PROPUESTA DE ENSEÑANZA PARA EL AULA

Ecuaciones y Modelos

WBEIMAR CIFUENTES ROBLEDO

Trabajo presentado como requisito parcial para optar al título de Magíster en Enseñanza de las Ciencias Exactas y Naturales.

DIRECTORA

Rosa Antonia Franco Arbeláez

UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA SEDE MEDELLÍN

FACULTAD DE CIENCIAS

MAESTRÍA EN ENSEÑANZA DE LAS CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES

2011

Contenido

1. Resumen 3

2. Introducción 5

3. Marco teórico 6

4. Metodología 7

5. Resultados 8

5.1. Ecuaciones cuadráticas. 9

5.2. Solución de ecuaciones cuadráticas desde la perspectiva del modo de pensamiento sintético-geométrico propuesto por Anna Sierpinska 10

5.3. Solución geométrica de la ecuación $\boldsymbol{x^2+3x=10}$ 10

5.4. Solución gráfica de la ecuación $\boldsymbol{x^2+3x=10}$ 12

5.5. Solución geométrica de la ecuación $\boldsymbol{x^2=2x+3}$ 15

5.6. Solución gráfica de la ecuación $\boldsymbol{x^2=2x+3}$ 16

5.7. Solución de un modelo de crecimiento exponencial. 17

6. Análisis de resultados 23

Bibliografía 25

1. Resumen

La enseñanza del álgebra y la solución de ecuaciones, entre otros temas de Matemáticas Básicas, se presentan en los textos principalmente mencionando primero alguna definición, después los procedimientos aritméticos y operaciones basadas en propiedades y axiomas en los sistemas numéricos y algebraicos y finalmente la solución de ejercicios. Esta forma de presentar los temas no favorece la interacción de los distintos modos de pensamiento, el analítico-aritmético, el analítico-geométrico y el analítico-estructural, por el contrario, acentúan notablemente el desarrollo de procedimientos algorítmicos y aritméticos que no permiten en la mayoría de los casos una comprensión de los conceptos presentados y en los cuales sus soluciones se reducen a “aprendizajes mecánicos”.

En este trabajo se muestra una manera alternativa de presentar conceptos de álgebra y solución de ecuaciones mediante una aproximación a la teoría de los modos de pensamiento de Anna Sierpinska que se puede utilizar como una propuesta de enseñanza para el aula en las clases de Matemática Básicas. Sus teorías son consideradas en este trabajo dado que mencionan dos tipos de dificultades que pueden presentar los estudiantes en este tema: dificultades conceptuales, que hacen referencia a la naturaleza de los contenidos de ecuaciones y modelos, y dificultades cognoscitivas, es decir el tipo de pensamiento requerido para la comprensión de estos conceptos. De esta manera se plantea como hipótesis, dada la poca claridad en el tema que se evidenció en un curso de matemáticas básicas con estudiantes de primer semestre en diferentes programas, que es posible abordar estos contenidos desde éste enfoque teórico, como una alternativa didáctica que favorezca su comprensión.

Palabras claves: ecuaciones, modelos, modos de pensamiento.

Equations and Models

Abstract

The teaching of algebra and solving equations, including basic math topics are presented in the main text any definition listed first, then the arithmetic procedures and operations based on properties and axioms in the algebraic and numerical systems and finally the solution exercises. This way of presenting the topic does not favor the interaction of different modes of thinking, analytic-arithmetic, the analytic-geometric and analytic-structural, however, significantly accentuate the development of algorithmic and arithmetic procedures that do not allow the most cases an understanding of the concepts presented and in which their solutions are reduced to "mechanical apprenticeships".

This paper shows an alternative way of presenting concepts of algebra and solving equations using an approximation to the theory of modes of thought of Anna Sierpinska that can be used as a proposal for classroom instruction in basic math classes. His theories are considered in this work as mentioned two types of difficulties that may arise students in this topic: conceptual difficulties, referring to the nature of the contents of equations and models, and cognitive difficulties, ie the kind of thinking required for the understanding of these concepts. Thus it is hypothesized, given the lack of clarity on the issue was highlighted by a course in basic math first semester students in different programs, it is possible to address this content from this theoretical approach as an alternative teaching that encourages understanding.

Keywords: equations, models, modes of thought.

2. Introducción

Se ha generalizado en los estudiantes de Educación Básica y Media un bajo nivel de desempeño en matemáticas. Esto se refleja en los resultados de las pruebas Saber (5º-9º-11º) y en los resultados de ingreso a la universidad. Igualmente son altos los índices de reprobación en los cursos básicos de matemáticas en los programas de pregrado de la Universidad, lo que en ocasiones genera deserción en los primeros semestres académicos. Esta realidad no es ajena a programas que incluyen como asignaturas básicas a las matemáticas en los programas de ciencias e ingenierías.

Algunos de los factores que influyen en los bajos resultados académicos están relacionados con la falta de motivación de los estudiantes frente a los conceptos matemáticos, la poca diversidad en las estrategias y de recursos para la enseñanza de las matemáticas, y el excesivo énfasis en aspectos procedimentales de la matemática que, con frecuencia, sólo promueven un pensamiento analítico-aritmético.

En este sentido, y considerando los planteamientos teóricos de Sierpinska, se hace necesario el diseño de estrategias que se involucren en el desarrollo de otro tipo de pensamientos, a saber: el **sintético-geométrico**, el **analítico-aritmético**, y el **analítico–estructural**. Para ello, se requiere, entre otras cosas, de una revisión de las prácticas pedagógicas que permitan desdibujar la influencia de algunos textos que siguen los docentes para el bachillerato y las prácticas al interior de las aulas que limitan estos modos de pensamiento, dada la forma como se presentan los contenidos matemáticos. Presentamos entonces una **propuesta de enseñanza para el aula** a través de un conjunto articulado de situaciones y estrategias para el desarrollo de los diferentes modos de pensamientos reportados por Sierpinska, especialmente en el tema de "**ecuaciones y modelos**", los cuales se desarrollan a partir de un análisis de propiedades, favoreciendo el modo analítico-aritmético y estructural. Los anteriores temas están en algunos capítulos que se dictan en el curso de Matemáticas Básicas de la Universidad Nacional.

3. Marco teórico

En esta propuesta se considera que la teoría de los modos de pensamiento de Sierpinska (2000), los cuales son: **sintético–geométrico**, **analítico–aritmético** y **analítico-estructural** permiten definir, desde el referente teórico, el propósito de presentar algunos objetos matemáticos desde una mirada alternativa a la propuesta por algunos textos de educación matemática a la vez que permiten desarrollar habilidades de pensamiento en los estudiantes para comprender dichos conceptos cuando se considera la interacción entre ellos.

El modo sintético-geométrico presenta los objetos matemáticos mediados por una representación geométrica, una figura, un conjunto de puntos, etc. Se considera que en este modo de pensamiento es fundamental la visualización matemática, considerada como "*el proceso de formación de imágenes (mentales, o con lápiz y papel, o con la ayuda de la tecnología) y el uso de tales imágenes efectivamente, para el descubrimiento de matemáticas y su comprensión*" (Zimmermann y Cunningham 1991). La relevancia de este autor en este modo de pensamiento se presenta puesto que son numerosos los trabajos que presenta en cuanto a la importancia de la visualización para estimular el descubrimiento matemático, dando lugar a una mejor comprensión.

En este mismo sentido, el psicólogo francés Duval (1998, p38), propone un modelo cognitivo de razonamiento geométrico donde los procesos de razonamiento se dan por la interacción de tres procesos: la visualización, la construcción y el razonamiento. El primero hace referencia a la representación visual de características geométricas, el segundo, a construcciones mediante el uso de herramientas (se pueden incluir paquetes de programas computacionales de tipo educativo) y el razonamiento, a procesos de extensión del conocimiento y a la explicación de una prueba. Del mismo modo, sostiene que "estos tres tipos de procesos cognitivos están estrechamente relacionados y su sinergia cognitiva es necesaria para el dominio de la geometría".

El modo analítico-aritmético considera los sistemas matemáticos a partir de relaciones numéricas. En este trabajo, para el tópico de ecuaciones, éstas se presentan en este modo de pensamiento como ecuaciones con sus relaciones numéricas.

El modo analítico-estructural, favorece la interpretación a través de propiedades y axiomas en los sistemas matemáticos que contienen los objetos en estudio. Las soluciones de cualquier tipo de ecuaciones algebraicas, en este modo de pensamiento, se encuentran a partir de una secuencia de propiedades y axiomas que requieren su demostración previa o por lo menos su memorización.

4. Metodología

En el desarrollo de la propuesta se identificarán tres momentos.

1. Revisión de temas de matemáticas y textos donde se presentan los contenidos matemáticos que son objeto de estudio en este trabajo. Se mostrará que la presentación de estos contenidos no favorecen el desarrollo de los distintos modos de pensamiento para permitir una comprensión de los objetos de estudio incluidos en el tema de ecuaciones y modelos.

2. Análisis de las situaciones y su relación con la teoría de los modos de pensamiento. Se mostrará una manera alternativa y didáctica de situaciones que no aparecen en los textos y que desarrolla el pensamiento sintético- geométrico, dando herramientas conceptuales a los estudiantes para la comprensión de estos temas.

3. Diseño de situaciones de aprendizaje y solución de actividades alternativas para el aula en la enseñanza de algunos conceptos matemáticos: "**ecuaciones y modelos**" y "**soluciones de ecuaciones**" que se pueden implementar en las clases de matemáticas básicas con estudiantes de primeros semestres.

5. Resultados

Haciendo referencia a la metodología, en la revisión de los temas de ecuaciones que se presenta en los textos, se aprecia de forma marcada que estos favorecen el pensamiento analítico-aritmético, pues en este modo de pensamiento se presentan las ecuaciones con sus relaciones numéricas. *"En este modo el pensamiento es teórico desde el momento en que el estudiante debe interpretar los objetos a partir de ciertas relaciones numéricas o simbólicas" (Teresa Cristina Ochoviet Filgueiras 2009, Montevideo – Uruguay)*

Para la solución de las ecuaciones (lineales y/o cuadráticas) se exponen propiedades y axiomas en los sistemas matemáticos que son objeto de estudio para presentar algunos algoritmos de solución. En el caso de ecuaciones cuadráticas, se demuestra la expresión, $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ producto de *"manipulaciones" dentro* de las propiedades y axiomas en un sistema algebraico y numérico determinado. Se percibe cómo la anterior representación en algunos textos, soslaya el modo de pensamiento sintético–geométrico a la vez que favorece la memorización.

En este sentido se propone, de manera alternativa, la solución de todo tipo de ecuaciones a partir de modelos gráficos, y para el caso de ecuaciones cuadráticas, también un modelo geométrico a partir de áreas de figuras planas, que permitirán un acercamiento al desarrollo de procesos mentales que involucren el modo de pensamiento sintético–geométrico y la interacción de los otros modos de pensamiento, lo cual implica procesos mentales de construcción de conceptos que se acercan al aprendizaje significativo, entendido como la asociación e interacción de conceptos nuevos con ideas relevantes que tiene el estudiante para producir un nuevo aprendizaje.

En algunas referencias consultadas, el tema de ecuaciones, tan importante para comprender situaciones de aplicación en matemáticas y ciencias, se centra en una definición que podría ser, "*Una ecuación es la afirmación de que dos expresiones algebraicas son iguales",* seguidamente se dan algunos ejemplos y se enuncian algunas propiedades de los sistemas numéricos para su solución a través de relaciones y operaciones algebraicas y aritméticas.

5.1. Ecuaciones cuadráticas.

En este tema se define una ecuación cuadrática como una expresión de la forma: $ax^2 + bx + c = 0$. Esta definición ciertamente está al margen de una representación del desarrollo del pensamiento sintético geométrico, a la vez que no permite hacer una conexión entre una representación geométrica, una grafica o un conjunto de puntos. (Sierpinska, 1999)

Después de la definición se demuestra a partir de propiedades y operaciones, la fórmula general de resolución de la ecuación cuadrática.

Ejemplo.

Encontrar las soluciones de la siguiente ecuación:

$$x^2 + 5x + 3 = 0$$

Solución:

En este caso, $a = 1$, $b = 5$ y $c = 3$. Reemplazando en la fórmula para solucionar ecuaciones cuadráticas tenemos:

$$x = \frac{-5 \pm \sqrt{5^2 - 4(1)(3)}}{2(1)}$$

De lo cual se obtiene,

$$x = \frac{-5+\sqrt{13}}{2} \quad \text{ó} \quad x = \frac{-5+\sqrt{13}}{2}$$

Este tipo de solución no deja ver una interpretación gráfica ni geométrica.

5.2. Solución de ecuaciones cuadráticas desde la perspectiva del modo de pensamiento sintético-geométrico propuesto por Anna Sierpinska.

Ejemplo.

Solucione las siguientes ecuaciones:

a. $x^2 + 3x = 10$

b. $x^2 = 2x + 3$

5.3. Solución geométrica de la ecuación $x^2 + 3x = 10$

En la representación geométrica de la figura 1 se observa, en la parte superior, un cuadrado de lado x, unido a un rectángulo de lados x y 3. Con el área encerrada por el cuadrado y el rectángulo, se forma un cuadrado dividiendo el área $3x$ en dos rectángulos iguales de lados $\frac{3}{2}$ y x. Después se completa el cuadrado de lado $\left(\frac{3}{2} + x\right)$ como se observa en la figura.

Entonces, de la misma figura se deduce, a partir de sumas de áreas que:

$$\left(x + \frac{3}{2}\right)^2 = x^2 + 3x + \frac{9}{4}$$

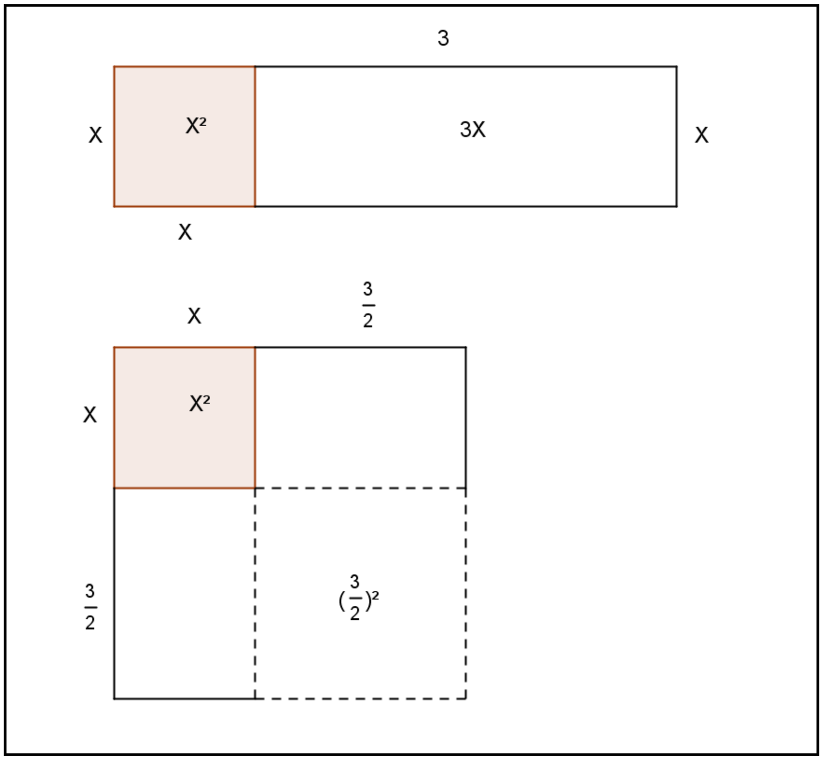
Como $x^2 + 3x$ corresponde a 10 (figura 1)

Entonces: $\left(x + \frac{3}{2}\right)^2 = 10 + \frac{9}{4}$

Por lo tanto: $\left(x + \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{49}{4}$

De la expresión anterior, $x = 2$ ó $x = -5$.

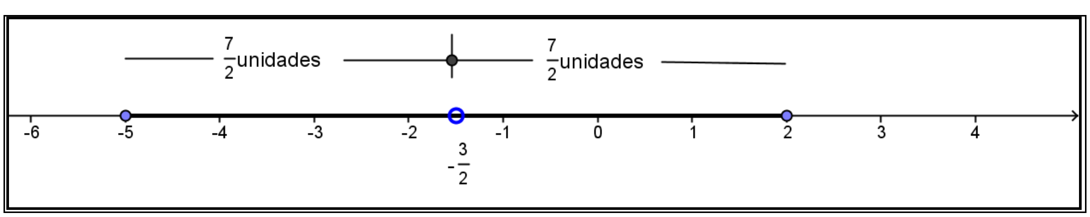
Fig. 1 Solución geométrica de la ecuación $x^2 + 3x = 10$



El valor de $x = -5$ se interpreta a partir de la solución gráfica en la recta real de la ecuación con valor absoluto:

$$\left|x - \left(-\frac{3}{2}\right)\right| = \frac{7}{2}$$

Tanto $x = 2$ como $x = -5$ se encuentran a una distancia de $\frac{7}{2}$ unidades del número $-\frac{3}{2}$. Igualmente se puede resolver esta ecuación utilizando las propiedades de valor absoluto. En el primer caso se evidencia el modo de pensamiento sintético-geométrico en su solución.



5.4. Solución gráfica de la ecuación $x^2 + 3x = 10$

Para la solución de este tipo de ecuaciones se puede hacer uso de un software para representar gráficas de funciones.
La expresión: $x^2 + 3x = 10$ se puede representar como el conjunto solución (parejas ordenadas) que corresponden a la intersección en el plano cartesiano de las funciones $y_1 = x^2 + 3x$ y $y_2 = 10$.

La figura 2 muestra tal representación, donde la solución corresponde a los valores de $x = 2$ y $x = -5$. Estos valores se explican a partir de las parejas ordenadas de la forma, $(x_1, 10)$ y $(x_2, 10)$

Igualmente la solución se puede obtener a partir de las parejas ordenadas donde se interceptan las gráficas de las funciones, $y_1 = x^2$ y $y_2 = 10 - 3x$ como se observa en la figura 3. (También se puede obtener el mismo resultado con las gráficas de las funciones: $y_1 = 10 - x^2$, $y_2 = 3x$ y $y_1 = x^2 + 3x - 10$, $y_2 = 0$)

Este análisis gráfico se puede extender a la solución de todo tipo de ecuaciones y modelos matemáticos. Es aplicable a ecuaciones con radicales, ecuaciones exponenciales y logarítmicas, donde la utilización de propiedades se hace extensa y compleja para los estudiantes de un curso de Matemáticas Básicas.

Fig. 2 Solución gráfica de la ecuación $x^2 + 3x = 10$

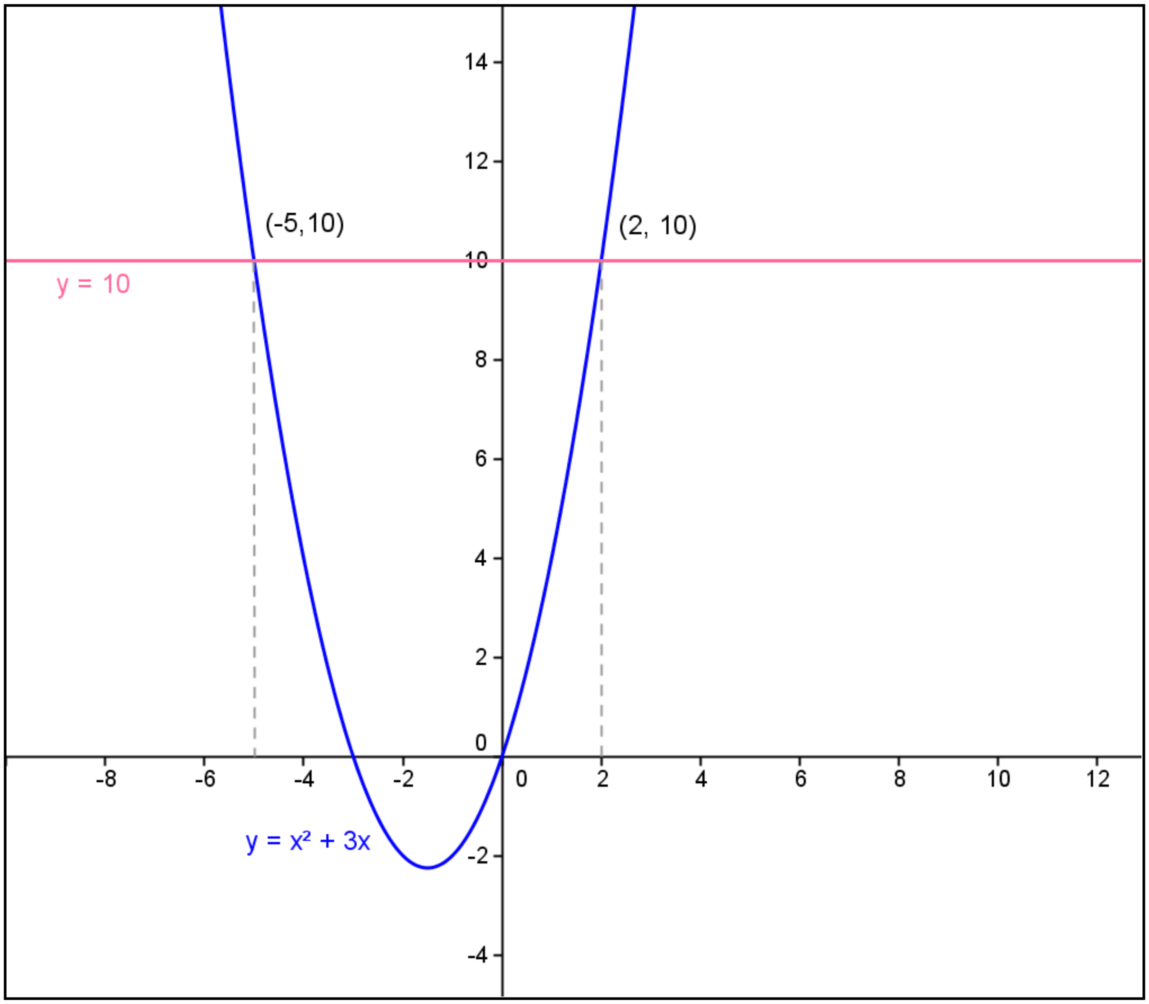
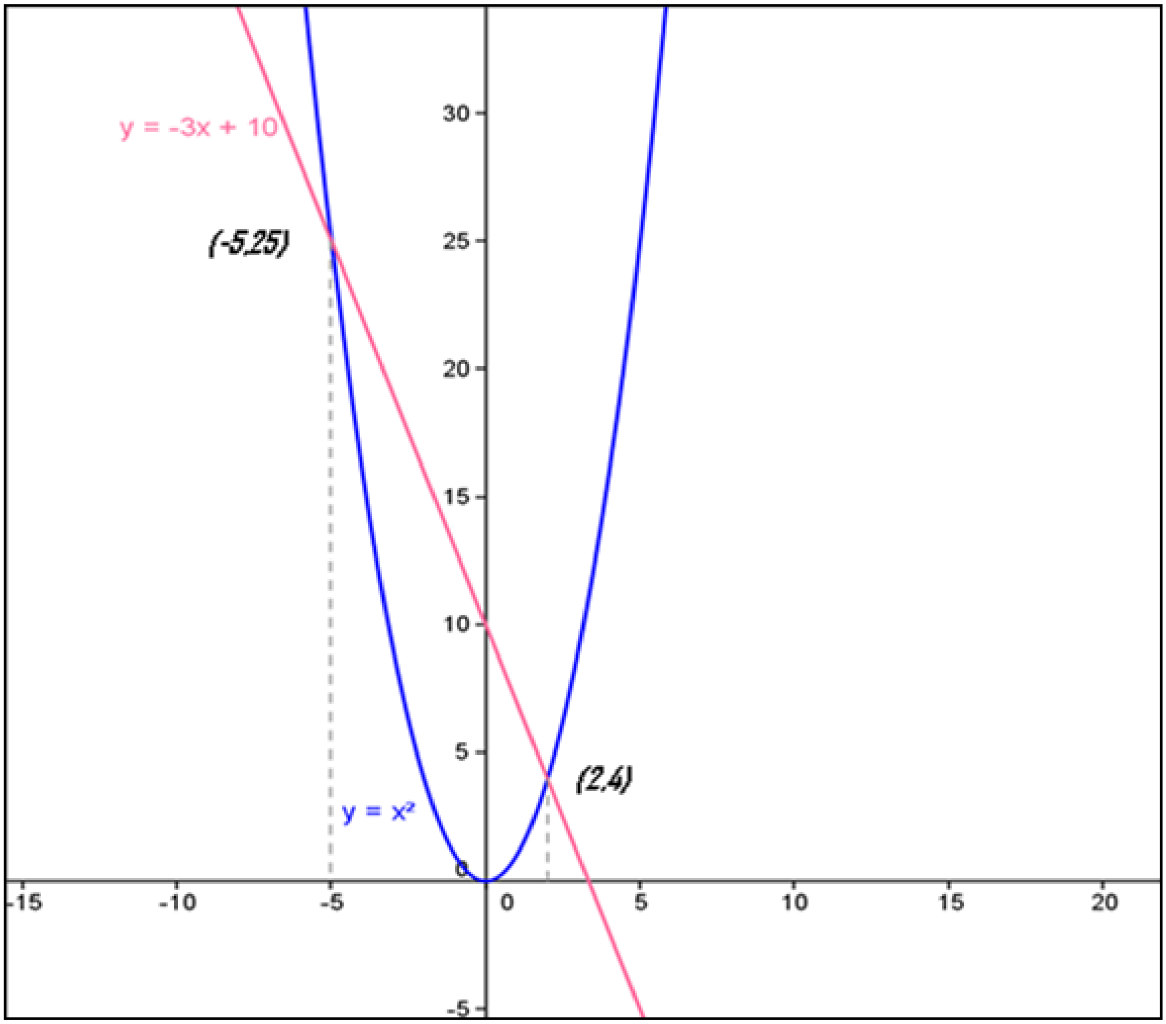


Fig. 3 Solución gráfica de la ecuación $x^2 + 3x = 10$



5.5. Solución geométrica de la ecuación $x^2 = 2x + 3$

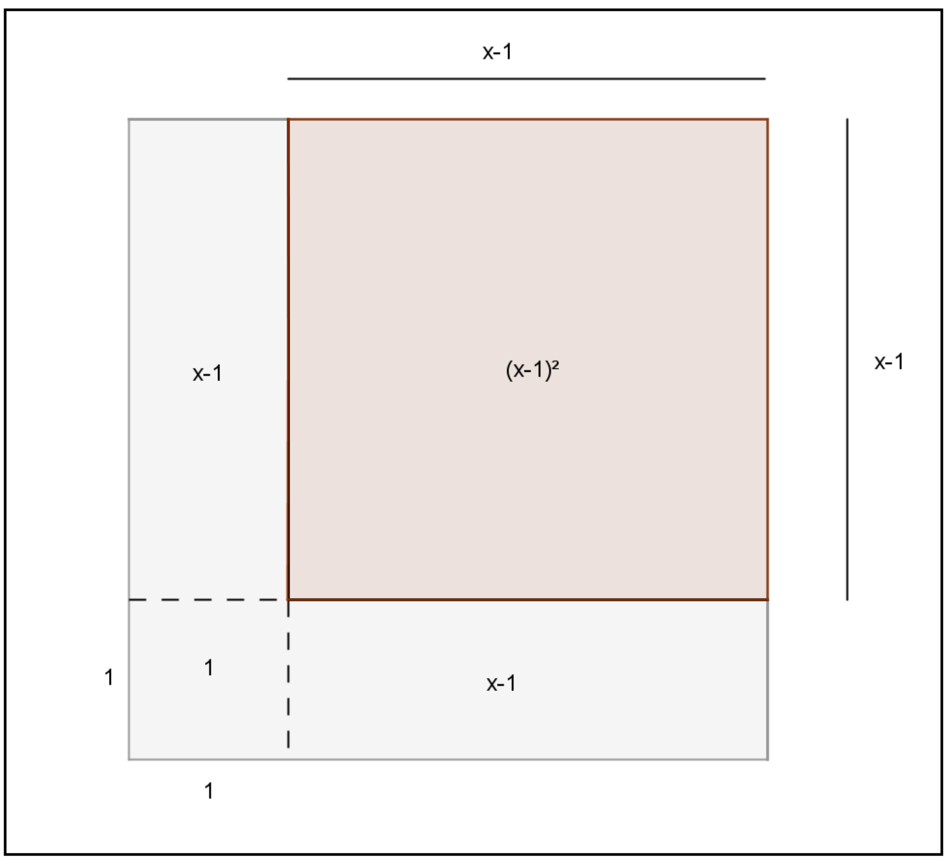
Para representar una solución geométrica, se dibuja un cuadrado de lado $\boldsymbol{x}$, se toma dentro del mismo, otro cuadrado de lado 1 (este valor corresponde a la mitad del coeficiente del término "$\mathbf{2}\boldsymbol{x}$") como se muestra en la figura 4. Así se forman dos rectángulos iguales de lado $\boldsymbol{x} - \mathbf{1}$ y 1

Se deduce entonces que:

$(x-1)^2 = x^2 - 2(x-1) - 1$
$(x-1)^2 = x^2 - 2x + 1$
$(x-1)^2 = 2x + 3 - 2x + 1$ En este paso se sustituyó x^2 por $2x + 3$
$(x-1)^2 = 4$
Por tanto: $x = 3$ ó $x = -1$

La solución $x = -1$ se obtiene de la representación geométrica en la recta real a partir de los valores cuya distancia a $x = 1$ sean 2 unidades. (Ver ejemplo 5.3)

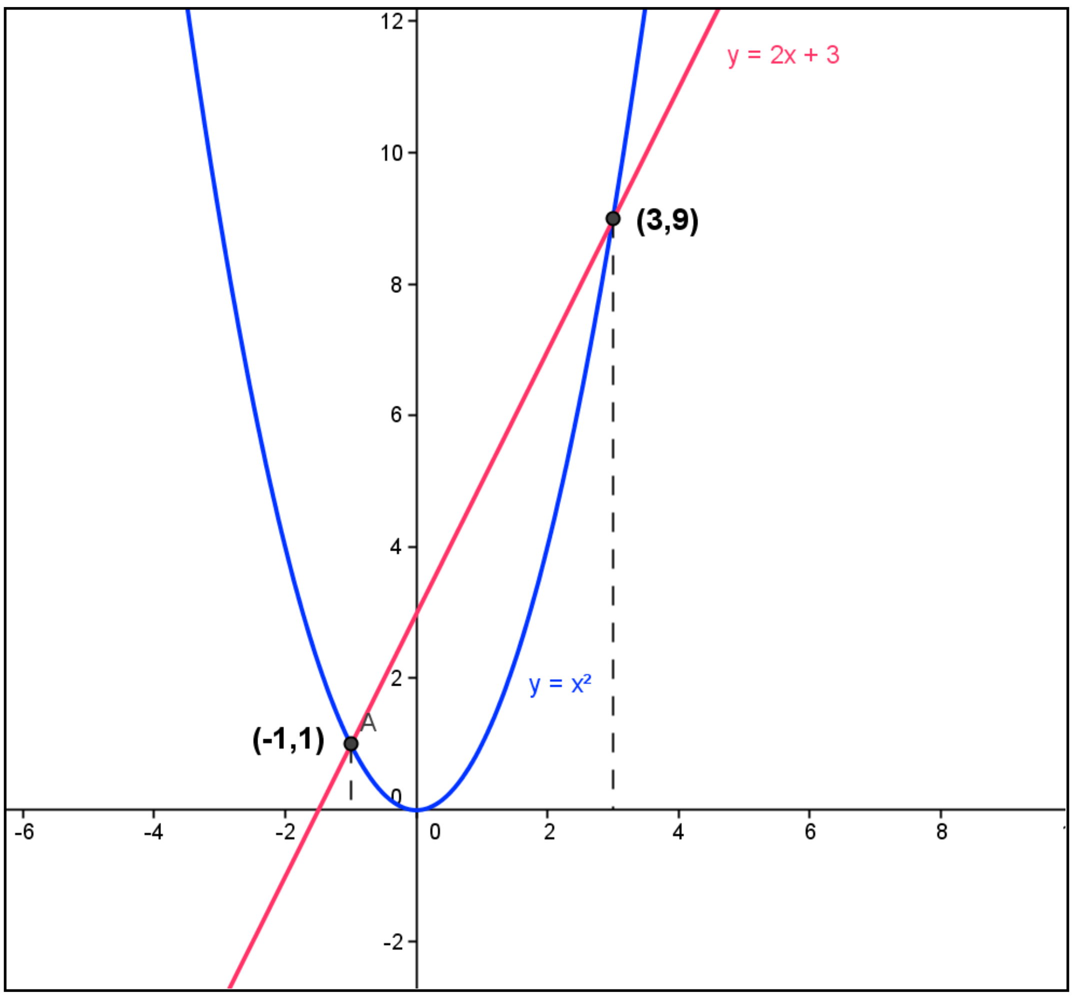
Fig. 4 Solución geométrica de la ecuación $x^2 = 2x + 3$



5.6. Solución gráfica de la ecuación $x^2 = 2x + 3$

Para encontrar la solución de esta ecuación cuadrática, se pueden representar en un mismo plano cartesiano, las gráficas de $\boldsymbol{y_1 = x^2}$ y $\boldsymbol{y_2 = 2x + 3}$ como se muestra en la figura 5. Las soluciones corresponden a los valores de $\boldsymbol{x}$ para los cuales se corta la gráfica de la recta $\boldsymbol{y = 2x + 3}$ con la parábola $\boldsymbol{y = x^2}$.
Esta solución permite que el estudiante exprese las relaciones dadas entre las expresiones algebraicas y las representaciones gráficas de funciones, permitiendo el desarrollo del pensamiento sintético-geométrico cuando interactúa con los objetos de estudio dentro del dominio del álgebra y las funciones.

Fig. 5 Solución gráfica de la ecuación $x^2 = 2x + 3$



5.7. Solución de un modelo de crecimiento exponencial.

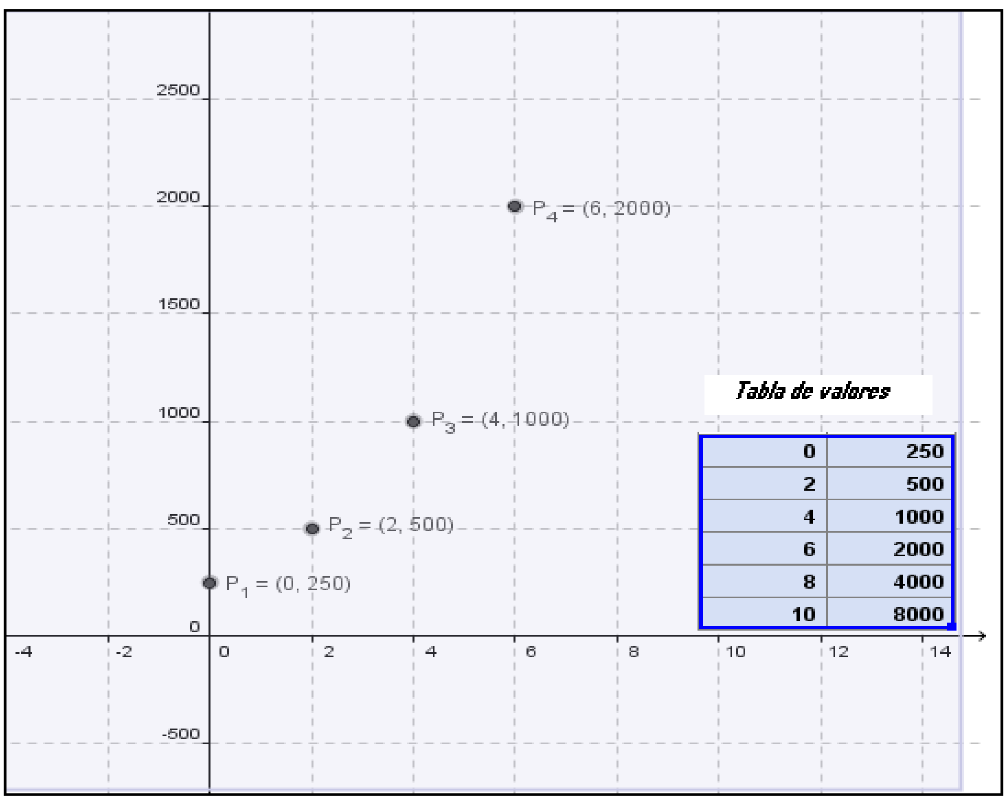
Supóngase que se va a solucionar una situación para la cual se ha determinado, en el laboratorio a partir de mediciones, que el crecimiento de una población de microorganismos se da como se muestra en la siguiente tabla.

Tiempo (Horas)	0	2	4	6	8	10
Número de microorganismos (P)	250	500	1000	2000	4000	8000

Se desea representar un modelo matemático que describa la situación y el tiempo que se requiere para un valor determinado de población.

Para dar solución primero veamos de una manera inductiva cómo encontrar el modelo matemático. Una vez encontrado el modelo, a partir de su representación gráfica podemos encontrar la solución pedida. Veamos la gráfica de los datos de la tabla.

Fig 6. Modelo de crecimiento exponencial



La figura 6 y nuestro conocimiento previo de la gráfica de una función exponencial, nos induce a pensar en un modelo exponencial de la forma: $P = ab^t$

Ahora, si consideramos la siguiente tabla:

Tiempo (t)	Población (P)	Ecuación
0	250	$250 = ab^0$
2	500	$500 = ab^2$
4	1000	$1000 = ab^4$
6	2000	$2000 = ab^6$
8	4000	$4000 = ab^8$

Podemos observar que $a = 250$ (fila 1)

Como $a = 250,$ entonces se tiene:

$$b^2 = \frac{500}{250} = 2$$

$$b^4 = \frac{1000}{250} = 4$$

$$b^6 = \frac{2000}{250} = 8$$

$$b^8 = \frac{4000}{250} = 16$$

Por tanto, si se continúa con el patrón de potencias de $b,$ se obtendrá una expresión como: $\boldsymbol{b^t = 2^{\frac{t}{2}}}$

Tiempo (t)	Población (P)	Ecuación	Potencias de b
0	250	$250 = a \times b^0$	$a = 250$
2	500	$500 = a \times b^2$	$b^2 = 2^1$
4	1000	$1000 = a \times b^4$	$b^4 = 2^2$
6	2000	$2000 = a \times b^6$	$b^6 = 2^3$
8	4000	$4000 = a \times b^8$	$b^8 = 2^4$

Finalmente se consigue una ecuación que se ajusta al modelo de crecimiento para $\mathrm{P}_1, \mathrm{P}_2, \mathrm{P}_3, \mathrm{P}_4$ y P_5 definida por:

$$\boldsymbol{P = 250(2)^{\frac{t}{2}}}$$

Estos datos satisfacen el modelo en el ejemplo, sin embargo cuando se trata de mediciones, el modelo no se ajusta de manera perfecta, por tanto se buscará un modelo que mejor se acerque a los datos. En este sentido, dentro las concepciones previas del estudiante deben estar la graficación, el análisis de gráficas y la modelización matemática.

Con referencia a nuestro ejemplo, un estudiante podría proponer varios modelos para encontrar, a partir de los datos dados, una expresión analítica de una función que mejor aproxime los valores.

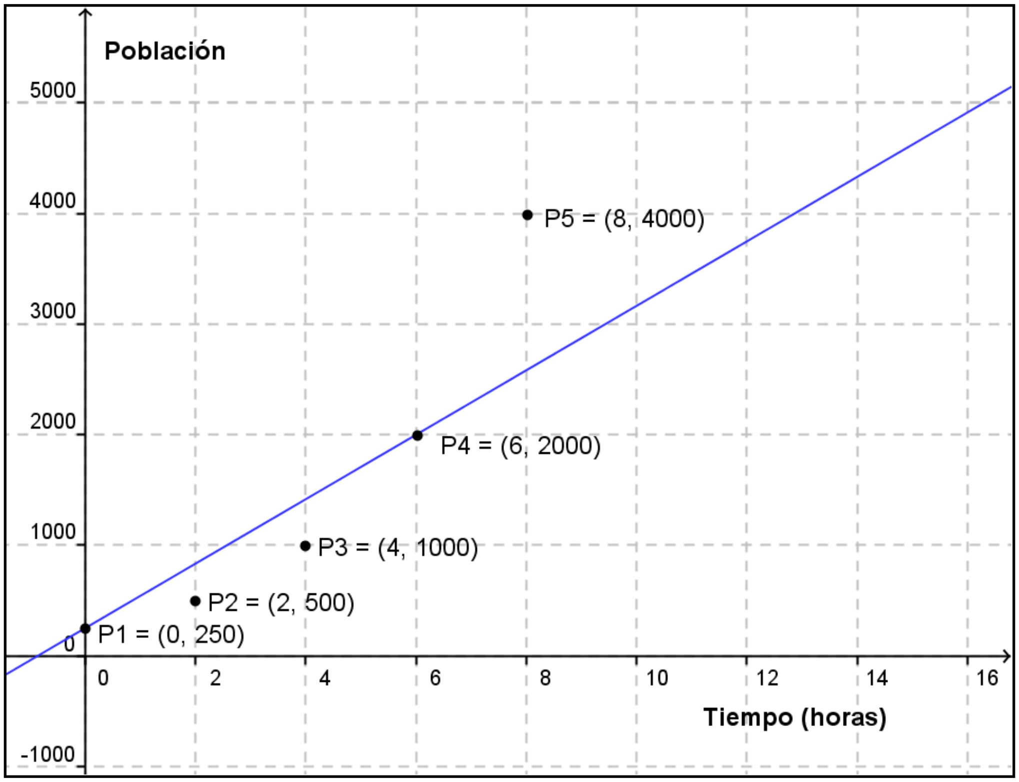
Por ejemplo a un estudiante, que no ha observado con cuidado el gráfico de puntos, se le puede ocurrir modelar el problema mediante una función lineal $P = at + b$. Pero por cada par de datos dado obtendría una recta diferente, que deja por fuera los puntos restantes. Si utiliza, por ejemplo, los puntos $(0, 250)$ y $(6, 2000)$, al resolver el sistema de ecuaciones.

$$\begin{cases} 250 = a(0) + b \\ 2000 = a(6) + b \end{cases}$$

Obtendría $a = \frac{875}{3}$ y $b = 250$

Si asume como modelo $P = \frac{875}{3}t + 250$, deja por fuera los puntos $P_2, P_3\ y\ P_5$ (ver figura 7)

Fig. 7 Ajuste lineal para los datos del ejemplo 5.7

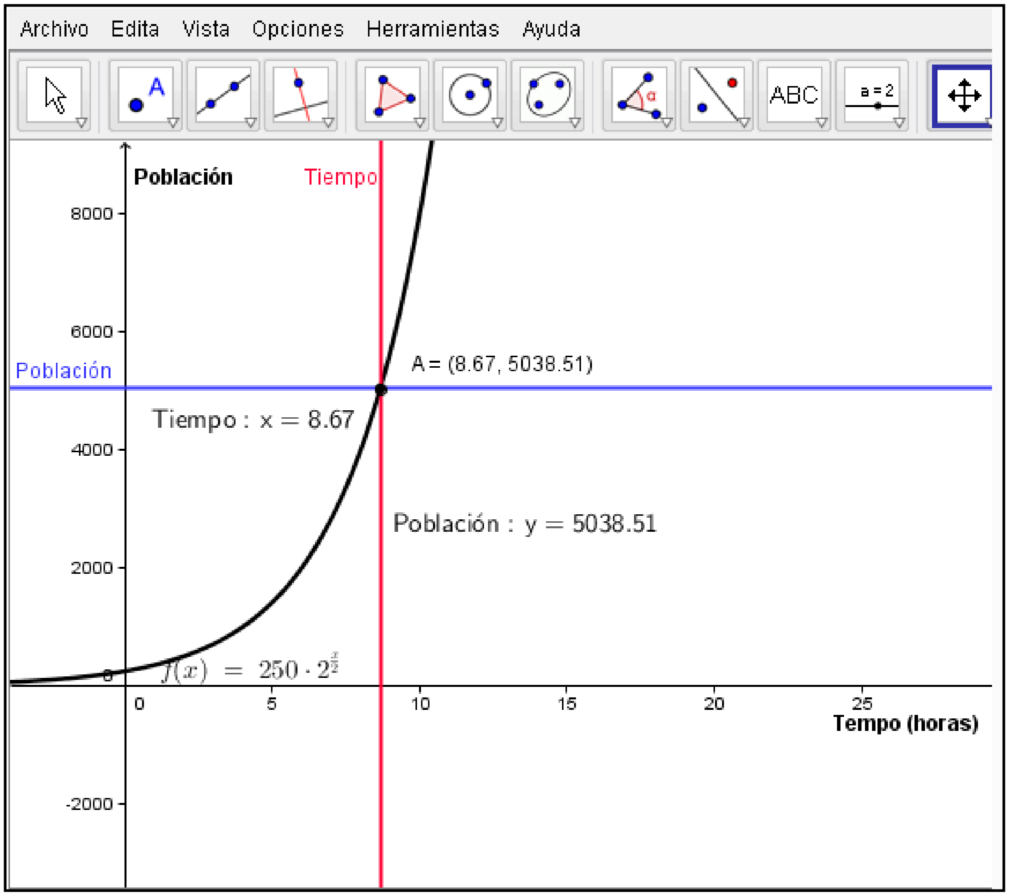


Lo mismo que ocurre con la recta de la figura 7, ocurre con cualquier recta determinada por un par de puntos dados. Para obtener la recta que mejor se ajusta a los datos, el estudiante requiere conocimiento previo sobre matrices y/o análisis de regresión (ajuste por el método de los mínimos cuadrados lineales), el cuál puede también utilizar para encontrar el mejor modelo de tipo exponencial, después de hacer un cambio de variable apropiado. Sin embargo, a partir del gráfico de puntos y de los conocimientos previos sobre la gráfica de una función exponencial, se presenta este modelo para el estudio de la situación descrita mediante los datos. Esto muestra lo apropiado de la situación didáctica, pues un estudiante de matemáticas básicas no tiene conocimientos sobre matrices y/o análisis de regresión lineal.

Encontrado el modelo de crecimiento, su solución requiere el conocimiento de propiedades de los logaritmos. Sin embargo, desde el análisis gráfico, se puede determinar fácilmente el tiempo que se requiere para un valor de población determinado, a la vez que se puede interactuar con un software para variados tiempos y poblaciones.

En la siguiente dirección: http://mathberrio.net/wbeimar/, se encuentra una animación realizada en Geogebra donde, ajustándose al modelo didáctico propuesto, se muestra cómo interactuar con el software en la búsqueda de los tiempos requeridos para alcanzar diferentes poblaciones y recíprocamente, cómo hallar poblaciones para diferentes tiempos.

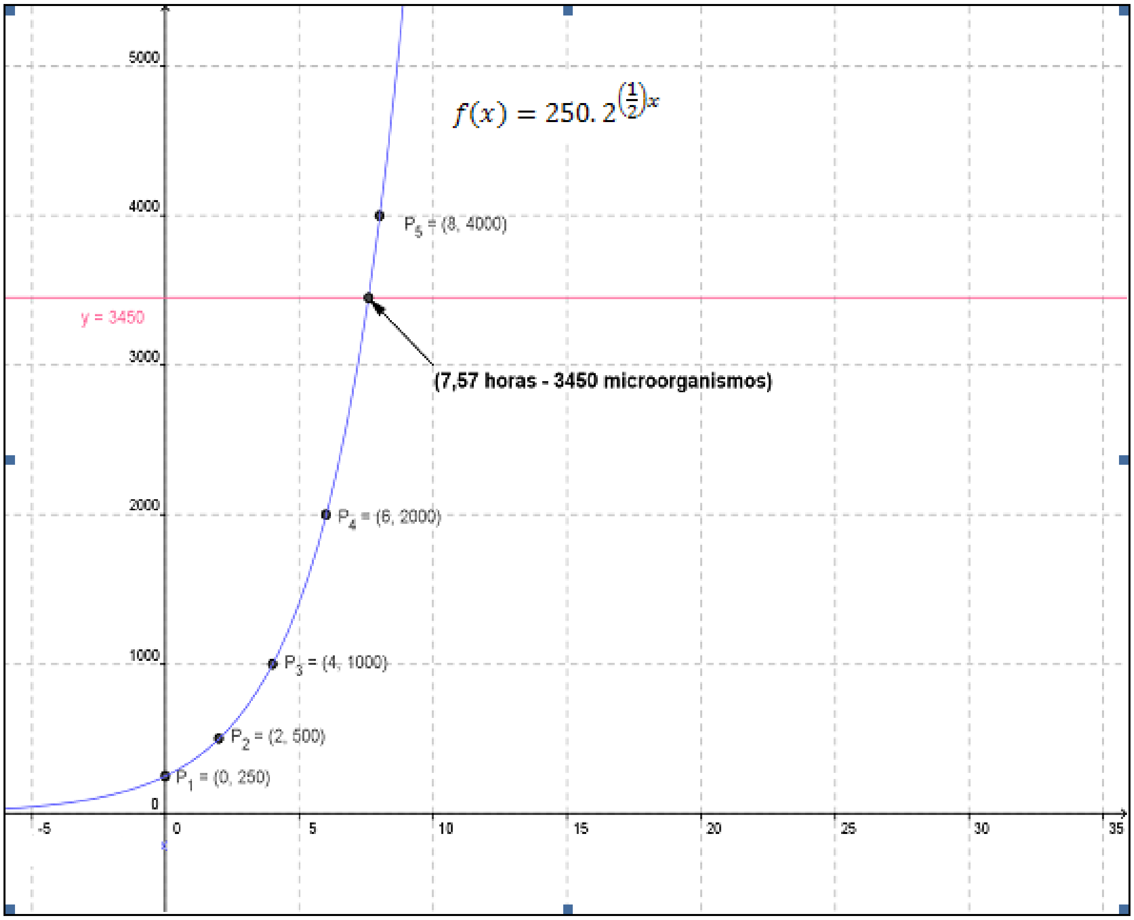
Fig. 8 Solución gráfica de una ecuación exponencial. Animación en Geogebra



En la animación presentada en al figura 8, se puede variar tanto el tiempo como la población, mediante el "barrido" de las funciones, $x = tiempo$, representada por la función de color rojo y $y = población$, representada por la función de color azul. La solución para el tiempo o la población de la ecuación de la forma, $P = 250(2)^{\frac{t}{2}}$, estará dada por las distancias desde el eje vertical y eje horizontal hasta el punto de intersección de las rectas y la función, respectivamente.

De la misma forma, la gráfica de la figura 8 muestra la solución para una población de 3450 microorganismos. Ésta corresponde al punto de intersección de las funciones, $\boldsymbol{P = 250(2)^{\frac{t}{2}}}$ y $\boldsymbol{P = 3450.}$

Fig. 8 Solución gráfica del modelo de crecimiento exponencial.



Este tipo de soluciones que favorecen el modo de pensamiento sintético–geométrico, *"consideran la visualización como proceso mental fundamental en la solución de este tipo de problemas"* (Zimmermann y Cunningham, 1991). Del mismo modo, según Duval (1998, p38), se puede afirmar que los tres tipos de procesos cognitivos dados, la visualización, la construcción y el razonamiento interactúan para generar un dominio en este modo de pensamiento.

Los ejemplos presentados en este trabajo se pueden extender a ecuaciones con radicales, exponenciales, logarítmicas y trigonométricas. La experiencia de aula muestra que estos tipos de ecuaciones sugieren un manejo algebraico y complicado de identidades y propiedades que algunas veces no se recuerdan y por tanto requieren un dominio de las propiedades en los sistemas algebraicos y numéricos para poder llegar a la solución. Cuando se le propone a un estudiante que solucione una ecuación, siempre busca procedimientos analíticos y algebraicos mediados por algoritmos, sin pensar en sus representaciones gráficas que pueden dar lugar a la solución de un modo sintético–geométrico como se ha propuesto.

6. Análisis de resultados

La propuesta de presentar los contenidos de ecuaciones y modelos (que se puede extender a otros conceptos matemáticos: Inecuaciones, valor absoluto, cónicas, sucesiones y series, límites, entre otros) desde una visión geométrica, gráfica y utilizando algunas propiedades, permite que en el estudiante se den procesos de razonamiento que involucren los distintos modos de pensamiento que plantea Anna Sierpinska en su teoría. Esto favorece un aprendizaje significativo en cuanto a la construcción de conceptos, ideas y relaciones, dada la interacción en la estructura cognitiva del estudiante, que es relevante en la medida que se propicien, con el enfoque desde los distintos modos de pensamiento presentados, este tipo de situaciones en al aula de clase.

La experiencia en el aula evidencia que cuando un estudiante va a resolver una ecuación cuadrática de la forma $ax^2 + bx + c = 0$, sólo ha memorizado la expresión, $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ sin asociarla a su solución gráfica donde se presentan las intersecciones de la función $y = ax^2 + bx + c$ con $y = 0$. Esto pone en evidencia la necesidad de solucionar ecuaciones polinómicas de grado mayor de 2 con algoritmos y de manera mecánica, pues se muestra que no hay un desarrollo del modo de pensamiento sintético-geométrico que permita de una manera clara y conceptual, definir las raíces de los polinomios. Por eso la propuesta pretende mostrar alternativas que vinculen los procedimientos analíticos-aritméticos usuales con otros, por ejemplo la graficación, como procedimientos de solución sintético-geométricos.

Es importante que el estudiante esté familiarizado con este tipo de situaciones, pues puede ocurrir que en el desarrollo de su pensamiento matemático a través de los procesos educativos en la escuela se le dé prelación a procesos algorítmicos que sólo favorecen el modo de pensamiento analítico–estructural o analítico–aritmético, en detrimento del modo analítico–geométrico. Se requiere entonces favorecer la interacción de los distintos modos de pensamiento a través de la solución de diversas situaciones académicas.

En cuanto a las soluciones gráficas de los ejemplos que se presentan se debe asegurar que el estudiante esté en la capacidad de hacer gráficas, para que de ellas pueda obtener información correcta. Es necesario señalar la importancia de la enseñanza de métodos de graficación vinculados a las propiedades algebraicas de las ecuaciones y los modelos, utilizando cálculos y programas computacionales de uso libre, como geogebra, Wxmáxima, ente otros, donde a partir de una lectura geométrica se puede encontrar información relevante en la solución de muchos problemas.

Cuando se utilizan software educativos, animaciones, simulaciones y otras herramientas de las llamadas tecnologías de información y comunicación, se pueden evidenciar mejores resultados en la implementación de este tipo de situaciones para favorecer el desarrollo de los distintos modos de pensamiento. Esto se da principalmente porque el estudiante recrea los conceptos que de una manera distinta serían estáticos y no vincula características algebraicas, geométricas y axiomáticas, es decir, no interrelaciona los modos de pensamiento sintético-geométrico, analítico-aritmético, y analítico–estructural.

Bibliografía

Ochoviet, T. *Unidad legaría sobre el concepto de solución de un sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas.* Instituto Politécnico Nacional, Montevideo, 2009.

Bills, C. Jones, K. *Visualisation, imagery, and the development of geometrical reasoning. Proceeding of the british society for research into learning mathematics*. University of Birmingham, Southampton, 1998, N. 18(1&2), p. 123-128.

Sierpinska, A. *Algunos aspectos de los estudiantes sobre las formas de pensar en álgebra lineal.* Universidad de Concordia, Montreal, 1999. pag. 1- 40

Duval, R. P*erspectives on the teaching of geometry for the 21st century: an icmi study.* Dordrecht: Kluwer. Geometry from a Cognitive Point of View. In C. Mammana and V. Villani (Eds), 1998

Zimmermann, W. Cunningham, S. V*isualisation in teaching and learning* mathematics. Washing: Mathematical Association of America, 1991

Hein, N. *Modelaje matemático como método de investigación en clases de matemáticas.* Universidad Regional de Blumenau-FURB, Brasil. 2006