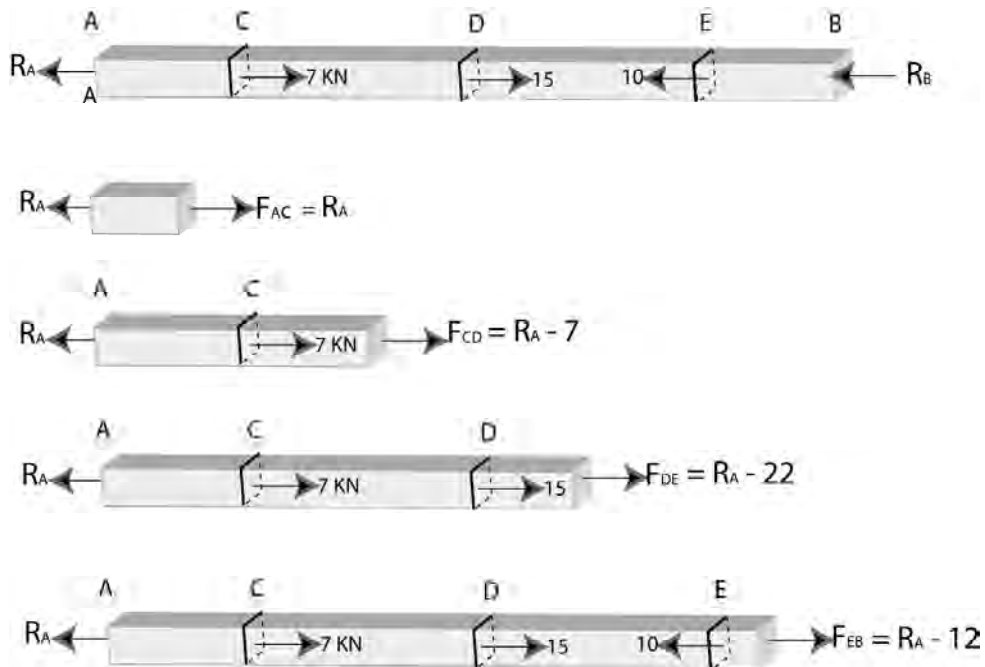
$$\delta_{AC} + \delta_{CD} + \delta_{DE} + \delta_{EB} = 0$$



$$\delta_{AC} + \delta_{CD} + \delta_{DE} + \delta_{EB} = 0$$

$$\frac{F_{AC} \times 1}{AE} + \frac{F_{CD} \times 3}{AE} + \frac{F_{DE} \times 4}{AE} + \frac{F_{EB} \times 2}{AE} = 0$$

Análisis interno:



Reemplazando:

$$\frac{R_A \times 1}{AE} + \frac{(R_A - 7) \times 3}{AE} + \frac{(R_A - 22) \times 4}{AE} + \frac{(R_A - 12) \times 2}{AE} = 0$$

Por tanto:  $R_A = 13.3 \text{ kN}$

y:  $R_B = -1.3 \text{ kN}$      $R_B = 1.3 \text{ kN}$  (flecha derecha)

Con estos valores pueden calcularse las fuerzas internas:

$$F_{AC} = R_A = 13.3$$

$$F_{CD} = R_A - 7 = 6.3$$

$$F_{DE} = R_A - 22 = -8.7 \quad F_{DE} = 8.7 \text{ (Compresión)}$$

$$F_{EB} = R_A - 12 = 1.3$$