b. Encuéntrense todas las funciones de probabilidad condicionales.

c. Hállense todas las funciones de distribución conjuntas.

d. Obténganse las matrices de covarianzas y de correlación

4. Dos componentes electrónicos en el sistema de un proyectil trabajan en armonía para el buen funcionamiento del sistema. Si X y Y representan la vida en horas de los dos componentes con función de densidad conjunta: $g_{XY}(x, y) = y\, e^{-y(1+x)}$ $\quad x > 0 \quad y > 0$

a. Encuentre la probabilidad de que el primer componente tenga una vida entre dos y cuatro horas, y el segundo componente entre una y tres horas.

b. Cual es la confiabilidad del sistema a partir de dos horas de duración de los componentes?

c. Determine el coeficiente correlación de las variables.

5. Una instalación de servicio telefónico opera con dos líneas de servicio. En un día seleccionado aleatoriamente, considere X la proporción del tiempo que se utiliza la primera línea y Y la proporción de tiempo que se utiliza la segunda. Suponga que la función de densidad de probabilidad conjunta es:

$g_{XY}(x, y) = 3\,(x^2 + y^2)/2 \qquad 0 < x < 1,\; 0 < y < 1$

a. Calcule la probabilidad de que ninguna línea se utilice mas de la mitad del tiempo.

b. Encuentre la probabilidad de que la primera línea este ocupada mas del 75% del tiempo.

c. Construya la matriz de covarianzas y de correlación.

d. Las dos variables son independientes? Justifique su respuesta.

6. Suponga que se eligen al azar n piezas cilindricas entre las producidas por cierta máquina, y que se miden sus diámetros y longitudes. Se observa que en n_{11} ambas medidas son inferiores a los límites de tolerancia, en n_{12} las longitudes son satisfactorias pero no los diámetros, en n_{21} los diámetros pero no las longitudes, y en n_{22} ninguna de las medidas es satisfactoria. Se verifica que $\Sigma\, ni = n$, cada pieza puede considerarse procedente de una población polinomial,

a. Defina las variables aleatorias correspondientes y proponga la función de probabilidad.

b. Con que valor de probabilidad puede suceder que: $n_{11}=90,\; n_{12}=6,\; n_{21}=3,\; n_{22}=1$

c. Determine el valor esperado de cada variable, parejas, ternas y cuaternas de variables aleatorias que se puedan formar.

d. Obtenga la matriz de varianzas y covarianzas y de correlación. Interprete.

7. Suponga que la función de densidad compuesta de la variable aleatoria bidimensional esta dada por: $g_{XY}(x,y) = (x^2 + x\,y) / 3 \qquad 0 < x < 1 \quad 0 < y < 2$

De solución a los siguientes literales:

a. Verifique que g_{XY} es una función de densidad. En caso contrario, obtenga la función de densidad.
b. Calcular $P(X>1/2; Y<1/2)$
c. Hallar $F_{XY}(x); F_Y(y)$
d. Encuentre la función de densidad marginal de X dado Y
e. Son X e Y independientes?
f. Construir la matriz de correlación.

8. Las estadísticas nacionales revelan que sábados y domingos ocurren el doble de accidentes que los restantes días(en conjunto) de la semana. De estas estadísticas se seleccionan al azar 50 informes sobre accidentes, los cuales son independientes uno de otros.

   a. Escribir la expresión que permita hallar la probabilidad de que 10 de estos accidentes hayan ocurrido un domingo, 8 un lunes, 2 un martes, 7 un miércoles, 6 un jueves, 3 un viernes y 14 un sábado.
   b. Cuál es la función de probabilidad conjunta par la partición $H(X^{(1)})$: Fines de semana, $H(X^{(2)})$: Días ordinarios.
   c. Determine la matriz de correlación.

9. La producción máxima de una máquina 1 (M1) es un artículo por día, mientras que la de una máquina 2 (M2) es 2 unidades por día. Sean M1 y M2 las variables que cuentan la producción de cada máquina por día. La función de probabilidad conjunta esta dada en la siguiente tabla:

   a. Encontrar las distribuciones marginales
   b. Determinar la función de distribución de M2 si M1=2.
   c. Son X e Y independientes?
   d. Calcular la matriz de correlación.

M1 / M2	0	1
0	1 / 8	1 / 4
1	1 / 8	0
2	1 / 4	1 / 4

10. En un sistema electrónico operan conjuntamente dos componentes de dos tipos diferentes. Sean Y_1 y Y_2 la duración aleatoria de los componentes del tipo I y del tipo II, las mediciones están en cientos de horas. La función de densidad conjunta está dada por:

$$g_{Y1Y2}(y_1,y_2) = (1/8)\, y_1\, e^{(y1+y2)/2} \qquad y_1 > 0 \qquad y_2 > 0$$

   a. Calcule: $P(Y_1 > 1, Y_2 < 1)$
   b. Determine el valor de $P(Y_1 < Y_2)$
   c. Verifique si las variables son o no independientes.
   d. Encuentre la correlación de las variables.

e. Determine la probabilidad de que un componente del tipo II tenga una duración útil mayor de 200 horas.

f. El costo C de reemplazar los dos componentes depende de su duración y está dado por:

$C=50+2\ Y1 + 4\ Y_2$. Encuentre: i. E(C) ii. V(C)

11. Un ingeniero mide la cantidad (por peso) de un contaminante particular en unas muestras de aire de cierto volumen recogidas sobre la chimenea de una central de energía eléctrica que funciona con carbón. Sea Y_1 la cantidad del contaminante por muestra recogida cuando no está funcionando cierto dispositivo de limpieza en la chimenea, y sea Y_2 la cantidad del contaminante por muestra recogida bajo las mismas condiciones ambientales cuando el dispositivo está trabajando. Se observa que el comportamiento de la frecuencia relativa de Y_1 y Y_2 puede ser:

$$g_{Y1Y2}(y_1, y_2) = 1 \qquad 0 < Y_1 < 2\,, \quad 0 < Y_2 < 1; \quad 2\,Y_2 < Y_1$$

a. Si está en funcionamiento el dispositivo limpiador, calcule la probabilidad de que la cantidad de contaminante en una muestra sea mayor que 0.5.

b. Dado que la cantidad de contaminante en una muestra obtenida cuando funciona el limpiador es de 0.5, calcule la probabilidad de que la cantidad de contaminante, si no estuviera funcionado el dispositivo limpiador, hubiera sido mayor de 1.5.

c. Son independientes las variables?

d. Interprete la medida de correlación.

12. La duración Y para los fusibles de cierto tipo se representa por el modelo de una distribución exponencial con parámetro 1/3. Las mediciones se indican en cientos de horas.

a. Un fusible se encuentra en un sistema principal y el otro en un sistema de emergencia que entra en función solamente si falla el sistema principal. La duración efectiva total de los dos fusibles es entonces $Y_1 + Y_2$. Calcule $P(Y_1 + Y_2 < 1)$

b. Sí dos de estos fusibles tienen duraciones independientes Y_1 y Y_2 encuentre la función de densidad de probabilidad conjunta para Y_1 y Y_2

13. Un autobús llega a una parada con distribución uniforme sobre el intervalo de cero a una hora. Un pasajero también llega a la parada en instantes distribuidos uniformemente sobre el intervalo de cero a una hora. Supóngase que los tiempos de llegada de un autobús y del pasajero son independientes entre sí y que el pasajero está dispuesto a esperar el autobús hasta por un cuarto de hora.

a. ¿Cuál es la probabilidad de que tal pasajero pueda abordar el autobús? Sugerencia: Sea Y_1 el tiempo de llegada del autobús y Y_2 el tiempo de llegada del pasajero.

b. Determine la densidad conjunta para Y_1 y Y_2,

c. Obtenga $P(Y_2 \leq Y_1 \leq Y_2 + 1/4)$. Interprete

d. ¿Cuál es la distribución de $Y_1 - Y_2$?

14. Dos llamadas telefónicas llegan a un conmutador en tiempos aleatorios durante un período fijo de una hora. Supóngase que se realizan las llamadas independientemente entre sí.

a. ¿Cuál es la probabilidad de que se realicen ambas llamadas en la primera media hora?

b. ¿Cuál es la probabilidad de que se realicen las dos llamadas en un lapso de a lo más 5 minutos?

c. Encuentre la distribución de la duración total de las dos llamadas.

15. La función de densidad conjunta para la demanda mensual de dos productos es una distribución normal Bivariada dada por:

$$g_{XY}(x,y) = \frac{1}{100\Pi\sqrt{3}} \cdot e^{-\frac{2}{3}\left[\left(\frac{x-50}{10}\right)^2 - \frac{(x-50)}{10}\frac{(y-25)}{10} + \left(\frac{y-25}{10}\right)^2\right]}$$

a. ¿Cuál es el coeficiente de correlación entre X eY?

b. Encuentre la Covarianza de X e Y.

c. Obtenga la función de densidad marginal de X y la función condicional de X dado Y.

d. Suponga que la demanda del producto Y es 30. ¿Cuál es la probabilidad de que la demanda de X sea menor a 65.

BIBLIOGRAFÍA

1. ATHANASIOS, Papoulis. *Probability, random variables, and stochastic processes.* 3a. Ed. Editorial. Mc Graw Hill.
2. BENJAMIN, Jack R. *Probabilidad y estadística en ingeniería civil.* Ed. Mc Graw Hill.
3. BLANCO, Liliana. *Probabilidad.* Universidad Nacional de Colombia. Departamento de Matemáticas y Estadística.
4. BLUME, Johanes. *Métodos estadísticos para ingenieros.*
5. BOWKER, Albert H. *Estadística para ingenieros*
6. CANAVOS, Georgc C. *Probabilidad y Estadística, aplicaciones y métodos.* Ed. Mc Graw Hill.
7. KENNEDY, John B.; NEVILLE, Adam. *Estadística para ciencias e ingeniería.* 2a. ed. Ed.Harla
8. MOOD, Graybill, and Boes. *Introducction to the theory of statistics.* Mc Graw Hill.
9. MENDENHALL, William. *Introducción a la probabilidad y la estadística.*
10. MEYER, Paul. *Probabilidad y aplicaciones estadísticas.* Ed. Fondo Educativo Interamericano.
11. MENDENHALL, W; SCHEAFFER, R; and WACKERLY, D. *Mathematical Statistics Whith Applications.*Grupo Iberoamerica.
12. MISCHA, Schwartz. *Information transmission modulation and noise.* 2a. ed. Editorial. Mc Graw Hill.
13. PEEBLES, Peyton, Z. *Probability, Random Variables, And Random Sigilan Principales.* Edit. Mc Graw Hill.