

CAPÍTULO 5

ESFUERZOS COMBINADOS



METRO DE MIAMI (ESTADOS UNIDOS) 2005

Hasta ahora se han estudiado elementos estructurales sometidos a un solo tipo de esfuerzo: axiales, cortantes, o producidos por fuerzas transversales (flexión).

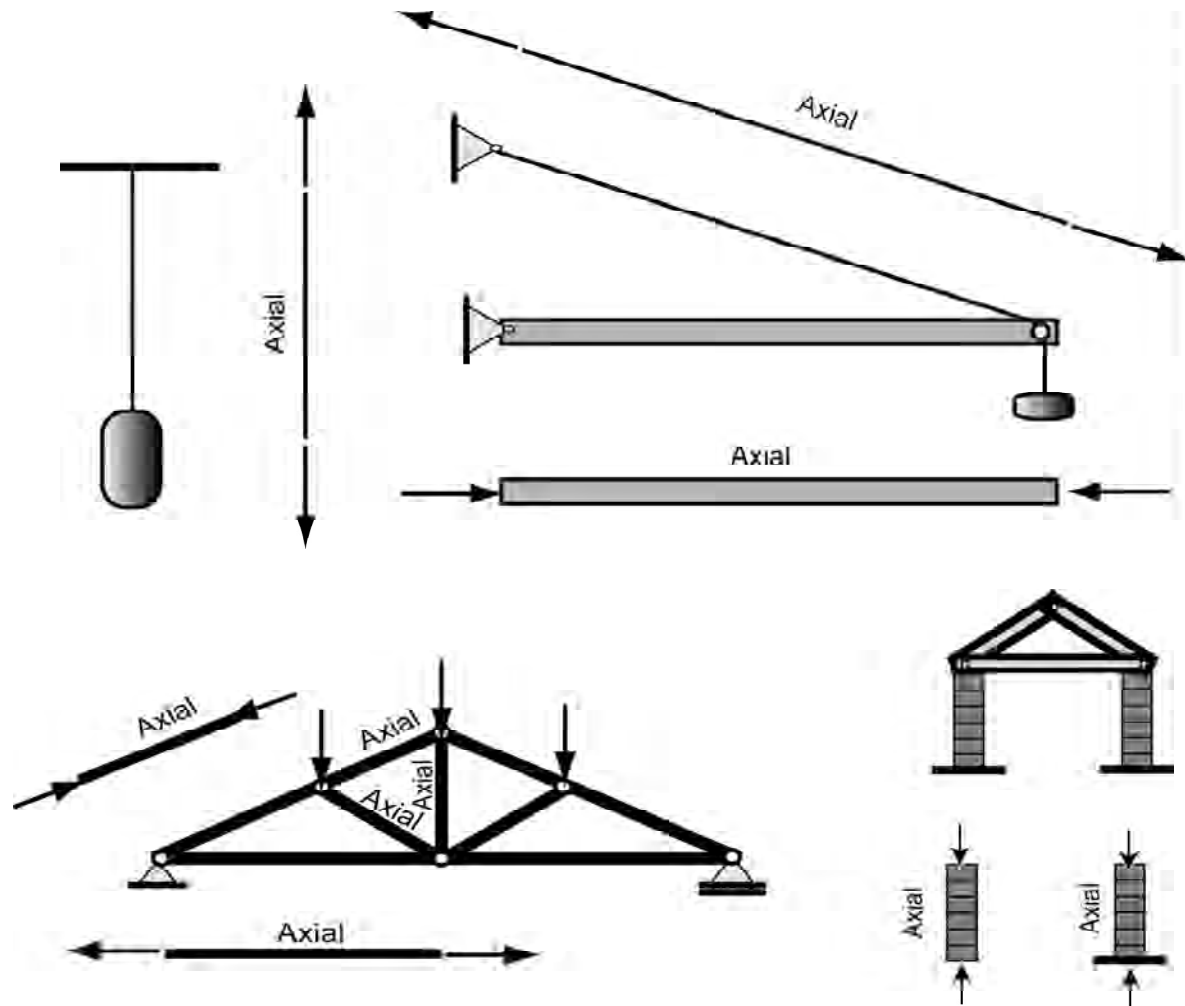
Recordemos:

- Cuando un elemento está sometido solamente a FUERZAS AXIALES (a lo largo de su eje longitudinal) en su sección transversal se producen esfuerzos normales.

$$\sigma = \frac{P}{A}$$

Es el caso de las siguientes situaciones:

Elementos estructurales sometidos a fuerzas axiales

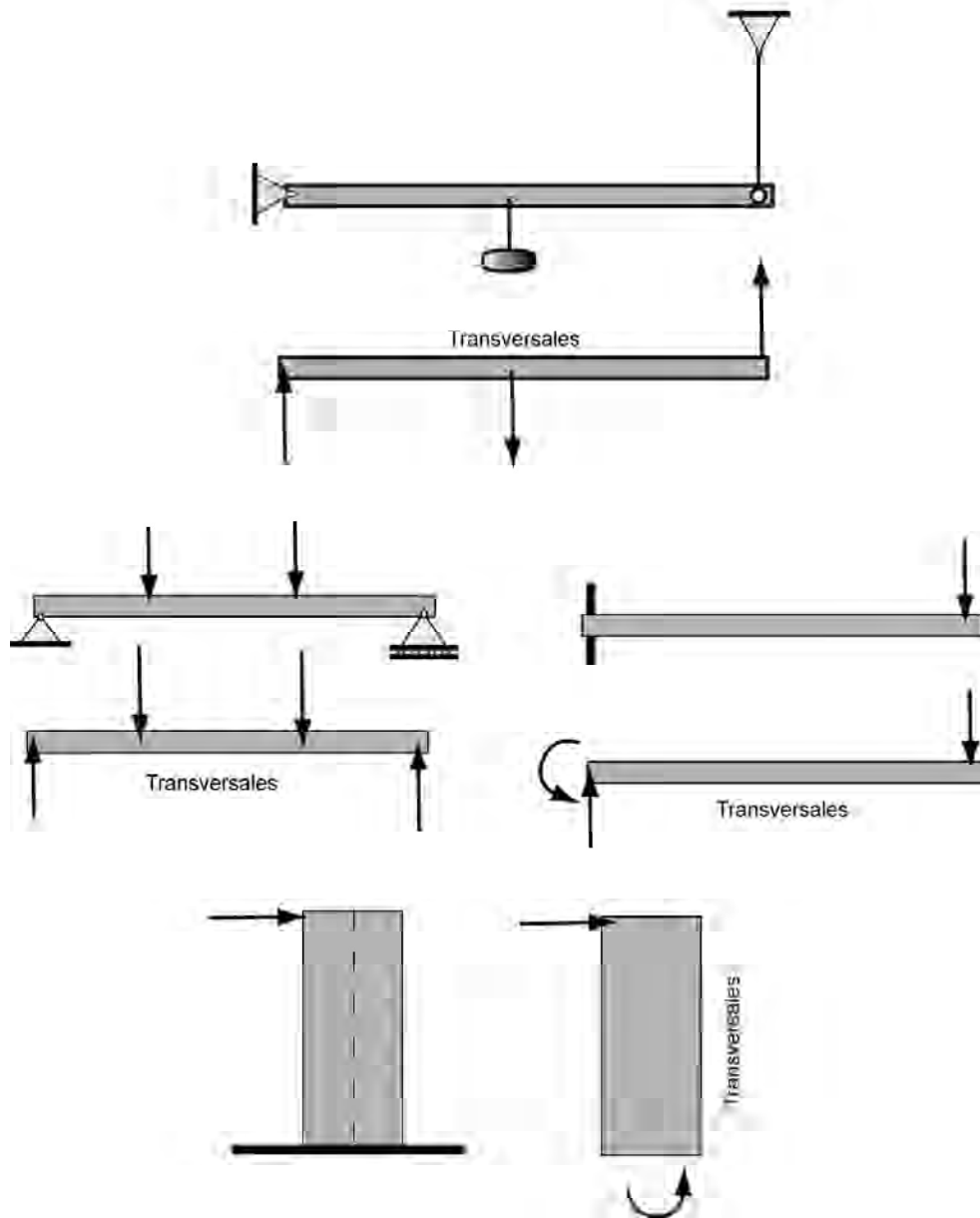


- Hemos visto también el caso de elementos sometidos únicamente a FUERZAS TRANSVERSALES (perpendiculares a su eje longitudinal), caso en el cual quedan sometidos a FLEXIÓN y cuyas secciones transversales quedan sujetas a esfuerzos normales.

$$\sigma = \frac{M_C}{I}$$

Recordemos algunos casos:

Elementos estructurales sometidos a fuerzas transversales



Flexo-tensión y flexo-compresión

Sin embargo, en las situaciones más generales en las estructuras los miembros quedan sometidos **SIMULTÁNEAMENTE** a fuerzas **AXIALES** y **TRANSVERSALES** debido tanto a la forma de aplicación de las cargas como a la manera como se construyen dichas estructuras.

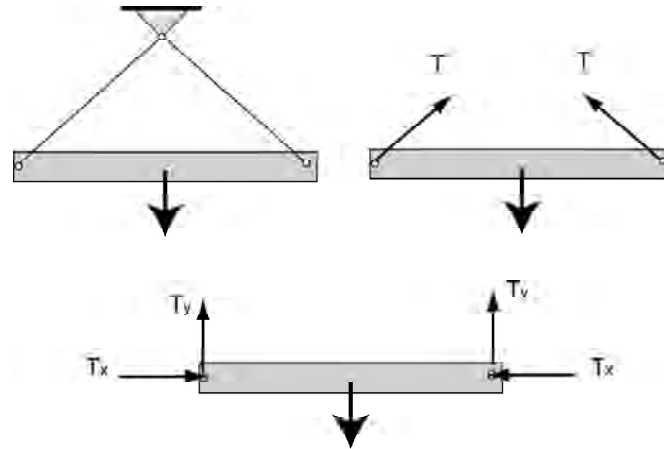
Veamos los siguientes casos:



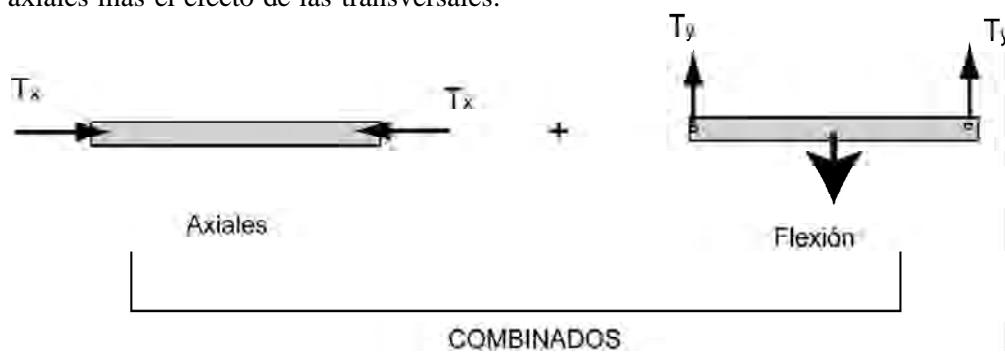
CONSTRUCCIÓN METÁLICA, NUEVA YORK, 2005

Superposición de esfuerzos

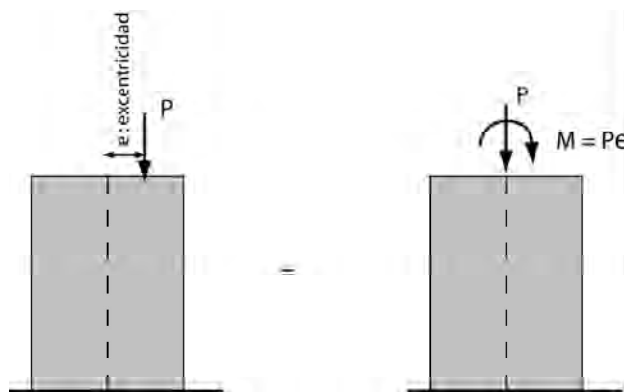
Al poner los cables inclinados para levantar la viga, se generan componentes horizontales de la tensión que generan esfuerzos axiales y componentes verticales que generan flexión.



Aplicando el principio de superposición, el efecto total es igual a la suma de los efectos de las fuerzas axiales mas el efecto de las transversales:

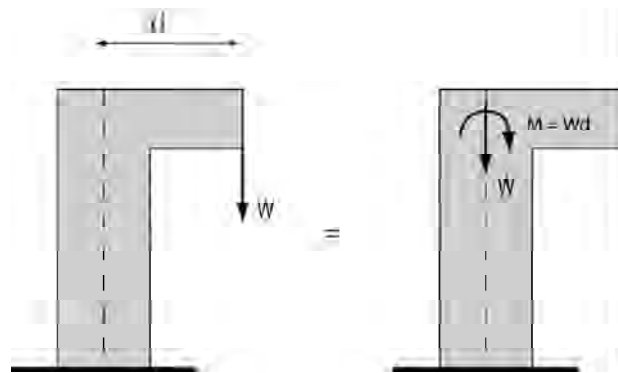
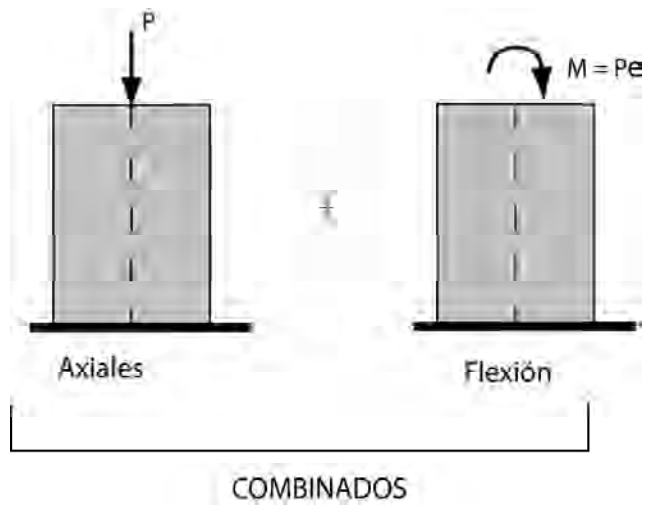


Al aplicar la carga excéntrica también se generan esfuerzos combinados.

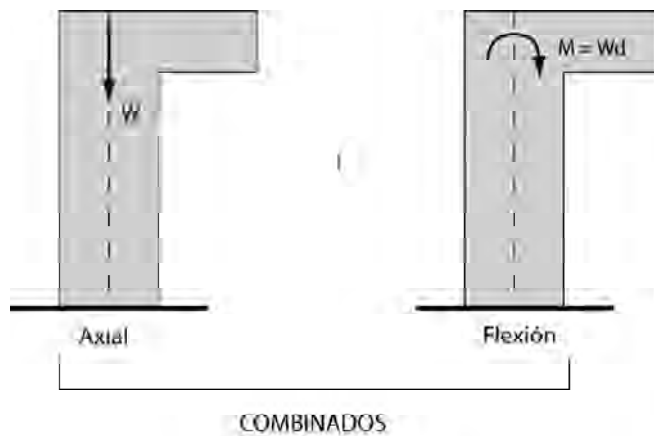


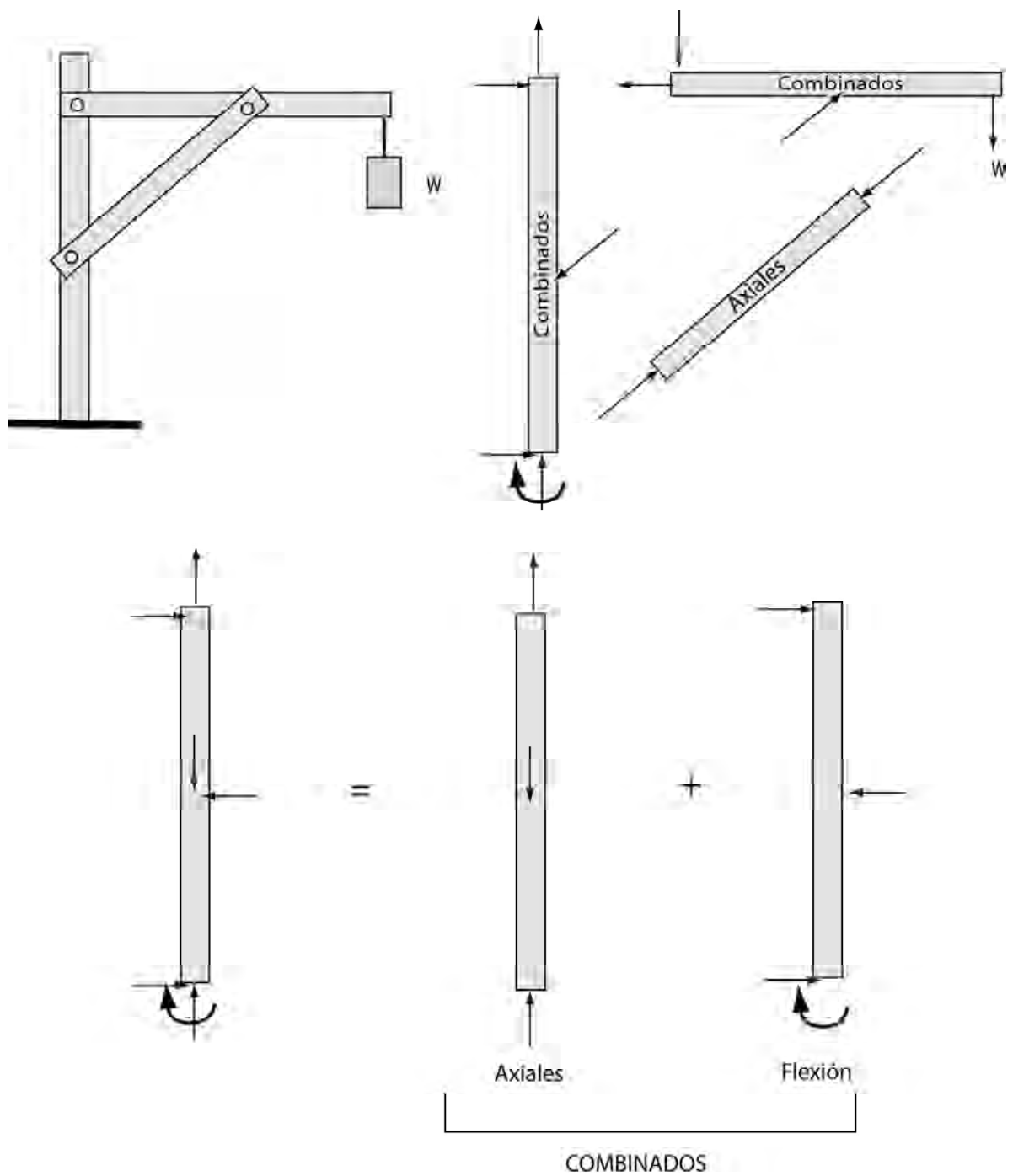
La fuerza puede trasladarse al centro agregando el momento que produce

Por superposición, el efecto final es igual a la suma de los individuales:



Por superposición:





De la misma forma que hemos aplicado el PRINCIPIO DE SUPERPOSICIÓN a las fuerzas, podemos hacerlo a los esfuerzos producidos (siempre que se encuentren dentro del rango elástico lineal, como es el caso de este curso).



CONSTRUCCIÓN METÁLICA EN NUEVA YORK (EE.UU.) 2005

Recordemos que en general los esfuerzos normales producidos por fuerzas axiales son:

$$\sigma = \pm \frac{P}{A}$$

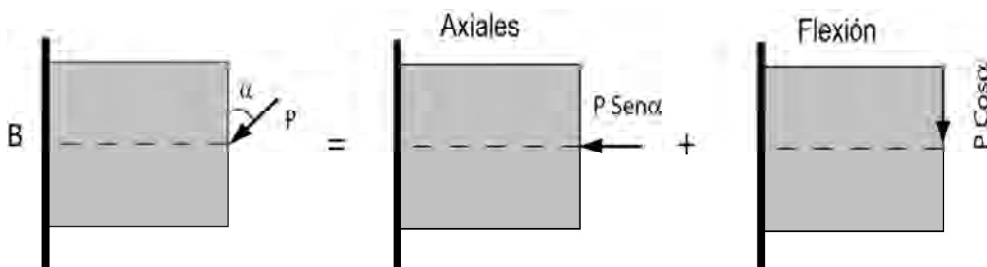
Mientras que los esfuerzos normales producidos en flexión son:

$$\sigma = \pm \frac{M_C}{I}$$

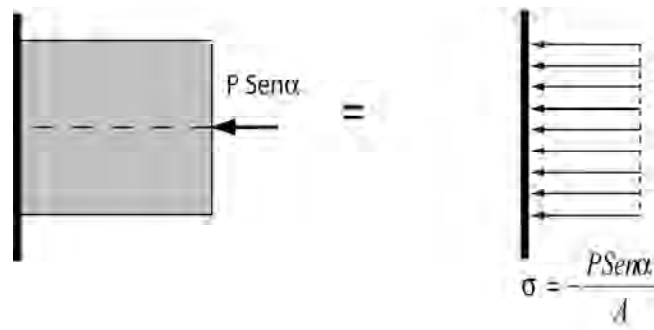
Por lo tanto, cuando se hace la superposición de esfuerzos el esfuerzo resultante en general será:

$$\sigma = \pm \frac{P}{A} \pm \frac{M_C}{I}$$

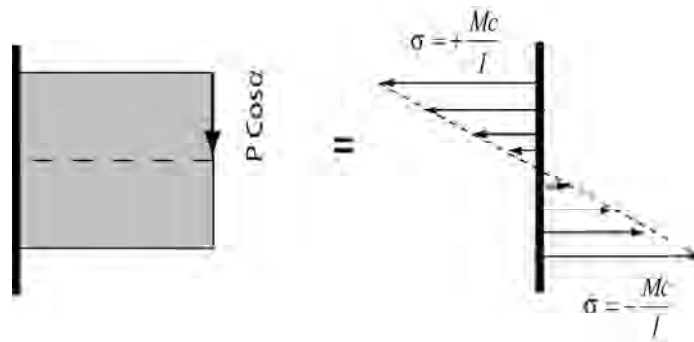
Veamos el siguiente ejemplo:



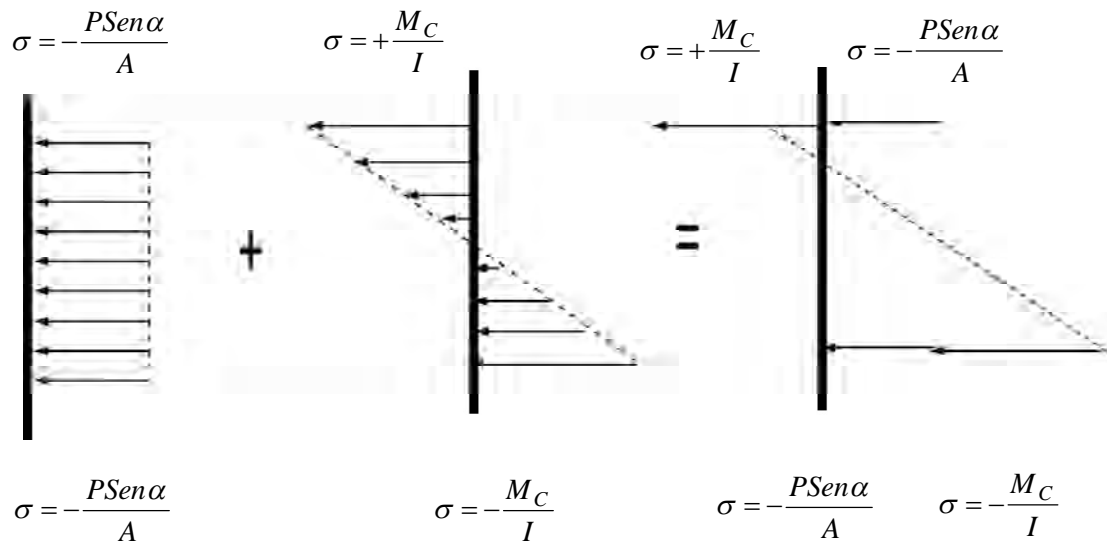
Esfuerzos axiales producidos en la sección B (empotramiento):



Esfuerzos producidos por flexión en la sección B (empotramiento):

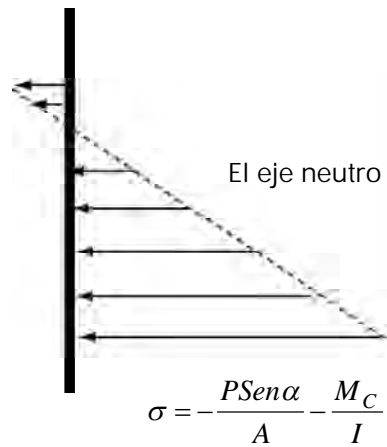


Ahora superponemos los esfuerzos para obtener el esfuerzo resultante en la sección estudiada:



Esfuerzo resultante en la sección B:

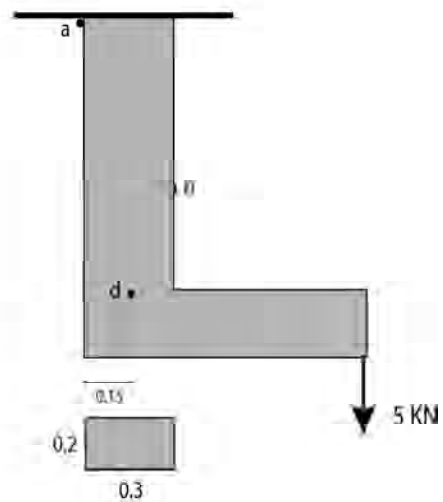
$$\sigma = +\frac{M_C}{I} - \frac{P \operatorname{Sen} \alpha}{A}$$



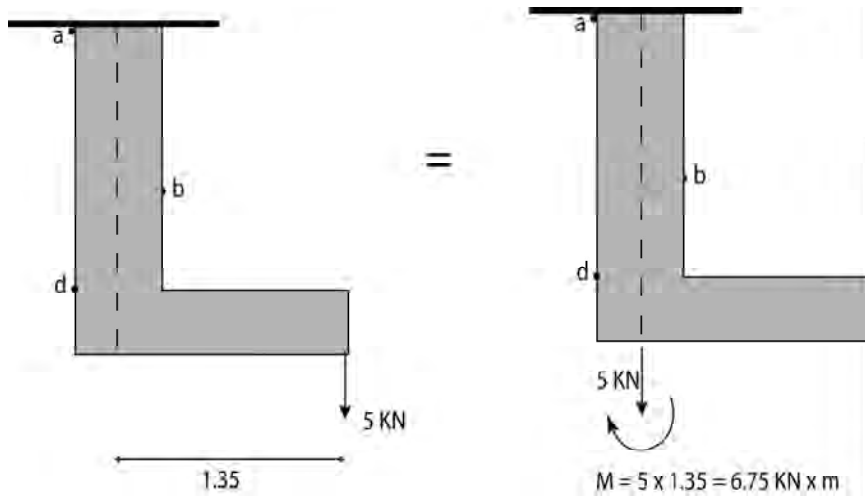
$$\sigma = -\frac{P \operatorname{Sen} \alpha}{A} - \frac{M_C}{I}$$

PROBLEMA

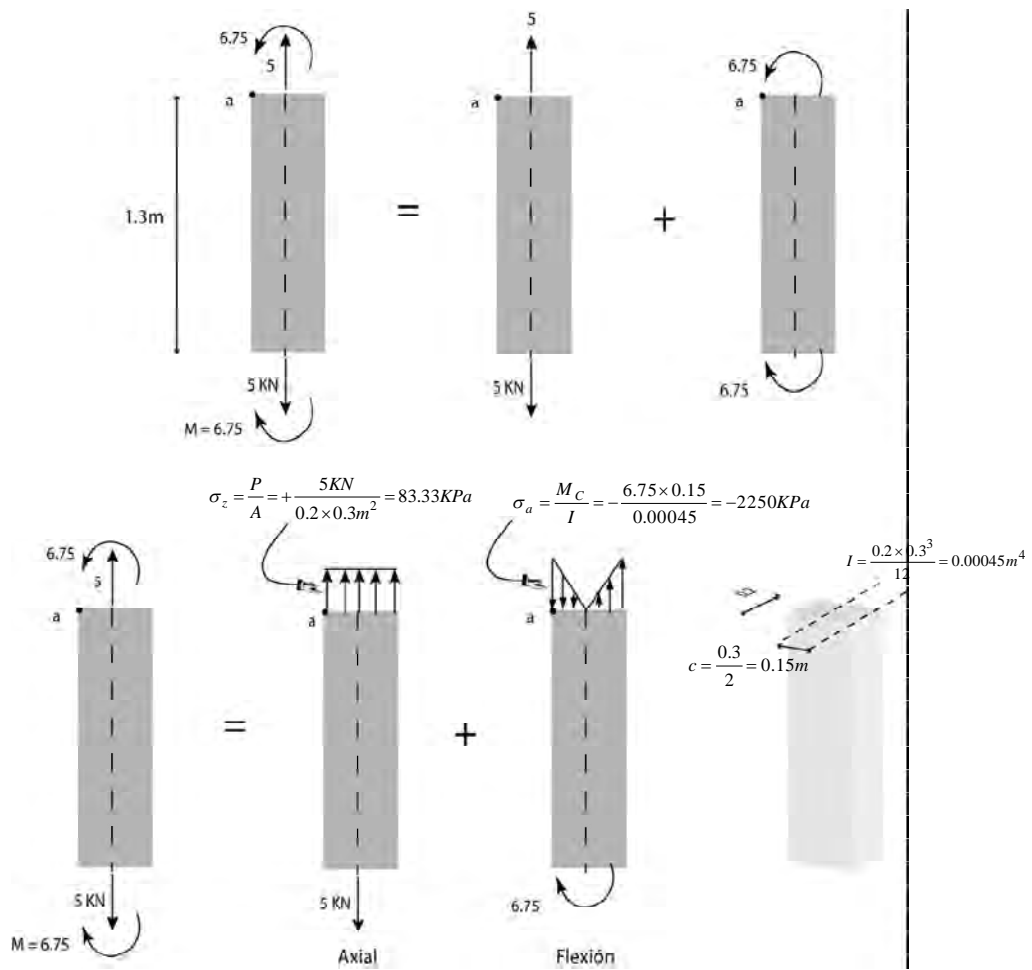
Calcular los esfuerzos normales en los puntos a, b y d



Trasladamos la fuerza agregando el momento correspondiente:

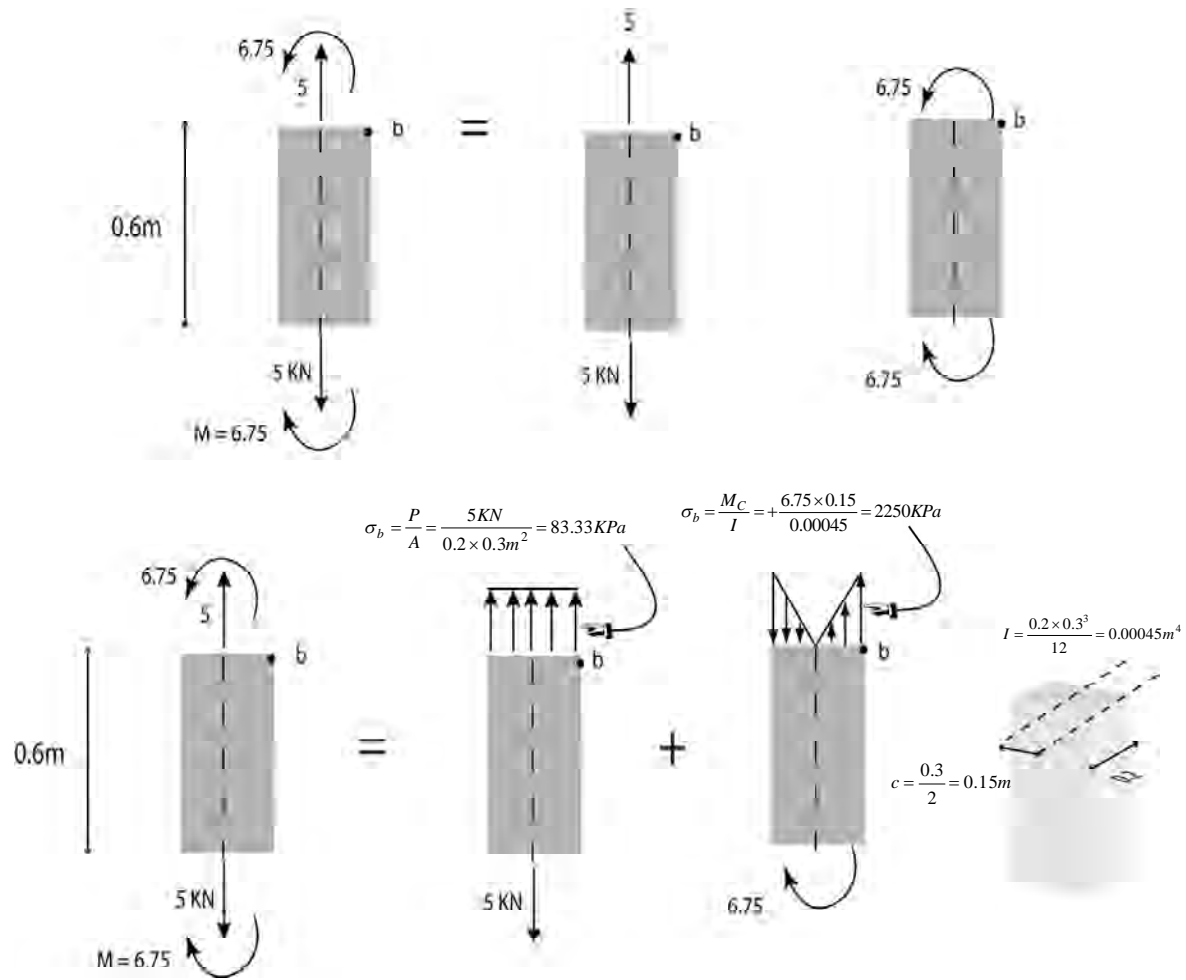


Esfuerzo normal en el punto A:



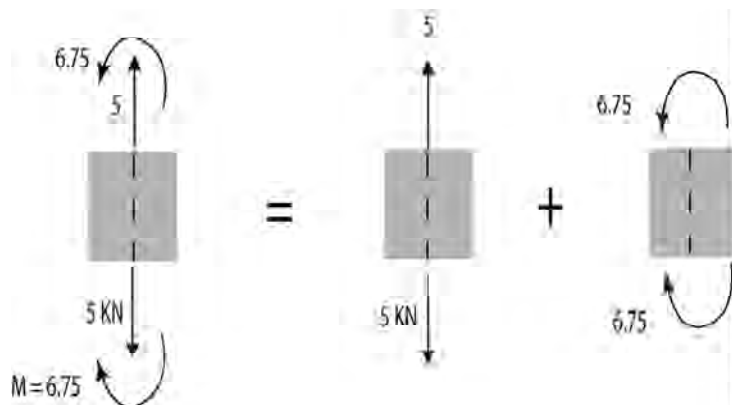
$$\sigma_{aTOTAL} = +83.33 \text{ kPa} - 2250 \text{ kPa} = -2166.67 \text{ kPa}$$

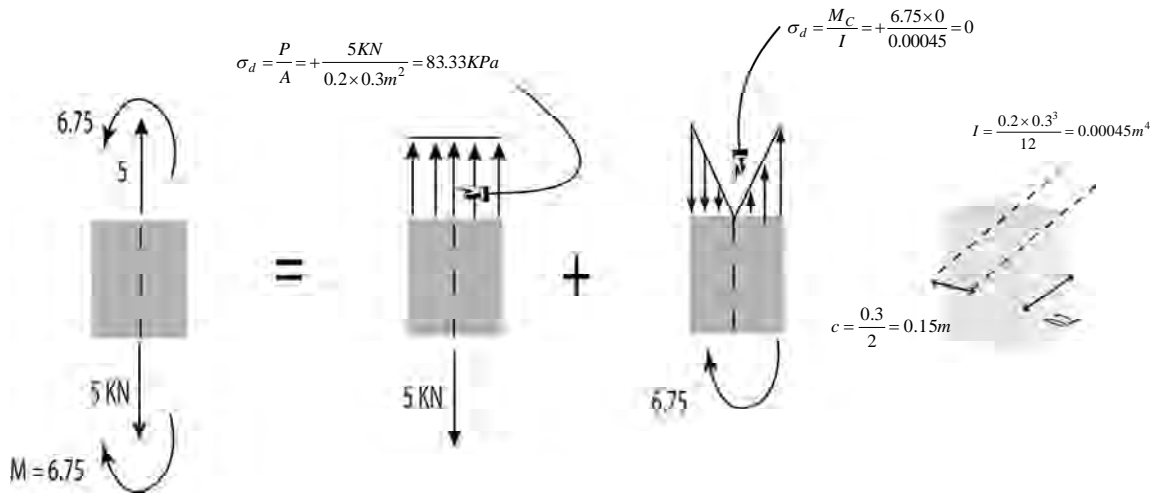
Esfuerzo normal en el punto b :



$$\sigma_{bTOTAL} = +83.33 \text{ kPa} + 2250 \text{ kPa} = 2333.33 \text{ kPa}$$

Esfuerzo normal en el punto d:



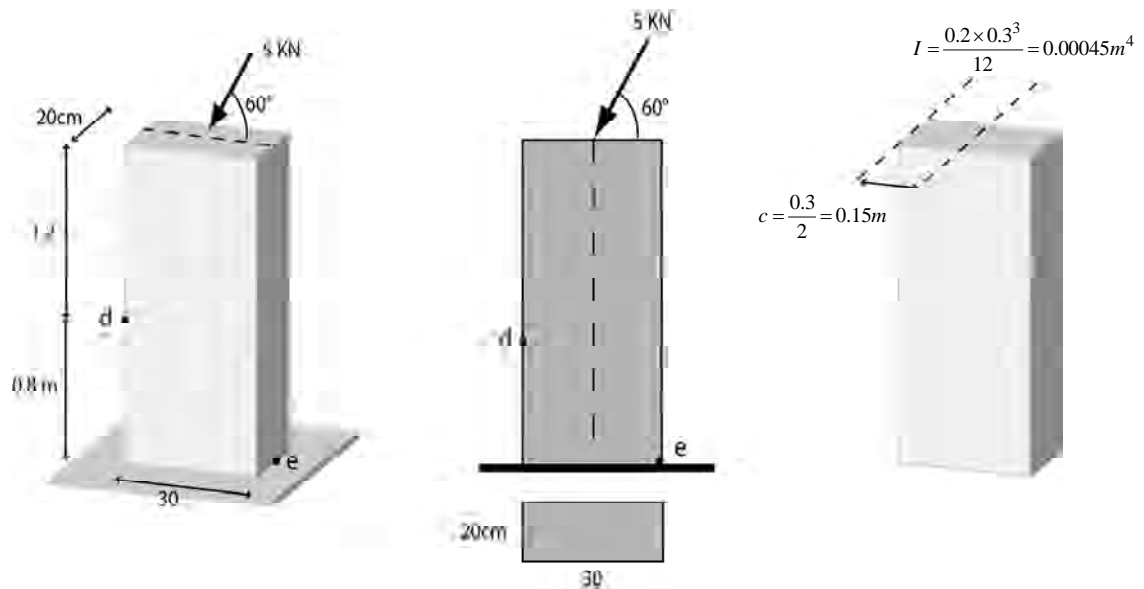


$$\sigma_{dTOTAL} = +83.33 \text{ KPa} + 0 = 83.33 \text{ KPa}$$

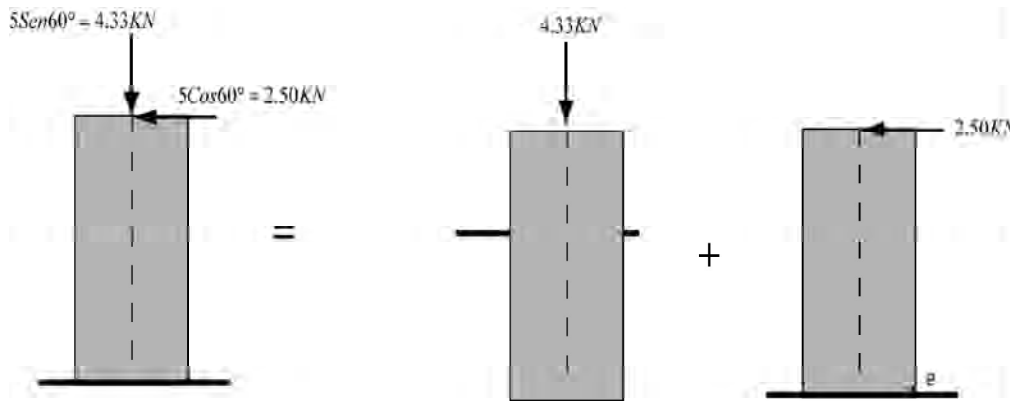
En el problema anterior vemos que la distribución de esfuerzos por flexión es idéntica para los tres puntos a, b y d. Esto sucede porque el momento de 6.75 KNxm es constante a lo largo de toda la barra. Veamos que sucede cuando esto no es así en el siguiente problema.

PROBLEMA

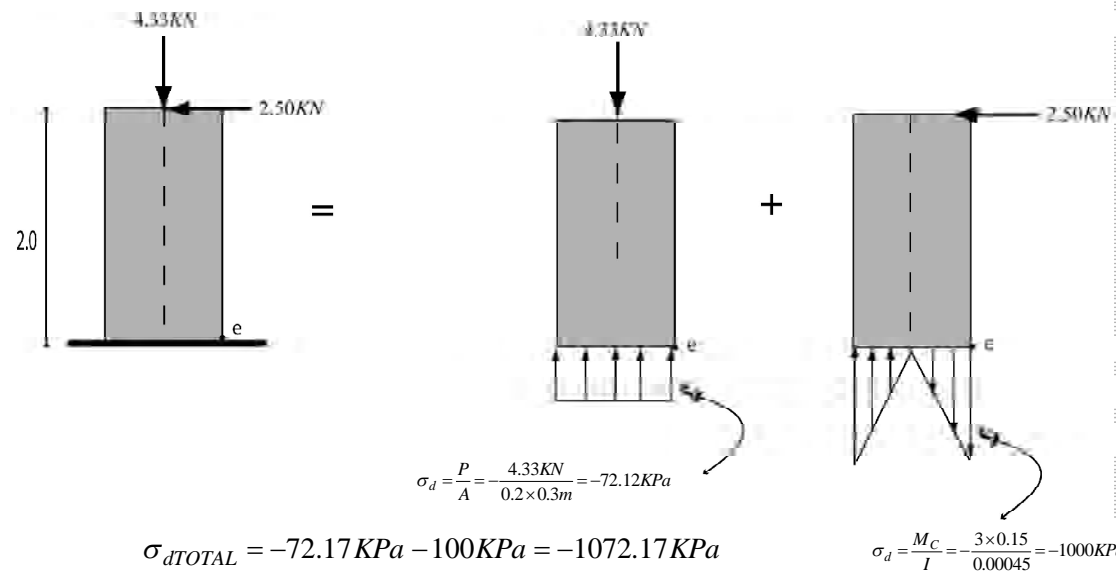
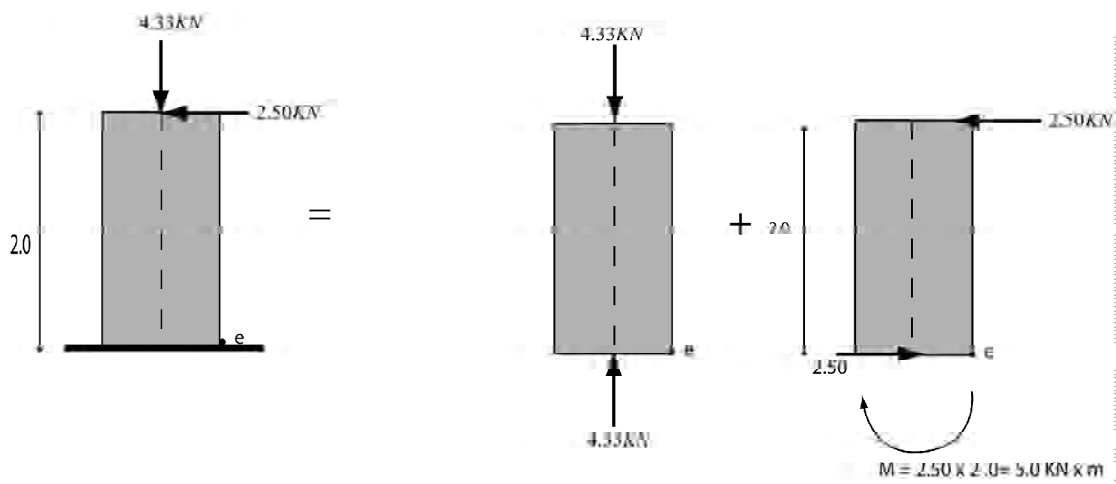
Calcular los esfuerzos en los puntos d y e



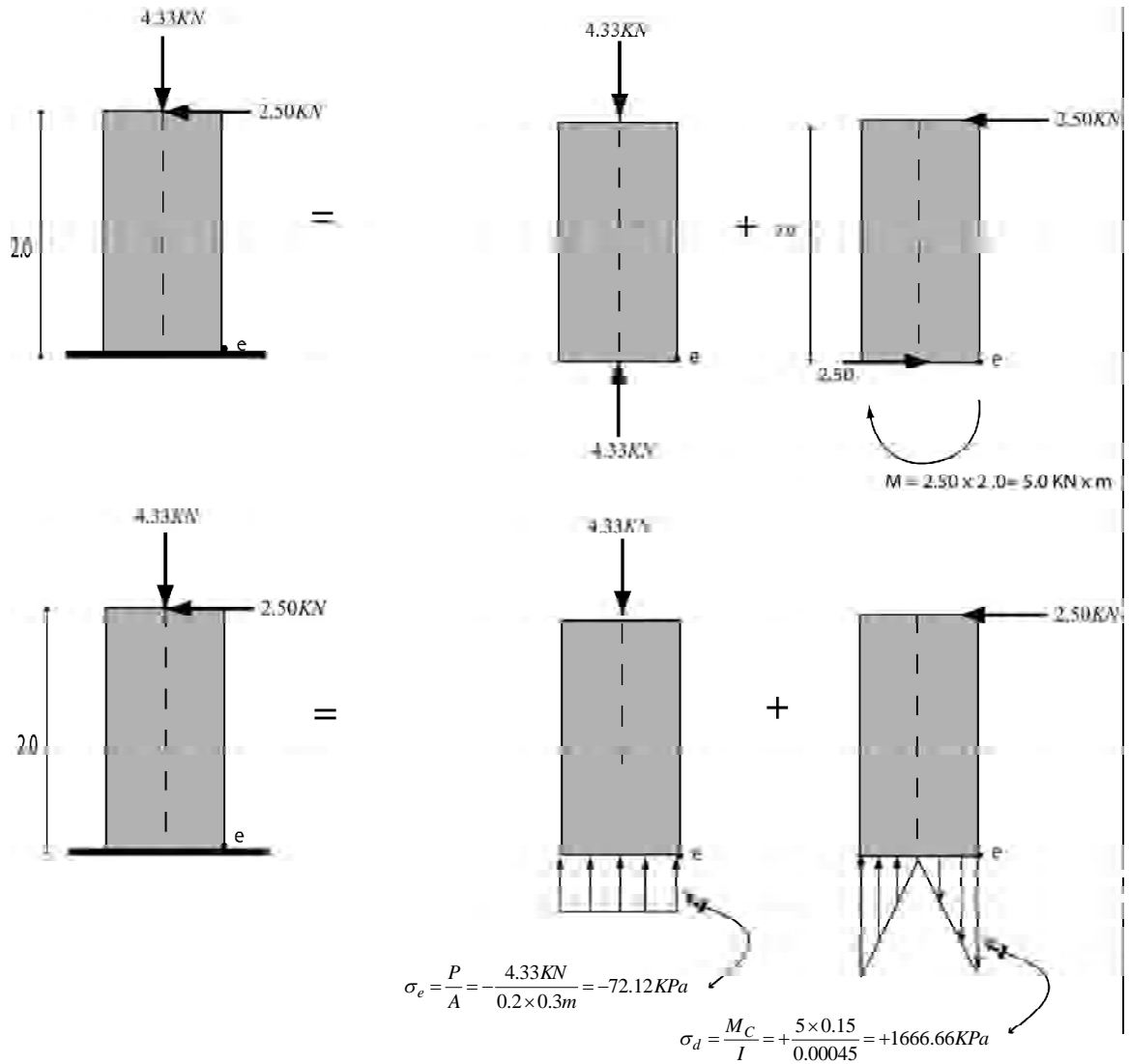
Separaremos los efectos axiales y de flexión:



Esfuerzo en el punto d:



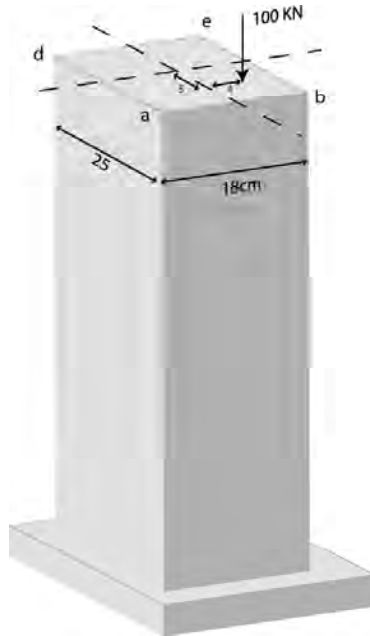
Esfuerzo en el punto e:



$$\sigma_{eTOTAL} = -72.17 \text{ kPa} + 1666.67 \text{ kPa} = +1594.50 \text{ kPa}$$

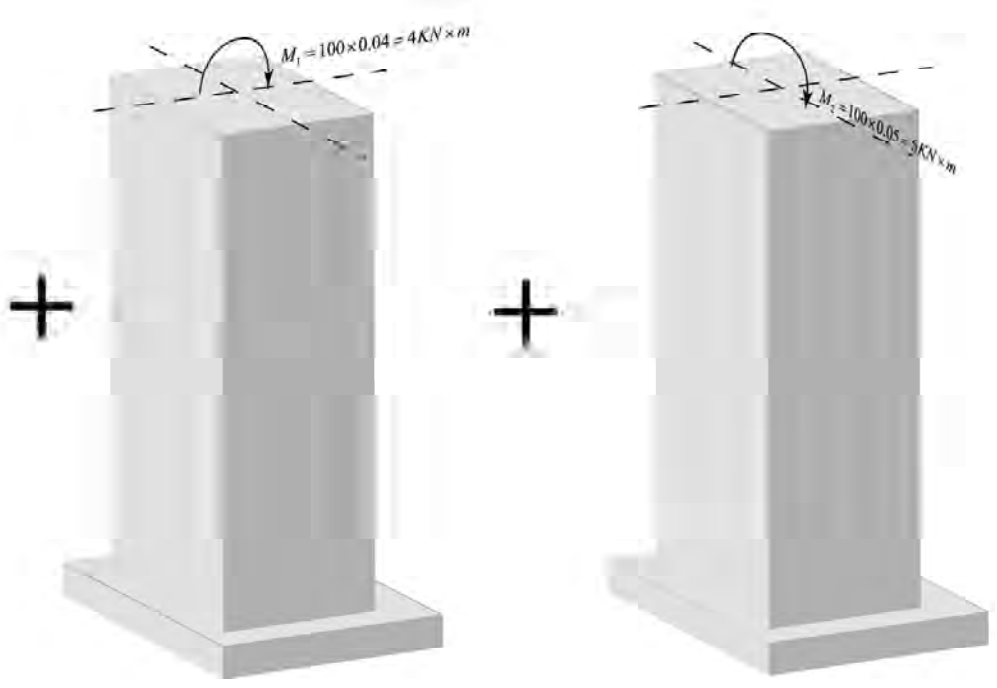
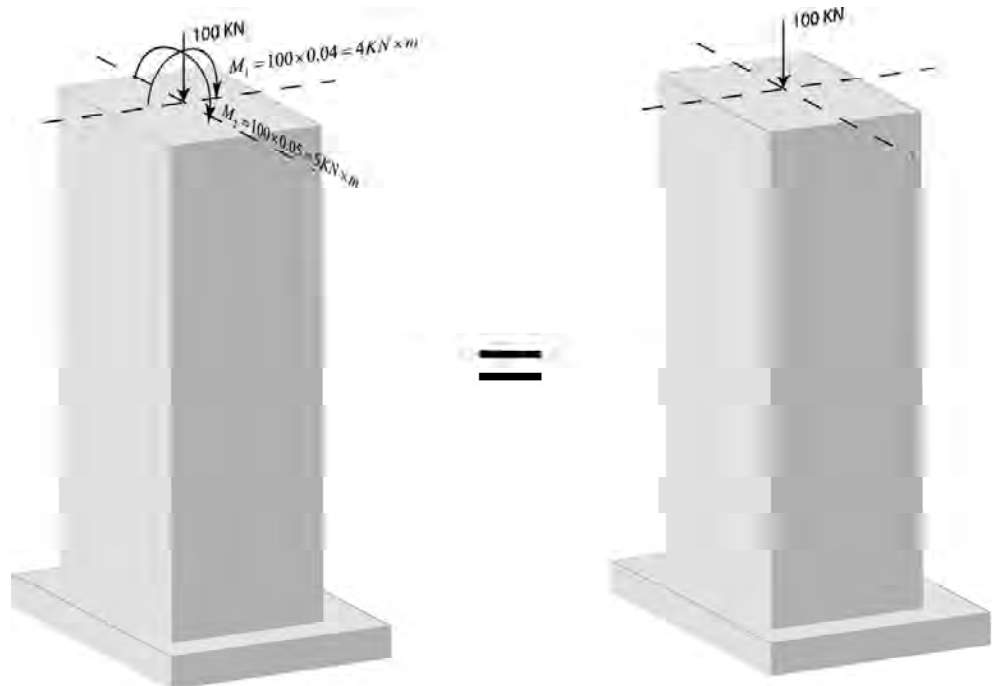
PROBLEMA

Calcular los esfuerzos en los puntos a, b, d y e de la columna de la figura:

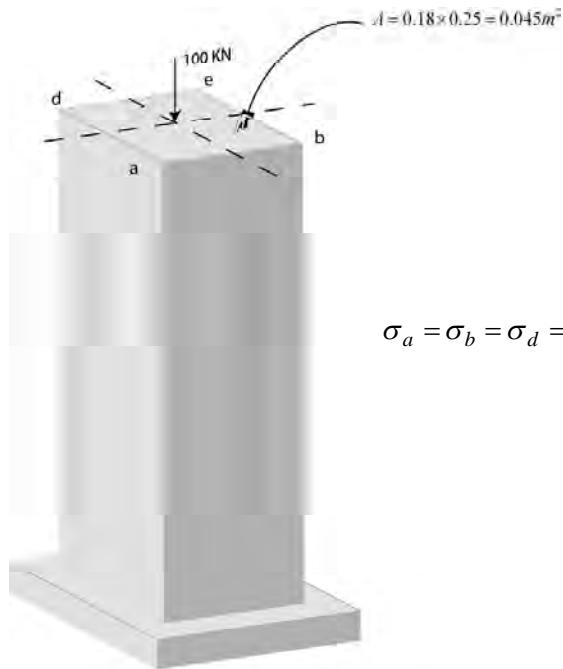


Trasladamos la fuerza al eje de la columna, agregando los momentos correspondientes:



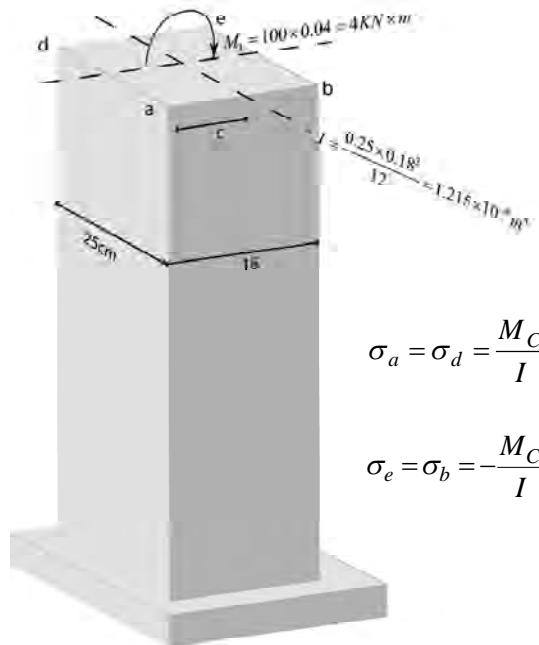


Esfuerzos debidos a la fuerza axial de 100 KN en los puntos a, b, d y e:



$$\sigma_a = \sigma_b = \sigma_d = \sigma_e = -\frac{100 \text{ KN}}{0.045 \text{ m}^2} = -2222.22 \text{ KPa}$$

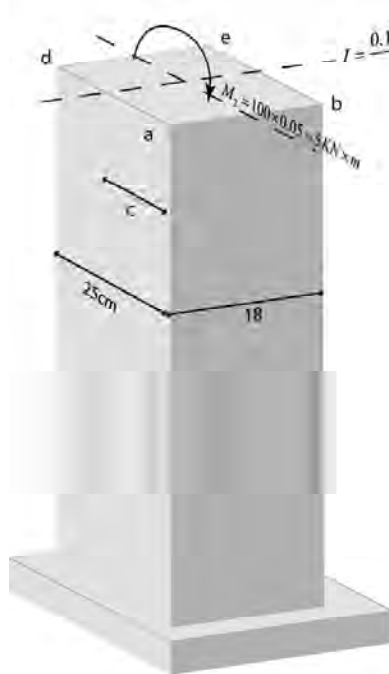
Esfuerzos debidos al momento de 4KNxm en los puntos a, b, d y e:



$$\sigma_a = \sigma_d = \frac{M_C}{I} = \frac{4 \text{ KN} \times \text{m} \times 0.09 \text{ m}}{1.215 \times 10^{-4} \text{ m}^4} = 2962.96 \text{ KPa}$$

$$\sigma_e = \sigma_b = -\frac{M_C}{I} = -\frac{4 \text{ KN} \times \text{m} \times 0.09 \text{ m}}{1.215 \times 10^{-4} \text{ m}^4} = -2962.96 \text{ KPa}$$

Esfuerzos debidos al momento de 5KNxm en los puntos a, b, d y e:



$$\sigma_a = \sigma_b = -\frac{M_C}{I} = -\frac{5 \text{ kN}\cdot\text{m} \times 0.125 \text{ m}}{2.344 \times 10^{-4} \text{ m}^4} = -2666.38 \text{ kPa}$$

$$\sigma_d = \sigma_e = \frac{M_C}{I} = \frac{5 \text{ kN}\cdot\text{m} \times 0.125 \text{ m}}{2.344 \times 10^{-4} \text{ m}^4} = 2666.38 \text{ kPa}$$

Finalmente calculamos por superposición los esfuerzos normales totales en los puntos a, b, d y e:

$$\sigma_a = 2222.22 + 2962.96 - 2666.38 = -1945.64 \text{ kPa}$$

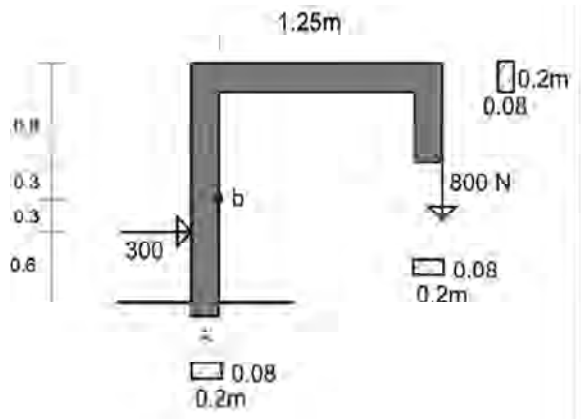
$$\sigma_b = 2222.22 - 2962.96 - 2666.38 = -7851.56 \text{ kPa}$$

$$\sigma_d = 2222.22 + 2962.96 + 2666.38 = 3407.12 \text{ kPa}$$

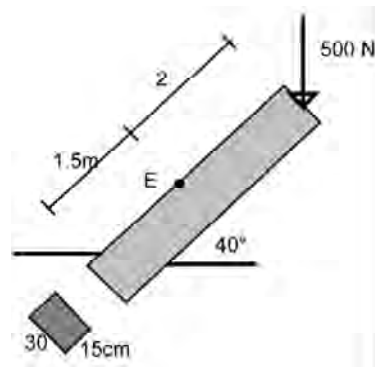
$$\sigma_e = 2222.22 - 2962.96 + 2666.38 = -2518.8 \text{ kPa}$$

PROBLEMAS PROPUESTOS

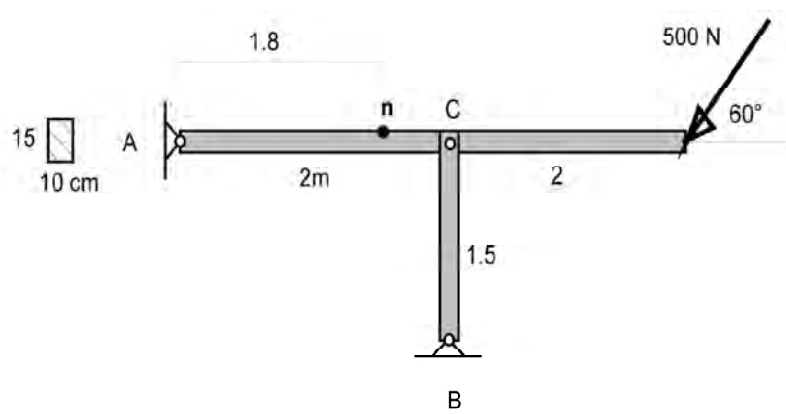
Calcular el Esfuerzo Normal en el punto b



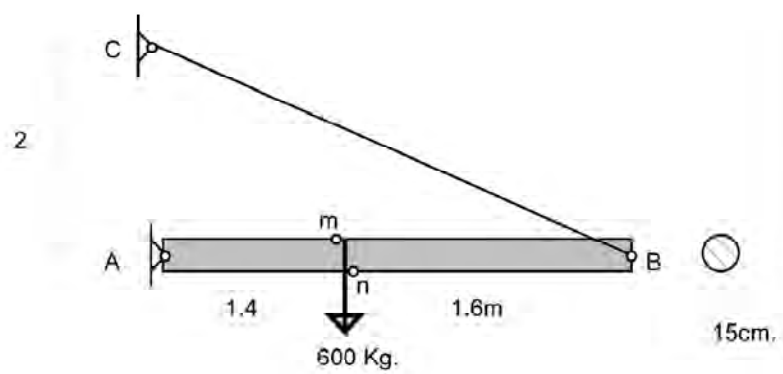
Calcular el Esfuerzo Normal en el punto E



Calcular el Esfuerzo Normal en el punto n



Calcular el Esfuerzo Normal en el punto m y n



CAPÍTULO 6

COLUMNAS



PUENTE PEATONAL, BOGOTÁ, 2005

6.1 FENÓMENO DEL PANDEO O INESTABILIDAD LATERAL

En este capítulo vamos a estudiar un concepto que nada tiene que ver con el enfoque con el cual se ha examinado la resistencia de los elementos estructurales hasta ahora.

Veamos:

En los anteriores capítulos se han calculado los ESFUERZOS ACTUANTES en los elementos con el fin de compararlos con los ESFUERZOS ADMISIBLES debiendo garantizar que los primeros sean menores que los segundos para preservar la seguridad de las estructuras.

O sea:

$$\sigma_{ACTUANTE} \leq \sigma_{ADMISIBLE}$$

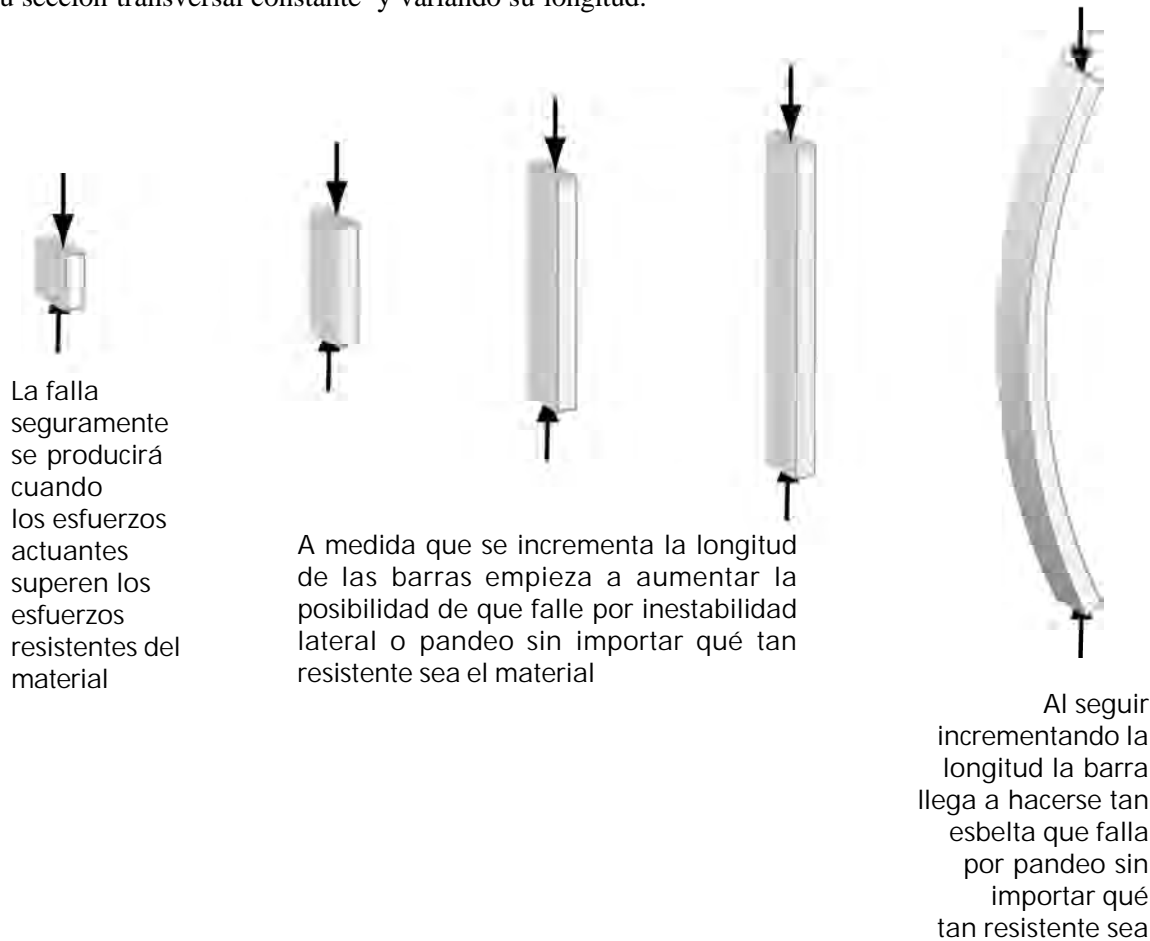
Sin embargo cuando los elementos sometidos a compresión tienen ciertas características geométricas y de rigidez pueden fallar de una manera que nada tiene que ver con su resistencia.

Por muy resistentes que sean, pueden llegar a fallar por un fenómeno que no hemos analizado hasta el momento: la **INESTABILIDAD**

Veamos:

Inestabilidad de elementos sometidos a compresión

Examinemos la forma en que fallan las barras de la figura sometidas a compresión, manteniendo su sección transversal constante y variando su longitud:



Entre la inestabilidad y la estabilidad existe un punto que se llama equilibrio crítico en el cual la inestabilidad está a punto de producirse en el caso de que se presente un pequeño desplazamiento o incremento de la carga.

Recordemos un ejemplo clásico de los cursos de Física que nos aclara los conceptos de estabilidad e inestabilidad:



ESTABLE

Ante un pequeño desplazamiento horizontal se generan fuerzas restauradoras que devuelven el cilindro a su posición de equilibrio inicial.

NEUTRO

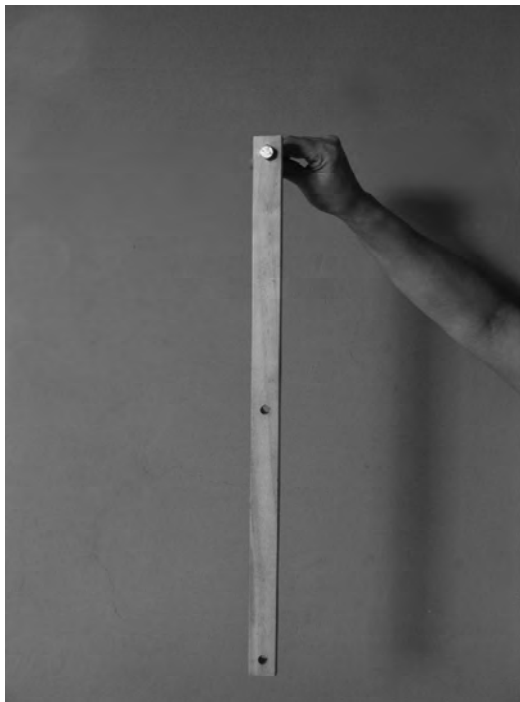
Ante un pequeño desplazamiento el cilindro puede permanecer en equilibrio en cualquier posición sobre el plano

INESTABLE

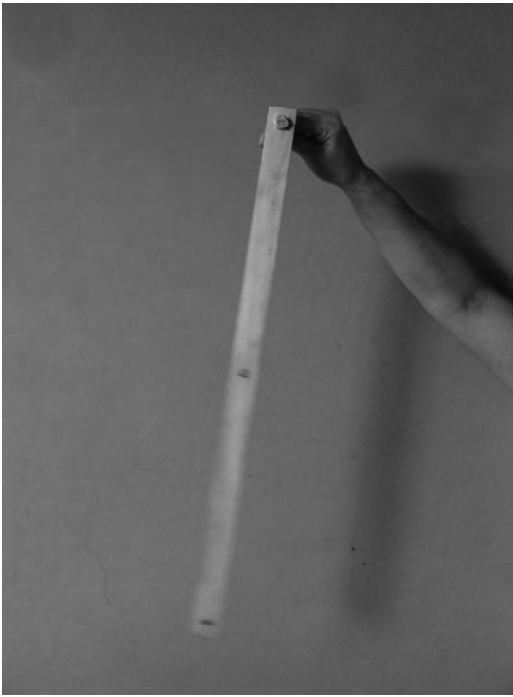
Ante un pequeño desplazamiento horizontal se generan fuerzas desestabilizadoras que alejan el cilindro cada vez más de su posición de equilibrio inicial

Con una barra articulada sostenida por un tornillo también puede ilustrarse el concepto de estabilidad, inestabilidad y equilibrio neutro.

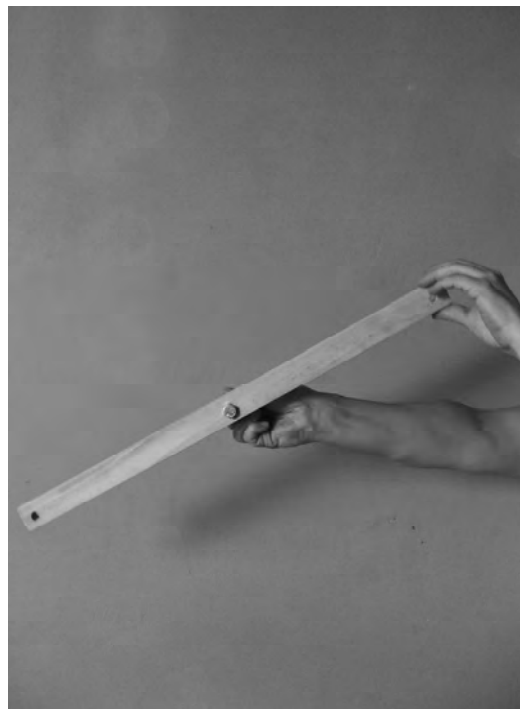
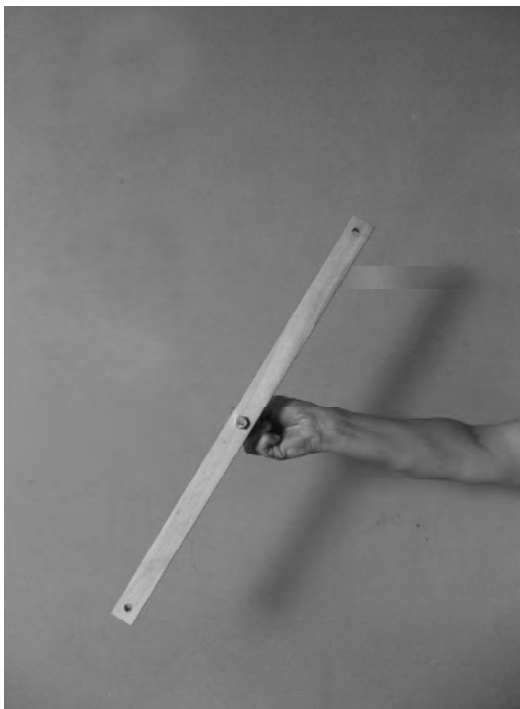
ESTABLE : Si se desvía un poco de su posición...



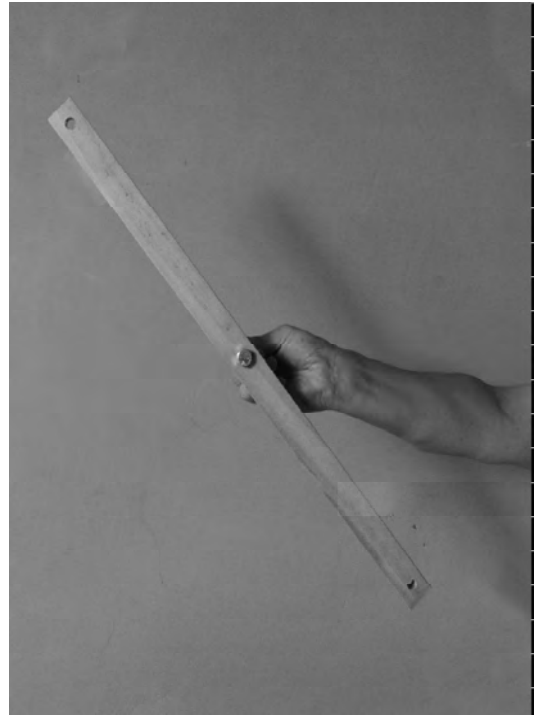
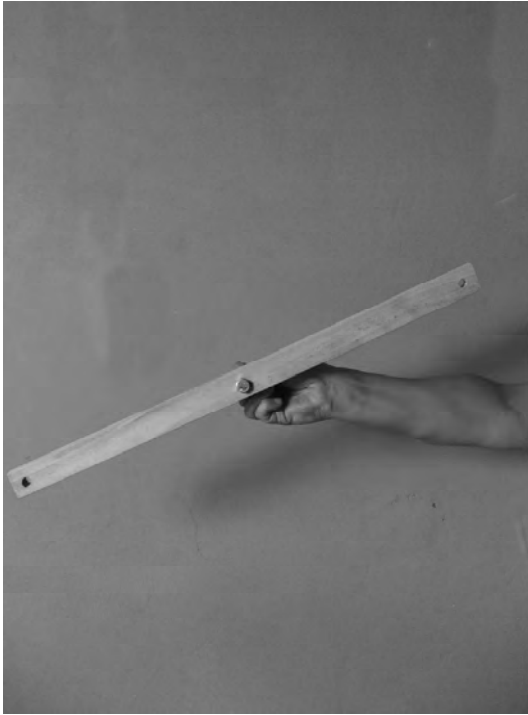
.....se generan fuerzas que restauran el equilibrio



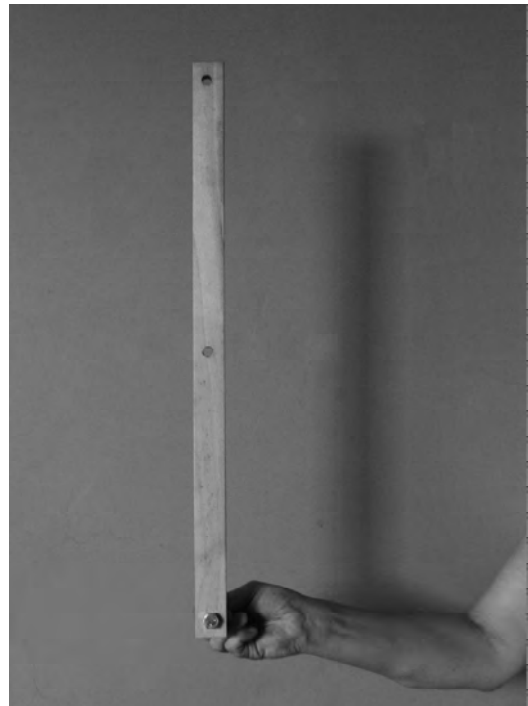
NEUTRO : Si se desvía un poco de su posición...



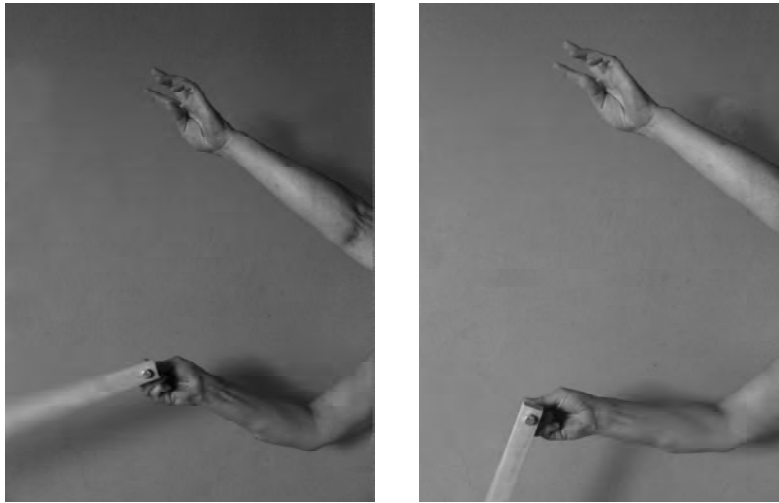
.....permanece en la nueva posición, cualquiera que ella sea



INESTABLE: Al desviarse un poco de su posición de equilibrio...



...se generan fuerzas desestabilizadoras que la alejan cada vez mas de su posición de equilibrio inicial.

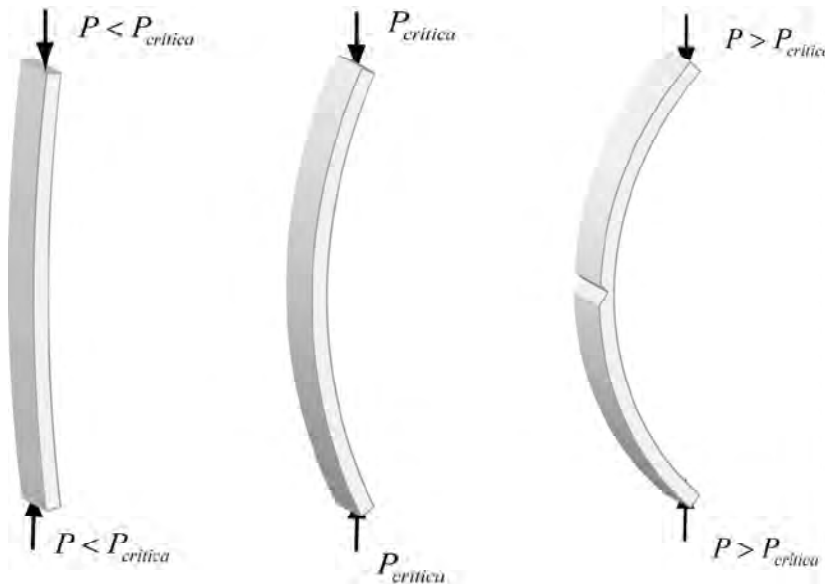


Volvamos a nuestro problema de la barra pandeada:

Al incrementar gradualmente la carga, llega un momento en que la barra queda en equilibrio crítico: si se retira la carga, vuelve a su posición original. Si se incrementa, se produce la inestabilidad y por consiguiente la falla.

Al valor de la carga en ese punto se le denomina: CARGA CRÍTICA.

6.2 CARGA CRÍTICA



Vuelve a su estado indeformado
(siempre que esté en el rango elástico)

Está en equilibrio crítico

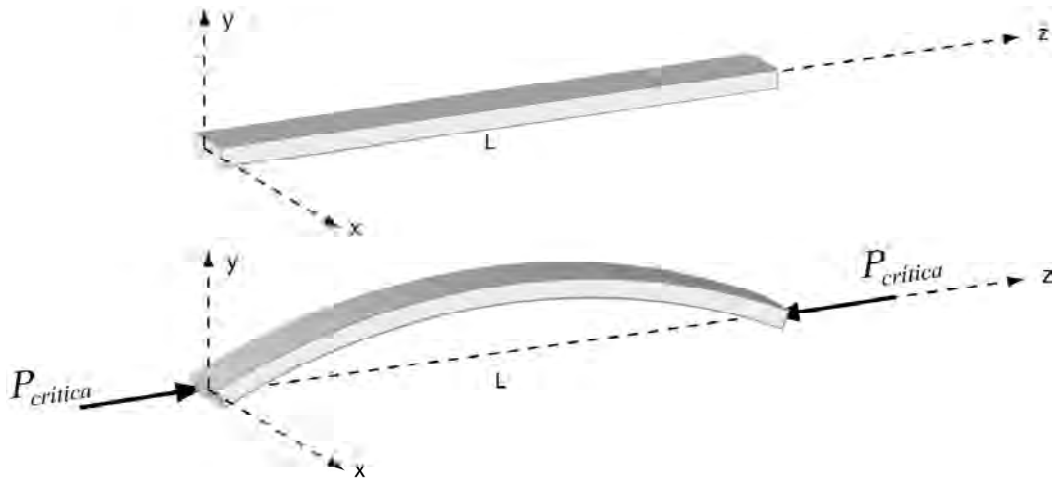
Se vuelve inestable y falla

6.3 TEORÍA DE EULER

6.3.1 Cálculo del valor de la carga crítica

La carga crítica fue calculada por el matemático suizo Leonhard Euler (1707-1783), por lo cual es común denominarla como la Carga Crítica de Euler.

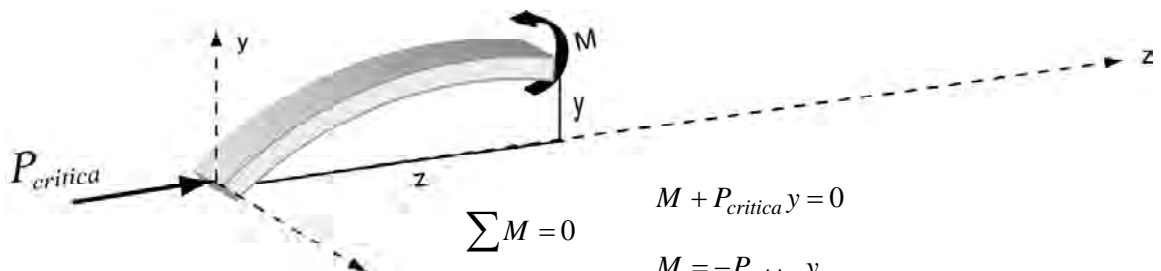
Cálculo de la carga crítica de Euler



Busquemos la ecuación de la elástica para obtener de la misma el valor de la carga crítica

Según lo visto en el método de la doble integración: $EIy'' = M$

Calculemos el momento flector haciendo un corte a una distancia z desde el origen:



Por tanto:

$$M + P_{crítica}y = 0$$

$$M = -P_{crítica}y$$

$$EIy'' = -P_{crítica}y$$

$$EIy'' + P_{crítica}y = 0$$

Ecuación diferencial de segundo orden

Para poder calcular $P_{crítica}$ debe resolverse la ecuación: $EIy'' + P_{crítica}y = 0$

Por tanto: $y'' + \frac{P_{crítica}}{EI}y = 0$

Como se ha visto en los cursos de matemáticas la ecuación es de la forma:

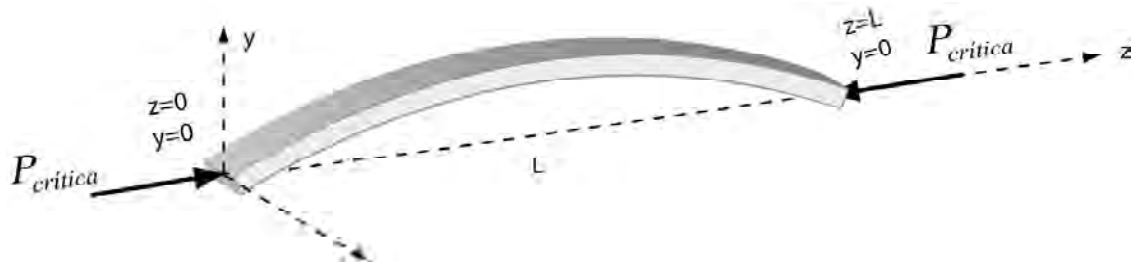
$y'' + \alpha^2 y = 0$ siendo $\alpha^2 = \frac{P_{crítica}}{EI}$

La solución de la ecuación es: $y = A\cos\alpha z + B\sen\alpha z$

Las constantes A y B deben determinarse a partir de las condiciones iniciales que en

este caso son:

$$\begin{cases} z = 0 \\ y = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} z = L \\ y = 0 \end{cases}$$



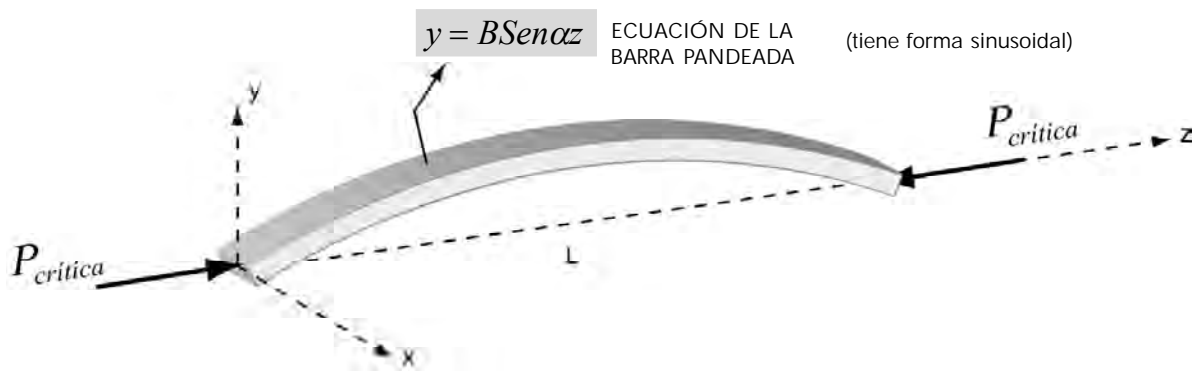
Si $\begin{cases} z = 0 \\ y = 0 \end{cases}$ por tanto: $0 = A\cos 0 + B\sen 0 = A$ $A = 0$

Si $\begin{cases} z = L \\ y = 0 \end{cases}$ por tanto: $0 = B\sen\alpha L$

Posibilidades: $\left\{ \begin{array}{l} \text{Que: } B = 0 \text{ en este caso la solución de la ecuación sería: } y = 0 \text{ lo cual es absurdo} \\ \text{pues implicaría que la barra está recta (no pandeada) lo cual no es nuestro caso.} \\ \\ \text{Por tanto, si } B \neq 0 \text{ necesariamente } \sen\alpha L = 0 \end{array} \right.$

En conclusión: ECUACIÓN DE LA BARRA PANDEADA $y = B\sen\alpha z$ Y: $\sen\alpha L = 0$

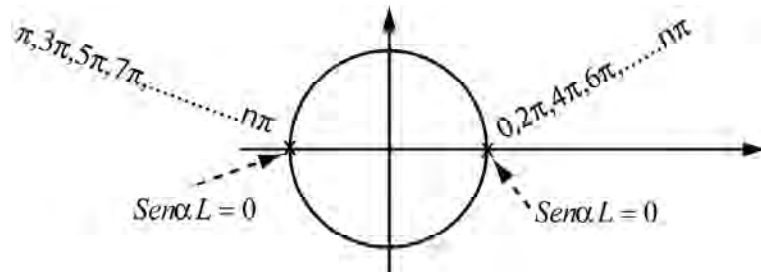
En la página anterior concluimos que: $y = B\text{Sen}\alpha z$ y que $\text{Sen}\alpha L = 0$



Recordemos que: $\alpha^2 = \frac{P_{critica}}{EI}$ Por tanto, para poder calcular $P_{critica}$ debemos hallar α

Sabemos que: $\text{Sen}\alpha L = 0$

En el círculo trigonométrico vemos que:



Por lo cual: $\alpha L = n\pi \quad n = 0,1,2,3,4,\dots\infty$

$$\alpha^2 = \frac{n^2 \pi^2}{L^2} = \frac{P_{critica}}{EI}$$

Y obtenemos el valor de $P_{critica}$:

$$P_{critica} = \frac{n^2 \pi^2 EI}{L^2}$$

La pregunta ahora es: qué valor de n adoptamos como ingenieros?

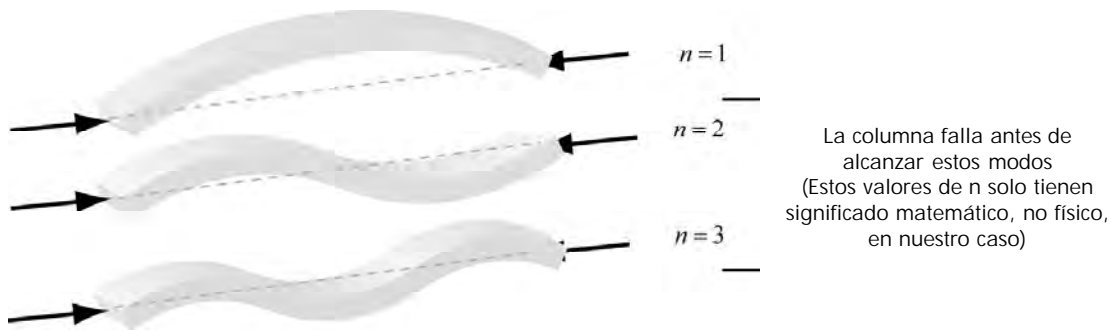
Es claro que matemáticamente n puede tener cualquier valor entero entre cero e infinito. Sin embargo como ingenieros debemos hacer el siguiente análisis teniendo en cuenta el problema físico que estamos estudiando (una barra sometida a una fuerza de compresión y a punto de fallar por pandeo):

Si adoptamos el valor $n = 0$ tendríamos que $P_{critica} = 0$ (esto equivaldría a aceptar que a ninguna barra o columna se le pueden aplicar cargas lo cual es absurdo).

Si adoptamos un valor mayor que 1 cada vez tendríamos un valor mas grande de la carga afectando el factor de seguridad de la columna, y además en últimas, cuál valor adoptaríamos: 5??? 123456???

Por lo anterior, desde el punto de vista práctico, además de otras razones matemáticas que veremos a continuación, el valor adoptado para n es 1.

Las razones matemáticas tienen que ver con el hecho de que los diferentes valores que puede adoptar n representan el número de ondas que tendría la curva. No olvidemos que es una senoide. Desde el punto de vista físico nuestra barra se rompería al formar la primera onda sin alcanzar obviamente las ulteriores.



En conclusión:

$$P_{critica} = \frac{\pi^2 EI}{L^2} \quad \text{Carga crítica de Euler}$$

Si observamos la expresión notamos algo que decíamos al principio de este capítulo:

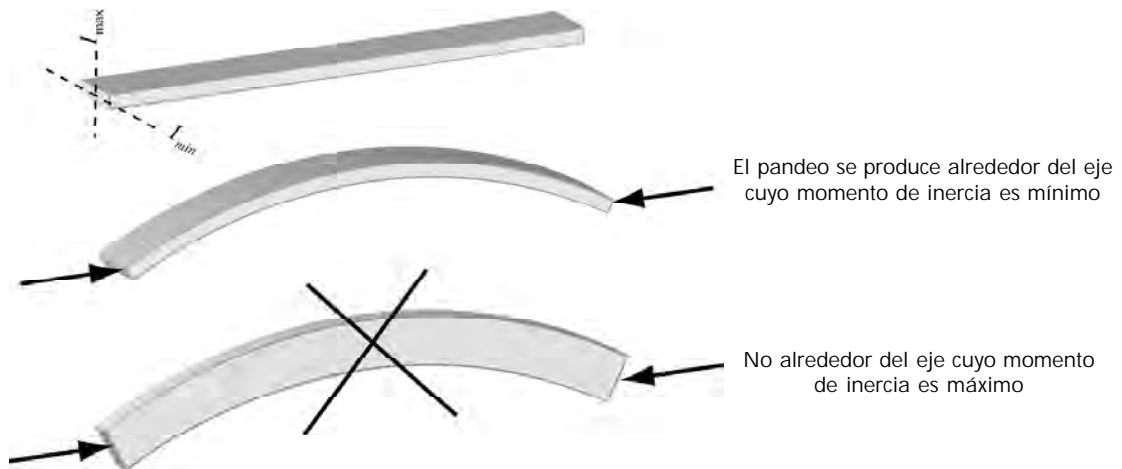
La carga crítica NO DEPENDE de la RESISTENCIA del material dada por su esfuerzo resistente σ_R , lo cual es completamente nuevo para nosotros.

De qué depende, entonces, la carga crítica?

1) Es directamente proporcional a la rigidez de la columna EI

E : Módulo de elasticidad del material

I : Momento de inercia de la sección transversal con relación al eje alrededor del cual se produce el pandeo. En este caso, será el momento de inercia mínimo I_{\min}



2) La carga crítica es inversamente proporcional al cuadrado de la longitud de la columna L^2 lo cual por lo demás es obvio: mientras mas larga sea, mas fácil se pandeará. (Mas adelante veremos que no depende exactamente de la longitud de la columna sino de su esbeltez que de todas formas está relacionada con la primera).

Del análisis anterior, concluimos finalmente que la carga crítica de Euler es:

$$P_{\text{critica}} = \frac{\pi^2 EI_{\min}}{L^2}$$

Hasta este punto hemos analizado la barra considerándola biarticulada. Sin embargo, existen otras posibilidades de conectar las barras en sus extremos. Veámoslas y establezcamos cómo influyen en el valor de la carga crítica.

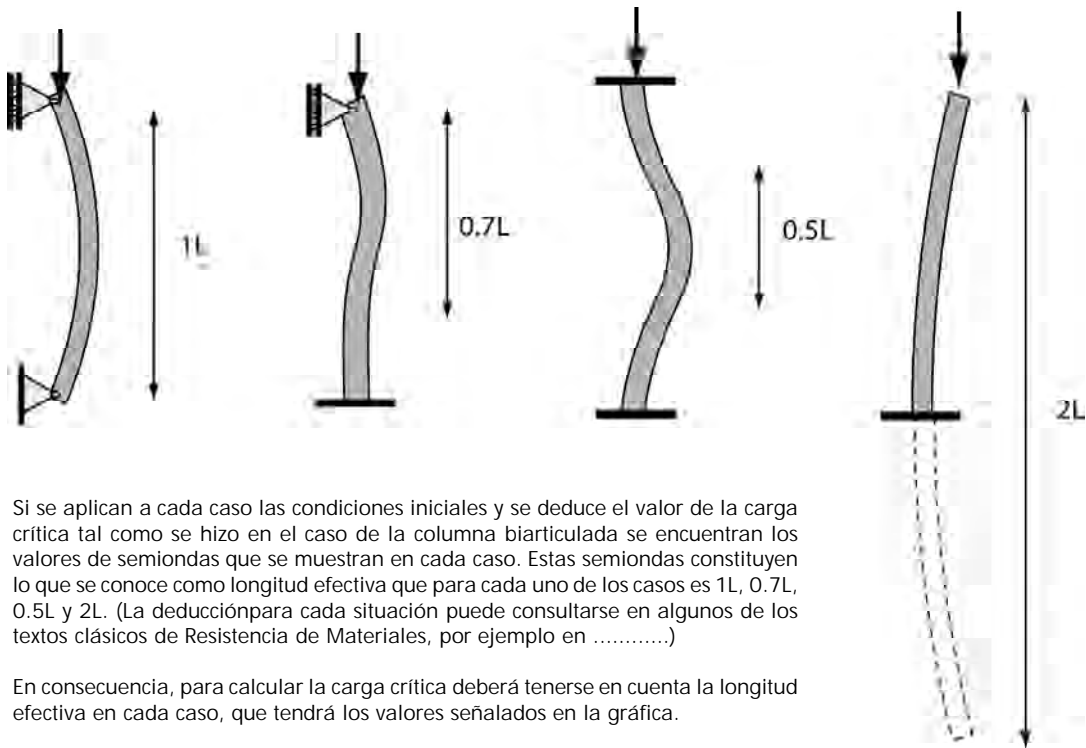
6.4 DIFERENTES CONDICIONES DE APOYOS

Influencia del tipo de apoyo en el pandeo y en el valor de la carga crítica.

Tipos de apoyos que puede tener una columna en sus extremos



Recordando que las articulaciones permiten el giro y los empotramientos lo restringen la elástica para cada uno de los casos tiene la siguiente forma.



Si se aplican a cada caso las condiciones iniciales y se deduce el valor de la carga crítica tal como se hizo en el caso de la columna biarticulada se encuentran los valores de semiondas que se muestran en cada caso. Estas semiondas constituyen lo que se conoce como longitud efectiva que para cada uno de los casos es $1L$, $0.7L$, $0.5L$ y $2L$. (La deducción para cada situación puede consultarse en algunos de los textos clásicos de Resistencia de Materiales, por ejemplo en)

En consecuencia, para calcular la carga crítica deberá tenerse en cuenta la longitud efectiva en cada caso, que tendrá los valores señalados en la gráfica.

$$P_{critica} = \frac{\pi^2 EI_{min}}{L_e^2} \quad L_e : \text{longitud efectiva}$$

Teniendo en cuenta la longitud efectiva en cada caso, los valores de la carga crítica serán:

$$P_{crítica} = \frac{\pi^2 EI_{\min}}{L^2}$$



$$P_{crítica} = \frac{\pi^2 EI_{\min}}{(0.7L)^2} = 2 \frac{\pi^2 EI_{\min}}{L^2}$$



$$P_{crítica} = \frac{\pi^2 EI_{\min}}{(0.5L)^2} = 4 \frac{\pi^2 EI_{\min}}{L^2}$$



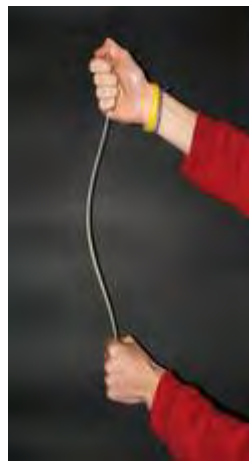
$$P_{crítica} = \frac{\pi^2 EI_{\min}}{(2L)^2} = 0.25 \frac{\pi^2 EI_{\min}}{L^2}$$



La carga crítica más grande es la mas segura

La carga crítica más pequeña es la mas peligrosa

Con una barra de balsa puede simularse fácilmente el comportamiento de las columnas con diferentes tipos de apoyos:



6.5 ESFUERZOS CRÍTICOS

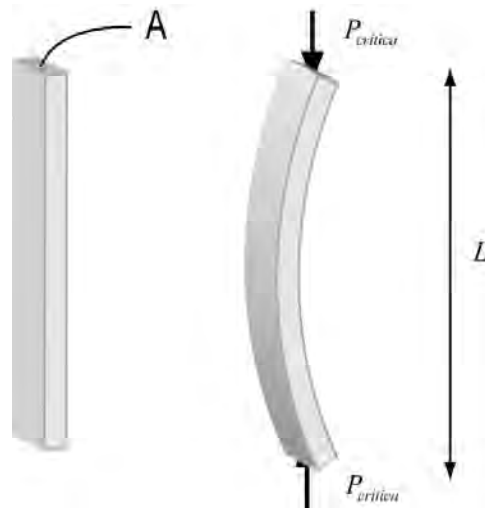
Después de conocer la carga crítica ya estamos en condiciones de calcular el esfuerzo normal que producirá σ_{crit} .

Tal como se estudió al principio del curso el esfuerzo normal es igual al valor de la fuerza axial dividido entre el área de la sección transversal de la barra.

$$\sigma_{critico} = \frac{P_{critica}}{A}$$

$$\text{Pero: } P_{critica} = \frac{\pi^2 EI_{min}}{(L_e)^2}$$

$$\text{Por tanto: } \sigma_{critico} = \frac{\pi^2 EI_{min}}{(L_e)^2 A}$$



Recordemos, del curso de mecánica que el radio de giro del área es: $r = \sqrt{\frac{I}{A}}$

$$\text{Por tanto: } \sigma_{critico} = \frac{\pi^2 E (r_{min})^2}{(L_e)^2 A}$$

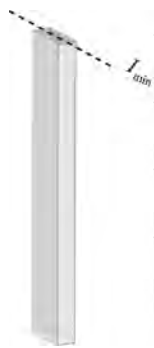
$$\text{Y finalmente } \sigma_{critico} = \frac{\pi^2 E}{\left(\frac{L_e}{r_{min}}\right)^2}$$

Se comprueba una vez mas que el esfuerzo crítico no depende del esfuerzo resistente del material sino de su rigidez (E) y del cuadrado de un parámetro

denominado esbeltez que es igual a $\left(\frac{L_e}{r_{min}}\right)$

$L_e = kL$ longitud efectiva

$$r_{min} = \sqrt{\frac{I_{min}}{A}}$$



$$k = \begin{cases} 1 \\ 0.7 \\ 0.5 \\ 2 \end{cases}$$

Dependiendo de los apoyos en los extremos

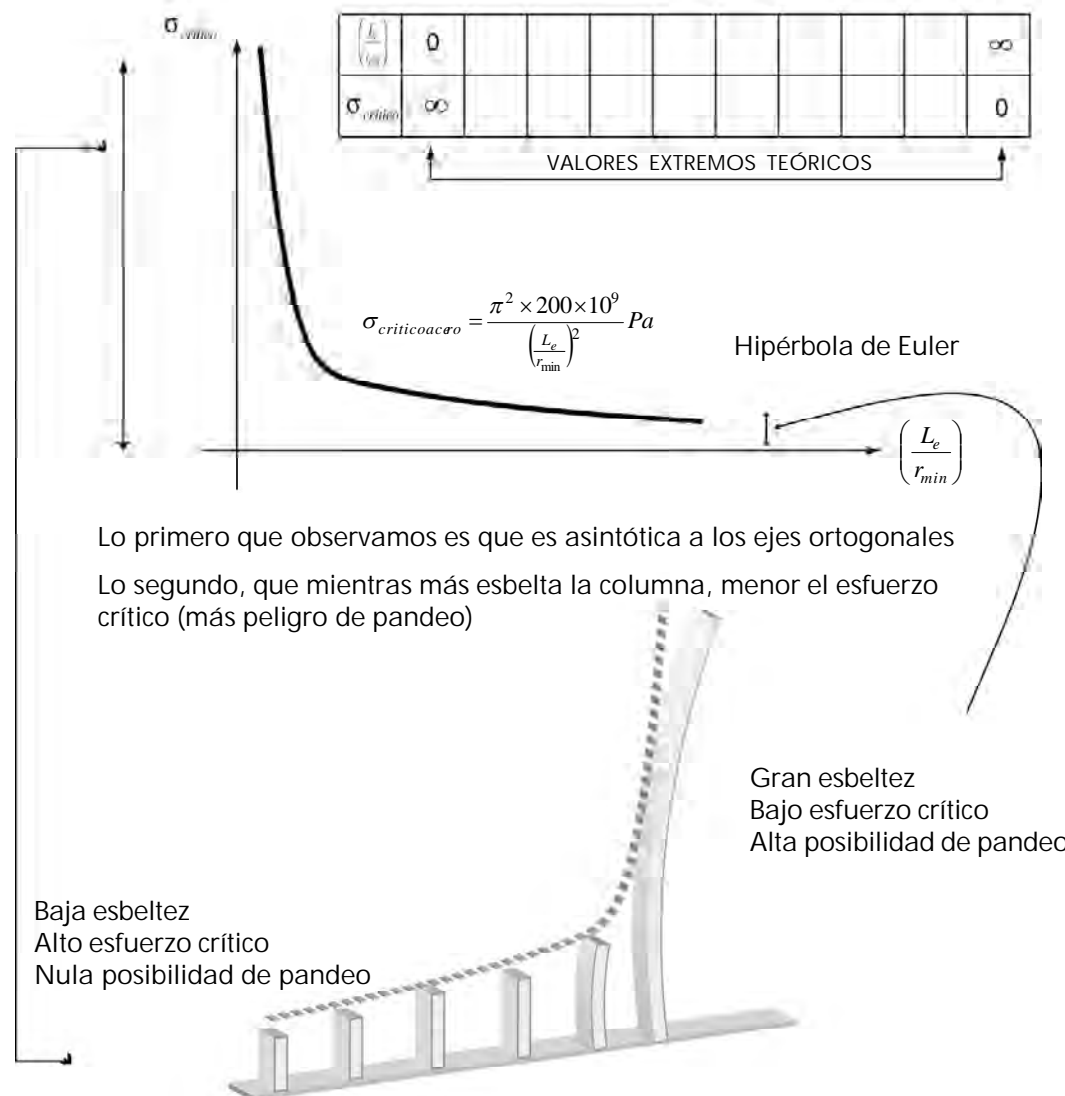
Como se ve, para un material dado con módulo de elasticidad E, el esfuerzo crítico depende de la relación de esbeltez de la columna.

Miremos la variación del Esfuerzo Crítico con la esbeltez. Variación del esfuerzo crítico con la esbeltez para un material como el acero con un módulo de elasticidad E.

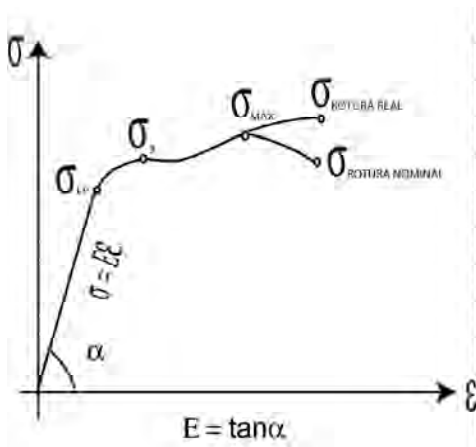
$$\sigma_{critico} = \frac{\pi^2 E}{\left(\frac{L_e}{r_{min}}\right)^2} \quad \text{Esfuerzo crítico}$$

Para el acero: $E = 200GPa$ Por tanto: $\sigma_{criticoacero} = \frac{\pi^2 \times 200 \times 10^9}{\left(\frac{L_e}{r_{min}}\right)^2} Pa$

Hagamos la gráfica de esta ecuación



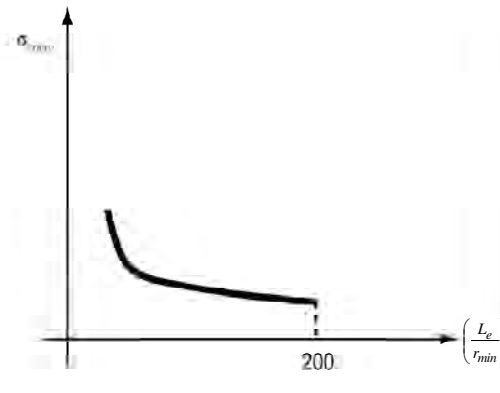
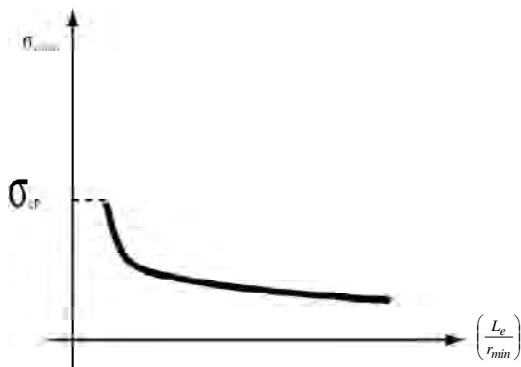
Rango de validez de la hipérbola de Euler:



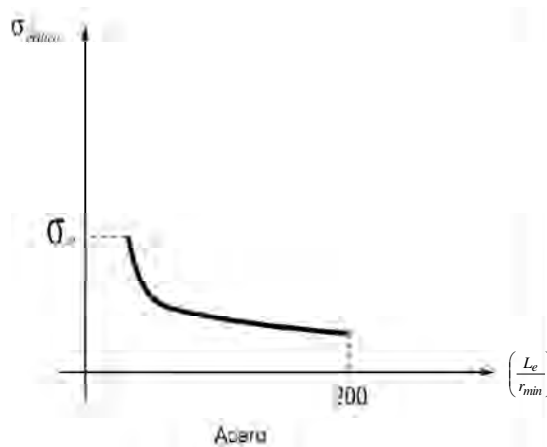
La teoría de Euler y el esfuerzo crítico se han deducido a partir de la ecuación de la elástica $ELy'' = M$ que a su vez se dedujo a partir de la Ley de Hooke $\sigma = E\varepsilon$.

Esto deberá tenerse en cuenta para definir el rango de validez de la ecuación del esfuerzo crítico.

Límites de validez de la hipérbola

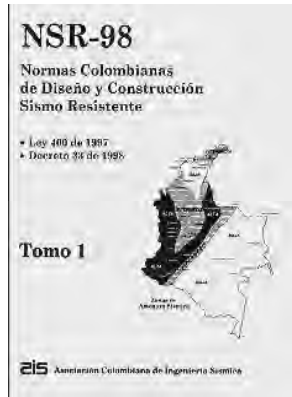


Por tanto, la ecuación de la hipérbola es válida en el siguiente rango:



6.6 C Ó D I G O S

Cada país define sus propios códigos para el cálculo de estructuras. En Colombia se han establecido las Normas Colombianas de Diseño y Construcción Sismorresistente (NSR-98) mediante la Ley 400 de 1997 y el Decreto 33 de 1998.



Específicamente el Título F Estructuras Metálicas establece lo siguiente con referencia al cálculo de elementos de acero a compresión:

F.4.4 - columnas y otros miembros a compresión

ESFUERZOS ADMISIBLES. Para miembros a compresión cargados axialmente, cuya sección transversal cumpla los requisitos de la tabla F.4-1, cuando la relación de esbeltez efectiva mayor (Kl/r) de cualquier segmento sin arriostamiento sea menor que C_c se tomará como valor del esfuerzo admisible sobre la sección total.

$$F_a = \frac{\left[1 - \frac{(kl/r)^2}{2C_c^2}\right] F_y}{\frac{5}{3} + \frac{3(kl/r)}{8C_c} - \frac{(kl/r)^3}{8C_c^3}}$$

en donde:

$$C_c = \sqrt{2\pi^2 E / F_y}$$

Cuando la relación (Kl/r) de estos miembros excede el valor de C_c se tomará como esfuerzo admisible sobre la sección total.

$$F_a = \frac{12\pi^2 E}{23(kl/r)^2}$$

PROBLEMA

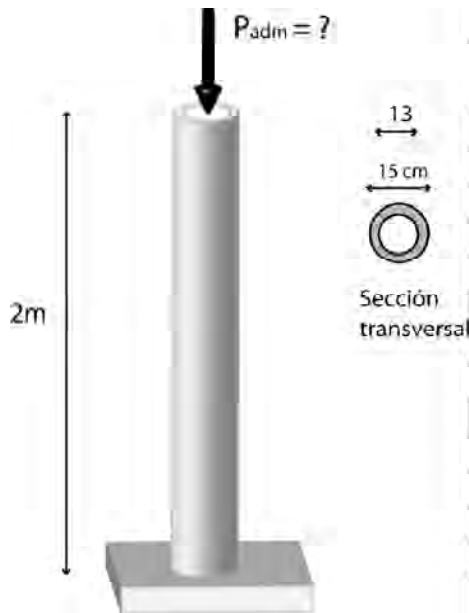
Aplicando la NSR-98 resolver el siguiente problema:

Calcular la carga axial permisible P_{perm} para la columna de la figura correspondiente a las siguientes longitudes de la columna: a) 2m b) 2.5m c) 3.5m

La columna es un tubo de acero empotrado en la base con las dimensiones mostradas.

Las características del acero son: $E = 200GPa$ $F_y = 250MPa$

Calculemos primero el radio de giro de la sección. En este caso el radio de giro es igual con respecto a cualquier diámetro por lo que no tiene sentido hablar de radio de giro mínimo.



$$r = \sqrt{\frac{I}{A}}$$

$$I = \frac{\pi D_{ext}^4}{64} - \frac{\pi D_{int}^4}{64} = \frac{\pi \times 15^4}{64} - \frac{\pi \times 13^4}{64} = 108306$$

$$A = \frac{\pi D_{ext}^2}{4} - \frac{\pi D_{int}^2}{4} = \frac{\pi \times 15^2}{4} - \frac{\pi \times 13^2}{4} = 43.98$$

$$r = \sqrt{\frac{108306cm^4}{43.98cm^2}} = 4.96cm$$

Calculemos C_c (recordemos que es una relación de esbeltez):

$$C_c = \sqrt{2\pi^2 E / F_y} \quad C_c = \sqrt{2\pi^2 \times 200 \times 10^9 Pa / 250 \times 10^6 Pa} = 125.66$$

Este valor deberemos compararlo con la esbeltez de la columna en cada caso para calcular los correspondientes esfuerzos permisibles.

Analicemos los tres casos:

a) $L = 2m$ $(kl/r) = ?$

$k = 2$ (empotrada y libre)

$l = 200cm$

$r = 4.96cm$

$(kl/r) = 40.32$ como $\left(\frac{kl}{r}\right) = 80.64 < C_c$

Entonces según la NSR-98

$$F_a = \frac{\left[1 - \frac{(kl/r)^2}{2C_c^2}\right] F_y}{\frac{5}{3} + \frac{3(kl/r)}{8C_c} - \frac{(kl/r)^2}{8C_c^3}}$$

$$F_a = \frac{\left[1 - \frac{(40.32)^2}{2 \times 125.66^2}\right] 250MPa}{\frac{5}{3} + \frac{3 \times 40.32}{8 \times 125.66} - \frac{40.32^3}{8 \times 125.66^3}} = \frac{0.94 \times 250}{1.78} = 132.02MPa \quad \leftarrow \text{F.S.}$$

b) $L = 2.5m$ $(kl/r) = ?$ como $(kl/r) = 100.81 < C_c = 125.66$

$k = 2$

$l = 250cm$

$r = 4.96cm$

$(kl/r) = 100.81$

Entonces según la NSR-98

$$F_a = \frac{\left[1 - \frac{(kl/r)^2}{2C_c^2}\right] F_y}{\frac{5}{3} + \frac{3(kl/r)}{8C_c} - \frac{(kl/r)^3}{8C_c^3}}$$

$$F_a = \frac{\left[1 - \frac{(100.81)^2}{2 \times 125.66^2}\right] 250MPa}{\frac{5}{3} + \frac{3 \times 100.81}{8 \times 125.66} - \frac{100.81^3}{8 \times 125.66^3}} = \frac{0.67 \times 250}{1.90} = 88.16MPa \quad \leftarrow \text{F.S.}$$

Vemos que los FACTORES DE SEGURIDAD son mayores que en el caso anterior puesto que la columna es mas larga y la posibilidad de pandeo es mayor

c) $L = 3.5m$ $(kl/r) = ?$ como $(kl/r) = 141.13 > C_c = 125.66$

$k = 2$

$l = 350cm$

$r = 4.96cm$

$(kl/r) = 141.13$

Entonces según la NSR-98 $F_a = \frac{12\pi^2 E}{23(kl/r)^2}$

$$F_a = \frac{12\pi^2 \times 200 \times 10^3 \text{ MPa}}{23(141.13)^2} = \frac{\pi^2 \times 200 \times 10^3 \text{ MPa}}{1.92(141.13)^2} = 51.62 \text{ MPa}$$

Cálculo de las cargas admisibles:

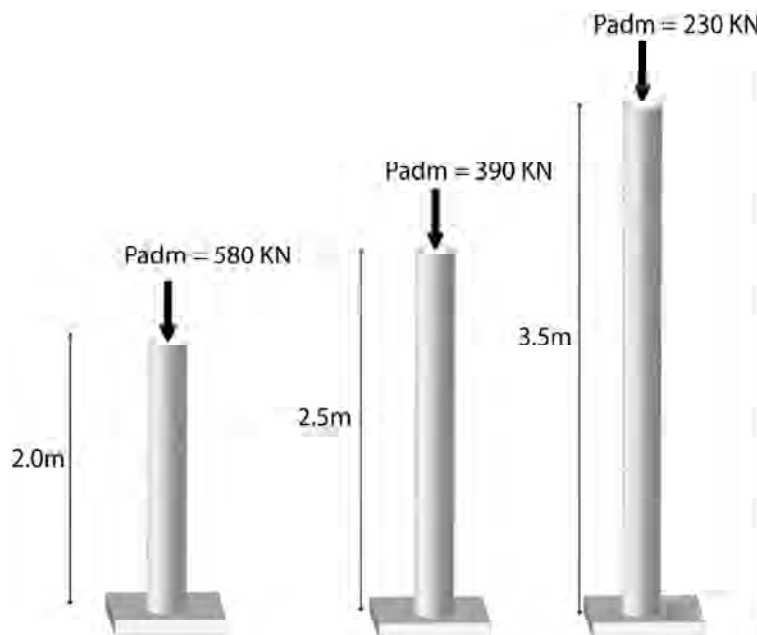
Recordemos que en general: $\sigma = \frac{P}{A}$ en ese caso: $F_a = \frac{P_{admissible}}{A}$ $P_{admissible} = F_a \times A$

a) $L=2\text{m}$ $P_{admissible} = F_a \times A = 132.02 \text{ MPa} \times 43.98 \text{ cm}^2 \times \frac{1 \text{ m}^2}{10^4 \text{ cm}^2} = 0.58 \text{ MN} = 580 \text{ KN}$

b) $L=2.5\text{m}$ $P_{admissible} = F_a \times A = 88.16 \text{ MPa} \times 43.98 \text{ cm}^2 \times \frac{1 \text{ m}^2}{10^4 \text{ cm}^2} = 0.39 \text{ MN} = 390 \text{ KN}$

c) $L=3.5\text{m}$ $P_{admissible} = F_a \times A = 51.62 \text{ MPa} \times 43.98 \text{ cm}^2 \times \frac{1 \text{ m}^2}{10^4 \text{ cm}^2} = 0.23 \text{ MN} = 230 \text{ KN}$

Observemos que mientras mas esbelta es la columna, menor será la carga que puede aplicarse



Miremos de donde han salido las expresiones empleadas en la NSR-98:

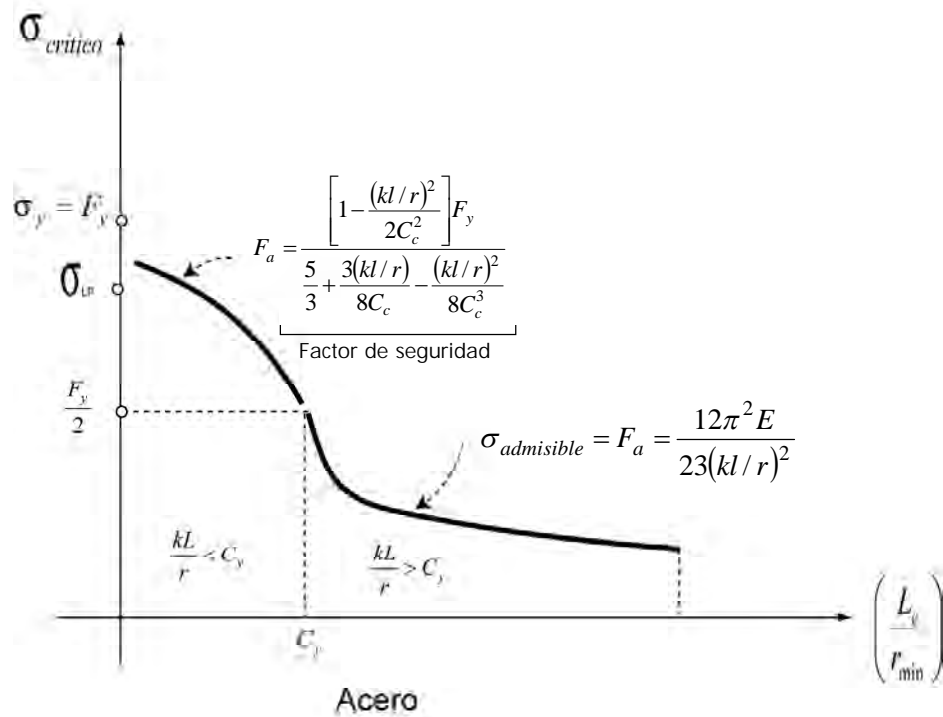
De dónde provienen las expresiones de la NSR-98

C_y es una relación de esbeltez: Veamos cómo se obtiene:

Por seguridad, y teniendo en cuenta esfuerzos residuales que quedan en el acero en el proceso de fabricación se establece que:

$$\sigma_{critico} = \frac{\sigma_y}{2} = \frac{F_y}{2} \quad (\text{Valor máximo que puede alcanzar el esfuerzo crítico aplicando la hipérbola de Euler})$$

Por tanto: $\frac{F_y}{2} = \frac{\pi^2 E}{\left(\frac{kL}{r}\right)^2}$ y $\left(\frac{kL}{r}\right) = \sqrt{\frac{2\pi^2 E}{F_y}} = C_y$

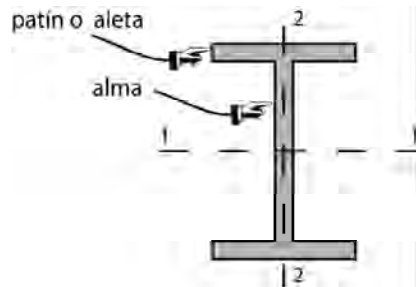


$\frac{12}{23}$ Factor de seguridad

PROBLEMA PROPUESTO

Calcular la carga admisible para cada una de las columnas mostradas sabiendo que todas están construidas con un perfil de acero cuya referencia es W 10 x 60 (sección de patin ancho), que tiene las siguientes características:

$$F_y = 20000 \frac{lb}{pulg^2}$$

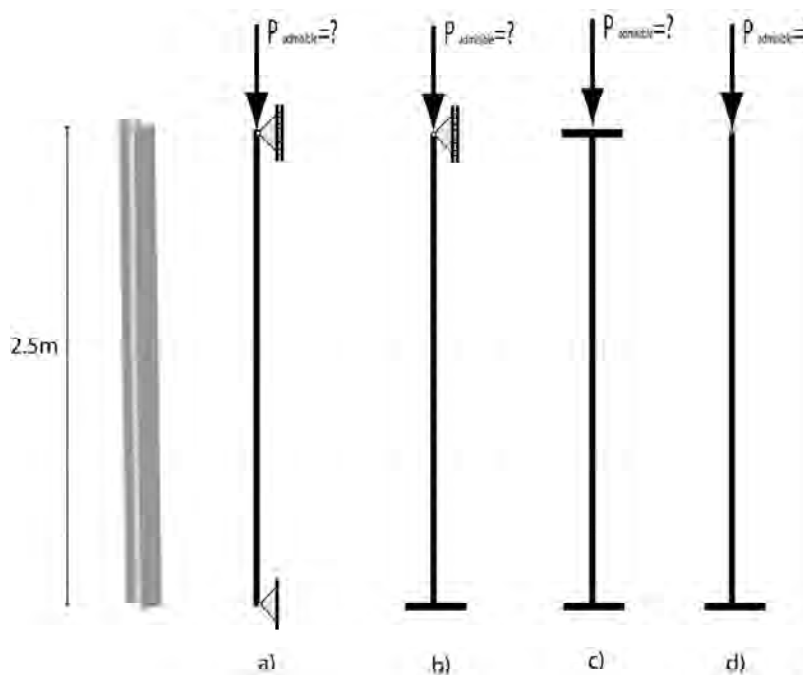


EJE 1-1

EJE 2-2

Peso por pie	Área	Altura	Espesor del alma	Ancho patín	Espesor patín	l	s	r	l	s	r
Lb	pulg ²	pulg	pulg	pulg	pulg	pulg ⁴	pulg ³	pulg	pulg ⁴	pulg ³	pulg
60	17.6	10.22	0.420	10.080	0.680	341	66.7	4.39	116	23.0	2.57

Datos tomados de MECÁNICA DE MATERIALES (Gere y Timoshenko) México, International Thomson editores 1998, página 875



CAPÍTULO 7

TORSIÓN



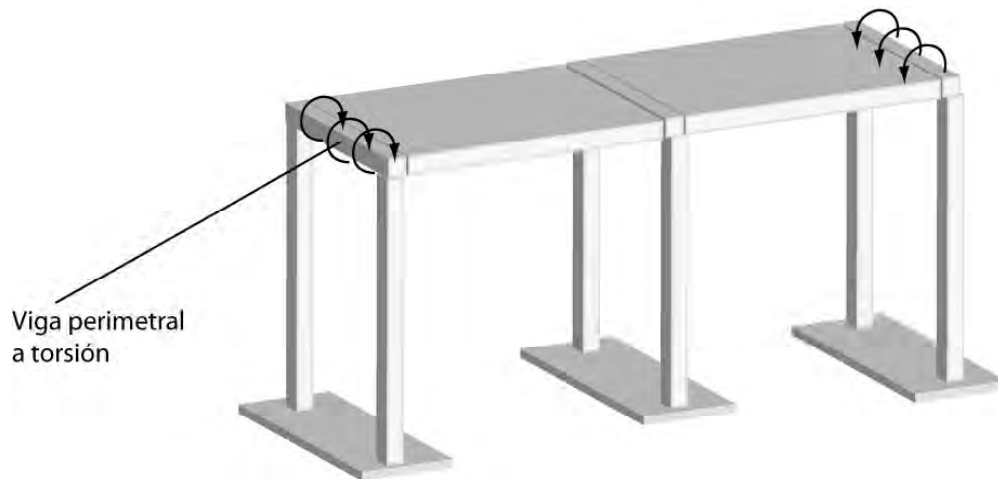
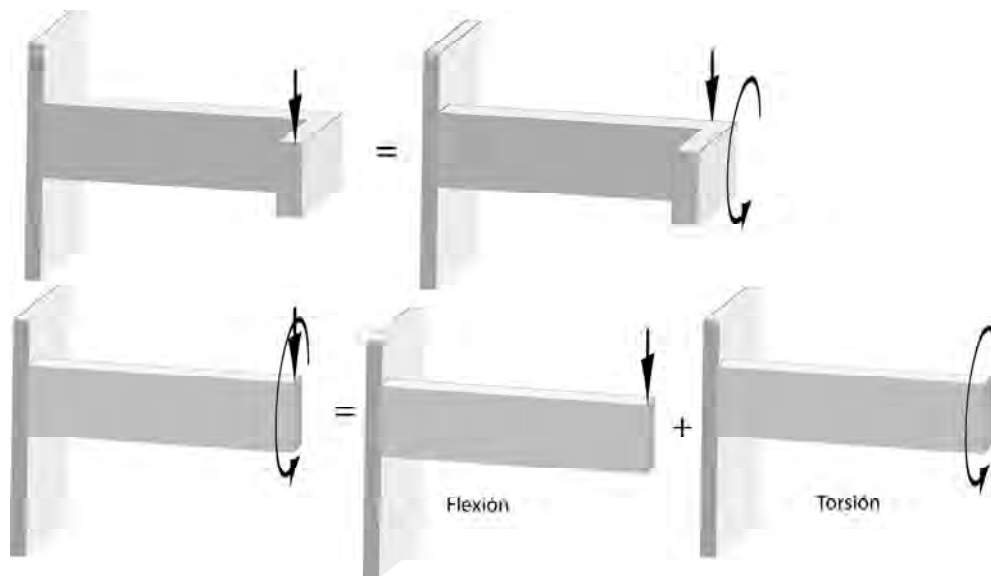
METRO DE MIAMI, ESTADOS UNIDOS 2005

Elementos estructurales sometidos a torsión

Existe la tendencia a pensar que los elementos estructurales sometidos a torsión son de incumbencia exclusiva de los ingenieros mecánicos (ejes de motores, piñones...)

Sin embargo en las estructuras es bastante común que por la forma de aplicación de las cargas o por la forma misma de la estructura (asimetrías) se presenten este tipo de efectos en los elementos estructurales.

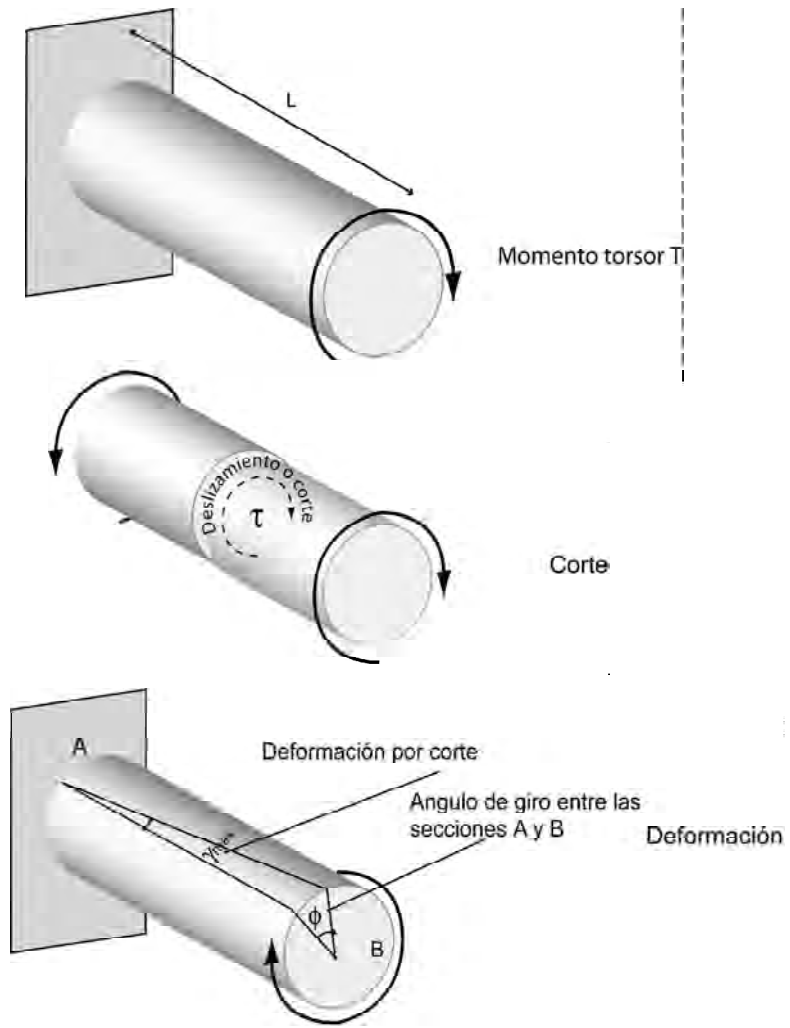
Veamos algunas situaciones:



7.1 ESFUERZOS Y DEFORMACIONES EN ELEMENTOS DE SECCIÓN CIRCULAR

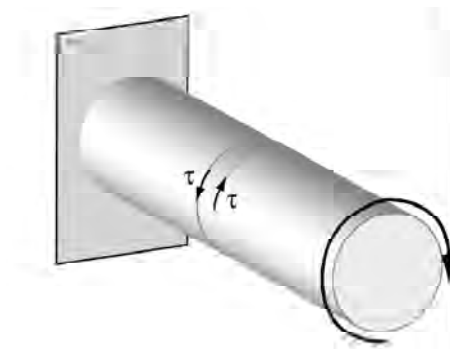
Al aplicarse un **momento torsor T** (alrededor del eje longitudinal), una sección del elemento gira con respecto a la otra e internamente se produce un efecto de deslizamiento o corte entre dos secciones adyacentes.

La torsión, por tanto, produce esfuerzos cortantes τ y deformaciones angulares ϕ . Veamos:



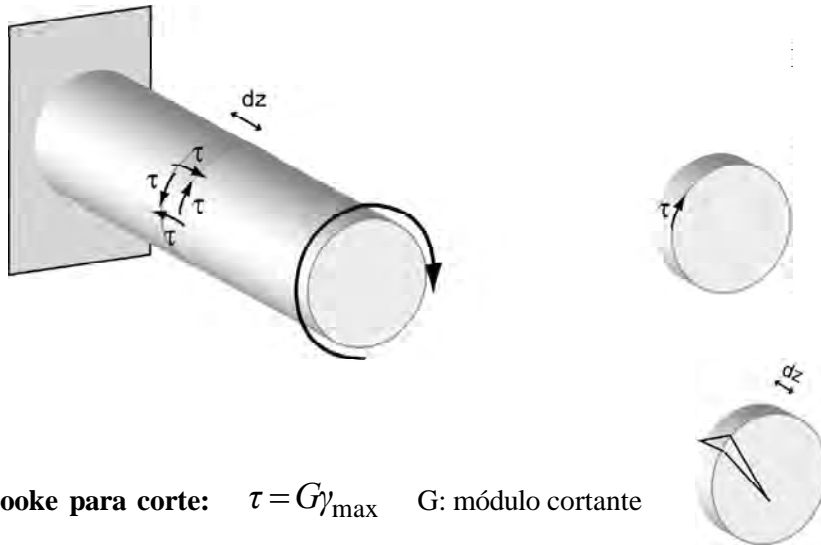
Esfuerzo cortante τ y ángulo de giro ϕ en elementos estructurales de sección circular.

Esfuerzo cortante τ en secciones transversales rectas del elemento.

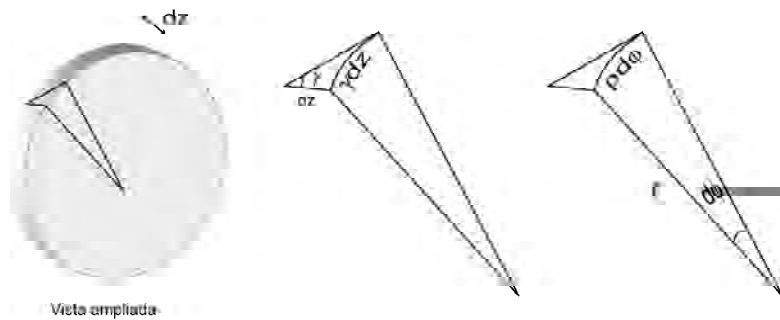


Recordemos que ante la presencia de esfuerzos cortantes verticales, se generan automáticamente esfuerzos cortantes verticales iguales.

Por tanto:



Ley de Hooke para corte: $\tau = G\gamma_{\max}$ G: módulo cortante



Vista ampliada

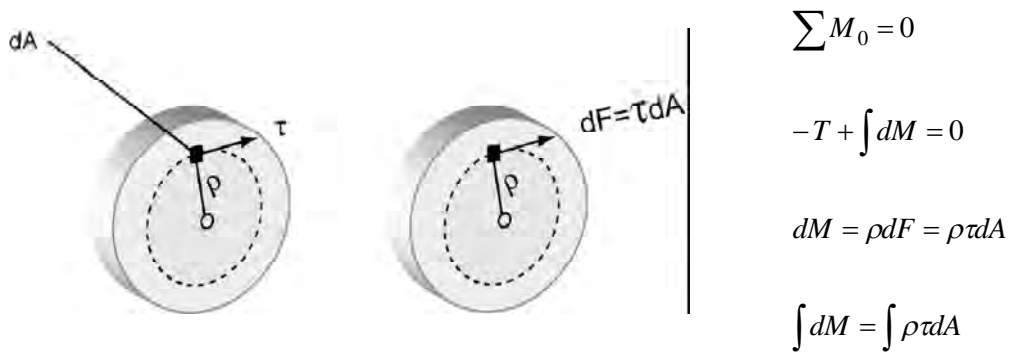
$$\gamma_{\max} dz = r d\varphi$$

$$\gamma_{\max} = \frac{r d\varphi}{dz}$$



Análogamente: $\gamma = \frac{\rho d\varphi}{dz}$

Calculamos τ a una distancia ρ del centro de la sección transversal:



Pero: $\tau = G\gamma = G \frac{\rho d\varphi}{dz}$



Reemplazando: $\int dM = \int \rho G \frac{\rho d\varphi}{dz} dA$

$$-T + \int \rho G \frac{\rho d\varphi}{dz} dA = 0$$

$$T = G \frac{d\varphi}{dz} \int \rho^2 dA$$

Recordando que: $\int \rho^2 dA = J$ (Momento polar de inercia de la sección)

Por lo cual: $\frac{d\varphi}{dz} = \frac{T}{GJ}$

$$\tau = G\gamma = G\rho \frac{T}{GJ}$$

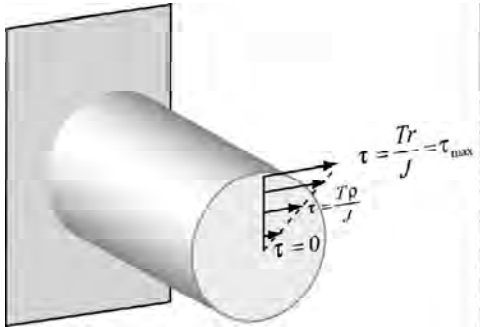
Finalmente: $\tau = \frac{T\rho}{J}$

T: momento torsor
 rho: radio en el punto considerado
 J: momento polar de inercia

$$J = I_x + I_y = \frac{\pi D^4}{64} + \frac{\pi D^4}{64} = \frac{\pi D^4}{32}$$

Variación de τ :

Como se infiere de la expresión, τ depende del radio ρ



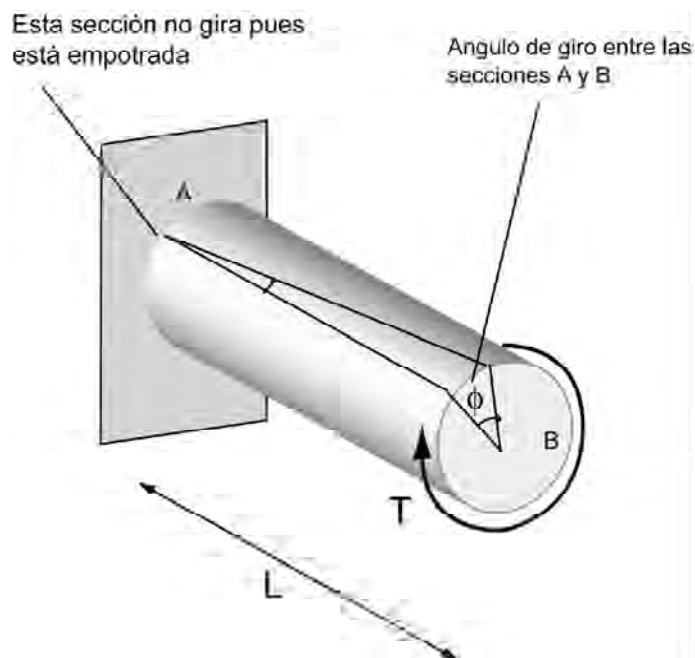
$$\text{Si } \rho = 0 \quad \tau = 0$$

$$\text{Si } \rho = r \quad \tau = \frac{Tr}{J} = \tau_{\max}$$

La variación es lineal

Angulo de giro:

Angulo de giro ϕ entre dos secciones del elemento estructural



Anteriormente se tenía que:

$$\frac{d\varphi}{dz} = \frac{T}{GJ}$$

Por lo cual:

$$d\varphi = \frac{T}{GJ} dz$$

$$\int_0^\varphi d\varphi = \int_0^L \frac{T}{GJ} dz$$

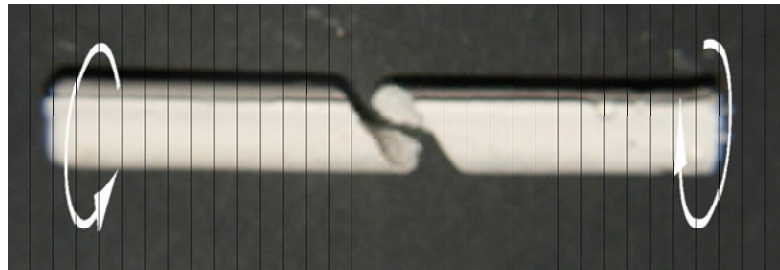
$$\varphi = \frac{TL}{GJ}$$

T: momento torsor que actúa en el tramo L

G: módulo cortante del material

J: momento polar de inercia de la sección transversal

GJ: rigidez al corte (mientras más grande sea más difícil será torsionar el elemento)

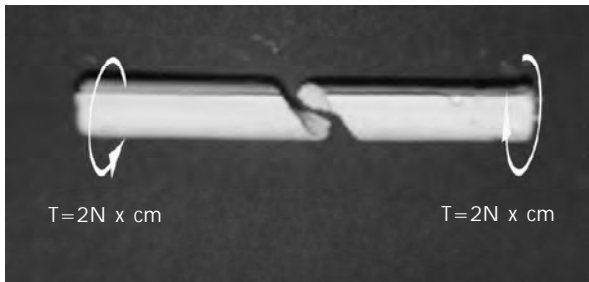


TIZA FALLADA MEDIANTE LA APLICACIÓN DE TORSIÓN

PROBLEMA

La tiza de la figura se somete a dos momentos torsores de 2 N x cm en los extremos. Calcular el esfuerzo cortante máximo producido y los esfuerzos principales correspondientes a dicho estado de esfuerzos.

El diámetro de la tiza es de 1 cm.



Tal como se vio, el esfuerzo cortante máximo ocurre en la periferia y es igual a:

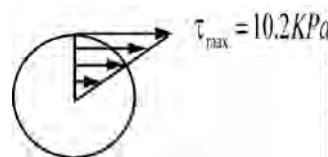
$$\tau_{\max} = \frac{Tr}{J}$$

$$r = 0.5 \text{ cm} = 0.0005 \text{ m}$$

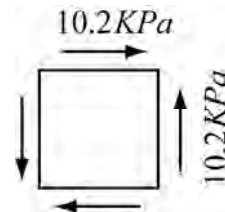
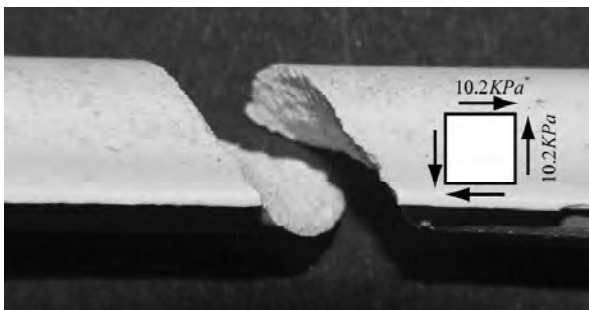
$$T = 2 \text{ N x cm} = 0.02 \text{ N x m}$$

$$J = \frac{\pi D^4}{32} = \frac{\pi (0.01)^4}{32} = 9.82 \times 10^{-10} \text{ m}^4$$

$$\tau_{\max} = \frac{0.02 \times 0.0005}{9.82 \times 10^{-10}} = 10183.3 \text{ N/m}^2 = 10.2 \text{ KPa}$$

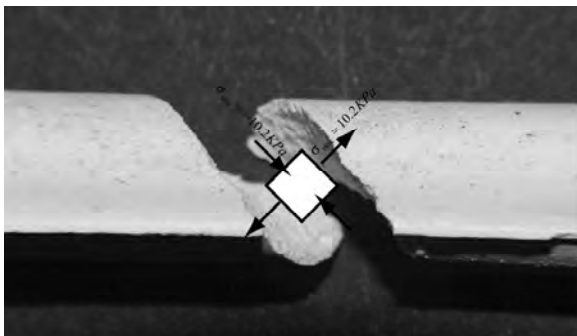
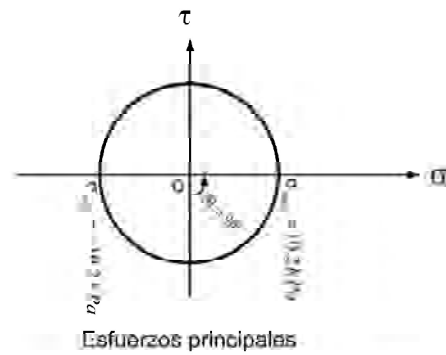
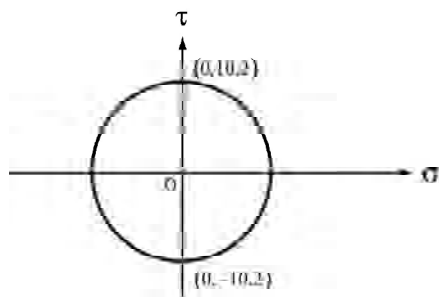


Variación de esfuerzos cortantes a través de la sección

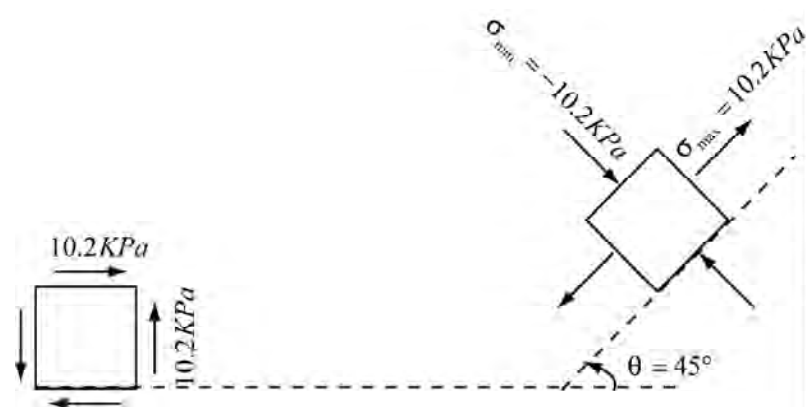


Elemento en el borde de la tiza sometido a cortante puro

Construyamos el círculo de Mohr para el elemento mostrado:



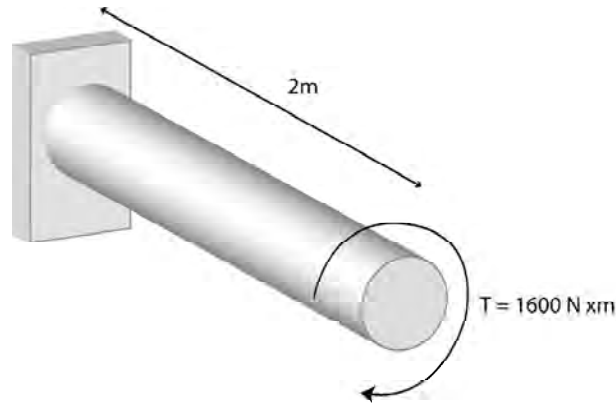
La rotura se produce por tensión a lo largo de un plano a 45°



PROBLEMA

Calcular el diámetro que debe tener el eje de la figura sabiendo que el ángulo de torsión entre sus extremos no debe ser mayor que 4° y el esfuerzo cortante admisible del material es de 60 MPa.

El material tiene un módulo cortante G de 11 GPa



Deben cumplirse 2 condiciones:

- Que el ángulo de torsión no sobrepase un valor de 4°
- Que el esfuerzo actuante no sobrepase un valor de 60 MPa

Es decir: $\varphi \leq 4^\circ$

$$\tau \leq 60 \text{ MPa}$$

$$\text{Primera condición: } \varphi = 4^\circ = \frac{TL}{GJ} \quad 4^\circ \times \frac{\pi \text{ rad}}{180^\circ} = \frac{1600 \text{ N} \times \text{m} \times 2 \text{ m}}{11 \text{ GPa} \times \frac{\pi D^4}{32} \text{ m}^4} = \frac{1600 \text{ N} \times \text{m} \times 2 \text{ m}}{11 \times 10^9 \frac{\text{N}}{\text{m}^2} \times \frac{\pi D^4}{32} \text{ m}^4}$$

$$D = \sqrt[4]{\frac{1600 \times 2 \times 32 \times 180}{4 \times \pi \times 11 \times 10^9 \times \pi}} = 0.081 \text{ m} = 8.1 \text{ cm} = D_1$$

Este diámetro garantiza que el ángulo no excederá un valor de 4°

$$\text{Segunda condición: } \tau = 60 \text{ MPa} = 60 \times 10^6 \frac{\text{N}}{\text{m}^2} = \frac{Tr}{J} = \frac{T \frac{D}{2}}{\frac{\pi D^4}{32}} = \frac{1600 \text{ N} \times \text{m} \times 16}{\pi D^3}$$

$$D = \sqrt[3]{\frac{1600 \times 16}{\pi \times 60 \times 10^6}} = 0.051m = 5.1cm = D_2$$

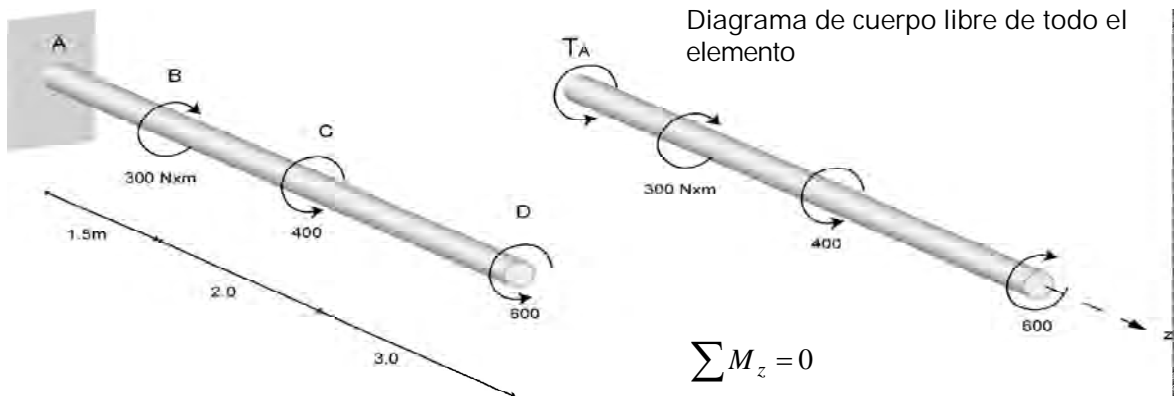
Este diámetro garantiza que el esfuerzo cortante no excederá un valor de 60 MPa.

Como deben garantizarse las 2 condiciones debe escogerse el diámetro mayor.

Por lo tanto: $D_{necesario} = 8.1cm$

PROBLEMA

Calcular los momentos torsores internos en los tramos AB, BC y CD del elemento estructural

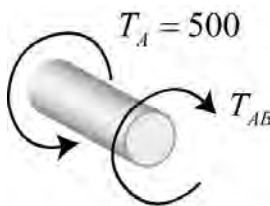


$$T_A - 300 + 400 - 600 = 0$$

$$T_A = 500$$

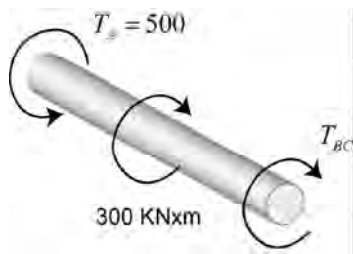
Para calcular los momentos en cada tramo hacemos cortes por cada uno de ellos así:

$$0 < z < 1.5$$



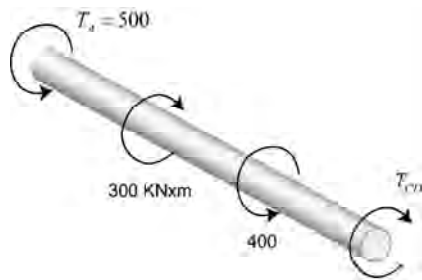
$$\sum M_z = 0 \quad T_{AB} = 500N \times m$$

$$1.5 < z < 3.5$$



$$\sum M_z = 0 \quad T_{BC} = 500 - 300 = 200$$

$$3.5 < z < 6.5$$



$$\sum M_z = 0 \quad T_{CD} = 500 - 300 + 400 = 600$$

Una vez calculados los momentos torsores se puede proceder al cálculo de los esfuerzos cortantes máximos en cada tramo.

Supongamos que el diámetro del elemento estructural es de 10 cm.

Esfuerzos cortantes máximos en cada tramo

Recordemos que: $\tau_{\max} = \frac{Tr}{J}$ siendo: $J = \frac{\pi D^4}{32}$

$$J = \frac{\pi(0.10m)^4}{32} = 9.82 \times 10^{-6} m^4 \quad r = 0.05m$$

Entonces los esfuerzos cortantes máximos en cada sección serán:

$$\tau_{AB} = \frac{500N \times m \times 0.05m}{9.82 \times 10^{-6} m^4} = 2.55 MPa$$

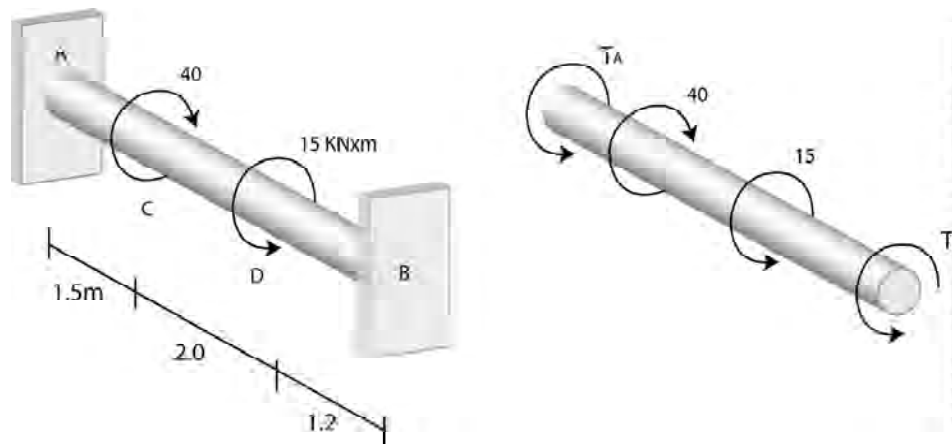
$$\tau_{BC} = \frac{200N \times m \times 0.05m}{9.82 \times 10^{-6} m^4} = 1.02 MPa$$

$$\tau_{CD} = \frac{600N \times m \times 0.05m}{9.82 \times 10^{-6} m^4} = 3.05 MPa$$

Como se observa, el esfuerzo cortante máximo ocurre en el tramo CD. Su valor será el que definirá el diseño del elemento: Deberá escogerse un material con un esfuerzo resistente mayor que 3.05MPa de tal manera que se tenga un factor de seguridad adecuado.

7.2 INDETERMINACIÓN ESTÁTICA

Dependiendo de la forma en que estén apoyados, los elementos estructurales sometidos a torsión también pueden quedar en situación estáticamente indeterminada. El caso más común se presenta cuando el elemento está bi-empotrado.



$$\sum M_z = 0 \quad T_A + T_B - 40 + 15 = 0$$

$$T_A + T_B = 25$$

1 ecuación
2 incógnitas

Estáticamente indeterminada

Como en las situaciones anteriores de indeterminación necesitamos una ecuación adicional (obtenida de la compatibilidad de deformaciones).

En este caso la ecuación se establece al observar que en los empotramientos A y B no hay giro, o en otras palabras que la sección.

B no gira con relación a la sección A.

Esto podemos expresarlo diciendo que la suma (algebraica) de los giros de las secciones AC, CD y DB es igual a cero.

$$\phi_{AC} + \phi_{CD} + \phi_{DB} = 0 \quad \text{Ecuación de compatibilidad de deformaciones}$$

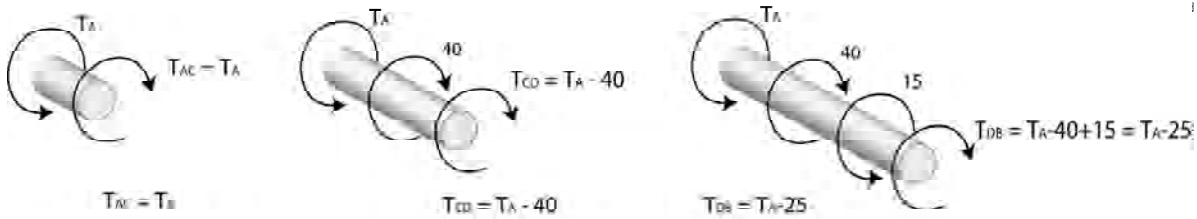
Recordemos que en general: $\phi = \frac{TL}{GJ}$

$$\text{Por lo tanto: } \frac{T_{AC}L_{AC}}{GJ} + \frac{T_{CD}L_{CD}}{GJ} + \frac{T_{DB}L_{DB}}{GJ} = 0 \qquad T_{AC}L_{AC} + T_{CD}L_{CD} + T_{DB}L_{DB} = 0$$

$$1.5T_{AC} + 2T_{CD} + 1.2T_{DB} = 0$$

T_{AC} , T_{CD} y T_{DB} son los momentos torsores internos en las secciones

AC, CD y DB. Para calcularlos debemos hacer cortes por dichas secciones:



Reemplazando tenemos: $1.5T_A + 2(T_A - 40) + 1.2(T_A - 25) = 0$

$$4.7T_A = 110$$

$$T_A = 23.4 \text{ KN} \times \text{m} \quad T_B = 25 - 23.4 = 1.6$$

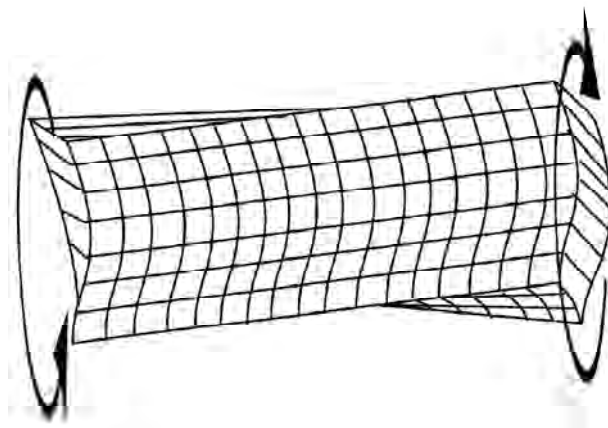
Con estos valores podemos calcular finalmente los momentos torsores internos en las 3 secciones:

$$T_{AC} = 23.4 \qquad T_{CD} = 23.4 - 40 = -16.6 \qquad T_{DB} = 23.4 - 25 = -1.6$$

Conocidos estos valores, el problema está resuelto y se pueden calcular los esfuerzos cortantes y los giros de las diferentes secciones si conocemos el diámetro y el módulo cortante G del material

7.3 TORSIÓN DE ELEMENTOS DE SECCIÓN RECTANGULAR

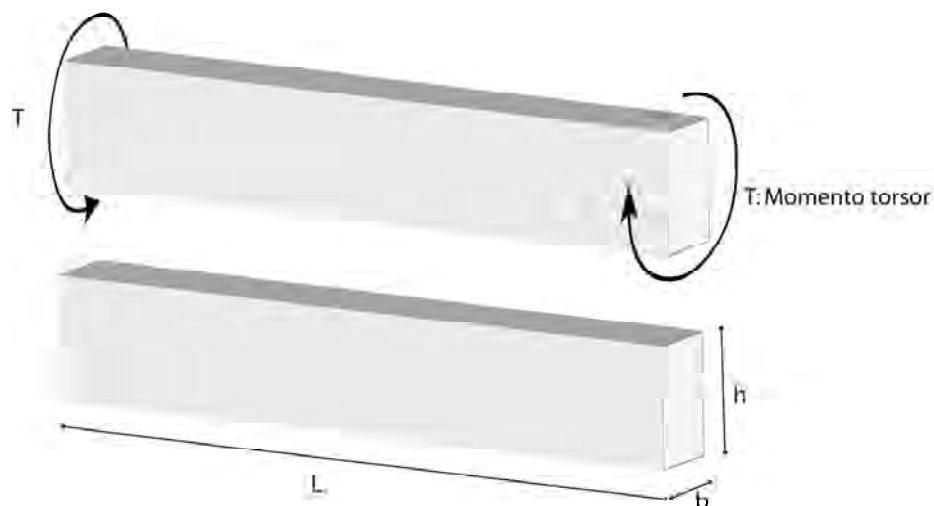
En este caso se presenta un fenómeno que complica el análisis: las secciones transversales del elemento al ser torsionado no permanecen planas sino que se alabean.



El análisis del fenómeno se hace normalmente en los cursos de Teoría de la Elasticidad utilizando la analogía de la membrana.

En este texto introductorio presentamos las expresiones obtenidas en dicho análisis para el esfuerzo cortante máximo y la deformación angular producida en torsión.

7.3.1 Esfuerzos y deformaciones en elementos de sección rectangular a torsión



El esfuerzo cortante máximo ocurre en el punto medio del lado mas largo:

$$\tau_{\max} = \frac{T}{c_1 h b^2}$$

El ángulo de torsión entre dos secciones separadas una longitud L es:

$$\phi = \frac{TL}{c_2 h b^3 G}$$

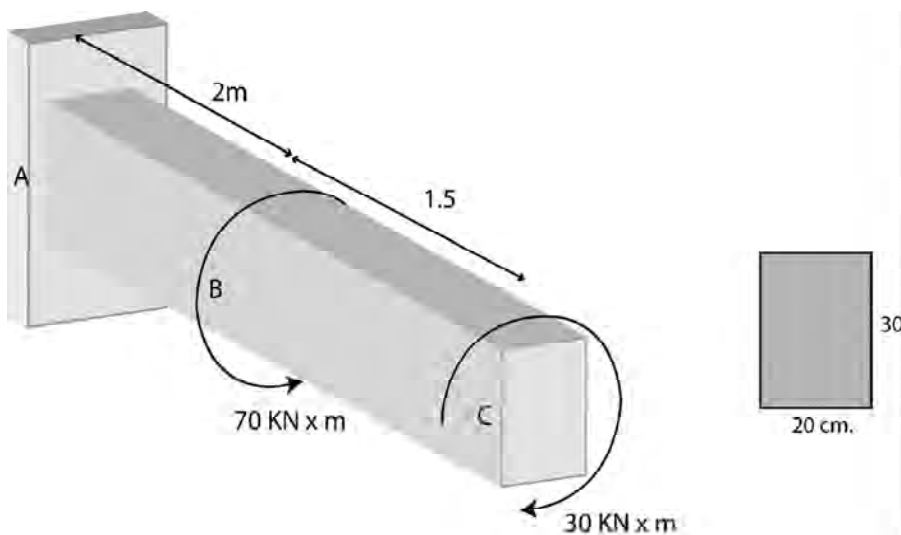
C_1 y C_2 son constantes que dependen de la relación $\frac{h}{b}$ según la siguiente tabla:

$\frac{h}{b}$	1.0	1.2	1.5	2.0	2.5	3.0	4.0	5.0	10.0	∞
C_1	0.208	0.219	0.231	0.246	0.258	0.267	0.282	0.291	0.312	0.333
C_2	0.1406	0.1661	0.1958	0.229	0.249	0.263	0.281	0.291	0.312	0.333

Tomada de "Mecánica de materiales" de Ferdinand P. Beer y E. Russell Johnston McGraw Hill Latinoamericana, 1982

PROBLEMA

Calcular el esfuerzo cortante máximo producido en la siguiente viga sometida a los 2 momentos torsores mostrados.

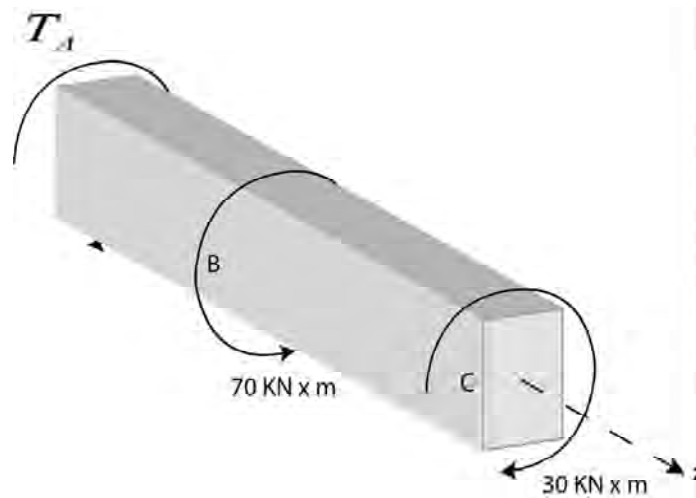


Según lo visto, el esfuerzo cortante máximo ocurrirá en el tramo en el cual el momento torsor sea máximo.

$$\tau_{\max} = \frac{T}{c_1 h b^2}$$

$$b = 20\text{cm} \quad h = 30\text{cm} \quad \frac{h}{b} = \frac{30}{20} = 1.5 \quad \text{por lo tanto: } c_1 = 0.231$$

Calculemos el momento torsor máximo en la viga.



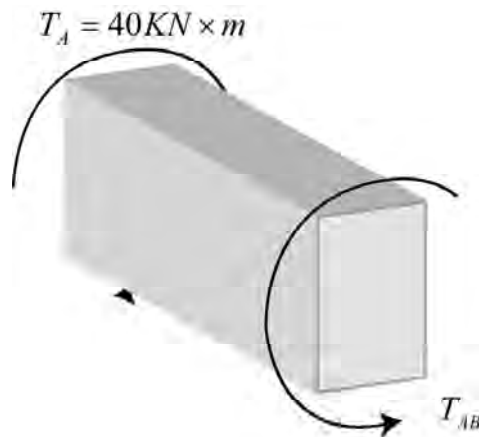
$$\sum M_Z = 0$$

$$T_A - 70 + 30 = 0$$

$$T_A = 40\text{KN} \times m$$

Hagamos cortes para detectar el tramo del momento torsor máximo.

$$0 < z < 2$$

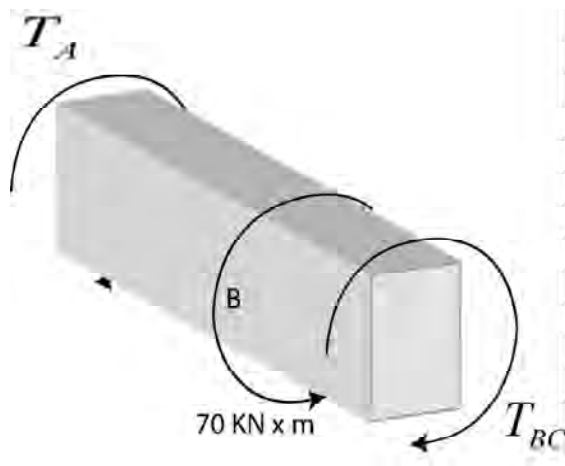


$$\sum M_Z = 0$$

$$T_{AB} - 40 = 0$$

$$T_{AB} = 40$$

$$2 < z < 3.5$$



$$\sum M_z = 0$$

$$T_{BC} - 70 + 40 = 0$$

$$T_{BC} = 30$$

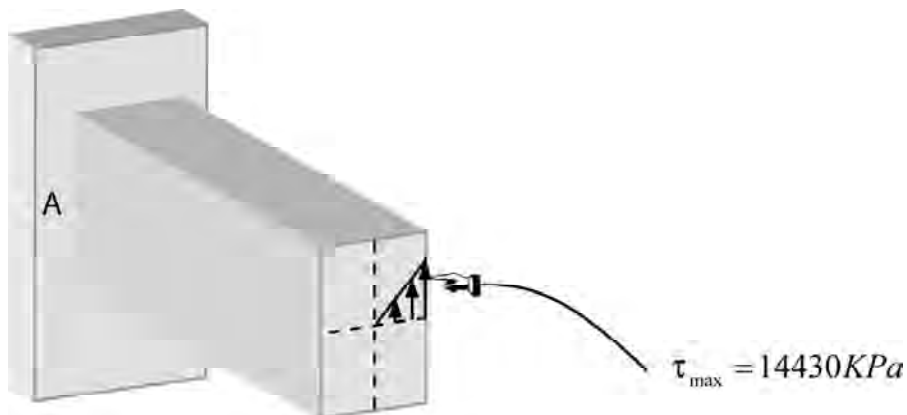
Por lo tanto: $T_{\max} = T_{AB} = 40 \text{ KN} \times m$

Finalmente, calculamos el valor del esfuerzo cortante máximo.

$$\tau_{\max} = \frac{T_{\max}}{c_1 h b^2} = \frac{40 \text{ KN} \times m}{0.231 \times 0.30 m (0.20 m)^2}$$

$$\tau_{\max} = 14430 \text{ KN} / m^2 = 14430 \text{ KPa}$$

El esfuerzo cortante máximo ocurre en el tramo AB en el punto medio del lado mas largo de la viga:



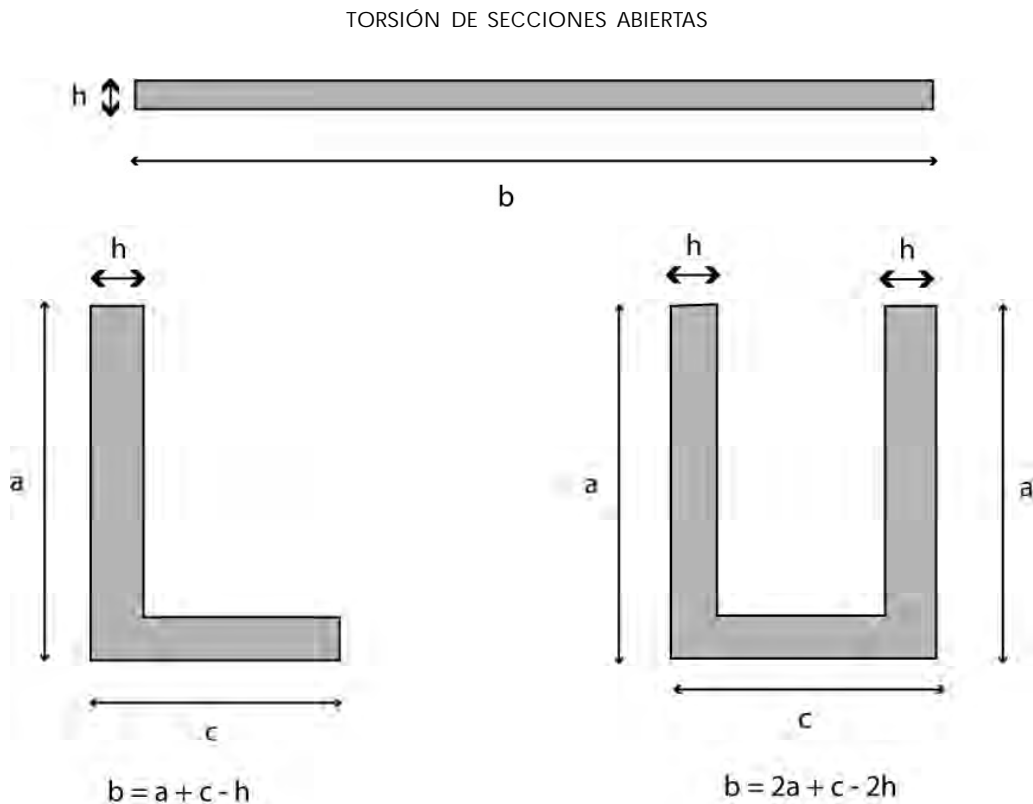
7.4 TORSIÓN DE SECCIONES ABIERTAS

En general puede decirse que las secciones abiertas (ángulos, secciones U) son muy ineficientes para resistir efectos de torsión por cuanto se pierde la continuidad en la transmisión de los esfuerzos cortantes producidos.

Aplicando los mismos procedimientos utilizados para calcular los esfuerzos en secciones rectangulares (analogía de la membrana) se ha encontrado que en este caso puede aplicarse la misma expresión que la utilizada para secciones rectangulares.

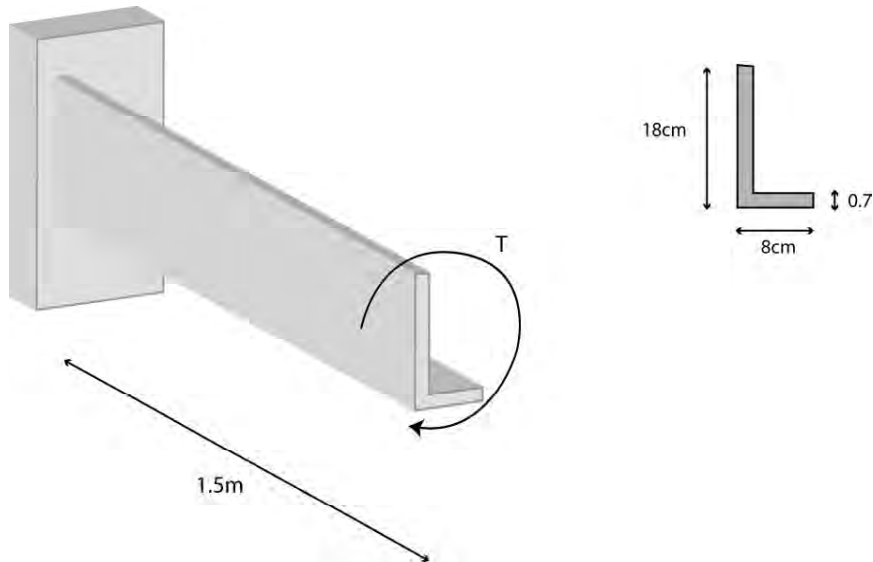
Debido a que la relación entre h y b en estos casos será muy grande, el valor de c_1 en estos casos se hace iguales a 0.333.

Las dimensiones de h y b se calculan como se ilustra en la figura:

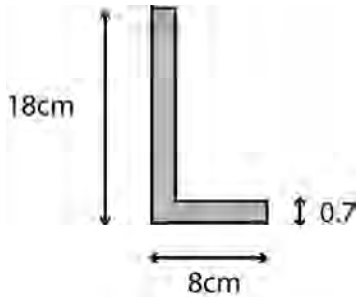


PROBLEMA

Calcular el esfuerzo cortante máximo en el elemento angular de la figura sometido a un momento torsor de 1500 Kgxcn



Según lo visto, en este caso se puede aplicar la misma expresión usada en el caso de secciones rectangulares con los valores de c_1 , h y b que se muestran a continuación:



$$\tau_{\max} = \frac{T}{c_1 h b^2}$$

$$c_1 = 0.33$$

$$h = 0.7 \text{ cm}$$

$$b = 18 + 8 - 0.7 = 25.3 \text{ cm}$$

$$\text{Por lo tanto: } \tau_{\max} = \frac{T}{c_1 h b^2} = \frac{1500 \text{ Kg} \times \text{cm}}{0.33 \times 0.7 \text{ cm} \times 25.3^2 \text{ cm}^2} = 10.14 \text{ Kg} / \text{cm}^2$$

Es de anotar que en un análisis más preciso que el que se hace en este texto, deberán tenerse en cuenta las concentraciones de esfuerzos que se producen por los cambios bruscos de dirección inducidos por el doblado de la lámina al hacer el ángulo.

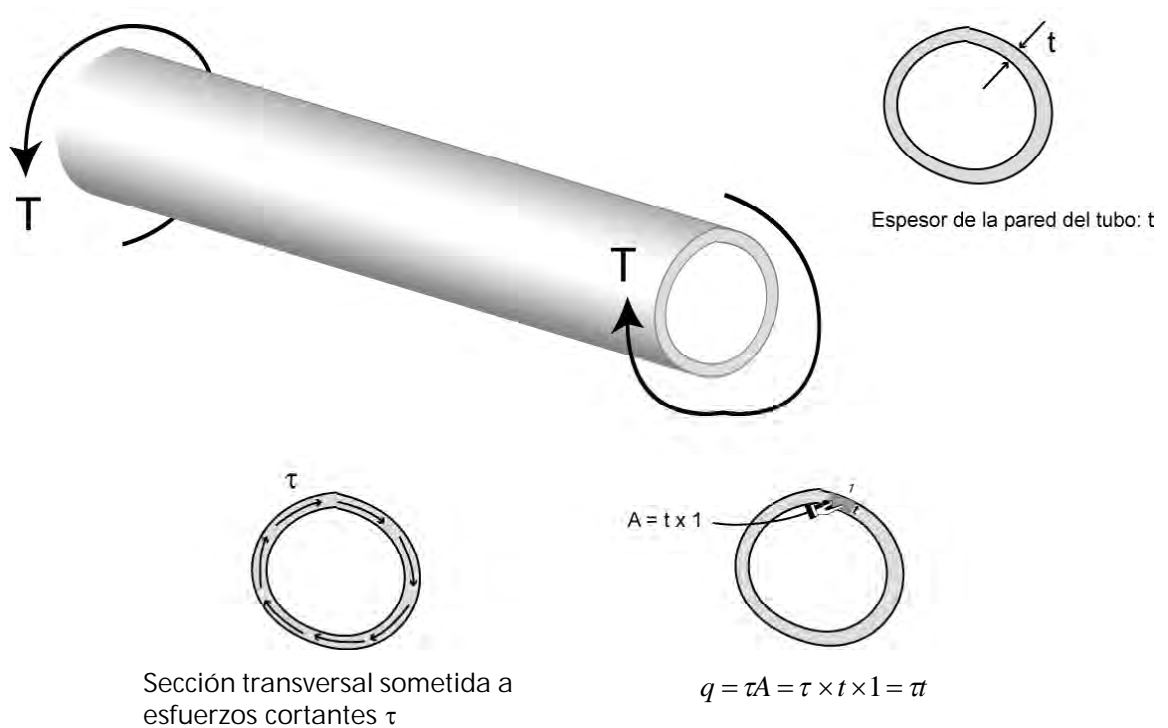
7.5 TORSIÓN DE TUBOS DE PARED DELGADA A

Se aceptan las siguientes hipótesis:

- El tubo es cilíndrico: su sección no varía a lo largo del tubo.
- La sección transversal del tubo es cerrada.
- El espesor de la pared es pequeño en comparación con las dimensiones transversales del tubo.
- El tubo está sometido solamente a momentos torsores en sus extremos.

Veamos:

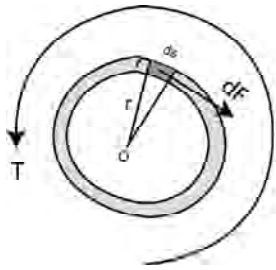
Tubo de pared delgada sometido a momentos torsores T en sus extremos



La fuerza por unidad de longitud del tubo es: τt (se conoce como flujo de cortante q)

$$q = \tau t$$

Establezcamos el equilibrio alrededor de un punto O en el interior del tubo a partir del cual tomamos un radio de curvatura r del tubo en dicho punto:



$$dF = \tau \times dA = \tau \times t ds = q ds$$

$$\sum M_O = 0$$

$$T - \int r dF = 0$$

$$T - \int r q ds = 0$$

$$r ds = 2dA$$

$$T - q \times 2A = 0$$

$$T = q \times 2A = \tau \times 2A$$

$$\tau = \frac{T}{2At}$$

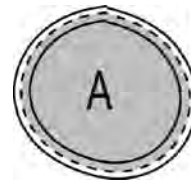


$$dA = \frac{r ds}{2}$$

$$2dA = r ds$$

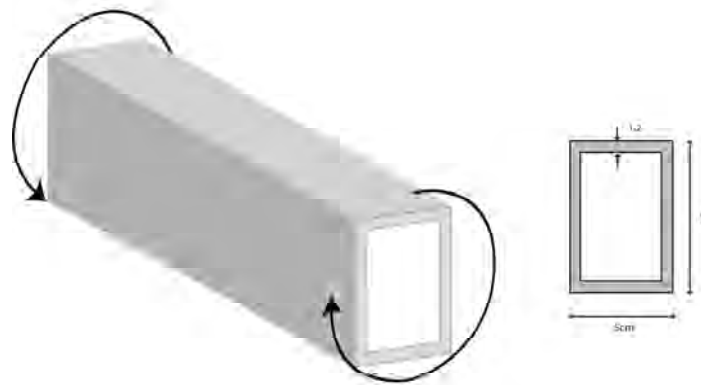
En resumen: $\tau = \frac{T}{2At}$

A : Área encerrada por el perímetro medio de la sección:



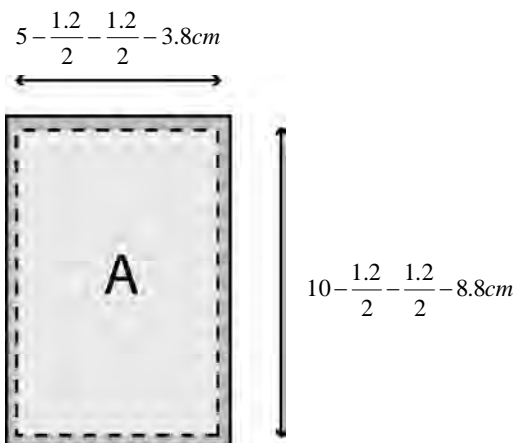
PROBLEMA

Calcular el esfuerzo cortante máximo que se produce en el tubo de la figura cuando se somete a dos momentos torsores de $180 \text{ Kg}\cdot\text{m}$ en sus extremos



Según se vió: $\tau = \frac{T}{2At}$ $T = 180 \text{ Kg} \times \text{m}$ $t = 1.2 \text{ cm} = 0.012 \text{ m}$

Calculemos A (área encerrada por el perímetro medio de la sección):



$$A = 3.8 \times 8.8 = 33.44 \text{ cm}^2 = 33.44 \text{ cm}^2 \times \frac{1 \text{ m}^2}{10^4 \text{ cm}^2} = 33.44 \times 10^{-4} \text{ m}^2$$

$$\text{Reemplazando: } \tau = \frac{180 \text{ Kg} \times \text{m}}{2 \times 33.44 \times 10^{-4} \text{ m}^2 \times 0.012 \text{ m}} = 2242822.97 \frac{\text{Kg}}{\text{m}^2}$$

$$\tau = 224.28 \frac{\text{Kg}}{\text{cm}^2}$$

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- BEDFORD, Liechti. 2002. *Mecánica de materiales*. Colombia. Pearson educación de Colombia. 1ª edición.
- BEER Ferdinand P., JOHNSTON E. Russell and DEWOLF John T. 2004. *Mecánica de materiales*. México. McGraw Hill Interamericana. 3ª edición.
- CRAIG Roy R., Jr. 2000. *Mechanics of materials*. Estados Unidos. 2ª edición.
- FITZGERALD Robert W. 1984. *Mecánica de materiales*. México. Fondo educativo interamericano. 1ª edición.
- GERE Y TIMOSHENKO. 1998. *Mecánica de materiales*. México. International Thomson Editores. Cuarta edición.
- GORDON J. E. 1978. *Structures or why things don't fall down*. United States of America. Da Capo press Inc. A Da Capo paperback.
- GORDON J. E. 1994. *Structures et matériaux. L'explication mécanique des formes*. Paris. Pour la science.
- GOVINDJEE Sanjay (Compiler). 2005. *Engineering mechanics, Strength of materials*. United States of America. Pearson Prentice Hall. 1a edición.
- HIBBELER R.C. 1998. *Mecánica de materiales*. México. Prentice Hall hispanoamericana S.A. 3ª edición,
- LEVY Matthys and SALVADORI Mario. 1994. *Why buildings fall down*. New York London. W. W. Norton y Company. Norton paperback.
- MOTT Robert L. 1996. *Resistencia de materiales aplicada*. México. Prentice hall hispanoamericana S.A. 3ª edición.
- NARAYANAN R.S. and BEEBY A.W. 2001. *Introduction to Design for Civil Engineers*. London and New York. SPON PRESS. Taylor and Francis group.
- NASH William A. 1973. *Resistencia de materiales. Teoría y 430 problemas resueltos*. Colombia. McGraw Hill.

Normas colombianas de diseño y construcción sismorresistente. NSR-98. Ley 400 1997, decreto ley 33 de 1998, AIS, Tomo 3, Bogotá, febrero de 1998.

POPOV Egor P. 1982. *Mecánica de materiales*. México. Editorial Limusa. Primera edición.

PYTEL Andrew, SINGER Ferdinand. 1994. *Resistencia de materiales. Introducción a la mecánica de sólidos*. México. Oxford University Press. 4ª edición.

SEWARD Derek. 2003. *Understanding structures. Análisis, Materials, Design*. China. Palgrave Macmillan. 3ª edición.

SHANLEY F.R. 1971. *Mecánica de materiales*. Colombia. McGraw-Hill de México. Traducido de la primera edición del inglés.

STIOPIN P.A. 1979. *Resistencia de materiales*. Moscú. Editorial MIR. Tercera edición.

REFERENCIAS DE LAS TABLAS

Los datos de las tablas presentadas en las páginas 41, 49, 52, 58 y 248 son tomados del libro *Mecánica de materiales*. Gere y Timoshenko. International Thomson Editores. 1988

REFERENCIAS FOTOGRÁFICAS Y DE GRÁFICOS

A menos que se indique lo contrario, las fotos y los gráficos que ilustran el presente texto son del autor.

Impreso en el Centro de Publicaciones
de la Universidad Nacional de Colombia Sede Manizales