



UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA

Propuesta didáctica para la enseñanza del concepto de fracción en el grado séptimo considerando la relación parte-todo

Juan Felipe López Arias

Universidad Nacional de Colombia
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Manizales, Colombia
2012

Propuesta didáctica para la enseñanza del concepto de fracción en el grado séptimo considerando la relación parte-todo

Juan Felipe López Arias¹

Trabajo de grado presentado como requisito parcial para optar al título de:
Magister en Enseñanza de las Ciencias Exactas y Naturales

Director:
Magister Omar Evelio Ospina Arteaga

Universidad Nacional de Colombia
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Manizales, Colombia
2012

¹ e-mail: jflopezarias@hotmail.com

A la memoria de mi madre que me dejó el legado de la dedicación como principio para la consecución de metas.

A mi papá y a mis hermanos Diana y Ricardo por su apoyo desde la distancia.

A Mónica, por todo su amor, acompañamiento y comprensión en estos maravillosos años que hemos compartido.

A mis amigos, por estar siempre ahí y compartir todo aquello que nos ha unido a lo largo de todos estos años.

Agradecimientos

A la Universidad Nacional por darme la oportunidad de regresar a sus aulas.

A los docentes de la Maestría que han enriquecido mis conocimientos.

A los compañeros de estudio por sus valiosos aportes en todo este proceso.

Al profesor Omar Evelio Ospina por su colaboración en el desarrollo de este trabajo.

A mis estudiantes de la Institución Educativa Integrado Villa del Pilar del grado séptimo de la jornada de la tarde, que contribuyeron con su atención y responsabilidad en el desarrollo de este trabajo.

A mi familia, a Mónica y a mis amigos: Ustedes han contribuido de una u otra forma para que esto sea posible.

A mi madre: Si estuvieras aquí se que estarías muy orgullosa de este logro, porque gracias a tus cuidados y esfuerzo verías como estoy forjando mi camino.

Título

Propuesta didáctica para la enseñanza del concepto de fracción en el grado séptimo considerando la relación parte-todo

Resumen

El siguiente trabajo presenta una breve aproximación histórica acerca del concepto de fracción, incluye una revisión de los significados de este concepto en medida, relación parte-todo, cociente, operador y razón, dando soporte teórico a la propuesta didáctica que se plantea alrededor de la relación parte-todo. Dicha propuesta didáctica contiene actividades que consideran sistemas de representación con concretos, diagramas, lenguaje natural y lenguaje simbólico en los contextos continuo y discreto, con el propósito de dinamizar el proceso de enseñanza y aprendizaje. En el trabajo se realiza una descripción de la secuencia didáctica aplicada en un grupo de estudiantes de grado séptimo de una institución educativa oficial, mostrando adicionalmente un análisis de resultados de las pruebas aplicadas a este grupo de estudiantes.

Palabras Clave: Fracción, significados de las fracciones, relación parte-todo, sistemas de representación, propuesta didáctica.

Title

Didactic proposal for the teaching of fraction concept in the seventh grade considering the part-whole relationship

Abstract

This work presents a brief historical approach about the concept of fraction, including a review of the meanings of this concept in measurement, part-whole relationship, quotient, operator and ratio, giving theoretical support to the didactic proposal posed around the part-whole relationship. This proposal contains activities considering representation systems with concretes, diagrams, natural language and symbolic language in continuous and discrete contexts, in order to dynamize the process of teaching and learning. In this work a description of the didactic sequence applied to a group of seventh grade students in an official school is made, showing further analysis of test results applied to this group of students.

Keywords: Fraction, meanings of fractions, part-whole relationship, representation systems, didactic proposal.

Contenido

	Pág.
Resumen	I
Lista de Figuras	VI
Introducción	1
1. Aspectos históricos de la fracción y consideraciones acerca de su proceso de enseñanza y aprendizaje	3
1.1 Aspectos históricos del concepto de fracción.....	3
1.1.1 Las fracciones en los babilonios.....	3
1.1.2 Las fracciones en los antiguos egipcios	4
1.1.3 Las fracciones en los griegos.....	4
1.1.4 Las fracciones en los hindúes y árabes.....	5
1.1.5 Las fracciones decimales	5
1.1.6 Las fracciones comunes actuales.....	6
1.2 Aspectos a considerar en el proceso de enseñanza y aprendizaje de las fracciones.....	6
1.2.1 El enfoque fenomenológico.....	6
1.2.2 Principios de Dienes	7
1.2.3 Sistemas de representación	8
2. Significados de las fracciones	10
2.1 La fracción como medida	10
2.1.1 Utilización de este significado en la enseñanza de las fracciones	10
2.1.2 Características del significado.....	11
2.1.3 Tipos de medidas que involucran fracciones.....	11
2.1.4 Contextos de la fracción como medida.....	12
2.1.5 Sistemas de representación utilizados en la fracción como medida	12
2.2 La fracción como expresión que relaciona la parte con el todo.....	12
2.2.1 Utilización de este significado en la enseñanza de las fracciones	12
2.2.2 Características del significado.....	13
2.2.3 Atributos del concepto de fracción potenciados con en este significado	13
2.2.4 Contextos de la relación parte-todo.....	14
2.2.5 Sistemas de representación utilizados en la relación parte-todo	14
2.3 La fracción como cociente	15
2.3.1 Utilización del significado en la enseñanza de las fracciones	15
2.3.2 Características del significado de la fracción como cociente	15

2.3.3	Técnicas de reparto	15
2.3.4	Contextos del significado cociente	16
2.3.5	Sistemas de representación utilizados en la fracción como cociente...	16
2.4	La fracción como razón.....	17
2.4.1	Utilización de este significado en la enseñanza de las fracciones	17
2.4.2	Características del significado de la fracción como razón	17
2.4.3	Sistemas de representación utilizados en la fracción como razón	18
2.5	La fracción como operador	18
2.5.1	Utilización de este significado en la enseñanza de las fracciones	18
2.5.2	Características del significado de fracción como operador	18
2.5.3	Contextos de las fracciones como operador.....	19
2.5.4	Sistemas de representación utilizados en la fracción como operador..	19
3.	Propuesta didáctica para la enseñanza de la relación parte-todo	20
3.1	Prueba de diagnóstico	21
3.2	Reconocimiento de la unidad, las partes e igualdad de las partes con material manipulativo	21
3.2.1	Actividad de Inicio	21
3.2.2	Actividad de Desarrollo	21
3.2.3	Actividad de Cierre	22
3.3	Diversas representaciones de la fracción y términos que la constituyen	22
3.3.1	Actividad de Inicio	22
3.3.2	Actividad de Desarrollo	23
3.3.3	Actividad de Cierre	24
3.4	Fracciones unitarias, propias e impropias	24
3.4.1	Actividad de inicio	24
3.4.2	Actividad de Desarrollo	24
3.4.3	Actividad de Cierre	25
3.5	Reconstrucción de la unidad.....	26
3.5.1	Actividad de Inicio	26
3.5.2	Actividad de Desarrollo	26
3.5.3	Actividad de Cierre	27
3.6	El Contexto Discreto	27
3.6.1	Actividad de Inicio	27
3.6.2	Actividad de Desarrollo	27
3.6.3	Actividad de Cierre	28
3.7	La recta numérica	28
3.7.1	Actividad de Inicio	28
3.7.2	Actividad de Desarrollo	29
3.7.3	Actividad de Cierre	29
3.8	Relaciones de equivalencia	29
3.8.1	Actividad de Inicio	29
3.8.2	Actividad de Desarrollo	30
3.8.3	Actividad de Cierre	31
3.9	Relaciones de Orden	32
3.9.1	Actividad de Inicio	32
3.9.2	Actividad de Desarrollo	32
3.9.3	Actividad de Cierre	34
4.	Aplicación de la propuesta didáctica.....	35

4.1	Caracterización de la población	35
4.2	Duración de la aplicación	36
4.3	Descripción del desarrollo de la aplicación	39
4.3.1	Bloque 1	39
4.3.2	Sesión 1	40
4.3.3	Sesión 2	41
4.3.4	Sesión 3	42
4.3.5	Bloque 2	42
4.3.6	Sesión 4	43
4.3.7	Sesión 5	44
4.3.8	Bloque 3	45
4.3.9	Sesión 6	45
4.3.10	Sesión 7	46
4.3.11	Sesión 8	46
4.3.12	Sesión 9	46
4.3.13	Sesión 10	47
4.3.14	Sesión 11	47
4.3.15	Sesión 12	48
4.3.16	Sesión 13	48
5.	Análisis de resultados de la aplicación de la propuesta didáctica	50
5.1	Prueba de diagnóstico	50
5.2	Prueba sobre representaciones y clasificación de las fracciones	52
5.3	Prueba sobre reconstrucción de la unidad en el contexto continuo	53
5.4	Prueba sobre las fracciones en el contexto discreto	54
5.5	Prueba sobre representación de fracciones en la recta numérica	55
5.6	Apreciaciones de los estudiantes acerca de las clases	56
6.	Conclusiones y recomendaciones	57
6.1	Conclusiones	57
6.2	Recomendaciones	58
A.	Anexo: Pruebas consideradas para la aplicación de la propuesta didáctica	61
B.	Anexo: Resultados y análisis de la prueba diagnóstica	72
C.	Anexo: Resultados y análisis de la prueba representaciones y clasificación de fracciones	81
D.	Anexo: Resultados y análisis de la prueba reconstrucción de la unidad en el contexto continuo	88
E.	Anexo: Resultados y análisis de la prueba fracciones en el contexto discreto	95
F.	Anexo: Resultados y análisis de la prueba representación de fracciones en la recta numérica	98
	Bibliografía	102

Lista de Figuras

	Pág.
Figura 2-1: Traslaciones entre las representaciones en la relación parte-todo.	15
Figura 3-1: Ejemplos de mosaicos contruidos con figuras iguales.	21
Figura 3-2: Ejemplos de divisiones de figuras en partes iguales.....	24
Figura 3-3: Conteo de fracciones unitarias utilizando diversos sistemas de representación.....	25
Figura 3-4: Ubicación de fracciones en la recta numérica.	29
Figura 3-5: Relaciones de equivalencia de fracciones en el contexto discreto y la recta numérica.	31
Figura 3-6: Representación gráfica del ordenamiento de fracciones heterogéneas con igual numerador.	33
Figura 3-7: Representación gráfica del ordenamiento de fracciones heterogéneas con diferente numerador.	33
Figura 5-1: Categorización de las respuestas dadas por los estudiantes en la prueba de diagnóstico.	51
Figura 5-2: Categorización de las respuestas acertadas dadas por los estudiantes según tipo de representación y clasificación de la fracción.	52
Figura 5-3: Categorización de las respuestas dadas por los estudiantes en la prueba de reconstrucción de la unidad.....	53
Figura 5-4: Categorización de las respuestas dadas por los estudiantes de acuerdo a la relación entre la unidad y sus partes y entre sistemas de representación.	54
Figura 5-5: Categorización de las respuestas dadas por los estudiantes en la prueba representación de fracciones en la recta numérica.....	55
Figura 5-6: Resultados porcentuales de las apreciaciones de los estudiantes con respecto a las clases.	56

Lista de Tablas

	Pág.
Tabla 4-1: Información general de la Institución Educativa Integrado Villa del Pilar.....	35
Tabla 4-2: Características de los estudiantes participes en la aplicación.....	37
Tabla 4-3: Descripción de la aplicación de la propuesta didáctica por sesiones y bloques.....	37

Introducción

Los estándares básicos de competencias en Matemáticas planteados por el Ministerio de Educación Nacional, consideran a las fracciones en los estándares de pensamiento numérico y sistemas numéricos en cuarto, quinto, sexto y séptimo grados, en los cuales los estudiantes deben interpretar las fracciones en diferentes contextos, relacionar las fracciones con la notación decimal y los porcentajes, y utilizar fracciones en la resolución de problemas básicamente.

De acuerdo a esta disposición del MEN, es evidente la importancia que tienen estos números en el estudio de la Aritmética.

Sin embargo, ha sido común encontrar dificultades en el proceso de enseñanza y aprendizaje de las fracciones, lo cual se evidencia en los resultados de las pruebas SABER, en donde se consideran algunos ítems relacionados con este tipo de números tanto en la básica primaria como en secundaria.

Según los resultados de estas pruebas en el año 2009², el 44% de los estudiantes no alcanza los desempeños mínimos establecidos en la evaluación del área de Matemáticas al momento de culminar la básica primaria, el 31% están en el nivel mínimo siendo capaces de utilizar operaciones básicas para solucionar problemas, el 17% están en el nivel satisfactorio en donde además reconocen diferentes maneras de representar una fracción propia en relaciones parte-todo y estiman la probabilidad de un evento para resolver situaciones en contextos de juegos o en acontecimientos cotidianos entre otros aspectos, y solo el 8% de los estudiantes de quinto de primaria se ubica en un nivel avanzado en el cual además de las competencias anteriores demuestran reconocimiento y utilización de la fracción como operador en lo concerniente a aspectos relacionados con las fracciones.

En cuanto a los resultados del grado noveno en estas pruebas SABER 2009, el 26% de los estudiantes se encuentra en un nivel insuficiente, el 52% están en el nivel mínimo de desempeño, el 19% están en el nivel satisfactorio y solo el 3% de los estudiantes demuestran un desempeño sobresaliente en el área.

Adicionalmente, Perera y Valdemoros (2007, p. 210) afirman que investigadores como Kieren, Freudenthal, y Figueras “admiten que las fracciones son uno de los contenidos de las Matemáticas que presentan dificultades para su enseñanza y aprendizaje”.

Malet (2010) afirma que los docentes de educación primaria, secundaria y superior constatan cotidianamente que el concepto de fracción opone intensa resistencia a la comprensión de los estudiantes.

² De acuerdo al Informe SABER 5° y 9° 2009. Resultados Nacionales. Resumen Ejecutivo. 2010. MEN.

De acuerdo a lo anterior, se demuestra la gran necesidad de plantear alternativas que contribuyan con el mejoramiento del proceso de enseñanza y aprendizaje de las fracciones, lo cual ha motivado el desarrollo de este trabajo.

Se pretende iniciar este recorrido mostrando brevemente algunos aspectos relevantes en el proceso de enseñanza-aprendizaje de las fracciones, los cuales serán tenidos en cuenta en todo el desarrollo del trabajo.

De forma breve también se considera una evolución histórica del concepto de fracción en forma cronológica, rescatando aquellos aspectos más significativos de las culturas y autores que contribuyeron con el desarrollo de la fracción.

Posteriormente, se da un acercamiento teórico a los diversos significados de la fracción, los cuales dejan entrever la complejidad del concepto, al considerarse para cada uno de estos significados las características, usos, consideración en los currículos, posibles contextos de enseñanza y sistemas de representación utilizados.

Teniendo en cuenta las fases anteriores, se plantea una propuesta didáctica para la enseñanza de las fracciones considerando la relación parte-todo que constituye el significado de más amplio uso en la enseñanza de la fracción y a partir del cual pueden construirse los demás significados. Esta propuesta contiene actividades de inicio, desarrollo y cierre que corresponden a una secuencia óptima de enseñanza para la formación de conceptos.

En el trabajo se muestra una descripción de la aplicación de la propuesta didáctica en unas sesiones de clase con un grupo de estudiantes del grado séptimo de la Institución Educativa Integrado Villa del Pilar. También se muestra el análisis de los resultados de las pruebas aplicadas que corresponden a un diagnóstico inicial y a pruebas realizadas durante la aplicación de la propuesta.

Finalmente, se presentan las conclusiones y recomendaciones del trabajo.

1. Aspectos históricos de la fracción y consideraciones acerca de su proceso de enseñanza y aprendizaje

1.1 Aspectos históricos del concepto de fracción

“Así como el hombre empezó a contar a partir o con los números naturales, empezó a medir con los números racionales cuya idea fundamental históricamente hablando son las fracciones” (Flores y Morcote, 2001, p. 2).

El término fracción proviene del latín *fractio* que significa romper. Por su parte el verbo *fraccionar* sugiere dividir algo en partes iguales. La relación existente entre los ordinales con las fracciones da lugar a la denominación de éstas.

A continuación, se muestra un recorrido por las culturas y autores que hicieron aportes a la concepción de la fracción de acuerdo a los trabajos realizados por Gairín (2001) y Flores y Morcote (2001).

1.1.1 Las fracciones en los babilonios

Disponían de un sistema posicional sexagesimal para cantidades enteras que permitía realizar extensiones para representar cualquier cantidad no entera.

De esta manera para realizar mediciones los babilonios disponían de una unidad y de múltiplos y submúltiplos sexagesimales de la misma, por lo que el resultado se expresaba mediante cantidades enteras y fracciones sexagesimales.

Este sistema de escritura de números es muy similar a la actual notación decimal, aunque presenta un inconveniente relacionado con la ausencia de un signo para indicar separación entre la parte entera y la no entera, además de la carencia de un símbolo para nombrar las posiciones vacías que corresponderían al actual cero.

Sin embargo, este sistema ha mantenido una utilidad considerable en nuestros sistemas actuales de medidas horarias y de medidas de ángulos.

1.1.2 Las fracciones en los antiguos egipcios

Las fracciones egipcias surgen en el contexto de la resolución de problemas sobre la vida real relacionados con el reparto, es decir, aparecen con un claro significado de cociente.

Estas fracciones son una adaptación del sistema de numeración egipcio a la representación de cantidades no enteras, las cuales se estructuran según un peculiar sistema de numeración para fracciones.

Este sistema permite considerar la fracción como adición de cantidades de magnitud que son particiones enteras proporcionales de la unidad, mediante el empleo casi exclusivo de fracciones unitarias.

Cabe destacar que el significado de las fracciones egipcias como cociente es conceptualmente potente, y de hecho, a pesar de que las operaciones son muy complejas, las fracciones unitarias se continuaron empleando hasta el renacimiento.

1.1.3 Las fracciones en los griegos

Euclides en los libros V, VII y VIII de *Los Elementos*, hace mención a la noción de fracción y sus propiedades, la cual está asociada a la razón entre dos números y no se concebía como otro tipo de número llamado fracción o número racional, sino que se interpretaba como una cierta relación con respecto al tamaño de dos magnitudes del mismo tipo.

Este tipo de conexión entre pares de números tiende a poner el énfasis en los aspectos racionales o teóricos del concepto de número y no en el papel del número como herramienta para el cálculo o para la aproximación en la medida.

La escritura de este tipo de números no fue uniforme, hay quienes escribían la correspondiente palabra para el numerador y un número para el denominador, otros escribían el numerador y duplicaban el denominador (3' 4'' para $3/4$), otras veces se escribía el numerador seguido de la palabra *en parte* y después el denominador.

Pitágoras también reconoce la fracción relacionándola con la música (sonidos armónicos).

Posteriormente, los propios pitagóricos descubrieron que había razones que no se podían expresar por números enteros, lo que significa que las dos cantidades no se podían medir con una unidad común, estas razones son las inconmensurables que los pitagóricos denominaron inexpresables o que no tienen razón, las cuales constituyen los números irracionales en la denominación actual.

Por su parte, los astrónomos griegos utilizaron el sistema sexagesimal para sus cálculos, posiblemente importado de Babilonia. El uso de las fracciones sexagesimales les permitía hacer divisiones más fácilmente que con las fracciones unitarias, así Ptolomeo subdividía sus grados en 60 *partes minutae primae* y cada uno de ellos en 60 *partes minutae secundae*.

Sin embargo, el uso de expresiones no enteras en terrenos científicos no tenía significado para el hombre práctico que necesitaba utilizar las fracciones en situaciones

cotidianas, sobre todo de tipo comercial en las que se consideraban la expresión de partes de la unidad monetaria o de una medida. De este modo, se encuentra en los escritos de Herón recurrencia a las fracciones unitarias para representar las fracciones comunes.

En la Grecia Clásica conviven entonces entidades numéricas con significados diferentes y representadas de forma distinta, estos entes numéricos representan cantidades que resultan de medir o de comparar magnitudes.

1.1.4 Las fracciones en los hindúes y árabes

Aceptado el legado hindú y árabe con nuestro sistema de numeración indoarábigo, se conoce que los hindúes en el siglo VI notaban a las fracciones con numerador encima del denominador pero sin raya de fracción y dieron continuidad a la descomposición de unidades fraccionarias.

Los árabes son los que introducen las líneas vertical y horizontal para notar fracciones. Además, en los árabes aparece el significado de fracción como razón en el sentido de relación o proporción de cambio entre valores de monedas diferentes.

1.1.5 Las fracciones decimales

Así como en Mesopotamia un sistema de medidas básicamente sexagesimal condujo a la numeración sexagesimal, en China la adopción de una idea directriz decimal en los pesos y medidas dio como resultado el que se impusiera el hábito decimal en el manejo de las fracciones, que puede rastrearse hasta el siglo XIV a.C.

Sin embargo, las fracciones decimales no fueron admitidas de inmediato a pesar de que el sistema de numeración decimal, el sistema árabe-hindú, ofrecía ventajas incuestionables para su utilización en las fracciones. Pasaron más de 1000 años hasta incorporar las fracciones decimales para sustituir a las fracciones unitarias o a las fracciones sexagesimales.

En el siglo X se encuentran en las obras del matemático árabe Al-Uglidisi nociones sobre fracciones decimales.

Las primeras apariciones de las fracciones decimales en Europa se encuentran en el siglo XIV en trabajos como los de Jean de Meurs que las utilizó para la extracción de raíces de números.

También aparecen las fracciones decimales en la regla de la división de números de la forma $a \cdot 10^n$ atribuida por Cardan a Regiomontanus.

El reconocimiento más generalizado acerca de la invención de la notación decimal, a pesar de que no fue ni el inventor ni el primero que utilizó las fracciones decimales, es hacia el científico neerlandés Simón Stevin que publicó en 1585 el libro *De Thiende (La Décima)* en el cual se dan definiciones acerca de décima, número decimal, entre otros.

Stevin no escribía las expresiones decimales en forma de fracción con potencias de 10 en el denominador, sino que escribía en un círculo, colocado encima o a continuación de

cada dígito, la correspondiente potencia de 10, el exponente de la potencia de 10 que debería llevar el correspondiente divisor.

La notación de Stevin desaparece cuando Napier (1619) utiliza un punto decimal para separar la parte entera de la fraccionaria, punto decimal que se mantuvo en Inglaterra, pero que en otros muchos países se sustituyó por una coma.

1.1.6 Las fracciones comunes actuales

Fibonacci, Viete y Descartes, entre otros, requieren de las fracciones en sus diferentes estudios llegando a situaciones tales como: “para sumar dos segmentos, llamo al uno a y al otro b y escribiré a/b para indicar la división de a entre b ” (Flores y Morcote, 2001, p. 3).

La barra de fracción era utilizada regularmente por Fibonacci, pero su uso no se generaliza hasta finales del siglo XVI. La barra oblicua la introdujo de Morgan en 1845.

Hacia 1801 Gauss fundamenta la Teoría de Números, relegando la fracción escasamente a una visión intuicionista. Con Gauss se considera que el cuerpo de los Números Racionales se establece como teoría estructural que se conoce hoy día.

En la actualidad, la herencia cultural y científica de otras culturas, ha culminado con una práctica que permite simbolizar las fracciones de formas diferentes. Las notaciones más frecuentes son a/b o $\frac{a}{b}$, pero también se utiliza el signo de porcentaje (%), o los dos puntos (:) para las escalas de mapas o planos.

1.2 Aspectos a considerar en el proceso de enseñanza y aprendizaje de las fracciones

1.2.1 El enfoque fenomenológico

De acuerdo a las sugerencias dadas para la enseñanza de las fracciones por parte de Freudenthal en su propuesta fenomenológica didáctica, y considerando que la fenomenología de un objeto matemático es “la descripción del objeto en relación con los fenómenos de los cuales emerge o a los cuales subyace: que fenómenos puede organizar el objeto, a cuales se extiende, como actúa sobre ellos y que poder nos confiere sobre esos fenómenos” (Malet, 2010, p. 2).

Es pertinente al hacer un análisis fenomenológico del concepto de fracción, según Malet (2010, p. 3):

Atender a la pluralidad de significados e interpretaciones que las fracciones admiten y adquieren, según el contexto en que se las emplee. El concepto de fracción es la síntesis compleja de tales significados e interpretaciones, por lo que tiene el status de un megaconcepto.

En este megaconcepto de fracción se reconocen dos dimensiones:

- Una dimensión dinámica, que hace referencia a acciones como fraccionar (cortar en partes iguales y seleccionar algunas), medir (comparar una dimensión de un objeto con un referente o unidad), comparar o relacionar cantidades, operar (aplicar un operador de la forma a/b sobre una situación), o dividir dos números naturales repartiendo equitativamente.
- Una dimensión estática, que hace referencia a los productos o resultados de aquellas acciones: la relación entre las partes y el todo fraccionado, la medida, el índice o razón o tasa de comparación entre cantidades, el resultado de la operación.

Estas dimensiones se ponen en juego en los significados de las fracciones.

1.2.2 Principios de Dienes

En todo proceso de enseñanza de las Matemáticas Z. P. Dienes (citado en Blanco, 1991) considera necesario tener en cuenta cuatro principios que ayudarían a los estudiantes en la comprensión de los conceptos matemáticos: Principio dinámico, Principio de constructividad, Principio de variabilidad matemática y Principio de concretización múltiple (también llamado de variabilidad perceptiva).

- *Principio dinámico*

La actividad es la pieza básica en la formación de un concepto. Esta actividad se concreta en tres tipos de ejercicios:

Ejercicios preliminares: Comienzo (sin conocer finalidad).

Ejercicios estructurados: Con orientación del docente.

Ejercicios de prácticas: Repaso del concepto una vez aprendido.

Estos ejercicios están relacionados con cada una de las fases o etapas del desarrollo cognoscitivo planteadas por Piaget. Veamos:

Los ejercicios preliminares corresponden a la fase del juego en donde se actúa de forma inconsciente, jugando con los elementos del concepto mucho antes de entender el significado o su utilidad.

Los ejercicios estructurados corresponden a la fase estructural en la cual se descubre que las experiencias tienen sentido, es decir, pueden encadenarse en un todo significativo.

Los ejercicios de prácticas corresponden a la fase de comprensión, en la cual se fija en

la mente una clara imagen y el estudiante siente que comprende.

Además, en los ejercicios propuestos en este principio dinámico debe considerarse inicialmente la introducción de materiales concretos hasta llegar al uso de símbolos numéricos.

▪ *Principio de constructividad*

La construcción precede siempre al análisis del concepto, teniendo siempre en cuenta el nivel de maduración de los estudiantes.

Hay que señalar que la construcción no se refiere a la construcción física con algún material, que debe hacerse si es posible. La referencia a la construcción conceptual tiene relación con las variables del concepto y el proceso de adquisición de los mismos.

Lo anterior se va logrando partiendo de la intuición hasta llegar a la demostración.

▪ *Principio de variabilidad matemática*

Los conceptos que encierran más de una variable deben ser estudiados mediante experiencias que impliquen el mayor número posible de aquellas.

Comparando las diferentes construcciones realizadas se puede ver lo que hay de invariante en ellas, que será lo que interese para la formulación del concepto.

▪ *Principio de concretización múltiple o de variabilidad perceptiva*

Tanto para que puedan manifestarse las diferencias individuales en la formación de los conceptos, como para que los estudiantes vayan adquiriendo el sentido matemático de abstracción, la misma estructura conceptual deberá ser presentada en tantas formas perceptivas como sea posible.

1.2.3 Sistemas de representación

Entre varias alternativas conceptuales similares pero no equivalentes: símbolos (Skemp), sistema matemático de signos (Kieran y Filloy), sistemas de notación (Kaput), sistema de registros semióticos (Duval), la comunidad se decantó por dar prioridad al uso del término representaciones. Las representaciones matemáticas se han entendido, como todas aquellas herramientas (signos o gráficos) que hacen presentes los conceptos y procedimientos matemáticos y con las cuales los sujetos particulares abordan e interactúan con el conocimiento matemático, es decir, registran y comunican su conocimiento sobre las matemáticas. (Rico, 2009, p. 3).

Existe la necesidad de emplear diversas representaciones para captar en toda su complejidad los conceptos y estructuras matemáticas, como ponen de manifiesto investigadores como Castro, Goldin, Janvier, Kaput y Duval (citados por Rico, 2009, Penalva y Torregrosa, 2001).

Además, los objetos matemáticos se develan a través del conocimiento de sus características, según Carulla y Gómez (2001), por medio del estudio de sus diversas representaciones, ya que los objetos matemáticos en si no son visibles.

“Los diferentes sistemas utilizados como sistemas de representación en matemáticas son: las figuras en concretos que permiten manipulaciones, las gráficas, la escritura simbólica (sistemas de escritura de números, escritura algebraica, lenguajes formales) e inevitablemente el lenguaje natural” (Penalva y Torregrosa, 2001, p. 4).

2. Significados de las fracciones

A lo largo de la historia se han ido forjando diferentes significados sobre las fracciones, significados que algunos autores denominan constructos, de acuerdo a Kieren (citado en Gairín, 2001), dichos constructos deben entenderse como las distintas interpretaciones de las aprehensiones de objetos del mundo real a objetos mentales, incluyendo también las creaciones mentales y actos físicos que están implicados en su génesis.

Los diferentes significados de la fracción que citan autores como Behr, Lesh y Kieren son los de parte todo, cociente, razón, operador y medida (Gairín, 2001).

A continuación, se realiza una descripción de estos significados de las fracciones considerando el orden cronológico en el cual estos se han desarrollado a lo largo de la historia, el cual fue descrito con anterioridad en los aspectos históricos del concepto de fracción.

Esta descripción tiene en cuenta aspectos que el autor considera los más relevantes en el estudio de cada significado para potenciar la enseñanza del concepto de fracción, los cuales incluyen la utilización del significado en la enseñanza de las fracciones, las características de estos, los contextos desde los cuales se conciben y los diferentes sistemas de representación con los cuales se expresan estos significados, entre otros.

2.1 La fracción como medida

2.1.1 Utilización de este significado en la enseñanza de las fracciones

Según Gairín (2001) este significado ocupa un lugar secundario en los textos escolares debido a las fuertes exigencias que existen para la construcción del concepto de fracción por este camino.

En el caso de que se haga mención a este significado en la enseñanza de las fracciones, se hace después de que se han presentado otros significados y se muestra al estudiante como un acto ya finalizado, de este modo el trabajo de este se limita al de mero observador que debe realizar dos recuentos y relacionar sus resultados de acuerdo con unas normas predeterminadas.

2.1.2 Características del significado

De acuerdo a Perera y Valdemoros (2007), la fracción como medida es reconocida por Kieren como la asignación de un número a una región o a una magnitud (de una, dos o tres dimensiones), producto de la partición equitativa de una unidad.

Según Gairín (2001) mediante esta interpretación se da la primera aproximación a la noción de número racional considerando el recorrido histórico del concepto.

2.1.3 Tipos de medidas que involucran fracciones

Teniendo en cuenta la finalidad de la medida, pueden presentarse dos situaciones diferenciadas:

- *Medir utilizando múltiplos y submúltiplos de la unidad*

La medida de cantidades de magnitudes como la longitud se expresan en función de la unidad básica (el metro), sus múltiplos (el decámetro, el hectómetro, el kilómetro) y sus submúltiplos (el decímetro, el centímetro, el milímetro), siendo entera la medida para cada una de estas unidades.

Si se quiere expresar solo en la unidad de medida básica cantidades que se encuentran en diversas unidades, esta situación se simboliza con una suma de números enteros y fracciones decimales.

Por ejemplo, si se desea expresar 3 km, 5 Hm, 4 Dm, 9 m, 7 dm, 2 cm y 8 mm en metros, se tendría: $3000\text{ m} + 500\text{ m} + 40\text{ m} + 9\text{ m} + 7/10\text{ m} + 2/100\text{ m} + 8/1000\text{ m}$.

Para la situación anterior también puede utilizarse la expresión decimal 3549,728 m, la cual resulta de la extensión del sistema de numeración posicional con base igual a la relación entre dos órdenes consecutivos de unidades de medida, lo cual históricamente se encuentra relacionado con las notaciones del sistema sexagesimal y sistema decimal de las culturas babilonia y china respectivamente.

- *Medir haciendo comparaciones con la unidad*

La medida de magnitudes está referida inicialmente a la magnitud longitud, ya que esta según Escolano y Gairín (2005, p. 12) “por su carácter unidimensional facilita la percepción de la cantidad y la construcción de unidades de longitud conocida su representación fraccionaria”.

Mediante esta magnitud se busca medir la longitud de un segmento AB tomando como unidad de medida la longitud de otro segmento CD. De este modo la fracción a/b indica que el segmento AB tiene de longitud a veces la unidad de medida que resulta de dividir el segmento CD en b partes iguales.

La expresión a/b indica que el fraccionamiento hay que hacerlo tanto en el segmento a medir como en la unidad de medida.

Una vez familiarizados con la magnitud longitud y la notación fraccionaria, podría proponerse el trabajo con la magnitud superficie que fortalece el significado de fracción como medida de figuras con cantidades de magnitud con formas distintas.

2.1.4 Contextos de la fracción como medida

Los procesos de medida que se presentan en este significado conllevan la idea de medida aproximada de una magnitud continua. La representación del resultado de la medida de forma exacta exigiría la utilización de los números reales.

En el caso de utilizar la medida de contar en conjuntos discretos se puede provocar en el estudiante la sensación de que la medida se convierte en la razón entre cardinales.

2.1.5 Sistemas de representación utilizados en la fracción como medida

La representación gráfica sustituye al proceso real de medida, pues lo esencial del proceso no es determinar la medida de un segmento con respecto al sistema métrico decimal, sino que hay que hacerlo con respecto a un segmento unidad del que se desconoce su longitud en términos de unidades del sistema convencional.

En consecuencia, hay un proceso de subdivisión de la unidad en un número de partes iguales que depende de la longitud del segmento a medir, de tal manera que el estudiante no realiza una medida real, sino que debe resolver visualmente el recuento de segmentos diferenciados que aparecen en la unidad y en el segmento a medir.

En la representación gráfica deben hacerse interpretaciones de aquellos aspectos que representan el segmento a medir, la unidad de medida, las partes que deben hacerse tanto en la unidad de medida como en el segmento a medir y las relaciones que hay entre ambos.

Se deben hacer las traslaciones correspondientes de la representación gráfica a las representaciones en palabras del lenguaje natural y a la simbólica.

2.2 La fracción como expresión que relaciona la parte con el todo

2.2.1 Utilización de este significado en la enseñanza de las fracciones

Este significado suele ser el de más amplio uso en la enseñanza de las fracciones en nuestro medio (de acuerdo a libros de texto que se utilizan habitualmente como son las Matemáticas de Santillana y los Módulos de aprendizaje de Escuela Nueva o Escuela Activa Urbana), también se nota alguna tendencia a establecer secuencias didácticas

para abordar este significado en el país, lo cual se observa en los trabajos de Becerra, en el de Martínez y Lascano (2001), en Cabas y López, en Vallejo y Tamayo (2008).

Según Escolano y Gairín (2005), sobre este significado recae casi que exclusivamente la enseñanza de las fracciones en el sistema educativo español.

Martín, Maz y Salazar (2011) concluyen en su investigación, que en la enseñanza de las fracciones, en los profesores de primaria en Chile, predomina la interpretación parte todo en un 70% de los casos, utilizando modelos de áreas, generalmente mediante el uso de figuras geométricas como el rectángulo, el círculo y el cuadrado.

2.2.2 Características del significado

Kieren (citado en Perera y Valdemoros, 2007) considera a esta relación parte todo como la base para la construcción de otros significados, y la considera como un todo (continuo o discreto) subdividido en partes congruentes, indicando como fundamental la relación que existe entre el todo y un número designado de partes.

Con el significado parte todo se establece una relación simbólica entre dos números naturales a partir de una representación gráfica, desde la cual se formulan definiciones sobre los componentes de la fracción: el denominador indica las partes que existen y el numerador las partes que se consideran (Escolano y Gairín, 2005).

2.2.3 Atributos del concepto de fracción potenciados con en este significado

La noción de fracción en su aspecto parte todo requiere del dominio de algunas habilidades para el reconocimiento de los siguientes atributos de la fracción planteados por Piaget y ampliados por Payne (citados en Llinares y Sánchez, 1988, p.80-81):

1. Un todo está compuesto por elementos separables. Una región o superficie es vista como divisible.
2. La separación se puede realizar en un número determinado de partes. El “todo” se puede dividir en el número de partes pedido.
3. Las subdivisiones cubren el todo.
4. El número de partes no coincide con el número de cortes.
5. Los trozos (partes) son iguales. Las partes tienen que ser del mismo tamaño (congruentes).
6. Las partes también se pueden considerar como totalidad.
7. El “todo” se conserva.
8. Control simbólico de las fracciones, es decir, el manejo de los símbolos relacionados a las fracciones.
9. Las relaciones parte todo en contextos continuos y discretos.

10. Las fracciones mayores que la unidad.
11. Subdivisiones equivalentes.

2.2.4 Contextos de la relación parte-todo

Llinares y Sánchez (1988) sugieren para el diseño de secuencias de enseñanza tener en cuenta que no todos los contextos presentan el mismo grado de dificultad, por tal razón, se debe optar inicialmente por un todo en un contexto continuo, utilizar en una fase intermedia elementos discretos y finalizar con la recta numérica que pertenece a un nivel más abstracto.

Malet (2010) afirma que el todo es de naturaleza continua cuando es medible, es decir, cuando se puede medir una de sus dimensiones (longitud, área, volumen, entre otras), y es de naturaleza discreta cuando es contable, es decir, cuando es un conjunto cuyos elementos se pueden contar.

2.2.5 Sistemas de representación utilizados en la relación parte-todo

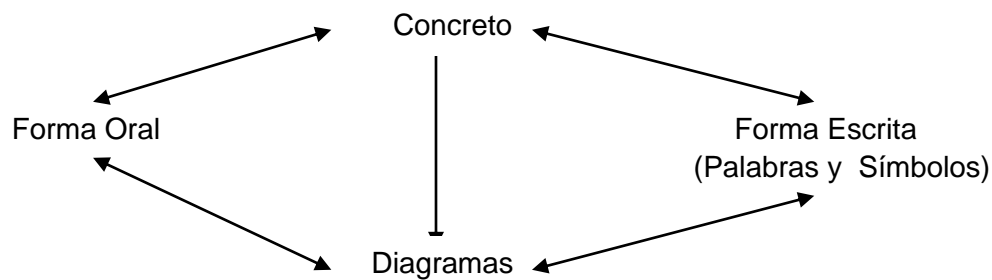
Llinares y Sánchez (1988) proponen trabajar inicialmente con objetos concretos realizando traslaciones de este tipo de representación a las representaciones oral y escrita, de tal forma que se inicie la introducción del significado realizando actividades con material manipulativo y se hagan traslaciones a través de este hacia representaciones orales y escritas utilizando palabras y símbolos, de igual forma se pretende que este proceso funcione también en dirección opuesta, es decir, a través del planteamiento de una representación oral y escrita de fracciones en el significado parte todo, los estudiantes realicen la traslación a una representación concreta con material manipulativo.

Seguidamente, estas traslaciones entre las representaciones orales, escritas y concretas se realizan con representaciones gráficas a través de la utilización de diagramas y dibujos.

Una representación especial del tipo diagrama, lo constituye la recta numérica, con este tipo de representación que pertenece a un nivel más abstracto se culminaría esta fase de enseñanza con el significado parte todo.

En la Figura 2-1 se esquematizan las traslaciones que se realizan entre las representaciones utilizadas en la relación parte todo.

Figura 2-1: Traslaciones entre las representaciones en la relación parte-todo.



Fuente: Adaptado de Llinares y Sánchez (1988, p. 97)

2.3 La fracción como cociente

2.3.1 Utilización del significado en la enseñanza de las fracciones

La adquisición del significado de fracción como cociente tiene un tratamiento poco exhaustivo en los textos escolares según señala Gairín (2001), y más bien hace presencia en estos por necesidades de secuenciación de los contenidos, para poder dar justificación a la notación decimal de las fracciones ordinarias.

2.3.2 Características del significado de la fracción como cociente

“Cuando una fracción se relaciona directamente con la operación división sugerida por ella, estamos dándole una interpretación de cociente. Un cociente de dos números.” (Flores y Morcote, 2001, p. 5).

Kieren (citado en Flores y Morcote, 2001) señala que para el estudiante que está aprendiendo fracciones, el dividir una unidad en cuatro partes y coger tres (relación parte todo) resulta ser un problema diferente del hecho de dividir tres unidades entre cuatro personas (situación de reparto), aunque la porción resultante sea del mismo tamaño ($3/4$).

La representación más general de la fracción de la forma a/b conduce a la idea inmediata de cociente de dos números: “ a unidades en b partes iguales” con lo cual aparece la noción de reparto en cantidades iguales.

2.3.3 Técnicas de reparto

Gairín (2001) propone dos técnicas de reparto

- *Reparto en varias fases*

Consiste en asignarle a cada individuo una parte de unidad de un tamaño determinado y con lo que queda por repartir se repite el proceso hasta agotar lo que se pretende

repartir. Por lo tanto, si el reparto se hace en varias fases surge la representación de las cantidades correspondientes a cada individuo como una suma de partes alícuotas de la unidad de tamaño diferentes, como una suma de fracciones unitarias distintas.

▪ *Reparto en una sola fase*

Consiste en fraccionar cada una de las a unidades en b partes iguales y cada individuo recibe una parte de cada una de las a unidades, es decir, a cada una de los individuos que participan en la partición le corresponden a partes de tamaño $1/b$ de unidad.

Si el reparto se hace en una sola fase la fracción aparece asociada a la noción de cociente del numerador entre el denominador, cuando dicho cociente no es entero.

2.3.4 Contextos del significado cociente

En el contexto continuo cuando se consideran este tipo de magnitudes hay que tener presente que esta exigencia se concreta en que las partes finales sean iguales, lo que no se traduce en que inicialmente cada figura se haya fraccionado en partes iguales.

En el contexto discreto, la igualdad de las partes se traducirá en la igualdad de conjuntos con igual número de objetos, lo cual se resuelve por cardinalidad. En cuanto a la construcción de las partes, no se presentan dificultades si a es múltiplo de b , en este caso la construcción de las partes se resuelve por división entera.

Sin embargo, hay dificultades en el caso de que a no sea múltiplo de b , ya que toca hacer particiones de algunos objetos del conjunto, lo que daría lugar a la necesidad de igualdad entre las partes de figuras geométricas por las que se han representado los objetos. Además, existe otra dificultad si los objetos a repartir son distinguibles, es decir, no son idénticos, pues el reparto no admite la formación de subconjuntos, sino el fraccionamiento de los objetos.

2.3.5 Sistemas de representación utilizados en la fracción como cociente

Parte del conocimiento que se imparte asociado a situaciones de reparto se realiza por medio de representaciones gráficas que sustituyen en gran parte la realización del reparto con objetos reales.

Además, se realizan continuamente traslaciones entre las representaciones gráficas y simbólicas haciendo traducciones entre dos números (las unidades a repartir y las partes que se deben hacer).

En estas representaciones, el estudiante debe saber interpretar aquellos aspectos que representan las unidades a repartir, las partes que deben hacerse, las relaciones que hay entre ambas y el resultado del reparto.

2.4 La fracción como razón

2.4.1 Utilización de este significado en la enseñanza de las fracciones

Según Gairín (2001) la ausencia en los textos escolares de este significado podría justificarse por las exigencias que se demandan para su construcción, como son la consideración de la noción de razón, en la cual se debe tener en cuenta que en la fracción a/b , cualquier cambio en a producirá un cambio en b , si existe una determinada relación entre a y b . Además, se debe considerar la equivalencia de fracciones como invariante de la relación entre las cantidades, de tal manera que se conciba el mantenimiento de la proporción con afectación a la cantidad más no a la relación.

Adicionalmente, puede agregarse a lo anterior que las demandas curriculares de la instrucción sobre la proporcionalidad han permitido alejar a la razón de las fracciones y otorgarles un tratamiento diferenciado.

De acuerdo a Gairín (2001), a pesar de que la razón y la proporción son tópicos adecuados para aplicar las fracciones a la resolución de problemas, desde el primer cuarto del siglo XX los manuales escolares presentan un estudio separado de las fracciones y de las razones y proporciones. Esta realidad no responde al desarrollo histórico, ni está justificada didácticamente, más bien responde a la idea de mantener la tradición de quienes, a principio del siglo XX, decidieron tratar separadamente teoría y práctica, y en consecuencia, las razones y proporciones se alejaron de las fracciones.

2.4.2 Características del significado de la fracción como razón

Flores y Morcote (2001, p. 5) al respecto de este significado plantean:

Si la fracción se usa para mostrar la relación entre dos cantidades de determinada magnitud, es decir, se establece un índice de comparación entre esas partes, se habla de la fracción como razón. En estos casos no existe una unidad, un todo que permita ver la fracción. Se asocia esta interpretación a la relación parte- parte y a la relación conjunto a conjunto.

Cuando hay una relación entre a y b (una razón) todo cambio en a producirá un cambio en b . Algunas de las situaciones donde se presenta este uso de las fracciones están asociadas a mezclas y aleaciones, comparaciones, escalas de mapas y planos, recetas de cocina, entre otras.

Dos de las formas más expeditas de ver la fracción como razón están en la probabilidad y en los porcentajes. Si se considera la razón como una forma de comparar, precisamente la probabilidad es una manera de comparación todo-todo (casos favorables vs. casos posibles). Los porcentajes también se asocian a una comparación parte-todo, pero vistos como relaciones entre conjuntos.

Toda razón entre dos cantidades determina una proporcionalidad entre las cantidades de la misma magnitud.

En la fracción a/b no existe fraccionamiento.

En a/b no hay exigencias en las relaciones de orden entre a y b , de manera que a puede ser mayor, menor o igual que b .

2.4.3 Sistemas de representación utilizados en la fracción como razón

Para este tipo de significado las representaciones gráficas no son esenciales, estas pueden ser fácilmente sustituidas por representaciones mentales.

En cuanto al trabajo con la representación simbólica se debe saber interpretar aquellos aspectos que representan los conjuntos a relacionar, así como las cantidades de cada conjunto que se comparan.

2.5 La fracción como operador

2.5.1 Utilización de este significado en la enseñanza de las fracciones

A pesar de que Oliveras (citado en Gairín, 2001) afirma en su trabajo que los conocimientos personales de los estudiantes no presentan diferencias significativas al potenciar la fracción desde el significado de operador o desde la relación parte-todo, si es atribuible un mayor grado de complejidad y dificultad al significado operador.

Esta razón sería suficiente para que en gran parte de los textos escolares no se dé prioridad a la enseñanza de la fracción como operador, y más bien este se muestre por necesidades de secuenciación de los contenidos como en el cálculo de la fracción de un número, es decir, como un tema que sirve para la resolución de problemas.

2.5.2 Características del significado de fracción como operador

De acuerdo a Kieren (citado en Perera y Valdemoros, 2007) el papel de la fracción como operador es la de transformador multiplicativo de un conjunto hacia otro conjunto equivalente. Esta transformación se puede pensar como la amplificación o la reducción de una figura geométrica en otra figura a/b veces más grande o a/b veces menor. Este significado puede presentarse con números o con cantidades de magnitud.

Debido entonces a que la fracción a/b actúa como función transformadora de un número o una figura, esto implica que hay que considerarla como una única entidad más que como un par de números naturales.

En la fracción a/b cada uno de los valores tiene distintas implicaciones en el resultado final, las cuales son multiplicar por a y dividir por b . Además, no hay exigencias en las relaciones de orden entre a y b , de manera que a puede ser mayor, menor o igual que b .

Se requiere la realización de traducciones entre los términos de la fracción, de un número o una cantidad iniciales, a otro número o cantidad finales.

En la fracción a/b no existe el fraccionamiento de la unidad.

2.5.3 Contextos de las fracciones como operador

En contextos continuos la fracción a/b actúa como reductor o ampliador proporcional del objeto sobre el que se aplica.

De acuerdo a Kieren (citado en Gairín, 2001) el operador a/b conecta con la idea de transformaciones espaciales de tamaño, por cuanto su actuación produce una dilatación y una contracción de la figura inicial.

En contextos discretos la fracción a/b actúa sobre un conjunto de objetos para transformarlo en otro conjunto de objetos iguales pero con a/b veces elementos.

2.5.4 Sistemas de representación utilizados en la fracción como operador

Cuando se utilizan números sin medida se trabaja con representaciones simbólicas, pero si se utilizan magnitudes pueden utilizarse representaciones gráficas.

Según Gairín (2001) en la representación simbólica el estudiante tiene que saber interpretar aquellos aspectos que representan los conjuntos a relacionar, los elementos que se relacionan y la relación que se establece entre ellos.

3. Propuesta didáctica para la enseñanza de la relación parte-todo

Teniendo en cuenta que la relación parte-todo ha sido el significado de mayor divulgación en el ámbito escolar en la enseñanza de las fracciones, y considerando que a partir de este significado tradicionalmente se han desplegado los demás por ser según Llinares y Sánchez (1988) una de las interpretaciones más intuitivas en los estudiantes y generadora de lenguaje y símbolos, se considera pertinente la utilización de este significado en la secuencia didáctica a aplicar en un grupo de estudiantes de grado séptimo que ya han visto temáticas relacionadas con las fracciones al menos durante tres grados anteriores.

Por esta razón, se pretende contribuir con esta secuencia didáctica a una mejor comprensión del concepto de fracción sin énfasis en la operatividad, utilizando diversos contextos y representaciones para tratar de dar sentido a los usos de estos números que hacen habitualmente los estudiantes con algunas dificultades.

Cabe anotar que sería ideal potenciar la enseñanza de las fracciones considerando los cinco significados descritos, para de esta forma aprovechar los aportes de cada uno a la conceptualización de la fracción y superar las dificultades que son inherentes a cada significado.

Sin embargo, autores como Escolano y Gairín (2005), Llinares y Sánchez (1988), Martínez y Lascano (2001) y Perera y Valdemoros (2007), consideran que la enseñanza simultánea de estos significados llevaría a la confusión de los estudiantes y proponen hacerlo de forma secuencial durante el desarrollo de al menos tres años escolares, comenzando con el significado de la fracción como medida para hacer el primer acercamiento al concepto y finalizar con el significado de razón para vincular la idea de proporcionalidad.

Esta secuencia didáctica se realiza teniendo en cuenta características, atributos, contextos y sistemas de representación descritos para la relación parte-todo.

Además, se desarrolla considerando unos momentos o fases de cada clase que corresponden al inicio, desarrollo y cierre, los cuales corresponden con los momentos metodológicos del modelo pedagógico de Escuela Activa Urbana.

3.1 Prueba de diagnóstico

Se aplica un cuestionario exploratorio para identificar los conocimientos que tienen los estudiantes acerca de las fracciones, considerando sus diversos significados y representaciones.

A pesar de que esta secuencia didáctica se basa en la relación parte-todo, interesa en este diagnóstico determinar la concepción global que tienen los estudiantes de las fracciones.

3.2 Reconocimiento de la unidad, las partes e igualdad de las partes con material manipulativo

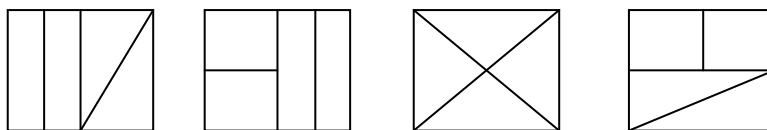
3.2.1 Actividad de Inicio

- *Construcción de mosaicos con igual tamaño*

Previamente el docente divide rectángulos en cuatro partes iguales en área, de tal forma que cada mosaico se forme con figuras distintas (rectángulos, cuadrados, triángulos).

Se entrega a cada estudiante una de las partes y se les pide que entre todos formen rectángulos con las partes entregadas, de tal manera que los rectángulos resultantes sean iguales entre sí. En la Figura 3-1 se dan algunos posibles ejemplos.

Figura 3-1: Ejemplos de mosaicos construidos con figuras iguales.



3.2.2 Actividad de Desarrollo

- *Socialización de los mosaicos construidos*

Se plantean las siguientes preguntas:

¿Cómo está formado cada rectángulo?

¿Por qué son iguales los mosaicos construidos?

¿Cómo se puede saber si son iguales entre si las partes que conforman los mosaicos?

¿Podría considerarse cada rectángulo formado como una unidad?

Las respuestas dadas por los estudiantes a estos interrogantes pueden ir develando la idea de Unidad con ayuda del docente, así como la identificación de partes constituyentes que forman un todo, siendo iguales estas entre sí.

▪ *División de la unidad en partes iguales haciendo dobleces*

Mediante la utilización de hojas, consideradas como unidades, hacer dobleces para dividir la unidad en dos, cuatro, ocho ó más partes iguales.

Socializar resultados con el objetivo de identificar que pueden hacerse iguales particiones de la unidad haciendo diversos dobleces obteniendo formas diferentes, con lo cual se refuerza la noción de igualdad en cuanto a área o tamaño con respecto a la idea de congruencia que involucra igualdad tanto en tamaño como en forma. Además, es la oportunidad para indicar que la cantidad de dobleces o pliegues no coincide con el número de partes. Y que la unidad puede dividirse en n cantidad de partes.

3.2.3 Actividad de Cierre

Se recogen oralmente las apreciaciones que los estudiantes tienen sobre la actividad con los mosaicos, con los dobleces de hojas y el trabajo en equipo.

Se muestra a los estudiantes que la cantidad de partes en que se divide la unidad la conforman en su totalidad si se consideran todas ellas, esto a manera de conclusión de la unidad y las partes aprovechando las apreciaciones que ellos tienen de las actividades realizadas.

Se realiza por escrito una evaluación de las clases sobre el tema hasta el momento para conocer las apreciaciones de los estudiantes al respecto mediante la formulación de la pregunta:

¿Cómo me han parecido las clases de Matemáticas durante la última semana? ¿Por qué?

3.3 Diversas representaciones de la fracción y términos que la constituyen

3.3.1 Actividad de Inicio

▪ *División de la unidad en partes iguales haciendo cortes*

Mediante la utilización de hojas y tijeras, partir la hoja en dos, tres, cuatro ó más partes iguales.

Recordando que la hoja es la unidad se deben juntar todas las partes para formarla de nuevo (dos partes de dos, tres de tres, entre otros), y si se toman solo algunas partes de la unidad estaremos considerando una parte de dos, dos de tres, tres de cuatro, entre otros.

3.3.2 Actividad de Desarrollo

- *Socialización de las particiones realizadas de la unidad en la actividad de inicio anterior.*

Cada estudiante comparte oralmente la partición que hizo de la unidad contando en cuantas partes la dividió y mostrando las partes resultantes, además se le pregunta: ¿Son las partes iguales?

Se invita a cada estudiante para que represente en el tablero de forma gráfica la unidad con la respectiva partición que realizó y sombree las partes correspondientes cuando se toman solo una, dos, tres, ó más partes del total de partes en que se dividió la unidad. Además se le pide hacer la traslación de esta representación gráfica a una representación escrita utilizando palabras para indicar las partes que ha tomado del total (una de cuatro, dos de cinco, tres de ocho, entre otros).

Esta actividad sugiere el cambio de la representación concreta a la expresión oral y a las representaciones gráfica y escrita mediante palabras.

En este punto el docente indica que para representar de forma escrita estas situaciones anteriores, además de las palabras, se pueden utilizar expresiones simbólicas de la forma a/b , donde a indica el número de partes que se toman de la unidad y b la cantidad de partes en total en que se dividió la unidad.

- *Lectura de fracciones de la forma a/b*

La lectura de estas expresiones simbólicas con denominadores menores que once sería medio, tercio, cuarto y a partir de este hasta 10 se utilizan ordinales. Desde 11 se utiliza la terminación “avos” (onceavos, doceavos, treceavos, entre otros).

Se proponen algunos ejercicios para escribir mediante el lenguaje natural fracciones expresadas simbólicamente.

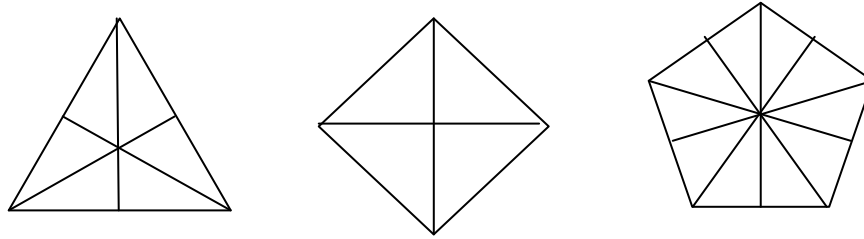
- *Traslaciones entre diversas representaciones*

Utilizando lápiz y papel, se pide a los estudiantes representar las fracciones dadas en el tablero (escritas en palabras ó simbólicamente), haciendo una gráfica y coloreando o sombreado las partes que se indican del total de partes en que se divide la unidad.

De igual forma, se realiza el ejercicio en el sentido opuesto, los estudiantes realizan un dibujo que represente una fracción y después lo socializan de forma oral y escrita.

Coxford (1975, citado en Llinares y Sánchez, 1988, p. 100), sugiere orientar a los estudiantes mediante las preguntas: ¿Cuál es la unidad?, ¿Cuántas partes hay en la unidad?, ¿Son las partes del mismo tamaño?, ¿Cuánto es cada parte de la unidad?, ¿Cuánto está sombreado?

Es posible que por el continuo trabajo con rectángulos en las actividades anteriores, el estudiante solo haga modelaciones con esta figura. Es el momento para indicarle que también pueden hacerse particiones iguales de otras figuras como círculos, triángulos, rombos, pentágonos, entre otros. En la Figura 3-2 se muestran algunas figuras que pueden dividirse en partes iguales.

Figura 3-2: Ejemplos de divisiones de figuras en partes iguales.

Fuente: Llinares y Sánchez (1988, p. 89)

3.3.3 Actividad de Cierre

Se realizan ejercicios de traslaciones entre las diversas representaciones de las fracciones respondiendo las preguntas propuestas por Coxford.

Se realiza por escrito una evaluación de las clases de la semana para conocer las apreciaciones de los estudiantes al respecto mediante la formulación de la pregunta:

¿Cómo me han parecido las clases de Matemáticas durante la última semana? ¿Por qué?

No se encuentran elementos de tabla de ilustraciones.

3.4 Fracciones unitarias, propias e impropias

3.4.1 Actividad de inicio

Se socializan y retroalimentan los resultados obtenidos del ejercicio de la actividad de cierre del ítem 3.3.3.

3.4.2 Actividad de Desarrollo

▪ Clasificación de las fracciones

A lo largo del desarrollo de las actividades anteriores, se ha venido trabajando con fracciones unitarias y propias. Es el momento de dar estas definiciones a los estudiantes, retomando las actividades realizadas haciendo la respectiva clasificación.

De acuerdo a Llinares y Sánchez (1988, p. 101), en la idea de fracción unitaria ($1/n$) y en el hecho de contar fracciones unitarias, radican las bases para:

- La introducción de forma natural de las fracciones mayores que uno.
- Ver la unidad formada por todas las partes.

- El uso de la notación mixta como una forma natural desde el primer momento y como una alternativa a la notación fraccionaria de ciertas fracciones.

En cuanto a las fracciones impropias, podrían introducirse desde la representación gráfica, haciendo diagramas que involucren más de una unidad de las cuales se toman partes de al menos dos unidades. Tener en cuenta que también se continúan haciendo traslaciones a las representaciones escritas (palabras y símbolos). Es importante que de una vez se introduzcan los números mixtos cuando se habla de fracciones impropias, esto con el fin, de no tener que dar más adelante un tratamiento especial a esta notación.

Para evitar dificultades en el reconocimiento de las fracciones impropias y en la notación mixta, se debe enfatizar en la equivalencia que tienen fracciones como “dos medios, tres tercios, cuatro cuartos” con la unidad, lo cual se puede realizar mediante el conteo de fracciones unitarias tal como se indica en la Figura 3-3.

Figura 3-3: Conteo de fracciones unitarias utilizando diversos sistemas de representación.



Esto es un medio, $1/2$ ó $\frac{1}{2}$



Esto es dos medios, $2/2$ ó $\frac{2}{2}$
Ó también una unidad $(1) \frac{2}{2}$



Esto es tres medios, $3/2$

Ó también uno y un medio

$$\frac{3}{2} \text{ ó } 1\frac{1}{2}$$

- *Relación entre las diversas representaciones y la clasificación de las fracciones*

Se plantea a los estudiantes ejercicios de traslación entre las diversas representaciones de las fracciones y de clasificación de estas.

3.4.3 Actividad de Cierre

- Se socializan y retroalimentan los ejercicios desarrollados sobre traslación entre las diversas representaciones de las fracciones y de clasificación de estas.

Es probable que persistan problemas para la traslación de fracciones impropias a la notación mixta, por lo cual se debe insistir si es necesario con más ejercicios para afianzar este tipo de traslación.

3.5 Reconstrucción de la unidad

3.5.1 Actividad de Inicio

Socialización y retroalimentación de ejercicios adicionales de la actividad de cierre 3.4.3 sobre traslaciones a las distintas representaciones de las fracciones y clasificación de estas.

3.5.2 Actividad de Desarrollo

Llinares y Sánchez (1988) consideran que las reconstrucciones de la unidad permiten al estudiante utilizar el conocimiento que han adquirido en relación a la noción de fracción y logran un conocimiento mayor de la relación parte-todo.

Estas reconstrucciones de la unidad pueden realizarse de dos formas que determinan un diferente grado de complejidad. Usualmente se realizan a partir de representaciones gráficas.

▪ *Reconstrucción a partir de fracciones unitarias*

Se parte de situaciones como:

Si la siguiente figura representa $\frac{1}{4}$ del todo, dibuja el todo



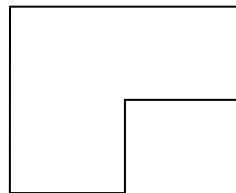
▪ *Reconstrucción a partir de fracciones no unitarias*

Se consideran situaciones tales como:

Si el siguiente rectángulo es los $\frac{2}{3}$ de la unidad, graficar la unidad entera



Si la siguiente figura es $\frac{3}{5}$ del todo, ¿Cuál es el todo?



3.5.3 Actividad de Cierre

Se proponen ejercicios sobre reconstrucción de la unidad, se realiza socialización de resultados y se lleva a cabo retroalimentación del tema.

3.6 El Contexto Discreto

3.6.1 Actividad de Inicio

Considerando a los estudiantes presentes en el aula como los objetos o fichas que conformarán una unidad, preguntarles:

¿Cuántas partes conforman la unidad?

¿Cuál es el nombre de cada uno con respecto a la unidad?

Pedirles que formen subgrupos de igual tamaño que harán de partes, al respecto preguntarles:

¿Cuántos subgrupos se han hecho?

¿Cuál es el nombre de cada subgrupo en relación al grupo total?

¿Qué nombre reciben dos, tres o más subgrupos al unirse, con respecto al grupo total?

¿Cómo podrían formarse subgrupos que fuesen mayores que la unidad?

Se socializan las respuestas dadas.

En esta actividad, podrían utilizarse diversas representaciones utilizando además el tablero para que uno o varios integrantes del grupo vayan escribiendo mediante palabras y símbolos propios de fracciones las situaciones que se van presentando.

3.6.2 Actividad de Desarrollo

▪ *Reconociendo la unidad y sus partes*

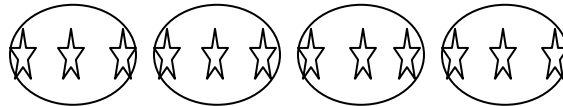
Se recurre inicialmente al conteo con fracciones unitarias así como se realizó al comienzo de la actividad 3.6.1, involucrando representaciones gráficas y simbólicas mediante situaciones como:

Si se tiene el siguiente conjunto de estrellas y se considera como la unidad



Entonces, cada estrella sería un quinto ($1/5$) de la unidad, dos estrellas serían dos quintos ($2/5$) de la unidad, entre otros.

Luego, se pueden considerar partes de la unidad formadas por varios objetos discretos, se tendría por ejemplo:





Cada subconjunto de tres estrellas, sería un cuarto de la unidad ($1/4$).

De acuerdo a Llinares y Sánchez (1988) las actividades dirigidas con objetos discretos deben estar orientadas al reconocimiento de la unidad y al reconocimiento de partes de la unidad. Se debe evitar que los estudiantes confundan la cantidad de objetos de cada subgrupo con el número de partes que tiene la unidad.

▪ *Reconstrucción de la unidad*

Al igual que en el contexto continuo, en el contexto discreto es importante realizar actividades en donde se reconstruya la unidad a partir de cualquier fracción. Veamos,

Si  es los dos tercios ($2/3$) de la unidad, ¿Cuál es la unidad?


3.6.3 Actividad de Cierre

Se proponen ejercicios con objetos discretos para el reconocimiento de la unidad y las partes así como de reconstrucción de la unidad.

3.7 La recta numérica

3.7.1 Actividad de Inicio

Ejercicio sobre la ubicación de números naturales en la recta numérica, con el fin de recuperar los conocimientos que los estudiantes tienen sobre el tema, se debe insistir en la necesidad de conservar la igualdad en cuanto a la distancia que debe existir entre un número y otro.

3.7.2 Actividad de Desarrollo

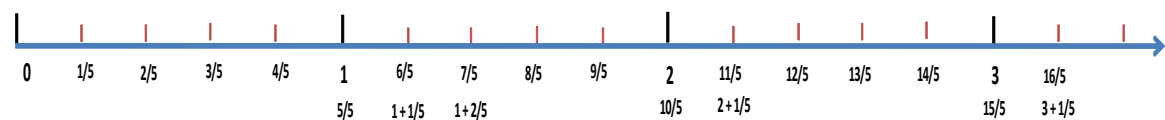
En este contexto se pretende realizar divisiones por segmentos que serán las unidades en la recta y que a la vez estarán divididos en n partes, nuevamente utilizando el conteo de fracciones unitarias pueden nombrarse los puntos sobre la recta numérica.

Por ejemplo, Si se divide cada segmento de la recta en cinco partes iguales, se tendría una recta numérica como la ilustrada en la Figura 3-4.

Figura 3-4: Ubicación de fracciones en la recta numérica.



Cada parte del segmento unidad recibe el nombre de un quinto ($1/5$)



Pueden realizarse en este contexto múltiples ejercicios de asociación de puntos en la recta con fracciones, haciendo n divisiones del segmento unidad. Además, se pueden realizar traslaciones de fracciones impropias a fracciones mixtas.

3.7.3 Actividad de Cierre

Se resuelven y se socializan ejercicios de asignación de fracciones a puntos en la recta numérica y de ubicación de fracciones en la recta numérica.

3.8 Relaciones de equivalencia

3.8.1 Actividad de Inicio

Según Llinares y Sánchez (1988), es pertinente trabajar inicialmente para este tipo de relaciones con contextos continuos en el modelo rectángulo mediante actividades de doblar papel.

Por ejemplo, si se tienen dos hojas rectangulares de papel con un medio ($1/2$) sombreados en cada una



Entonces, tomar una de las hojas y realizar la siguiente secuencia:

Doblarla por la mitad horizontalmente



Desdoblarla y responder:

- ¿En cuántas partes estaba dividida antes la unidad?
- ¿En cuántas partes ha quedado dividida ahora la unidad?
- ¿Qué es cada parte de la unidad ahora?
- ¿Cuántas partes hay sombreadas ahora?
- ¿Con cuál fracción se representa las partes sombreadas?
- ¿Son iguales las fracciones que indican las partes sombreadas en las dos hojas?
- ¿Por qué son o no son iguales?

3.8.2 Actividad de Desarrollo

▪ *El contexto continuo*

Se socializan las respuestas dadas por los estudiantes a las preguntas de la actividad 3.8.1.

Según Ellerbruch (1978, citado en Llinares y Sánchez, 1988, p. 121)

La idea esencial es relacionar los dobleces de la hoja de papel a la idea de doblar, triplicar, y en general, multiplicar el numerador y el denominador por el mismo número. Se presiona la relación entre la expresión verbal de doblar el número de piezas y doblar el número considerado.

De esta manera con relación al ejercicio de la actividad 3.8.1, inicialmente se tenía una parte sombreada (1 de 2, $1/2$), el número total de las partes se ha multiplicado por dos, el número de partes sombreadas también se ha multiplicado por dos (2 de 4, $2/4$).

Situación que puede representarse por

$$\frac{1 \times 2}{2 \times 2} = \frac{2}{4}$$

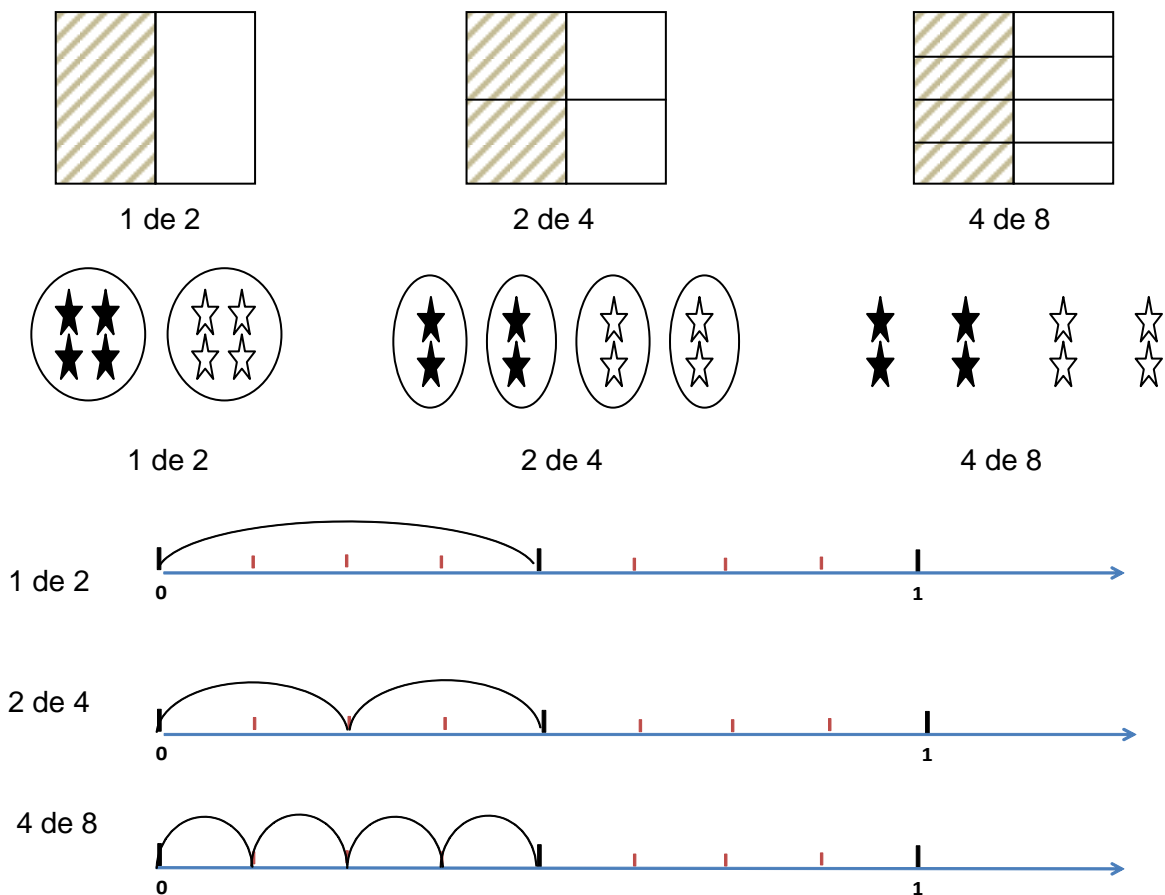
A este respecto, además de los dobleces, en la representación simbólica los ejercicios que ayudarían a identificar la generalización serían los siguientes

$$\frac{2 \times ?}{4 \times 2} = \frac{5 \times ?}{4 \times ?} = \frac{3}{4} = \frac{?}{12}$$

▪ *Otros contextos*

Después de pasar por el contexto continuo, pueden considerarse los discretos y la recta numérica, tal como se muestra en la Figura 3-5.

Figura 3-5: Relaciones de equivalencia de fracciones en el contexto discreto y la recta numérica.



3.8.3 Actividad de Cierre

Se resuelven y se socializan ejercicios de equivalencia de fracciones en los contextos continuo, discreto y en la recta numérica, utilizando representaciones gráficas y simbólicas.

3.9 Relaciones de Orden

3.9.1 Actividad de Inicio

Se plantean ejercicios de ordenamiento de fracciones homogéneas y heterogéneas y se pregunta a los estudiantes:

¿Cómo se puede establecer que fracción es mayor o menor de las dadas?

Se socializan respuestas.

3.9.2 Actividad de Desarrollo

En este tipo de relaciones deben distinguirse al menos tres grados de dificultad.

▪ *Comparación de fracciones homogéneas*

En este caso el ordenamiento de las fracciones puede hacerse de manera directa comparando los numeradores teniendo en cuenta el orden de los números naturales.

Ahora, se puede aprovechar el conteo de fracciones unitarias para las representaciones concretas y en diagramas de acuerdo al número de partes consideradas.

▪ *Comparación de fracciones heterogéneas*

Comparación de fracciones heterogéneas con igual numerador

El ordenamiento de estas fracciones puede iniciarse con representaciones concretas y con diagramas en donde se dividan unidades iguales en n partes, de tal manera que pueda ser percibida por los estudiantes la relación inversa que existe entre la cantidad de partes que tiene una unidad y el tamaño de las partes.

De acuerdo a esta relación, el estudiante podría considerar que ante fracciones con igual numerador, sería mayor aquella que tenga la menor cantidad de partes en total, ya que estas son más grandes. Veamos,

Si se desea establecer que fracción es mayor entre tres quintos ($3/5$) y tres cuartos ($3/4$), se obtendría el resultado mostrado en la Figura 3-6.

En esta comparación se evidencia que es mayor la fracción $3/4$ a $3/5$, por lo que sus partes son más grandes.

▪ *Comparación de fracciones heterogéneas con diferente numerador*

Para estas fracciones pueden establecerse las relaciones de orden con representaciones concretas y con diagramas utilizando la comparación del tamaño de las partes de unidades iguales y la cantidad de partes consideradas. Veamos,

Si se desea conocer cual fracción entre dos quintos ($2/5$) y un cuarto ($1/4$) es menor, se obtendría el resultado mostrado en la Figura 3-7.

Figura 3-6: Representación gráfica del ordenamiento de fracciones heterogéneas con igual numerador.

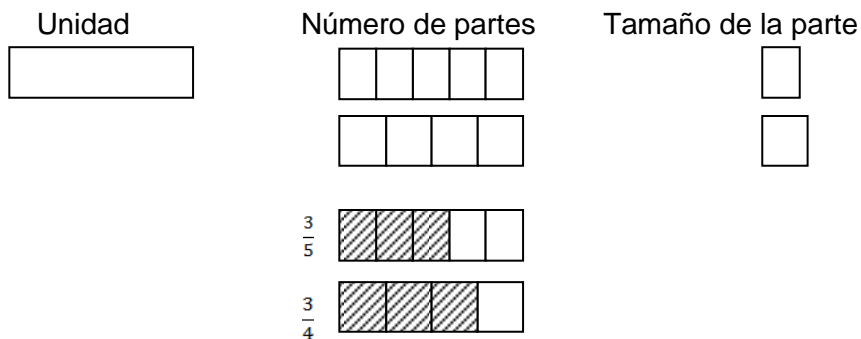
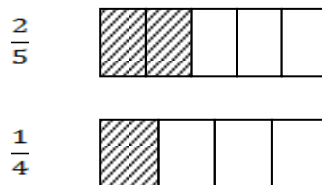


Figura 3-7: Representación gráfica del ordenamiento de fracciones heterogéneas con diferente numerador.



En esta representación se observa que la fracción $\frac{1}{4}$ es menor

Para ordenar este tipo de fracciones utilizando representaciones simbólicas, se hace necesaria la introducción de un algoritmo que permita comparar estas fracciones de una forma más sencilla, lo cual puede realizarse cuando las fracciones sean homogéneas.

Esta necesidad de encontrar iguales denominadores para las fracciones, se suplente con la consideración de fracciones equivalentes. Veamos,

Por ejemplo, ¿Cuál fracción es mayor, $\frac{3}{4}$ ó $\frac{5}{6}$?

Se inicia buscando los múltiplos de seis (el denominador más grande de las dos fracciones)

$$6 \times 1 = 6, \quad 6 \times 2 = 12, \quad 6 \times 3 = 18, \quad 6 \times 4 = 24, \quad 6 \times 5 = 30, \dots$$

Hasta obtener un múltiplo de seis que también lo sea de 4, es decir, 24.

Con el cual se hallarían las fracciones equivalentes que garantizan los denominadores iguales

$$\frac{3}{4} = \frac{3 \times 6}{4 \times 6} = \frac{18}{24} \qquad \frac{5}{6} = \frac{5 \times 4}{6 \times 4} = \frac{20}{24}$$

Con las fracciones resultantes, la comparación resulta inmediata, $\frac{5}{6}$ es mayor que $\frac{3}{4}$.

3.9.3 Actividad de Cierre

Se resuelven y se socializan ejercicios propuestos sobre ordenamiento de fracciones homogéneas y heterogéneas utilizando representaciones gráficas y simbólicas.

4. Aplicación de la propuesta didáctica

4.1 Caracterización de la población

En la tabla 4-1 se muestran algunos datos de la Institución a la cual pertenecen los estudiantes partícipes en la aplicación de la propuesta.

Tabla 4-1: Información general de la Institución Educativa Integrado Villa del Pilar.

Nombre de la Institución	Institución Educativa Integrado Villa del Pilar
Carácter	Oficial
Zona	Urbana
Sector	Comuna Atardeceres
Dirección	SedePrincipal:Cra.3ª.CI9ª
Teléfono	8721779-8827412
Correo electrónico	villapilar93@yahoo.es
Municipio	Manizales
Departamento	Caldas
Adopción del PEI	Acuerdo 002 del 14 de Septiembre de 2010.
Profundización	Gestión Empresarial

Fuente: PEI Institución Educativa Integrado Villa del Pilar

La Institución Educativa acogió desde el año 2002 el modelo pedagógico de *Escuela Activa Urbana* compartiendo los principios propios del modelo, los cuales son:

- La promoción de relaciones de afecto y ambientes humanizantes para promover el aprendizaje de calidad y el desarrollo integral del estudiante.
- La experiencia natural y directa del estudiante y el juego como medio para lograr activar procesos de aprendizaje.
- La ambientación escolar para estimular el aprendizaje.

- El fortalecimiento de la actividad consciente para que el estudiante construya sus propias herramientas conceptuales y valorales.
- La formación y el testimonio del profesor influyen de manera directa en la calidad de los procesos de aprendizaje.
- La individuación de los procesos de aprendizaje para que cada estudiante desarrolle sus capacidades y potencialidades.
- La actividad grupal y el desarrollo de proyectos colaborativos para favorecer el mejoramiento de la calidad de los aprendizajes.

La Institución también ha adoptado una estrategia metodológica basada en el uso de guías de aprendizaje que responden a procesos de aprendizaje significativo, respetan los ritmos individuales de aprendizaje y favorecen la inclusión.

Momentos metodológicos de las guías de aprendizaje:

- Momento de reconocimiento de presaberes.
- Momento de fundamentación teórica.
- Momento de ejercitación.
- Momento de aplicación de lo aprendido.
- Momento de ampliación de conocimientos.

Los estudiantes que conforman el grupo del grado séptimo con los cuales se aplica la secuencia didáctica pertenecen a la jornada de la tarde de la Institución, este grupo está conformado por 11 estudiantes, los cuales presentan en gran proporción alguna característica que los identifica como población vulnerable, características que se discriminan en la Tabla 4-2.

4.2 Duración de la aplicación

La secuencia didáctica se aplica en sesiones de clase de 55 minutos cada una y en bloques de 110 minutos.

En la Tabla 4-3 se muestra una descripción de acuerdo a las actividades abordadas en cada sesión y bloque de clase, las cuales pertenecen a la propuesta didáctica planteada en el Capítulo 3.

Tabla 4-2: Características de los estudiantes partícipes en la aplicación³.

Población vulnerable		Diagnóstico	Cantidad de Estudiantes
Si	No		
X		N.E.E ⁴ : Auditivo	1
X		N.E.E: Cognitivo	2
X		Emocional	2
X		Hiperactividad	1
X		Déficit de Atención	4
	X	Regular	4

Fuente: Listado de caracterización de la población estudiantil de la Institución Educativa Integrado Villa del Pilar. Elaborado por: Equipo de apoyo del programa de educación inclusiva de la Institución.

Tabla 4-3: Descripción de la aplicación de la propuesta didáctica por sesiones y bloques.

Sesión	Bloque	Descripción
	1	Aplicación de la prueba de diagnóstico (Anexo A) y de la actividad de construcción de mosaicos, e inicio de la socialización de los mosaicos construidos.
1		Continuación de la socialización de los mosaicos construidos.
2		Culminación de la socialización de los mosaicos y desarrollo de la actividad de división de la unidad mediante dobleces.
3		Evaluación de las clases de la semana.
	2	División de la unidad mediante cortes y socialización, lectura de fracciones e inicio de traslaciones entre representaciones.
4		Culminación de traslaciones entre representaciones e inicio de ejercitación.

³ La cantidad total de estudiantes es 11, sin embargo, hay estudiantes en el grupo que poseen dos o más diagnósticos, razón por la cual si se hace la sumatoria de la columna correspondiente a la cantidad de estudiantes, esta da un número mayor a 11.

⁴ N.E.E: Necesidad Educativa Especial por la presencia de algún tipo de discapacidad.

Tabla 4-3: (Continuación)

Sesión	Bloque	Descripción
5		Culminación de ejercitación sobre traslaciones entre representaciones y evaluación de las clases de la semana.
	3	Socialización de ejercitación y fundamentación sobre clasificación de fracciones.
6		Ejercitación y socialización de clasificación de fracciones.
7		Retroalimentación sobre clasificación de fracciones y fundamentación sobre reconstrucción de la unidad a partir de fracciones unitarias.
8		Reconstrucción de la unidad a partir de fracciones no unitarias, ejercitación. Prueba extraclase sobre representación y clasificación de fracciones (Anexo A). Evaluación de las clases de la semana.
9		Aplicación de prueba sobre reconstrucción de la unidad (Anexo A).
10		Actividad de inicio, fundamentación y ejercitación sobre las fracciones en el contexto discreto.
11		Aplicación de prueba sobre las fracciones en el contexto discreto (Anexo A).
12		Ejercicio previo, fundamentación y ejercitación sobre las fracciones en la recta numérica.
13		Aplicación de prueba sobre las fracciones en la recta numérica (Anexo A). Evaluación de las clases de la semana ⁵ .

⁵ La aplicación se realizó hasta esta sesión, cubriendo los siete primeros puntos planteados en la propuesta didáctica, los dos últimos puntos planeados para tres sesiones y un bloque, no se aplicaron debido a factores externos que alteraron el normal desarrollo de las clases, las cuales fueron suspendidas durante 12 días hábiles en la Institución Educativa. Sin embargo, se considera que con la aplicación realizada es suficiente para mostrar resultados y emitir conclusiones acerca del trabajo por haberse abarcado más del 75% de las temáticas planteadas.

4.3 Descripción del desarrollo de la aplicación

4.3.1 Bloque 1

▪ *Prueba de diagnóstico (Anexo A)*

Se indicó a los estudiantes de la importancia de la realización de la prueba con el ánimo de identificar falencias que tengan para aplicar estrategias que les favorezcan y les permitan superar dificultades.

En esta prueba se identificó que tres estudiantes manifestaron en repetidas ocasiones no saber cómo responder la prueba ya que carecían de los conocimientos para hacerla, catalogándola como muy difícil o que ya habían olvidado los conocimientos requeridos para resolverla, se notó una marcada dificultad para responder la prueba desde el ítem cinco en adelante.

Los estudiantes tardaron aproximadamente 40 minutos en responder la prueba.

▪ *Actividad: Construcción de mosaicos con igual tamaño*

Se organizaron todos los estudiantes alrededor de una mesa y se le entregó a cada uno una pieza para formar los rectángulos, se les dio las indicaciones pertinentes para formarlos (formar 3 rectángulos iguales cada uno con 4 piezas, deben estar formados por dos tipos de piezas diferentes), entre todos interactuaron para formar los rectángulos, al cabo de cierto tiempo formaron los 3 rectángulos los cuales tenían igual forma y tamaño.

Al entregárseles 4 piezas (triángulos) para que formaran un nuevo rectángulo, se presentaron dificultades, ya que inicialmente la figura formada fue un romboide y al parecer para ellos era igual a los otros rectángulos formados, en este momento fue necesario intervenir para hacerles ver que difería de las otras figuras formadas ya que sus ángulos eran diferentes, al continuar experimentando un estudiante sordo finalmente construyó un rectángulo el cual difería en forma con respecto a los otros, razón por la cual procedieron a reorganizar las fichas para que todos los rectángulos fueran iguales en forma y en tamaño.

Aunque lo más importante radicaba en que fueran iguales en tamaño, en esta actividad inicial es difícil aun que ellos comprendan que a pesar de que su forma sea diferente son iguales por su área.

▪ *Inicio de Actividad: Socialización de los mosaicos construidos*

Al plantear las preguntas:

¿Por qué son iguales los rectángulos construidos?

La respuesta dada por un estudiante fue porque tenían cuatro lados y cuatro vértices, la cual fue aceptada por los demás estudiantes, en este momento el docente construye con las piezas de los rectángulos otros cuadriláteros para mostrar que con dicha idea no era suficiente para determinar la igualdad de los 4 rectángulos. Después de esto alguien afirma que son iguales porque miden lo mismo, para lo cual proceden a medir los lados de los rectángulos encontrándolos iguales ya que estos tienen igual forma y tamaño

como se había anotado anteriormente. El docente, forma un rectángulo con las 4 piezas que los constituyen el cual difiere en forma a los anteriores y pregunta si este es igual a los otros rectángulos construidos, la respuesta es que no en generalidad porque “es diferente” afirman ellos. Con esta inquietud por ahora sin resolver se pasa a los otros cuestionamientos que darán respuesta a esta inquietud.

¿Cómo se puede saber si son iguales entre si las partes que conforman los rectángulos construidos?

Casi que al unísono responden que las piezas son diferentes, guiados por la percepción visual que dan las formas diferentes de los rectángulos, cuadrados y triángulos que los constituyen. El docente interviene haciéndoles caer en cuenta que a pesar de que sus formas son diferentes siempre se consideraron cuatro piezas para formar los rectángulos que son iguales, ¿por qué?, a lo que responden que se deben medir las piezas para saber si son iguales, al medirlas se encuentra que las bases y las alturas de las piezas difieren, por lo cual concluyen que definitivamente no pueden ser iguales, de nuevo interviene el docente y sugiere que a pesar de que sus medidas no coinciden si se determina la porción de espacio ocupado por estas, lo cual se conoce como área, daría otra posibilidad a la respuesta.

Se deja el planteamiento, ¿si las áreas son iguales entonces las piezas entre si son iguales?

4.3.2 Sesión 1

▪ *Continuación de Actividad: Socialización de los mosaicos construidos*

Se retoma lo realizado en la clase anterior fijando en el tablero las diversas piezas que conforman los rectángulos, se vuelve a plantear la pregunta:

¿Cómo se puede saber si son iguales entre si las partes que conforman los rectángulos construidos?

La idea es trabajar en la clase con la representación gráfica ya que en la clase anterior todo el trabajo fue con concretos. Los estudiantes dicen que hay que medir las piezas para determinar si son iguales, proceden dos voluntarios a hacer las mediciones de las piezas fijadas en el tablero hallando específicamente para todas la base y la altura. Después de tener estos datos se nota que las piezas difieren en la base y en la altura por lo tanto ellos recuerdan que debe hallarse el área para determinar si son iguales.

Al proceder a los cálculos del área los estudiantes no recuerdan las formulaciones para el área del rectángulo y del triángulo, el docente debe recordar estas formulaciones y surge la pregunta de un estudiante ¿Por qué en el área del triángulo en la formulación se debe dividir entre 2 y para el rectángulo no? Se demuestra a los estudiantes mediante las figuras que se tienen de triángulos rectángulos que al juntar 2 de estos se forma un rectángulo, por lo tanto, al hallar el área del triángulo solo se está buscando la porción de espacio ocupada por este que equivale a medio rectángulo, por lo tanto se divide entre 2.

Los estudiantes calculan las áreas de las figuras y encuentran que todas tienen la misma área. En esta parte se trabajó con una representación simbólica para medir las diversas longitudes en cm y hallar las áreas en cm^2 . Resultó muy importante en la clase retomar lo

concerniente a temáticas propias de Geometría como fue la medición de figuras, la consideración de una unidad de medida en cm y el cálculo de áreas.

Se concluye respondiendo la pregunta planteada llegando al acuerdo que las piezas son iguales porque tienen el mismo tamaño, es decir, estas ocupan la misma porción de espacio, así difieran en su forma.

4.3.3 Sesión 2

▪ *Culminación de Actividad: Socialización de los mosaicos contruidos*

Se plantean y responden las preguntas:

¿Podría considerarse cada rectángulo formado como una unidad?

Un estudiante manifiesta que si es una unidad porque tiene varias partes, otro dice que es una unidad porque si se cambian de posición las piezas que lo conforman y se forma otro rectángulo sigue siendo una unidad. Se nota a pesar de estos aportes, que para la mayoría del grupo es incierta la concepción de unidad, por lo tanto se plantea una pregunta que tiene que ver con el inicio de los cuestionamientos planteados con el ánimo de aportar elementos que vayan enriqueciendo el concepto de unidad.

¿Cómo está formado cada rectángulo?

Un estudiante responde que están formados por lados, otros dicen que están formados por piezas que se juntaron y al preguntárseles como son las piezas recuerdan que estas son iguales, por lo tanto concluyen que los rectángulos están formados por piezas iguales, inclusive sugieren juntar los dos rectángulos para formar uno solo, situación oportuna para hacerles ver que se tenían 2 unidades y que al juntarse forman una sola unidad con el doble del tamaño que tenían individualmente.

▪ *Actividad: División de la unidad en partes iguales haciendo dobleces*

Se entrega a cada estudiante una hoja y se les pide trazar un cuadrado con igual tamaño para de esta forma tener una unidad igual para todos. Se les pide que hagan un doblez a la hoja para que quede dividida en dos partes iguales y se les sugiere que unos hagan el doblez por la mitad y otros en forma diagonal para que identifiquen que con dobleces diferentes se divide la unidad de forma diferente aunque se obtienen partes iguales.

Se les sugiere seguir haciendo dobleces y que vayan contando la cantidad de partes que van resultando, llegando a la conclusión de que con cada pliegue se duplican las partes y que la unidad puede dividirse en muchas partes iguales.

Finalmente, se comparten las manipulaciones hechas por cada estudiante contando la cantidad de pliegues hechos y el número de partes resultantes, realizando al mismo tiempo el cambio a la representación gráfica con un dibujo de la unidad y las partes en que se dividió.

4.3.4 Sesión 3

▪ *Actividad: Evaluación de las clases de la semana*

Al recoger las apreciaciones orales que tienen los estudiantes sobre los trabajos con los mosaicos y las hojas, manifiestan que ha sido bueno aprender utilizando piezas como rompecabezas para armar entre todos, además el hecho de medir, trazar, doblar y dibujar ha hecho que la clase sea amena y todos hayan podido participar dando respuestas a las preguntas que se han planteado.

Al retomar en este punto la identificación de la unidad y las partes con los estudiantes, se nota que el trabajo con concretos ha aportado para que haya una buena aprehensión al menos intuitiva de lo que se ha planteado en las clases.

Se culmina la clase recogiendo por escrito las apreciaciones de los estudiantes con respecto a la pregunta:

¿Cómo me han parecido las clases de Matemáticas durante la última semana? ¿Por qué?

Respuestas dadas a esta pregunta:

El 90% de los estudiantes anotan que les pareció buena y dieron las siguientes justificaciones:

Fue lúdica.

Vimos Geometría que es necesaria.

Fue didáctica y de esta forma se aprende mejor.

Estuvimos aprendiendo acerca de las fracciones.

Aprendimos cosas nuevas.

Cambiamos de tema.

Nos hemos divertido.

Hubo más actividades lúdicas que de costumbre.

Al 10% de los estudiantes les pareció la clase regular porque se presentó una discusión en una clase al trabajar en grupo con las figuras.

4.3.5 Bloque 2

▪ *Actividad: División de la unidad en partes iguales haciendo cortes*

Se entrega a cada estudiante una hoja para que recorte un rectángulo y lo divida con tijeras en dos, tres, cuatro y más partes iguales (cada estudiante realiza una división diferente de la unidad).

▪ *Actividad: Socialización de las particiones realizadas de la unidad*

Se socializan en el tablero las divisiones hechas de la unidad realizando un dibujo semejante al concreto anotando y diciendo cual es la unidad, cuantas partes tiene y sombreando las partes que correspondan cuando solo se toman una, dos o más partes de ese total.

Solo dos estudiantes recurren a divisiones diferentes a rectángulos, considerando los triángulos como otra posibilidad de dividir la unidad, incluso un estudiante divide la unidad en tres partes iguales formadas por dos triángulos y un rectángulo. Los demás recurrieron siempre a divisiones en partes formadas por rectángulos a pesar de que los modelos mostrados en el tablero con concretos se construyeron con piezas diferentes (rectángulos de diferentes tamaños y triángulos).

▪ *Actividad: Lectura de fracciones de la forma a/b*

En este momento se les indica que existe otra posibilidad escrita de representar una fracción, la cual es utilizando símbolos de la forma a/b donde a es el numerador y b es el denominador, se realizan ejercicios con esta representación y visualizan a partir de las experiencias realizadas que el numerador indica las partes que se toman y el denominador el total de partes que tiene la unidad.

Además se da lectura a las representaciones realizadas de acuerdo a sus denominadores.

▪ *Inicio de la actividad: Traslaciones entre diversas representaciones*

Se dan unos ejercicios mediante representaciones escritas en palabras y en símbolos de fracciones para que los estudiantes las representen mediante gráficos. Se encuentra que la mayoría recurre a rectángulos para hacer dichas representaciones, cuando se les invita para que utilicen otras figuras, se presentan particiones de circunferencias y triángulos principalmente, sin embargo, las particiones de triángulos suelen quedar con partes de diferente tamaño que al parecer ellos no notan, se les insiste y realizan las correcciones pertinentes.

4.3.6 Sesión 4

▪ *Culminación de la actividad: Traslaciones entre diversas representaciones*

Se coloca una fracción expresada en palabras en el tablero (un cuarto) y se pide a los estudiantes que hagan una representación grafica de dicha fracción. Se socializan repuestas en el tablero valorando la diversidad de figuras que presentan los estudiantes para hacer dicha representación (cuadrados con diversas particiones, rectángulos, círculos) y se les pregunta ¿Cuál es la unidad?, ¿En cuántas partes está dividida?, ¿Cuántas partes e tomaron?

Se aprovecha esta actividad para mostrar que también se pueden hacer representaciones con otras figuras como rombos y triángulos, en cuanto a estos últimos se dice que debe tenerse cuidado al momento de hacer la partición y no olvidar que las partes que se obtengan deben ser iguales en tamaño, por lo tanto se les indica cómo se puede partir un triángulo en dos y seis partes iguales y se pregunta ¿Cómo puede partirse en tres partes iguales? Un estudiante sale al tablero y realiza dicha partición de forma correcta.

▪ *Inicio de la Actividad: Ejercitación*

Se plantean y se resuelven ejercicios sobre traslaciones entre representaciones y lectura de fracciones:

- Dadas cinco fracciones escritas en palabras o simbólicamente, representarlas con figuras diferentes respondiendo las preguntas que al respecto Coxford plantea.
- Representar cinco fracciones propuestas por cada estudiante con diferentes figuras respondiendo igualmente las preguntas de Coxford y escribir su lectura.

Se evidencia recurrencia al trabajo con rectángulos, se les debe insistir para que trabajen con otras figuras, lo cual hace notar un mayor esfuerzo para los estudiantes.

4.3.7 Sesión 5

Culminación de la actividad de Ejercitación y Evaluación de las clases de la semana

Se propone y se resuelve ejercicio de complete el cuadro: Dada una representación gráfica, escrita en palabras o en símbolos de una fracción, completar dando las demás representaciones de la fracción.

Se culmina la clase recogiendo por escrito las apreciaciones de los estudiantes con respecto a la pregunta:

¿Cómo me han parecido las clases de Matemáticas durante esta semana? ¿Por qué?

Respuestas dadas a esta pregunta:

Al 90% de los estudiantes las clases les parecieron buenas porque:

Contribuye a la formación académica, acumulando más conocimientos que se pueden poner en práctica en nuestro medio.

Aprendí muchas cosas interesantes.

Estuvimos recordando cosas que ya habíamos visto pero habíamos olvidado y estuvo más didáctica.

Aprendimos más de las fracciones.

Aprendimos mucho.

Por el tema y el conocimiento nuevo.

Han sido dinámicas.

Es necesario trabajar esos temas.

Cada día aprendemos más.

Al 10% de los estudiantes las clases les parecieron regulares porque no fueron tan didácticas como la semana pasada.

4.3.8 Bloque 3

▪ *Actividad: Socialización de actividad de ejercitación de la sesión 5*

Los estudiantes socializan en el tablero algunos resultados de la actividad haciendo las precisiones necesarias convocando a los demás integrantes del grupo para hacerlas y de esta forma realizar una retroalimentación del proceso.

Se observa en esta socialización representaciones con variadas figuras, pero cuando se utilizan triángulos fácilmente se hacen particiones no iguales de las partes, siendo necesario insistir al respecto.

▪ *Actividad: Clasificación de las fracciones*

Se realiza fundamentación de fracciones unitarias, propias e impropias, dando las definiciones de cada una y ejemplificando.

Se construye ejemplo en el tablero de conteo de fracciones sucesivas (con igual denominador) haciendo representaciones gráficas y escritas y clasificando las fracciones resultantes.

Se culmina planteando ejercicio análogo al ejemplo realizado, siendo necesario hacer retroalimentación individual cuando se tratan las fracciones impropias insistiendo en el reconocimiento de las unidades ($2/2$, $3/3$, $4/2$, $6/3$) y en la representación mediante fracciones mixtas, para lo cual la parte visual con las representaciones gráficas sirvió para aclarar dicha representación.

Se evidenció en el manejo de las representaciones escritas, más soltura en algunos estudiantes expresando mediante palabras, inclusive olvidaban hacer la representación simbólica, por lo cual fue necesario hacerles ver que esta también es necesaria, para la cual se notó que algunos estudiantes requerían hacer un análisis más detallado de la situación para escribir la fracción.

4.3.9 Sesión 6

▪ *Actividad: Socialización de resultados de ejercicio sobre clasificación de fracciones y ejercitación*

Se inicia retroalimentando la actividad anterior de traslación de representaciones de fracciones unitarias, propias e impropias, para estas últimas se pedía realizar conversiones a fracciones mixtas.

Esto fue necesario ya que los estudiantes manifiestan dudas al respecto sobre todo en el manejo de fracciones impropias, tanto en su representación gráfica como en su traslación a fracciones mixtas.

La retroalimentación anterior se realiza mediante modelación en el tablero de ejercicio análogo al realizado.

Para afianzar los conceptos sobre las diversas representaciones y la distinciones entre fracciones unitarias, propias e impropias se plantea ejercicio de completado de cuadro,

en el cual conocida la representación gráfica o la expresada en lenguaje natural o la simbólica o el tipo de fracción se completan los espacios.

4.3.10 Sesión 7

▪ *Actividad: Socialización de resultados de ejercicio de la sesión 6 y retroalimentación*

Se socializan los resultados obtenidos del ejercicio anterior en el tablero por parte de los estudiantes, con buenos logros, se aprovecha para aclarar algunas inconvenientes con respecto a la igualdad que se debe conservar en el trazado de las unidades en caso de que se requiera más de una unidad para fracciones impropias y en las traslaciones entre fracciones impropias y fracciones mixtas valiéndose de la representación gráfica.

▪ *Actividad: Reconstrucción de la unidad a partir de fracciones unitarias*

Se realiza fundamentación sobre este tipo de reconstrucción de la unidad haciendo explicación en el tablero mediante ejemplos y proponiendo ejercicios que se retroalimentan una vez los estudiantes los van resolviendo.

4.3.11 Sesión 8

▪ *Actividad: Reconstrucción de la unidad a partir de fracciones no unitarias*

Se realiza fundamentación sobre este tipo de reconstrucción de la unidad haciendo explicación en el tablero mediante ejemplos y proponiendo ejercicios que se retroalimentan una vez los estudiantes los van resolviendo.

▪ *Actividad: Ejercitación y evaluación de las clases de la semana*

Se proponen ejercicios sobre reconstrucción de la unidad, se realiza socialización de resultados en el tablero y se lleva a cabo retroalimentación del tema.

Es evidente que tiene un mayor grado de dificultad los ejercicios de reconstrucción de la unidad con fracciones no unitarias de acuerdo a los resultados mostrados por los estudiantes.

También se hace entrega de una prueba para resolver de forma extraclase sobre las representaciones y clasificación de las fracciones (Anexo A).

Finalmente se realiza la evaluación de las clases de la semana planteando la pregunta:

¿Cómo me han parecido las clases de Matemáticas durante esta semana?

Respuestas dadas a esta pregunta:

Al 66.67% de los estudiantes las clases les parecieron buenas. Al 22.22% las clases les parecieron regulares. Al 11.11% las clases les parecieron malucas.

4.3.12 Sesión 9

Aplicación de prueba sobre reconstrucción de la unidad (Anexo A).

Se entrega a los estudiantes una prueba que se soluciona durante la clase.

Se recogen los talleres y se indaga por dificultades presentes en el proceso de solución. A este respecto algunos comentan que unos ejercicios propuestos estaban muy difíciles, sobre todo aquellos que tenían partes que no eran iguales y los que no tenían como numerador el uno.

4.3.13 Sesión 10

▪ *Actividad: Reconociendo el grupo de estudiantes como la unidad y cada uno de sus integrantes como las partes*

Se plantea este ejercicio dialogando con los estudiantes y respondiendo entre todas las preguntas planteadas en la actividad acerca de la identificación de la unidad, sus partes y lo que es cada parte de la unidad, registrando en el tablero y en el cuaderno mediante el diseño de una tabla estas respuestas. La actividad resulta ser de fácil comprensión y buena respuesta por parte de los estudiantes, incluso cuando se les invita para que formen subgrupos dividiendo a la unidad en partes diferentes cada vez. Hay aportes de estudiantes que sugieren continuar el ejercicio considerando como unidad objetos del aula como sillas y mesas.

▪ *Actividad: Reconociendo la unidad y sus partes en el contexto discreto y reconstrucción de la unidad*

Se explica a los estudiantes que son los discretos a partir de los resultados de la actividad anterior y se plantean mediante representaciones gráficas de objetos ejemplos de la unidad, sus partes y lo que es cada una de estas con respecto a la unidad, considerando partes conformadas por uno, dos o más objetos.

Igualmente, se dan ejemplos acerca de la reconstrucción de la unidad con discretos.

▪ *Actividad: Ejercitación*

Se finaliza la clase planteando algunos ejercicios sobre la identificación de las partes y lo que es cada una de estas con respecto a la unidad, a partir de gráficos que representan unidades y sobre la reconstrucción de la unidad.

4.3.14 Sesión 11

▪ *Aplicación de prueba sobre las fracciones en el contexto discreto (Anexo A)*

Se entrega a cada estudiante la prueba que contiene ejercicios sobre completado de tabla de la unidad con gráfico que la representa, partes que la conforman y que es cada parte de la unidad, conocido uno de estos datos. Y ejercicios sobre reconstrucción de la unidad dada una fracción propia o impropia.

Al parecer durante el desarrollo de la prueba, la segunda parte relacionada con la reconstrucción de la unidad presenta dificultad para la mayoría de estudiantes, lo cual se corroborará con el análisis de los resultados de la prueba.

4.3.15 Sesión 12

▪ *Actividad: Ejercicio Previo*

Se plantea ejercicio sobre ubicación de números naturales en la recta numérica, solo el 36.36% de los estudiantes dieron soluciones correctas, los demás ubican los números en la recta sin preservar una igualdad en la distancia entre las unidades. Se les indica que esta es una condición necesaria que se debe aplicar.

▪ *Actividad: Ubicando fracciones en la recta numérica*

Se comienza planteando la pregunta ¿Cómo se ubica en la recta numérica una fracción? Este cuestionamiento solo es resuelto por un estudiante correctamente, algunos ubican el numerador y el denominador como números naturales y el punto medio entre estos dos números lo consideran con el lugar que debe ocupar la fracción, los demás estudiantes manifiestan no saber cómo realizar dicha ubicación.

Se cuenta a los estudiantes como debe hacerse dicha ubicación mediante la división de las unidades en la cantidad de partes que indica el denominador de las cuales se toman las partes que indica el numerador. También se muestra cómo se va llenando esta recta con las fracciones haciendo el respectivo conteo, hasta llegar a la consideración de fracciones impropias, las cuales se pueden convertir en fracciones mixtas.

Se realizan ejemplos sobre la correspondencia de fracciones con puntos marcados en la recta y de ubicación de fracciones dadas en lenguaje natural o simbólico en la recta numérica.

▪ *Actividad: Ejercitación*

Se plantean ejercicios análogos a los ejemplos realizados en la actividad anterior.

4.3.16 Sesión 13

▪ *Aplicación de prueba sobre las fracciones en la recta numérica (Anexo A) y evaluación de las clases de la semana*

Se entrega a cada estudiante la prueba que contiene ejercicios sobre ubicación de fracciones en puntos marcados en la recta numérica y de trazado de rectas numéricas para ubicar fracciones dadas en lenguaje natural o simbólico.

Se nota que cuando el estudiante debe trazar la recta numérica para ubicar una fracción, se coloca mucho más a prueba la identificación de la cantidad de partes en que se debe dividir la unidad y la determinación de cuantas unidades se requieren para la ubicación de fracciones impropias.

Finalmente se realiza la evaluación de las clases de la semana planteando la pregunta:

¿Cómo me han parecido las clases de Matemáticas durante esta semana? ¿Por qué?

Respuestas dadas a esta pregunta:

Al 90% de los estudiantes las clases les parecieron buenas porque:

Aprendí tema nuevo.

Aprendí cosas nuevas y buenas.

Recordamos algo que aprendimos antes.

Vimos algo que unos no sabían y otros no recordaban.

Al 10% de los estudiantes las clases les parecieron regulares porque no entendieron algunas cosas.

5. Análisis de resultados de la aplicación de la propuesta didáctica

En este capítulo se muestran los resultados de las pruebas aplicadas durante el desarrollo de la secuencia didáctica y un breve análisis de estos resultados tratando de explicar los avances logrados en la comprensión de las fracciones, así como las dificultades que persisten en los estudiantes.

En el Anexo A se muestran los ítems que conforman cada una de las pruebas, de igual manera, en los demás Anexos se dan a conocer las respuestas más significativas dadas por los estudiantes en cada una de las pruebas y un breve análisis de estas respuestas.

Cabe anotar que las pruebas aplicadas no son pruebas estandarizadas, y estas tratan de medir muchas variables diferentes con pocos ítems por variable, por lo tanto, los resultados aquí mostrados obedecen a valoraciones realizadas a un grupo de estudiantes que pueden indicar tendencias en el proceso de enseñanza y aprendizaje de las fracciones, sin ser totalmente concluyentes.

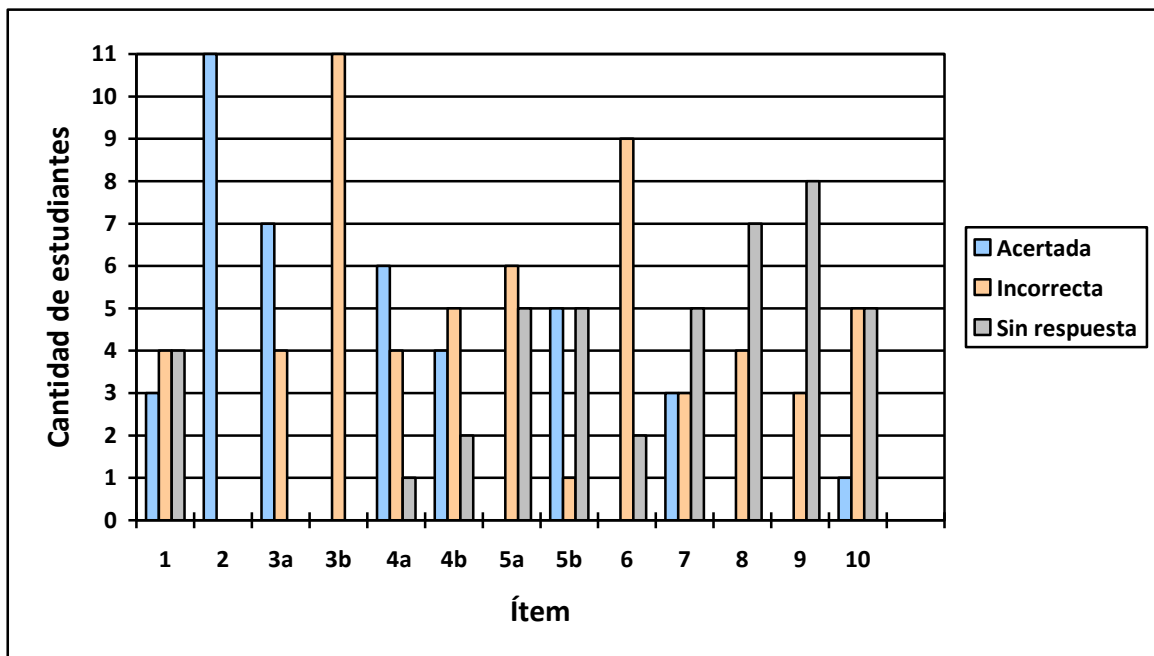
5.1 Prueba de diagnóstico

En la Figura 5-1 se muestra una clasificación de las respuestas dadas por los estudiantes de acuerdo a los aciertos y desaciertos que tuvieron en cada uno de los ítems.

De acuerdo a las respuestas dadas por los estudiantes (Figura 5-1) y al análisis de estos resultados mostrada en el Anexo B, pueden establecerse las siguientes conclusiones con respecto a la prueba:

- Se evidencian dificultades al trasladar situaciones cotidianas al lenguaje de fracciones.
- Se evidencia una buena relación entre la representación simbólica y la gráfica, si están dadas ambas representaciones, por lo cual solo es necesario sombrear en la figura las partes del todo indicadas simbólicamente.
- Se evidencian algunas dificultades al hacer traslaciones de la representación gráfica a la representación escrita considerando la relación parte-todo. Se destaca la preferencia de los estudiantes por utilizar la representación simbólica más que la de palabras del lenguaje natural, lo cual podría demostrar alguna falencia en la lectura de fracciones.

Figura 5-1: Categorización de las respuestas dadas por los estudiantes en la prueba de diagnóstico.



- Los estudiantes no reconocen el atributo “las partes también se pueden considerar como totalidad” de la relación parte-todo.
- Se evidencian dificultades en la translación de la representación simbólica a la gráfica, siendo mayor la dificultad para fracciones impropias.
- Se nota preferencia por utilizar representaciones gráficas en el contexto continuo mediante rectángulos. Como ningún estudiante utilizó la representación en la recta numérica, podrían existir falencias al respecto del uso de la recta numérica por parte de los estudiantes.
- Existen falencias en el reconocimiento del significado de fracción como medida, ya sea por falta de precisión en el proceso de medición o errores en la percepción visual de gráficos.
- Los estudiantes podrían presentar falencias para la solución de situaciones de reparto, además se nota confusión entre los cambios de las representaciones gráfica, simbólica y con lenguaje natural.
- Al parecer los estudiantes desconocen el uso de la fracción como operador y como razón.

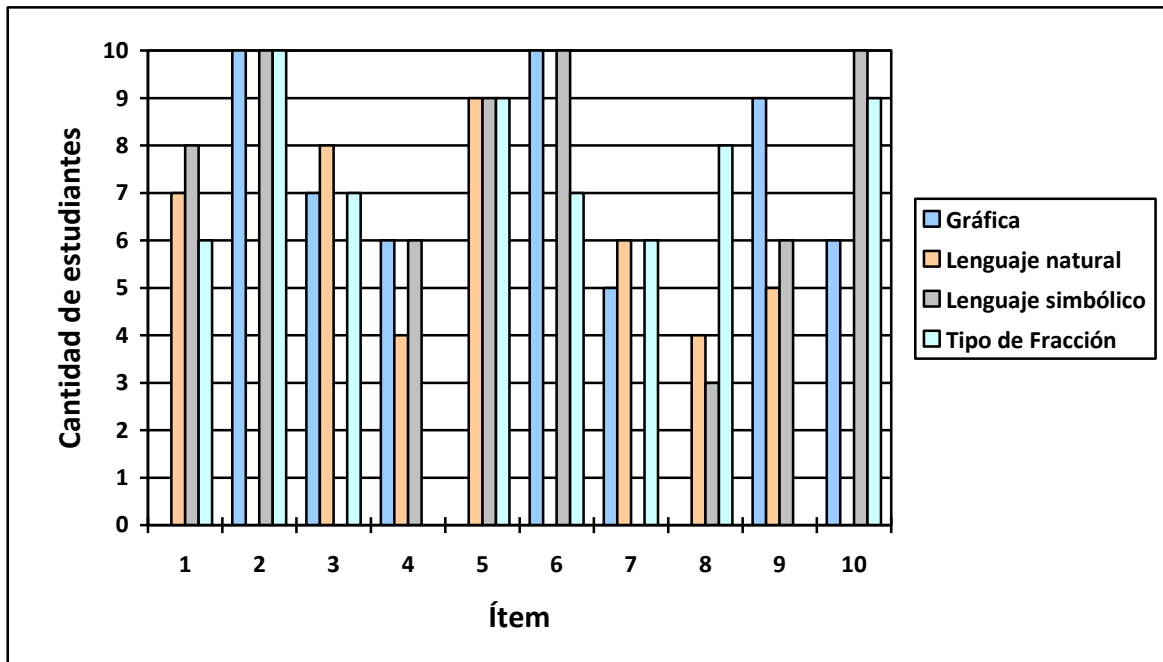
Al preguntárseles a los estudiantes como les ha parecido la prueba, sus respuestas llevan a la siguiente conclusión:

Una gran parte de los estudiantes olvidan los conocimientos relacionados con fracciones requeridos para la solución de esta prueba, lo cual tiene que ver mucho con la forma en que tradicionalmente se ha dado la enseñanza de las fracciones, en la cual como se evidenció en el Capítulo de significados de las fracciones ha sido priorizado el significado de la fracción en la relación parte-todo.

Además, el hecho de que en la enseñanza de las fracciones la parte de conceptualización se haga rápidamente para pasar a la parte operativa de uso de algoritmos dificulta la retención del concepto por parte de los estudiantes.

5.2 Prueba sobre representaciones y clasificación de las fracciones

Figura 5-2: Categorización de las respuestas acertadas dadas por los estudiantes según tipo de representación y clasificación de la fracción.



De acuerdo a los resultados en la prueba mostrados en la Figura 5-2 y al análisis de estos mostrado en el Anexo C puede concluirse al respecto de esta prueba lo siguiente:

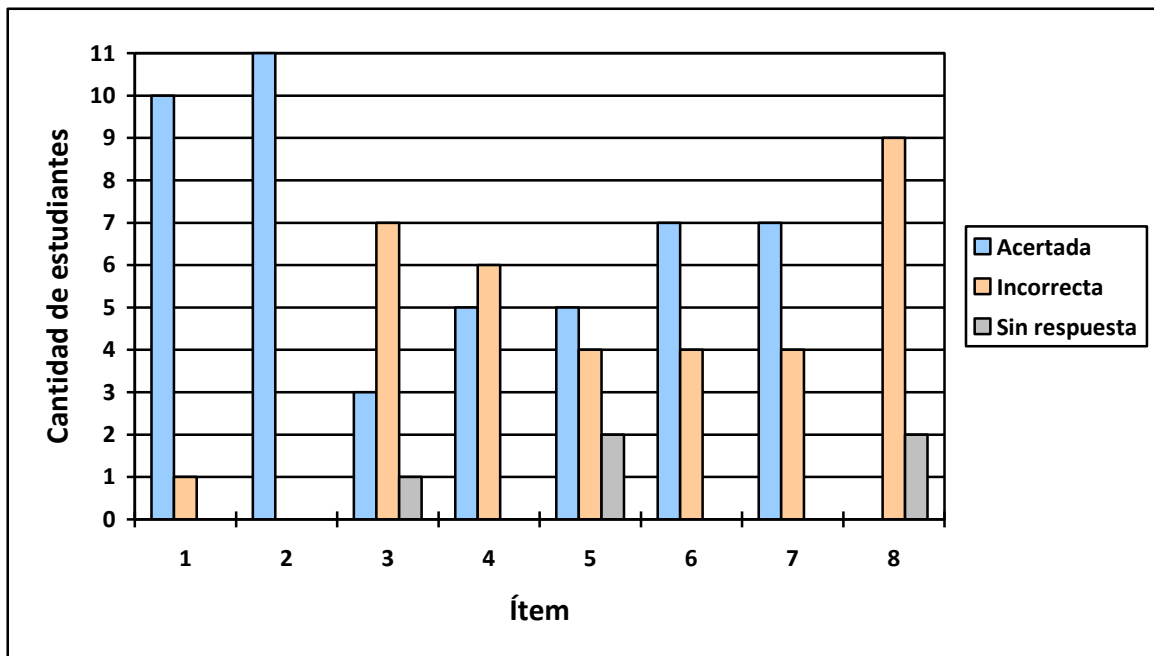
Se nota en la mayoría de estudiantes que presentaron la prueba facilidad para realizar cambios entre las representaciones gráficas, en lenguaje natural y en lenguaje simbólico cuando se trata de fracciones propias. Sin embargo, en cuanto a las fracciones impropias se evidencian dificultades en un poco menos del 50% de los estudiantes para realizar este tipo de cambio entre los sistemas de representación, sobre todo cuando la fracción está dada de forma gráfica o en forma simbólica mediante fracción mixta.

En cuanto a la clasificación de las fracciones, gran proporción de los estudiantes realizan bien la clasificación.

Adicionalmente, puede establecerse en la prueba aplicada que existe un 75.71% de respuestas acertadas para la representación gráfica cuando se conoce otro tipo de representación (en lenguaje natural o en lenguaje simbólico) o el tipo de fracción. Igualmente se presenta un 61.43% de aciertos para la representación en lenguaje natural cuando se conoce una de las otras representaciones o el tipo de fracción, para la representación en lenguaje simbólico existe un 77.5% de aciertos y en la clasificación de las fracciones también se obtiene el 77.5% de aciertos en los ítems.

5.3 Prueba sobre reconstrucción de la unidad en el contexto continuo

Figura 5-3: Categorización de las respuestas dadas por los estudiantes en la prueba de reconstrucción de la unidad.



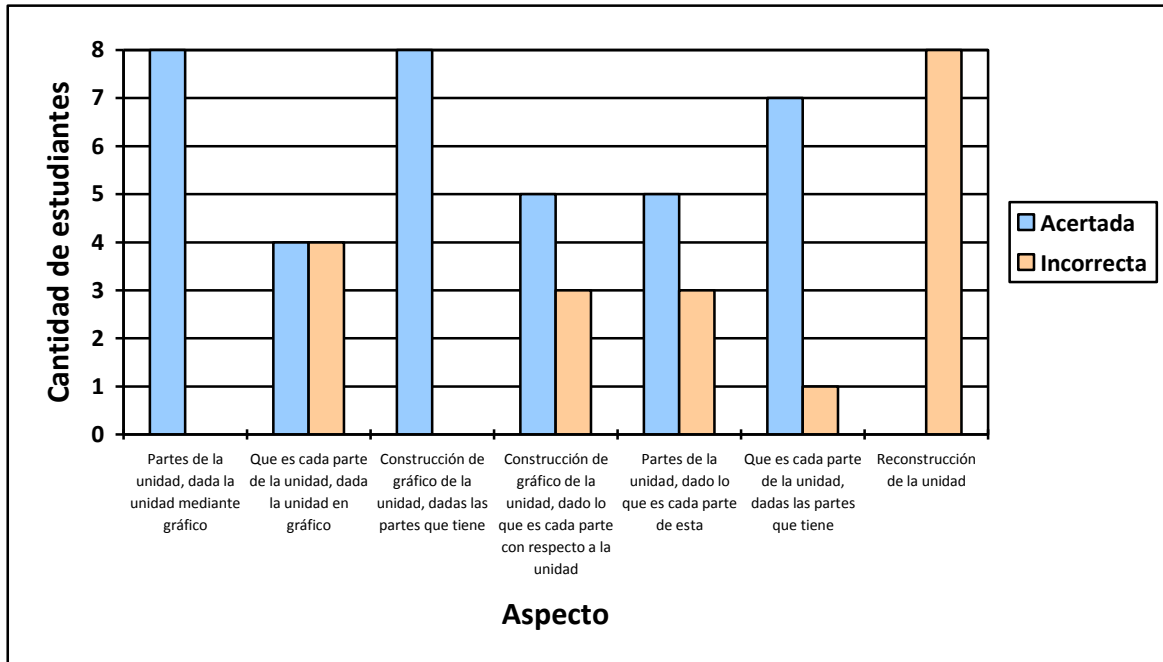
De acuerdo a los resultados en la prueba mostrados en la Figura 5-3 y al análisis realizado de estos en el Anexo D, puede concluirse lo siguiente:

Existe una buena reconstrucción de la unidad por parte de los estudiantes cuando se consideran fracciones unitarias, acertando en el 95.45% de las respuestas de estos ítems. Cuando las fracciones no son unitarias la reconstrucción se torna más difícil para los estudiantes disminuyendo en una gran proporción los aciertos a las respuestas de estos ítems, lo cual corresponde al 40.91%, además en este caso el 7.58% de los estudiantes no responden este tipo de ítems.

Esto podría demostrar que aun no hay un conocimiento avanzado de la relación parte-todo en gran parte de los estudiantes, persistiendo las dificultades en la identificación de las partes de la unidad.

5.4 Prueba sobre las fracciones en el contexto discreto

Figura 5-4: Categorización de las respuestas dadas por los estudiantes de acuerdo a la relación entre la unidad y sus partes y entre sistemas de representación.



De acuerdo a los resultados en la prueba mostrados en la Figura 5-4 y al análisis realizado de estos en el Anexo E, puede concluirse lo siguiente:

Cuando se da a los estudiantes la representación gráfica de la unidad, todos identifican correctamente las partes que la conforman ya sean partes con uno o varios objetos.

Solo la mitad de los estudiantes que presentan la prueba realizan bien la representación en lenguaje natural o en lenguaje simbólico de lo que es cada parte con respecto a la unidad si se da la unidad en forma gráfica, al parecer los demás estudiantes presentan confusiones en la prueba construyendo generalmente fracciones cuyo numerador corresponde a la cantidad de subgrupos que contiene la unidad, y en el denominador suelen colocar la sumatoria de todos los objetos considerados en los diversos subgrupos.

Todos los estudiantes son capaces de construir la unidad, dada la cantidad de partes que la conforman, utilizando en gran medida, lo cual es importante en este contexto, partes que contienen más de un objeto.

El 62.5% de los estudiantes construyeron la unidad cuando se les dio en lenguaje natural o simbólico lo que es cada parte de la unidad. El 37.5% de los estudiantes restantes

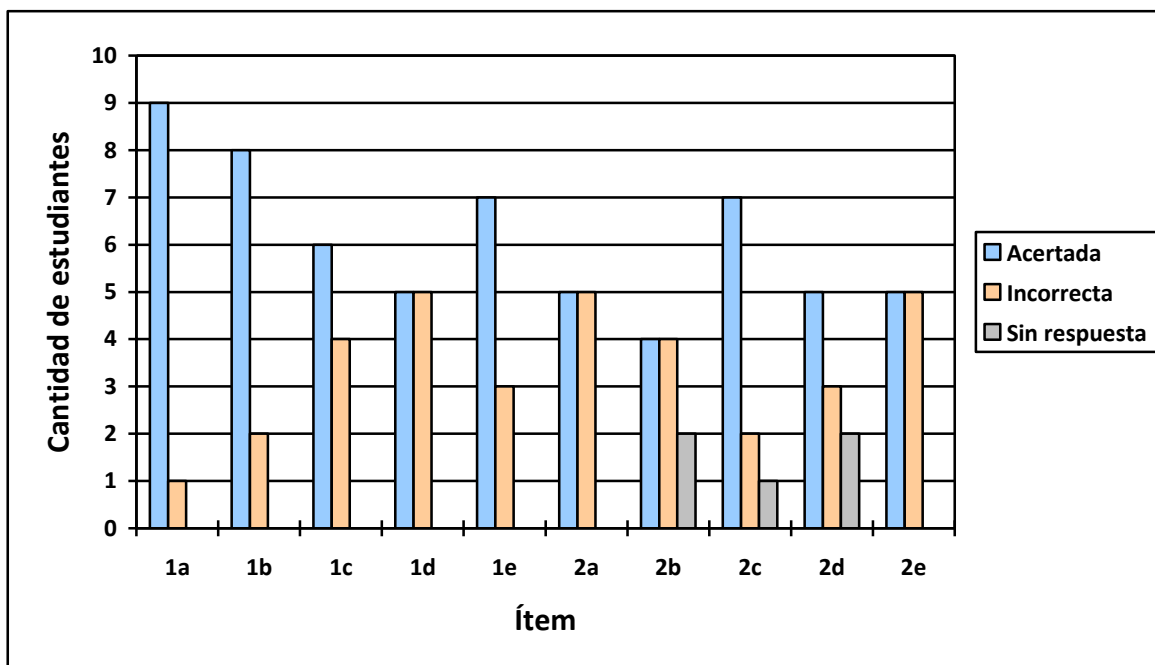
manifiestan dificultades en esta interpretación. Además, quienes construyeron correctamente la unidad identificaron bien la cantidad de partes que posee.

Solo el 12.5% de los estudiantes tuvo dificultades para establecer lo que es cada parte de la unidad cuando se dan las partes que contiene dicha unidad.

Todos los estudiantes tuvieron dificultades para reconstruir la unidad partiendo de fracciones propias e impropias, lo cual podría dar a entender que en el contexto discreto se hace aun más difícil que en el contexto continuo esta reconstrucción, debido a que las partes pueden tener más de un objeto. Se debe recordar que este tipo de ejercicios de reconstrucción de la unidad podrían evidenciar unos conocimientos avanzados de la relación parte-todo.

5.5 Prueba sobre representación de fracciones en la recta numérica

Figura 5-5: Categorización de las respuestas dadas por los estudiantes en la prueba representación de fracciones en la recta numérica.



De acuerdo a los resultados de la prueba mostrados en la Figura 5-5 y al análisis realizado de estos en el Anexo F, puede concluirse lo siguiente:

Los estudiantes que presentaron la prueba en su gran mayoría asocian correctamente puntos dados en la recta numérica con fracciones propias e impropias, alcanzando unos aciertos en las respuestas del 70%.

Cuando los estudiantes deben construir rectas numéricas para ubicar fracciones en ellas, se nota un mayor grado de dificultad, el cual se evidencia al determinar que en este tipo de ítems solo se acierta el 52% de las respuestas por parte de los estudiantes.

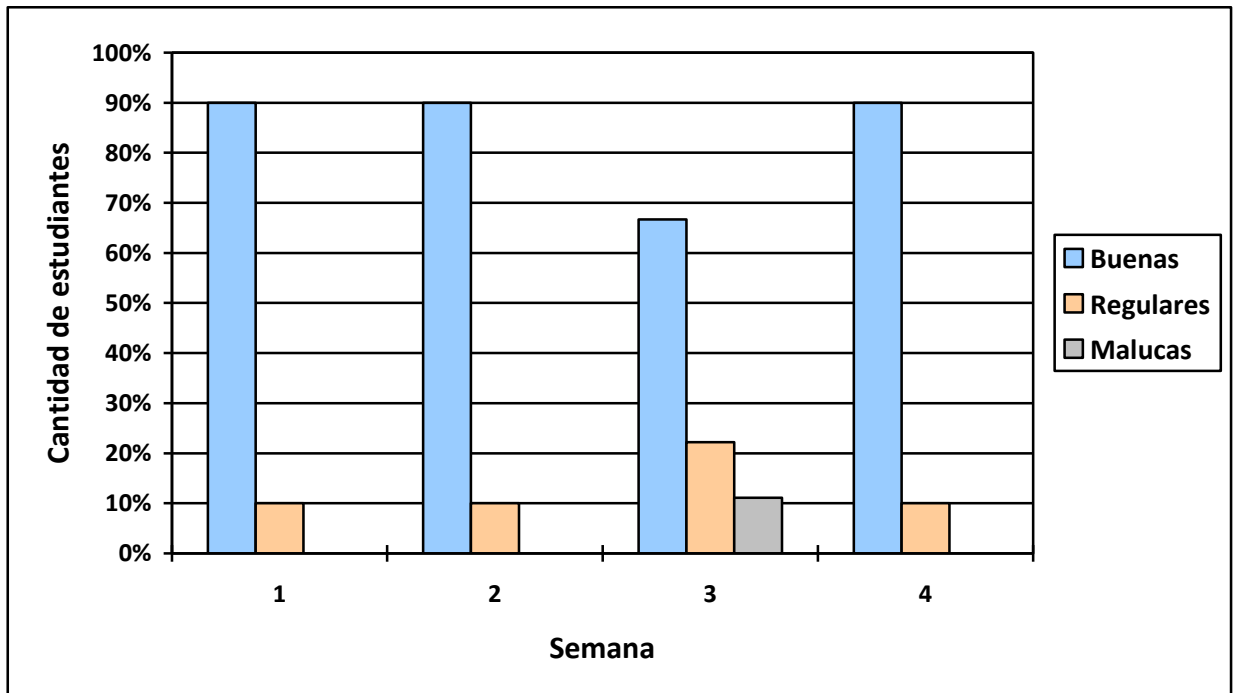
Se nota en general en la prueba un mayor desacierto en las respuestas cuando la unidad está dividida en más de cinco partes.

5.6 Apreciaciones de los estudiantes acerca de las clases

Durante el desarrollo de la aplicación, se estuvo preguntando cada semana a los estudiantes sus opiniones acerca de las clases, este registro de lo que los estudiantes dijeron, se encuentra en el ítem 4.3 que corresponde a la descripción del desarrollo de la aplicación, exactamente en los ítems correspondientes a las sesiones 3, 5, 8 y 13.

En la Figura 5-6 se muestran los resultados de lo que los estudiantes dijeron en las cuatro semanas que duró la aplicación sobre si las clases eran buenas, regulares o malas.

Figura 5-6: Resultados porcentuales de las apreciaciones de los estudiantes con respecto a las clases.



Se puede concluir que en general un gran porcentaje de los estudiantes catalogó las clases como buenas durante toda la aplicación, resaltando que estas según ellos fueron más dinámicas porque se utilizaron figuras, dibujos, hojas, entre otros, y se dio una mayor participación por parte de todos en la socialización de ejercicios, trabajando en equipo y respondiendo muchas preguntas de forma oral y en el tablero.

6. Conclusiones y recomendaciones

6.1 Conclusiones

El propósito principal del trabajo era el planteamiento y aplicación de una propuesta didáctica alrededor del concepto de fracción, destacando precisamente esa parte de conceptualización más que lo algorítmico, para tratar de dar significado a las operaciones que realizan los estudiantes. En este sentido se ha elaborado una propuesta que pretende dar respuesta a esta necesidad, al menos en lo que concierne al significado parte-todo, ya que el desarrollo de secuencias de enseñanza que consideren todos los significados son inapropiadas para llevar a cabo en un solo grado escolar y llevaría a confusiones en los estudiantes, a una escasa comprensión del concepto y a una aplicación muy larga de la propuesta, más bien se recomienda hacerlo durante el transcurso de varios grados.

Los resultados demuestran que partiendo de un diagnóstico en el cual se develan falencias en la conceptualización de la fracción, se puede mejorar la comprensión de este concepto mediante el desarrollo de actividades que consideren los contextos continuos y discretos de las fracciones y los sistemas de representación con concretos, diagramas, lenguaje natural y lenguaje simbólico, logrando en general buenos resultados en las pruebas aplicadas al respecto y en las percepciones que los estudiantes tienen de estas clases.

Sin embargo, también se devela en los resultados que existen dificultades en la conceptualización de fracciones impropias cuando se consideran con la relación parte-todo, lo cual permitiría entrever que este significado no es el más apropiado para potenciar el trabajo con este tipo de fracciones. Además, a pesar de que el trabajo utilizando diversos contextos y representaciones contribuye y da más herramientas a los estudiantes para la comprensión del concepto, dilata el proceso de enseñanza.

La propuesta didáctica planteada puede servir como modelo para el desarrollo de otras propuestas alrededor de las fracciones o de otros conceptos matemáticos, ya que esta está estructurada considerando los Principios de Dienes que en gran parte corresponden con las etapas de desarrollo de Piaget y además se tiene en cuenta los momentos metodológicos del modelo Escuela Activa Urbana o Escuela Nueva.

Los diversos significados de la fracción, como medida, relación parte-todo, cociente, operador y razón, hacen de este un megaconcepto que por sus múltiples interpretaciones ha dificultado el proceso de enseñanza y aprendizaje en la educación básica y media. Adicionalmente, no se ha dado la importancia requerida en la enseñanza de las

fracciones a la comprensión de este concepto, por el cual se suele pasar rápidamente según el diseño de los currículos, para ahondar en los procesos algorítmicos de sus operaciones básicas, que terminan siendo aprendizajes de corto plazo en los estudiantes, carentes de interpretación y aplicación en situaciones problémicas.

Es importante considerar el enfoque fenomenológico en el proceso de enseñanza y aprendizaje para la comprensión de conceptos, ya que es mediante este que se puede entender las situaciones de la realidad descritas por el concepto, lo cual en la actualidad es determinante en una educación que debe adaptarse a las necesidades del contexto, razón por la cual debe ser pragmática.

La consideración de propuestas didácticas basadas en actividades que dependen de la propia construcción realizada por los estudiantes, genera espacios de participación activa e interacción de los estudiantes, lo cual contribuye al dinamismo de las clases.

La adopción de estrategias didácticas se debe adaptar a las necesidades del aula, por lo cual es pertinente considerar fases en el desarrollo de las temáticas y de las clases que indaguen por los presaberes de los estudiantes, contribuyan a la comprensión de conceptos y fortalezcan su aprehensión mediante la puesta en práctica.

Los estudiantes reconocen y valoran las propuestas de enseñanza que tratan de darles más participación y protagonismo en el proceso de enseñanza y aprendizaje con actividades que incluyan manipulaciones, dibujo, expresión oral y escrita.

Impactar la percepción de los estudiantes utilizando diversos sistemas de representación, contribuye a la valoración de la diversidad en el aula.

La utilización de diversos sistemas de representación en la enseñanza de las Matemáticas, tratando de impactar perceptualmente a los estudiantes, es una de las alternativas que contribuyen a la comprensión de conceptos.

De considerarse los diversos significados de la fracción en el proceso de enseñanza y aprendizaje, se favorecerían los procesos de transversalización con otras áreas del conocimiento, como puede ser en Ciencias Naturales mediante los factores de conversión y en áreas económicas en las cuales se requiere del uso de razones, proporciones, probabilidades y porcentajes, entre otros. Esto con el fin de que los estudiantes adquieran conocimientos pragmáticos que puedan ser utilizados en diversos contextos de la realidad.

6.2 Recomendaciones

Es necesario organizar en los currículos del área de Matemáticas, la secuencia de enseñanza de las fracciones, tomando como referencia los significados abordados del concepto, aplicando desde el grado cuarto hasta séptimo secuencias didácticas que contribuyan a la comprensión del concepto de fracción como medida, cociente, operador y razón, respectivamente para cada grado, dejando la relación parte-todo como significado de apoyo o soporte para la conceptualización de los demás.




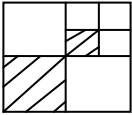
En investigaciones futuras sobre la didáctica de las fracciones, sería pertinente tratar de validar pruebas que sirvan para medir el grado de comprensión de los diversos significados de este concepto.

Se requiere enriquecer el campo de didáctica de las fracciones con propuestas acerca de los diferentes significados de este concepto.

A. Anexo: Pruebas consideradas para la aplicación de la propuesta didáctica



INSTITUCIÓN EDUCATIVA INTEGRADO VILLA DEL PILAR
CUESTIONARIO EXPLORATORIO SOBRE FRACCIONES
GRADO SÉPTIMO

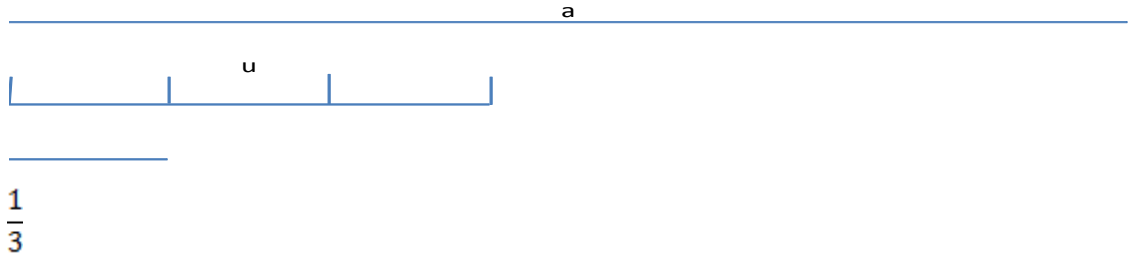
1. Qué fracción expresa
 - a. 3 días de una semana:
 - b. 8 horas de un día:
2. Colorea las partes para ilustrar las fracciones
 - a. $\frac{7}{8}$ 
 - b. $\frac{3}{7}$ 
3. Escriba en palabras y en números (fracciones) a que parte de área corresponde la región sombreada
 - a.  :
 - b.  :
4. Representa mediante alguna figura(s) y en la recta numérica las siguientes fracciones
 - a. $\frac{5}{9}$
 - b. $\frac{7}{4}$

5. Encuentra

a. $\frac{3}{4}$ de 100

b. $\frac{1}{3}$ de 60

6. ¿Cuál es la medida del segmento a (en fracción) tomando como unidad de medida el segmento u ? (Punto a resolver con uso de material concreto).



7. Carlos y sus 3 amigos han decidido comprar 2 pizzas enteras para el algo. ¿Qué parte de las pizzas le corresponde a cada uno?

8. En una rifa se han introducido en una bolsa balotas de diversos colores, que otorgan según el color los siguientes premios:

Balotas blancas: hamburguesa. Balotas negras: perro caliente.

Balotas verdes: arepa con queso. Balotas amarillas: sin premio.

Si en total hay 20 balotas de las cuales 1 es blanca, 2 son negras, 3 son verdes y 14 son amarillas. ¿Cuál es la probabilidad o posibilidad de ganarse una hamburguesa?

9. De un depósito de aceite se extraen $\frac{4}{5}$ de los 150 litros que contiene. ¿Cuántos litros de aceite se sacaron del depósito?

10. En un salón con 15 estudiantes, 8 de ellos son niñas, ¿qué fracción representa los niños?

Aspectos a identificar con la aplicación del cuestionario exploratorio

Pregunta 1: Traslación de situaciones cotidianas a lenguaje simbólico propio de fracciones.

Pregunta 2: Conversión de expresiones gráficas a lenguaje simbólico propio de fracciones. Manejo de la relación parte todo.

Pregunta 3: Traslación del lenguaje gráfico a lenguaje simbólico. Manejo de la relación parte todo. En 3b reconocimiento de una parte como un todo.

Pregunta 4: Traslación del lenguaje simbólico a lenguaje gráfico. Manejo de la relación parte todo.

Pregunta 5: Manejo del significado de la fracción como operador.

Pregunta 6: Manejo del significado de la fracción como medida. Uso de material concreto.

Pregunta 7: Manejo del significado de la fracción como cociente.

Pregunta 8: Manejo del significado de la fracción como razón (probabilidad).

Pregunta 9: Manejo del significado de la fracción como operador en un problema.

Pregunta 10: Manejo del significado de la fracción como razón.

Referencias

Preguntas 2 y 3a: Tomadas de Entender fracciones. Recuperado el 19 de marzo de 2010 de

http://www.mamutmaticas.com/muestras/Fracciones1_Entender_fracciones.pdf

Pregunta 3b: Tomada de Martínez y Lascano (2001, p. 165).



INSTITUCIÓN EDUCATIVA INTEGRADO VILLA DEL PILAR
 REPRESENTACIÓN Y CLASIFICACIÓN DE FRACCIONES
 GRADO SÉPTIMO

Completar la siguiente tabla sobre representaciones de las fracciones y tipo de fracciones

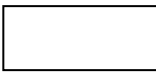
REPRESENTACIÓN			TIPO DE FRACCIÓN
Gráfica	Verbal	Simbólica	
			
	Un quinto		
		$\frac{3}{2}$	
			Impropia
			
	Cinco sextos		
		$2\frac{2}{5}$	
			
			Propia
	Tres unidades y dos tercios		



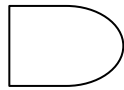
INSTITUCIÓN EDUCATIVA INTEGRADO VILLA DEL PILAR
RECONSTRUCCIÓN DE LA UNIDAD EN EL CONTEXTO CONTINUO
GRADO SÉPTIMO

a. Reconstruye las unidades de acuerdo a las partes dadas:

1. Si el siguiente rectángulo representa $1/5$ de la unidad, dibuja la unidad



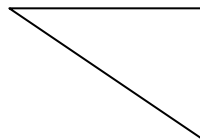
2. Si la siguiente figura es un medio del todo, ¿Cuál es el todo?



3. Si el siguiente rectángulo es $3/7$ del todo, dibuja el todo



4. Si el siguiente triángulo es dos cuartos de la unidad, ¿Cuál es la unidad?

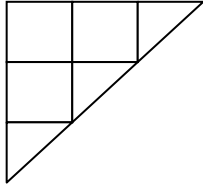


5. Si la siguiente figura es $4/5$ de la unidad, dibuja la unidad

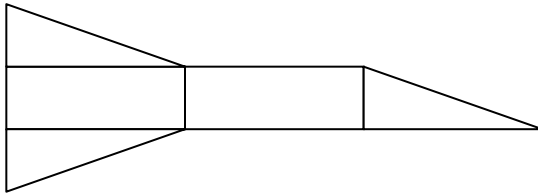


b. Reconoce la unidad y sus partes:

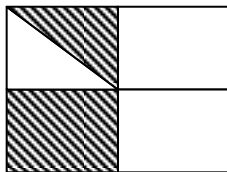
6. Colorea o sombrea los cuatro novenos de la siguiente figura



7. Colorea o sombrea los $\frac{4}{7}$ de la siguiente figura



8. Escribe en palabras y en números la fracción sombreada en la figura





INSTITUCIÓN EDUCATIVA INTEGRADO VILLA DEL PILAR

LAS FRACCIONES EN EL CONTEXTO DISCRETO

GRADO SÉPTIMO

1. Completar la siguiente tabla sobre fracciones utilizando discretos

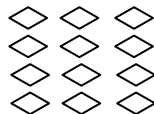
Unidad	¿Cuántas partes tiene la unidad?	¿Qué es cada parte de la unidad?
	6	
		1/3
	Cinco	
		Un cuarto
	2	

2. Reconstruir la unidad a partir de objetos discretos

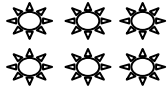
a) Si la figura representa 1/4 de la unidad, dibuja la unidad completa



b) ¿Cuál es la unidad si la figura representa los tres quintos de esta?



c) La figura representa $\frac{3}{2}$ de la unidad, ¿Cuál es la unidad?



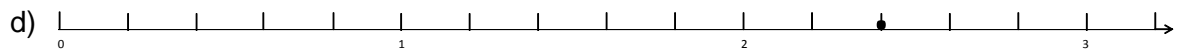
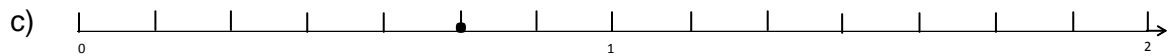
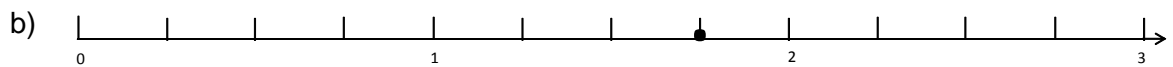
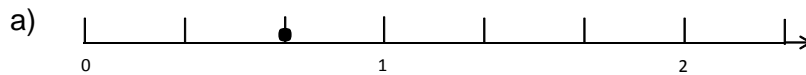
d) ¿Cuál será la unidad si la figura representa los cuatro medios de esta?





INSTITUCIÓN EDUCATIVA INTEGRADO VILLA DEL PILAR
REPRESENTACIÓN DE FRACCIONES EN LA RECTA NÚMÉRICA
GRADO SÉPTIMO

1. ¿Qué fracción representa el punto sobre la recta numérica?



1. Representa en la recta numérica las siguientes fracciones

a) $\frac{3}{6}$

b) Cuatro séptimos

c) $\frac{8}{4}$

d) Siete medios

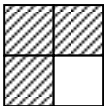
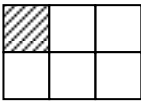

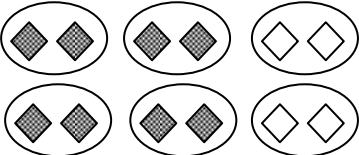
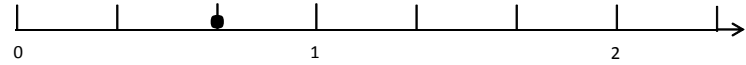
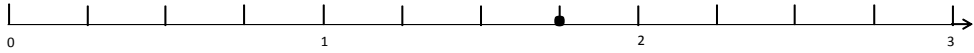
e) $\frac{8}{9}$

INSTITUCIÓN EDUCATIVA INTEGRADO VILLA DEL PILAR

RELACIONES DE EQUIVALENCIA⁶

GRADO SÉPTIMO

1. Dibuja una fracción equivalente a

- a) 
- b) 
- c) 
- d) 
- e) 
- f) 

2. Encuentra dos fracciones equivalentes en cada caso para las siguientes fracciones

- a) $1/7$
- b) $4/11$
- c) $9/2$
- d) $5/3$
- e)

⁶ Prueba no aplicada.

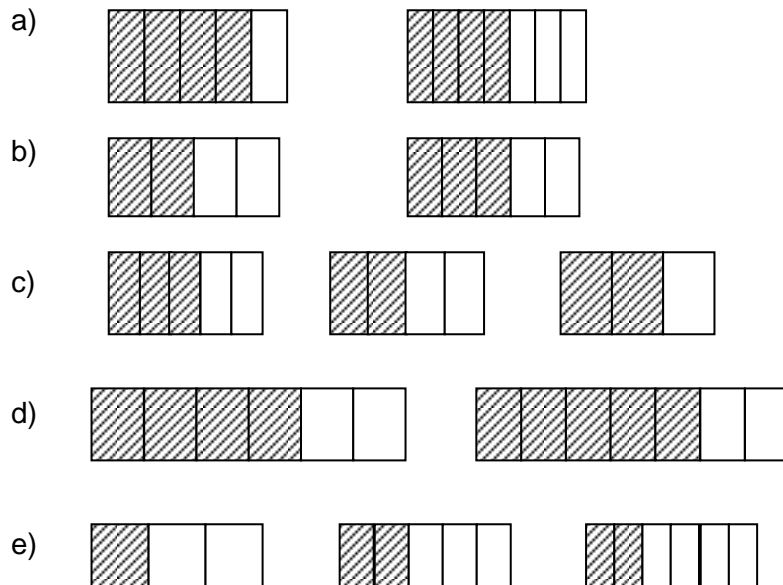
INSTITUCIÓN EDUCATIVA INTEGRADO VILLA DEL PILAR



RELACIONES DE ORDEN⁷

GRADO SÉPTIMO

1. Ordene las siguientes figuras de mayor a menor de acuerdo a la fracción que representan, colocando 1 a la fracción mayor, 2 a la fracción que está en el medio y 3 a la fracción menor de todas.



2. Ordene las siguientes fracciones de menor a mayor utilizando el algoritmo

- a) $5/7$ $6/7$ $4/7$
- b) $5/8$ $5/9$
- c) $2/3$ $7/9$
- d) $4/9$ $4/6$ $4/12$
- e) $3/8$ $2/5$ $4/10$

⁷ Prueba no aplicada.

B. Anexo: Resultados y análisis de la prueba diagnóstica

A continuación se presentan los ítems del cuestionario exploratorio aplicado, con los cuales se buscaba el reconocimiento de los diferentes significados de las fracciones utilizando diversas representaciones.

Además, se muestran las respuestas dadas por los estudiantes a estos ítems y un breve análisis descriptivo y porcentual de los resultados.

Ítem 1

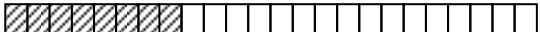
Qué fracción expresa

- a. 3 días de una semana.
- b. 8 horas de un día.

Respuestas dadas al ítem 1

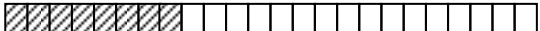
- a. $3/7$ b. $8/24$

- a. 

- b. 

- a. $7/3$ b. $24/8$.

- a. 

- b. 

- a. $3/1$ b. $8/1$

- a. $3/5$ b. $8/2$

- a. $\frac{3 \text{ semanas}}{7 \text{ días}}$ b. $\frac{480 \text{ minutos}}{8 \text{ horas}}$

- a. $5/12$ b. $2/4$
- a. 12 partes y 8 cuartos b. 4 partes y 4 medios.
- a. $7/10$, diez séptimos b. $2/3^4$

Análisis descriptivo y porcentual

En este ítem cada literal tiene un grado de dificultad diferente, siendo más complejo el literal b, ya que en este se busca el reconocimiento del atributo “las partes también se pueden considerar como totalidad”. Por esta razón, se hace un análisis de las respuestas dadas a cada literal por separado.

Ítem 3a

Siete estudiantes (63.64%) tienen respuestas que corresponden a las mostradas en las tres primeras respuestas anotadas anteriormente, las cuales son correctas, de las cuales seis estudiantes (54.55%) dieron la respuesta en forma simbólica y solo un estudiante (9.09%) dio la respuesta del literal utilizando palabras y en forma simbólica. Los otros cuatro estudiantes (36.36%) dieron las demás respuestas que se consideran incorrectas.

Ítem 3b

Ninguno de los 11 estudiantes (100%) respondió bien este literal como se aprecia en las respuestas dadas.







Ítem 4

Representa mediante alguna figura(s) ó en la recta numérica las siguientes fracciones

a. $\frac{5}{9}$

b. $\frac{7}{4}$

Respuestas dadas al ítem 4

- a. 
- a. 
- a. 
- b. 
- b. 
- b. 

Análisis descriptivo y porcentual

Este ítem presenta grados de dificultad diferentes para cada literal, ya que en el literal a la fracción es propia lo cual podría ser de más fácil representación gráfica que la fracción impropia del literal b. Por esta razón, el análisis se realiza de forma separada para cada literal.

Ítem 4a

Seis estudiantes (54.55%) dieron respuestas correctas que corresponden a las dos primeras mostradas anteriormente, de las cuales cinco estudiantes (45.45%) hicieron representaciones en el contexto continuo utilizando el rectángulo, solo un estudiante (9.09%) utilizó el contexto discreto para hacer la representación mediante triángulos.

Cuatro estudiantes (36.36%) respondieron el literal de forma incorrecta. Un estudiante (9.09%) no respondió el literal.

Ítem 4b

Cuatro estudiantes (36.36%) acertaron en la respuesta de este literal, todos utilizaron el contexto continuo con rectángulos para la representación.

Cinco estudiantes (45.46%) respondieron de forma incorrecta, de los cuales un estudiante hizo una aproximación interesante utilizando cuadrados en el contexto discreto, lo cual se muestra en la segunda respuesta anotada anteriormente. Dos estudiantes (18.18%) no respondieron el literal.

Ítem 5

Encuentra

a. $\frac{3}{4}$ de 100

b. $\frac{1}{3}$ de 60

Respuestas dadas al ítem 5

- a. 25 b. 20
- a. 25/50 b. 1/30
- a. 45 b. 20

Análisis descriptivo y porcentual del ítem 5

Los literales que contiene el ítem tienen diferente grado de dificultad debido a que puede ser menos compleja la solución del literal b por tratarse de una fracción unitaria. Esto conduce a una separación en el análisis de ambos literales.

Ítem 5a

Ninguno de los seis estudiantes (54.55%) que resolvió el literal acertó en la respuesta, lo cual podría evidenciar algún tipo de confusión, según las respuestas dadas por los estudiantes, en las operaciones que deben realizarse con la fracción que en este caso se presenta como operador. Cinco estudiantes (45.45%) no respondieron el literal.

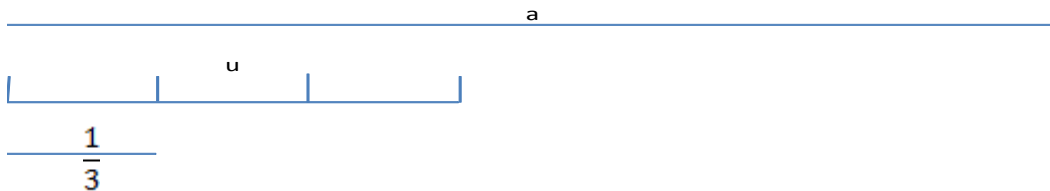
Ítem 5b

Cinco estudiantes (45.45%) acertaron la respuesta del literal. Un estudiante (9.09%) dio una respuesta incorrecta. Cinco estudiantes (45.45%) no respondieron el literal.

En general el hecho de que el 45.45% de los estudiantes no haya respondido el ítem, podría evidenciar algún grado de desconocimiento del significado de fracción como operador en los estudiantes.

Ítem 6

¿Cuál es la medida del segmento **a** (en fracción) tomando como unidad de medida el segmento **u**? (Punto a resolver con uso de material concreto).



Para facilitar la solución del ítem se entregó a cada estudiante dos tiras de papel, una correspondiente al segmento **a** y otra correspondiente al segmento **u**.

Respuestas dadas al ítem 6

- Dos y media se lleva al medirlos, $\frac{2}{1/2}$
- Dos y un cuarto.
- Dos y un medio.
- El segmento **u** cabe 7 veces en el **a**.
- $5/4$.
- Todo está en 3 partes pero chicas.
- Todo es 3.
- Dos medios.
- $1/2$.

Análisis descriptivo y porcentual del ítem 6

A pesar de que las cuatro primeras respuestas dadas por igual cantidad de estudiantes son en algún grado una aproximación a la respuesta correcta, no logran la exactitud en la medida pedida. Además de estos cuatro estudiantes hay otros cinco, es decir, nueve en total (81.82%) que dan respuestas incorrectas. Dos estudiantes (18.18%) no respondieron el ítem.

Podría concluirse con respecto a este ítem que los estudiantes que se aproximan a la respuesta correcta requieren de una mayor exactitud en el proceso de medición debido a



que se les dio material concreto para resolver el ítem y/o en la apreciación visual del gráfico presentado.

Para los demás estudiantes podría existir desconocimiento de la fracción como medida.

Ítem 7

Carlos y sus 3 amigos han decidido comprar 2 pizzas enteras para el algo. ¿Qué parte de las pizzas le corresponde a cada uno?

Respuestas dadas al ítem 7

-  4/2. Les toca de a media pizza, o sea, de a dos partes.
- A cada uno le corresponde media pizza.
-  4/2. Les toca de a un medio.
- 3/12.
- 8/2.
- $10 \times 4 = 40$, $40 \div 4 = 10$ A cada uno le toca 10 pedazos de pizza.

Análisis descriptivo y porcentual del ítem 7

Las tres primeras respuestas corresponden a igual cantidad de estudiantes (27.27%), los cuales dan una buena respuesta del ítem en general, aunque en la respuesta uno se evidencia una inadecuada representación simbólica de la fracción, al igual que en la respuesta tres, en donde además se hace una representación gráfica que no corresponde con la situación de reparto planteada.

Tres estudiantes (27.27%) plantearon las respuestas restantes, las cuales no son correctas de acuerdo a lo planteado en el ítem. Cinco estudiantes (45.46%) no respondieron el ítem.

Ítem 8

En una rifa se han introducido en una bolsa balotas de diversos colores, que otorgan según el color los siguientes premios:

Balotas blancas: hamburguesa. Balotas negras: perro caliente.

Balotas verdes: arepa con queso. Balotas amarillas: sin premio.

Si en total hay 20 balotas de las cuales 1 es blanca, 2 son negras, 3 son verdes y 14 son amarillas. ¿Cuál es la probabilidad o posibilidad de ganarse una hamburguesa?

Respuestas dadas al ítem 8

- La posibilidad es una balota blanca.
- La posibilidad de ganarse la hamburguesa es del 1%.

- $1/20$ $3/2$ $14/0$
- La probabilidad es 1% porque el resto son coloridas.

Análisis descriptivo y porcentual del ítem 8

Las respuestas corresponden a cuatro estudiantes (36.36%), con aproximaciones a lo planteado en el ítem pero sin llegar a la respuesta correcta. En la respuesta uno el estudiante intuitivamente soluciona la situación pero no logra el resultado matemático esperado, en las respuestas dos y cuatro se evidencia una relación inadecuada de cantidad de balotas con porcentajes, en la respuesta tres se nota que el estudiante plantea razones pero desconoce su interpretación.

Siete estudiantes (63.64%) no respondieron el ítem, lo cual haría suponer que estos estudiantes desconocen el uso de la fracción como razón.

Ítem 9

De un depósito de aceite se extraen $4/5$ de los 150 litros que contiene. ¿Cuántos litros de aceite se sacaron del depósito?

Respuestas dadas al ítem 9

- Del depósito de aceite se sacaron 1 litro y medio.
- $150 \times 5 = 750$ $750 \times 4 = 3000$ 3000 litros de aceite
- Se sacaron $1/10$.

Análisis descriptivo y porcentual del ítem 9

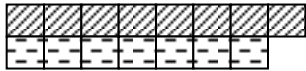










Tres estudiantes (27.27%) dieron las respuestas anteriores las cuales son incorrectas. Se evidencia confusión en el proceso operativo a seguir con la fracción dada.

Ocho estudiantes (72.73%) no respondieron el ítem, esto podría demostrar una vez más que los estudiantes desconocen el significado de fracción como operador.

Ítem 10

En un salón con 15 estudiantes, 8 de ellos son niñas, ¿qué fracción representa los niños?

Respuestas dadas al ítem 10

- $\frac{7}{15}$  las niñas  los niños 
- $\frac{15}{8}$ Niñas     niños    

- $\frac{8 \text{ Niñas}}{7 \text{ Niños}}$
- $\frac{15}{8}$
- $\frac{8}{15}$
- $\frac{7}{8}$

Análisis descriptivo y porcentual del ítem 10

Un estudiante (9.1%) da la primera respuesta que es correcta, cinco estudiantes (45.45%) dan las otras respuestas las cuales son incorrectas.

Cinco estudiantes (45.45%) no respondieron el ítem.

Se evidencia una vez más que los estudiantes podrían tener dificultades en el establecimiento de razones y al parecer gran parte de estos desconocen el significado de fracción como razón.

Al final de la prueba se hace a los estudiantes la pregunta: ¿Cómo le pareció la prueba? Justifique.

Respuestas dadas a la pregunta planteada

- Buena

Aunque no entendí algunas preguntas porque se me olvidó. Fue una actividad divertida. Estábamos repasando los temas. Esto nos puede ayudar a recordar algo aprendido y que debemos mejorar. Recordamos cosas que quizás nos enseñaron. Aprendí eso en 5° y 6° y me acordé.

- Regular

Porque se me olvidó.

- Maluca

No la entendí. Porque no sabía, en ese tema mis compañeros trabajaban por mí. Porque se me olvidó lo que vi los años pasados.

Análisis descriptivo y porcentual de las percepciones de los estudiantes con respecto a la prueba

A seis estudiantes (54.55%) les agradó la prueba, porque en general consideran que les sirve para recordar temas vistos en años anteriores.


A un estudiante (9.09%) la prueba le pareció regular porque ha olvidado los conocimientos requeridos para resolverla.

A cuatro estudiantes (36.36%) les pareció la prueba maluca porque no sabían cómo resolver las preguntas ya que según ellos no recuerdan los conocimientos requeridos para resolverla.

C. Anexo: Resultados y análisis de la prueba representaciones y clasificación de fracciones

Se presentan a continuación los ítems, resultados y análisis de esta prueba.

Ítem 1

REPRESENTACIÓN			TIPO DE FRACCIÓN
Gráfica	Verbal	Simbólica	
			

Respuestas dadas al ítem 1

REPRESENTACIÓN			TIPO DE FRACCIÓN
Gráfica	Verbal	Simbólica	
	Cuatro séptimos	$4/7$	Propia
	Siete cuartos	$7/4$	Impropia
	Cuatro tercios	$4/3$	


Análisis del ítem 1

Siete estudiantes aciertan en la representación verbal, ocho en la simbólica, seis la clasifican bien.

Ítem 2

REPRESENTACIÓN			TIPO DE FRACCIÓN
Gráfica	Verbal	Simbólica	
	Un quinto		

Respuestas dadas al ítem 2

REPRESENTACIÓN			TIPO DE FRACCIÓN
Gráfica	Verbal	Simbólica	
		1/5	Unitaria Propia

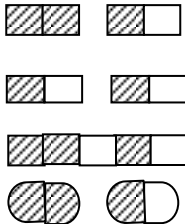
Análisis del ítem 2

Diez estudiantes representan correctamente la fracción en forma gráfica y simbólica, dos la clasifican como propia y ocho como unitaria. En este ítem todas las respuestas fueron válidas.

Ítem 3

REPRESENTACIÓN			TIPO DE FRACCIÓN
Gráfica	Verbal	Simbólica	
		3/2	

Respuestas dadas al ítem 3

REPRESENTACIÓN			TIPO DE FRACCIÓN
Gráfica	Verbal	Simbólica	
	<p>Tres medios</p> <p>Dos unidades y un medio</p> <p>Dos tercios</p>		<p>Impropia</p> <p>Propia</p>



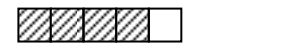



Análisis del ítem 3

Siete estudiantes aciertan en la representación gráfica, ocho aciertan en la verbal y siete aciertan en su clasificación.

Ítem 4

REPRESENTACIÓN			TIPO DE FRACCIÓN
Gráfica	Verbal	Simbólica	
			Impropia


Respuestas dadas al ítem 4

REPRESENTACIÓN			TIPO DE FRACCIÓN
Gráfica	Verbal	Simbólica	
	Cinco medios	$5/2$	
	Dos unidades y media	$2 \frac{1}{2}$	
	Cuatro quintos	$4/5$	
	Dos tercios	$2/3$	
	Dos tercios	$5/3$	
	Tres quintos	$6/4$	
	Seis cuartos		

Análisis del ítem 4

Seis estudiantes realizan bien la representación gráfica, cuatro realizan bien la verbal y seis realizan bien la simbólica.

Ítem 5

REPRESENTACIÓN			TIPO DE FRACCIÓN
Gráfica	Verbal	Simbólica	
			

Respuestas dadas al ítem 5

REPRESENTACIÓN			TIPO DE FRACCIÓN
Gráfica	Verbal	Simbólica	
	Dos cuartos	$2/4$	Propia
	Dos medios	$2/2$	

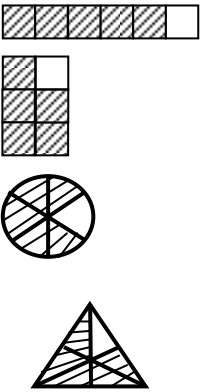
Análisis del ítem 5

Nueve estudiantes aciertan en las representaciones verbal y simbólica y en la clasificación.

Ítem 6

REPRESENTACIÓN			TIPO DE FRACCIÓN
Gráfica	Verbal	Simbólica	
	Cinco sextos		

Respuestas dadas al ítem 6

REPRESENTACIÓN			TIPO DE FRACCIÓN
Gráfica	Verbal	Simbólica	
		$5/6$	Propia Impropia

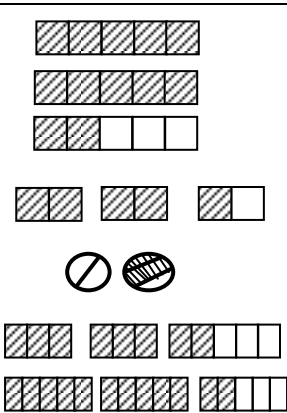
Análisis del ítem 6

Todos los estudiantes aciertan en las representaciones gráfica y simbólica y siete clasifican bien la fracción.

Ítem 7

REPRESENTACIÓN			TIPO DE FRACCIÓN
Gráfica	Verbal	Simbólica	
		2 2/5	


Respuestas dadas al ítem 7

REPRESENTACIÓN			TIPO DE FRACCIÓN
Gráfica	Verbal	Simbólica	
	Dos unidades dos quintos		Mixta Impropia Propia

Análisis del ítem 7

Cinco estudiantes aciertan en la representación gráfica y uno no da respuesta a esta representación, seis aciertan en la representación verbal y tres no la responden, cinco dicen que la fracción es impropia, uno afirma que es mixta, es decir, seis estudiantes la clasifican bien y uno no clasifica la fracción..

Ítem 8

REPRESENTACIÓN			TIPO DE FRACCIÓN
Gráfica	Verbal	Simbólica	
			

Respuestas dadas al ítem 8

REPRESENTACIÓN			TIPO DE FRACCIÓN
Gráfica	Verbal	Simbólica	
	Una unidad y cuatro tercios	$1 \frac{4}{3}$	Mixta
	Siete Octavos	$\frac{7}{8}$	Impropia
	Uno de ocho	$\frac{1}{8}$	Unitaria
	Ocho séptimos	$\frac{8}{7}$	Impropia
	Siete cuartos	$1 \frac{3}{4}$ ó $\frac{7}{4}$	






Análisis del ítem 8

Cuatro estudiantes aciertan en la representación verbal (uno la dio en fracción mixta), tres aciertan en la representación simbólica (todos expresaron en mixtos y dos además en impropia), para siete estudiantes la fracción es impropia y uno dice que es mixta, es decir, ocho estudiantes la clasifican correctamente.

Ítem 9

REPRESENTACIÓN			TIPO DE FRACCIÓN
Gráfica	Verbal	Simbólica	
			Propia

Respuestas dadas al ítem 9

REPRESENTACIÓN			TIPO DE FRACCIÓN
Gráfica	Verbal	Simbólica	
	Tres cuartos	$\frac{3}{4}$	
	Cuatro medios	$\frac{4}{2}$	
	Dos cuartos	$\frac{2}{4}$	
	Cuatro medios	$\frac{4}{2}$	
	Un medio	$\frac{1}{2}$	



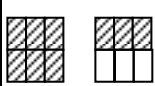
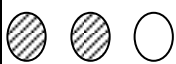
Análisis del ítem 9

Nueve estudiantes responden acertadamente en la representación gráfica, cinco responden bien en la representación verbal, seis aciertan en la representación simbólica y uno no responde el ítem.

Ítem 10

REPRESENTACIÓN			TIPO DE FRACCIÓN
Gráfica	Verbal	Simbólica	
	Tres unidades y dos tercios		

Respuestas dadas al ítem 10

REPRESENTACIÓN			TIPO DE FRACCIÓN
Gráfica	Verbal	Simbólica	
		3 2/3	Mixta
		11/3	Impropia
			
			

Análisis del ítem 10

Seis estudiantes acertaron en la representación gráfica y uno no responde en esta representación, todos los estudiantes acertaron en la representación simbólica, de los cuales cuatro lo hicieron en ambas posibilidades y el resto solo expresaron mediante fracción mixta, nueve estudiantes acertaron en la clasificación de la fracción, de los cuales uno dice que es mixta.

D. Anexo: Resultados y análisis de la prueba reconstrucción de la unidad en el contexto continuo



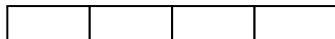
Se muestra a continuación los ítems, resultados y análisis de esta prueba.

Ítem 1

Si el siguiente rectángulo representa $\frac{1}{5}$ de la unidad, dibuja la unidad



Respuestas dadas al ítem 1

- 
- 
- 

Análisis descriptivo y porcentual del ítem 1

Nueve estudiantes dieron la primera respuesta y un estudiante dio la segunda, los diez estudiantes (90.91%) acertaron en la respuesta.

Un estudiante (9.09%) dio la tercera respuesta, la cual es incorrecta.

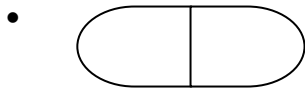
Se nota en general por las respuestas dadas, una buena reconstrucción de la unidad a partir de fracciones unitarias.

Ítem 2

Si la siguiente figura es un medio del todo, ¿Cuál es el todo?



Respuestas dadas al ítem 2



Análisis descriptivo y porcentual del ítem 2

Todos los 11 estudiantes (100%) dieron la respuesta anterior, la cual es correcta.

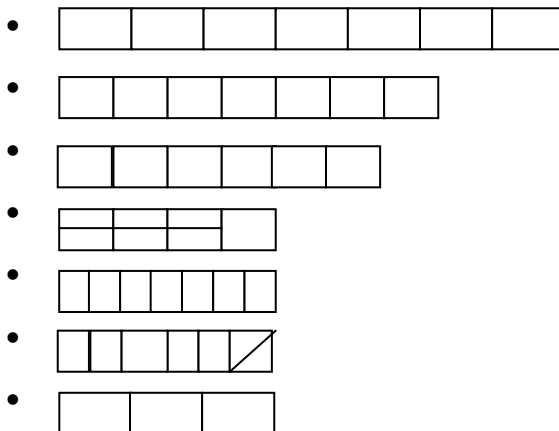
Una vez más se evidencia que los estudiantes reconstruyen bien la unidad a partir de fracciones unitarias, en este caso en un ejercicio con un grado de dificultad menor al anterior.

Ítem 3

Si el siguiente rectángulo es $\frac{3}{7}$ del todo, dibuja el todo



Respuestas dadas al ítem 3



Análisis descriptivo y porcentual del ítem 3

Tres estudiantes (27.27%) dieron la primera respuesta, la cual es correcta, lo que podría demostrar que estos estudiantes entienden como reconstruir la unidad a partir de una fracción no unitaria.

Dos estudiantes dieron la segunda respuesta, que podría sugerir una aproximación a lo pedido, al menos tratando de completar la unidad, sin embargo, hubo algún problema en la división de la figura dada en las partes indicadas por el numerador.

Otro estudiante (respuesta tres) divide la figura en más partes de las dadas y no completa el total de partes pedida.

Otros tres estudiantes dieron las respuestas siguientes, en la cuales podría evidenciarse que aun no se comprende el proceso de reconstrucción de la unidad con fracciones no unitarias y solo tratan de dividir la figura dada en la cantidad de partes que indica el denominador, dos de ellos sin considerar la igualdad que deben tener las partes.

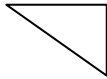
La última respuesta corresponde a un estudiante, el cual a pesar de dividir la figura en las partes indicadas por el numerador no completa la unidad agregando más partes.

En general, siete estudiantes (63.64%) dieron respuestas incorrectas.

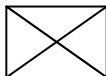
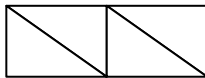
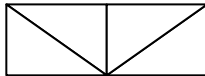
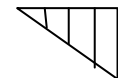
Un estudiante (9.09%) no respondió el ítem.

Ítem 4

Si el siguiente triángulo es dos cuartos de la unidad, ¿Cuál es la unidad?



Respuestas dadas al ítem 4

- 
- 
- 
- 

Análisis descriptivo y porcentual del ítem 4

Cinco estudiantes (45.45%) dieron la primera respuesta, la cual es correcta.

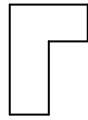
Tres estudiantes dieron la segunda respuesta, dos estudiantes dieron la tercera respuesta. Al parecer estos estudiantes trabajaron el ejercicio de reconstrucción de la unidad a partir de una fracción unitaria.

Un estudiante dio la última respuesta, que podría evidenciar interés por dividir la figura en el total de partes indicada por el denominador, más no por reconstruir la unidad.

Todos ellos, en total seis estudiantes (54.55%) dieron respuestas incorrectas. Podría evidenciarse que gran parte de los estudiantes tienen dificultades para reconstruir la unidad a partir de fracciones no unitarias.

Ítem 5

Si la siguiente figura es $\frac{4}{5}$ de la unidad, dibuja la unidad



Respuestas dadas al ítem 5

-
-
-
-

Análisis descriptivo y porcentual del ítem 5

Tres estudiantes dieron la primera respuesta y dos dieron la segunda, en total cinco estudiantes (45.46%) respondieron correctamente.

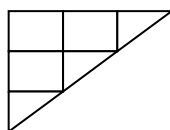
Tres estudiantes dieron la tercera respuesta, quizás se dejaron llevar por la impresión visual de completar un rectángulo como unidad. Un estudiante dio la quinta respuesta. Es decir, cuatro estudiantes (36.36%) dieron respuestas erradas.

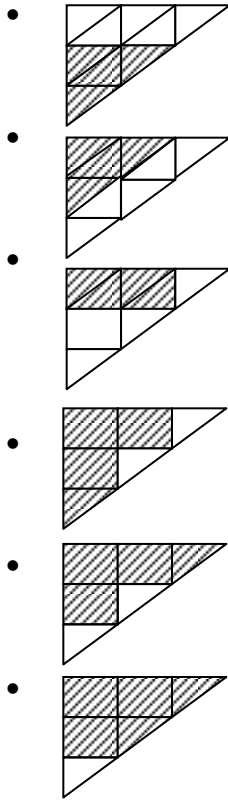
Dos estudiantes (18.18%) no respondieron el ítem.

Al parecer se continúa presentando la misma proporción de estudiantes que saben cómo reconstruir la unidad a partir de fracciones no unitarias y los que tienen dificultades al respecto.

Ítem 6

Colorea o sombrea los cuatro novenos de la siguiente figura



Respuestas dadas al ítem 6*Análisis descriptivo y porcentual del ítem 6*

En este ítem junto a los siguientes, no se pretende completar la unidad adicionando partes, se pretende determinar el reconocimiento de la unidad y las partes así como de la igualdad de estas, trascendiendo la percepción visual, lo cual podría develar un reconocimiento avanzado de la relación parte-todo en las fracciones.

Tres estudiantes dieron la primera respuesta, otros tres dieron la segunda y uno dio la tercera, es decir, en total siete estudiantes (63.64%) obtuvieron respuestas correctas.

Dos estudiantes dieron la cuarta respuesta y otro dio la quinta. Estos tres estudiantes a pesar de que distinguen la cantidad de partes a sombrear indicadas por el numerador en este ejercicio, podrían tener dificultades para reconocer el total de partes que debe tener la unidad y/o la división de la unidad en partes iguales y/o dificultad para interpretar la representación de la fracción con palabras.

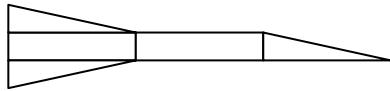
Un estudiante dio la última respuesta, en la cual además de poder presentarse alguna ó algunas de las dificultades mencionadas anteriormente, se le podría adicionar el no reconocimiento de la cantidad de partes a sombrear.

En total, cuatro estudiantes (36.36%) obtuvieron respuestas incorrectas.

En general, gran parte del grupo reconoce la unidad y sus partes y realiza una división uniforme de la unidad en el ejercicio planteado.

Ítem 7

Colorea o sombrea los $\frac{4}{7}$ de la siguiente figura



Respuestas dadas al ítem 7

-
-
-
-

Análisis descriptivo y porcentual del ítem 7

Tres estudiantes dieron respuestas como la primera, otros cuatro dieron respuestas como la segunda, es decir, siete estudiantes (63.64%) tienen respuestas correctas.

Tres estudiantes dieron la tercera respuesta, lo cual podría develar dificultades en la interpretación de la representación simbólica de la fracción y/o en el total de partes de la unidad y/o en la división de la unidad en partes iguales.

Un estudiante dio la última respuesta, lo cual podría evidenciar dificultades en la interpretación de la representación simbólica de la fracción y/o en el total de partes de la unidad.

En total, cuatro estudiantes (36.36%) tienen respuestas incorrectas.

En este ejercicio se continúa presentando la misma proporción de estudiantes con respuestas correctas e incorrectas acerca del reconocimiento de la unidad y sus partes y la división uniforme de la unidad, con respecto al ítem 6.

Ítem 8

Escribe en palabras y en números la fracción sombreada en la figura

*Respuestas dadas al ítem 8*

- Dos cuartos, $2/4$
- $2/4$
- Dos quintos, $2/5$
- Un medio

Análisis descriptivo y porcentual del ítem 8

Tres estudiantes dieron la primera respuesta, uno dio la segunda, cuatro dieron la tercera y uno dio la cuarta respuesta. Ninguno de los nueve estudiantes (81.82%) que respondieron el ítem acertaron.










Dos estudiantes (18.18%) no respondieron el ítem.

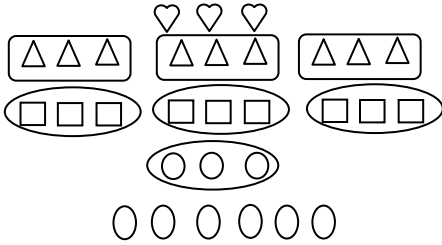
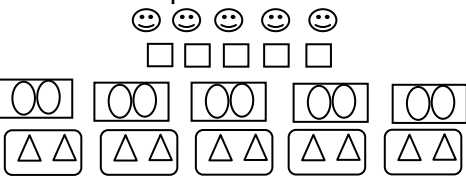
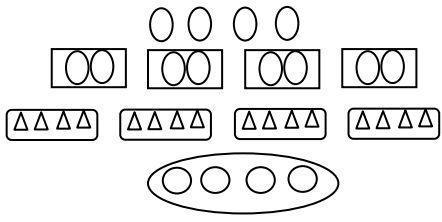
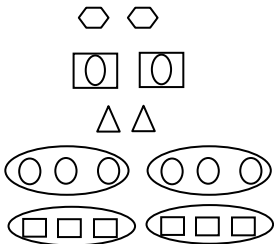
Podría decirse al respecto que todos los estudiantes tuvieron dificultades en el ítem para reconocer la cantidad de partes que conforman la unidad y/o la división de la unidad en partes iguales.

E. Anexo: Resultados y análisis de la prueba fracciones en el contexto discreto

Se presentan a continuación los ítems, respuestas y análisis de esta prueba.

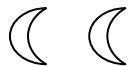
1. Completar la siguiente tabla sobre fracciones utilizando discretos

Unidad	¿Cuántas partes tiene la unidad?	¿Qué es cada parte de la unidad?
	Respuestas dadas 9, 10	Respuestas dadas 1/9, 1 de 9, un noveno, 1/10
	3, 3 subgrupos	1/3, 3/3, 3/9
	5, 5 subgrupos	1/5, 5/2, 5/10
	2, 2 subgrupos	1/2, 2/4, 4/8, 2/8
	4, 4 subgrupos, 5	1/4, 4/2, 2/5, 4/8
Respuestas dadas    	6	Respuestas dadas 1/6, 1 de 6, 6/12

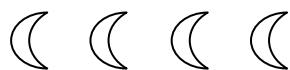
<p>Respuestas dadas</p> 	<p>Respuestas dadas</p> <p>3, 3 subgrupos, 1, seis tercios</p>	<p>1/3</p>
<p>Respuestas dadas</p> 	<p>Respuestas dadas</p> <p>Cinco</p>	<p>Respuestas dadas</p> <p>1/5, 1 de 5, 5/2</p>
<p>Respuestas dadas</p> 	<p>Respuestas dadas</p> <p>4, 4 subgrupos, 1</p>	<p>Un cuarto</p>
<p>Respuestas dadas</p> 	<p>Respuestas dadas</p> <p>2</p>	<p>Respuestas dadas</p> <p>1 de 2, 1/2, un medio, 2/6</p>

2. Reconstruir la unidad a partir de objetos discretos

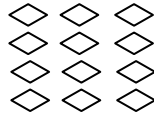
a) Si la figura representa 1/4 de la unidad, dibuja la unidad completa



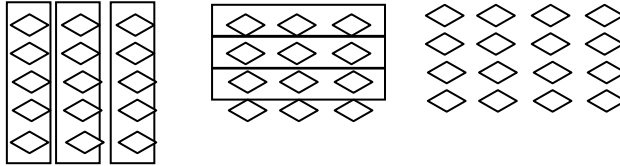
Respuestas



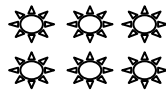
b) ¿Cuál es la unidad si la figura representa los tres quintos de esta?



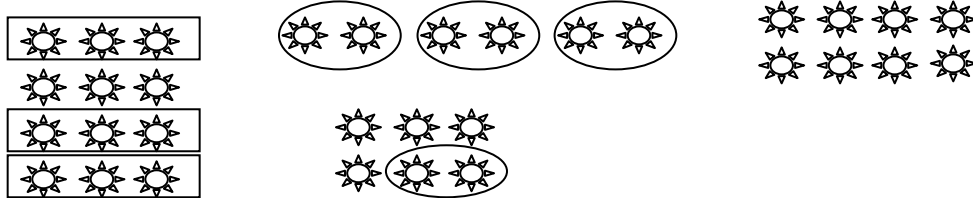
Respuestas



c) La figura representa $\frac{3}{2}$ de la unidad, ¿Cuál es la unidad?



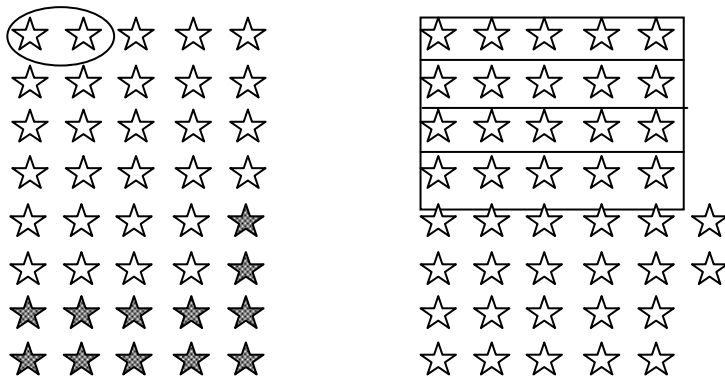
Respuestas



d) ¿Cuál será la unidad si la figura representa los cuatro medios de esta?



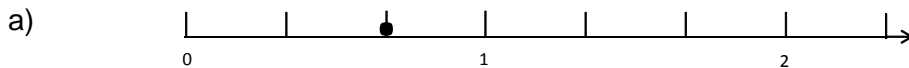
Respuestas



F. Anexo: Resultados y análisis de la prueba representación de fracciones en la recta numérica

Se presentan los ítems, respuestas dadas por los estudiantes y un análisis de esta prueba.

1. ¿Qué fracción representa el punto sobre la recta numérica?

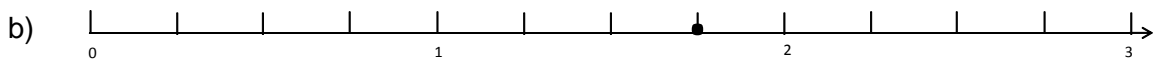


Respuestas dadas al ítem

$2/3$, $1/2$

Análisis de las respuestas

9 estudiantes acertaron en la respuesta, solo uno dio una respuesta equivocada.

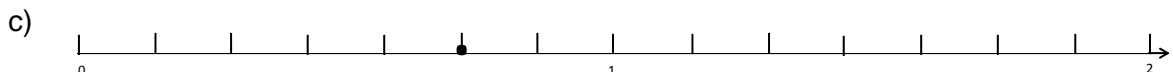


Respuestas dadas al ítem

$7/4$, $3/4$, $8/3$

Análisis de las respuestas

Ocho estudiantes acertaron en la respuesta, los dos restantes dieron las otras dos respuestas erradas.



Respuestas dadas al ítem

5/7, 5/2, 5/5, 5/6

Análisis de las respuestas

Seis estudiantes dieron la respuesta correcta, los otros cuatro dieron respuestas incorrectas.

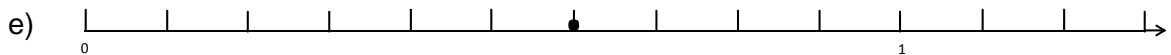


Respuestas dadas al ítem

12/5, 12/4, 5/3, 2/5, 11/5

Análisis de las respuestas

Cinco estudiantes aciertan la respuesta, los otros cinco dan las demás respuestas, las cuales son incorrectas.



Respuestas dadas al ítem

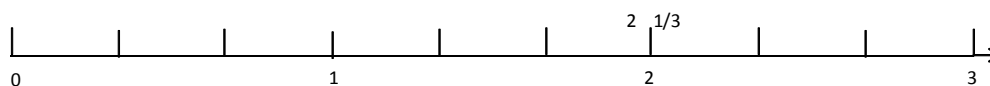
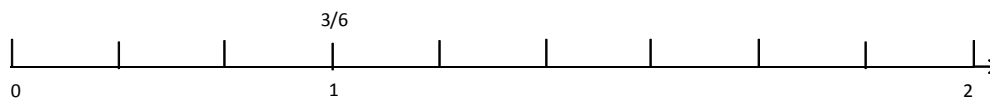
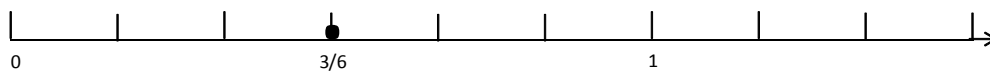
6/10, 8, 9/1, 6/5

Siete estudiantes responden acertadamente, los otros tres dan las demás respuestas erradas.

2. Representa en la recta numérica las siguientes fracciones

a) 3/6

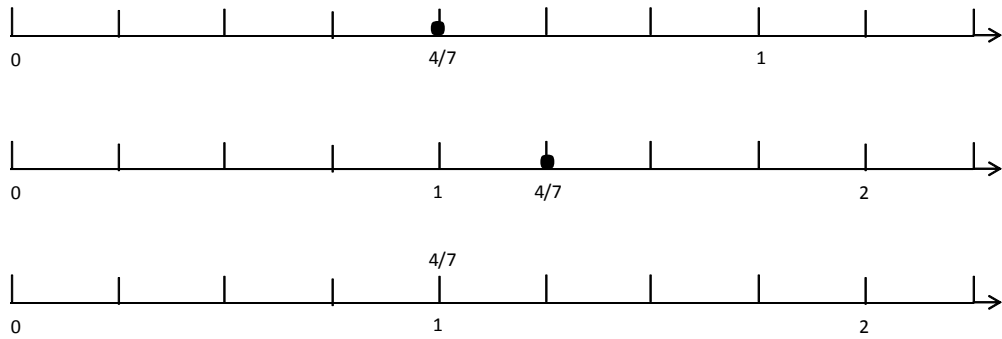
Respuestas dadas al ítem



Análisis de las respuestas

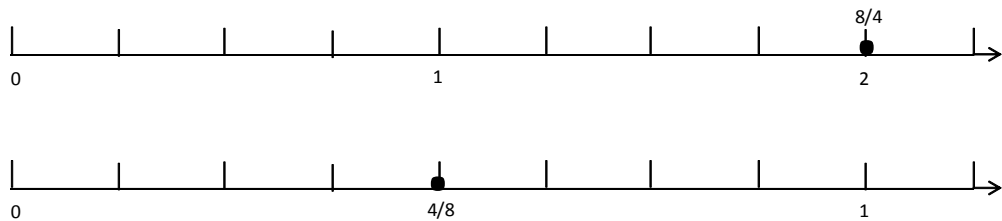
Cinco estudiantes dieron respuestas como la primera que se muestra que es la correcta, los otros cinco dieron respuestas erradas como las demás mostradas.

b) Cuatro séptimos

Respuestas dadas al ítem*Análisis de las respuestas*

Cuatro estudiantes dieron respuestas como la primera la cual es correcta, otros cuatro estudiantes dieron las demás respuestas que son incorrectas y dos estudiantes no respondieron el ítem.

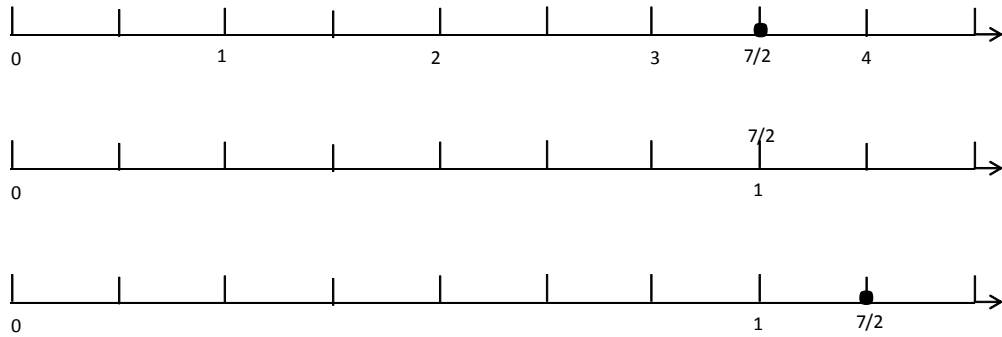
c) 8/4

Respuestas dadas al ítem*Análisis de las respuestas*

Siete estudiantes tienen respuestas como la primera que es correcta, otros dos estudiantes tienen respuestas incorrectas como la segunda y uno no respondió el ítem.

d) Siete medios

Respuestas dadas al ítem

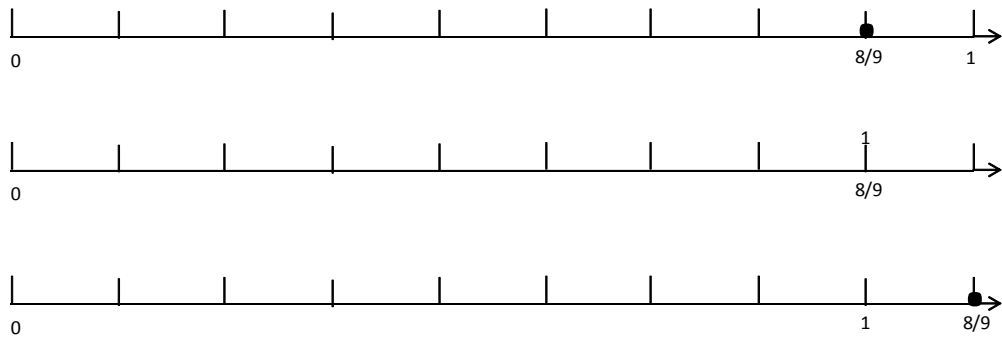


Análisis de las respuestas

Cinco estudiantes tienen respuestas como la primera que es correcta, tres estudiantes tienen respuestas incorrectas como las otras dos mostradas y dos estudiantes no respondieron el ítem.

e) $8/9$

Respuestas dadas al ítem



Análisis de las respuestas

Cinco estudiantes respondieron bien el ítem dando respuestas como la primera, los otros cinco estudiantes dieron respuestas incorrectas como las mostradas en las otras dos opciones.

Bibliografía

BLANCO, L.J. (1991). Didáctica de las matemáticas II (Didáctica de la Geometría). Recuperado el 29 de octubre de 2011 de

[http://www1.unex.es/eweb/ljblanco/.../Principiosbasicos\(Dienes-Pallascio\).d...](http://www1.unex.es/eweb/ljblanco/.../Principiosbasicos(Dienes-Pallascio).d...)

BECERRA, Dilcia; BECERRA, Aura M.; RODRÍGUEZ, Omaira C.; NOCUA, Blanca E. & SUÁREZ Jose de J. Fracciones, juego y aprendizaje. Universidad del Valle, Instituto de Educación y Pedagogía, Área de Educación Matemática. Ministerio de Educación Nacional. Recuperado el 22 de mayo de 2011 de

http://www.colombiaaprende.edu.co/html/mediateca/1607/articles-110449_archivo.pdf

CABAS, Rafael A. & LÓPEZ César G. (2005). La enseñanza aprendizaje de las fracciones desde la aplicación de la secuencia de actividades de Thompson adecuada como un programa virtual dinámico. Colegio CAFAM, IED Instituto Técnico Industrial Piloto. Bogotá, D.C. Recuperado el 22 de mayo de 2011 de

http://www.colombiaaprende.edu.co/html/mediateca/1607/articles-106625_archivo.pdf

CARULLA, Cristina & GÓMEZ, Pedro. (2001). Sistemas de representación y mapas conceptuales como herramientas para la construcción de modelos pedagógicos en matemáticas. *En cuadernos de matemática educativa 4, Asociación colombiana de matemática educativa ASOCOLME*: Grupo Editorial Gaia. Recuperado el 28 de marzo de 2011 de

<http://asocolme.com/documento/publicaciones/cuadernos/cuaderno%204%20UNIANDES.pdf>

ESCOLANO, Rafael & GAIRÍN, José M. (2005, marzo). Modelos de medida para la enseñanza del número racional en Educación Primaria. En *Unión: Revista iberoamericana de educación matemática*, 1, 17-35. Recuperado el 03 de agosto de 2011 de

http://cimm.ucr.ac.cr/ciaem/articulos/pre/aprendizaje/La%20venta%20en%20la%20escuela*Revista%20iberoamericana%20de%20educaci%C3%B3n%20matem%C3%A1tica.*Unión_001_006.pdf

FLORES, Pablo & MORCOTE Oliverio. (2001). Algunos elementos del conocimiento profesional en la planeación de clases de futuros profesores de secundaria (un caso: Las fracciones). Universidad de Sevilla. En *Actas del Encuentro de Matemáticos Andaluces*, 2, 449-458. Recuperado el 02 de agosto de 2011 de

<http://dialnet.unirioja.es/servlet/libro?codigo=430252#volumen64160>

GAIRÍN, José M. (2001). Sistemas de representación de números racionales positivos. Un estudio con maestros en formación. Departamento de matemáticas, Universidad de Zaragoza. En *Contextos Educativos*, 4, 137-159. Recuperado el 11 de agosto de 2011 de

<http://documat.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=209691>

MALET, Omar. (2010, octubre). Los significados de las fracciones: Una perspectiva fenomenológica. En *Mendomatica*, 21, sección matemática y currículo. Buenos Aires. Recuperado el 18 de agosto de 2011 de

http://www.mendomatica.mendoza.edu.ar/nro21/Los%20significados%20de%20las%20fracciones_21.pdf

MARTÍNEZ, Carmen & LASCANO, Margarita. (2001). Acerca de dificultades para la enseñanza y el aprendizaje de las fracciones. En *EMA vol. 6, núm. 2*, 159-179. Recuperado el 22 de mayo de 2011 de

http://funes.uniandes.edu.co/1127/1/75_Mart%C3%ADnez2001Acerca_RevEMA.pdf

MARTINIC, Sergio; MAZ, Alexander & SALAZAR Marta C. (2011, junio). Diseño de una investigación para identificar los significados de fracción que ponen de manifiesto los profesores de primaria en Chile. En *CIAEM 2011, XIII conferencia interamericana de educación matemática*. Recife, Brasil.

MINISTERIO DE EDUCACIÓN NACIONAL REPÚBLICA DE COLOMBIA. (2006). Estándares básicos de competencias en Matemáticas. Recuperado el 07 de mayo de 2011 de

http://www.mineducacion.gov.co/cvn/1665/articles-116042_archivo_pdf2.pdf

MINISTERIO DE EDUCACIÓN NACIONAL REPÚBLICA DE COLOMBIA. (2010). Saber 5° y 9° 2009 Resultados Nacionales Resumen Ejecutivo. Recuperado el 14 de mayo de 2011 de

http://www.icfes.gov.co/saber59/images/pdf/INFORME_SABER.pdf

LLINARES, Salvador & SÁNCHEZ, M. Victoria. (1988). Fracciones, la relación parte todo. Madrid: Editorial Síntesis S.A.

PENALVA, M. Carmen & TORREGROSA Germán. (2001). Representación y aprendizaje de las matemáticas. Universidad de Alicante, España. Recuperado el 12 de mayo de 2011 de

<http://cumbia.ath.cx:591/pna/Archivos/PenalvaC01-2631.PDF>

PERERA, Paula B. & VALDEMOROS Marta E. (2007). Propuesta didáctica para la enseñanza de las fracciones en cuarto grado de educación primaria. *En Investigación en educación matemática XI*, 209-218. México. Recuperado el 03 de mayo de 2011 de

<http://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=2697033>

RICO, Luis. (2009). Sobre las nociones de representación y comprensión en la investigación en educación matemática. *En PNA*, 4(1), 1-14. Recuperado el 17 de agosto de 2011 de

<http://www.pna.es/Numeros2/pdf/Rico2009Sobre.pdf>

VALLEJO, Francisco A. & TAMAYO, Oscar E. (2008, julio - diciembre). Dificultades de los estudiantes de grado octavo en los procesos de tratamiento y conversión de los números racionales. *En revista latinoamericana de estudios educativos, vol. 4, núm. 2*, 151-182. Universidad de Caldas. Recuperado el 16 de agosto de 2011 de

<http://redalyc.uaemex.mx/pdf/1341/134112597009.pdf>