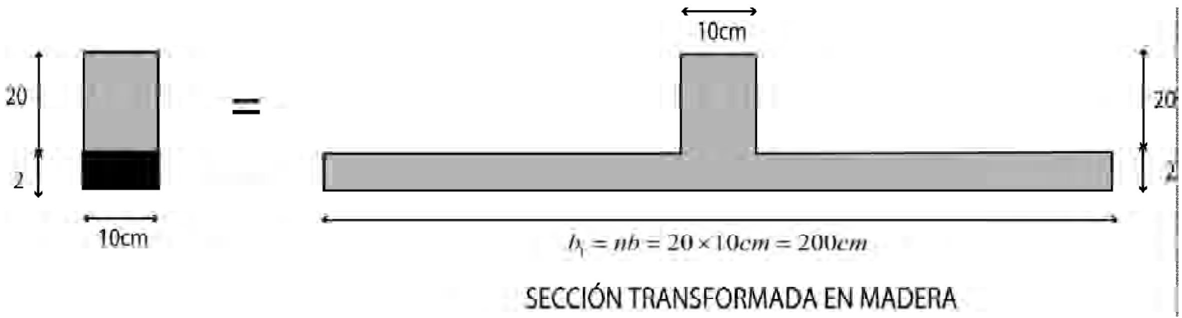
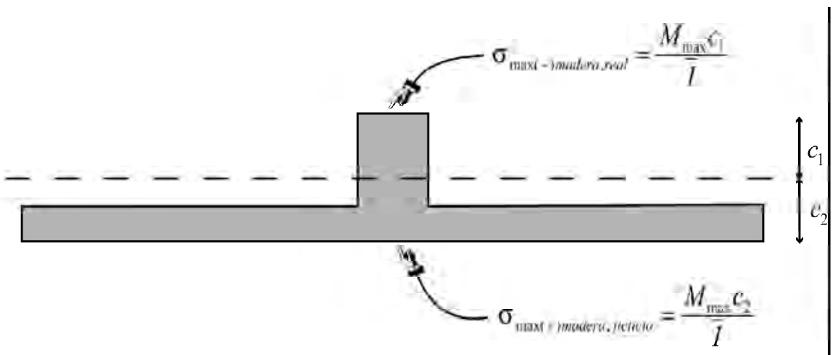
Método de la sección transformada. Transformemos la sección en madera:

$$n = \frac{E_{acero}}{E_{madera}} = \frac{200GPa}{10GPa} = 20$$



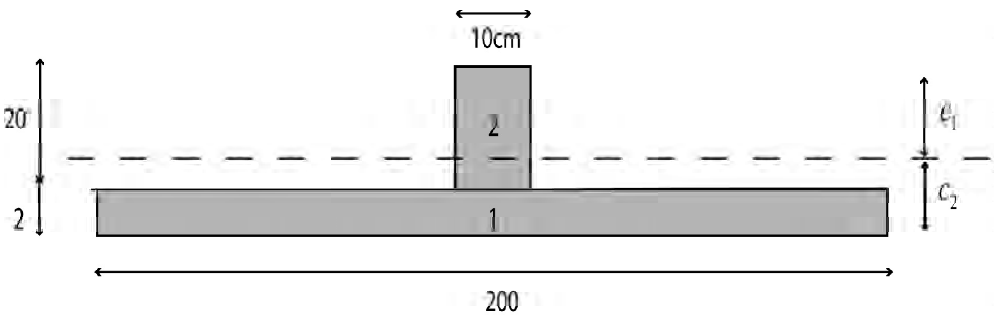
Analicemos la viga como si fuera toda de madera:



Calculemos $c_1, c_2, e\, I$

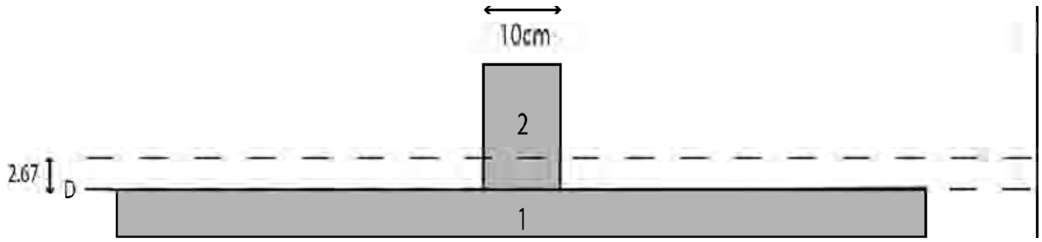
$$\bar{y} = \frac{A_1 y_1 + A_2 y_2}{A_1 + A_2} = \frac{400 \times I + 200 \times 12}{400 + 200} = 4.67 = c_2$$

$$c_1 = 22 - 4.67 = 17.33$$



$$\bar{I} = I_D - Ad^2 = 27200 - 600(2.67)^2 = 22922.67cm^4$$

$$I_D = \frac{200 \times 2^3}{3} + \frac{10 \times 20^3}{3} = 27200cm^4$$



Finalmente, calculamos los esfuerzos en la madera y en el acero:

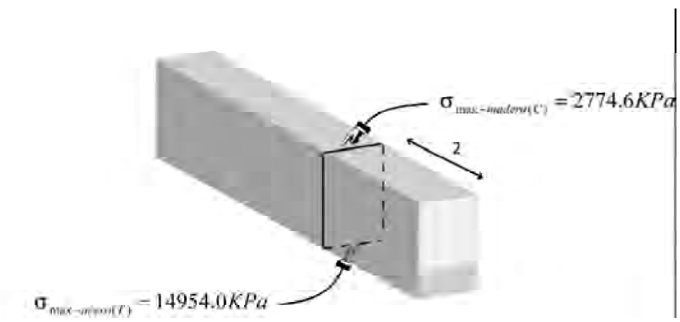
$$\sigma_{max(-)madera,real} = \frac{M_{max}c_1}{\bar{I}} = \frac{3600N \times 100cm \times 17.33cm}{22922.67cm^4} = 272.16\frac{N}{cm^2} \times \frac{10^4 cm^2}{m^2} = 2721.6KPa$$

$$\sigma_{max(+)madera,ficticio} = \frac{M_{max}c_2}{\bar{I}} = \frac{3600N \times 100cm \times 4.67cm}{22922.67cm^4} = 73.34\frac{N}{cm^2} \times \frac{10^4 cm^2}{m^2} = 733.4KPa$$

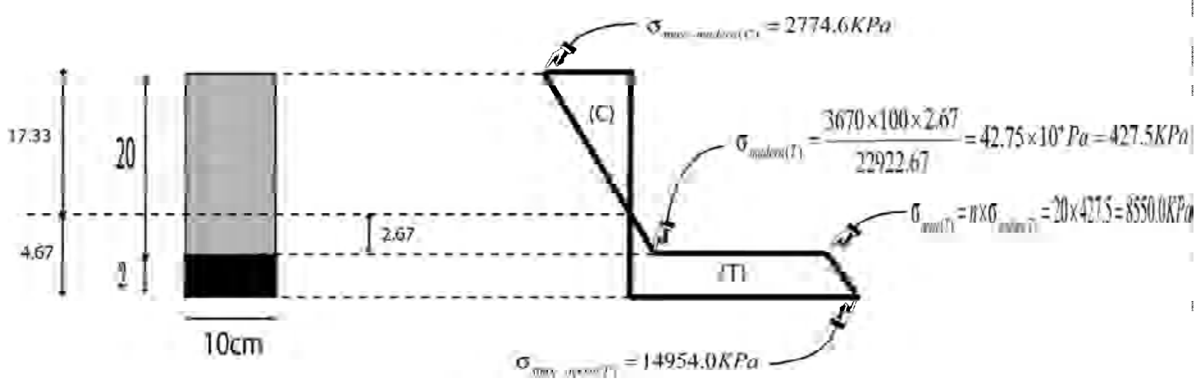
Como en la realidad en la parte inferior de la viga no hay madera sino una platina de acero, debemos "devolvernos" por así decirlo y multiplicar este esfuerzo ficticio por n para obtener el esfuerzo real en el acero:

$$\sigma_{\max(+)acero,real} = n \times \sigma_{\max(+)madera,ficticio} = 20 \times 747.7KPa = 14954KPa$$

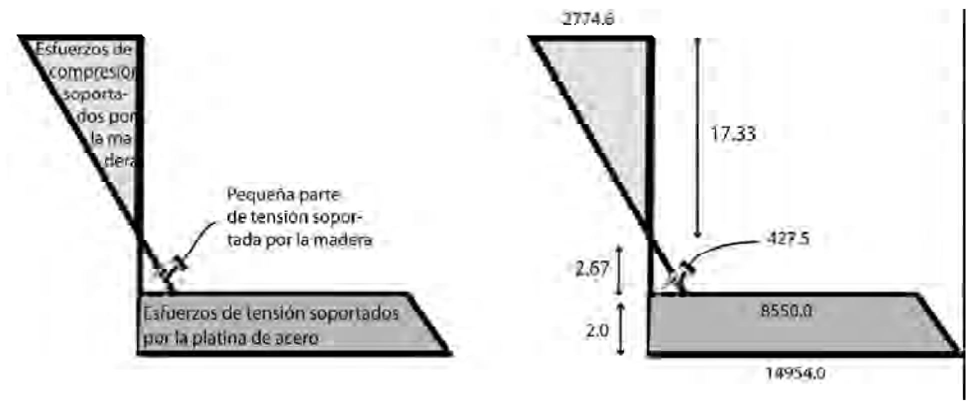
En conclusión hemos encontrado los siguientes esfuerzos máximos en la viga:



Variación de esfuerzos a través de la sección:



La viga entonces, absorberá los esfuerzos de la siguiente forma:



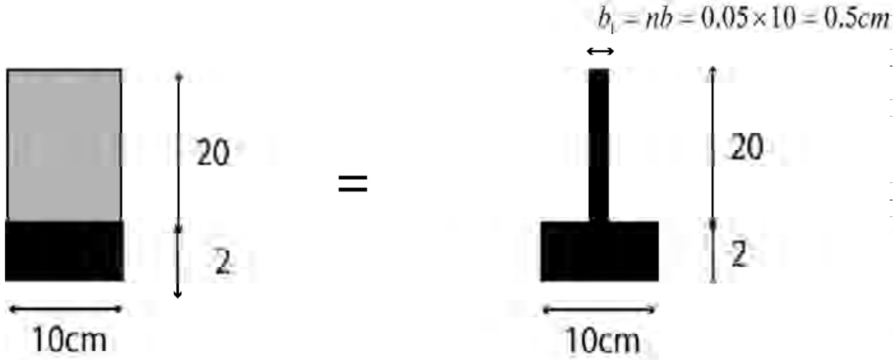
Como se ve, la platina de acero soporta la mayor parte de los esfuerzos de tensión.

La viga también puede analizarse transformando toda la sección en acero. Veámoslo a continuación.

Resolución del problema transformando la viga en acero

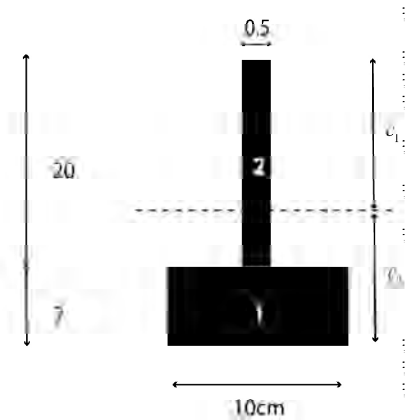
Vamos a transformar toda la viga en acero. Por lo tanto:

$$n = \frac{E_{madera}}{E_{acero}} \frac{10GPa}{200GPa} = 0.05$$



Sección transformada en acero

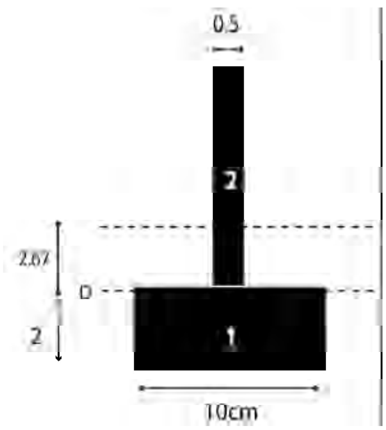
Analicemos la sección transformada:



$$\bar{y} = \frac{A_1 y_1 + A_2 y_2}{A_1 + A_2} = \frac{20\times 1 + 10\times 12}{20+10} = 4.67 = c_2$$

$$c_1 = 22 - 4.67 = 17.33$$

Cálculo del momento de inercia:

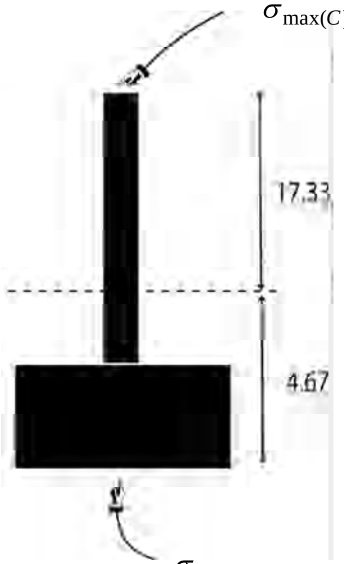


$$\bar{I} = I_D - Ad^2 = 1360 - 30(2.67)^2 = 1146.13$$

$$I_D = \frac{10\times 2^3}{3} + \frac{0.5\times 20^3}{3} = 1360$$

Cálculo de los esfuerzos:

$$\sigma_{\max(C)acero,\,ficticio} = \frac{3670 \times 100 \times 17.33}{1146.13} = 5549.20 \times 10^4\,Pa = 55492KPa$$



$$\sigma_{\max(T)acero,real} = \frac{3670 \times 100 \times 4.67}{1146.13} = 1493.37 \times 10^4\,Pa = 14953.7KPa$$

Esfuerzo máximo en la madera:

$$\sigma_{\max(C)madera,real} = n \times \sigma_{\max(C)acero,\,ficticio} = 0.05 \times 55492 = 2774.6KPa$$

En resumen:

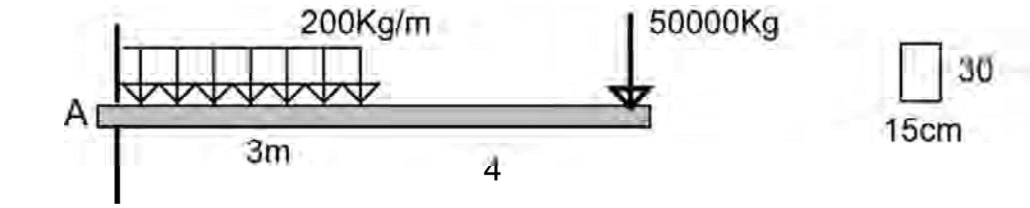
$$\sigma_{\max(C)madera,real} = 2774.6KPa$$

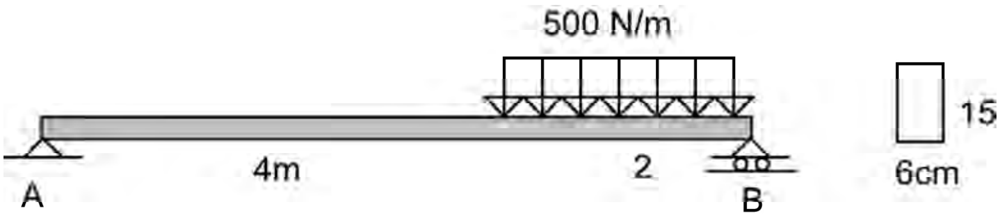
$$\sigma_{\max(T)acero,real} = 14953.7KPa$$

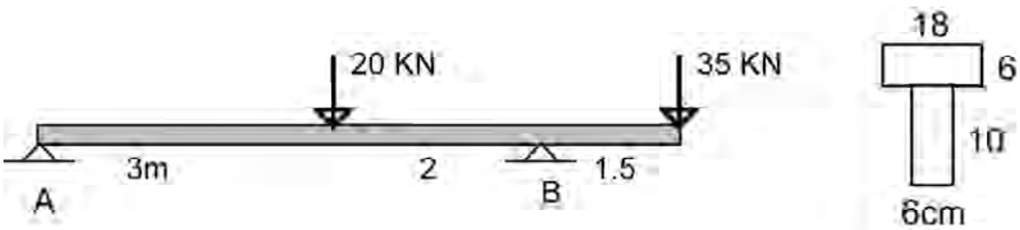
Obviamente, los valores son iguales a los que obtuvimos transformando la sección en madera

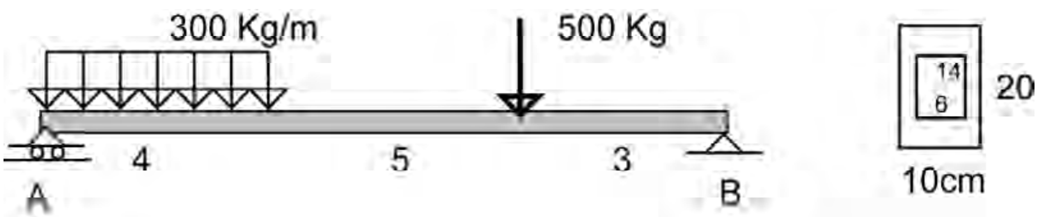
PROBLEMAS PROPUESTOS

Calcular los esfuerzos normales y cortantes máximos en las siguientes vigas









NÓTENSE LAS DEFORMACIONES Y FISURAS EN LOS EXTREMOS DE LA VIGA

Tal como se ha dicho, un elemento estructural no sólo debe ser resistente a la rotura sino que debe tener unas condiciones de rigidez adecuadas de tal manera que se cumplan algunas condiciones mínimas, a saber:

- Que se garantice la funcionalidad de la estructura evitando grandes deformaciones que podrían afectar su desempeño. (Por ejemplo el alineamiento y nivelación de equipos).
- Que no se afecte la estética de la estructura con la aparición de grietas, producto de grandes deformaciones.

NÓTESE AGRIETAMIENTO DE LA VIGA EN LA SECCIÓN DE MOMENTO NEGATIVO, POR FALTA DE REFUERZO

Adicionalmente como se ha visto, en el caso de vigas estáticamente indeterminadas es necesario obtener ecuaciones adicionales basadas en las deformaciones que nos ayuden a levantar la indeterminación y así poder resolverlas.

De otra parte, en los próximos cursos de ingeniería estructural se requerirán los conocimientos relativos a los métodos de cálculo de deformaciones en vigas para poder afrontar el estudio de estructuras estaticamente indeterminadas (por ejemplo en el método conocido como pendiente- deflexión o *slope deflection).*

Por estos motivos se hace necesario calcular las deformaciones que se producen en las vigas cuando están son sometidas a cargas.

Existen varios **métodos para calcular las deformaciones en vigas:**

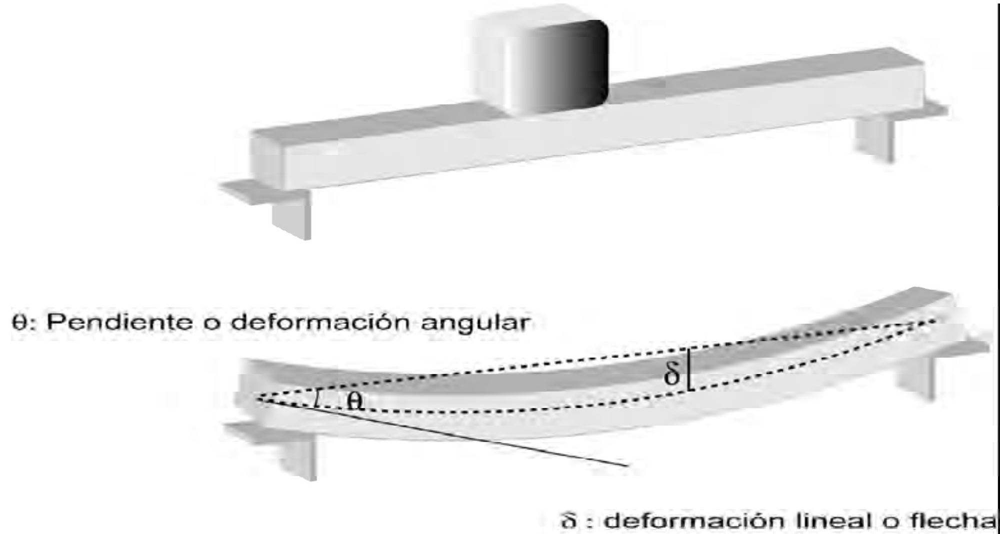
- **Métodos matemáticos:** Método de la doble integración o de la Ecuación de la elástica.

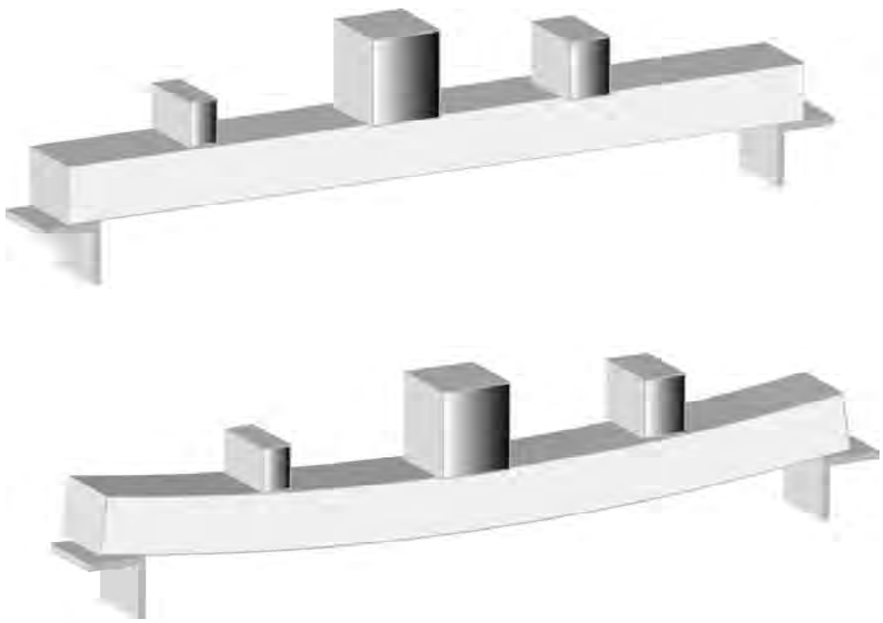
- **Métodos geométricos:** Basados en la forma de la viga deformada. El mas conocido es el método del Área de momentos o Teoremas de Mohr.

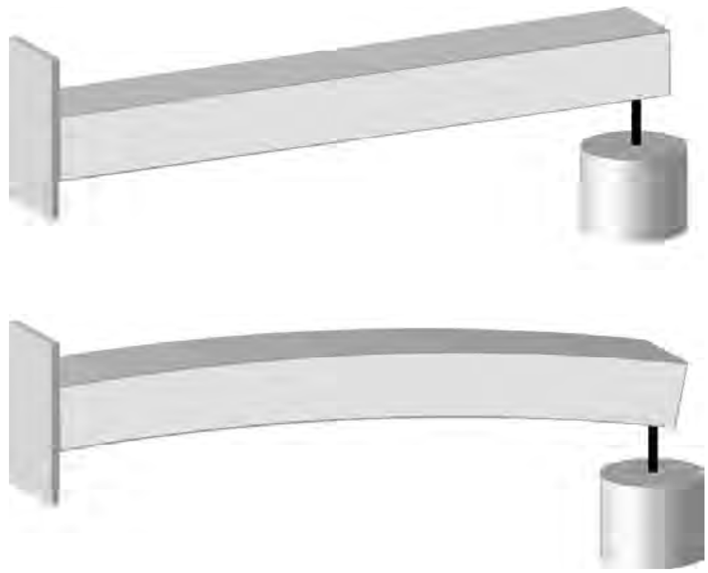
- **Métodos derivados de los anteriores:** Método de la viga conjugada conocido en algunos textos como Método de los Pesos Elásticos.

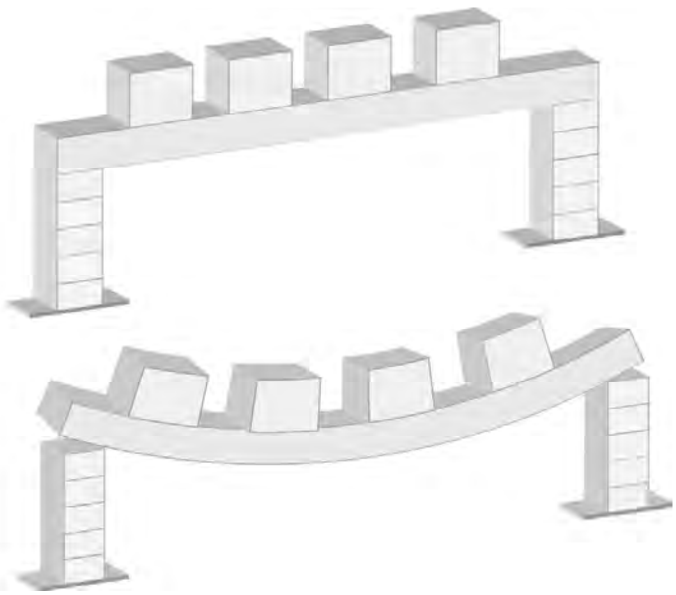
- **Métodos energéticos:** Basados en la conservación de la energía desarrollada por las fuerzas al deformar las vigas. (Teoremas de Maxwell, de Castigliano y otros).

Tipos de deformaciones

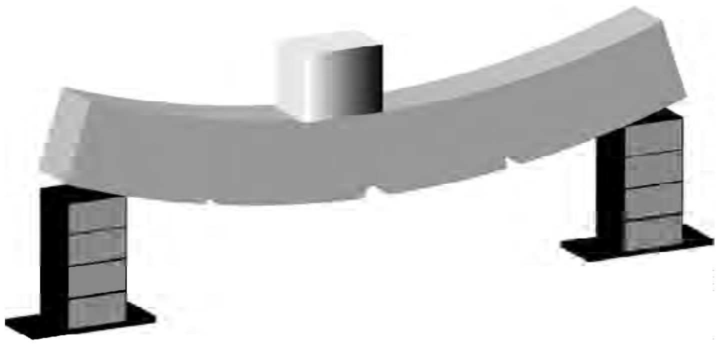




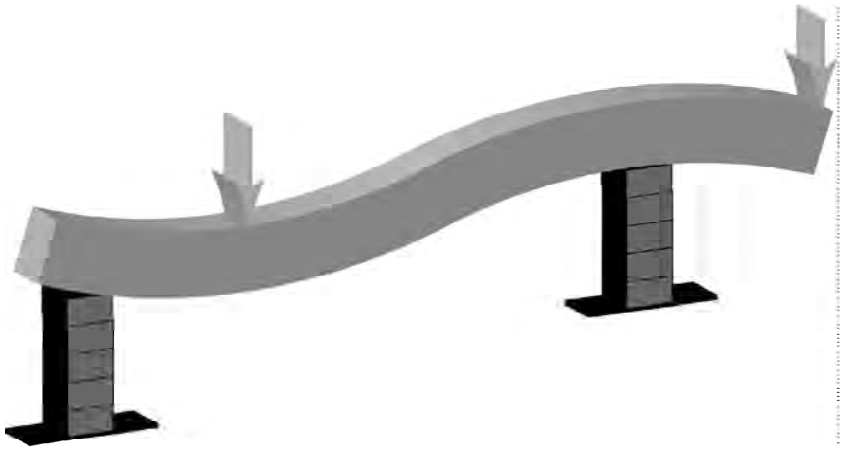




Funcionalidad afectada por deformaciones excesivas (se desnivelan los elementos soportados por la viga).



Deformaciones excesivas pueden causar agrietamientos que afectan la estética de las estructuras.



Deformaciones con concavidades contrarias.

4.1 MÉTODO DE LA DOBLE INTEGRACIÓN

En la teoría de flexión se vió que: $\dfrac{1}{\rho} = \dfrac{M}{EI}$

En matemáticas se tiene que:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{\dfrac{d^2y}{dx^2}}{\left[1+\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}$$

Por lo tanto:

$$\frac{\frac{d^2y}{dx^2}}{\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}} = \frac{M}{EI}$$ pero $\left(\frac{dy}{dx}\right) \approx 0$ las pendientes en las vigas son muy pequeñas

Con mayor razón: $\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 \approx 0$

En conclusión: $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{M}{EI} = y''$ o lo que es lo mismo: $\boxed{EIy'' = M}$

$$EIy'' = M$$

EI: Rigidez a la flexión

y'': segunda derivada de la ecuación de la viga deformada o elástica

M: Ecuación del momento flector en el tramo de viga considerado

Si integramos esta ecuación obtenemos la ecuación de la pendiente y':

$$EIy' = \int M dx + C_1$$

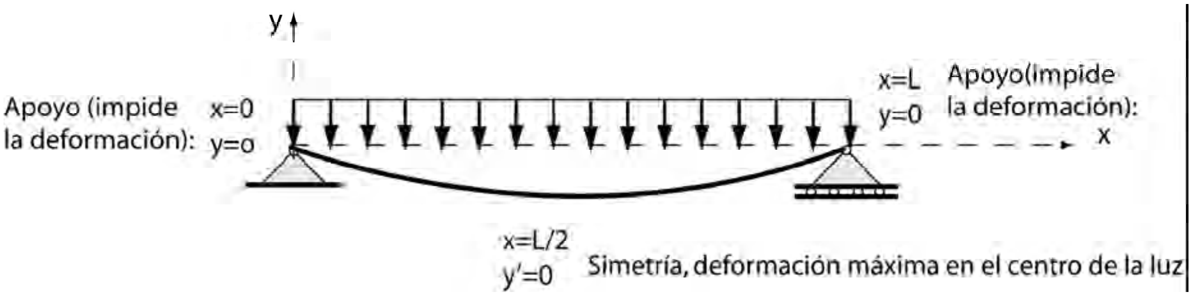
Si integramos otra vez (doble integración) obtenemos la ECUACIÓN DE LA ELÁSTICA:

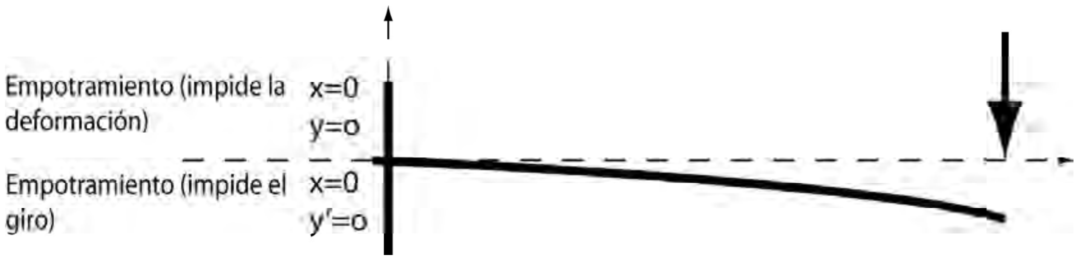
$$\boxed{EIy = \iint M dx + C_1 x + C_2}$$ ECUACIÓN DE LA ELÁSTICA

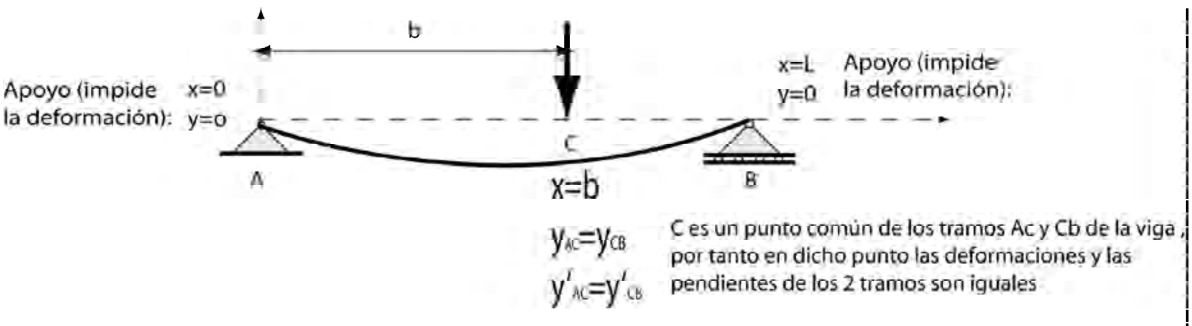
Con estas ecuación podemos calcular la pendiente y' o la deformacion y en cualquier punto de la viga.

Las constantes C_1 y C_2 se calculan estableciendo las condiciones iniciales o de borde que dependen de los apoyos y las características de la viga y de las cargas como se verá en los ejemplos.

CONDICIONES INICIALES EN DIFERENTES TIPOS DE VIGAS







PROBLEMA

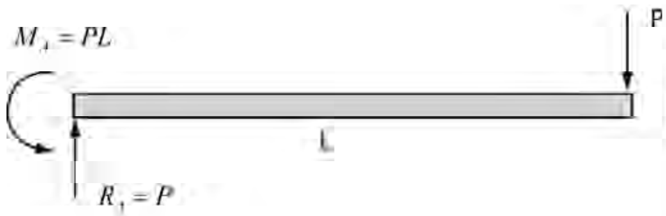
Calcular la deformación en el extremo libre B de la viga en voladizo:

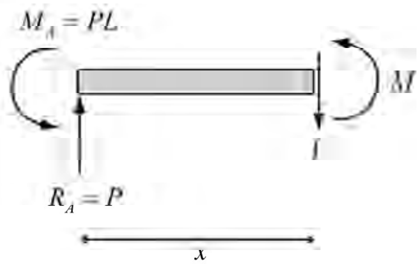
Tal como se vió en el método de doble integración:

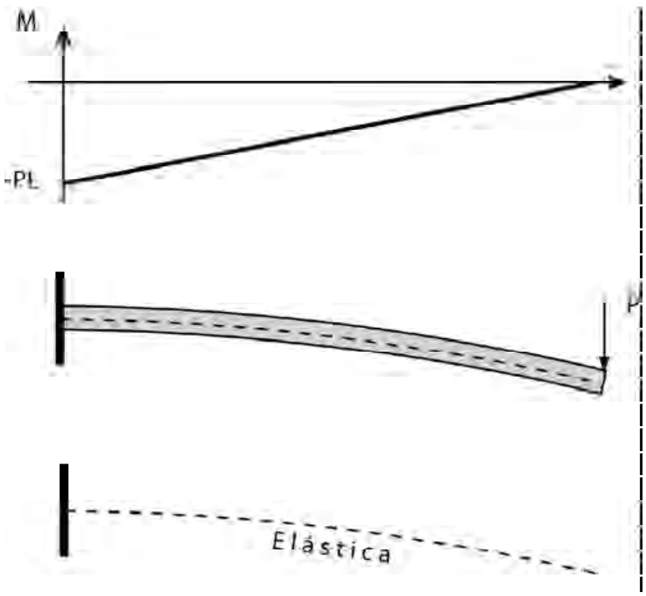
$$EIy'' = M$$

Para poder integrar necesitamos la ecuación del momento flector M. Para encontrarla hacemos un corte a una distancia x del empotramiento A.

$$\sum M = 0 \qquad M + PL - Px = 0$$







Ecuación del momento:

$$M = Px - PL$$

Por lo tanto:

$$EIy'' = Px - PL$$

Integrando una vez:

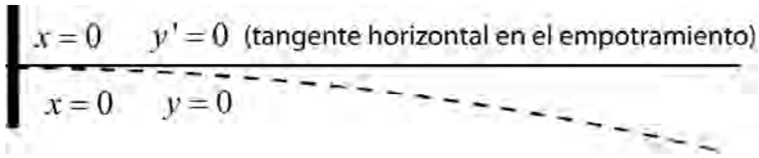
$$EIy' = \frac{Px^2}{2} - PLx + C_1$$

Integrando otra vez (doble integración):

$$EIy = \frac{Px^3}{6} - \frac{PLx^2}{2} + C_1x + C_2$$

Para calcular C_1 y C_2 debemos establecer las condiciones iniciales. Para esto, observamos el problema físico, la viga empotrada en A. En el empotramiento (x=0) se están impidiendo tanto la deformación (y=0) como el giro (y'=0). Recordemos que un empotramiento por definición es un apoyo que impide el giro.

Entonces:



Condiciones iniciales: $x = 0 \qquad y = 0$

$x = 0 \qquad y' = 0$

$x = 0 \qquad y = 0 \qquad \overset{0}{EIy} = \overset{0}{\dfrac{Px^3}{6}} - \overset{0}{\dfrac{PLx^2}{2}} + \overset{0}{C_1 x} + C_2$ por tanto: $C_2 = 0$

$x = 0 \qquad y' = 0 \qquad \overset{0}{EIy'} = \overset{0}{\dfrac{Px^2}{2}} - \overset{0}{PLx} + C_1$ por tanto: $C_1 = 0$

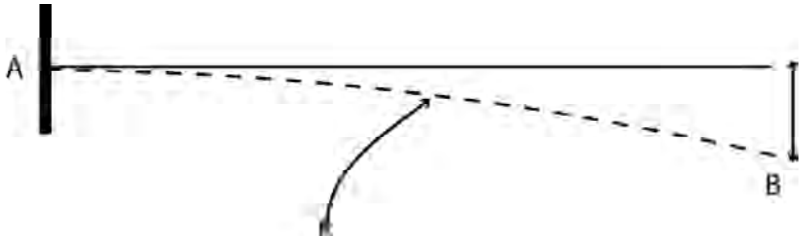
Al ser las dos constantes iguales a cero, las ecuaciones quedan:

Ecuación de la elástica: $EIy = \dfrac{Px^3}{6} - \dfrac{PLx^2}{2} \qquad y = \dfrac{1}{EI}\left(\dfrac{Px^3}{6} - \dfrac{PLx^2}{2}\right)$

Ecuación de la pendiente: $EIy' = \dfrac{Px^2}{2} - PLx \qquad y' = \dfrac{1}{EI}\left(\dfrac{Px^2}{2} - PLx\right)$

Cálculo de la deformación en el extremo B:

$$\delta_B = y_{(L)}$$



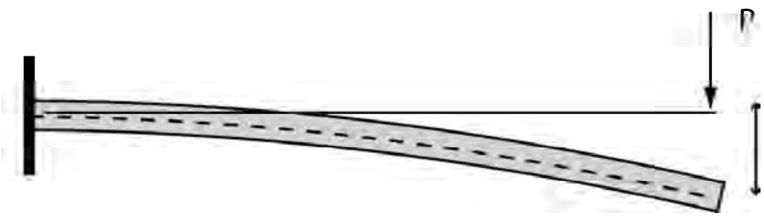
$$\delta_B = y_{(L)}$$

$$y = \frac{1}{EI}\left(\frac{Px^3}{6} - \frac{PLx^2}{2}\right)$$

$$\delta_B = \frac{1}{EI}\left(\frac{PL^3}{6} - \frac{PL^3}{2}\right) = -\frac{PL^3}{3EI}$$

$$\boxed{\delta_B = -\frac{PL^3}{3EI}}$$

Análisis de deformación

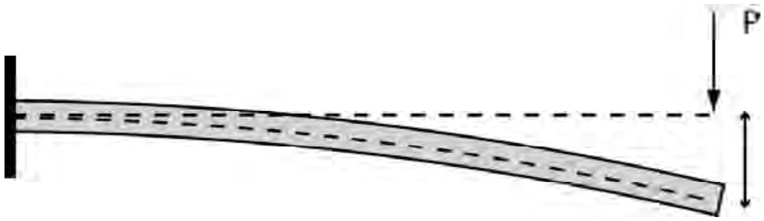


$$\delta_B = -\frac{PL^3}{3EI}$$

Vemos que mientras mayores sean P y L mayor será la deformación y que mientras mayor sea EI, será menor.

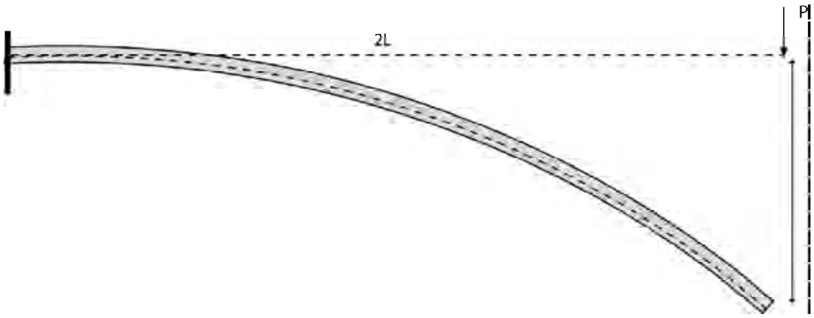
EI: Rigidez a la flexión. Para un material dado (E), la deformación depende del momento de la inercia.

Influencia del momento de inercia en la deformación



$$\delta_B = -\frac{PL^3}{3EI}$$

Si duplicamos la longitud de la viga tendremos:

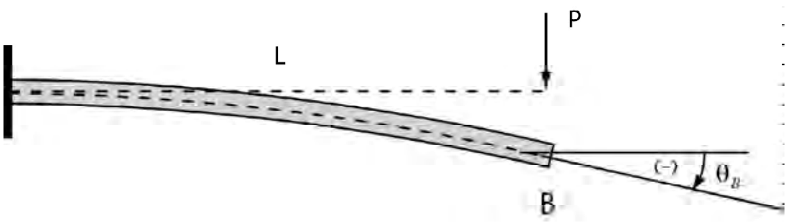


$$\delta_B = -\frac{P(2L)^3}{3EI} = -\frac{8PL^3}{3EI}$$

Al duplicar la longitud, la deformación se hace 8 veces más grande

Cálculo de la pendiente de la viga en B:

Ecuación pendiente: $y' = \frac{1}{EI}\left(\frac{Px^2}{6} - PLx\right)$

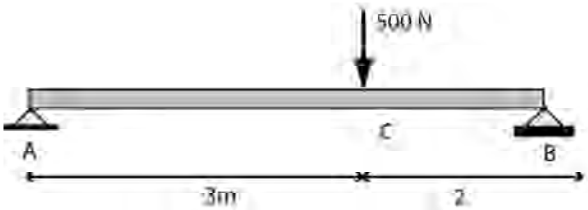


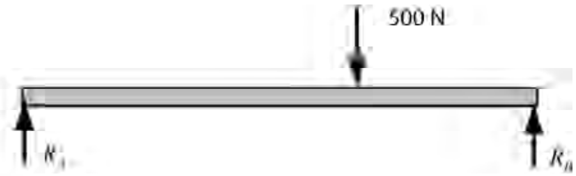
$$\theta_B = y'_{(L)}$$

$$\theta_B = \frac{1}{EI}\left(\frac{PL^2}{2} - PL^2\right) = -\frac{PL^2}{2EI}$$

PROBLEMA

Calcular la deformación máxima en la viga, la pendiente en los apoyos A y B y la deformación en el centro de la luz



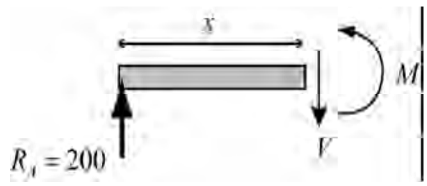


$$\sum M_A = 0 \qquad 5R_B - 3\times 500 = 0 \qquad R_B = 300$$

$$\sum F_y = 0 \qquad R_A = 500 - 300 = 200$$

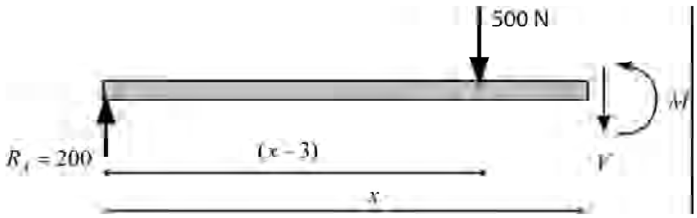
En este caso la ecuación de momentos no es única para toda la viga: tiene una expresión distinta en cada uno de los 2 tramos. Veamos:

$0 < x < 3$



$$M = 200x$$

$3 < x < 5$



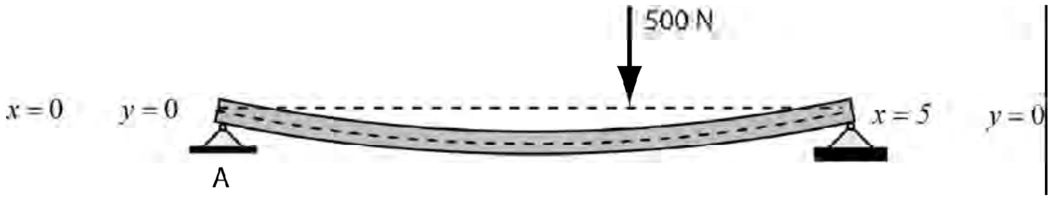
$$M = 200x - 500(x-3)$$

Encontremos la ecuación de la elástica para cada tramo:

$0 < x < 3$	$3 < x < 5$
$EIy'' = 200x$	$EIy'' = 200x - 500(x-3)$
$EIy' = \dfrac{200x^2}{2} + C_1$	$EIy' = \dfrac{200x^2}{2} - \dfrac{500(x-3)^2}{2} + D_1$
$EIy = \dfrac{200x^3}{6} + C_1 x + C_2$	$EIy = \dfrac{200x^3}{6} - \dfrac{500(x-3)^3}{6} + D_1 x + D_2$

Tenemos 4 constantes. Necesitamos por tanto 4 condiciones iniciales

Condiciones iniciales:



$$x = 3 \qquad y_{AC} = y_{CB}$$
$$x = 3 \qquad y'_{AC} = y'_{CB}$$

C es un punto común de los tramos AC y CB. Por tanto en dicho punto las ordenadas y las pendientes de los 2 tramos son iguales

$$x = 0 \quad y = 0 \quad EIy = \frac{200x^3}{6} + C_1 x + C_2$$

$$x = 5 \quad y = 0 \quad EIy = \frac{200x^3}{6} - \frac{500(x-3)^3}{6} + D_1 x + D_2$$

$$x = 3 \quad y_{AC} = y_{CB} \quad EIy = \frac{200x^3}{6} + C_1 x + C_2 = EIy = \frac{200x^3}{6} - \frac{500(x-3)^3}{6} + D_1 x + D_2$$

$$x = 3 \quad y'_{AC} = y'_{CB} \quad EIy = \frac{200x^3}{2} + C_1 = EIy' = \frac{200x^2}{2} - \frac{500(x-3)^2}{2} + D_1$$

$$C_2 = 0$$

$$0 = \frac{200 \times 5^3}{6} - \frac{500 \times 2^3}{6} + 5D_1 + C_2 = 0$$

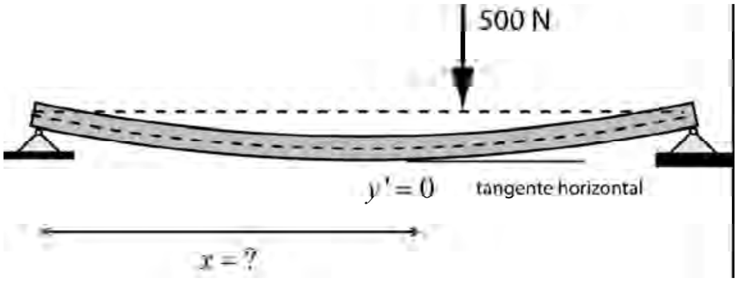
$$5C_1 = 5D_1 + D_2$$

$$C_1 = D_1$$

De estas cuatro ecuaciones obtenemos:

$$C_2 = 0 \qquad D_2 = 0 \qquad C_1 = D_1 = -700$$

Deformación máxima: Por observación vemos que ocurre en el tramo AC de la viga. Ademá es en dicho punto la tangente a la elástica horizontal, es decir $y'=0$.



$$\delta_{\max} = y \quad en \quad y' = 0$$

La ecuación de la pendiente para el tramo AC es:

$$EIy' = \frac{200x^2}{2} + C_1$$

Por tanto:

$$0 = \frac{200x^2}{2} + C_1 = \frac{200x^2}{2} - 700$$

$x = 2.65$ En este punto ocurre la deformación máxima

$$\delta_{\max} = y_{(2.65)} = \frac{1}{EI}\left(\frac{200 \times 2.65^3}{6} - 700 \times 2.65\right) = -\frac{1234.68}{EI}$$

Pendientes en los apoyos A y B:

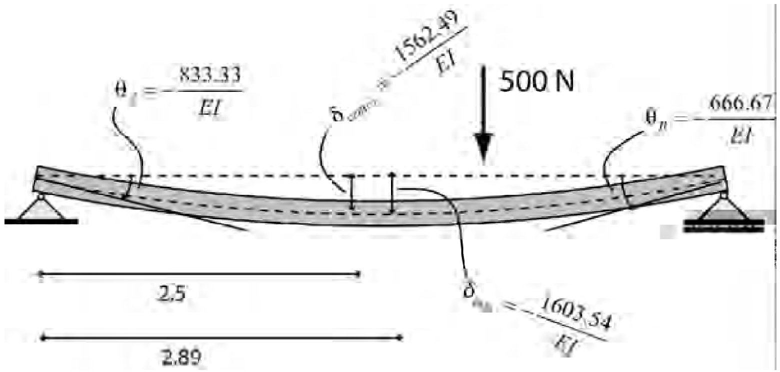
$$\theta_A = y'_{(0)} = \frac{1}{EI}\left(\frac{200x^2}{2} + C_1\right) = \frac{1}{EI}\left(\frac{200 \times 0^2}{2} - 700\right) = -\frac{700}{EI}$$

$$\theta_B = y'_{(5)} = \frac{1}{EI}\left(\frac{200x^2}{2} - \frac{500(x-3)^2}{2} + D_1\right) = \frac{1}{EI}\left(\frac{200 \times 5^2}{2} - \frac{500(5-3)^2}{2} - 700\right) = -\frac{800}{EI}$$

Deformación en el centro de la viga:

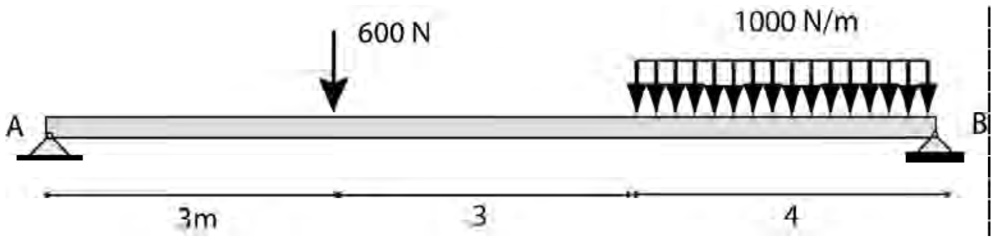
$$\delta_{centro} = y_{(2.5)} = \frac{1}{EI}\left(\frac{200 \times 2.5^3}{6} - 700 \times 2.5\right) = -\frac{1229.17}{EI}$$

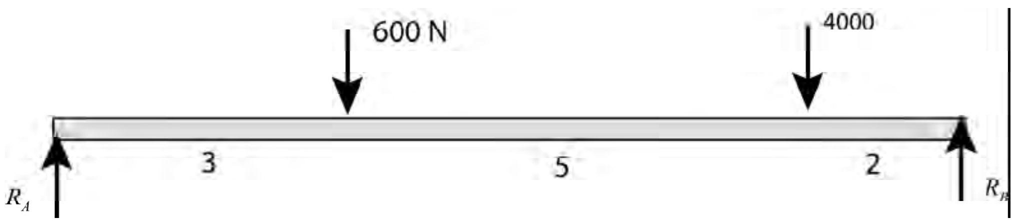
En resumen:



PROBLEMA

Calcular la deformación máxima en la viga que tiene rigidez a la flexión EI:



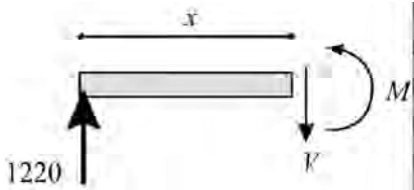


$$\sum M_A = 0 \qquad 10R_B - 600\times 3 - 4000\times 8 = 0 \qquad R_B = 3380$$

$$\sum F_y = 0 \qquad R_A = 4600 - 3380 = 1220$$

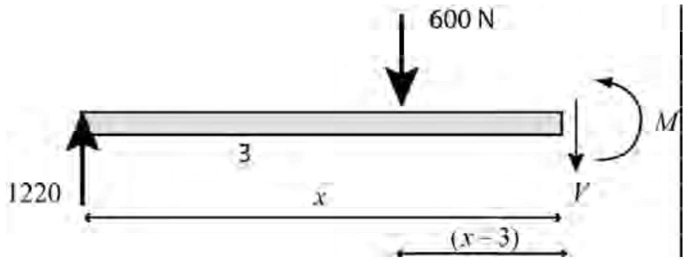
Ecuaciones del momento flector:

$0 < x < 3$



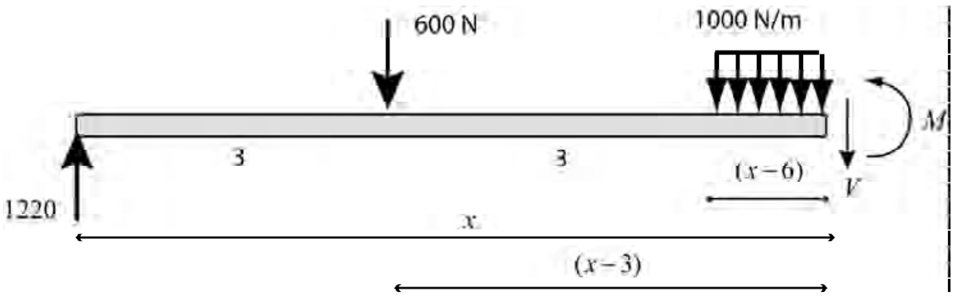
$$M = 1220x$$

$3 < x < 6$



$$M = 1220x - 600(x - 3)$$

$6 < x < 10$



$$M = 1220x - 600(x-3) - 1000(x-6)\frac{(x-6)}{2}$$

$$M = 1220x - 600(x-3) - 1000\frac{(x-6)^2}{2}$$

Pero: $EIy'' = M$

$0 < x < 3$

$$EIy'' = 1220x$$

$$EIy' = \frac{1220x^2}{2} + C_1$$

$$EIy = \frac{1220x^3}{6} + C_1 x + C_2$$

$$EIy' = \frac{1220x^2}{2} + C_1$$

$$EIy = \frac{1220x^3}{6} + C_1 x + C_2$$

$3 < x < 6$

$$EIy'' = 1220x - 600(x - 3)$$

$$EIy = \frac{1220x^2}{2} - \frac{600(x-3)^2}{2} + D_1$$

$$EIy = \frac{1220x^3}{6} - \frac{600(x-3)^3}{6} + D_1 x + D_2$$

$$EIy' = \frac{1220x^2}{2} - \frac{600(x-3)^2}{2} + D_1$$

$$EIy = \frac{1220x^3}{6} - \frac{600(x-3)^3}{6} + D_1 x + D_2$$

$6 < x < 10$

$$EIy'' = 1220x - 600(x - 3) - 1000\frac{(x-6)^2}{2}$$

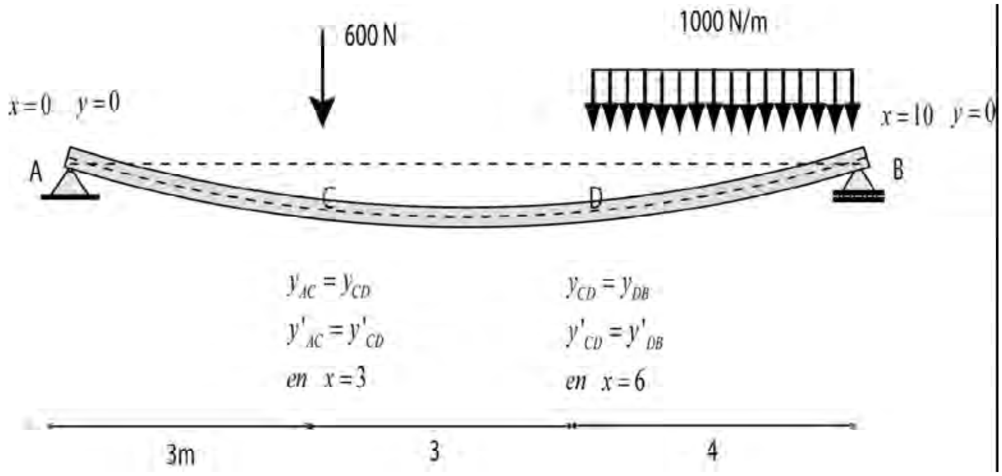
$$EIy' = \frac{1220x^2}{2} - \frac{600(x-3)^2}{2} - 1000\frac{(x-6)^3}{6} + E_1$$

$$EIy = \frac{1220x^3}{6} - \frac{600(x-3)^3}{6} - 1000\frac{(x-6)^4}{24} + E_1 x + E_2$$

$$EIy' = \frac{1220x^2}{2} - \frac{600(x-3)^2}{2} - 1000\frac{(x-6)^3}{6} + E_1$$

$$EIy = \frac{1220x^3}{6} - \frac{600(x-3)^3}{6} - 1000\frac{(x-6)^4}{24} + E_1 x + E_2$$

Condiciones iniciales:



$x=0 \qquad y=0 \qquad EIy=\frac{1220x^3}{6}+C_1x+C_2$

$$C_2=0$$

$x=3 \qquad y_{AC}=y_{CD} \qquad EIy=\frac{1220x^3}{6}+C_1x+C_2 = EIy=\frac{1220x^3}{6}-\frac{600(x-3)^3}{6}+D_1x+D_2$

$$3C_1=3D_1+D_2$$

$x=3 \qquad y'_{AC}=y'_{CD} \qquad EIy'=\frac{1220x^2}{2}+C_1=EIy'=\frac{1220x^2}{2}-\frac{600(x-3)^2}{2}+D_1$

$$C_1=D_1$$

$x=6 \qquad y_{CD}=y_{DB} \qquad EIy=\frac{1220x^3}{6}-\frac{600(x-3)^3}{6}+D_1x+D_2=EIy=\frac{1220x^3}{6}-\frac{600(x-3)^3}{6}-1000\frac{(x-6)^4}{24}+E_1x+E_2$

$$6D_1+D_2=6E_1+E_2$$

$x=6 \qquad y'_{CD}=y'_{DB} \qquad EIy'=\frac{1220x^2}{2}-\frac{600(x-3)^2}{2}+D_1= EIy'=\frac{1220x^2}{2}-\frac{600(x-3)^2}{2}-1000\frac{(x-6)^3}{6}+E_1$

$$D_1=E_1$$

$x=10 \qquad y=0 \qquad EIy=\frac{1220x^3}{6}-\frac{600(x-3)^3}{6}-1000\frac{(x-6)^4}{24}+E_1x+E_2 \qquad 0=\frac{1220\times10^3}{6}-\frac{600(10-3)^3}{6}-1000\frac{(10-6)^4}{24}+10E_1+E_2$

$$0=158366.67+10E_1+E_2$$

En últimas, tenemos:

$$C_2 = 0$$

$$3C_1 = 3D_1 + D_2$$

$$C_1 = D_1$$

$$6D_1 + D_2 = 6E_1 + E_2$$

$$D_1 = E_1$$

$$0 = 158366.67 + 10E_1 + E_2$$

Resolviendo el sistema, las constantes tienen los siguientes valores:

$$C_2 = 0$$

$$D_2 = 0$$

$$C_1 = 15836.67$$

$$E_2 = D_2 = 0$$

$$D_1 = 15836.67$$

$$E_1 = -15836.67$$

Cálculo de la deformación máxima

Por observación, vemos que estará ubicada en el tramo central de la viga. La condición es que allí la pendiente debe valer cero (tangente horizontal). Por tanto:

$$\delta_{\max} = y \quad en \quad y' = 0$$

La ecuación de la pendiente para el tramo CD es: $EIy' = \dfrac{1220x^2}{2} - \dfrac{600(x-3)^2}{2} + D_1$

Por tanto: $0 = \dfrac{1220x^2}{2} - \dfrac{600(x-3)^2}{2} - 15836.67$

Resolviendo la ecuación de segundo grado: $\left[\begin{array}{l} x_1 = 5.92 \\ x_2 = -11.73 \end{array}\right.$

La raíz $x_2 = -11.73$ solo tiene significado matemático. Para nosotros el valor que tiene significado físico para la viga que estamos analizando es el de $x_1 = 5.92$. Chequeamos además que está comprendido en el tramo $3 < x < 6$.

Por lo tanto:

$\delta_{maxima} = y_{(5.92)}$ en la ecuación de y válida en dicho punto:

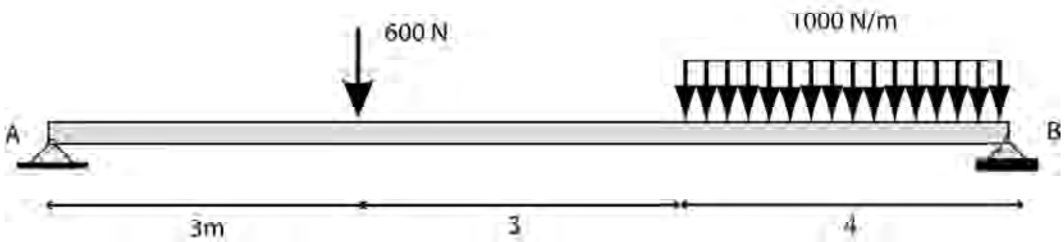
$$EIy = \frac{1220x^3}{6} - \frac{600(x-3)^3}{6} + D_1 x + D_2$$

$$\delta_{maxima} = y_{(5.92)} = \frac{1}{EI}\left(\frac{1220 \times 5.92^3}{6} - \frac{600(5.92-3)^3}{6} - 15836.67 \times 5.92\right) = -\frac{54056.28}{EI}$$

$$\boxed{\delta_{maxima} = -\frac{54056.28}{EI}} \quad en \quad x = 5.92$$

4.1.1 FUNCIONES DE SINGULARIDAD

Observemos las ecuaciones del momento flector para la viga del problema anterior:



$0 < x < 3 \qquad M = 1220x$

$3 < x < 6 \qquad M = 1220x - 600(x-3)$

$6 < x < 10 \qquad M = 1220x - 600(x-3) - 1000\frac{(x-6)^2}{2}$

Como se ve, cada ecuación es igual a la anterior mas un término, de tal manera que la última las "contiene" a todas por así decirlo, lo cual la convierte en la ecuación representativa de la viga.

$$M = 1220\,x - 600(x-3) - 1000\,\frac{(x-6)^2}{2} \qquad 6 < x < 10$$

Si le quitamos un término, se convierte en la segunda:

$$M = 1220x - 600(x-3) \qquad 3 < x < 6$$

Si le quitamos otro término, se convierte en la primera:

$$M = 1220x \qquad 0 < x < 3$$

Este hecho hace que podamos utilizar la última ecuación como representativa de la viga con una condición: que para cada tramo solo se incluyan los términos necesarios.

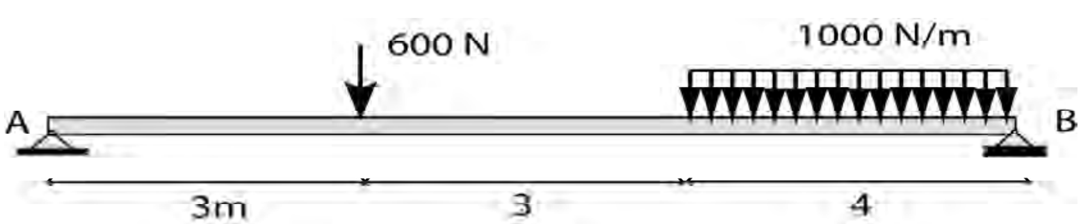
Esto se logra utilizando FUNCIONES DE SINGULARIDAD, que tienen una expresión distinta para cada tramo incluyendo los términos afectados por paréntesis solo cuando se necesiten. Matemáticamente esto se expresa escribiendo la ecuación con paréntesis angulares los cuales sólo se incluirán en la ecuación cuando su valor sea positivo según la siguiente convención:

ECUACIÓN REPRESENTATIVA DE LA VIGA: $M = 1220x - 600\langle x-3\rangle - 1000\dfrac{\langle x-6\rangle^2}{2}$

Condición para los paréntesis:

$$\begin{cases} \langle x-a\rangle = (x-a) & si \quad x > a \\ \langle x-a\rangle = 0 & si \quad x < a \end{cases}$$

Resolvamos el problema anterior utilizando funciones de singularidad:



$0 < x < 3 \qquad\qquad M = 1220\,x$

$3 < x < 6 \qquad\qquad M = 1220\,x\text{-}600\,(x\text{-}3)$

$$6 < x < 10 \qquad\qquad M = 1220\,x - 600\,(x-3) - 1000\,\frac{(x-6)^2}{2}$$

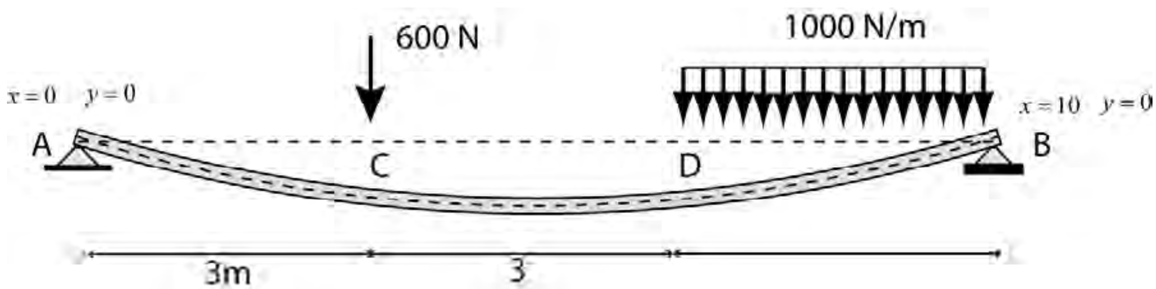
ECUACIÓN REPRESENTATIVA DE LA VIGA: $M = 1220x - 600\langle x-3\rangle - 1000\frac{\langle x-6\rangle^2}{2}$

$$EIy'' = 1220x - 600\langle x-3\rangle - 1000\frac{\langle x-6\rangle^2}{2}$$

Por lo tanto:
$$EIy' = \frac{1220x^2}{2} - \frac{600\langle x-3\rangle^2}{2} - 1000\frac{\langle x-6\rangle^3}{6} + C_1$$

$$EIy = \frac{1220x^3}{6} - \frac{600\langle x-3\rangle^3}{6} - 1000\frac{\langle x-6\rangle^4}{24} + C_1x + C_2$$

Como vemos, el problema se simplifica pues sólo tenemos 3 ecuaciones y 2 constantes: C_1 y C_2 En consecuencia sólo necesitamos 2 condiciones iniciales.



Condiciones iniciales:

$$x = 0 \quad y = 0 \qquad EIy = \frac{1220x^3}{6} - \frac{600\overbrace{\langle x-3\rangle}^{=0 \text{ pues } x<3}{}^3}{6} - 1000\frac{\overbrace{\langle x-6\rangle}^{=0 \text{ pues } x<6}{}^4}{24} + C_1x + C_2 \qquad C_2 = 0$$

$$x=10 \qquad y=0 \qquad EIy=\frac{1220x^3}{6}-\frac{600\overbrace{\langle x-3\rangle}^{=(x\text{-}3)\text{ pues } x>3}{}^3}{6}-1000\frac{\overbrace{\langle x-6\rangle}^{=(x\text{-}6)\text{ pues } x>6}{}^4}{24}+C_1x+C_2$$

$$EIy=\frac{1220\times 10^3}{6}-\frac{600(10-3)^3}{6}-1000\frac{(10-6)^4}{24}+10C_1+0 \qquad C_2=\text{-}15863.67$$

Cálculo de la deformación máxima en la viga:

$$\delta_{\max}=y \qquad en \qquad y'=0$$

La ecuación de la pendiente para el tramo CD es:

$$EIy'=\frac{1220x^2}{2}-\frac{600\overbrace{\langle x-3\rangle}^{=(x\text{-}3)\text{ pues } x>3}{}^2}{2}-1000\frac{\overbrace{\langle x-6\rangle}^{=0\text{ pues } x<6}{}^3}{6}+C_1$$

Por tanto:

$$0=\frac{1220x^2}{2}-\frac{600(x-3)^2}{2}-15836.67 \qquad x=5.92$$

Por lo tanto: $\delta_{maxima}=y_{(5.92)}$

$$EIy=\frac{1220x^3}{6}-\frac{600\overbrace{\langle x-3\rangle}^{=(5.92\text{-}3)\text{ pues } x>3}{}^3}{6}-1000\frac{\overbrace{\langle x-6\rangle}^{=0\text{ pues } x<6}{}^4}{24}+C_1x+\overbrace{C_2}^{=0}$$

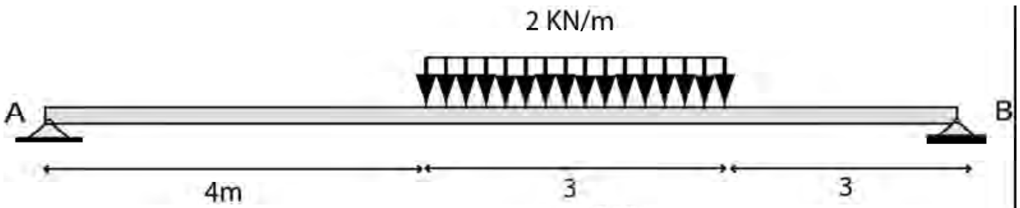
$$\delta_{maxima}=y_{(5.92)}=\frac{1}{EI}\left(\frac{1220\times 5.92^3}{6}-\frac{600(5.92-3)^3}{6}-15836.67\times 5.92\right)=-\frac{54056.28}{EI}$$

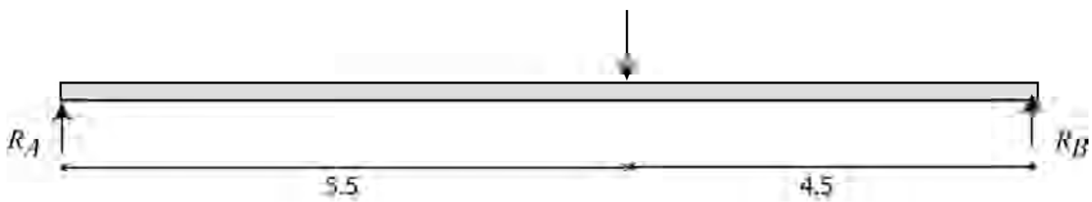
$$\delta_{maxima} = -\frac{54056.28}{EI} \qquad en \quad x = 5.92$$

Obviamente, el resultado es igual al obtenido sin emplear funciones de singularidad.

Caso especial

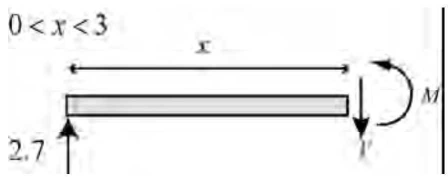
Cuando la carga distribuida no se extiende hasta el extremo derecho de la viga, se rompe la secuencia entre las ecuaciones de los 2 últimos tramos de tal manera que la última ecuación no contiene a la penúltima y por tanto no puede ser adoptada como ecuación representativa de la viga. Veamos la situación y el artificio que se emplea para resolverla.





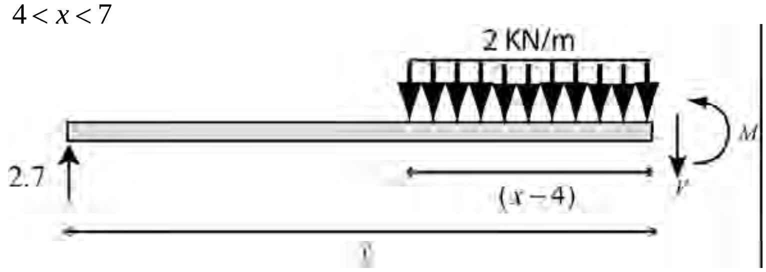
$\sum M_A = 0 \qquad 10R_B - 6\times 5.5 = 0 \qquad R_B = 3.3KN$

$\sum F_y = 0 \qquad R_A = 6 - 3.3 = 2.7$



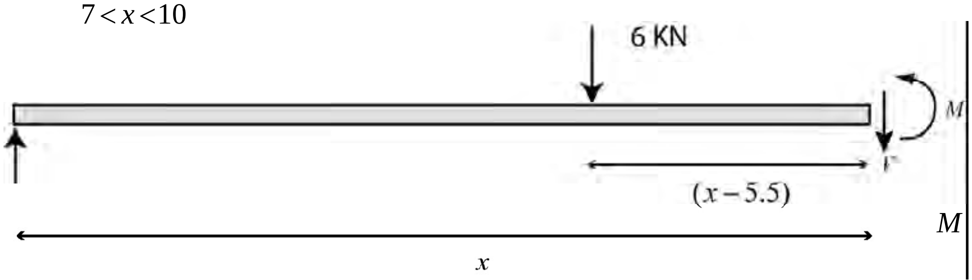
$M = 2.7x$

$4 < x < 7$



$$M = 2.7x - \frac{2(x-4)^2}{2}$$

$7 < x < 10$

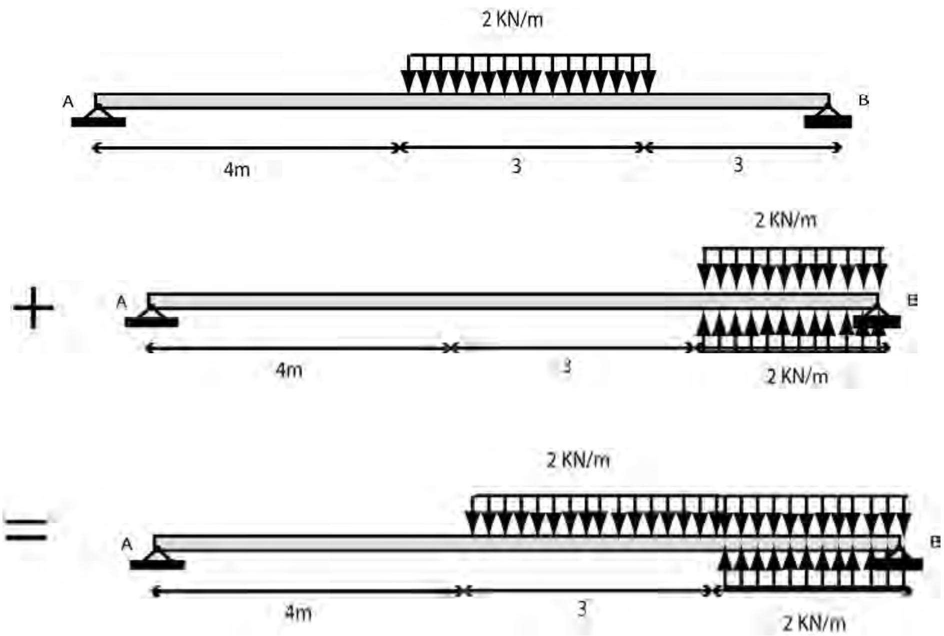


$$M = 2.7x - 6(x - 5.5)$$

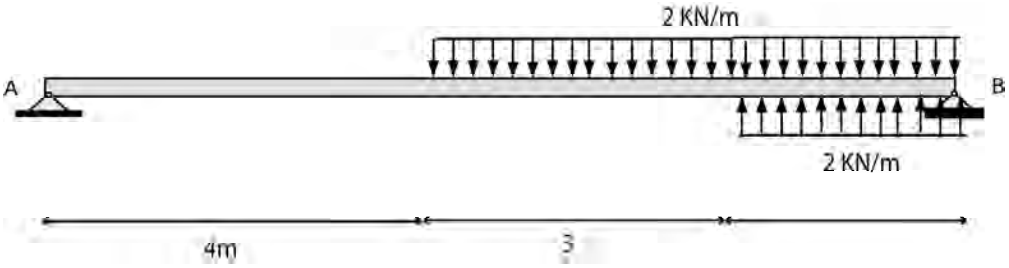
Como se ve, la tercera ecuación no se convierte en la segunda al quitarle el último término: $M = 2.7x$

Para obligar a que esto ocurra se aplica el siguiente artificio que hace cambiar la forma de la tercera ecuación de tal manera que ocurra lo requerido.

Se agregan simultáneamente las dos cargas distribuidas mostradas que al ser iguales de sentido contrario se anulan no afectando por tanto ni las reacciones ni las fuerzas internas de la viga original.



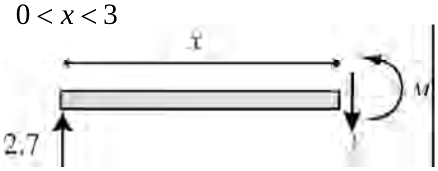
La viga que estamos analizando queda por lo tanto así:



Tal como se expresó en la página anterior, las reacciones no cambian: $R_A = 2.7 \qquad R_B = 3.3KN$

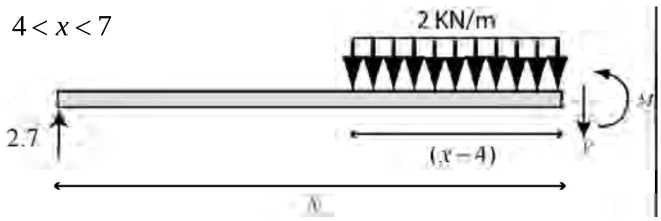
Los dos primeros cortes de la viga también quedan idénticos:

$0 < x < 3$



$$M = 2.7x$$

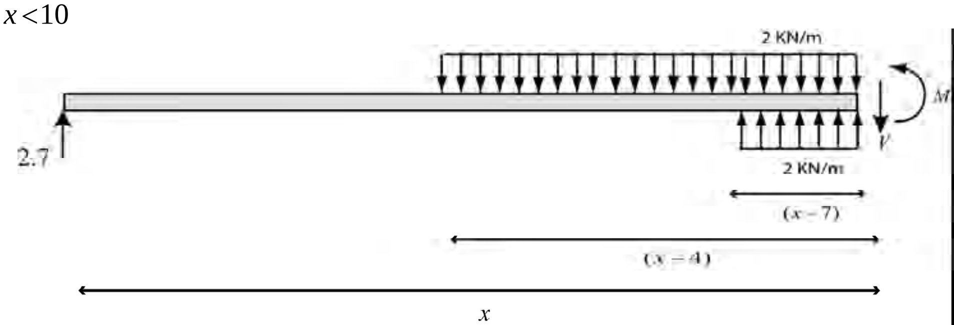
$4 < x < 7$



$$M = 2.7x - \frac{2(x-4)^2}{2}$$

En el tercer corte, cambia la expresión del momento adoptando la forma que necesitamos:

$7 < x < 10$



$$M = 2.7x - \frac{2(x-4)^2}{2} + \frac{2(x-7)^2}{2}$$

La adoptamos entonces como ecuación representativa de la viga, con los paréntesis angulares previamente definidos:

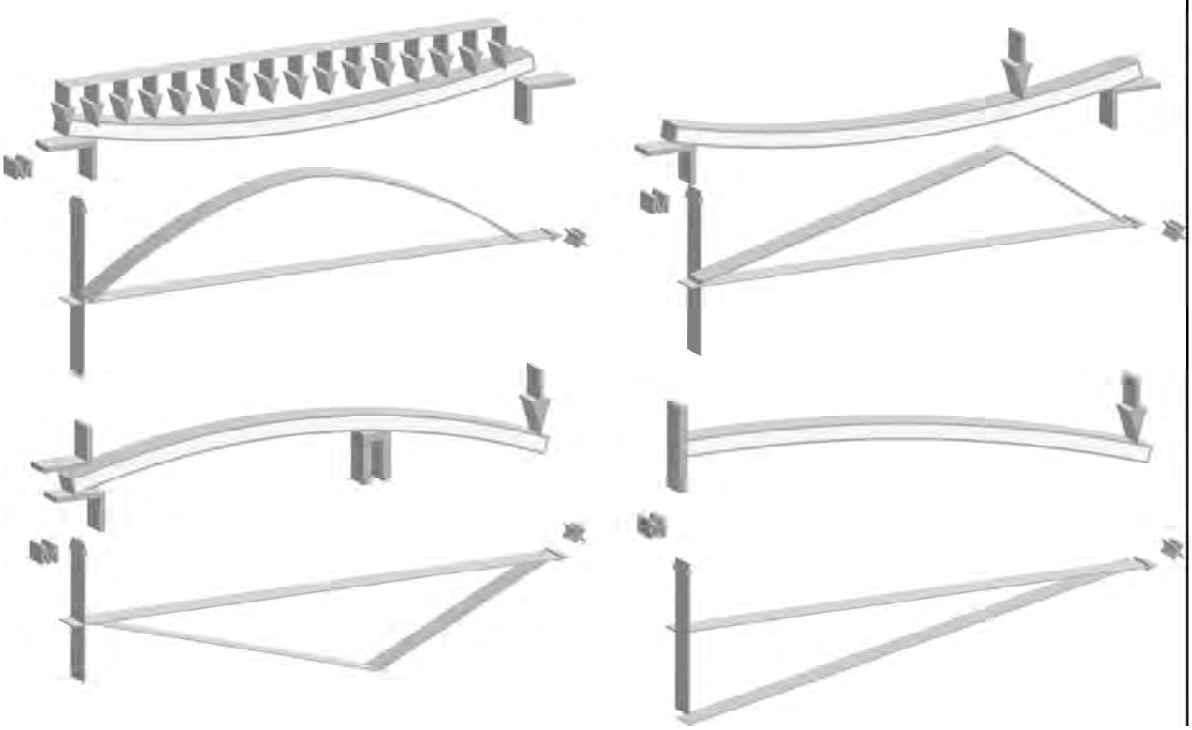
ECUACIÓN REPRESENTATIVA DE LA VIGA: $M = 2.7x - \frac{2\langle x-4\rangle^2}{2} + \frac{2\langle x-7\rangle^2}{2}$

Esta ecuación la igualamos a *EIy''*: $EIy'' = 2.7x - \frac{2\langle x-4\rangle^2}{2} + \frac{2\langle x-7\rangle^2}{2}$

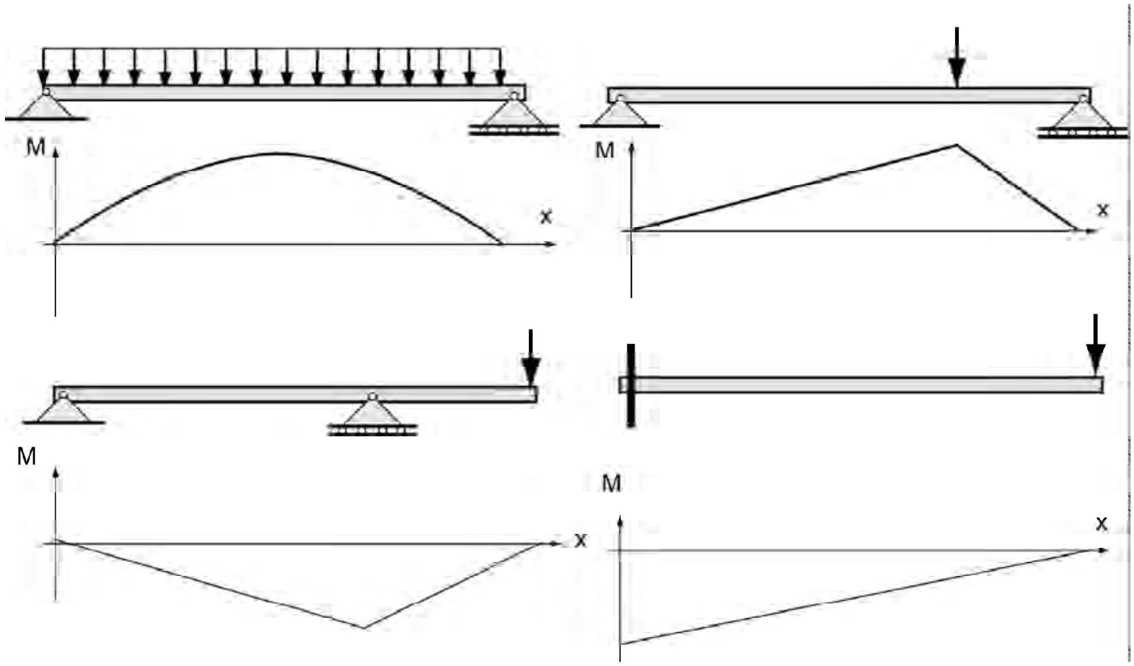
y resolvemos el problema utilizando funciones de singularidad con todas las ventajas que se han anotado.

4.2 MÉTODO DEL ÁREA DE MOMENTOS (TEOREMAS DE MOHR)

Como su nombre lo indica, el método utiliza los diagramas de momento flector de las vigas Recordemos los diagramas correspondientes a alguna vigas típicas:

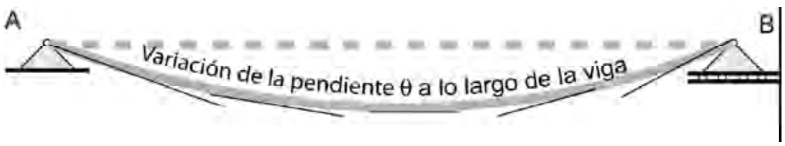


En 2 dimensiones los diagramas se ven así:

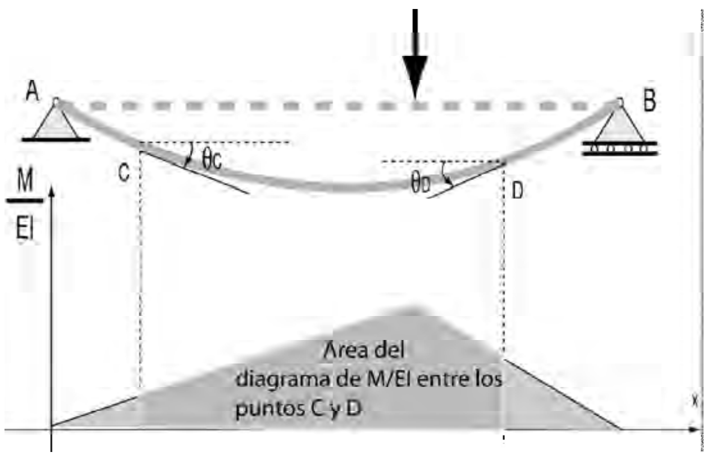


El método se basa en 2 teoremas:

El primer teorema (de Mohr) relaciona el cambio de pendiente a lo largo de la viga con el área del diagrama de momentos entre los puntos considerados.



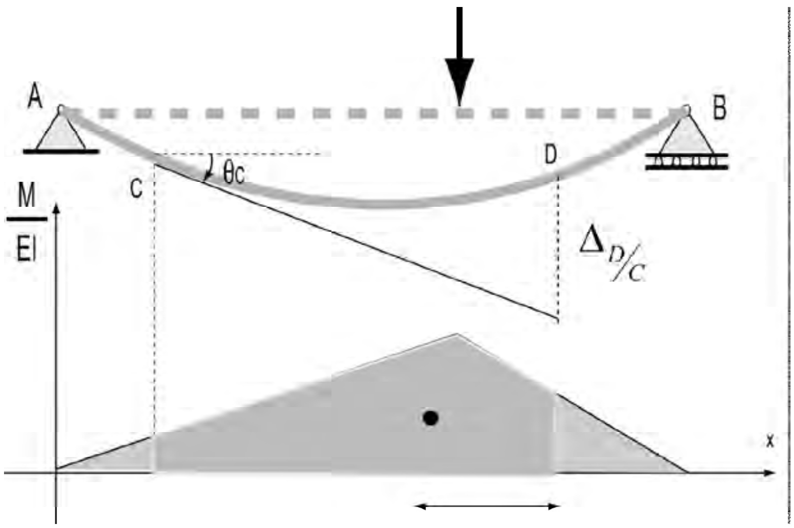
El teorema dice que la diferencia de pendiente entre dos puntos (por ejemplo C y D) es igual al área de momentos entre dichos puntos dividida por la rigidez a la flexión EI.



El teorema establece que:

$$\theta_D - \theta_C =$$

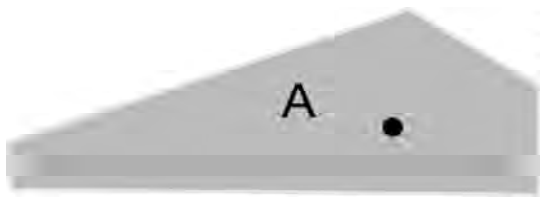
El segundo teorema (de Mohr) establece que la distancia vertical desde un punto de la elástica hasta la tangente trazada por otro es igual al momento estático del área entre dichos puntos respecto al primero.



$\bar{x}$: *Medida desde D*

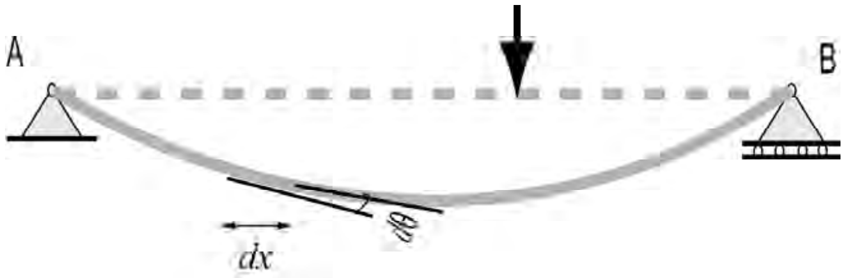
El teorema establece que:

$$\Delta_{D/C} = \bar{x}A$$



Demostración del Primer Teorema de Mohr

El teorema dice que la diferencia de pendiente entre dos puntos (por ejemplo C y D) es igual al área de momentos entre dichos puntos dividida por la rigidez a la flexión EI.

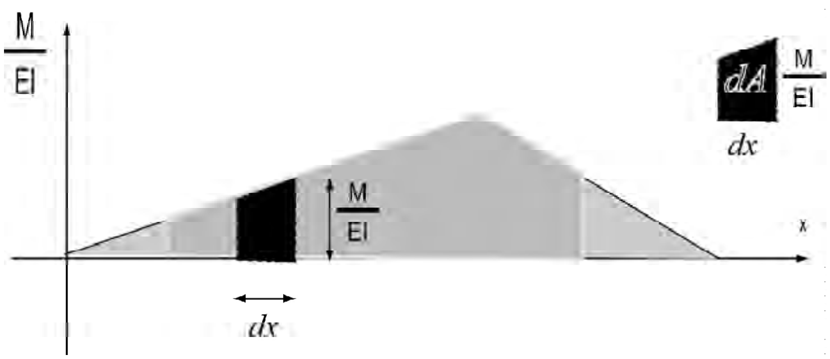


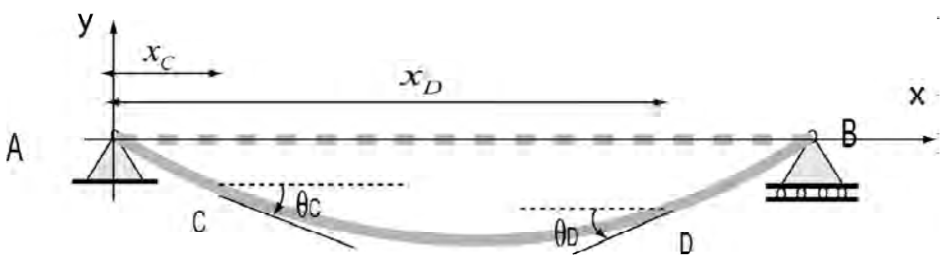
Diferencia de pendiente entre dos puntos separados $dx : d\theta$

La pendiente θ en una viga por ser tan pequeña es igual a la derivada:

$\frac{dy}{dx} = \theta$ Por tanto: $\frac{d\theta}{dx} = \frac{d^2y}{dx^2}$ Pero: $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{M}{EI}$

Por lo cual: $\frac{d\theta}{dx} = \frac{M}{EI}$ y $d\theta = \frac{M}{EI}dx = dA$



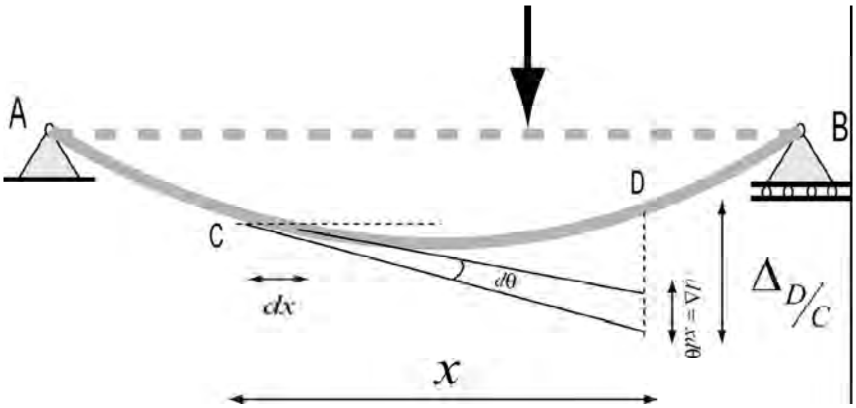


$$\int_{x_C}^{x_D} d\theta = \int_{x_C}^{x_D} \frac{M}{EI} dx = \int_{x_C}^{x_D} dA \qquad\qquad \theta_D - \theta_C = Área$$

$\theta_D - \theta_C =$ Area del diagrama de M/EI entre los puntos C y D lo que se quería demostrar.

Demostración del Segundo Teorema de Mohr

El segundo teorema (de Mohr) establece que la distancia vertical desde un punto de la elástica hasta la tangente trazada por otro es igual al momento estático del área entre dichos puntos respecto al primero.

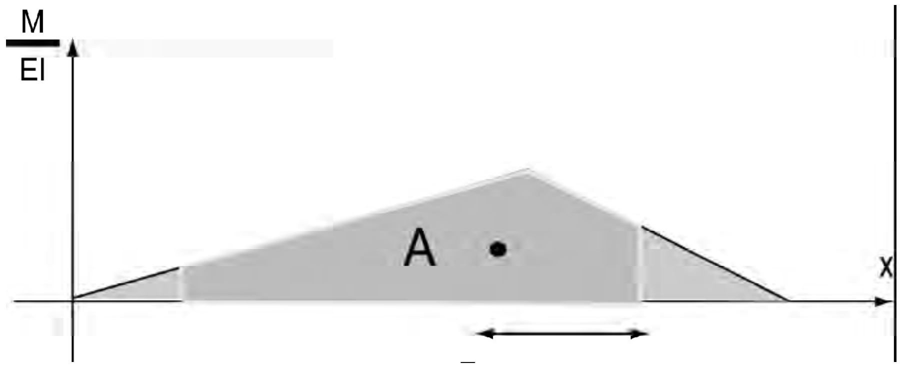


$$d\varDelta = xd\theta$$

$$\int_{x_C}^{x_D} d\varDelta = \int_{x_C}^{x_D} xd\theta = \int_{x_C}^{x_D} x\frac{M}{EI}dx = \int_{x_C}^{x_D} xdA$$

Pero: $\int_{x_C}^{x_D} d\varDelta = \varDelta_{D/C}$ y $\int_{x_C}^{x_D} xd\varDelta = \bar{x}A$ puesto que $\bar{x} = \dfrac{\int xdA}{\int dA}$

Por tanto: $\boxed{\varDelta_{D/C} = \bar{x}A}$ lo que se quería demostrar



$\bar{x}$: *Medida desde D*

La utilidad de los 2 teoremas estriba en lo siguiente:

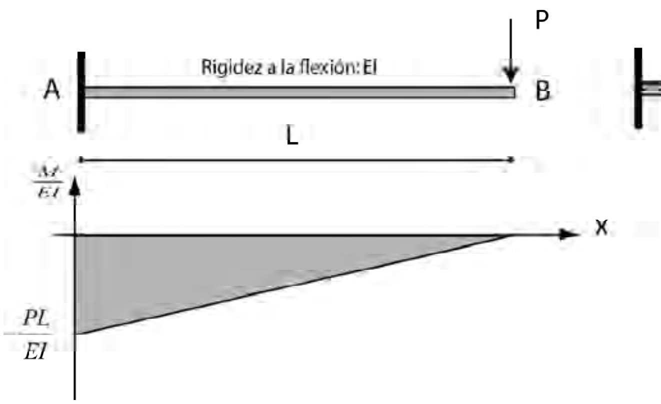
- **Primer teorema:** Sirve para calcular la pendiente en cualquier punto de la viga cuando se conoce la pendiente en otro punto y el diagrama de momentos.

- **Segundo teorema:** Conocido el valor de la distancia Δ, mediante la aplicación de algunas relaciones de tipo geométrico y trigonométrico pueden calcularse las deformaciones δ en la viga.

El segundo teorema es especialmente útil para calcular deformaciones de vigas en voladizo aprovechando el hecho de que la tangente a la elástica en el empotramiento es horizontal como veremos en los ejemplos.

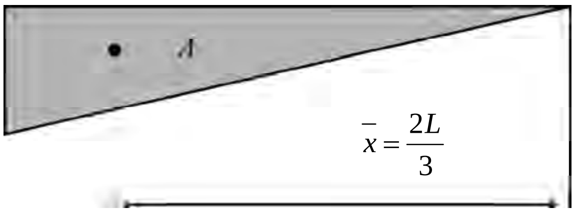
PROBLEMA

Calcular la deformación y la pendiente en el extremo libre del voladizo, B



El método es especialmente útil en vigas en voladizo porque al ser la tangente horizontal en el origen, la deformación δ es igual a la distancia D

Para calcular la deformación aplicamos el segundo teorema: $\Delta_{B/A} = \bar{x}A$

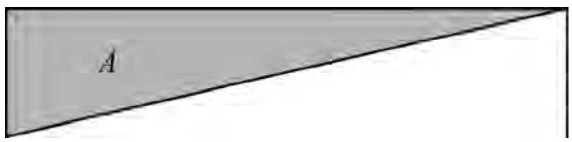


$$\Delta_{B/A} = \bar{x}A = \frac{2L}{3} \times \left(-\frac{PL^2}{2EI} \right) = -\frac{PL^3}{3EI}$$

$$\boxed{\delta_B = -\frac{PL^3}{3EI}}$$

Para calcular la pendiente en B aplicamos el primer teorema:

$\theta_B - \theta_A = A =$



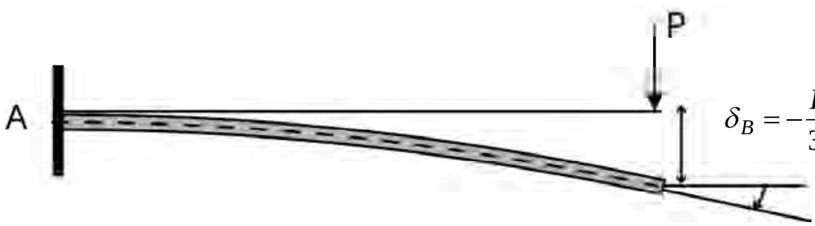
$$A = \frac{L \times PL}{2EI} = -\frac{PL^2}{2EI}$$

$\theta_A = 0$ (En el empotramiento no hay giro, por tanto la tangente es horizontal)

$$\theta_B - 0 = -\frac{PL^2}{2EI}$$

$$\boxed{\theta_B = -\frac{PL^2}{2EI}}$$

En resumen:



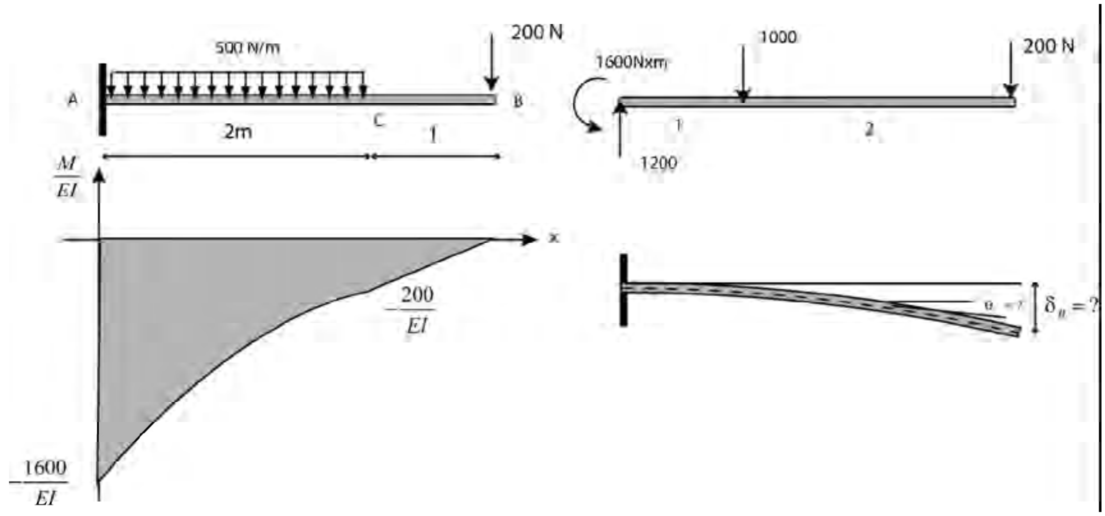
$$\delta_B = -\frac{PL^3}{3EI}$$

$$\theta_B = -\frac{PL^2}{2EI}$$

PROBLEMA

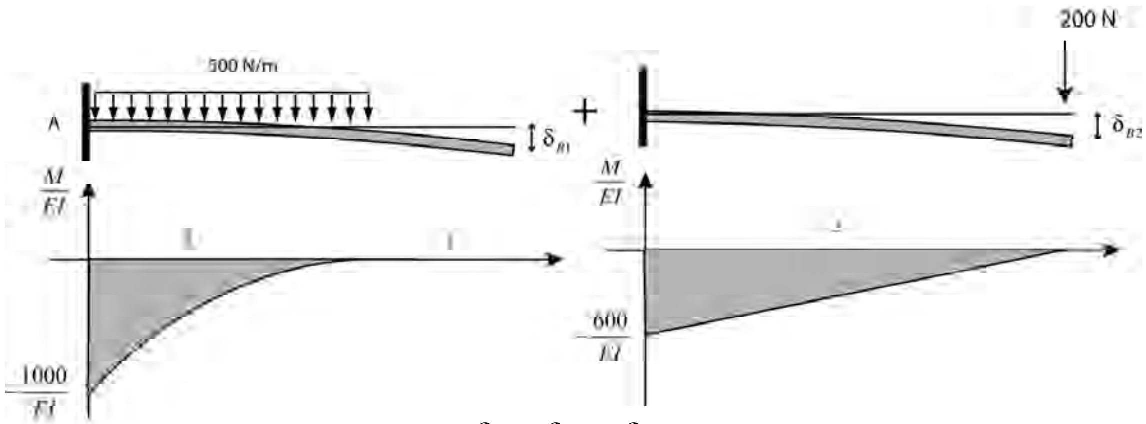
Calcular la deformación en B y la pendiente en C

Rigidez a la flexión: EI



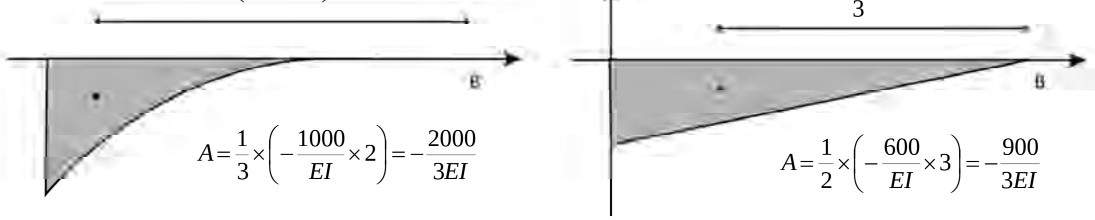
Cálculo de la deformación en B:

Con el fin de facilitar el cálculo de las áreas y los centros de gravedad aplicamos el PRINCIPIO DE SUPERPOSICIÓN mediante el cual podemos decir que la viga original es igual a la suma de las dos siguientes vigas:



$$\delta_B = \delta_{B1} + \delta_{B2}$$

$$\bar{x} = \left(\frac{3}{4}\times 2 + 1\right) = 2.5 \qquad \bar{x} = \frac{2}{3}\times 3 = 2$$

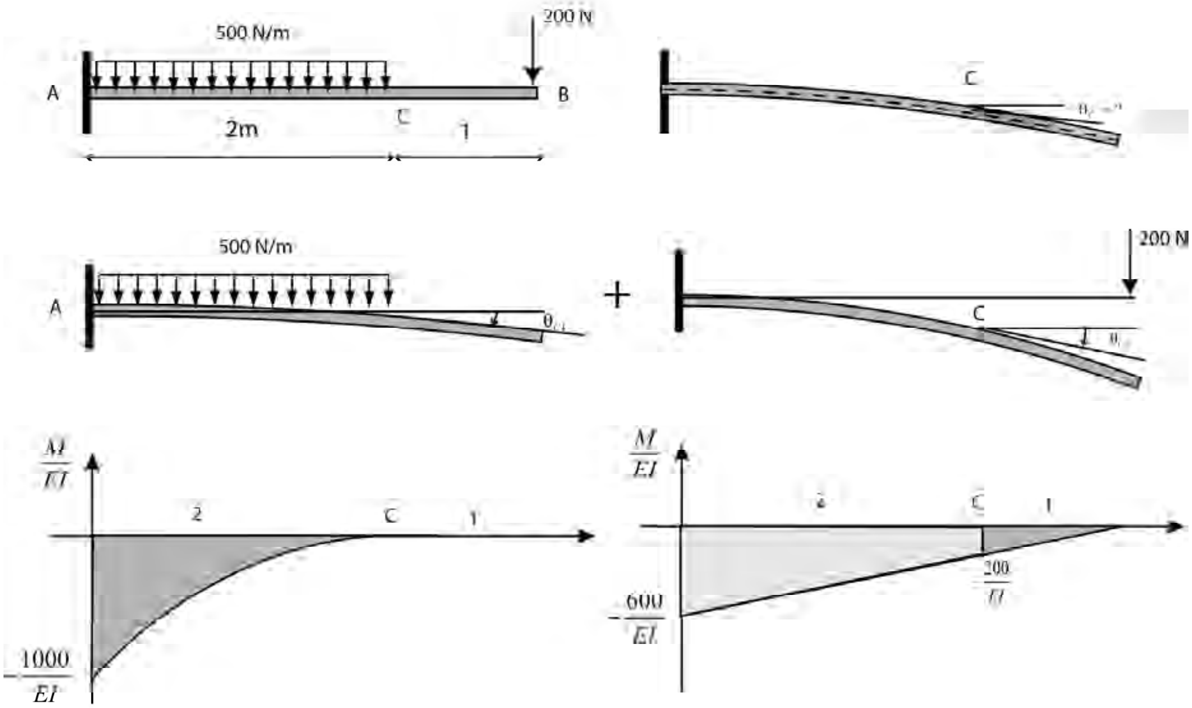


$$A = \frac{1}{3}\times\left(-\frac{1000}{EI}\times 2\right) = -\frac{2000}{3EI} \qquad A = \frac{1}{2}\times\left(-\frac{600}{EI}\times 3\right) = -\frac{900}{3EI}$$

$$\delta_{B1} = \Delta_{B/A} = \bar{x}A = (2.5)\left(-\frac{2000}{3EI}\right) = -\frac{5000}{3EI} \qquad \delta_{B2} = \Delta_{B/A} = \bar{x}A = (2)\left(-\frac{900}{EI}\right) = -\frac{1800}{EI}$$

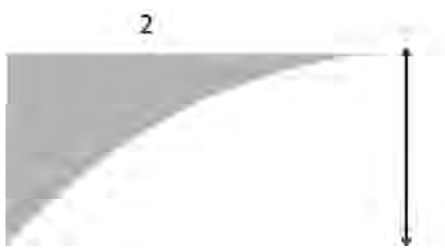
$$\delta_B = -\frac{5000}{3EI} - \frac{1800}{EI} \qquad \boxed{\delta_B = -\frac{3466.67}{EI}}$$

Cálculo de la pendiente en C



$$\theta_C = \theta_{C1} + \theta_{C2}$$

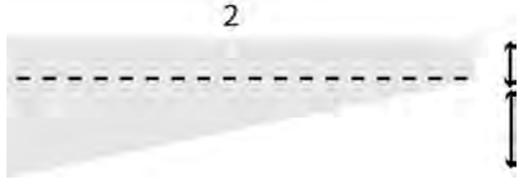
$$\theta_{C1} - \theta_A = A =$$



$$-\frac{1000}{EI}$$

$$A = \frac{1}{3} \times \left(-\frac{1000}{EI} \times 2\right) = -\frac{2000}{3EI} \qquad \theta_{C1} = -\frac{2000}{3EI}$$

$$\theta_{C2}-\theta_A = A =$$



$$-\frac{200}{EI}$$

$$-\frac{400}{EI}$$

$$A = 2x\left(-\frac{200}{EI}\right)+\frac{1}{2}\times 2\left(-\frac{400}{EI}\right)=-\frac{800}{EI} \qquad \theta_{C2}=-\frac{800}{EI}$$

$$\theta_C = -\frac{2000}{3EI}-\frac{800}{EI} \qquad \boxed{\theta_C = -\frac{1466.67}{EI}}$$

PROBLEMA

Calcular la pendiente en B y la deformación en C

$$\sum M_A = 0$$

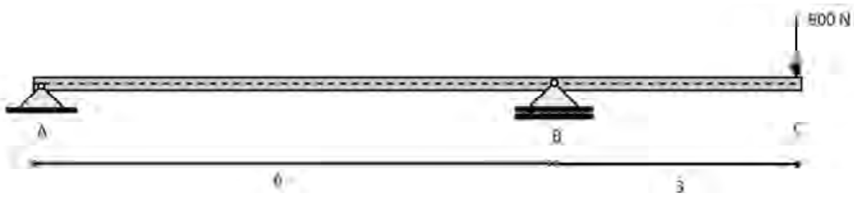
$$6R_B - 9\times 900 = 0$$

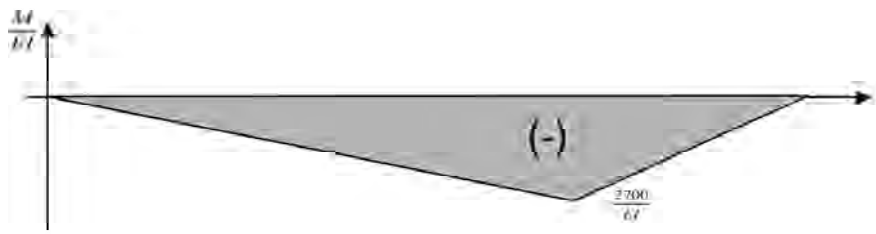
$$R_B = 1350N\uparrow$$

$$\sum F_y = 0$$

$$R_A = 900-1350 = -450$$

$$R_A = 450\downarrow$$





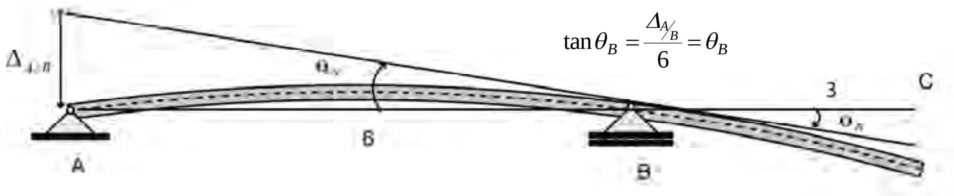
$3\tan\theta_B = 3\theta_B$

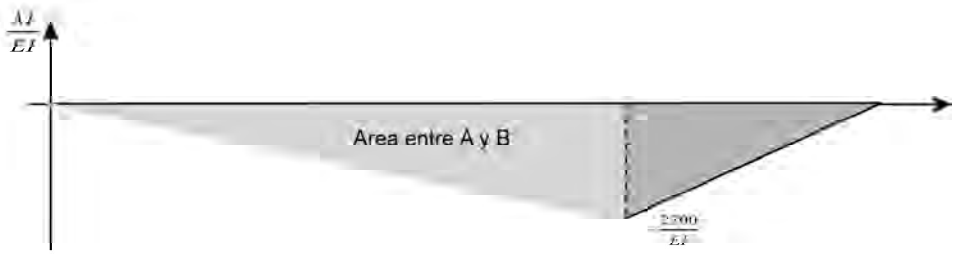
pues θ es muy pequeño

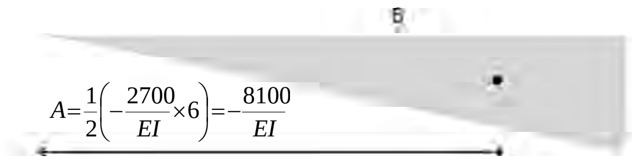
En la viga se observa que: $\delta_C = 3\theta_B + \Delta_{C/B}$

Por tanto debemos calcular θ_B y $\Delta_{C/B}$

$$\tan\theta_B = \frac{\Delta_{A/B}}{6} = \theta_B$$





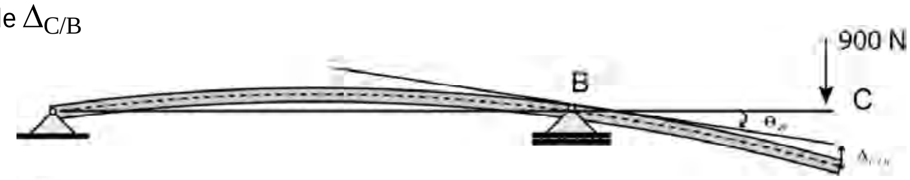


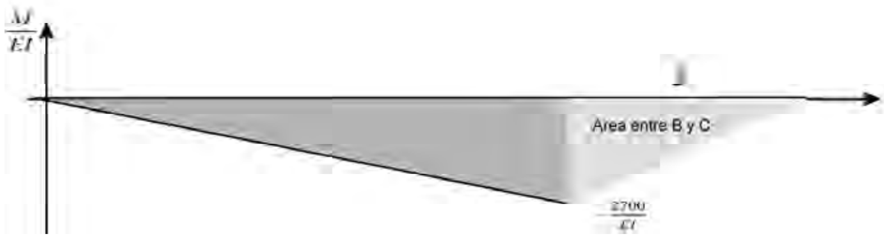
$$A = \frac{1}{2}\left(-\frac{2700}{EI}\times 6\right) = -\frac{8100}{EI} \qquad -\frac{2700}{EI}$$

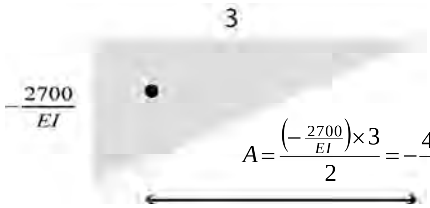
$$\bar{x} = \frac{2}{3}\times 6 = 4 \qquad \Delta_{A/B} = \bar{x}A = 4\times\left(-\frac{8100}{EI}\right) = -\frac{32400}{EI}$$

Por tanto: $$\theta_B = \frac{\Delta_{A/B}}{6} = \frac{-\frac{32400}{EI}}{6} = -\frac{5400}{EI}$$

Cálculo de $\Delta_{C/B}$





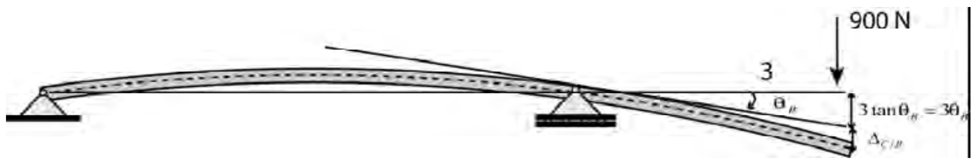


$$A=\frac{\left(-\frac{2700}{EI}\right)\times 3}{2}=-\frac{4050}{EI}$$

$$\bar{x}=\frac{2}{3}\times 3=2$$

$$\Delta_{C/B}=\bar{x}A=2\times\left(-\frac{4050}{EI}\right)=-\frac{8100}{EI}$$

Finalmente, calculamos la deformación en C recordando que: $\delta_C=3\theta_B+\Delta_{C/B}$

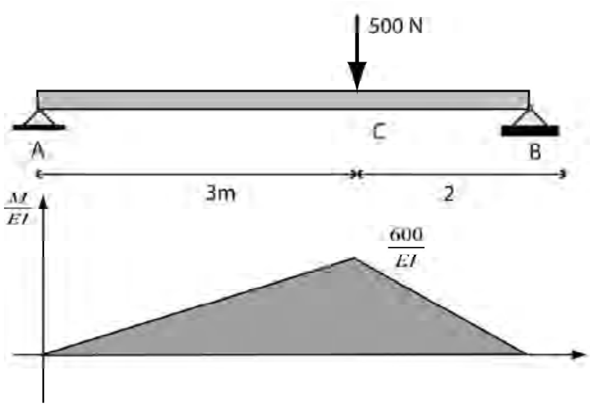


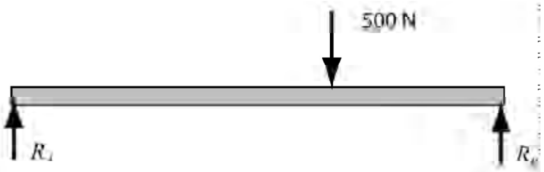
$$\delta_C=3\left(\frac{5400}{EI}\right)+\frac{8100}{EI}$$

Los valores de θ_B y $\Delta_{C/B}$ los tomamos positivos porque se trata de sumar dos distancias como se ve en la figura)

$$\boxed{\delta_C=\frac{24300}{EI}}$$

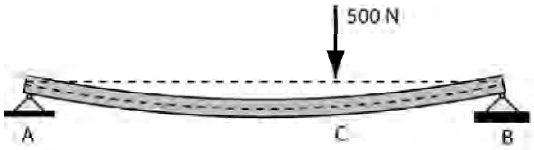
Resolver con fines comparativos el siguiente problema que ya fue solucionado con el método de la doble integración:

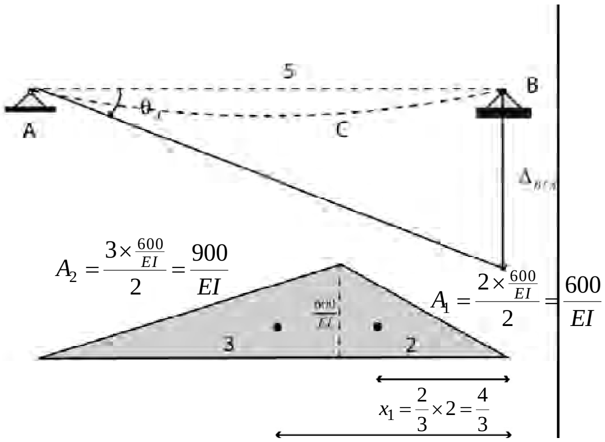




$$\sum M_A=0 \qquad 5R_B-3\times 500=0 \qquad R_B=300$$

$$\sum F_y=0 \qquad R_A=500-300=200$$





$$A_2=\frac{3\times\frac{600}{EI}}{2}=\frac{900}{EI}\qquad A_1=\frac{2\times\frac{600}{EI}}{2}=\frac{600}{EI}$$

$$x_1=\frac{2}{3}\times 2=\frac{4}{3}\qquad x_2=2+\frac{1}{3}\times 3=3$$

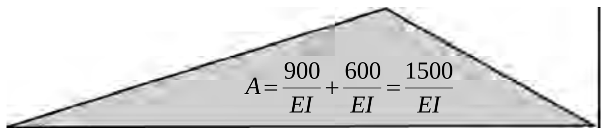
$$\theta_A=\frac{\Delta_{B/A}}{5}\qquad \Delta_{B/A}=\bar{x}A=x_1A_1+x_2A_2$$

$$\Delta_{B/A}=\frac{4}{3}\times\frac{600}{EI}+3\times\frac{900}{EI}=\frac{3500}{EI}$$

$$\theta_A=\frac{\frac{3500}{EI}}{5}=\frac{700}{EI}$$

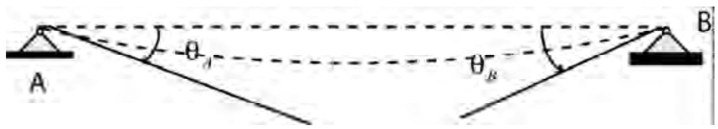
Según la convención que hemos manejado: $\theta_A=-\dfrac{700}{EI}$

Ahora: $\theta_B-\theta_A=A=$

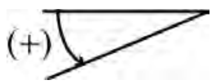


$$A=\frac{900}{EI}+\frac{600}{EI}=\frac{1500}{EI}$$

$$\theta_B-\left(-\frac{700}{EI}\right)=\frac{1500}{EI}$$

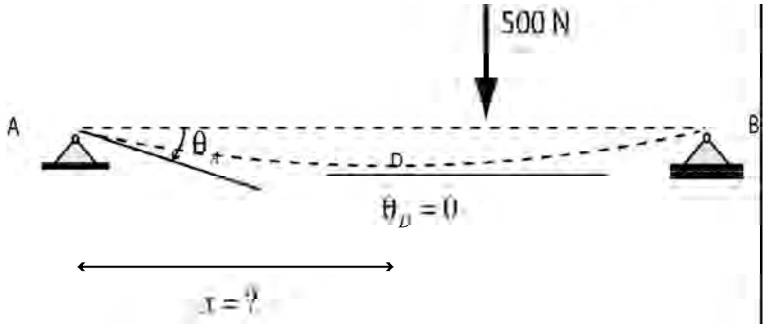


$$\theta_B=\frac{800}{EI}$$



Cálculo de la deformación máxima

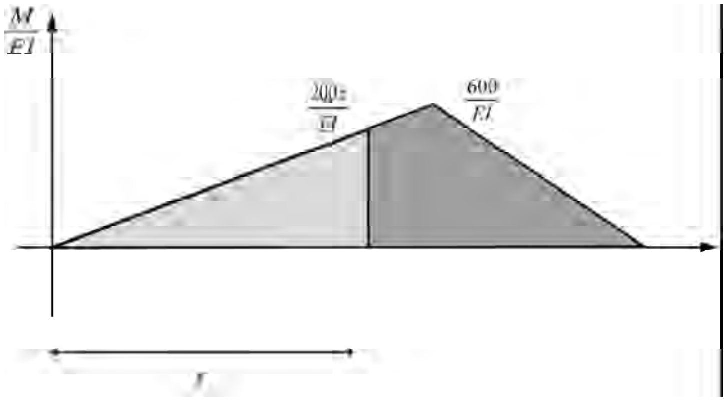
La clave es encontrar el punto D donde ocurre, en el cual la pendiente θ_D es cero (pendiente horizontal).



Como:

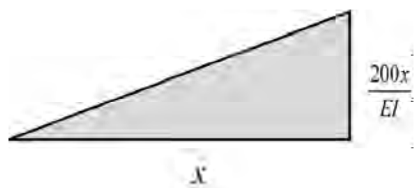
$$R_A = 200$$

$$M_{(x)} = 200x$$



Cálculo de la distancia x a la cual ocurre la deformación máxima

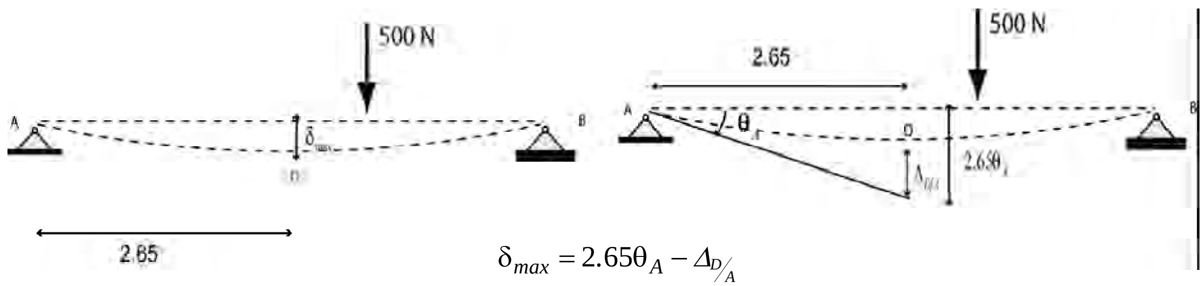
Primer teorema: $\theta_D - \theta_A = A$ $\quad A_2 = \dfrac{x \times \frac{200x}{EI}}{2} = \dfrac{200x^2}{2EI}$



$$0 - \left(-\frac{700}{EI}\right) = \frac{200x^2}{2EI}$$

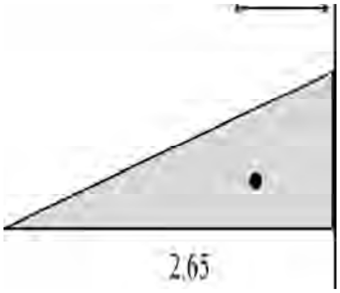
$$700 = 100x^2$$

$x = 2.65$ (Distancia a la cual ocurre la deformación máxima)



$$\delta_{max} = 2.65\theta_A - \Delta_{D/A}$$

$$x_1 = \frac{2.65}{3} = 0.88$$



$$\frac{200\times 265}{EI}$$

$$\Delta_{D/A} = \bar{x}A = 0.88\times\frac{702.25}{EI} = \frac{617.98}{EI}$$

$$\delta_{\max} = 2.65\left(\frac{700}{EI}\right) - \frac{617.98}{EI}$$

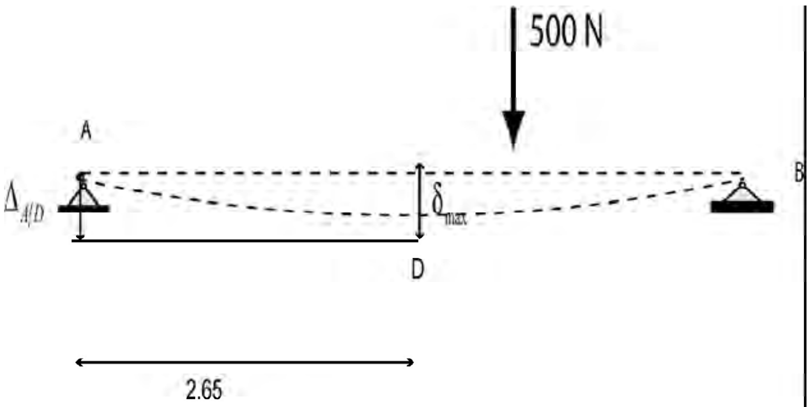
$$A = \frac{2.65\times\frac{200\times 2.65}{EI}}{2} = \frac{702.25}{EI}$$

$$\boxed{\delta_{\max} = \frac{1237.02}{EI}}$$

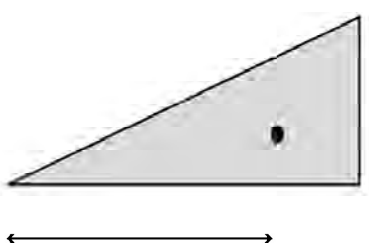
La diferencia se debe a las aproximaciones

Otra forma

Aprovechándonos de que ya sabemos que en D la tangente es horizontal, tenemos:



$$\delta_{max} = \Delta_{A/D}$$



$$\frac{200\times 2.65}{EI}$$

$$\Delta_{A/D} = \bar{x}A = \frac{2}{3}\times 2.65\times\frac{702.25}{EI} = \frac{1240.64}{EI}$$

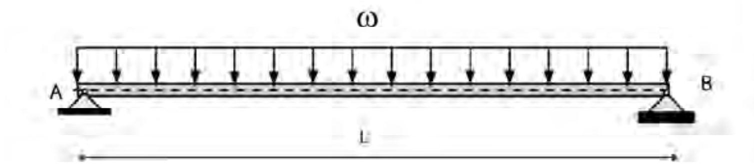
$$\frac{2}{3}\times 2.65$$

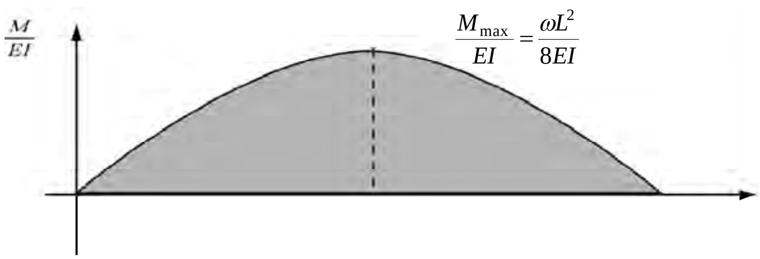
$$A = \frac{2.65\times\frac{200\times 2.65}{EI}}{2} = \frac{702.25}{EI}$$

$$\boxed{\delta_{\max} = \frac{1240.64}{EI}}$$

PROBLEMA

Calcular la deformación máxima y la pendiente en los apoyos A y B de la viga:





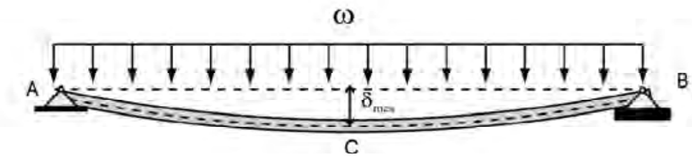
Por simetría la deformación máxima se presenta en el punto medio de la viga C.

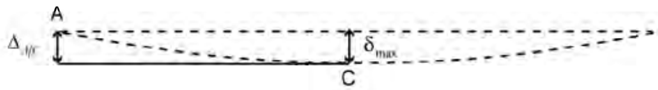
Por lo tanto:

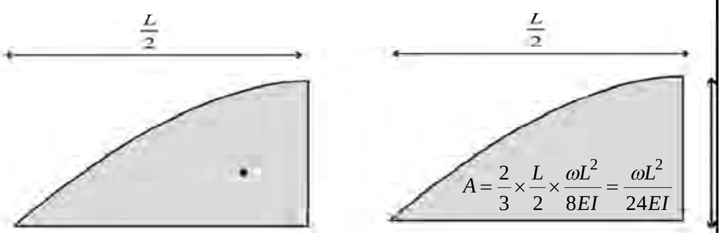
$$\delta_{\max} = \Delta_{A/D}$$

$$\Delta_{A/C} = \bar{x}A$$

$$\Delta_{A/C} = \frac{5L}{16} \times \frac{\omega L^3}{24EI} = \frac{5\omega L^4}{384EI}$$







$\frac{\omega L^2}{8EI}$

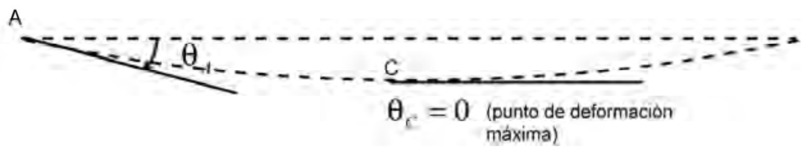
$$\delta_{\max} = \frac{5\omega L^4}{384EI}$$

$$\bar{x} = \frac{5}{8} \times \frac{L}{2} = \frac{5L}{16}$$

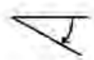
Calculo de las pendientes:

$$\theta_C - \theta_A = A$$

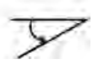
$$0 - \theta_A = \frac{\omega L^3}{24EI}$$



$$\theta_A = -\frac{\omega L^3}{24EI}$$

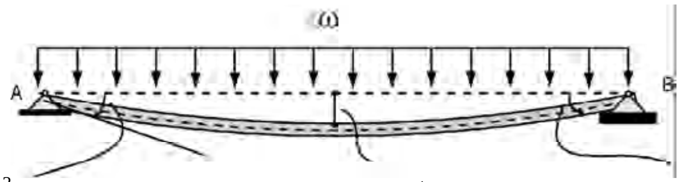


$$\theta_B = \frac{\omega L^3}{24EI}$$



Por simetría: $\theta_A = \theta_B$

En resumen:

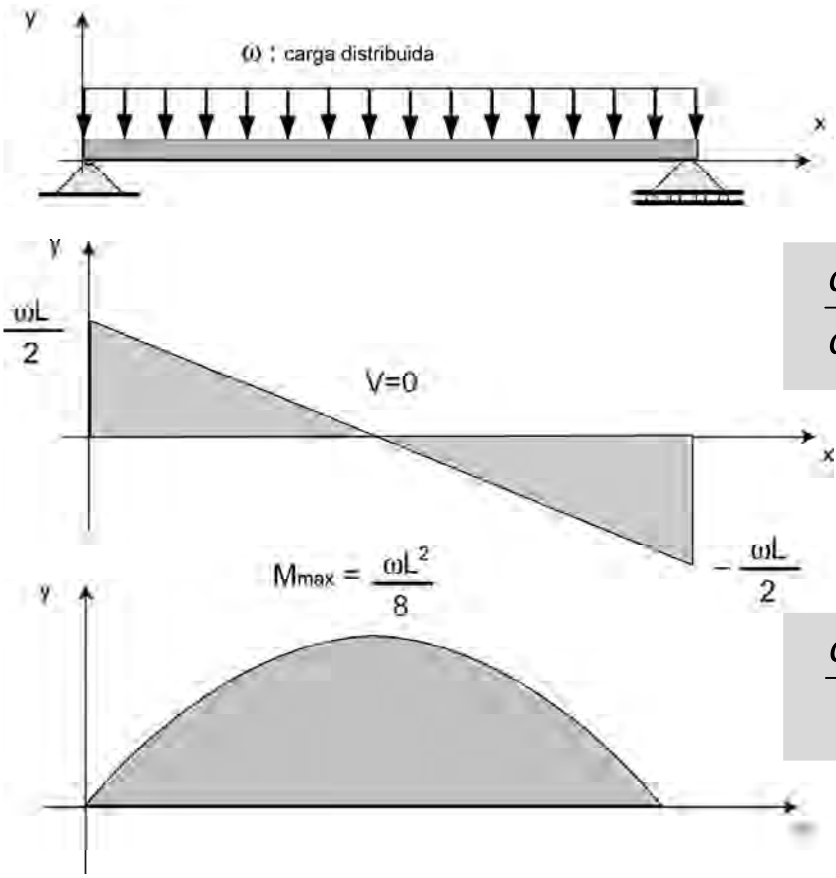


$\theta_A = -\dfrac{\omega L^3}{24EI}$ $\delta_{\max} = \dfrac{5\omega L^4}{384\,EI}$ $\theta_B = \dfrac{\omega L^3}{24EI}$

4.3 MÉTODO DE LA VIGA CONJUGADA

Se basa en las relaciones que existen entre la fuerza distribuida, la fuerza cortante y el momento flector estudiadas en el curso de Mecánica y las existentes entre la curvatura, el momento flector, la rigidez a la flexión, la pendiente, y la ecuación de la elástica estudiadas en este curso de Resistencia de Materiales.

Recordemos las relaciones estudiadas en mecánica entre ω, V y M:



$$\frac{dv}{dx} = -\omega$$

$$\frac{dM}{dx} = v$$

Y la relación estudiada en este curso:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{M}{EI}$$

Observando estas relaciones se ingenió un artificio mediante el cual se dibuja una viga imaginaria (VIGA CONJUGADA), apoyada y cargada de tal manera que satisfaciéndose estas relaciones se cumplan las siguientes condiciones:

Deformación en la viga real y = Momento flector en la viga conjugada M

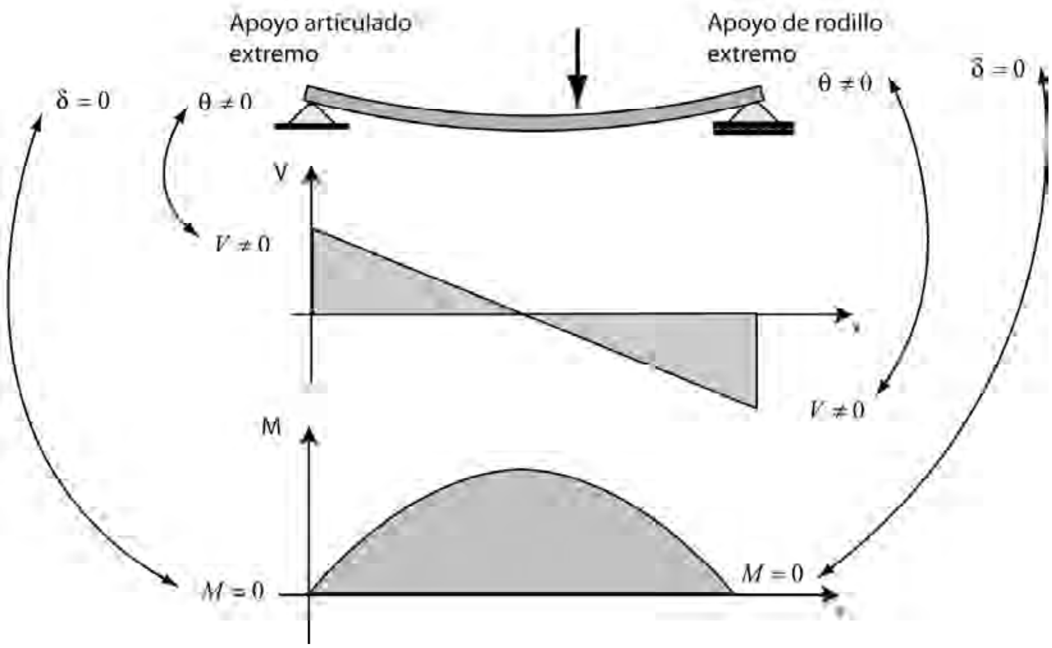
Pendiente en la viga real y' = Fuerza cortante en la viga conjugada

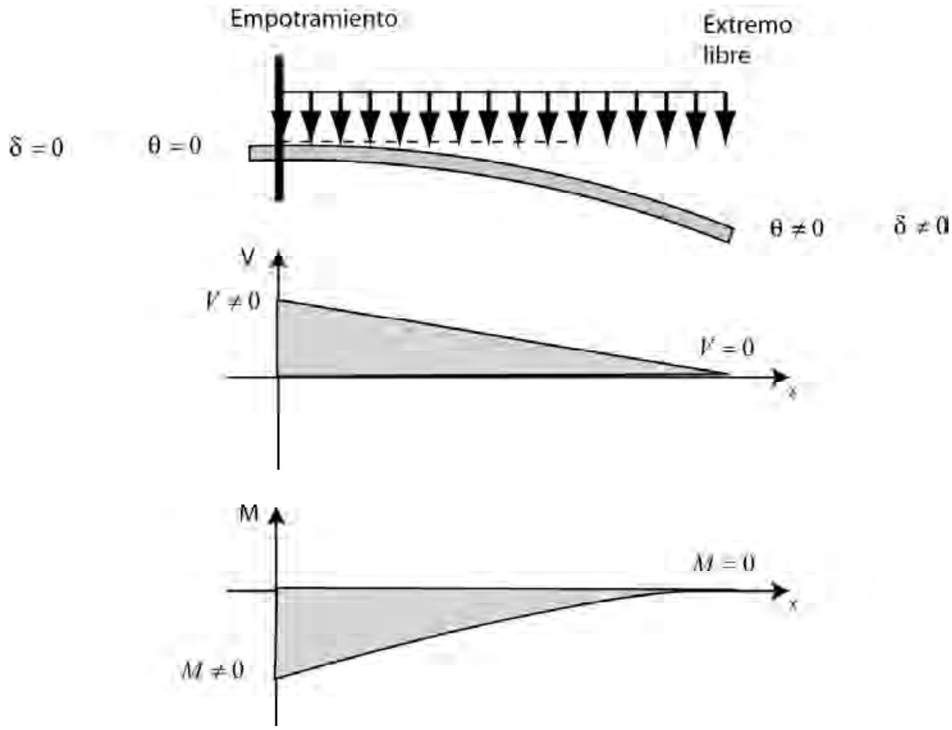
La idea es por tanto que una vez dibujada la VIGA CONJUGADA baste calcular en ella la fuerza cortante V y el momento flector M en cualquier punto cuyos valores corresponderán a los de la pendiente y la deformación de la viga real en los susodichos puntos.

Con el fin de dibujar la viga conjugada miremos primero que carga deberá aplicarse a la misma y luego que apoyos deberán ponérsele.

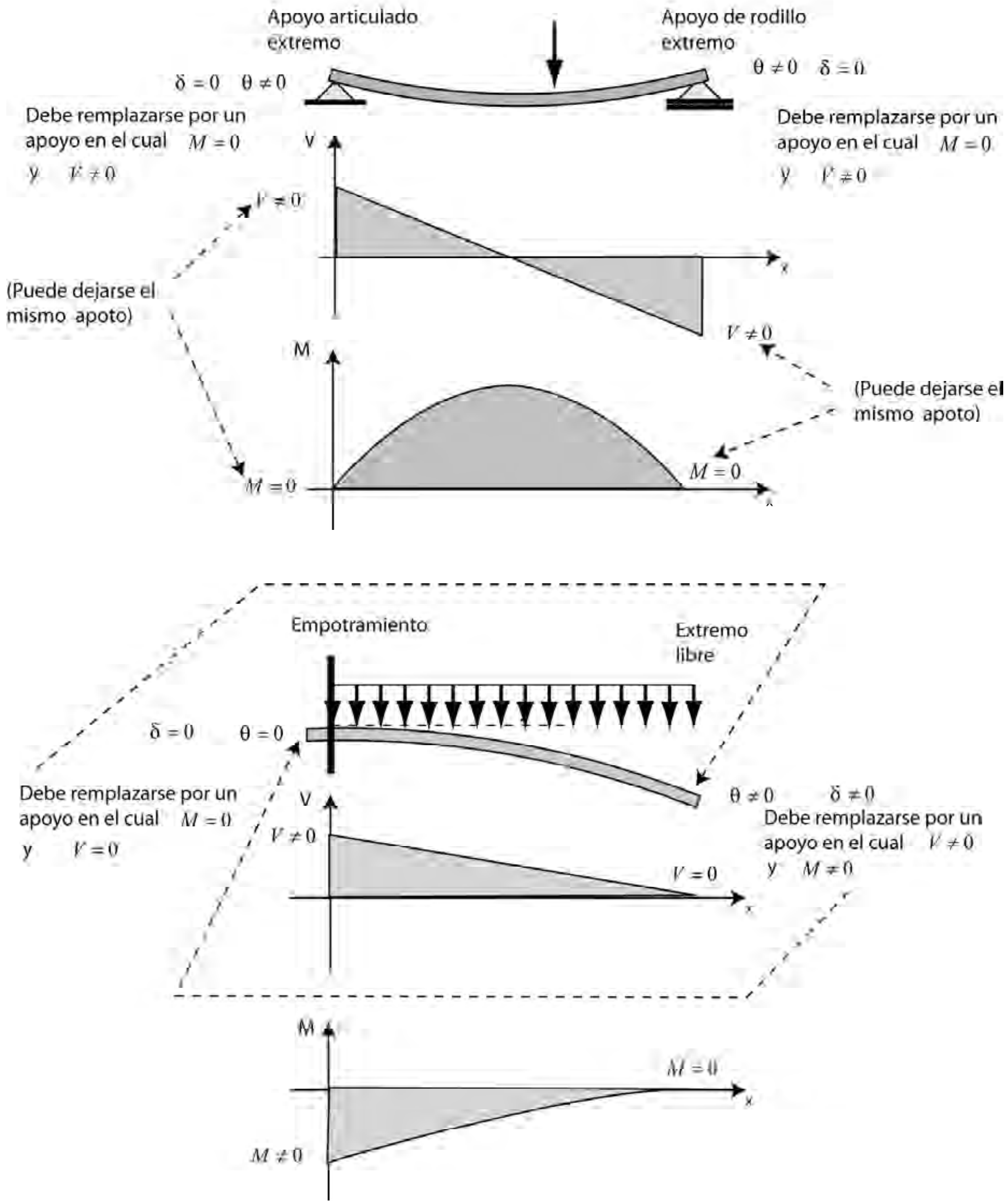
Antes de hacerlo, recordemos los tipos de apoyo mas comunes en las vigas y los valores de la fuerza cortante y del momento flector en los mismos.

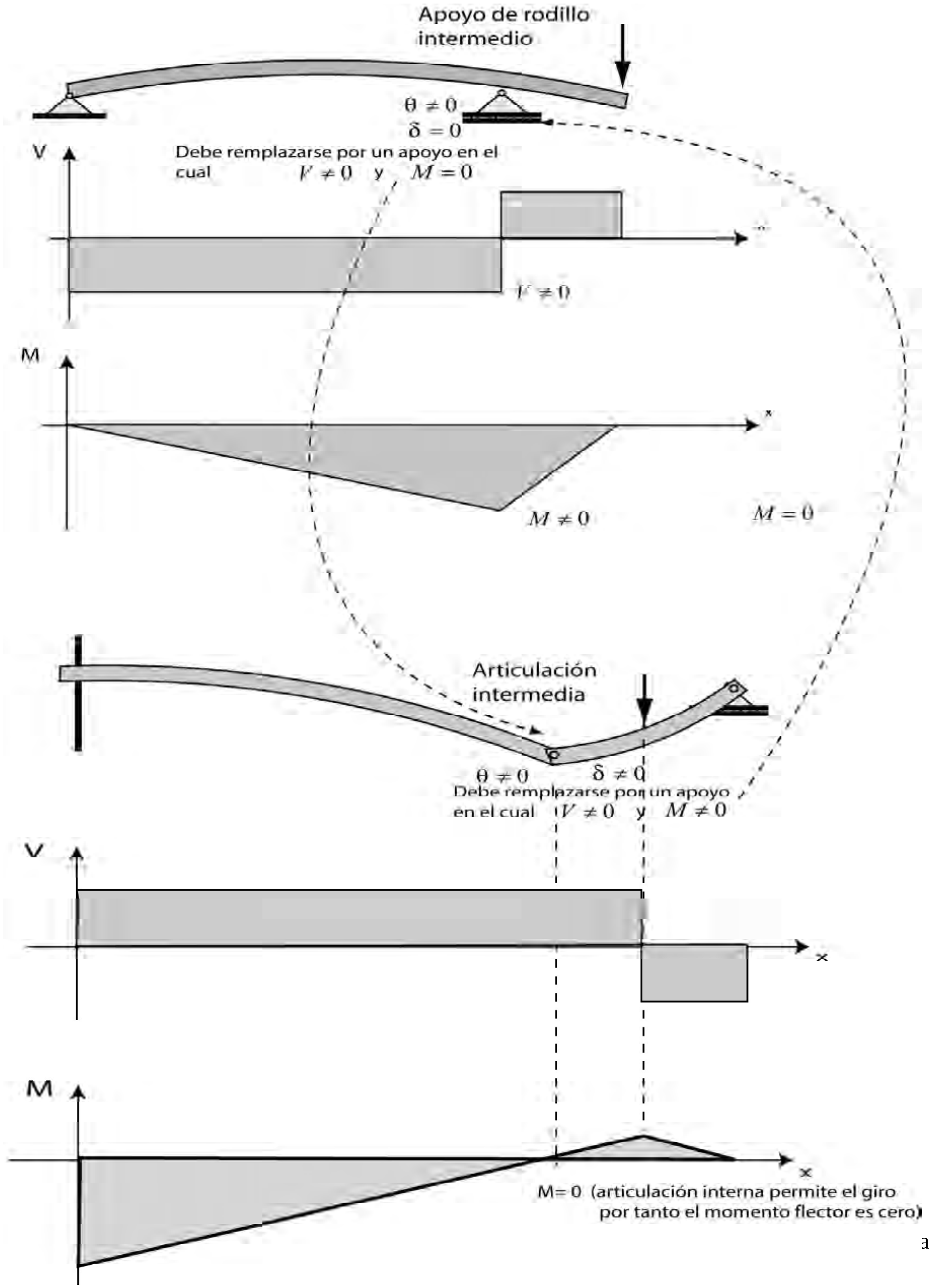
TIPOS DE APOYOS EN VIGAS Y VALORES CORRESPONDIENTES DE PENDIENTE, DEFORMACIÓN, FUERZA CORTANTE Y MOMENTO FLECTOR EN LOS MISMOS



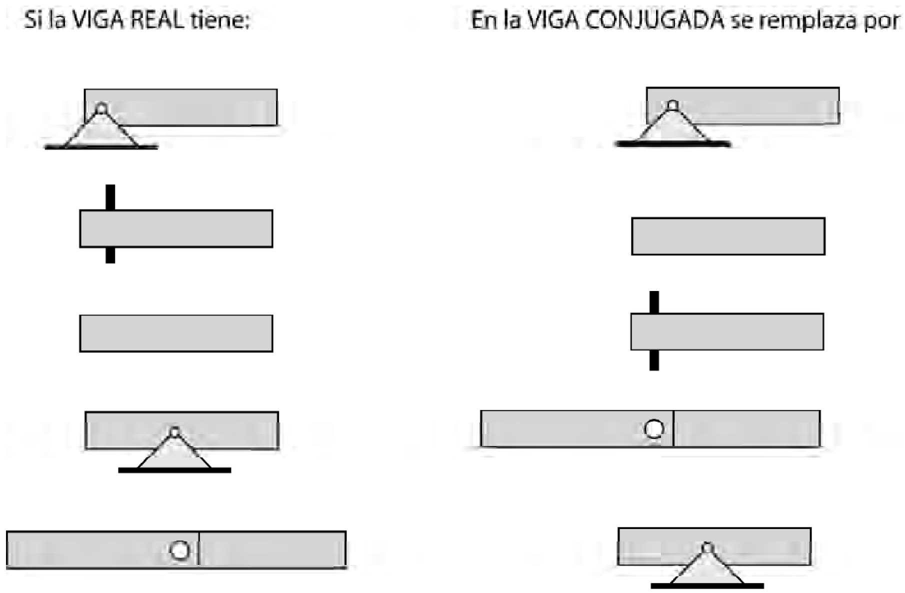

Empotramiento
Extremo libre
δ = 0
θ = 0
θ ≠ 0
δ ≠ 0
V
V ≠ 0
V = 0
x
M
M = 0
x
M ≠ 0

TIPOS DE APOYOS EN VIGAS Y VALORES CORRESPONDIENTES DE PENDIENTE, DEFORMACIÓN, FUERZA CORTANTE Y MOMENTO FLECTOR EN LOS MISMOS

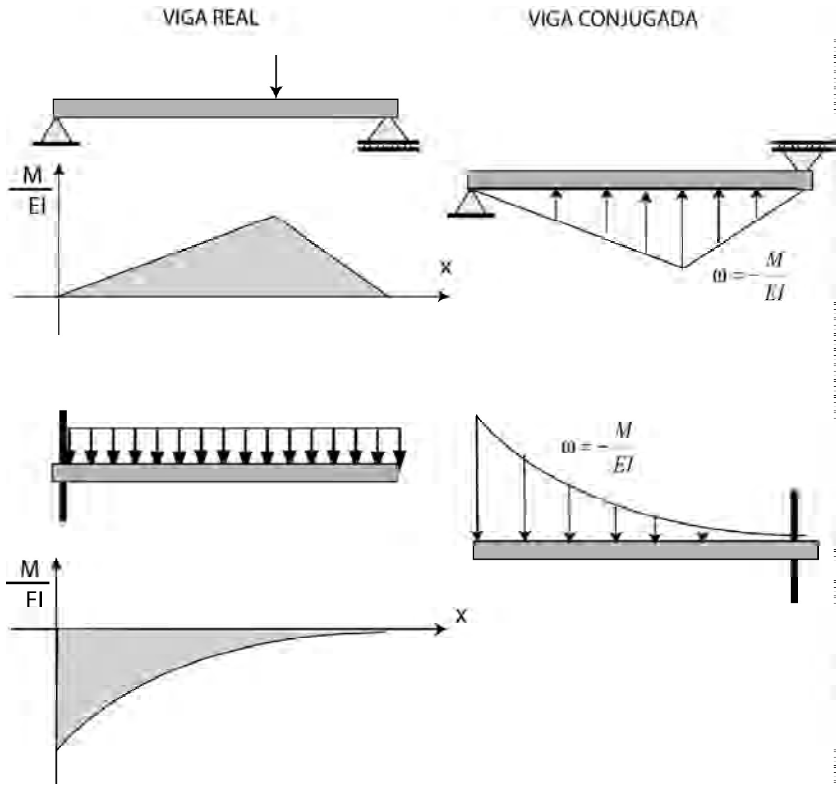


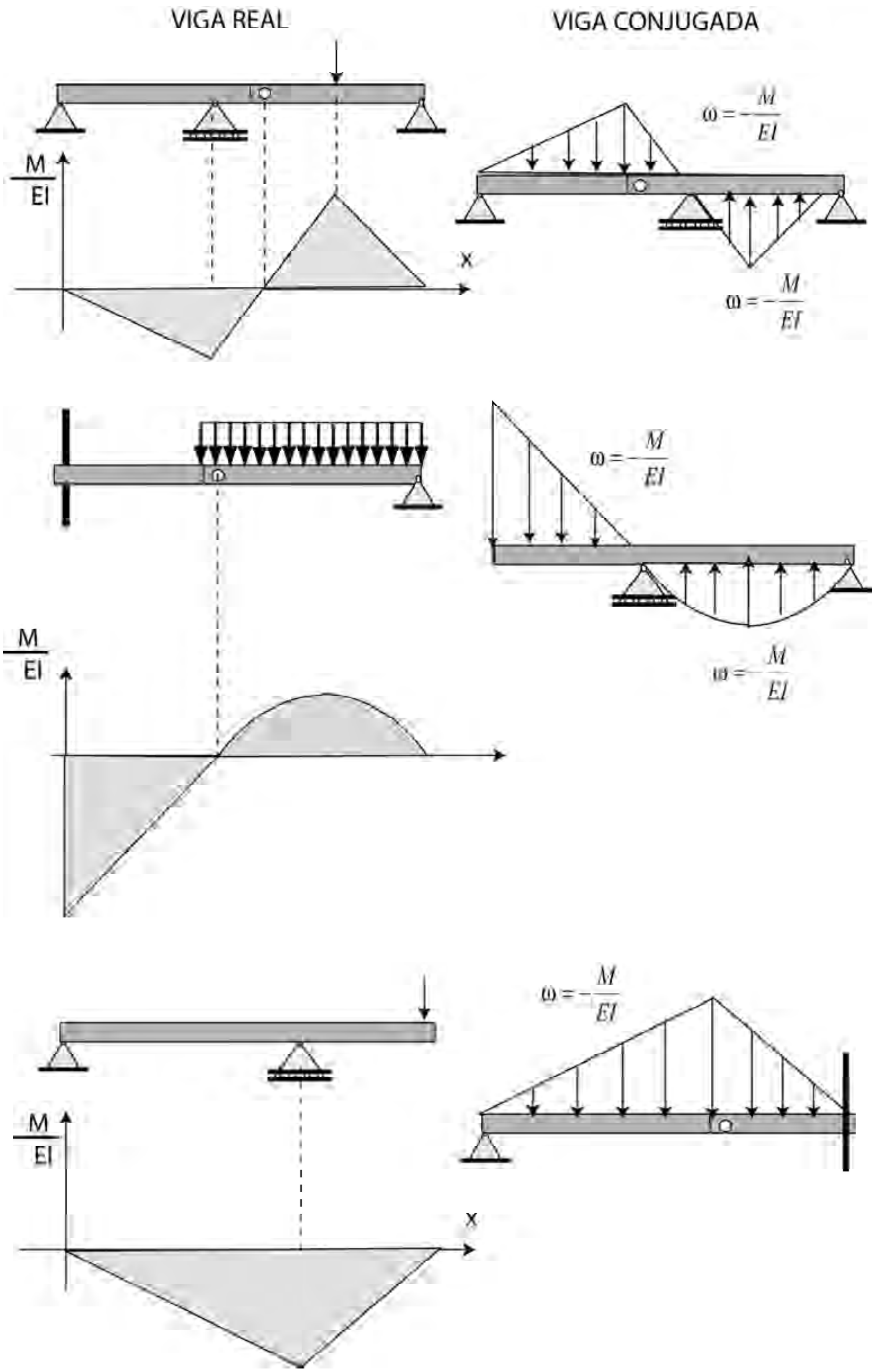

Apoyo de rodillo intermedio
θ ≠ 0
δ = 0
Debe remplazarse por un apoyo en el cual V ≠ 0 y M = 0
V
V ≠ 0
M
M ≠ 0
M = 0
Articulación intermedia
θ ≠ 0
δ ≠ 0
Debe remplazarse por un apoyo en el cual V ≠ 0 y M ≠ 0
V
x
M
x
M= 0 (articulación interna permite el giro por tanto el momento flector es cero)

conjugada debe ser la siguiente:



Ejemplos de vigas conjugadas

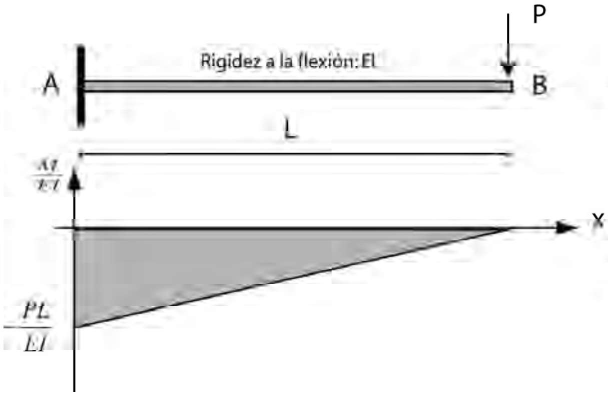




VIGA REAL
VIGA CONJUGADA
$\omega = -\frac{M}{EI}$
$\frac{M}{EI}$
X
$\omega = -\frac{M}{EI}$
$\frac{M}{EI}$
$\omega = -\frac{M}{EI}$
$\omega = -\frac{M}{EI}$
$\omega = -\frac{M}{EI}$
$\frac{M}{EI}$
X

PROBLEMA

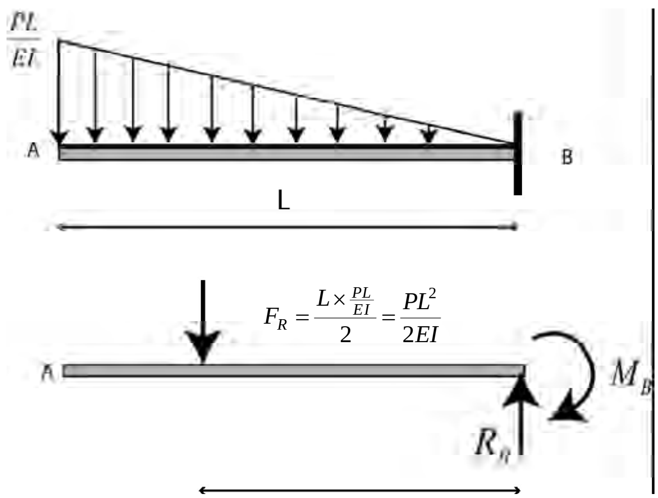
Calcular la deformación y la pendiente en el extremo libre del voladizo, B



$$\delta_{B-viga-real} = M_{B-viga-conjugada}$$

$$\theta_{B-viga-real} = V_{B-viga-conjugada}$$

La viga conjugada es:



$$\bar{x} = \frac{2L}{3}$$

$$M_{B-viga-conjugada} = M_B$$

$$V_{B-viga-conjugada} = R_B$$

$$\sum F_y = 0$$

$$R_B = \frac{PL^2}{2EI}$$

$$\sum M_B = 0$$

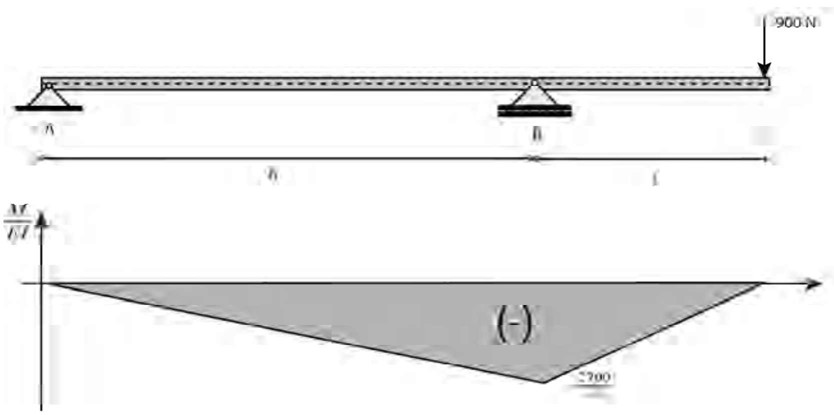
$$M_B = \frac{PL^2}{2EI} \times \frac{2L}{3} = \frac{PL^3}{3EI}$$

Por lo tanto: $\boxed{\delta_B = -\frac{PL^3}{3EI}}$ $\boxed{\theta_B = -\frac{PL^2}{2EI}}$

En resumen:

PROBLEMA

Calcular la pendiente en B y la deformación en C

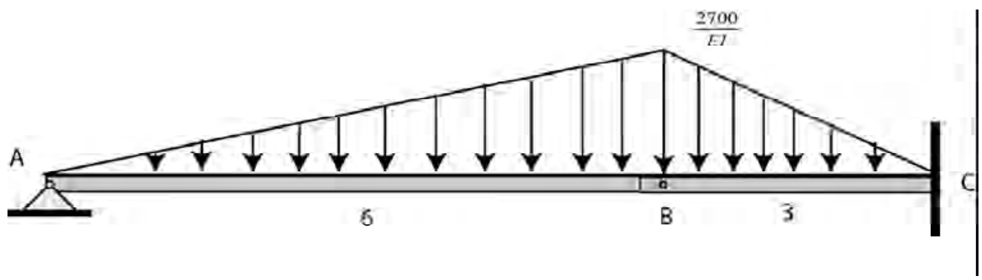


$$\sum M_A = 0$$
$$6R_B - 9 \times 900 = 0$$
$$R_B = 1350N \uparrow$$

$$\sum F_y = 0$$
$$R_A = 900 - 1350 = -450$$
$$R_A = 450 \downarrow$$

$$\delta_{C-viga-real} = M_{C-viga-conjugada}$$

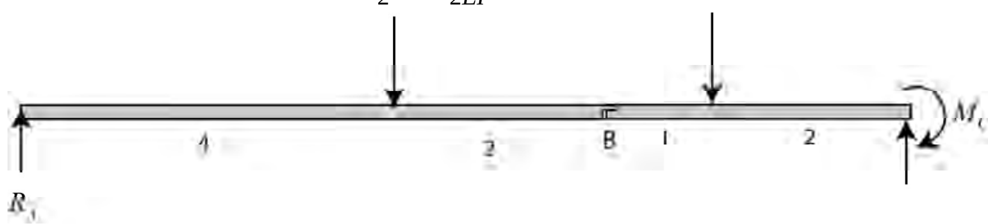
Dibujemos la viga conjugada:

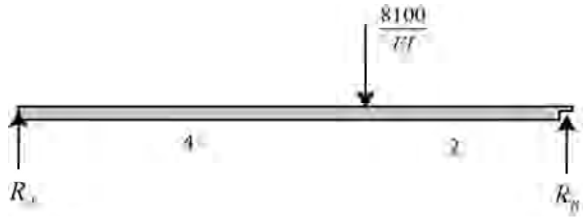


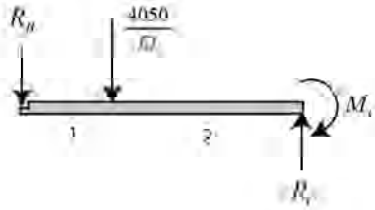
$$M_{C-viga-conjugada} = Momento\,en\,el\,empotramiento\,C = M_C$$

Calculemos el momento en el empotramiento C en la viga conjugada:

$$F_1 = \frac{6 \times \frac{2700}{EI}}{2} = \frac{8100}{2EI} \qquad F_2 = \frac{3 \times \frac{2700}{EI}}{2} = \frac{4050}{EI}$$





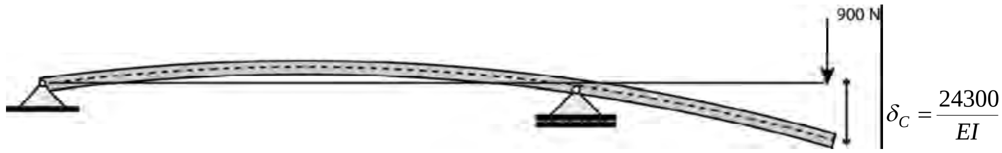


$$\sum M_A = 0 \qquad -4\times\frac{8100}{EI} + 6R_B = 0 \qquad R_B = \frac{5400}{EI}$$

$$\sum M_C = 0 \qquad M_C = \frac{5400}{EI}\times 3 + \frac{4050}{EI}\times 2 = \frac{24300}{EI}$$

$$\theta_B = V_{B-viga-conjugada} = R_B = \frac{5400}{EI}$$

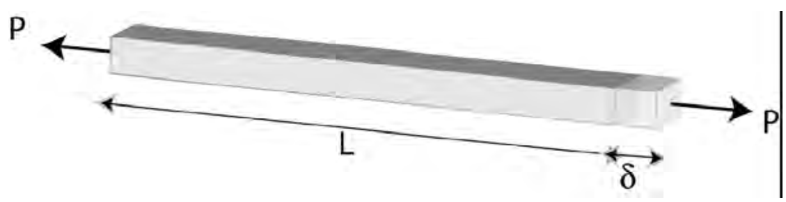
$$\delta_B = M_{B-viga-conjugada} = M_B = \frac{24300}{EI}$$



4.4 INTRODUCCIÓN A LOS MÉTODOS DE ENERGÍA

Como se dijo al principio del capítulo, aparte de los métodos matemáticos y geométricos estudiados aquí, existen otros métodos que se estudiarán en detalle en el curso de Ingeniería Estructural I que se basan en el principio de conservación de la energía denominados por tanto, métodos de energía.

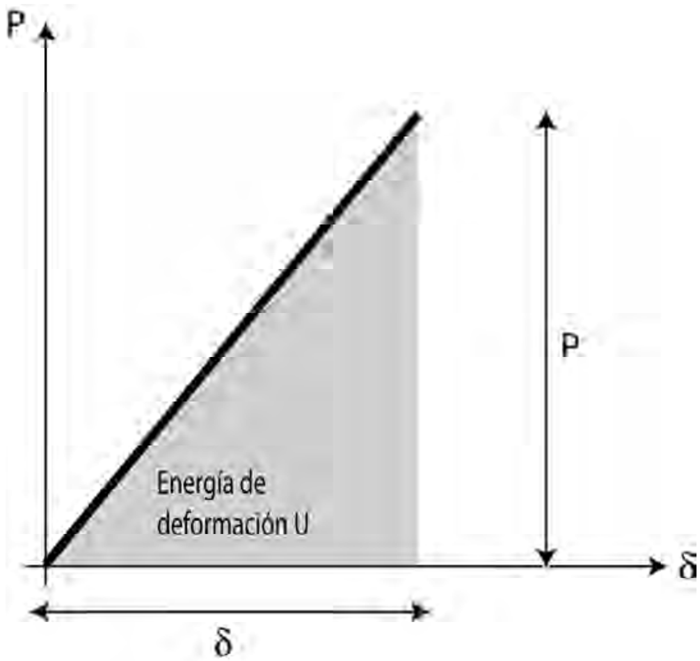
Recordemos lo visto en el primer capítulo según lo cual cuando se aplica una carga axial gradual a una barra dicha carga efectúa un trabajo externo que debe ser igual al trabajo interno de deformación que se acumula en el interior de la barra y que es el que permite que la barra recupere su forma inicial una vez retirada la carga siempre que estemos en el rango elástico lineal.



En el capítulo mencionado veíamos que para la barra de la figura el trabajo externo realizado por la fuerza es igual a la energía acumulada en el interior de la barra.

$$W_{externo} = U_{interna}$$

Recordemos además que el trabajo externo realizado por la fuerza es igual al área bajo la curva P- δ:



Área bajo la recta= $\dfrac{P\delta}{2}$

Y encontramos que para fuerzas axiales la energía interna de deformación es:

Energía interna de deformación = $\dfrac{P^2 L}{2AE} = \dfrac{\delta^2 AE}{2L}$

De manera similar en el caso de flexión se tiene que un momento M al producir un giro $d\theta$ en un cuerpo efectúa un trabajo que es igual a $Md\theta$.

Por lo tanto el trabajo total será:

$$W = \int_0^\theta M d\theta$$

Y como el momento se aplica gradualmente, se tendrá que similarmente al caso axial en el cual encontramos que $W = \dfrac{P\delta}{2}$, en esta situación:

$$W = \frac{M\theta}{2}$$

En el curso de Ingeniería estructural se verá en detalle que la energía de deformación acumulada en el interior de una barra cuando es flectada por un momento M es igual a:

$$U = \int_0^L \frac{M^2 dx}{2EI}$$

A partir de la aplicación del principio de conservación de la energía, en el curso mencionado se estudiarán métodos para el cálculo de deformaciones y pendientes en vigas a través de conceptos como el principio del trabajo y las fuerzas virtuales y de teoremas como los de Castigliano.

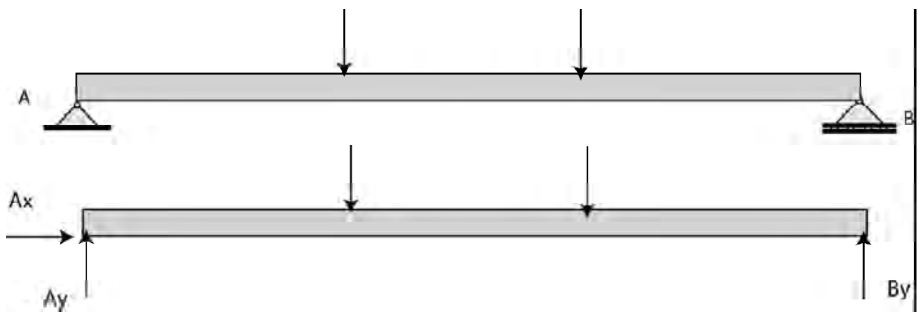
En Internet se encuentran muchos programas útiles para calcular deformaciones en vigas. Recomiendo el programa DRBEAM (www.drbeam.com), por su gran utilidad didáctica en la visualización de las deformaciones producidas en vigas con diferentes tipos de apoyos y cargas.

4.5 VIGAS ESTÁTICAMENTE INDETERMINADAS

Tal como se ha visto en capítulos anteriores, en el caso de las vigas también surgen situaciones estáticamente indeterminadas (mayor número de reacciones que ecuaciones, por lo cual deberá seguirse un procedimiento similar a los ya estudiados: obtener a partir de las deformaciones ecuaciones adicionales que levanten la indeterminación).

Pero cómo surgen las vigas estáticamente indeterminadas? Veamos:

La siguiente viga como se sabe es estáticamente determinada:



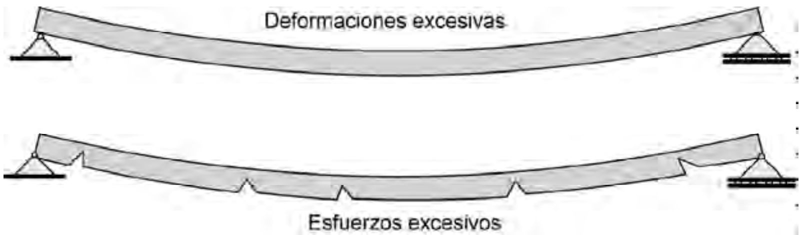
Ecuaciones de equilibrio: 3 $\left[\begin{array}{l} \sum F_x = 0 \\ \sum F_y = 0 \\ \sum M_A = 0 \end{array}\right.$ Reacciones (incógnitas): 3 $\left[\begin{array}{l} A_x \\ A_y \\ B_y \end{array}\right.$

Estáticamente determinada

Al hacer el análisis deben calcularse los esfuerzos actuantes máximos $(\sigma_{\max} \;\; y \;\; \tau_{max})$ y la deformación máxima $\delta_{\max}$.

Estos valores deben ser menores que los esfuerzos y la deformación admisibles para que la viga sea segura y funcional como se ha visto.

Sin embargo puede suceder que sean mayores (uno de ellos o todos).



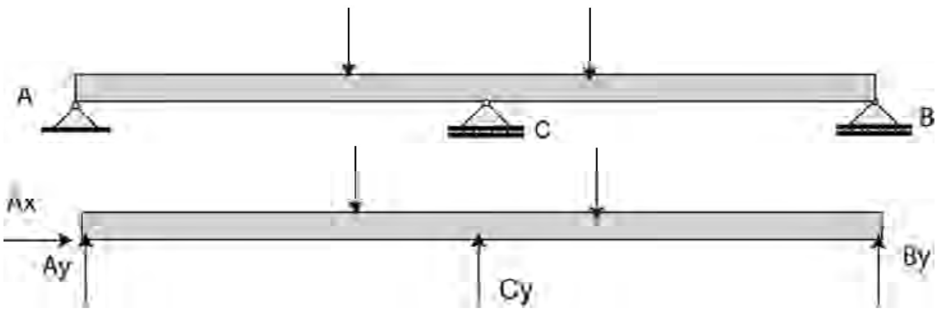
En este caso el diseñador debe enfrentar varias alternativas:

a) Cambiar el material (por uno mas resistente o mas rígido según el caso).

b) Aumentar la sección transversal de la viga incrementando su resistencia y su rigidez, sin cambiar el material.

Sin embargo en muchas ocasiones no es posible cambiar el material o las dimensiones por problemas de disponibilidad de otros materiales o por requerimientos arquitectónicos que no hacen posible cambiar las dimensiones.

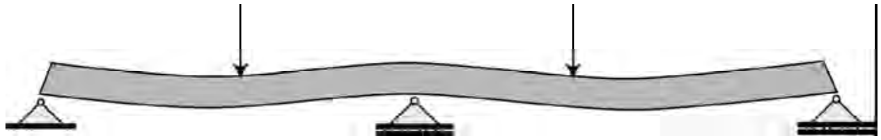
En estas condiciones la única alternativa para aumentar la seguridad de la viga y su rigidez será colocar un apoyo adicional intermedio C.



Ecuaciones de equilibrio: 3 $\left[\begin{array}{l} \sum F_x = 0 \\ \sum F_y = 0 \\ \sum M_A = 0 \end{array}\right.$ Reacciones (incógnitas): 4 $\left[\begin{array}{l} A_x \\ A_y \\ B_y \\ C_y \end{array}\right.$

Estáticamente indeterminada

Al poner el apoyo en C se mejoran las condiciones de rigidez y resistencia de la viga:



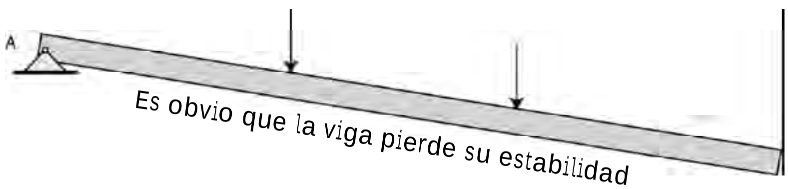
Más RIGIDEZ (menos deformaciones) y más RESISTENCIA (más seguridad)

Lo que se gana en rigidez y en resistencia logicamente debe “pagarse” con la obtención de ecuaciones adicionales a partir de las deformaciones que levanten la indeterminación.

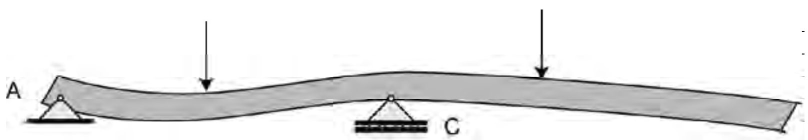
El nuevo apoyo (que podemos llamar “redundante”), garantiza además una seguridad extra a la viga puesto que provee a la viga con la posibilidad de mantenerse estable en caso de falla de uno de los apoyos.

Volvamos a considerar la viga original con solamente 2 apoyos:

Veamos que sucede si se produce una falla y desaparece el apoyo B:



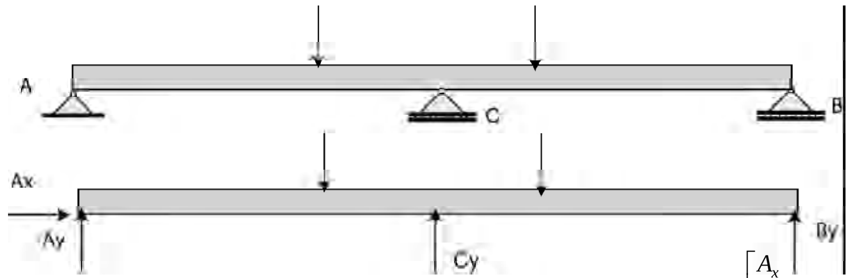
Observemos que si el apoyo C está presente, éste “acude en auxilio” de la viga para garantizar su estabilidad. Puede ser que la viga sufra deformaciones y grietas excesivas pero el apoyo redundante evita su colapso.



Esta es pues, otra de las ventajas de las vigas estáticamente indeterminadas: los apoyos redundantes garantizan la estabilidad en caso de fallas.En general, mientras mas apoyos redundantes tenga una viga o una estructura, mas segura será. Lógicamente también tendrá un mayor grado de indeterminación y por consiguiente el análisis será mas largo, puesto que involucrará mas ecuaciones.

Observemos como se obtiene la ecuación adicional que nos resulve la indeterminación:

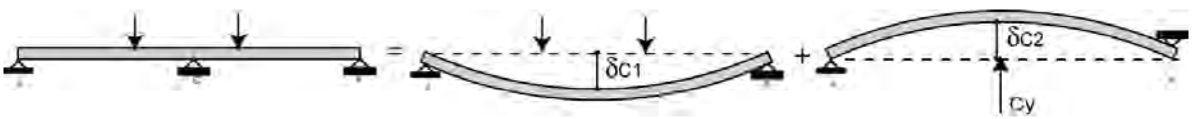
Volvamos a la situación de indeterminación estática:



Ecuaciones de equilibrio: 3 $\begin{cases} \sum F_x = 0 \\ \sum F_y = 0 \\ \sum M_A = 0 \end{cases}$ Reacciones (incógnitas): 4 $\begin{cases} A_x \\ A_y \\ B_y \\ C_y \end{cases}$

Estáticamente indeterminada

Para resolver el problema empleamos un artificio muy utilizado en ingeniería estructural : Quitamos el apoyo redundante y dejamos que la viga se deforme, luego lo volvemos a poner a actuar revirtiendo la deformación que obviamente será igual a la primera. Para el análisis empleamos el principio de superposición asi:



Se quita el apoyo redundante C permitiendo que la viga se deforme por efecto de las dos cargas una cantidad igual a δ_{C1}

Se restituye el apoyo C (o lo que es lo mismo, la reacción Cy) y se deja que produzca la deformacion contraria δ_{C2}

Como en la situación original hay un apoyo en C, allí la deformación será cero. Por este motivo:

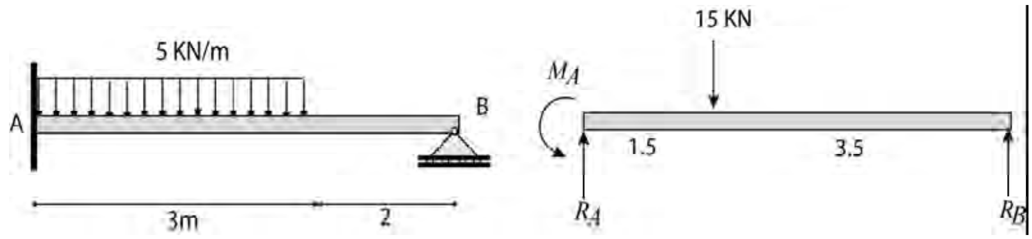
$$\delta_{C1} = \delta_{C2}$$

Esta es la ecuación que levanta la indeterminación y nos permite resolver el problema

No sobra terminar diciendo que δ_{C1} y δ_{C2} se obtienen con cualquiera de los métodos vistos para calcular deformaciones: El de la doble integración, el del área de momentos o el de la viga conjugada.

PROBLEMA

Calcular las reacciones en los apoyos y hacer los diagramas de fuerza cortante y momento flector de la viga



$$\sum M_A = 0 \qquad M_A + 5R_B - 15\times 1.5 = 0$$

$$\sum F_Y = 0 \qquad R_A + R_B - 15 = 0$$

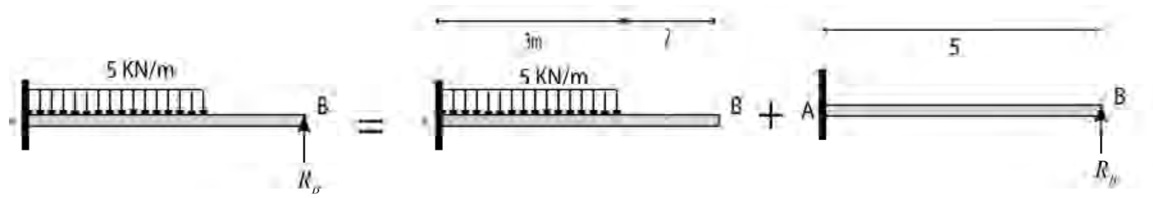
2 ecuaciones ESTÁTICAMENTE

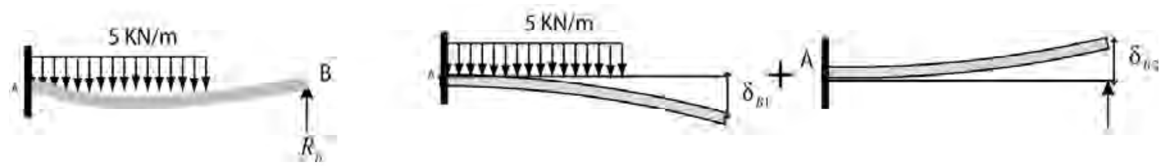
3 incógnitas INDETERMINADO

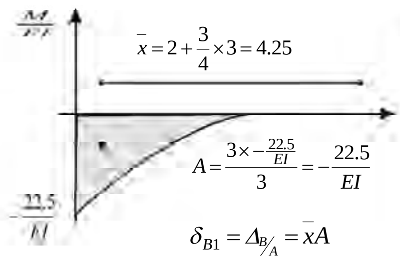
Debemos obtener una ecuación adicional basada en la compatibilidad de deformaciones: como en B hay un apoyo,entonces la deformación allí es igual a cero

$$\delta_B = 0$$

Aplicando el principio de superposición y considerando la reacción en B como redundante, tenemos:





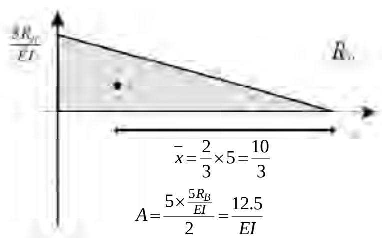


$$\bar{x} = 2 + \frac{3}{4}\times 3 = 4.25$$

$$A = \frac{3\times -\frac{22.5}{EI}}{3} = -\frac{22.5}{EI}$$

$$\delta_{B1} = \Delta_{B/A} = \bar{x}A$$

$$\delta_{B1} = 4.25\times\left(-\frac{22.5}{EI}\right) = -\frac{95.625}{EI}$$



$$\bar{x} = \frac{2}{3}\times 5 = \frac{10}{3}$$

$$A = \frac{5\times\frac{5R_B}{EI}}{2} = \frac{12.5}{EI}$$

$$\delta_{B2} = \Delta_{B/A} = \bar{x}A$$

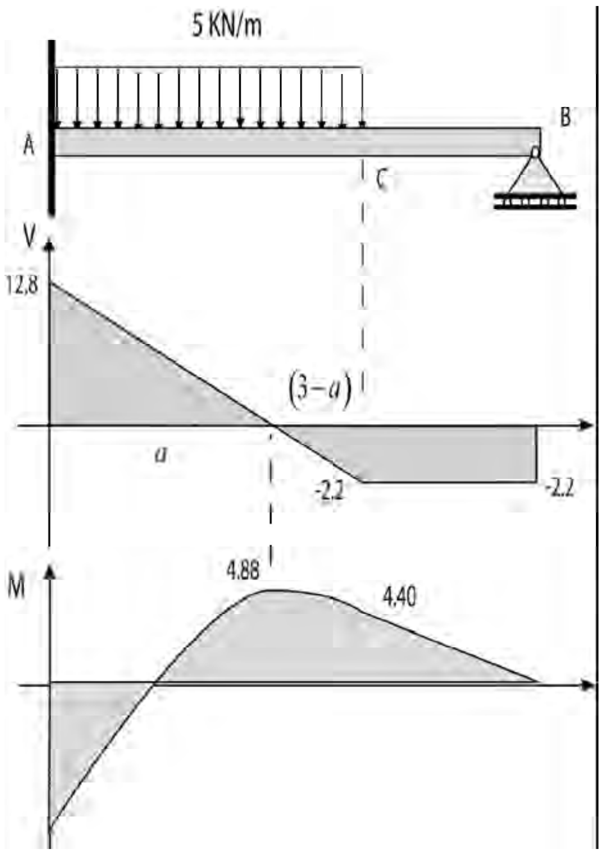
$$\delta_{B2} = \frac{10}{3}\times\left(\frac{12.5R_B}{EI}\right) = \frac{41.666R_B}{EI}$$

Como: $\delta_B = 0$ $\delta_{B1} = \delta_{B2}$ $\boxed{\dfrac{91.625}{EI} = \dfrac{41.666 R_B}{EI}}$ Esta es la 3ª ecuación que levanta la indeterminación

Por tanto:

$R_B = 2.20KN$ $R_A = 15 - 2.20 = 12.8KN$ $M_A = 15 \times 1.5 - 5 \times 2.2 = 11.5KN \times m$

Con estos valores, construimos los diagramas de fuerza cortante y momento flector:



$$\frac{a}{12.8} = \frac{(3-a)}{2.2}$$

$$2.2a = 38.4 - 12.8a$$

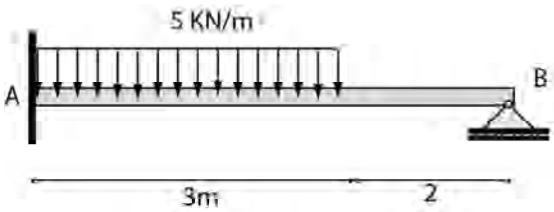
$$a = 2.56$$

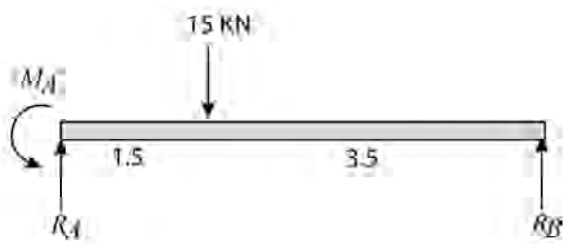
$$M_{\max(+)} = -11.5 + \frac{2.56 \times 12.8}{2} = 4.88$$

$$M_C = 4.88 - \frac{0.44 \times 2.2}{2} = 4.40$$

$$M_B = 4.40 - 2 \times 2.2 = 0$$

Resolver el problema utilizando el método de la doble integración:





$$\sum M_A = 0 \qquad M_A + 5R_B - 15\times 1.5 = 0$$

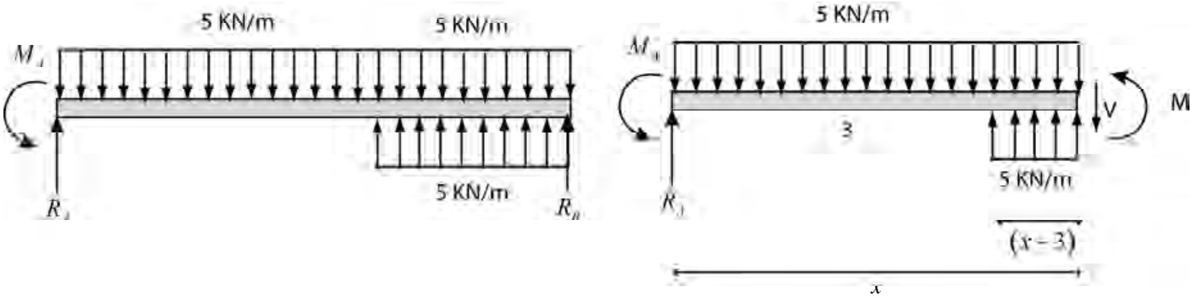
$$\sum F_Y = 0 \qquad R_A + R_B\text{-}15 = 0$$

2 ecuaciones ESTÁTICAMENTE

3 incógnitas INDETERMINADO

Como la carga no llega hasta el extremo derecho de la viga empleamos el artificio ya visto cuando estudiamos funciones de singularidad:

$3 < x < 5$



Ecuación representativa de la viga: $M = R_A x - M_A - \dfrac{5x^2}{2} + \dfrac{5\langle x-3\rangle^2}{2}$

Aplicamos el método de la doble integración:

$$EIy'' = M = R_A x - M_A - \frac{5x^2}{2} + \frac{5\langle x-3\rangle^2}{2}$$

$$EIy' = \frac{R_A x^2}{2} - M_A x - \frac{5x^3}{6} + \frac{5\langle x-3\rangle^3}{6} + C_1$$

$$EIy = \frac{R_A x^3}{6} - \frac{M_A x^2}{2} - \frac{5x^4}{24} + \frac{5\langle x-3\rangle^4}{24} + C_1 x + C_2$$

Condiciones iniciales:

$$x = 0 \qquad y = 0 \qquad C_2 = 0$$

$$x = 0 \qquad y' = 0 \qquad C_1 = 0$$

Ahora obtenemos la tercera ecuación que levanta la indeterminación:

$x = 5 \qquad y = 0 \qquad 0 = \frac{R_A \times 5^3}{6} - \frac{M_A \times 5^2}{2} + \frac{5 \times 5^4}{24} + \frac{5\langle 2 \rangle^4}{24}$

$$0 = 20.833 R_A - 12.5 M_A - 126.875$$

Con esta y con las condiciones de equilibrio obtenemos la siguiente solución del sistema:

$M_A = 11.0$

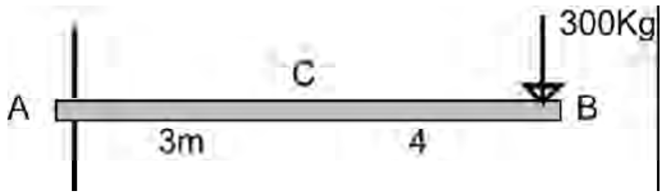
$R_A = 12.7$ las cuales son sensiblemente las mismas obtenidas por superposición

$R_B = 2.2$

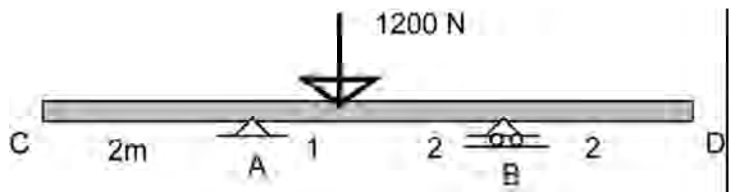
PROBLEMAS PROPUESTOS

Calcular las deformaciones solicitadas en cada caso. En todos los problemas utilizar rigidez a la flexión EI.

$\theta_C = ?$ $\delta_B = ?$ MÉTODO DEL ÁREA DE MOMENTOS



$\theta_C = ?$ $\delta_D = ?$ MÉTODO DE LA VIGA CONJUGADA



$\theta_C = ?$ $\delta_D = ?$ MÉTODO DE LA DOBLE INTEGRACIÓN