Un ejemplo de una regla de Liebniz no ingenua

Luis Alejandro Barbosa Torres

Universidad Nacional de Colombia
Facultad de Ciencias, Departamento de Matemáticas
Bogotá, Colombia
2011

Un ejemplo de una regla de Liebniz no ingenua

Luis Alejandro Barbosa Torres

Trabajo de grado presentado como requisito parcial para optar al título de:
Magister en Ciencias. Matemáticas

Director:
Ph.D., Gabriel Ignacion Padilla León

Línea de Investigación:
Topología Algebraica

Universidad Nacional de Colombia
Facultad de Ciencias, Departamento de Matemáticas.
Bogotá, Colombia
2011

A mi querida familia

Agradecimientos

Un especial agradecimiento a mi familia que desde el principio de mis labores académicas me ha dado su más profundo y sincero apoyo, y ha plagado de buenos momentos mi existencia. No puedo dejar de mencionar a Diana Carolina Montoya que con sus consejos y presencia ha iluminado los diversos caminos que he transitado. De la misma manera, agradezco a Diego Gerardo Roldán y a Edwin Fernando Muñoz quienes en muchas ocasiones han sido un gran apoyo personal y académico. También doy mis agradecimientos al Profesor Gabriel Padilla que me ha dado el valioso regalo de sus asesorias, su paciencia y su esmero. Por último, quiero agradecer a cada persona que de una manera u otra me ha otorgado parte de su vivir durante el transcurso de esta etapa que culmina con el presente trabajo. .

Resumen

Es sabido que el nacimiento del álgebra homológica se debió en gran parte a los resultados que en su tiempo se dieron sobre topología algebraica generando así las definiciones de complejos, homología y homotopía. Durante este trabajo se analiza la generalización de un módulo N-diferencial como en [5], donde el operador diferencial no satisface $d^2 = 0$, sino $d^N = 0$ para algún entero $N \geq 3$ fijo, en el transcurso de esta discusión se adentra en los términos de homología, homotopía y álgebra N-diferencial. El análisis de estos conceptos esta intimamente relacionada con el q-cálculo y sus propiedades por lo que es conveniente estudiar algunos de sus principales resultados. Por último y con el fin de llevar esta teoría a la topología algebraica, se estudia el complejo de q-simplices, un ejemplo bastante natural de un módulo N-diferencial y además restringiendonos a variedades convexas definimos el producto cónico convexo el cual hace de este N-módulo, un ejemplo de una estructura que no cumple una regla de Leibniz ingenua.

Palabras clave: Módulo, Homología, Simplice, operador de borde.

Abstract

It's known that the birth of homological algebra was due largely to results that gave in its time the algebraic topology generating notions of complexes, homology and homotopy. In this paper, the generalization of a module N-differential is treated just like in [5], where the diffrential operator doesn't satisfy $d^2 = 0$ but $d^N = 0$ for some integer fixed $N \geq 3$, in the course of this discussion we enter into term such as homology, homotopy and N-differential algebra.The analysis of these conceptsis closely related to the q-calculus and its properties so it's advisable to study some of the main results in q-calculus. Finally in order to bring this theory to algebraic topology, we study the complex of q-simplices, a very natural example of a N-module and besides if we restrict us to convex manifolds and we define the conic convex product then this N-differential module is an example of a structure with a Leibniz's rule not naive.

Keywords:Module, Homology, Simplice, Border map .

Contenido

1 Preliminares

Los comienzos del q-cálculo están correlacionados con los trabajos de Leonhardt Euler sobre la teoría de particiones y los trabajos de Carl Gustav Jacobi sobre integrales elípticas. Recientemente este tema comienza a recibir interés al observarse su utilidad en mecánica cuántica, por ejemplo el trabajo de R. J. Finkelstein que relaciona la dinámica del átomo de hidrógeno y la ecuación de Schrödinger [6].

Durante la sección 1.1 los esfuerzos van dirigidos a entender las propiedades de los q-números, q-factoriales y los q-combinatorios. Estas definiciones y propiedades nos ayudarán a definir una regla de Leibniz apropiada para las q-cadenas [1, 2], al final de la sección se mostrará que todo q-número es invertible, lo cual será útil para analizar los morfismo que aparecen en el estudio de la homología del punto.

1.1. q- Números

En la historia del q-cálculo se observa que los q-números han servido como un puente entre la matemática y la física, y su desarrollo en gran parte se ha debido a la relación entre estas, en nuestro caso son de vital importancia para asegurar y entender la naturaleza y características de los N-módulos. Durante esta sección estudiaremos algunas de sus propiedades más relevantes para nuestros objetivos.

1.1.1. [**q-Números**] Sea $q \in \mathbb{C}$, $q^N = 1$ con $q \neq 1$, N primo, $N \geq 2$ y $k \in \mathbb{Z}$, $k \geq 0$. Entenderemos por el k-ésimo, **q-número básico** la expresión tal que

$$\overline{k} = \tfrac{1-q^k}{1-q} = 1 + q + \cdots + q^{k-1}$$

Observe que,

$$\overline{0} = 0$$

$$\overline{1} = 1$$

$$\overline{2} = 1 + q$$

$$\overline{3} = 1 + q + q^2$$

$$\overline{N} = 0$$

En las mismas condiciones, generamos dos herramientas combinatorias, las cuales serán de gran utilidad.

1.1.2. [**q-Números factoriales y combinatorios**] Entenderemos por el k-ésimo, **q-número factorial** la expresión dada por:

$$\overline{k}! = \overline{1} \cdot \overline{2} \cdot \overline{3} \cdots \overline{k}$$

Observe que,

$$\overline{0}! = 1$$

$$\overline{1}! = 1$$

$$\overline{2}! = 1 + q$$

$$\overline{3}! = 1 + 2q + 2q^2 + q^3$$

$$\overline{4}! = 1 + 3q + 5q^2 + 6q^3 + 5q^4 + 3q^5 + q^6$$

$$\overline{N}! = 0$$

Entenderemos por **q-números combinatorios** a las expresiones dadas por:

$$\tbinom{k}{l}_q = \tfrac{\overline{k}!}{\overline{l}! \cdot \overline{k-l}!}$$

Observe que,

$$\binom{k}{0}_q = 1 = \binom{k}{k}_q$$

$$\binom{k}{k-j}_q = \binom{k}{j}_q$$

$$\binom{k}{1}_q = \overline{k} = \binom{k}{k-1}_q$$

Lema 1.1.3. *Las siguientes relaciones se cumplen, para $1 \leq k \leq n$, $m \leq N-1$:*

1) $\overline{m+n} = \overline{m} + q^m \overline{n}$.

2) $\binom{n}{k}_q + q^{k+1}\binom{n}{k+1}_q = \binom{n+1}{k+1}_q = \binom{n}{k+1}_q + q^{n-k}\binom{n}{k}_q$.

[Dem.]

I) $\overline{m} + q^m \overline{n} = 1 + q + \cdots + q^{m-1} + q^m(1 + q + \cdots + q^{n-1})$
$= 1 + q + \cdots + q^{m-1} + q^m + q^{m+1} + \cdots + q^{m+n-1} = \overline{m+n}$.

II) $\binom{n}{k}_q + q^{k+1}\binom{n}{k+1}_q = \frac{\overline{n}!}{\overline{k}!\cdot\overline{n-k}!} + q^{k+1}(\frac{\overline{n}!}{\overline{k+1}!\cdot\overline{n-k-l}!}) = \frac{\overline{n}!}{\overline{k}!\cdot\overline{n-k-1}!}(\frac{1}{\overline{n-k}} + \frac{q^{k+1}}{\overline{k+1}})$
$= \frac{\overline{n}!}{\overline{k+1}!\cdot\overline{n-k}}(\overline{k+1} + q^{k+1}\overline{n-k}) = \frac{\overline{n}!}{\overline{k+1}!\cdot\overline{n-k}}(\overline{n+1}) = \binom{n+1}{k+1}_q$
De manera similar, para el otro lado de la ecuación.

□

Proposición 1.1.4. *Los q-números son invertibles en el anillo $\mathbb{Z}[q]$.*

[Dem.] Observemos que para todo $k \in \mathbb{Z}, k > 0$ tenemos
$\overline{kN+1} = 1 + q + \cdots + q^{N-1} + q^N + \cdots + q^{2N-1} + q^{2N} + \cdots + q^{(k-1)N} + \cdots + q^{kN-1} + q^{kN} = 1 + q + \cdots + q^{N-1} + 1 + q + \cdots + q^{N-1} + \cdots + 1 + q + \cdots + q^{N-1} + q^{kN} = q^{kN} = 1.$

Por el lema anterior, se obtiene que $\overline{k} + q^k\overline{k} = \overline{2k}$ y en general, si $l \in \mathbb{Z}, l > 0$ se tiene que $\overline{lk} + q^{lk}\overline{k} = \overline{(l+1)k}$. Además como N es primo, existe $m \in \mathbb{Z}, m > 0$ tal que $\overline{mk} = \overline{uN+1}$ para algún $u \in \mathbb{Z}$. Con lo cual $1 = \overline{mk} = \overline{k} + q^k\overline{k} + q^{2k}\overline{k} + \cdots + q^{(m-1)k}\overline{k} = \overline{k}(1 + q + q^2 + \cdots + q^{(m-1)k})$. Como se deseaba.

□

2 N-Complejos

El análisis de los módulos diferenciales y de sus grupos de homología, fue concebido como una herramienta útil para la comprensión de aspectos topológicos, de tal manera que a partir de invariantes algebraicos se pueda tener una idea general de las propiedades del espacio topológico en cuestión. Y con esa idea en mente, se intenta analizar los complejos N-diferenciales, para encontrar invariantes que nos den información sobre las características de un espacio topológico dado [5, 7]. Una aproximación a esta idea son los complejos N-diferenciales de q-formas de Kapranov, que son una extensión polinómica del complejo de De Rham usual a una raíz N-ésima de la unidad en $\mathbb{C}$ y las q-cadenas simpliciales, siendo éstas una extensión de la homología singular usual [7]. Durante el estudio de los módulos N-diferenciales y específicamente en el estudio de las q-cadenas es necesario generar correcciones polinómicas con elementos del anillo $\mathbb{Z}[q]$, donde $q^N = 1$, $q \neq 1$ y $N \in \mathbb{Z}$ con $N > 0$, estas correcciones nos ayudarán a generalizar conceptos como la regla de Leibniz y homología del punto, entre otras.

En este capítulo hablaremos sobre los N-complejos, en la sección 2.1 se darán las definiciones de estructura, de homomorfismo y de homología. En la sección 2.2 , daremos algunas propiedades de la homología en los N-complejos y discutiremos la noción de N-homotopía. Durante la sección 2.3 se discutirán respectivamente las definiciones de módulo N-diferencial graduado y de NDGq-álgebra. Finalizando en la sección 2.4 con álgunas propiedades de estos módulos graduados.

2.1. Conceptos

Al tener la noción de módulo diferencial donde se tiene un endomorfismo d, tal que $d^2 = 0$, nace de manera natural la inquietud de tener módulos N-diferenciales para $N > 2$ donde el endomorfismo d cumple $d^N = 0$, y por supuesto con esto en marcha, ver cual es su utilidad con respecto a los conceptos que se relacionan con los módulos diferenciales en la topología algebraica.

Sea **k** un anillo conmutativo con unidad, un módulo M se entenderá como un k-**módulo** (de igual manera para los morfismos).

2.1.1. [Módulos N-diferenciales] Para $N \in \mathbb{Z}$ con $N \geq 2$ tenemos,

Un **módulo N-diferencial** es un módulo E dotado de un endomorfismo d, denominado su N-diferencial, el cual satisface $d^N = 0$.

Dado dos **módulos N-diferenciales** (E, d) y (E', d') un homomorfismo de módulos N-diferenciales de E en E' es un homomorfismo $\varphi : E \to E'$ tal que $\varphi \circ d = d' \circ \varphi$.

2.1.2. [Ciclos, bordes y homología] Sea E es un módulo N-diferencial con diferencial d. Para todo entero n con $1 \leq n \leq N-1$ definimos:

$$Z_{(n)}(E) = Ker(d^n) \text{ el conjunto de } \textbf{ciclos}.$$

$$B_{(n)}(E) = Im(d^{N-n}) \text{ el conjunto de } \textbf{bordes}.$$

Observemos que $B_{(n)}(E) \subset Z_{(n)}(E)$.
Sea $x \in B_{(n)}(E)$, así existe $y \in E$ tal que $d^{N-n}(y) = x$ por lo que

$$d^n(d^{N-n}(y)) = d^n(x)$$

$$d^N(y) = d^n(x)$$

$$0 = d^n(x)$$

así $x \in Z_{(n)}(E)$. Por lo tanto $H_{(n)}(E) = \frac{Z_{(n)}(E)}{B_{(n)}(E)}$ esta bien definido. Los módulos $H_{(n)}(E)$, $1 \leq n \leq N-1$ serán llamados la **homología de amplitud** n de E.

2.1.1. Homomorfismos inducidos

Introduciremos dos homomorfismos importantes en el análisis de las homologías.
Asumamos que $N \geq 3$ y sea n un entero tal que $1 \leq n \leq N-2$.

2.1.3. [Homomorfismo de inclusión] Como tenemos que $Z_{(n)}(E) \subset Z_{(n+1)}(E)$ y $B_{(n)}(E) \subset B_{(n+1)}(E)$, pues si $x \in Z_{(n)}(E)$ entonces $d^n(x) = 0$ luego $d(d^n(x)) = 0$ por lo que $d^{n+1} = 0$, así $x \in Z_{(n)}(E)$.
Y si $z \in B_{(n)}(E)$ luego existe x tal que $d^{N-n}(x) = z$, así $d(x) = y$ tal que $d^{N-(n+1)}(y) = z$ luego $z \in B_{(n+1)}(E)$. Lo cual induce un homomorfismo llamado **homomorfismo de inclusión** dado por,

$$\begin{aligned} [i] : H_{(n)}(E) &\to H_{(n+1)}(E) \\ [y] &\mapsto [y] \end{aligned}$$

Este homomorfismo está bien definido, ya que si $[x]$, $[x'] \in H_{(n)}(E)$ con $x \neq x'$ y $[x] = [x']$ entonces $x - x' \in B_{(n)}(E) \subset B_{(n+1)}(E)$.

2.1.4. [Homomorfismo inducido por el diferencial] Observando que $dZ_{(n+1)}(E) \subset Z_{(n)}(E)$ y $dB_{(n+1)}(E) \subset B_{(n)}(E)$, pues si $y \in dZ_{(n+1)}(E)$ entonces $y = d(x)$ con $x \in Z_{(n+1)}(E)$ entonces $d^{n+1}(x) = 0$ lo que implica que $0 = d^{n+1}(x) = d^n(d(x))$ y $d(x) \in Z_{(n)}(E)$.
Y si $z \in dB_{(n+1)}(E)$ entonces existe $y \in B_{(n+1)}(E)$ tal que $z = d(y)$, por lo cual hay un $x \in Im(d^{N-(n+1)})$ tal que $d^{N-(n+1)}(x) = y$, así $z = d(y) = d(d^{N-(n+1)}(x)) = d^{N-n}(x)$ luego $z \in B_{(n)}(E)$. De esta manera se induce el homomorfismo, llamado **homomorfismo inducido por el diferencial**

$$\begin{aligned} [d] : H_{(n+1)}(E) &\to H_{(n)}(E) \\ [y] &\mapsto [d(y)] \end{aligned}$$

2.2. Algunas propiedades de módulos N-diferenciales

Es necesario para nuestro estudio la busqueda de análogos para teoremas clásicos de álgebra como lo son el lema de la serpiente o el lema de los cinco, así en esta sección se tratará de buscar los comportamientos similares en los módulos N-diferenciales.

Lema 2.2.1. *Sea l y m enteros con $l \geq 1$, $m \geq 1$ y $l + m \leq N - 1$. Entonces el siguiente hexágono $\mathcal{H}^{l,m}$ de homomorfismos*

$$\begin{tikzcd}
 & H_{(l+m)}(E) \arrow[r, "{[d]^m}"] \arrow[dr, phantom, "\mathcal{H}^{l,m}"] & H_{(l)}(E) \arrow[dr, "{[i]^{(N-(l+m))}}"] & \\
H_{(m)}(E) \arrow[ur, "{[i]^l}"] & & & H_{(N-m)}(E) \arrow[dl, "{[d]^l}"] \\
 & H_{(N-l)}(E) \arrow[ul, "{[d]^{(N-(l+m))}}"] & H_{(N-(l+m))}(E) \arrow[l, "{[i]^m}"] &
\end{tikzcd}$$

es exacto.

[Dem.] Observemos que

I) $[d]^m \circ [i]^l$ es la función cero de $H_{(m)}(E)$ en $H_{(l)}(E)$.
Sea $z \in Z_{(m)}(E)$ por lo que $d^m(z) = 0$, así $d^{l+m}(z) = d^l(d^m(z)) = d^l(0) = 0$ luego $z \in Z_{(m+l)}(E)$ y $[d]^m \circ [i]^l[z] = [d]^m[z] = [d^m(z)] = [0]$.

II) $[i]^{(N-(l+m))} \circ [d]^m$ es la función cero de $H_{(l+m)}(E)$ en $H_{(N-m)}(E)$.
Sea $z \in Z_{(l+m)}(E)$ entonces $d^{l+m}(z) = 0$ así $[i]^{N-(l+m)} \circ [d]^m[z] = [i]^{N-(l+m)}[d^m(z)] = [d^m(z)]$ y como tenemos que $d^m(z) \in B_{(N-m)}(E)$ entonces $[d^m(z)] = 0$.

Como se tiene que $[d]^m \circ [i]^l = 0$ entonces $[i]^l H_{(m)}(E) \subset Ker([d]^m)$. Para probar la igualdad, sea $[z] \in Ker([d]^m)$ luego $z \in Z_{(l+m)}(E)$ y $d^m(z) \in B_{(l)}(E)$ así existe $c \in E$ tal que $d^m(z) = d^{N-l}(c)$ luego $d^m(z) - d^{N-l}(c) = 0$ por lo que $d^m(z - d^{N-(l+m)}(c)) = 0$ con lo cual tenemos que $z - d^{N-(l+m)}(c) \in Z_{(m)}(E)$ lo que implica $[z - d^{N-(l+m)}(c)] \in H_{(m)}(E)$ y como $d^{N-(l+m)}(c) \in B_{(l+m)}(E)$, entonces $[z - d^{N-(l+m)}(c)] = [z]$ en $H_{(l+m)}(E)$. Así $[i]^l H_{(m)}(E) = Ker([d]^m)$.

Por otra parte, tenemos $[d]^m H_{(l+m)}(E) \subset Ker([i]^{N-(l+m)})$, ya que $[i]^{N-(l+m)} \circ [d]^m = 0$. Sea $[z] \in Ker([i]^{N-(l+m)})$ luego $z \in Z_{(l)}(E)$ y $z \in B_{(N-m)}(E)$, así $z = d^m(c)$ para algún $c \in E$ y se tiene $0 = d^l(z) = d^l(d^m(c)) = d^{l+m}(c)$ luego $c \in Z_{(l+m)}(E)$ y $d^m(c) = z$, por lo que $[d]^m H_{(l+m)}(E) = Ker[i]^{N-(l+m)}$.

La exactitud del hexagono $\mathcal{H}^{l,m}$ queda completa si consideramos los hexagonos $\mathcal{H}^{m,N-(l+m)}$ y $\mathcal{H}^{N-(l+m),l}$ y sus respectivas sucesiones

$$H_{(N-(l+m))}(E) \xrightarrow{[i]^m} H_{(N-l)}(E) \xrightarrow{[d]^{N-(l+m)}} H_{(m)}(E) \xrightarrow{[i]^l} H_{(l+m)}(E)$$

$$H_{(l)}(E) \xrightarrow{[i]^{N-(l+m)}} H_{(N-m)}(E) \xrightarrow{[d]^l} H_{(N-(l+m))}(E) \xrightarrow{[i]^m} H_{(N-l)}(E)$$

Las cuales son exactas por lo anterior. Así el lema queda demostrado. □

2.2.2. [Construcción de un morfismo inducido en homología] Sea $\varphi : E \to E'$ un homomorfismo de módulos N-diferenciales. Para este homomorfismo tenemos que $\varphi(Z_{(n)}(E)) \subset Z_{(n)}(E')$, ya que si $z \in \varphi(Z_{(n)}(E))$ entonces existe $x \in Z_{(n)}(E)$ tal que $z = \varphi(x)$, así que $d^n(z) = d^n(\varphi(x)) = \varphi(d^n(x)) = \varphi(0) = 0$ luego $z \in Z_{(n)}(E')$. Y además, tenemos $\varphi(B_{(n)}(E)) \subset B_{(n)}(E')$, pues si $z \in \varphi(B_{(n)}(E))$ entonces existe $x \in B_{(n)}(E)$ tal que existe $y \in E'$ con $d^{N-n}(y) = x$, por lo tanto $z = \varphi(x) = \varphi(d^{N-n}(y)) = d^{N-n}(\varphi(y))$ luego $z \in B_{(n)}(E)$.

2.2.3. [Morfismos inducidos en homología] Con lo anterior el **morfismo inducido** en homología dado por $\varphi_* : H_{(n)}(E) \to H_{(n)}(E')$ tal que si $[x] \in H_{(n)}(E)$ entonces $\varphi_*([x]) = [\varphi(x)]$ esta bien definido para todo n con $1 \leq n \leq N-1$. Y tenemos que las correpondencias $E \mapsto H_{(n)}(E)$ son funtoriales con $H_{(n)}(\varphi) = \varphi_*$. Adicionalmente su relación con los morfismos de inclusión y el diferencial son $\varphi_* \circ [i] = [i] \circ \varphi_*$ y $\varphi_* \circ [d] = [d] \circ \varphi_*$.

Proposición 2.2.4. *Sea $\varphi : E \to E'$ un homomorfismo de módulos N-difereciales. Supongamos que $\varphi_* : H_{(1)}(E) \to H_{(1)}(E')$ y $\varphi_* : H_{(N-1)}(E) \to H_{(N-1)}(E')$ son isomorfismos. Entonces $\varphi_* : H_{(n)}(E) \to H_{(n)}(E')$ es un isomorfismo para todo entero n con $1 \leq n \leq N-1$.*

[Dem.] Procederemos por inducción sobre n en la proposición
$P(n) :='' \varphi_* : H_{(n)}(E) \to H_{(n)}(E')$ y $\varphi_* : H_{(N-n)}(E) \to H_{(N-n)}(E')''$ Así por hipótesis tenemos que $P(1)$ se cumple. Supongamos que se cumple para todo m con $1 \leq m \leq n$, de esta manera consideremos los siguientes diagramas conmutativos.

$$\begin{tikzcd}
H_{(N-n)}(E) \arrow[r, "\varphi_*"] \arrow[d, "{[d]^{N-n-1}}"] & H_{(N-n)}(E') \arrow[d, "{[d]^{N-n-1}}"] \\
H_{(1)}(E) \arrow[r, "\varphi_*"] \arrow[d, "{[i]^n}"] & H_{(1)}(E') \arrow[d, "{[i]^n}"] \\
H_{(n+1)}(E) \arrow[r, "\varphi_*"] \arrow[d, "{[d]}"] & H_{(n+1)}(E') \arrow[d, "{[d]}"] \\
H_{(n)}(E) \arrow[r, "\varphi_*"] \arrow[d, "{[i]^{N-n-1}}"] & H_{(n)}(E') \arrow[d, "{[i]^{N-n-1}}"] \\
H_{(N-1)}(E) \arrow[r, "\varphi_*"] & H_{(N-1)}(E')
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
H_{(n)}(E) \arrow[r, "\varphi_*"] \arrow[d, "{[i]^{N-n-1}}"] & H_{(n)}(E') \arrow[d, "{[i]^{N-n-1}}"] \\
H_{(N-1)}(E) \arrow[r, "\varphi_*"] \arrow[d, "{[d]^n}"] & H_{(N-1)}(E') \arrow[d, "{[d]^n}"] \\
H_{(N-n-1)}(E) \arrow[r, "\varphi_*"] \arrow[d, "{[i]}"] & H_{(N-n-1)}(E') \arrow[d, "{[i]}"] \\
H_{(N-n)}(E) \arrow[r, "\varphi_*"] \arrow[d, "{[d]^{N-n-1}}"] & H_{(N-n)}(E') \arrow[d, "{[d]^{N-n-1}}"] \\
H_{(1)}(E) \arrow[r, "\varphi_*"] & H_{(1)}(E')
\end{tikzcd}$$

Cuyas columnas resultan ser exactas, esto al analizar el hexagono $\mathcal{H}^{n,1}$, así tenemos que por hipótesis se tiene que $\varphi_* : H_{(1)}(E) \to H_{(1)}(E')$ y $\varphi_* : H_{(N-1)}(E) \to H_{(N-1)}(E')$ son isomorfismos, como por hipótesis de inducción se tiene también que $\varphi_* : H_{(N-n)}(E) \to H_{(N-n)}(E')$ y $\varphi_* : H_{(n)}(E) \to H_{(n)}(E')$ son isomorfismos, se tiene por el "lema de los cinco"que $\varphi_* : H_{(n+1)}(E) \to H_{(n+1)}(E')$ y $\varphi_* : H_{(N-(n+1))}(E) \to H_{(N-(n+1))}(E')$ son isomorfismos. $\square$

2.2.5. [Morfismo conectante] Construiremos el homomorfismo diferencial asociado a una sucesión exacta corta $0 \to E \xrightarrow{\alpha} F \xrightarrow{\beta} G \to 0$. Sea $g \in Z_{(n)}(G)$, con $1 \leq n \leq N-1$, por la exactitud en G existe $f \in F$ con $\beta(f) = g$ tal que $\beta(d^n(f)) = d^n(g) = 0$, sin embargo por la exactitud en F, existe $e \in E$ tal que $\alpha(e) = d^n(f)$. Este elemento e cumple que $\alpha(d^{N-n}(e)) = d^N(f) = 0$ lo que implica que $d^{N-n}(e) = 0$, es decir $e \in Z_{N-n}(E)$, pues α es inyectiva. Tenemos entonces que, para todo $g \in Z_{(n)}(G)$ podemos considerar un único $e \in Z_{N-n}(E)$, unicidad obtenida por la unicidad de α. De esta manera podemos considerar el siguiente operador

$$\partial : H_{(n)}(G) \to H_{(N-n)}(E)$$
$$[g] \mapsto [e]$$

el cual generaliza al diferencial usual.

Lema 2.2.6. *Sea la sucesión exacta corta* $0 \to E \xrightarrow{\alpha} F \xrightarrow{\beta} G \to 0$ *de módulos* N*-diferenciales con diferencial* ∂*. Entonces para cada entero* n *con* $1 \leq n \leq N-1$*, el siguiente hexágono* $\mathcal{H}_n$ *de homomorfismos*

$$\begin{tikzcd}
 & H_{(n)}(F) \arrow[r, "\beta_*"] & H_{(n)}(G) \arrow[dr, "\partial"] & \\
H_{(n)}(E) \arrow[ur, "\alpha_*"] & & \mathcal{H}_n & H_{(N-n)}(E) \arrow[dl, "\alpha_*"] \\
 & H_{(N-n)}(G) \arrow[ul, "\partial"] & H_{(N-n)}(F) \arrow[l, "\beta_*"] &
\end{tikzcd}$$

es exacto.

[Dem.]

I) Im $\beta_* =$ Ker ∂.

Im $\beta_* \subset$ Ker ∂, es decir que $\partial \circ \beta_* = 0$. Por lo tanto $\partial \circ \beta_*[f] = \partial[\beta(f)] = [e]$ con $\alpha(e) = d^n(f) = 0$, como α es inyectiva entonces $e = 0$.

Ker $\partial \subset$ Im β_*. Sea $[g] \in$ Ker ∂, es decir $g \in Z_{(n)}(G)$ y $\partial[g] = [e]$ con $e = d^n(e')$, como β es sobre, existe $f \in F$ tal que $\beta(f) = g$ luego $[g] \in$ Im β_* .

II) Im $\alpha_* =$ Ker β_*.

Im $\alpha_* \subset$ Ker β_*. Sea $e \in Z_{(n)}(E)$, entonces $\beta_* \circ \alpha_*[e] = [\beta(\alpha(e))] = [0]$, lo que implica la contenencia.

Ker $\beta_* \subset$ Im α_*. Sea $f \in Z_{(n)}(F)$ tal que $\beta_*[f] = [0]$, es decir, $\beta(f) = d^{N-n}(g)$ para algún $g \in G$, como β es sobre existe $f' \in F$ tal que $\beta(f') = g$ por lo cual tenemos que $\beta(f) = d^{N-n}(\beta(f')) = \beta(d^{N-n}(f'))$, así $0 = \beta - d^{N-n}(f') = \beta(f - d^{N-n}(f'))$ luego existe $e \in E$ tal que $\alpha(e) = f - d^{N-n}(f')$, por lo tanto $\alpha_*[e] = [f - d^{N-n}(f')] = [f]$ luego $f \in$ Im α_*.

III) Im $\partial =$ Ker α_*.

Im $\partial \subset$ Ker α_*. Sea $g \in Z_{(N-n)}(G)$ tal que $\partial[g] = [e]$, por definición de ∂, se tiene que $\alpha(e) = d^{N-n}(f)$ luego $\alpha_* \circ \partial[g] = [\alpha(e)] = [d^{N-n}(f)] = [0]$.

Ker $\alpha_* \subset$ Im ∂. Sea $e \in Z_{(n)}(E)$ tal que $\alpha_*[e] = [0]$, es decir, $\alpha(e) = d^{N-n}(f)$ con $f \in F$, así $\beta(f) \in G$ y como tenemos que $0 = \beta(\alpha(e)) = \beta(d^{N-n}(f)) = d^{N-n}(\beta(f))$ entonces, por la definición de ∂, tenemos que $\partial[\beta(f)] = [e]$ como deseabamos.

$\square$

2.2.1. N-Homotopía

El propósito de esta sección es definir la noción adecuada, según [5], de dos homomorfismos homotópicos sobre módulos N-diferenciales y observar que cumple con lo que tradicionalmente se tiene [8].

2.2.7. [**Homomorfismos homotópicos.**] Sean E y F dos módulos N-diferenciales y suponga λ, μ dos homomorfismos de E en F, diremos que estos homomorfismos son **homotópicos** si existe una familia de homorfismos $h_k : E \to F$ con $k = 0, 1, \cdots, N-1$ tal que

$$\lambda - \mu = \sum_{k=0}^{N-1} d^{N-k-1} h_k d^k$$

Lema 2.2.8. *Si λ y μ son homorfismos homotópicos de módulos N-diferenciales de E en F, entonces estos homomorfismos inducen el mismo homomorfismo en homología.*

[**Dem.**]

Tenemos que $\lambda - \mu = \sum_{k=0}^{N-1} d^{N-k-1} h_k d^k$, si tomamos $z \in Z_{(n)}(E)$ obtenemos que $\lambda(z) - \mu(z) = \sum_{k=0}^{N-1} d^{N-k-1} h_k d^k(z)$ como $d^l(z) = 0$ para todo $l \geq n$ entonces

$$\lambda(z) - \mu(z) = \sum_{k=0}^{n-1} d^{N-k-1} h_k d^k(z) = d^{N-n}(\sum_{k=0}^{n-1} d^{n-k-1} h_k d^k(z))$$

Por lo tanto $\lambda(z) - \mu(z) \in B_{(n)}(F)$, lo que implica el resultado. □

Corolario 2.2.9. *Sea E un módulo N-diferenciable. Suponga que existen $h_k : E \to E$ para $k = 0, 1, \cdots, N-1$ endomorfismos que satisfacen $\sum_{k=0}^{N-1} d^{N-k-1} h_k d^k = Id_E$, entonces $H_{(n)} = 0$ para n con $1 \leq n \leq N-1$.*

2.3. Módulos N-Diferenciales Graduados y NDGq-Álgebras no ingenuas

Definiremos la versión graduada de los módulos N-diferenciales lo que nos permitirá entender las homologías de los módulos N-diferenciales.

2.3.1. [**Módulos N-diferenciales graduados**] Para $N \in \mathbb{Z}$ con $N \geq 2$ tenemos,

Un **módulo N-diferencial graduado** (DG-módulo) es un módulo graduado A con un morfismo $d : A \to A$ de grado 1, denominado su N-diferencial, el cual satisface $d^N = 0$.

Dado dos **módulos N-diferenciales graduados** (A, d) y (A', d') un homomorfismo φ de módulos N-diferenciales graduados de grado k, es un homomorfismo de A_p en A'_{p+k} tal que $d \circ \varphi = \varphi \circ d$.

2.3.2. [**Ciclos y bordes**] Si A es un módulo N-diferencial graduado con diferencial d. Para todo entero n con $1 \leq n \leq N-1$ definimos:

1. $Z_{(n)}(A)$ el **módulo graduado de ciclos** constituido por los módulos $Z_{(n,k)}(A) = Z_{(n)}(A_k) = Ker(d^n : A_k \to A_{k-n})$.
2. $B_{(n)}(A)$ el **módulo graduado de bordes** constituido por los módulos $B_{(n,k)}(A) = B_{(n)}(A_k) = Im(d^{N-n} : A_{k+N-n} \to A_k)$.

Al igual que en el caso no graduado tenemos que $B_{(n)}(A_k) \subset Z_{(n)}(A_k)$, para cualquier k en el conjunto de grados del módulos graduados, lo que motiva la siguiente definición.

2.3.3. [**Homología**] Formamos $H_{(n)}(A)$ el **módulo graduado de homología de amplitud** n con formado por los módulos $H_{(n,k)}(A) = H_{(n)}(A_k) = \frac{Z_{(n,k)}(A)}{B_{(n,k)}(A)}$.

2.3.4. [**NDGq-Álgebras ingenuas y no ingenuas**] Una q-álgebra N-diferencial graduada ingenua o una **NDGq-álgebra ingenua** es un álgebra graduada E tal que su producto cumple que $\alpha\beta = q^{deg(\alpha)}\beta\alpha$ y dotada de un endomorfismo d, denominado su N-diferencial, el cual satisface $d^N = 0$ y su regla de Leibnitz

$$d(\alpha\beta) = d(\alpha)\beta + q^{(deg(\alpha))}\alpha d(\beta)$$

para todo α y todo β en el álgebra, a esta regla de Leibniz la denominaremos ingenua, de tal manera que una regla sobre el producto que no se comporte de esta forma sea una regla de Leibniz no ingenua. Diremos que tenemos una **NDGq-álgebra no ingenua** si la regla de Leibnitz no es ingenua.

2.4. Propiedades de módulos graduados N-diferenciales

Al igual que en el caso no graduado, podemos considerar los homomorfismos inducidos de inclusión $[i] : H_{(n)}(A_k) \to H_{(n+1)}(A_k)$ o inducido por el diferencial $[d] : H_{(n+1)}(A_k) \to H_{(n)}(A_k)$ su buena definición se fundamenta en el mismo razonamiento del caso no graduado. De esta manera, nos preguntamos si tenemos en el caso graduado resultados similares para los módulos graduados.

Lema 2.4.1. *Sea l y m enteros con $l \geq 1$, $m \geq 1$ y $l + m \leq N-1$. Entonces la siguiente sucesión de homomorfismos*

$$\begin{tikzcd}
& {} \arrow[dl, "{[d]^{(N-(l+m))}}"'] & & & \\
& & H_{(l+m)}(A_p) \arrow[r, "{[d]^m}"] & H_{(l)}(A_{p-m}) \arrow[dr, "{[i]^{(N-(l+m))}}"] & \\
H_{(m)}(A_p) \arrow[urr, "{[i]^l}"] & & & & H_{(N-m)}(A_{p-m}) \arrow[dl, "{[d]^l}"] \\
& H_{(N-l)}(A_{p-m-l}) \arrow[dl, "{[d]^{(N-(l+m))}}"'] & & H_{(N-(l+m))}(A_{p-m-l}) \arrow[ll, "{[i]^m}"] & \\
H_{(m)}(A_{p-N}) & & & &
\end{tikzcd}$$

es exacta.

[Dem.] La demostración de este hecho utiliza las mismas técnicas del lema 2.2.1 con la salvedad en el manejo de los grados del módulo. $\square$

3 Un ejemplo de un regla de Leibniz no ingenua

La homología singular surge alrededor de 1930 de mano de Lefschetz que define una teoría de homología con grupos no libres y es hasta Eilenberg, hacia 1943, que se modifican las definiciones de Lefschetz buscando sortear los inconvenientes de no tener grupos libres, en este proceso se definen los simplices singulares y las cadenas simpliciales. La homología singular surge entonces como una gran herramienta que relaciona invariantes algebraicos con propiedades del espacio topológico [3]. Con el fin de buscar un acercamiento más general a estos invariantes definimos las q-cadenas simpliciales, definición basada en las cadenas singulares usuales pero relacionadas con q una raíz N-ésima de la unidad y que para algunos resultados clásicos, como la homología del punto, se comportan de manera similar.

Durante este capítulo, analizaremos el complejo de q-cadenas, comenzando en la sección 3.1 con la definición usual de simplice, caras simpliciales, q-cadenas simpliciales, la definición del operador de borde y observando que este operador cumple la condición $d^N = 0$. Continuaremos en la sección 3.2 con el estudio de la homología del punto y finalizaremos con la sección 3.3 donde mostraremos que el módulo N-diferencial de q-cadenas con el producto cónico convexo cumple una regla de Leibniz no ingenua.

3.1. q-Análogo Simplicial

En esta sección, hablaremos del complejo de q-cadenas y de su comportamiento con respecto al operador de borde, fijandonos hacia el final de la sección que este complejo con este operador de borde genera un módulo N-diferencial y que por lo tanto podemos hablar de homología sobre un espacio topológico.

3.1.1. [**p-Simplice regular**] Un **p-simplice regular** $\triangle_p$ consiste de todos los puntos $x \in \mathbb{R}^{p+1}$ tal que :

I. $0 \leq x_i \leq 1$, para $i = 0, 1, 2, \ldots, p$

II. $\sum_{i=0}^{p} x_i = 1$

donde $\mathbb{R}^{p+1}$ es el espacio euclideo usual y $\{x_i\}$ son las coordenadas $x \in \mathbb{R}^{p+1}$.

3.1.2. [**Funciones lineales en simplices**] Una función $f : \triangle_p \to \mathbb{R}^n$ es una **función lineal** si existe una función $F : \mathbb{R}^{p+1} \to \mathbb{R}^n$ tal que $F|_{\triangle_p} = f$. Si $P_0, \ldots P_p \in \mathbb{R}^n$ son puntos arbitrarios entonces existe una única función lineal $f : \triangle \to \mathbb{R}^n$ tal que $f(e_i) = P_i$, con lo cual $f(x) = \sum_{i=0}^{p} x_i P_i$

Como caso particular de estas funciones, consideramos

3.1.3. [**Caras simpliciales**] Las funciones lineales $c^j = c_p^j : \triangle_{p-1} \to \triangle_p$ tal que $c^j(e^i) = e^i$ si $j > i$ y $c^j(e^i) = e^{i+1}$ para $i \geq j$ con $j = 0, 1, \ldots, p$. La función c^j sera llamada la j-**ésima cara de** $\triangle_p$. La unión de todas las caras de $\triangle_p$ es la **frontera de** $\triangle_p$.

Lema 3.1.4. *$c_{p+1}^j c_p^k = c_{p+1}^k c_p^{j-1}$ si $k < j$.*

[**Dem.**] Procederemos por casos.

Si $i < k$ entonces $c_{p+1}^j c_p^k(e_i) = e_i$ y $c_{p+1}^k c_p^{j-1}(e_i) = e_i$.

Si $k \leq i < j-1$ entonces $c_{p+1}^j c_p^k(e_i) = c_{p+1}^j(e_{i+1}) = e_{i+1}$ y $c_{p+1}^k c_p^{j-1}(e_i) = c_{p+1}^k(e_i) = e_{i+1}$.

Si $j - i \leq i$ entonces $c_{p+1}^j c_p^k(e_i) = c_{p+1}^j(e_{i+1}) = e_{i+2}$ y $c_{p+1}^k c_p^{j-1}(e_i) = c_{p+1}^k(e_{i+1}) = e_{i+2}$.

Como deseabamos. □

3.1.5. [**Simplices singulares**] Sea X un espacio topológico. Un p-simplice singular de X es una función continua $\sigma = \sigma_p : \triangle_p \to X$, para $p \geq 0$. Consideremos el **conjunto de** p-**simplices singulares** S_p .

$$S_p = \{\sigma : \triangle_p \to X : \sigma \text{ continua } \}$$

Consideraremos $q \in \mathbb{C}$ tal que $q^N = 1$ con N número entero primo mayor que 2.

3.1.6. [q-**Cadenas simpliciales**] Definimos el grupo abeliano libre CS_pX generado por el conjunto de todos los p-simplices singulares con coeficientes en $\mathbb{Z}[q]$. Así, todo elemento en CS_pX sera denominado una q-**cadena simplicial** que por definición cumple que $c_p = \sum c_\sigma \sigma$ con $c_\sigma \in \mathbb{Z}[q]$.

3.1.7. [q-**Operador de borde**] El q-**operador de borde** está definido por :

$$\partial : CS_p(X) \to CS_{p-1}(X)$$

$$\sigma \mapsto \partial(\sigma) = \sum_{j=0}^{p} q^j(\sigma c_p^j),$$

donde σc_p^j es la j-ésima cara de $\triangle_p$ y $\sigma : \triangle_p \to X, p \geq 0$.

Lema 3.1.8. *Para todo $n \in \mathbb{N}$ el q-operador de borde cumple que*

$$\partial^n(\sigma) = \overline{n}! \cdot \sum_{i_1 \leq i_2 \leq \ldots \leq i_n} q^{\sum_j i_j} (\sigma c_p^{i_1} c_{p-1}^{i_2} \ldots c_{p-(n-1)}^{i_n})$$

[Dem.] Procederemos por inducción sobre n.

I. Observemos el caso $n = 2$. Tenemos

$$\partial^2(\sigma) = \partial(\partial(\sigma)) = \partial(\sum_{j=0}^{p} q^j(\sigma c_p^j)) = \sum_{j=0}^{p} q^j(\partial(\sigma c_p^j)) = \sum_{j=0}^{p} q^j \sum_{k=0}^{p-1} q^k(\sigma c_p^j) c_{p-1}^k$$

$$= \sum_{j=0}^{p} \sum_{k=0}^{p-1} q^{k+j}(\sigma c_p^j) c_{p-1}^k = \sum_{j \leq k} q^{k+j}(\sigma c_p^j) c_{p-1}^k + \sum_{k<j} q^{k+j}(\sigma c_p^j) c_{p-1}^k$$

$$= \sum_{j \leq k} q^{k+j}(\sigma c_p^j) c_{p-1}^k + \sum_{k<j} q^{k+j}(\sigma c_p^k) c_{p-1}^{j-1}$$

Observe que si consideramos $k = j$ en la segunda sumatoria obtenemos,

$$\partial^2(\sigma) = \sum_{j \leq k} q^{k+j}(\sigma c_p^j) c_{p-1}^k + \sum_{j<k+1} q^{k+j+1}(\sigma c_p^j) c_{p-1}^k$$

$$= \sum_{j \leq k} q^{k+j}(\sigma c_p^j) c_{p-1}^k + \sum_{j \leq k} q^{k+j+1}(\sigma c_p^j) c_{p-1}^k$$

$$= \sum_{j \leq k} q^{k+j}(1+q)(\sigma c_p^j) c_{p-1}^k = \overline{2} \sum_{j \leq k} q^{k+j}(\sigma c_p^j) c_{p-1}^k$$

como se deseaba.

II. Supongamos que es cierto para n y observemos $n + 1$

$$\partial^{n+1}(\sigma) = \partial(\partial^n(\sigma)) = \partial(\overline{n}! \cdot \sum_{i_1 \leq i_2 \leq \ldots \leq i_n} q^{\sum_j i_j} (\sigma c_p^{i_1} c_{p-1}^{i_2} \ldots c_{p-(n-1)}^{i_n}))$$

$$= \overline{n}! \cdot \sum_{i_1 \leq i_2 \leq \ldots \leq i_n} q^{\sum_j i_j} (\sum_{i_{n+1}} q^{i_{n+1}} (\sigma c_p^{i_1} c_{p-1}^{i_2} \ldots c_{p-(n-1)}^{i_n}) c_{p-n}^{i_{n+1}})$$

Observe que i_{n+1} varia entre 0 y $p - n$.
Si $Q = \sum_{j=1}^{n+1} i_j$ entonces tenemos que

$$\partial^{n+1}(\sigma) = \overline{n}! \cdot \sum_{i_1 \leq i_2 \leq \ldots \leq i_n} \sum_{i_{n+1}} q^Q (\sigma c_p^{i_1} c_{p-1}^{i_2} \ldots c_{p-(n-1)}^{i_n}) c_{p-n}^{i_{n+1}}$$

$$= \overline{n}! \cdot (\sum_{i_1 \leq i_2 \leq \ldots \leq i_n \leq i_{n+1}} q^Q (\sigma c_p^{i_1} c_{p-1}^{i_2} \ldots c_{p-(n-1)}^{i_n}) c_{p-n}^{i_{n+1}}$$

$$+ \sum_{i_1 \le i_2 \le \ldots \le i_{n-1} \le i_{n+1} < i_n} q^Q (\sigma c_p^{i_1} c_{p-1}^{i_2} \ldots c_{p-(n-1)}^{i_n}) c_{p-n}^{i_{n+1}}$$
$$+ \sum_{i_1 \le i_2 \le \ldots \le i_{n-2} \le i_{n+1} < i_{n-1} \le i_n} q^Q (\sigma c_p^{i_1} c_{p-1}^{i_2} \ldots c_{p-(n-1)}^{i_n}) c_{p-n}^{i_{n+1}} + \cdots$$
$$\cdots + \sum_{i_{n+1} < i_1 \le i_2 \le \ldots \le i_n} q^Q (\sigma c_p^{i_1} c_{p-1}^{i_2} \ldots c_{p-(n-1)}^{i_n}) c_{p-n}^{i_{n+1}})$$

Observamos que en cada sumando tenemos

$$\sum_{i_1 \le i_2 \le \ldots \le i_k \le i_{n+1} < i_{k+1} \le \ldots \le i_n} q^Q (\sigma c_p^{i_1} c_{p-1}^{i_2} \ldots c_{p-(n-1)}^{i_n}) c_{p-n}^{i_{n+1}}$$
$$= \sum_{i_1 \le i_2 \le \ldots \le i_k \le i_{n+1} < i_{k+1} \le \ldots \le i_n} q^Q (\sigma c_p^{i_1} \ldots c_{p-(k-1)}^{i_k} c_{p-k}^{i_{n+1}} c_{p-(k+1)}^{i_{k+1}-1} c_{p-(k+2)}^{i_{k+2}-1} \ldots c_{p-n}^{i_n - 1})$$

Esto por el lema 3.1.4. Por otra parte si hacemos el siguiente reemplazo i_j por i_j si $j \le k$ a i_{n+1} por i_{k+1} y i_j por $i_{j+1}+1$ si $j > k$. Obtenemos que cada sumando se puede escribir de la forma

$$\sum_{i_1 \le \ldots \le i_k \le i_{k+1} < i_{k+2}+1 < \ldots < i_{n+1}+1} q^{\sum_{j=1}^{k+1} i_j + \sum_{j=k+1}^{n+1} (i_{j+1}+1)} (\sigma c_p^{i_1} \ldots c_{p-(k-1)}^{i_k} c_{p-k}^{i_{k+1}} \ldots c_{p-(n-1)}^{i_n} c_{p-n}^{i_{n+1}})$$

$$= \sum_{i_1 \le i_2 \le \ldots \le i_n \le i_{n+1}} q^{Q+n-(k+1)} (\sigma c_p^{i_1} c_{p-1}^{i_2} \ldots c_{p-(n-1)}^{i_n} c_{p-n}^{i_{n+1}})$$

Como $k = -1, 0, \ldots, n-1$ por su construcción entonces

$$\partial^{n+1}(\sigma) = \overline{n}! \cdot \sum_{i_1 \le i_2 \le \ldots \le i_{n+1}} q^Q (1 + q + \cdots + q^n)(\sigma c_p^{i_1} c_{p-1}^{i_2} \ldots c_{p-n}^{i_{n+1}})$$
$$= \overline{n+1}! \cdot \sum_{i_1 \le i_2 \le \ldots \le i_{n+1}} q^Q (\sigma c_p^{i_1} c_{p-1}^{i_2} \ldots c_{p-n}^{i_{n+1}})$$

Completando la demostración.

□

Teorema 3.1.9. $\partial^N = 0$.

[**Dem.**] Apartir del lema 3.1.8 y de las propiedades del q-factorial dadas en 1.1.2 se tiene el teorema. □

Observación †† 3.1.10. Con el resultado del teorema 3.1.9 tenemos que el complejo q-simplicial con ∂, es una módulo N-diferencial, discutidos estos en la sección 2.1 y por lo tanto podemos hablar de su homología.

3.2. Homología del punto

Durante esta sección, consideraremos el espacio $X = \{x\}$, el espacio topológico de un solo punto.

3.2.1. [Cadenas Simpliciales en el punto]

Observe que para cada $p \in \mathbb{Z}^+$ existe un único simplice regular $\sigma_p : \triangle_p \to X$, con lo cual podemos identificar al grupo $CS_p(X)$ con $\mathbb{Z}[q]$.

De esta manera, si tomamos $\partial : CS_p(X) \to CS_{p-1}(X)$ entonces

$$\partial(\sigma_p) = \sum_{j=0}^{p} q^j(\sigma c_p^j) = \sum_{j=0}^{p} q^j \sigma_{p-1} = \overline{p+1}\sigma_{p-1}$$

Por lo cual, asignaremos a $\partial = \overline{p+1} : CS_p(X) \to CS_{p-1}(X)$.

3.2.2. [Complejo de Cadenas]

Por la forma en que se comportan las cadenas y el borde tenemos el siguiente complejo de cadenas:

$$0 \longleftarrow CS_0(X) \xleftarrow{\quad \overline{2} \quad} CS_1(X) \xleftarrow{\quad \overline{3} \quad} \cdots \quad \cdots \xleftarrow{\quad \overline{N-1} \quad} CS_{N-2}(X) \xleftarrow{\quad 0 \quad}$$

$$CS_{N-1}(X) \xleftarrow{\quad \overline{1} \quad} CS_N(X) \xleftarrow{\quad \overline{2} \quad} \cdots \quad \cdots \xleftarrow{\quad \overline{N-1} \quad} CS_{2N-2}(X) \xleftarrow{\quad 0 \quad} \cdots$$

Como $\overline{n} \in \mathbb{Z}[q]$ es invertible, por la proposición 1.1.4, entonces cada uno de los homomorfismos $\overline{2}, \overline{3}, \ldots, \overline{N-1}$ es un isomorfismo

3.2.3. [Homología del punto] Con la información anterior entonces damos la homología del espacio X,

$$H(X) = \begin{cases} H_{r,s}(X) = \mathbb{Z}[q] & \text{si } s = r+1 \leq N-2; \\ H_{r,s}(X) = 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

3.3. Producto Cónico Convexo

Durante esta sección trabajaremos con X espacio topológico convexo. Denotaremos para cada $x = (x_i)_{i \in \mathbb{Z}^+} \in \mathbb{R}^{n+1}$ a su norma con $|x| = \sum_i x_i$ y entenderemos a $(x, y) \in \mathbb{R}^{n+m+2}$ con el vector con $x \in \mathbb{R}^{n+1}$ y $y \in \mathbb{R}^{m+1}$.

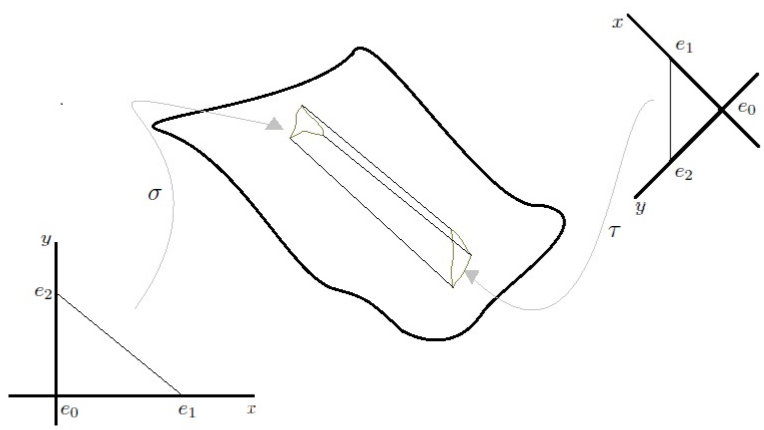
3.3.1. [Producto Cónico Convexo]

Sean $\sigma : \triangle_n \to X$ y $\tau : \triangle_m \to X$ simplices regulares. Definimos $\sigma \cdot \tau : \triangle_{n+m+1} \to X$ su **Producto Cónico Convexo** como:

$$\sigma \cdot \tau(x,y) = \sigma\tau(x,y) = \begin{cases} \sigma(x) & \text{si } |x| = 1; \\ \tau(y) & \text{si } |y| = 1; \\ |x|\sigma(\frac{x}{|x|}) + |y|\tau(\frac{y}{|y|}) & \text{si } |x| \neq 1 \wedge |y| \neq 1 \end{cases}$$

Este producto se extenderá de manera bilineal para cualesquiera $\sigma_n \in CS_n(X)$ y $\tau_m \in CS_m(X)$.

Una posible representación gráfica de este producto, es dada por



Lema 3.3.2. *Sean $\sigma : \triangle_n \to X$, $\tau : \triangle_m \to X$ y $l \in \mathbb{N}$ con $l \leq min\{m,n\}$ entonces se tiene que*

$$\partial^l(\sigma\tau) = \sum_{k=0}^{l} q^{k(n-(l-1)+k)} \binom{l}{k}_q \partial^{l-k}(\sigma)\partial^k(\tau).$$

[Dem.] Proceremos por inducción.

I. Consideremos $l = 1$ entonces

$$\partial(\sigma\tau) = \sum_{i=0}^{n+m+1} q^i(\sigma\tau)c^i = \sum_{i=0}^{n} q^i(\sigma\tau)c^i + \sum_{i=n+1}^{n+m+1} q^i(\sigma\tau)c^i$$

$$= \sum_{i=0}^{n} q^i(\sigma c^i)\tau + \sum_{i=n+1}^{n+m+1} q^i\sigma(\tau c^i) = \sum_{i=0}^{n} q^i(\sigma c^i)\tau + \sum_{j=0}^{m} q^{j+n+1}\sigma(\tau c^j)$$

$$= \sum_{i=0}^{n} q^i(\sigma c^i)\tau + q^{n+1}\sum_{j=0}^{m} q^j\sigma(\tau c^j) = \partial(\sigma)\tau + q^{n+1}\sigma\partial(\tau)$$

II. Supongamos que se tiene para l y observemos el caso de $l+1$.

$$\partial^{l+1}(\sigma\tau) = \partial^l(\partial(\sigma\tau)) = \sum_{k=0}^{l} q^{n-(l-1)+k}\binom{l}{k}_q \partial(\partial^{l-k}(\sigma)\partial^k(\tau))$$

$$= \sum_{k=0}^{l} q^{n-(l-1)+k}\binom{l}{k}_q [\partial^{l-k+1}(\sigma)\partial^k(\tau) + q^{n-(l-k)+1}\partial^{l-k}(\sigma)\partial^{k+1}(\tau)]$$

Consideremos el sumando que tiene como factor a $\partial^{l-u}(\sigma)\partial^{u+1}(\tau)$, observe que estos elementos vienen de los pasos u y $u+1$ con $0 \leq u \leq l$ luego su coeficiente es,

$$q^{u(n-(l-1)+u)}\binom{l}{u}_q q^{n-(l-u)+1} + q^{(u+1)(n-(l-1)+(u+1))}\binom{l}{u+1}_q$$

$$= q^{(u+1)n-(u+1)l+u^2+2u+1}\binom{l}{u}_q + q^{(u+1)n-(u+1)l+u+1+u^2+2u+1}\binom{l}{u+1}_q$$

$$= q^{(u+1)n-(u+1)l+u^2+2u+1}\binom{l}{u}_q + q^{(u+1)n-(u+1)l+u^2+3u+2}\binom{l}{u+1}_q$$

$$= q^{(u+1)n-(u+1)l+u^2+2u+1}[\binom{l}{u}_q + q^{u+1}\binom{l}{u+1}_q]$$

$$= q^{(u+1)(n-l+(u+1))}\binom{l+1}{u+1}_q$$

Este último paso por el lema 1.1.3. De esta manera, el coeficiente de $\partial^{l-u}(\sigma)\partial^{u+1}(\tau)$ es $q^{(u+1)(n-l+(u+1))}\binom{l+1}{u+1}_q$ y evidentemente el término de $\partial^{l+1}(\sigma)\tau$ esta acompañado por $\binom{l+1}{0}_q$ luego

$$\partial^{l+1}(\sigma\tau) = \sum_{k=0}^{l+1} q^{k(n-l+k)}\binom{l+1}{k}_q \partial^{l-k+1}(\sigma)\partial^k(\tau).$$

Como se deseaba. $\square$

Para $\sigma : \triangle_n \to X$ un simplice singular, notaremos por σ_k a $\sigma(e_k)$. Y damos una definición útil para hablar de la regla de Leibniz en q-cadenas simpliciales.

3.3.3. [**Truncación de Newton**] Definiremos como **Truncación de Newton** al operador $\mathcal{N}$ tal que

$$\mathcal{N}^j(\sigma) = \begin{cases} \partial^j(\sigma) & \text{si } j \leq n \text{ ;} \\ \overline{n+1}! & \text{si } j = n+1; \\ 0 & \text{si } j \geq n+2 \end{cases}$$

Lema 3.3.4. *Sean $\sigma : \triangle_n \to X$, $\tau : \triangle_m \to X$ entonces se tienen las siguientes propiedades:*

a. $\partial^m(\tau) = \overline{m}! \sum_{k=0}^m q^{m-k}\tau_k$.

b. $\partial^k(\partial^m(\tau)\sigma) = \overline{m+1}!\overline{k}\mathcal{N}^{k-1}(\sigma) + q^k\mathcal{N}^m(\tau).\mathcal{N}^k(\sigma)$, *si* $1 \leq k \leq n+1$.

c. $\partial^k(\tau\partial^n(\sigma)) = \mathcal{N}^k(\tau)\mathcal{N}^n(\sigma) + q^{m+2-k}\overline{n+1}!\overline{k}\mathcal{N}^{k-1}(\tau)$, *si* $1 \leq k \leq m+1$.

d. $\partial(\partial^m(\tau)\partial^n(\sigma)) = \overline{m+1}!\partial^n(\sigma) + q\overline{n+1}!\partial^m(\tau)$.

[Dem.]

a. Proceremos por inducción sobre m.

I. Supongamos que $m = 1$.

$$\partial(\tau) = \sum_{i=0}^{1} q^i\tau c^i = \tau_1 + q\tau_0$$

Si $m = 2$ entonces

$$\partial^2(\tau) = \partial(\partial(\tau)) = \partial(\sum_{i=0}^{2} q^i\tau c^i) = \partial(\tau c^0 + q\tau c^1 + q^2\tau c^2)$$

$$= \partial(\tau c^0) + q\partial(\tau c^1) + q^2\partial(\tau c^2)) = \tau_2 + q\tau_1 + q(\tau_2 + q\tau_0) + q^2(\tau_1 + q\tau_0)$$

$$= \tau_2 + q\tau_2 + q\tau_1 + q^2\tau_1 + q^2\tau_0 + q^3\tau_0 = (1+q)[\tau_2 + q\tau_1 + q^2\tau_0]$$

.

II. Supongamos que se tiene para m y observemos el caso $m+1$.

$$\partial^{m+1}(\tau) = \partial^m(\partial(\tau)) = \partial^m(\sum_{k=0}^{m+1} q^k\tau c^k) = \partial^m(\sum_{k=0}^{m+1} q^k\tau_{01\ldots\widehat{k}\ldots m+1})$$

$$= \sum_{k=0}^{m+1} q^k\partial^m(\tau_{01\ldots\widehat{k}\ldots m+1}) = \sum_{k=0}^{m+1} q^k(\overline{m}!\sum_{j=0}^{m} q^{m-j}\tau_j^k)$$

Donde τ_j^k es $\tau_{01\ldots\widehat{k}\ldots m+1}(e_j)$. Observe que si $j<k$ tenemos que $\tau_j^k=\tau_j$, si $j\geq k$, se tiene $\tau_j^k=\tau_{j+1}$. Así el coeficiente que acompaña a τ_j es

$$\overline{m}!(q^{m-j}\sum_{k>j}q^k+q^{m-j+1}\sum_{k<j}q^k)=\overline{m}!q^{m-j}(\sum_{k>j}q^k+q\sum_{k<j}q^k)$$

$$=\overline{m}!q^{m-j}(\sum_{i=1}^{m+1}q^k)=\overline{m}!q^{m-j+1}(\sum_{i=0}^{m}q^k)=\overline{m+1}!q^{m-j+1}$$

Con lo cual, tenemos

$$\partial^{m+1}(\tau)=\overline{m+1}!\sum_{k=0}^{m+1}q^{m-k+1}\tau_k$$

b. Procederemos por inducción sobre k.

I. Veamos el caso $k=1$.

$$\partial(\partial^m(\tau)\sigma)=\partial((\overline{m}!\sum_i q^{m-i}\tau_i)\sigma)=\overline{m}!\sum_i q^{m-i}\partial(\tau_i\sigma)$$

$$=\overline{m}!\sum_i q^{m-i}(\sigma+q\tau_i\partial(\sigma))=\overline{m+1}!\sigma+q\partial^m(\tau)\partial(\sigma)$$

Si $k=2$ entonces

$$\partial^2(\partial^m(\tau)\sigma)=\overline{m+1}!\partial(\sigma)+q\partial(\partial^m(\tau)\partial(\sigma))$$

$$=\overline{m+1}!\partial(\sigma)+q(\overline{m+1}!\partial(\sigma)+q\partial^m(\tau)\partial^2(\sigma))$$

$$=\overline{m+1}!\overline{2}\partial(\sigma)+q^2\partial^m(\tau)\partial^2(\sigma)$$

II. Supongamos el caso k y observemos $k+1\leq n+1$.

$$\partial^{k+1}(\partial^m(\tau)\sigma)=\partial(\partial^k(\partial^m(\tau)\sigma))=\partial(\overline{m+1}!\overline{k}\partial^{k-1}(\sigma)+q^k\partial^m(\tau).\partial^k(\sigma))$$

$$=\overline{m+1}!\overline{k}\partial^k(\sigma)+q^k\partial(\partial^m(\tau).\partial^k(\sigma))=\overline{m+1}!\overline{k}\partial^k(\sigma)+q^k(\overline{m}!\sum_i q^{m-i}\partial(\tau_i\partial^k(\sigma)))$$

$$=\overline{m+1}!\overline{k}\partial^k(\sigma)+q^k(\overline{m}!\sum_i q^{m-i}(\partial^k(\sigma)+q\tau_i\partial^{k+1}(\sigma)))$$

$$=\overline{m+1}!\overline{k}\partial^k(\sigma)+q^k(\overline{m+1}!\partial^k(\sigma)+q\partial^m(\tau)\partial^{k+1}(\sigma))$$

$$=\overline{m+1}!\overline{k+1}\partial^k(\sigma)+q^{k+1}\partial^m(\tau)\partial^{k+1}(\sigma)$$

c. Inducción sobre k.

I. Veamos el caso $k=1$.

$$\partial(\tau\partial^n(\sigma)) = \partial(\tau\overline{n}!\sum_j q^{n-j}\sigma_j) = \overline{n}!\sum_j q^{n-j}\partial(\tau\sigma_j) = \overline{n}!\sum_j q^{n-j}(\partial(\tau)\sigma_j + q^{m+1}\tau)$$

$$= \partial(\tau)\partial^n(\sigma) + q^{m+1}\overline{n+1}!\tau$$

Si $k=2$ tenemos

$$\partial^2(\tau\partial^n(\sigma)) = \partial(\partial(\tau)\partial^n(\sigma) + q^{m+1}\overline{n+1}!\tau) =$$

$$= \partial(\partial(\tau)\partial^n(\sigma)) + q^{m+1}\overline{n+1}!\partial(\tau) = \partial(\partial(\tau)\overline{n}!\sum_j q^{n-j}\sigma_j) + q^{m+1}\overline{n+1}!\partial(\tau)$$

$$= \overline{n}!\sum_j q^{n-j}\partial(\partial(\tau)\sigma_j) + q^{m+1}\overline{n+1}!\partial(\tau) = \overline{n}!\sum_j q^{n-j}(\partial^2(\tau)\sigma_j + q^m\partial(\tau)) + q^{m+1}\overline{n+1}!\partial(\tau)$$

$$= \partial^2(\tau)\partial^n(\sigma) + q^m\overline{n+1}!\partial(\tau) + q^{m+1}\overline{n+1}!\partial(\tau)$$

$$= \partial^2(\tau)\partial^n(\sigma) + q^m\overline{n+1}!\overline{2}\partial(\tau)$$

II. Supongamos el caso k y observemos que sucede en el caso $k+1 \leq m+1$.

$$\partial^{k+1}(\tau\partial^n(\sigma)) = \partial(\partial^k(\tau)\partial^n(\sigma)) + q^{m+2-k}\overline{n+1}!\overline{k}\partial^k(\tau)$$

$$= \overline{n}!\sum_j q^{n-j}\partial(\partial^k(\tau)\sigma_j) + q^{m+2-k}\overline{n+1}!\overline{k}\partial^k(\tau)$$

$$= \overline{n}!\sum_j q^{n-j}(\partial^{k+1}(\tau)\sigma_j + q^{m-k+1}\partial^k(\tau)) + q^{m+2-k}\overline{n+1}!\overline{k}\partial^k(\tau)$$

$$= \partial^{k+1}(\tau)\partial^n(\sigma) + \overline{n+1}!q^{m+1-k}\partial^k(\tau) + q^{m+2-k}\overline{n+1}!\overline{k}\partial^k(\tau)$$

$$= \partial^{k+1}(\tau)\partial^n(\sigma) + \overline{n+1}!q^{m+1-k}(1+q\overline{k})\partial^k(\tau)$$

$$= \partial^{k+1}(\tau)\partial^n(\sigma) + q^{m+1-k}\overline{n+1}!\overline{k+1}\partial^k(\tau)$$

d. Observemos

$$\partial(\partial^m(\tau)\partial^n(\sigma)) = \partial((\overline{m}!\sum_{k=0}^{m} q^{m-k}\tau_k)(\overline{n}!\sum_{j=0}^{n} q^{n-j}\sigma_j))$$

$$= \overline{m}!\overline{n}!\sum_{k=0}^{m} q^{m-k}\sum_{j=0}^{n} q^{n-j}\partial(\tau_k\sigma_j) = \overline{m}!\overline{n}!\sum_{k=0}^{m} q^{m-k}\sum_{j=0}^{n} q^{n-j}(\sigma_j + q\tau_k)$$

$$= \overline{m}!\sum_{k=0}^{m} q^{m-k}\partial^n(\sigma) + q\overline{n}!\sum_{j=0}^{n} q^{n-j}\partial^m(\tau)$$

$$= \overline{m+1}!\partial^n(\sigma) + q\overline{n+1}!\partial^m(\tau)$$

□

Teorema 3.3.5. *Sean $\sigma : \triangle_n \to X$, $\tau : \triangle_m \to X$ simplices singulares y sea $k \in \mathbb{Z}$ $k > 0$ obtenemos la siguiente regla*

$$\partial^k(\sigma\tau) = \sum_{j=0}^{k} q^{j(n-(k-1)+j)} \binom{k}{j}_q \mathcal{N}^{k-j}(\sigma)\mathcal{N}^j(\tau)$$

.

[**Dem.**] Procederemos por inducción sobre k dejando fijos a m y a n y suponiendo sin perdida de generalidad que $m < n$, así debemos considerar los siguientes casos

1. Supongamos que $k < m$, si este es el caso $k \leq \min\{m, n\}$ y cada uno de los términos $\mathcal{N}^{k-j}(\sigma)\mathcal{N}^j(\tau)$ es igual a $\partial^{k-j}(\sigma)\partial^j(\tau)$, lo que nos permite utilizar el lema 3.3.2, obteniendo lo deseado. Y por la inducción tenemos que es cierto para $k \leq m$
2. Procederemos por inducción en k con $m < k \leq n$. Observemos el caso $m + 1$.

$$\partial^{m+1}(\sigma\tau) = \partial(\partial^m(\sigma\tau)) = \partial\left(\sum_{j=0}^{m} q^{j(n-(m-1)+j)}\binom{m}{j}_q \partial^{m-j}(\sigma)\partial^j(\tau)\right) = \sum_{j=0}^{m} q^{j(n-(m-1)+j)}\binom{m}{j}_q \partial(\partial^{m-j}(\sigma)\partial^j(\tau))$$

$$= \sum_{j=0}^{m-1} q^{j(n-(m-1)+j)}\binom{m}{j}_q (\partial^{m-j+1}(\sigma)\partial^j(\tau) + q^{n-(m-j)+1}\partial^{m-j}(\sigma)\partial^{j+1}(\tau)) + q^{m(n-(m-1)+m)}\binom{m}{m}_q \partial(\sigma\partial^m(\tau))$$

$$\sum_{j=0}^{m-1} q^{j(n-(m-1)+j)}\binom{m}{j}_q (\partial^{m-j+1}(\sigma)\partial^j(\tau)+q^{n-(m-j)+1}\partial^{m-j}(\sigma)\partial^{j+1}(\tau))+q^{m(n-(m-1)+m)}\binom{m}{m}_q (\partial(\sigma)\partial^m(\tau)+q^{n+1}\overline{m+1}!\sigma)$$

Consideramos los coeficientes del término $\partial^{m+1-u}(\sigma)\partial^u$ para $u \in \{0, 1, \ldots m - 1\}$ y obtenemos,

$$q^{(u+1)(n-(m-1)+u+1)}\binom{m}{u+1}_q + q^{u(n-(m-1)+u)}\binom{m}{u}_q q^{n-m+u+1}$$

$$= q^{(u+1)n-(u+1)m+u^2+3u+2}\binom{m}{u+1}_q + q^{(u+1)n-(u+1)m+u^2+2u+1}\binom{m}{u}_q$$

$$= q^{(u+1)(n-m+u+1)}\left(\binom{m}{u}_q + q^{u+1}\binom{m}{u+1}_q\right)$$

$$= q^{(u+1)(n-m+u+1)}\binom{m+1}{u+1}_q$$

Reescribiendo, tenemos que

$$\partial^{m+1}(\sigma\tau) = \sum_{u=0}^{m} q^{u(n-m+u)}\binom{m+1}{u}_q \partial^{m+1-u}(\sigma)\partial^u(\tau) + q^{m(n-(m-1)+m)}\binom{m}{m}_q q^{n+1}\overline{m+1}!\sigma$$

Como $\mathcal{N}^{m+1}(\tau) = \overline{m+1}!$, $\mathcal{N}^0(\sigma) = \sigma$ y $\binom{m}{m}_q = \binom{m+1}{m+1}_q$ entonces

$$q^{m(n-(m-1)+m)}\binom{m}{m}_q q^{n+1}\overline{m+1}!\sigma = q^{m(n-(m-1)+m)}\binom{m+1}{m+1}_q q^{n+1}\mathcal{N}^{m+1}(\tau)\mathcal{N}^0(\sigma)$$

$$= q^{(m+1)(n+1)} \binom{m+1}{m+1}_q \mathcal{N}^{m+1}(\tau)\mathcal{N}^0(\sigma) = q^{(m+1)(n-m+m+1)} \binom{m+1}{m+1}_q \mathcal{N}^{m+1}(\tau)\mathcal{N}^0(\sigma)$$

De esta manera,

$$\partial^{m+1}(\sigma\tau) = \sum_{u=0}^{m+1} q^{u(n-m+u)} \binom{m+1}{u}_q \mathcal{N}^{m+1-u}(\sigma)\mathcal{N}^u(\tau)$$

lo que demuestra el caso $m+1$.

Ahora supongamos que se tiene para k y miremos el caso $k+1$.

$$\partial^{k+1}(\sigma\tau) = \partial(\partial^k(\sigma\tau)) = \partial\left(\sum_{j=0}^{k} q^{j(n-(k-1)+j)} \binom{k}{j}_q \mathcal{N}^{k-j}(\sigma)\mathcal{N}^j(\tau)\right)$$

Observemos que para $k > m+2$ los términos $\mathcal{N}^{k-j}(\sigma)\mathcal{N}^j(\tau)$ son nulos luego podemos considerar

$$\partial^{k+1}(\sigma\tau) = \partial(\partial^k(\sigma\tau)) = \partial\left(\sum_{j=0}^{m+1} q^{j(n-(k-1)+j)} \binom{k}{j}_q \mathcal{N}^{k-j}(\sigma)\mathcal{N}^j(\tau)\right)$$

$$= \partial\left(\sum_{j=0}^{m} q^{j(n-(k-1)+j)} \binom{k}{j}_q \mathcal{N}^{k-j}(\sigma)\mathcal{N}^j(\tau) + q^{(m+1)(n-(k-1)+m+1)} \binom{k}{m+1}_q \mathcal{N}^{k-(m+1)}(\sigma)\mathcal{N}^{m+1}(\tau)\right)$$

$$= \sum_{j=0}^{m} q^{j(n-(k-1)+j)} \binom{k}{j}_q \partial(\mathcal{N}^{k-j}(\sigma)\mathcal{N}^j(\tau)) + q^{(m+1)(n-(k-1)+m+1)} \binom{k}{m+1}_q \partial^{k-m}(\sigma)\overline{m+1}!$$

$$= \sum_{j=0}^{m} q^{j(n-(k-1)+j)} \binom{k}{j}_q (\mathcal{N}^{k-j+1}(\sigma)\mathcal{N}^j(\tau) + q^{n-(k-j)+1}\mathcal{N}^{k-j}(\sigma)\mathcal{N}^{j+1}(\tau)) + q^{(m+1)(n-(k-1)+m+1)} \binom{k}{m+1}_q \partial^{k-m}(\sigma)\overline{m+1}!$$

Consideramos los coeficientes del término $\partial^{k+1-u}(\sigma)\partial^u(\tau)$ para $u \in \{0, 1, \ldots m\}$ y obtenemos

$$q^{u(n-(k-1)+u)} \binom{k}{u}_q + q^{(u-1)(n-(k-1)+u-1)} \binom{k}{u-1}_q q^{n-(k-u+1)+1}$$

$$= q^{u(n-k+1)+u)} \binom{k}{u}_q + q^{(u-1)(n-(k-1)+u-1)+n-(k-u+1)+1} \binom{k}{u-1}_q$$

$$= q^{u(n-k+u)} \left(\binom{k}{u-1}_q + q^u \binom{k}{u}_q\right)$$

$$= q^{u(n-k+u)} \binom{k+1}{u}_q$$

Por lo tanto,

$$\partial^{k+1}(\sigma\tau) = \sum_{u=0}^{m} q^{u(n-k+u)} \binom{k+1}{u}_q \partial^{k+1-u}(\sigma)\partial^u(\tau)$$

$$+\left(q^{m(n-(k-1)+m)}\binom{k}{m}_q q^{n-k+m+1}+q^{(m+1)(n-(k-1)+m+1)}\binom{k}{m+1}_q\right)\partial^{k-m}(\sigma)\overline{m+1}!$$

Y tenemos que

$$\begin{aligned}
&q^{m(n-(k-1)+m)}\binom{k}{m}_q q^{n-k+m+1}+q^{(m+1)(n-(k-1)+m+1)}\binom{k}{m+1}_q\\
&=q^{mn-mk+n-k+m^2+2m+1}\binom{k}{m}_q+q^{(m+1)n-(m+1)(k-1)+(m+1)^2}\\
&=q^{(m+1)(n-k+m+1)}\left(\binom{k}{m}_q+q^{m+1}\binom{k}{m+1}_q\right)\\
&=q^{(m+1)(n-k+m+1)}\binom{k+1}{m+1}_q
\end{aligned}$$

Así,

$$\partial^{k+1}(\sigma\tau)=\sum_{u=0}^{m+1}q^{u(n-k+u)}\binom{k+1}{u}_q\partial^{k+1-u}(\sigma)\partial^u(\tau)$$

Hemos probado la formula para k tal que $0<k\leq n+1$.

3. Por inducción sobre k con $n+1<k<m+n$ Consideremos el caso $n+2$,

$$\partial^{n+2}(\sigma\tau)=\partial\left(\sum_{j=0}^{n+1}q^{j(n-(n+1-1)+j)}\binom{n+1}{j}_q\mathcal{N}^{n+1-j}(\sigma)\mathcal{N}^j(\tau)\right)$$

Observe que para $j\geq m+1$ los terminos $\mathcal{N}^{n+1-j}(\sigma)\mathcal{N}^j(\tau)$ son nulos con lo cual podemos considerar la suma hasta $j=m+1$, así

$$\begin{aligned}
&\partial^{n+2}(\sigma\tau)=\binom{n+1}{0}_q\overline{n+1}!\partial(\tau)+\sum_{j=1}^{m-1}q^{j^2}\binom{n+1}{j}_q\partial(\mathcal{N}^{n+1-j}(\sigma)\mathcal{N}^j(\tau))\\
&+q^{m^2}\binom{n+1}{m}_q\partial(\mathcal{N}^{n+1-m}(\sigma)\mathcal{N}^m(\tau))+q^{(m+1)^2}\binom{n+1}{m+1}_q\overline{m+1}!\partial^{n+1-m}(\sigma)\\
&=\binom{n+1}{0}_q\overline{n+1}!\partial(\tau)+\sum_{j=1}^{m-1}q^{j^2}\binom{n+1}{j}_q(\partial^{n+2-j}(\sigma)\partial^j(\tau)+q^j\partial^{n+1-j}(\sigma)\partial^{j+1}(\tau))\\
&+q^{m^2}\binom{n+1}{m}_q(\partial^{n-m+2}(\sigma)\partial^m(\tau)+q^m\overline{m+1}!\partial^{n+1-m}(\sigma))+q^{(m+1)^2}\binom{n+1}{m+1}_q\overline{m+1}!\partial^{n+1-m}(\sigma)
\end{aligned}$$

Tomemos los coeficientes de los términos $\partial^{n+2-u}(\sigma)\partial^u(\tau)$ con $u\in\{2,\ldots,m\}$

$$q^{u^2}\binom{n+1}{u}_q+q^{(u-1)^2}\binom{n+1}{u-1}_q q^{u-1}$$

$$= q^{u^2}\binom{n+1}{u}_q + q^{u^2-u}\binom{n+1}{u-1}_q$$

$$= q^{u^2-u}\left(\binom{n+1}{u-1}_q + q^{u}\binom{n+1}{u}_q\right)$$

$$= q^{u^2-u}\binom{n+2}{u}_q$$

Para el término de $\mathcal{N}^{n+1}(\sigma)\mathcal{N}(\tau)$ tenemos,

$$\binom{n+1}{0}_q + q\binom{n+1}{1}_q = \binom{n+2}{1}_q$$

Para el término de $\mathcal{N}^{n-m+1}(\sigma)\mathcal{N}^{m+1}(\tau)$ tenemos,

$$q^{m^2}\binom{n+1}{m}_q q^m + q^{(m+1)^2}\binom{n+1}{m+1}_q = q^{m^2+m}\left(\binom{n+1}{m}_q + q^{m+1}\binom{n+1}{m+1}_q\right)$$

$$= q^{m^2+m}\binom{n+2}{m+1}_q$$

Con lo cual obtenemos

$$\partial^{n+2}(\sigma\tau) = \sum_{j=1}^{m+1} q^{j(n-(n+1)+j)}\binom{n+2}{j}_q \mathcal{N}^{n+2-j}(\sigma)\mathcal{N}^{j}(\tau) = \sum_{j=0}^{n+2} q^{j(n-((n+2)-1)+j)}\binom{n+2}{j}_q \mathcal{N}^{n+2-j}(\sigma)\mathcal{N}^{j}(\tau)$$

Consideramos el caso $k > n+1$ y observemos el caso $k+1 \leq m+n+1$,

$$\partial^{k+1}(\sigma\tau) = \partial(\partial^{k}(\sigma\tau)) = \partial\left(\sum_{j=0}^{k} q^{j(n-(k-1)+j)}\binom{k}{j}_q \mathcal{N}^{k-j}(\sigma)\mathcal{N}^{j}(\tau)\right)$$

Observemos que solo para j tal que $k-n-1 \leq j \leq m+1$ se tienen sumando no nulos, asi que

$$\partial^{k+1}(\sigma\tau) = \partial\left(\sum_{j=k-n-1}^{m+1} q^{j(n-(k-1)+j)}\binom{k}{j}_q \mathcal{N}^{k-j}(\sigma)\mathcal{N}^{j}(\tau)\right)$$

$$= \binom{k}{k-n-1}_q \partial(\mathcal{N}^{n+1}(\sigma)\mathcal{N}^{k-n-1}(\tau)) + q^{k-n}\binom{k}{k-n}_q (\partial(\mathcal{N}^{n}(\sigma)\mathcal{N}^{k-n}(\tau))) + \sum_{j=k-n+1}^{m-1} q^{j(n-(k-1)+j)}\binom{k}{j}_q \partial(\mathcal{N}^{k-j}(\sigma)\mathcal{N}^{j}(\tau))$$

$$+q^{m(n-(k-1)+m)}\binom{k}{m}_q \partial(\mathcal{N}^{k-m}(\sigma)\mathcal{N}^{m}(\tau)) + q^{(m+1)(n-(k-1)+m+1)}\binom{k}{m+1}_q \partial(\mathcal{N}^{k-m-1}(\sigma)\mathcal{N}^{m+1}(\tau))$$

$$= \binom{k}{k-n-1}_q \overline{n+1}!\partial^{k-n}(\tau) + q^{k-n}\binom{k}{k-n}_q (\overline{n+1}!\partial^{k-n}(\tau) + q\partial^{n}(\sigma)\partial^{k-n+1}(\tau))$$

$$+ \sum_{j=k-n+1}^{m-1} q^{j(n-(k-1)+j)}\binom{k}{j}_q (\partial^{k-j+1}(\sigma)\partial^{j}(\tau) + q^{n-k+j+1}\partial^{k-j}(\sigma)\partial^{j+1}(\tau))$$

$$+q^{m(n-(k-1)+m)}\binom{k}{m}_q (\partial^{k-m+1}(\sigma)\partial^{m}(\tau) + q^{n-k+m+1}\overline{m+1}!\partial^{k-m}(\sigma)) + q^{(m+1)(n-(k-1)+m+1)}\binom{k}{m+1}_q \partial^{k-m}(\sigma)\overline{m+1}!$$

Consideramos los coeficientes para los términos $\partial^{k+1-u}(\sigma)\partial^{u}(\tau)$ con $u = k-n+1,\ldots,m$ y obtenemos

$$q^{u(n-(k-1)+u)}\binom{k}{u}_q + q^{(u-1)(n-(k-1)-(u-1))}\binom{k}{u-1}_q q^{n-k+u}$$

$$= q^{un-uk+u^2+u}\binom{k}{u}_q + q^{un-uk+u^2}\binom{k}{u-1}_q$$

$$= q^{u(n-k+u)}\left(\binom{k}{u-1}_q + q^{u}\binom{k}{u}_q\right)$$

$$= q^{u(n-k+u)}\binom{k+1}{u}_q$$

El coeficiente del término $\mathcal{N}^{n+1}(\sigma)\mathcal{N}^{k-n}(\tau)$ es

$$\binom{k}{k-n-1}_q + q^{k-n}\binom{k}{k-n}_q = \binom{k+1}{k-n}_q$$

El coeficiente de $\mathcal{N}^{k-m}(\sigma)\mathcal{N}^{m+1}$ es

$$q^{m(n-(k-1)+m)}\binom{k}{m}_q q^{n-k+m+1} + q^{(m+1)(n-(k-1)+m+1)}\binom{k}{m+1}_q$$

$$= q^{mn-mk+m^2+2m+n-k+1}\binom{k}{m}_q + q^{mn-mk+m^2+3m+n-k+2}$$

$$= q^{(m+1)(n-k+m+1)}\left(\binom{k}{m}_q + q^{m+1}\binom{k}{m+1}_q\right)$$

$$= q^{(m+1)(n-k+m+1)}\binom{k+1}{m+1}_q$$

De esta manera, tenemos que

$$\partial^{k+1}(\sigma\tau) = \sum_{j=k-n}^{m+1} q^{j(n-k+j)}\binom{k+1}{j}_q \mathcal{N}^{k+1-j}(\sigma)\mathcal{N}^{j}(\tau)$$

$$= \sum_{j=0}^{k+1} q^{j(n-k+j)}\binom{k+1}{j}_q \mathcal{N}^{k+1-j}(\sigma)\mathcal{N}^{j}(\tau)$$

Como se deseaba. Lo que prueba el teorema hasta el caso $0 < k < m+n+2$

4. Si $k \geq m+n+2$, el resultado es inmediato, ya que el lado derecho de la ecuación es cero por que excede la dimensión del simplice y al lado izquierdo cada sumando es cero pues siempre se supera la dimensión de alguno de los simplices, así ambos lados de la ecuación son cero.

$\square$

Como resultado del teorema anterior, podemos ver que el módulo N-diferencial de q-cadenas cumple una regla de Leibniz no ingenua.

Bibliografía

[1] BOTT, R. & LU T. *Differential Forms in Algebraic Topology.* Springer-Verlag. GMT **82**. (1982).

[2] BREDON, G. *Topology and Geometry.* Springer-Verlag. GTM **139** (1993).

[3] DIEUDONNE, J. *A History of Algebraic and Differential Topology. 1900 - 1960.* Birkhäuser. (1989).

[4] DOLD, A. *Lectures on Algebraic Topology.* Springer-Verlag. (1995).

[5] DUBOIS-VIOLÈTTE, M. *Generalized homologies for* $d^N = 0$ *and graded q-differential algebras. Secondary calculus and cohomological physics.* Contemp. Math. **219**,69-79 (1998).

[6] ERNST, T. *History of q-calculus and a new method.* http://citeseerx.ist.psu.edu (2001).

[7] KAPRANOV, M. *On the q-Analog of Homological Algebra*. Arxiv Math. AT. 9611005. (1996).

[8] LANG, S. *Algebra* Springer-Verlag. GTM **211** (2002).

[9] SAGAN, B. *The symmetric group*. Wadsworth & Brooks/Cole. (1991).

[10] SHARPE, C. *Differential Geometry*. Graduate Texts in Mathematics Vol. **166**. Springer-Verlag. New York-Heidelberg- Berlin (1996).