

1. Identificación de sistemas de parámetros distribuidos y el problema de ubicación óptima de sensores

Los Sistemas de Parámetros Distribuidos son sistemas dinámicos de gran escala cuyos estados presentan una dependencia espacio-temporal en sus dinámicas. Su representación matemática más adecuada se realiza por medio de EDPs, las cuales involucran métodos sofisticados de modelamiento y solución, pero con la ventaja de obtener descripciones precisas de los fenómenos físicos objeto de estudio. En las últimas décadas, los Sistemas de Parámetros Distribuidos han ocupado un importante rol en la teoría de sistemas y control, y esta posición ha crecido en importancia debido a la diversificación de los sistemas industriales y fuertes acoples entre dinámicas multi-físicas, en donde nuevos objetivos de calidad, monitoreo y control han sido fijados para optimizar las ganancias de la industria.

Para realizar un control preciso de cualquier sistema se requiere un modelo matemático que represente de manera adecuada las dinámicas de interés. Los Sistemas de Parámetros Distribuidos son modelados con sistemas de EDPs, las cuales son estructuras matemáticas compuestas por tres elementos principales (Hangos [15]):

1. Las relaciones funcionales de las variables de interés vistas como variaciones en el dominio espacio-temporal (variaciones en el tiempo, términos convectivos, términos conductivos).
2. Parámetros de las ecuaciones (conductividades térmicas, calores específicos, densidades, etc.).
3. Funciones que describen acciones externas y perturbaciones conocidas.

Por lo general, se sabe de antemano la clase de fenómeno de transporte que se va a modelar (la estructura matemática), y además, se conocen los actuadores con los cuales se transferirá energía, masa e información al sistema (Bird [10]), por lo tanto, se desconocen únicamente los parámetros del modelo. La identificación de sistemas paramétrica radica en la determinación de parámetros desconocidos en una estructura matemática conocida a partir de datos observados, tal que la respuesta del modelo matemático sea cercana, en cierta norma, a las observaciones físicas del proceso.

1.1 Ubicación óptima de sensores para la identificación de sistemas de parámetros distribuidos

La naturaleza infinito-dimensional de los Sistemas de Parámetros Distribuidos imposibilita la tarea de tomar mediciones de los estados en todo el dominio espacial (Temam [27]), lo cual ha planteado la pregunta de cómo ubicar los sensores tal que la información contenida en las señales resultantes sea la más alta posible, dependiendo de los objetivos de los datos tomados. La literatura en ubicación óptima de sensores en Sistemas de Parámetros Distribuidos es bastante completa, pero la mayoría de trabajos se enfocan en estimación de estados (Jai [16], Korbicz [17]). Ha habido menos trabajos reportados en el área de identificación de parámetros. Revisando la literatura (Rafajlowicz [21],[22],[23], Ucinski [28]) se encuentra que los algoritmos y métodos para la ubicación de sensores para la identificación de parámetros en Sistemas de Parámetros Distribuidos se pueden clasificar principalmente en dos grupos:

Métodos basados en estimación de estados: El problema de estimación de estados y el de identificación de parámetros son problemas matemáticamente distintos que difieren en objetivos y en complejidad. Para la mayoría de casos, el problema de identificación es más complejo debido a que los estados actuales presentan una dependencia no-lineal fuerte en los parámetros desconocidos a pesar de que se esté identificando una ecuación diferencial parcial lineal en esos parámetros. En cambio, en el problema de estimación de estados, la dependencia del estado actual con el estado inicial es lineal para sistemas lineales, lo cual hace que el problema de estimación de estados sea de menor complejidad (para el caso lineal). Para ver el problema de identificación como uno de estimación de estados se aumenta el vector de estados asumiendo como estados el vector de parámetros. Sin embargo, la estimación de estados y de parámetros tiene que resolverse simultáneamente lo cual hace que el problema sea altamente no-lineal, por lo cual presenta las enormes complicaciones de la estimación de estados en sistemas no lineales. Para resolver este problema, se ha planteado realizar una secuencia de linealizaciones consecutivas alrededor de trayectorias de estado (Malebranche [19]).

Métodos basados en la teoría de diseño de experimentos: Evidentemente en Sistemas de Parámetros Distribuidos, la identificación de parámetros resultante de un ajuste de datos depende de la ubicación de los sensores en el dominio espacial. Entonces, para realizar comparación entre diferentes configuraciones de sensores, se requiere desarrollar una medida cuantitativa de las bondades de una ubicación en particular. Esta medida está basada en el concepto de la Matriz de Información de Fisher (MIF) ampliamente usada en diseño de experimentos. Esta medida tiene la ventaja de que para el caso de horizontes grandes de tiempo, no-linealidades respecto a los parámetros suaves, y errores en las mediciones independientemente distribuidos, presenta que la inversa de la MIF constituye una aproximación de la matriz de covarianzas para el estimado de los parámetros. La MIF refleja la variabilidad en los parámetros identificados la cual es inducida por el ruido de medición en los sensores, por lo tanto, un valor "más grande" de la MIF refleja más precisión y menor variabilidad en los parámetros identificados. Esta es la esencia del método: seleccionar configuraciones de sensores que generen altos valores de la Matriz de Información de Fisher. Pero la tarea de encontrar esa configuración no es fácil, se ha demostrado que la MIF es una función

netamente “plana” y no ha sido posible plantear un método de optimización que converja a una solución óptima. Para ello, resta usar una métrica más débil pero dependiente de la MIF para medir la bondad de la configuración de los sensores para una adecuada identificación de parámetros en Sistemas de Parámetros Distribuidos, se usan ciertas funciones $\Psi(\mathbf{MIF})$ como funcionales de costo y se optimiza sobre ellas.

Sun [26] usa el diseño óptimo de experimentos para resolver problemas inversos en modelamiento de corrientes de agua en el subsuelo, en donde se requiere monitorear la calidad de agua en un vertedero. En su monografía, también se presentan otras aplicaciones de la teoría de diseño óptimo de experimentos en problemas importantes de ingeniería de flujos en medios porosos. Rensfelt [24] considera el problema de identificación no paramétrica de materiales viscoelásticos. En identificación no paramétrica, se busca un estimado de cierta función desconocida que hace parte del sistema de ecuaciones diferenciales parciales. La propagación axial de una onda en materiales viscoelásticos está gobernada por la ecuación de onda en el dominio de la frecuencia en donde se desconocen las funciones de la amplitud complejas. Para identificar estas funciones, la autora generó un diseño óptimo de ubicación óptima de sensores basado en la Matriz de Información de Fisher del sistema con el objetivo de maximizar la cantidad de información útil que puede ser extraída de los datos experimentales y de esta manera obtener una identificación más precisa. Alaña [3] utiliza una nueva estrategia de ubicación óptima de sensores para identificación paramétrica basadas en POD. En su trabajo demuestra que las ubicaciones óptimas de los sensores son en los puntos en donde las funciones base POD encuentran sus valores extremos, y se demuestra la equivalencia entre los extremos de las bases POD y de las funciones de sensibilidad. La técnica de POD ha sido una herramienta para la simulación, el control y la optimización de sistemas complejos de gran escala. La esencia de la técnica radica en usar un conjunto de mediciones experimentales (o simuladas) de datos (snapshots) del sistema, para calcular un conjunto de funciones base que capturen de manera precisa el comportamiento espacio-temporal de sistemas descritos por ecuaciones diferenciales parciales. Esta técnica se tratará en la segunda parte de esta tesis.

Por otra parte, los trabajos relacionados con la ubicación óptima de sensores para mejorar propiedades de observabilidad y controlabilidad de sistemas descritos por ecuaciones diferenciales parciales brindan una visión más amplia del tema. La propiedad de observabilidad es una condición necesaria para la estimación de estados, es decir, si la matriz de observabilidad de un sistema lineal tiene rango completo, entonces el sistema es observable y sus estados pueden ser estimados con un número determinado de sensores, sin embargo, para sistemas no lineales una medida más rigurosa es necesaria para encontrar el grado de observabilidad de un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias no lineales. Van den Berg[29] selecciona de manera óptima las posiciones de sensores en un reactor tubular usando un criterio robusto para mejorar la observabilidad del sistema. El sistema de ecuaciones diferenciales parciales que modelan la temperatura y concentración a lo largo del reactor son discretizadas y linealizadas alrededor de un punto de operación. Las mejores posiciones de los sensores son encontradas especificando unas medidas escalares del Gramiano de observabilidad que representa la Matriz de Información de Fisher del sistema, la cual resulta del problema de estimación de estados. El Gramiano de Observabilidad puede ser interpretado como la energía generada por las salidas del sistema (la respuesta de los sensores) para las perturbaciones en los estados iniciales. Se utiliza las medidas de este

gramiano para establecer un “nivel de observabilidad” de diferentes configuraciones de sensores.

Alonso [4] ubica de manera óptima un número determinado de sensores enfocados a estimación de estados en un reactor tubular basándose en un modelo de orden reducido obtenido con la técnica POD. El criterio de ubicación óptima de los sensores se basa en encontrar la configuración que maximice el valor singular más pequeño asociado a la Matriz de Información de Fisher (Gramiano de Observabilidad) del sistema. El algoritmo de búsqueda de las configuraciones de los sensores cambia puntos aleatoriamente y revisa si la nueva configuración de sensores es mejor que la actual. Los resultados muestran que el sistema observador para las variables de temperatura y concentración se desempeña de manera muy aceptable comparado con una el observador diseñado para una configuración de sensores que no es la óptima respecto al criterio definido en este trabajo. De igual manera, Sumana [25] realiza una ubicación óptima de sensores sobre una columna de destilación reactiva basándose en el mismo concepto de maximización del mínimo valor singular del Gramiano de Observabilidad (la Matriz de Información de Fisher del sistema). Este criterio es ampliamente utilizado debido a que los valores singulares del gramiano de observabilidad corresponden al nivel de energía de la respuesta del sensor generado por un sistema lineal.

Por otra parte, Antoniades [5] propone una metodología para integrar el diseño de controladores no lineales con la ubicación óptima de sensores y actuadores en sistemas descritos por ecuaciones diferenciales parciales. Inicialmente, el autor discretiza un sistema de difusión-reacción (reactor tubular no isoterma) y lo reduce aplicando una proyección de Galerkin con el fin de obtener una aproximación finita del sistema de ecuaciones diferenciales parciales. El problema de ubicación óptima de actuadores es formulado como un problema de optimización sin restricciones en el que se minimiza un funcional de costo que penaliza la respuesta del sistema en lazo cerrado con un controlador de orden reducido y la acción de control. La ubicación óptima de sensores es planteada como un problema de optimización sin restricciones en el cual se minimiza una función de costo del error de estimación en lazo cerrado del sistema infinito-dimensional.

El trabajo de Vande Wouwer[30] propone una metodología unificada para la ubicación óptima de sensores tanto para estimación de estados como para identificación paramétrica, y se basa en usar el concepto de independencia en las mediciones de los sensores para el caso de estimación de estados, y en el concepto de independencia entre las funciones de sensibilidad de los parámetros en el contexto de identificación paramétrica. En ambos casos, se construye la MIF del sistema (con mediciones de sensores para estimación y coeficientes de sensibilidad para identificación), la cual viene siendo la integral de la matriz de covarianzas de dichas entidades. En este estudio se usó el determinante de la Matriz de Información de Fisher, mencionado en este trabajo como Determinante de Gram como medida de independencia. Los elementos diagonales de la matriz de covarianzas representan el nivel de dependencia entre las entidades (mediciones de sensores o coeficientes de sensibilidad) y dado que el determinante de una matriz positiva semidefinida aumenta cuando aumentan sus elementos diagonales, entonces se puede establecer que la maximización del Determinante de Gram respecto a las posiciones de los sensores permite determinar las regiones espaciales donde las entidades de interés tienen un nivel más elevado de independencia.

En esta tesis se exploró la teoría de diseño de experimentos para generar diseños óptimos respecto a un funcional de costo de ubicación de sensores que permitan reconciliar (asimilar) datos adecuadamente en identificación de sistemas a gran escala (Ucinski [28]). El diseño óptimo de experimentos es un área donde confluyen el álgebra lineal, la optimización convexa y la estadística, en donde se generan problemas de optimización basados en modelo cuyas soluciones óptimas son de mínima varianza. Esta teoría puede ser extendida al área de los sistemas dinámicos para ubicar de manera óptima sensores dedicados a estimación de estados o para identificación de sistemas. Para el caso de estimación de estados, el criterio de optimalidad debe ser fundamentado en una medida de la independencia de las respuestas de los sensores, mientras que para el caso de identificación de sistemas el criterio de optimalidad se basa en una medida de la independencia entre las funciones de sensibilidad de los parámetros a identificar. Como se mencionó anteriormente, el criterio de optimalidad está basado en la Matriz de Información de Fisher de los parámetros a identificar. Esta matriz es un estimativo de la cota inferior de la varianza del error del mejor estimador para identificar los parámetros desconocidos de un sistema dado.

Para entender mejor este concepto, estudiemos el caso de un estimador de parámetros por mínimos cuadrados para un sistema lineal estático (regresión lineal) en el que se desconocen m parámetros θ_i con $i = 1, 2, \dots, m$ y se cuenta con N mediciones de la salida y_j y de la señal de control u_j con $j = 1, 2, \dots, N$.

El modelo a estimar tiene la forma:

$$\hat{y}_j = \mathbf{u}_j^T \boldsymbol{\theta} + \mathbf{b}_j \quad (1.1)$$

Donde \mathbf{b} es un vector parámetro desconocido del modelo, $y_j = \hat{y}_j + e_j$ es la salida real del sistema, e_j corresponde a la desviación de la señal medida respecto a la señal real y $\boldsymbol{\theta} = [\theta_1 \ \dots \ \theta_m]^T$ el vector de parámetros desconocidos. De acuerdo con lo anterior se tiene que:

$$y_j = \mathbf{u}_j^T \boldsymbol{\theta} + \mathbf{b}_j + e_j \quad (1.2)$$

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_1^T \\ \mathbf{u}_2^T \\ \vdots \\ \mathbf{u}_N^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \vdots \\ \theta_m \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{b}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{b}_N \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e_1 \\ \vdots \\ e_N \end{bmatrix} \quad (1.3)$$

La cual puede ser reescrita como una ecuación matricial así:

$$\mathbf{Y} = \mathbf{U}\boldsymbol{\theta} + \mathbf{B} + \mathbf{E} \quad (1.4)$$

En donde $\mathbf{B} = [\mathbf{b}_1 \ \dots \ \mathbf{b}_N]^T$ y $\mathbf{E} = [e_1 \ \dots \ e_N]^T$. El error se define como la diferencia entre la señal real medida y la señal del modelo:

$$\mathbf{E} = \mathbf{Y} - \mathbf{U}\boldsymbol{\theta} - \mathbf{B} \quad (1.5)$$

Entonces, el problema de identificación de sistemas consiste en encontrar el vector de parámetros Θ^* tal que modelo matemático sea capaz de reconstruir adecuadamente las señales medidas. Por lo tanto se podría plantear un problema de optimización convexo basado en el modelo del sistema así:

$$\min_{\Theta, B} J = \min_{\Theta, B} \|E\|^2 = (Y - U\Theta - B)^T(Y - U\Theta - B) \quad (1.6)$$

Si se definen:

$$\bar{\Theta} = \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \vdots \\ \theta_m \\ \mathbf{b} \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \bar{U} = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_{11}^T & \dots & \mathbf{u}_{1m}^T & \mathbf{1} \\ \mathbf{u}_{21}^T & \dots & \mathbf{u}_{2m}^T & \mathbf{1} \\ \vdots & \dots & \vdots & \mathbf{1} \\ \mathbf{u}_{N1}^T & \dots & \mathbf{u}_{Nm}^T & \mathbf{1} \end{bmatrix} \quad (1.7)$$

Se puede reescribir el problema como:

$$\min_{\bar{\Theta}} \|E\|^2 = (Y - \bar{U}\bar{\Theta})^T(Y - \bar{U}\bar{\Theta}) = \min_{\bar{\Theta}} (Y^TY + \bar{\Theta}^T\bar{U}^T\bar{U}\bar{\Theta} - 2\bar{\Theta}^T\bar{U}^TY) \quad (1.8)$$

Donde:

$$\bar{\Theta}^* = \operatorname{argmin}_{\bar{\Theta}} (Y^TY + \bar{\Theta}^T\bar{U}^T\bar{U}\bar{\Theta} - 2\bar{\Theta}^T\bar{U}^TY) = \operatorname{argmin}_{\bar{\Theta}} (\bar{\Theta}^T\bar{U}^T\bar{U}\bar{\Theta} - 2\bar{\Theta}^T\bar{U}^TY) \quad (1.9)$$

La solución óptima se da cuando:

$$\left. \frac{\partial J}{\partial \bar{\Theta}} \right|_{\bar{\Theta}^*} = \mathbf{0} \quad (1.10)$$

$$\frac{\partial J}{\partial \bar{\Theta}} = 2\bar{U}^T\bar{U}\bar{\Theta} - 2\bar{U}^TY = 0 \quad (1.11)$$

Por lo tanto,

$$\bar{\Theta}^* = (\bar{U}^T\bar{U})^{-1}\bar{U}^TY \quad (1.12)$$

$\bar{\Theta}^*$ es la solución por mínimos cuadrados para una regresión lineal.

La expresión $\mathbf{M} = \bar{U}^T\bar{U}$ es la matriz de información de Fisher del sistema. Para este caso, la matriz de covarianzas del estimado de mínimos cuadrados es:

$$\operatorname{cov}\bar{\Theta}^* = \sigma^2(\bar{U}^T\bar{U})^{-1} = \sigma^2\mathbf{M}^{-1} \quad (1.13)$$

Definición 1.1. Seaya $y = y(x, t, \theta)$ la solución de un Sistema de Parámetros Distribuidos definido como sistema de ecuaciones diferenciales parciales en todo su dominio espacio-temporal. Sea $\mathbf{x}_i \in \mathfrak{R}^d$ con $\mathbf{i} = 1, 2, \dots, \mathbf{n}$ un punto espacial con $\mathbf{d} = 1, 2, 3$ dependiendo del número de dimensiones del sistema, y $\mathbf{t}_j \in \mathbf{T} = [0, \mathbf{t}_f]$ con $\mathbf{t}_f < \infty$ con $\mathbf{j} = 1, 2, \dots, \mathbf{n}_t$ un instante de tiempo. Aquí θ representa el vector de parámetros desconocidos $\theta = [\theta_1 \dots \theta_r]^T$. Las mediciones son provistas por un número entero positivo \mathbf{n}_s de

sensores. $\hat{y}_k(x_i, t_j, \theta) = y_k(x_i, t_j, \theta) + e_k(x_i, t_j)$ con $k = 1, 2, \dots, n_s$ en donde $\hat{y}_k(x_i, t_j, \theta)$ es la salida del sensor, $y_k(x_i, t_j, \theta)$ es la solución real del sistema de parámetros distribuidos y $e_k(x_i, t_j)$ es el ruido de medición que se supone es ruido blanco. **La Matriz de Información de Fisher (MIF)** se define como:

$$\mathbf{MIF} = \mathbf{M} = \frac{1}{n_t} \sum_{i=1}^n \int_0^{t_f} \mathbf{g}(x_i, t_j) \mathbf{g}^T(x_i, t_j) dt \quad (1.14)$$

En donde $\mathbf{g}(x, t) = \nabla_{\theta} y(x, t, \theta)|_{\theta=\theta_0}$ es el vector de sensibilidad y θ_0 es un estimado inicial de θ .

Como se mencionó anteriormente, las posiciones de los sensores que garantizan la precisión más alta en los parámetros identificados θ son encontradas escogiendo unas ubicaciones x_i tal que minimicen alguna medida escalar de desempeño Ψ definida en el espacio de las Matrices de Información de Fisher.

Encontrar el vector de sensibilidad no es una tarea sencilla. Para esto, se tiene que solucionar simultáneamente el sistema de ecuaciones diferenciales parciales del modelo a identificar aumentado con las ecuaciones diferenciales parciales que modelan la dinámica de dichos coeficientes de sensibilidad.

El problema radica en encontrar un conjunto de puntos espaciales x_i con $i = 1, 2, \dots, n$ con tal que se minimice cierta función $\Psi(\mathbf{MIF})$ que puede ser definida de múltiples formas. En teoría de diseño óptimo de experimentos (Atkinson [9]) recomiendan funciones convexas, por ejemplo:

$$\Psi_D(\mathbf{M}) = -\log(\det(\mathbf{M}))$$

$$\Psi_A(\mathbf{M}) = \text{traza}(\mathbf{M}^{-1})$$

$$\Psi_E(\mathbf{M}) = \lambda_{\max}(\mathbf{M}^{-1}), \text{ donde } \lambda_{\max} \text{ es el máximo eigenvalue de la matriz } \mathbf{M}.$$

En esta tesis se aplicó un algoritmo que permite crear diseños libres de agrupamientos de sensores alrededor de un punto tal como se describe en (Ucinski [28]), los pasos del algoritmo se describen a continuación:

NOTA: Inicialmente se discretiza el dominio espacio-temporal por medio de ELEMENTOS FINITOS (o cualquier otro método numérico) y se soluciona el sistema aumentado de ECUACIONES DIFERENCIALES PARCIALES (Sistema de Ecuaciones del Modelo + Ecuaciones de Sensibilidad), se supone que los sensores serán ubicados en los vértices del mallado.

1.2 Algoritmo para ubicación óptima de sensores para identificación de SPD:

Genere un diseño $\xi^{(0)}$ (ubicación) inicial de sensores tal que $\Psi(\mathbf{MIF}) < \infty$.

Sea $\mathbf{X}_s^{(k)}$ el conjunto de los puntos donde están ubicados los sensores en el experimento $\xi^{(k)}$ de la iteración k , y sea $\mathbf{X}_{ns}^{(k)} = \bar{\mathbf{X}}_s^{(k)}$ el complemento de $\mathbf{X}_s^{(k)}$, es decir los puntos del mallado que NO tienen sensores. Sea $\mathbf{x}_{\min}^{(k)} = \arg \min_{\mathbf{x} \in \mathbf{X}_s^{(k)}} \Psi(\mathbf{x}, \xi^{(k)})$ la posición del sensor que minimiza $\Psi(\text{MIF})$, y sea $\mathbf{x}_{\max}^{(k)} = \arg \max_{\mathbf{x} \in \mathbf{X}_{ns}^{(k)}} \Psi(\mathbf{x}, \xi^{(k)})$ la posición del mallado que maximiza la $\Psi(\text{MIF})$.

Si $\Psi(\mathbf{x}_{\min}^{(k)}, \xi^{(k)}) < \Psi(\mathbf{x}_{\max}^{(k)}, \xi^{(k)}) + \eta$, en donde $\eta \ll 1$ entonces PARE. De lo contrario, encuentre dos conjuntos $\mathbf{S}_s^{(k)} \subset \mathbf{X}_s^{(k)}$ y $\mathbf{S}_{ns}^{(k)} \subset \mathbf{X}_{ns}^{(k)}$ en donde $\mathbf{x}_{\min}^{(k)} \in \mathbf{S}_s^{(k)}$ y $\mathbf{x}_{\max}^{(k)} \in \mathbf{S}_{ns}^{(k)}$ tales que la densidad de sensores por unidad de área sea la misma para $\mathbf{S}_s^{(k)}$ y $\mathbf{S}_{ns}^{(k)}$.

Construya un nuevo experimento $\xi^{(k+1)}$ tal que $\mathbf{X}_s^{(k+1)} = (\mathbf{X}_s^{(k)} - \mathbf{S}_s^{(k)}) \cup \mathbf{S}_{ns}^{(k)}$, incremente k y diríjase al paso 2.

Una forma fácil de crear los conjuntos $\mathbf{S}_s^{(k)}$ y $\mathbf{S}_{ns}^{(k)}$ es intercambiando puntos, definiendo $\mathbf{S}_s^{(k)} = \{\mathbf{x}_{\min}^{(k)}\}$ y $\mathbf{S}_{ns}^{(k)} = \{\mathbf{x}_{\max}^{(k)}\}$. Por lo tanto, el experimento de la iteración siguiente $\mathbf{X}_s^{(k+1)}$ será el conjunto $\mathbf{X}_s^{(k)}$ de la iteración anterior menos el elemento $\mathbf{S}_s^{(k)} = \{\mathbf{x}_{\min}^{(k)}\}$, y a este le añadimos el elemento $\mathbf{S}_{ns}^{(k)} = \{\mathbf{x}_{\max}^{(k)}\}$.

1.3 Caso de aplicación: Transferencia de calor en una placa bidimensional

En esta tesis se aplicó el anterior algoritmo para la ubicación óptima de sensores enfocado a la asimilación (identificación) de parámetros de la ecuación de transferencia de calor (Bird [10]) en una placa bidimensional con conductividad térmica variable y condiciones de frontera variantes en el tiempo.

El sistema se describe a continuación:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{T}}{\partial t} &= \nabla \cdot (\boldsymbol{\kappa} \cdot \nabla \mathbf{T}) \\ &= \frac{\partial \boldsymbol{\kappa}}{\partial x} \cdot \frac{\partial^2 \mathbf{T}}{\partial x^2} + \frac{\partial \boldsymbol{\kappa}}{\partial y} \cdot \frac{\partial^2 \mathbf{T}}{\partial y^2} \end{aligned} \quad (1.15)$$

En donde x, y son las coordenadas espaciales, t es la variable temporal, $\mathbf{T} = \mathbf{T}(x, y, t)$ la variable de temperatura y $\boldsymbol{\theta} = [\mathbf{a}, \mathbf{b}]^T$ los parámetros desconocidos de la función que describe a la conductividad térmica $\boldsymbol{\kappa} = \boldsymbol{\kappa}(x, y, \boldsymbol{\theta})$, que tiene para el caso de aplicación tiene la forma:

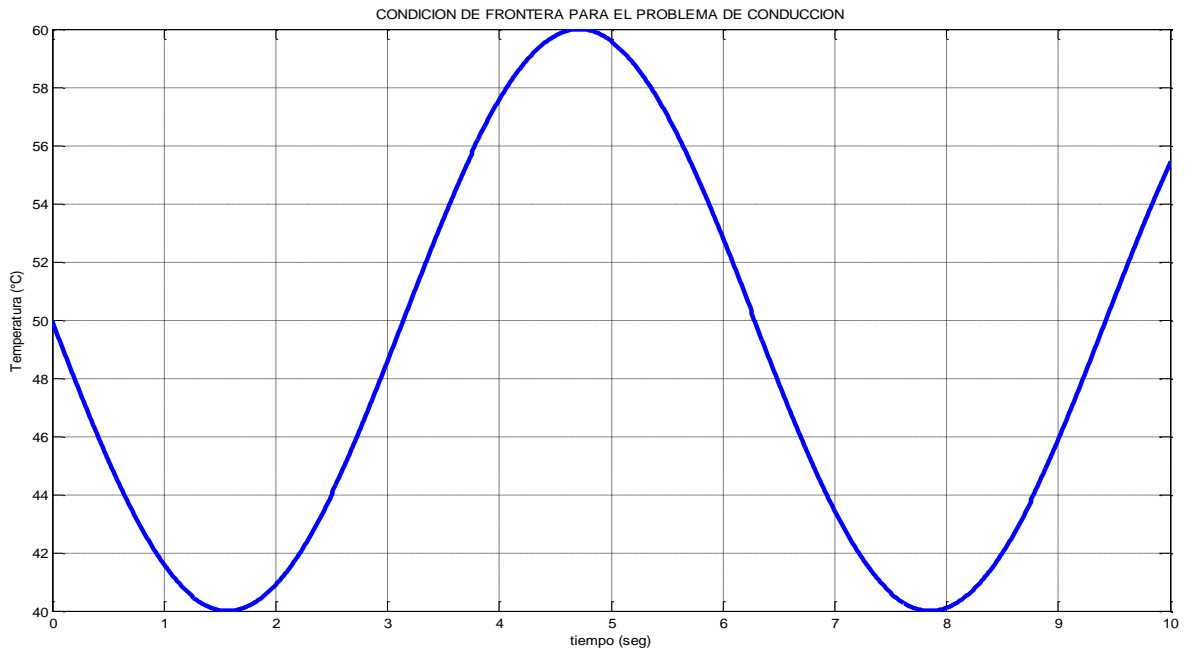
$$\boldsymbol{\kappa}(x, y, \boldsymbol{\theta}) = \mathbf{a} \cdot x + \mathbf{b} \cdot y \quad (1.16)$$

Para este caso de aplicación se definieron las siguientes condiciones iniciales y de frontera tipo Dirichlet:

Condiciones Iniciales: $T(x, y, 0) = 5^\circ\text{C}$.

Condiciones de Dirichlet: $T(x, y, t) = 50 \cdot \left(1 - \frac{1}{5} \sin(t)\right)^\circ\text{C}$ en $(x, y) \in \Omega$ en donde Ω representa la frontera física de la placa.

Figura 1.1 Condición de frontera tipo Dirichlet del problema



Como se mencionó anteriormente, el sistema original se debe resolver simultáneamente con las ecuaciones de sensibilidad de los parámetros desconocidos. Estas ecuaciones modelan el grado de incidencia que tienen los parámetros desconocidos sobre la variable del problema. Para encontrar estas ecuaciones se aplicó la regla de la cadena sobre el sistema original, resultando:

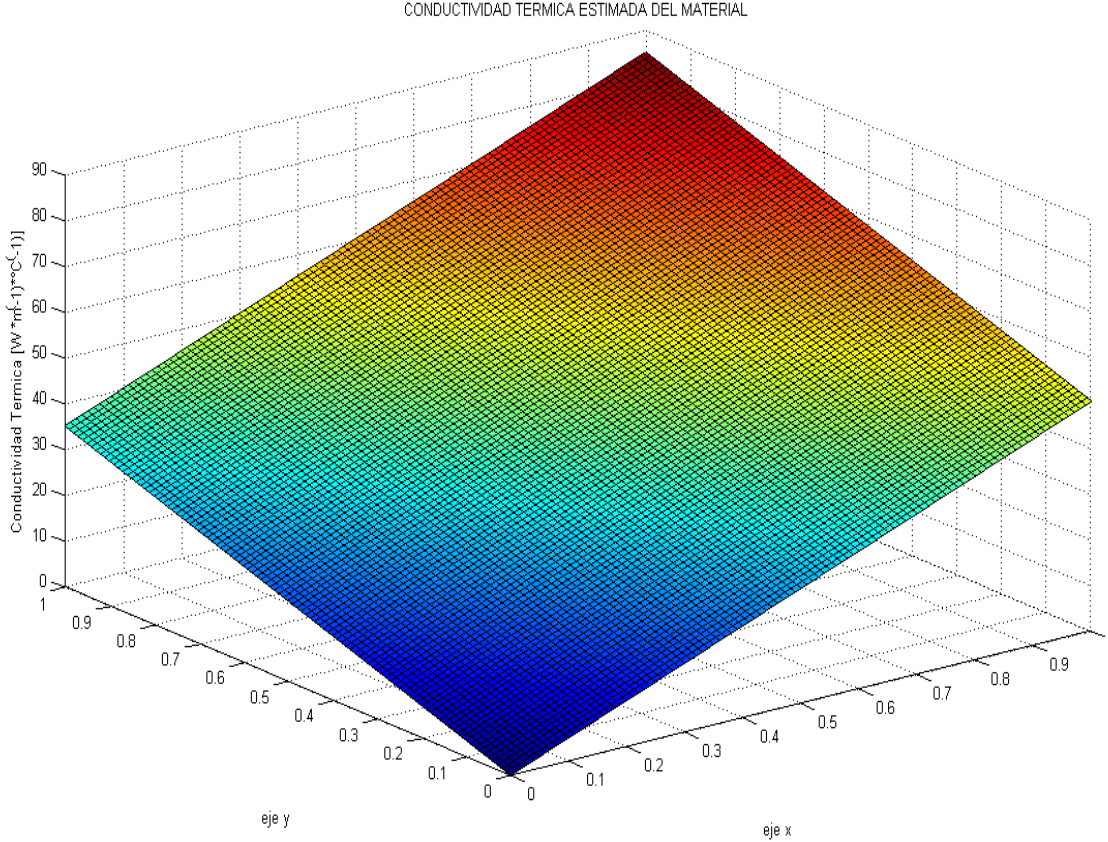
$$\frac{\partial}{\partial t} \cdot \frac{\partial T}{\partial a} = \nabla \cdot (x \cdot \nabla T) + \nabla \cdot \left(\kappa \cdot \nabla \left(\frac{\partial T}{\partial a} \right) \right)$$

1.17

$$\frac{\partial}{\partial t} \cdot \frac{\partial T}{\partial b} = \nabla \cdot (y \cdot \nabla T) + \nabla \cdot \left(\kappa \cdot \nabla \left(\frac{\partial T}{\partial b} \right) \right)$$

En donde $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathcal{R}^1$ son parámetros desconocidos, La conductividad térmica es positiva y presenta una variación lineal creciente en el cuadrante en el que se definió el dominio de la placa.

Figura 1.2 Conductividad térmica de la placa para inicialización del algoritmo



Por lo tanto el sistema aumentado de Ecuaciones Diferenciales Parciales a resolver es:

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial t} &= \frac{\partial \kappa}{\partial x} \cdot \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial \kappa}{\partial y} \cdot \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \\ \frac{\partial}{\partial t} \cdot \frac{\partial T}{\partial \mathbf{a}} &= \nabla \cdot (\mathbf{x} \cdot \nabla T) + \nabla \cdot \left(\kappa \cdot \nabla \left(\frac{\partial T}{\partial \mathbf{a}} \right) \right) \\ \frac{\partial}{\partial t} \cdot \frac{\partial T}{\partial \mathbf{b}} &= \nabla \cdot (\mathbf{y} \cdot \nabla T) + \nabla \cdot \left(\kappa \cdot \nabla \left(\frac{\partial T}{\partial \mathbf{b}} \right) \right) \end{aligned} \quad (1.18)$$

En donde $\kappa(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \theta) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{x} + \mathbf{b} \cdot \mathbf{y}$.

Condiciones Iniciales: $T(\mathbf{x}, \mathbf{y}, 0) = 5^\circ\text{C}$, $\frac{\partial T}{\partial \mathbf{a}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, 0) = \mathbf{0}$, $\frac{\partial T}{\partial \mathbf{b}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, 0) = \mathbf{0}$

Condiciones de Dirichlet: $T(x, y, t) = 50 \cdot \left(1 - \frac{1}{5} \sin(t)\right) ^\circ\text{C}$, $\frac{\partial T}{\partial a}(x, y, t) = 0$, $\frac{\partial T}{\partial b}(x, y, t) = 0$ en $(x, y) \in \Omega$ donde Ω representa la frontera física de la placa.

Se utilizó el método de Elementos Finitos para la discretización del sistema de ecuaciones aumentado. Las dimensiones de la placa son 1m x 1m x 0.01m.

La Matriz de Información de Fisher para el anterior sistema tiene la forma:

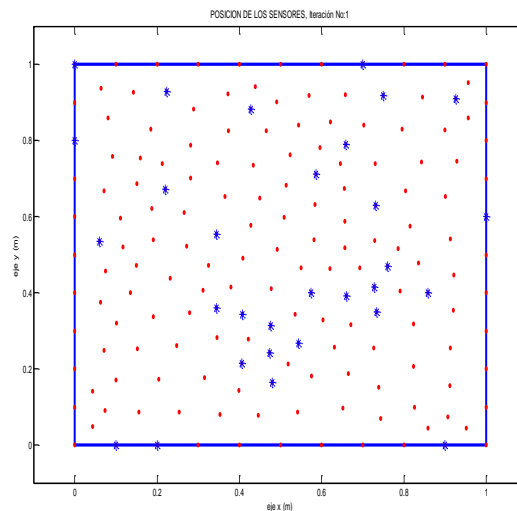
$$\mathbf{M}(\mathbf{x}) = \frac{1}{t_f} \int_0^{t_f} \begin{bmatrix} \left(\frac{\partial T(x, t)}{\partial a}\right)^2 & \frac{\partial T(x, t)}{\partial a} \cdot \frac{\partial T(x, t)}{\partial b} \\ \frac{\partial T(x, t)}{\partial a} \cdot \frac{\partial T(x, t)}{\partial b} & \left(\frac{\partial T(x, t)}{\partial b}\right)^2 \end{bmatrix} dt \quad (1.19)$$

Esta integral se aproximó para cada x_i (punto del mallado) por medio de la regla de integración trapezoidal. Como se mencionó anteriormente, el determinante de la Matriz de Información de Fisher es una función matricial bastante “plana”, por lo cual es ineficiente para propósitos de optimización. Por lo tanto, se implementó la función escalar $\Psi_D(\mathbf{M}) = -\log(\det(\mathbf{M}))$ y se optimizó sobre ella, es decir:

$$\Psi_D(\mathbf{M}) = -\log \left(\det \left(\frac{1}{t_f} \int_0^{t_f} \begin{bmatrix} \left(\frac{\partial T(x, t)}{\partial a}\right)^2 & \frac{\partial T(x, t)}{\partial a} \cdot \frac{\partial T(x, t)}{\partial b} \\ \frac{\partial T(x, t)}{\partial a} \cdot \frac{\partial T(x, t)}{\partial b} & \left(\frac{\partial T(x, t)}{\partial b}\right)^2 \end{bmatrix} dt \right) \right) \quad (1.20)$$

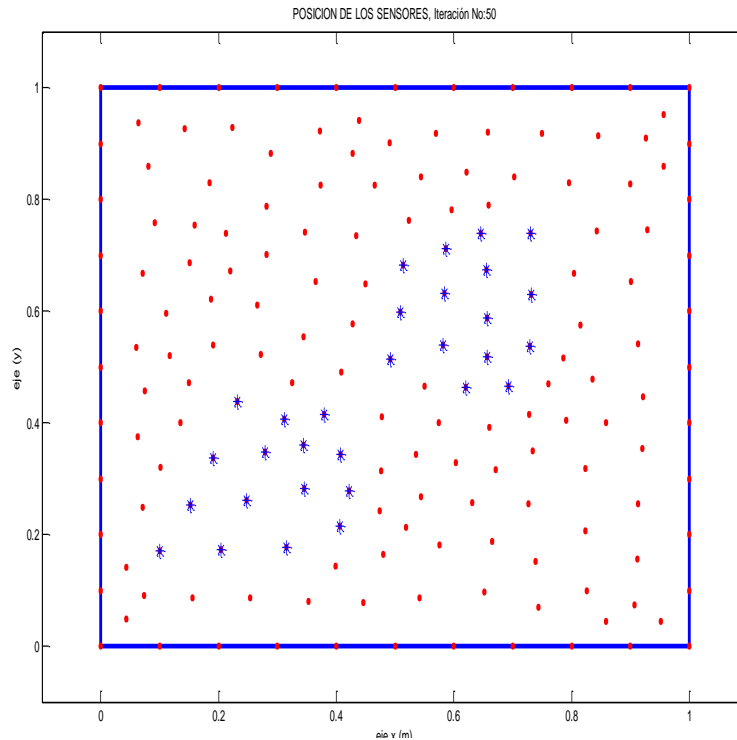
Las posiciones iniciales de los sensores se muestran en color azul, mientras que las ubicaciones posibles generadas por un mallado no estructurado de elementos finitos se muestra en rojo:

Figura 1.3 Posición inicial de los sensores



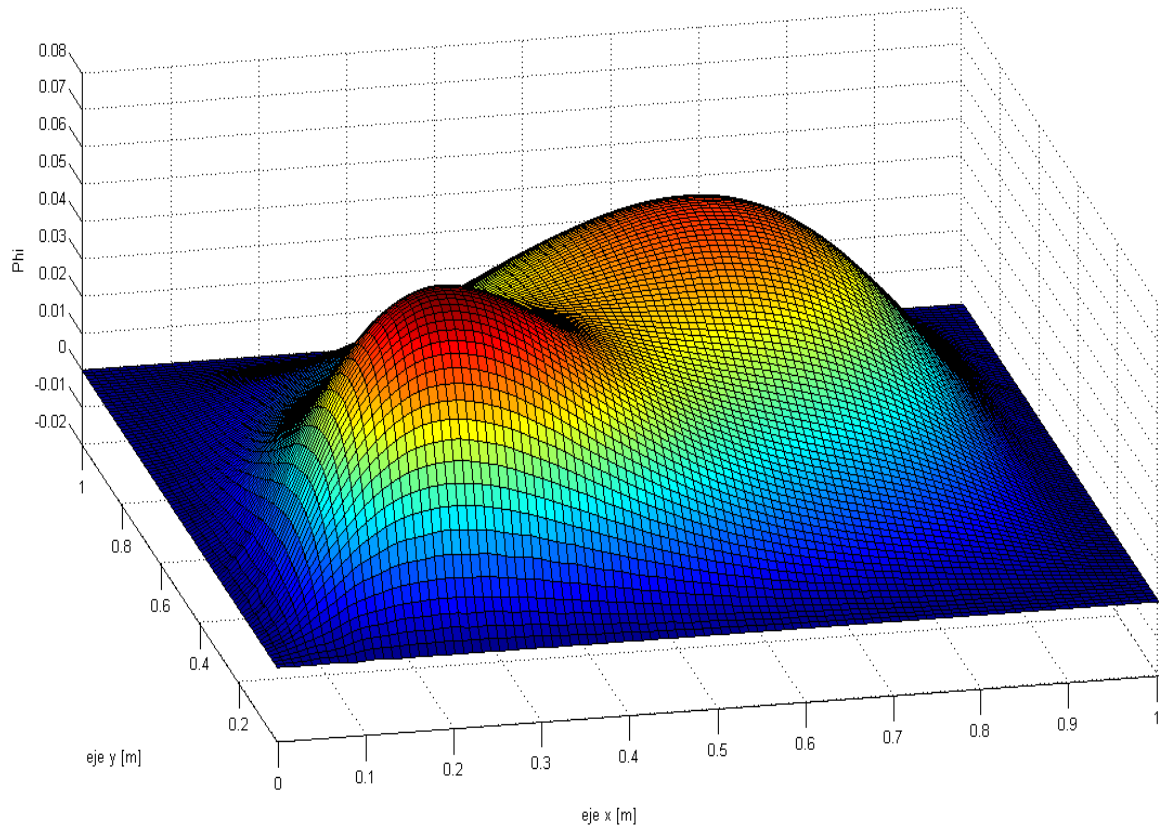
Y las posiciones finales fueron:

Figura 1.4 Posición final de los sensores – iteración 50



Se pudo evidenciar que el diseño final presenta una simetría que también es reportada en la literatura, y de acuerdo con la teoría provee una mejor reconciliación de los datos cuando se pretende identificar (asimilar) sistemas dinámicos de gran escala, en particular, aquellos descritos por ecuaciones diferenciales parciales. A continuación se muestra la función $\Psi_D(\mathbf{M})$ sobre la cual se optimizó:

Figura 1.5 Función $\Psi_D(\mathbf{M})$ en la iteración final



Se deja claro que uno de los puntos cruciales en el modelamiento de Sistemas de Parámetros Distribuidos es la identificación de los parámetros desconocidos en su estructura matemática y que dada la imposibilidad de tomar mediciones en todo el dominio espacial se planteó una descripción sistemática basada en la teoría de experimentos sobre cómo mejorar la eficiencia de los algoritmos de identificación por medio del diseño de experimentos óptimos para el muestreo de datos. En la actualidad, esta serie de experimentos se diseñan de forma empírica, sin tener en cuenta el conocimiento matemático que se tiene del proceso. Este hecho motivó la investigación en el área apuntando a reducir los costos de la instrumentación involucrada.

Claramente, el vector de parámetros identificados resultantes de implementar un algoritmo de optimización para el ajuste de datos depende de la ubicación de los sensores en el dominio espacial. Entonces, una base de comparación natural entre los diferentes experimentos posibles fue escoger una medida relacionada con la precisión esperada de los parámetros identificados obtenidos de la colección de datos, esta es la Matriz de Información de Fisher, la cual refleja la variabilidad en los parámetros identificados inducida por la variabilidad estocástica de las muestras tomadas. Por lo tanto, en este trabajo se buscaron configuraciones que maximizan una función basada en Matriz de Información de Fisher la cual es un indicativo de la precisión de los parámetros encontrados.

1.4 Validación de los resultados

Para validar los resultados, se plantearon experimentos de identificación para el sistema de parámetros distribuidos de transferencia de calor en la placa bidimensional. Inicialmente, se generaron mediciones del proceso simulando condiciones reales de ruido en las señales obtenidas en los puntos de medición. Los problemas de identificación de sistemas siempre pueden ser planteados como problemas de optimización, y en este caso, el problema de optimización que se resolvió para estimar los parámetros desconocidos se planteó así:

$$\min_{\theta} f(\theta) = \sum_{i=1}^{n_s} \left[\sum_{k=1}^{n_t} \left(T_{\text{experimental}}(\mathbf{k}, i) - T_{\text{modelo}}(\mathbf{k}, i, \theta) \right) \right]^2 \quad (1.21)$$

Sujeto a:

Modelo en Elementos Finitos del Sistema

$$\mathbf{lb} \leq \theta \leq \mathbf{ub}$$

En donde, $\theta = [\mathbf{a}, \mathbf{b}]^T$ es el vector de parámetros a identificar. n_s es el número de sensores usados en el experimento. n_t es el número total de muestras de la señal en el tiempo. $T_{\text{experimental}}(\mathbf{k}, i)$ es el valor de la señal de temperatura en el tiempo k y del sensor número i . $T_{\text{modelo}}(\mathbf{k}, i, \theta)$ es la temperatura del modelo con parámetros θ , en el tiempo k y en la posición del sensor i . $\mathbf{lb}=0$ y $\mathbf{ub}=100$ son las cotas inferior y superior de los parámetros del modelo respectivamente. El sistema descrito por elementos finitos es un sistema lineal discreto invariante en el tiempo de orden 2500.

La función objetivo del problema de optimización tiene la estructura de los mínimos cuadrados no lineales, pero debido a las restricciones adicionales del modelo FEM (Finite Elements Model) y cotas en los parámetros, el problema de optimización debe ser tratado como uno de programación no lineal dinámica, particularmente como un problema de Optimización basado en Modelo de Simulación. En este marco de simulación y optimización, el algoritmo de optimización calcula iterativamente el estimado de los parámetros respetando las restricciones dinámicas generadas por el modelo en elementos finitos del sistema.

Se plantearon dos experimentos de identificación con tres condiciones iniciales diferentes. En el primero se ubicaron los sensores de manera aleatoria tal como se muestran en la Fig 1.6a y en el segundo se ubicaron los sensores en las posiciones dadas por el algoritmo descrito en la sección 1.2 y se muestran en la Fig. 1.6b Para la simulación se definió como número de sensores $n_s = 10$, y la discretización del dominio

temporal $n_t = 51$. Los parámetros reales de la placa son $a=50 [W \cdot m^{-2} \cdot ^\circ C^{-1}]$, $b=35 [W \cdot m^{-2} \cdot ^\circ C^{-1}]$.

Figura 1.6 a) Posiciones de los sensores experimento aleatorio. b) Posiciones de los sensores experimento óptimo

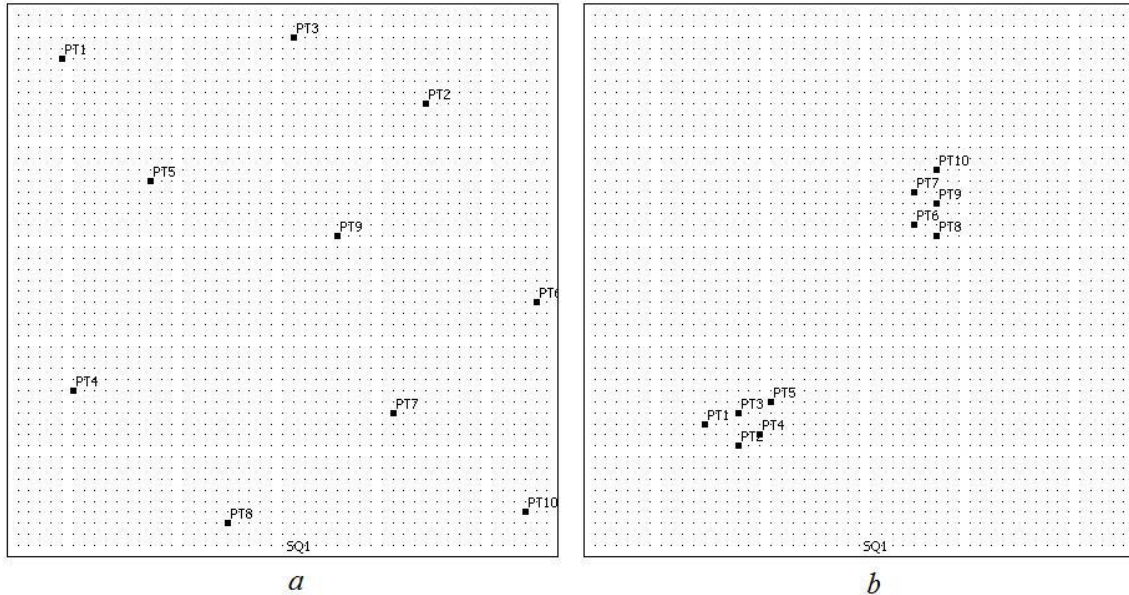


Tabla 1.1 Resultados obtenidos del proceso de optimización

Condición Inicial	Experimento Aleatorio		Experimento Óptimo	
	A	b	a	b
Parámetros Reales	50	35	50	35
$\theta_0 = [60, 28]$	64,942	34,136	50,004	34,997
$\theta_0 = [40, 40]$	64,939	34,138	50,265	35,000
$\theta_0 = [15, 70]$	64,940	34,138	49,900	35,094

Tabla 1.2 Errores relativos respecto a los parámetros reales del modelo

Condición Inicial	Experimento Aleatorio		Experimento Óptimo	
	%error a	%error b	%error a	%error b
$\theta_0 = [60, 28]$	29,884	-2,468	0,008	-0,008
$\theta_0 = [40, 40]$	29,878	-2,462	0,53	0,000
$\theta_0 = [15, 70]$	29,88	-2,462	-0,2	0,268

Se puede evidenciar que los resultados del experimento de identificación con ubicación óptima de sensores presentan errores relativos respecto a los parámetros reales despreciables. Se simuló el sistema de transferencia de calor con los parámetros obtenidos usando la configuración aleatoria de sensores para analizar los resultados:

Figura 1.7 Temperatura modelo identificado y datos experimentales en la posición del sensor 1

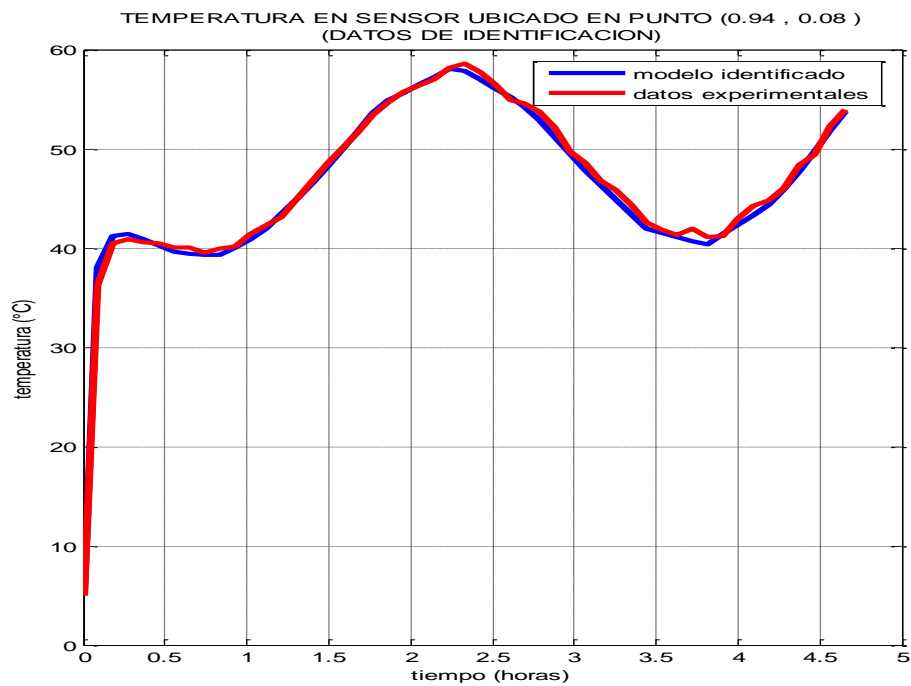
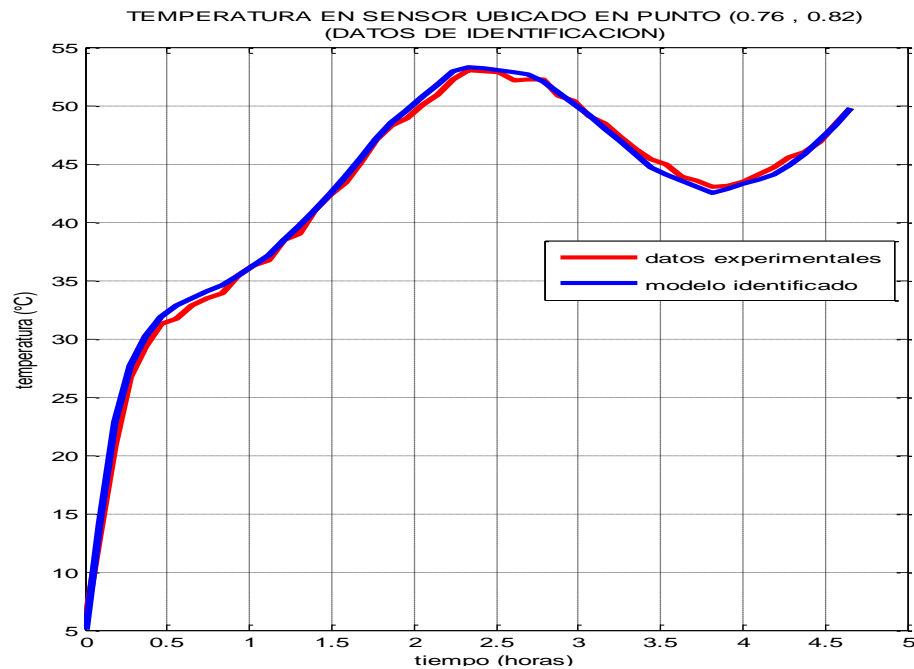


Figura 1.8 Temperatura modelo identificado y datos experimentales en la posición del sensor 2



Se puede evidenciar en las figuras 1.7 y 1.8 que la respuesta del modelo con parámetros identificados por medio de un experimento en el cual los sensores son ubicados aleatoriamente se ajusta muy bien a las curvas experimentales únicamente en los puntos donde se tomaron las mediciones. Sin embargo, la respuesta del modelo presenta errores significativos en otros puntos del dominio espacial, Figuras 1.9 y 1.10.

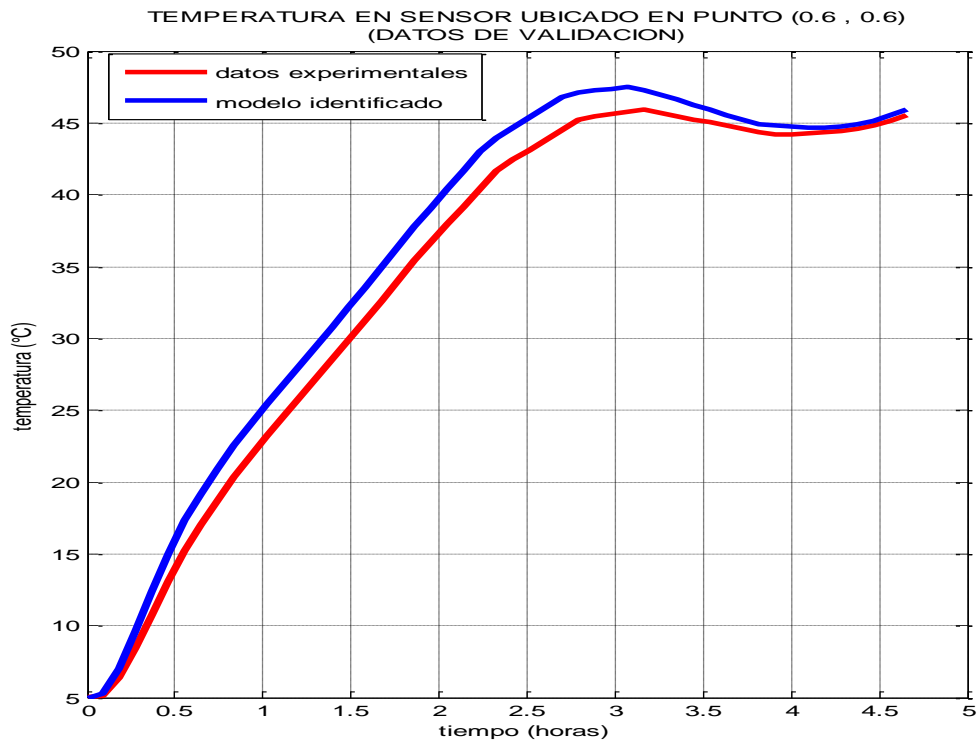
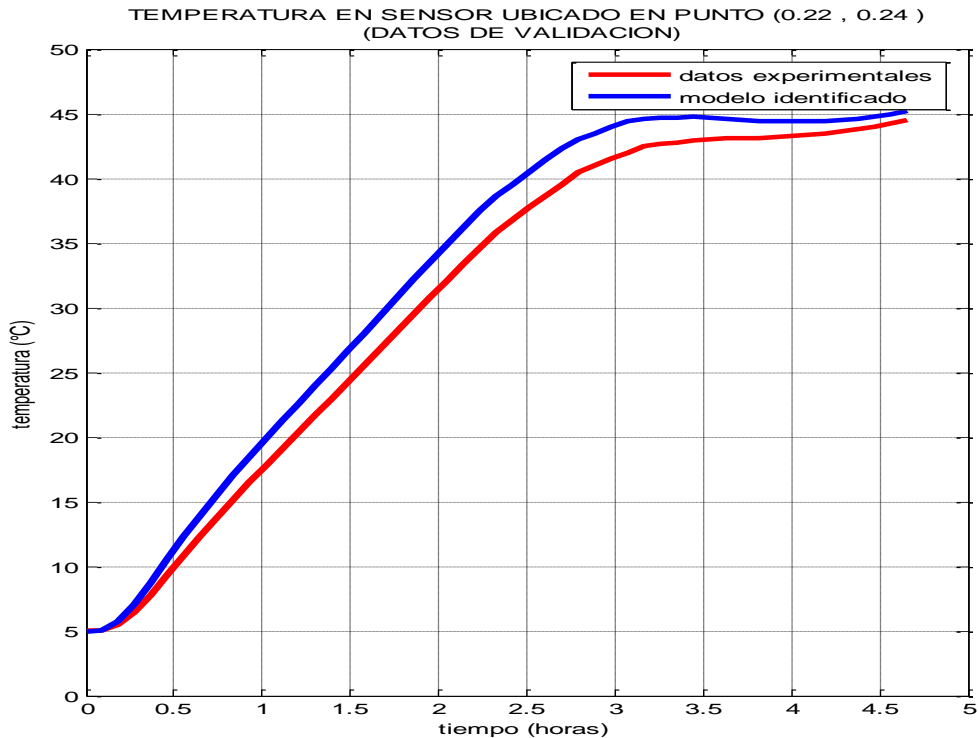
Figura 1.9 Temperatura modelo identificado y datos experimentales en un punto arbitrario 1

Figura 1.10 Temperatura modelo identificado y datos experimentales en un punto arbitrario 2



El vector de parámetros identificados es el resultado de la implementación de un algoritmo de optimización para el ajuste de datos y se comprobó que depende de la ubicación de los sensores en el dominio espacial. Entonces, una base de comparación natural entre los diferentes experimentos posibles fue escoger una medida relacionada con la precisión esperada de los parámetros identificados obtenidos de la colección de datos, esta es la Matriz de Información de Fisher, la cual refleja la variabilidad en los parámetros identificados inducida por la variabilidad estocástica de las muestras tomadas. Por lo tanto, en este trabajo se buscaron configuraciones que maximizan el valor de una función basada en la Matriz de Información de Fisher.

De acuerdo con los resultados obtenidos, la identificación paramétrica realizada con el experimento en el cual los sensores están ubicados de manera aleatoria conllevó a una estimación errónea del parámetro α en la conductividad térmica, lo cual produjo modelos de simulación que reconciliaron los datos localmente en los puntos de medición, sin embargo, el modelo de simulación estimado no es capaz de reproducir los datos de medición en puntos de la placa diferentes a los utilizados en la medición, tal como se pudo evidenciar en la Figura 1.9 y 1.10. Se pudo comprobar que después de la ubicación sensores basada en modelo, los parámetros desconocidos de la conductividad térmica fueron identificados de manera precisa presentando errores relativos muy cercanos a cero, lo cual permitiría la implementación de un modelo de simulación que reconcilie los datos medición de manera precisa en cualquier punto de la placa.

Se comprobó que la ubicación de los sensores incide directamente en el resultado de la identificación de sistemas de parámetros distribuidos. Por lo tanto, el aporte de este trabajo consiste en el establecimiento de una metodología de ubicación óptima de sensores basada en modelo matemático riguroso que permita formalizar la práctica de la ubicación de sensores en sistemas de parámetros distribuidos entre los que se incluyen la mayoría de sistemas de ingeniería.

Los parámetros del modelo se encontraron por medio de la aplicación de técnicas de Optimización basada en Modelo de Simulación, la cual es una rama emergente de la optimización dinámica en la cual las restricciones del problema de optimización están sujetos a un modelo dinámico, y en el caso de este trabajo, un modelo generado en la discretización por elementos finitos de una ecuación diferencial parcial.

Este trabajo fue motivado por situaciones prácticas de la ingeniería, y abre la puerta para estudios futuros en la optimización de las redes de monitoreo de la calidad del aire y sistemas medioambientales.