

Corepresentaciones de conjuntos parcialmente ordenados equipados de un parámetro

Claudio Rodríguez Beltrán

2 DE SEPTIEMBRE DE 2011



Corepresentaciones de conjuntos parcialmente ordenados equipados de un parámetro

Claudio Rodríguez Beltrán

*Trabajo de Tesis presentado a la Facultad de Ciencias de la Universidad Nacional de
Colombia como requisito parcial para optar al título de*
DOCTOR EN CIENCIAS MATEMÁTICAS

Director
Profesor Dr. Oleksandr Zavadskyy

UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA
FACULTAD DE CIENCIAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS
BOGOTÁ

Resumen

En este trabajo se introducen e investigan las corepresentaciones de posets equipados sobre una extensión cuadrática arbitraria de campos. Se enuncia y demuestra el criterio de un parámetro para posets equipados con respecto a corepresentaciones. Se presenta la lista de los posets equipados ciertos de un parámetro y una clasificación matricial completa de todas sus corepresentaciones indescomponibles. Se construyen los algoritmos de diferenciación $D\widehat{VII}$ y de completación para corepresentaciones de posets equipados así como se desarrollan algunos métodos especiales de reducción de corepresentaciones. También se establecen relaciones entre las dimensiones de las corepresentaciones indescomponibles y las raíces de la forma cuadrática de Tits.

Abstract

In this work, corepresentations of equipped posets over an arbitrary quadratic field extension are introduced and studied. The one parameter criterion for corepresentations is stated and proved. The list of sincere one parameter equipped posets is given as well as a complete matrix classification of all their indecomposable corepresentations. The algorithm of differentiation $D\widehat{VII}$ and completion for corepresentations of equipped posets are built, as well as some special methods of reductions of corepresentations are developed. Relations between dimensions of indecomposable corepresentations and roots of the Tits quadratic form are also established.

Tabla de contenido

1. Introducción	1
2. Representaciones y corepresentaciones de posets equipados	9
2.1. Representaciones de posets ordinarios	10
2.2. Los posets equipados	11
2.3. Representaciones de posets equipados	14
2.4. Corepresentaciones de posets equipados	17
2.5. Los posets equipados de tipo corepresentación finito	21
3. Formulación de los resultados principales	23
3.1. Los posets equipados de un parámetro	23
3.2. Relaciones con la forma cuadrática de Tits	26
4. Descripción de las técnicas utilizadas y desarrolladas	28

4.1. Notaciones y hechos básicos	29
4.2. El algoritmo de diferenciación D-I para posets ordinarios	32
4.3. La diferenciación $D-\widehat{VII}$ para posets equipados	36
4.4. La completación	41
5. Clasificación de las corepresentaciones de los posets equipados de un parámetro conteniendo a K_6 ó K_7	44
5.1. Notaciones	45
5.2. Los posets K_6 , A_{25} y la prueba del teorema C1	46
5.3. Corepresentaciones de los posets A_{28} , A_{29} , A_{33} , A_{34} y A_{45}	50
5.4. Corepresentaciones de los posets A_{38} , A_{39} , A_{41} y A_{46}	51
5.5. Posets con subconjuntos bien insertados de tipo K_6	56
5.6. Corepresentaciones del poset A_{42}	58
5.7. El poset K_7 y la prueba teorema C2	61
6. Clasificación de las corepresentaciones indescomponibles de los posets equipados de un parámetro conteniendo a K_8 ó K_9	67
6.1. Corepresentaciones del poset K_8 y la prueba del teorema C3	68
6.2. Corepresentaciones de los posets conteniendo K_8 y sus propiedades	75
6.3. Posets con subconjuntos bien insertados de tipo K_8	80
6.4. Corepresentaciones del poset K_9 y la prueba del teorema C4	82

7. Demostración de los teoremas A, B y D	87
7.1. Propiedades de subconjuntos críticos K_6 y K_8 bien insertados . . .	87
7.1.1. Demostración del teorema 5.7 concerniente a K_6	87
7.1.2. Demostración del teorema 6.8 concerniente a K_8	89
7.2. Demostración de los teoremas A, B y D	91
A. Los posets equipados de tipo finito	102
B. Los posets equipados críticos	103
C. Los posets ciertos	104
D. Dimensiones de las corepresentaciones indescomponibles	106
E. Dimensiones de las corepresentaciones de K_7 y K_9	109
BIBLIOGRAFÍA	111

Introducción

En la teoría moderna algebraica de representaciones se estudian representaciones de álgebras de dimensión finita, de carcajes (grafos orientados), de posets (conjuntos parcialmente ordenados), de ordenes (subanillos de álgebras especiales) y de otros objetos algebraicos (para ampliar esta perspectiva puede consultarse [1, 2, 11, 29, 36]).

En los años cuarenta, los trabajos de Brauer y Thrall conllevaron a formular dos conjeturas famosas denominadas Brauer-Thrall I y II sobre representaciones de álgebras de dimensión finita. Las demostraciones de ambas conjeturas fueron obtenidas entre los años 60 al 90 [3, 4, 8, 33], estimulando el estudio de representaciones de diversas estructuras algebraicas, entre ellas de vectroides (algunas categorías especiales de espacios vectoriales de dimensión finita) introducidas de hecho en [24], que tienen en algunos casos particulares importantes una interpretación concreta como representaciones de posets.

En conexión con estas conjeturas, Nazarova y Roiter introdujeron las representaciones matriciales de posets, que obtuvieron aplicaciones esenciales en varias partes del álgebra moderna, en particular en teoría de representaciones de álgebras de dimensión finita. Luego, Gabriel introdujo las representaciones de carcajes [9], estudió las representaciones de algunos posets particulares y proporcionó una interpretación de representaciones de posets en términos invariantes (de espacios lineales), véase [10].

Uno de los principales problemas que se consideran en la teoría de representaciones de posets son de clasificación de representaciones indescomponibles salvo isomorfismo. Todos los posets se dividen en dos clases disjuntas y se denominan salvajes o mansos según donde estén. A grosso modo, un poset es del primer tipo si la clasificación de sus representaciones indescomponibles se reduce al problema clásico no resuelto de la descripción de pares de matrices cuadradas del mismo tamaño por transformaciones de semejanza simultánea. Por otro lado, los posets mansos se pueden caracterizar como tales que (en el caso de representaciones sobre campos infinitos) para cada dimensión dada, se tiene un número finito de series estándar que cubren casi todas las representaciones indescomponibles de ésta dimensión.

Entre los posets de tipo manso se encuentran los posets de crecimiento finito e infinito. Los del primer tipo son aquellos tales que la cantidad minimal de series que describen casi todas las representaciones indescomponibles de cada dimensión dada tienen una cota superior, a este tipo de posets pertenecen los de tipo representación finito, de un (dos, o más generalmente, m) parámetro(s), que respectivamente tienen, salvo isomorfismo, un número finito de representaciones indescomponibles o a lo sumo una (dos o m) serie(s) en total.

Con el propósito de resolver estos problemas, se desarrollaron el algoritmo de diferenciación de posets ordinarios y de sus representaciones con respecto a un punto maximal [22], con el uso del cual Kleiner obtuvo el criterio de tipo representación finito [15] y también describió todas sus representaciones indescomponibles [14].

Luego, Nazarova [21] obtuvo el criterio de tipo representación manso y Otravskaya [28] el criterio de un parámetro, para posets ordinarios. A finales de los años 70, Zavadskij [39] desarrolló el algoritmo de diferenciación de posets con respecto a una pareja conveniente de puntos (que generaliza el algoritmo de Nazarova-Roiter), con el cual se probó el criterio de crecimiento finito [48].

Por otra parte, los posets mansos de crecimiento infinito fueron estudiados con base en la solución de un problema matricial importante [23] llamado posteriormente “el problema de tipo Gel’fand ”(ya que tuvo sus raíces en investigaciones anteriores de I.M. Gel’fand [12]).

Luego de este prolijo desarrollo de la teoría de representaciones de posets ordinarios, las investigaciones se dirigieron a la clasificación de representaciones de posets con estructuras adicionales, como por ejemplo de posets con involución [25], con una relación de equivalencia [6, 25, 27, 40], diádicos [26, 34], triádicos [5], etc.

A finales de los años 90, Zabarilo y Zavadskij [37, 38] introdujeron los posets equipados (que distinguen los elementos del conjunto en débiles y fuertes, al igual que las relaciones entre ellos) y comenzaron su estudio con el fin de explorar algunos problemas matriciales categóricos schurianos de tipo mixto sobre el par de campos (\mathbb{R}, \mathbb{C}) . Ellos encontraron un criterio para determinar que posets equipados son de un parámetro y obtuvieron la lista completa de sus representaciones indescomponibles. Este fue el primer estudio sistemático sobre representaciones de posets equipados de tipo infinito.

Anotamos que a comienzos de los años 90, Klemp y Simson [16] habían introducido los posets valuados y encontrado un criterio de tipo representación finito para vectroides generales.

Después del año 2000, Zavadskij ha continuado el estudio de representaciones de posets equipados, en particular obtuvo los criterios de tipo representación manso [41] y crecimiento finito [42] sobre (\mathbb{R}, \mathbb{C}) para posets equipados, así como la respectiva lista de los posets equipados ciertos de crecimiento finito sobre el mismo par de campos. Recientemente, los conceptos de los posets equipados y sus representaciones fueron generalizados por él en [46].

En paralelo al estudio de representaciones de posets equipados, existe una dirección importante e interesante de la teoría de representaciones de estructuras algebraicas. Esta consiste en investigar otro problema de tipo mixto sobre extensiones cuadráticas de campos $\mathbb{F} \subset \mathbb{G}$, que es en algún sentido intuitivo dual al problema anterior, pero hasta ahora no tiene ninguna reducción formal directa a ella. El problema es sobre corepresentaciones¹ de posets equipados, relacionada estrechamente con el problema de representaciones, así como con problemas planos de tipo mixto sobre la pareja (\mathbb{F}, \mathbb{G}) .

Es actual entonces, desarrollar una teoría sistemática de corepresentaciones y algoritmos de reducción de ellos en el caso de una extensión cuadrática arbitraria de campos $\mathbb{F} \subset \mathbb{G}$. Naturalmente (teniendo en cuenta los resultados de [16]) se deben considerar los posets equipados de tipo corepresentación infinito, en primer lugar de un parámetro. Como el caso de representaciones lo demuestra, el problema de clasificación de corepresentaciones de posets equipados de un parámetro es un problema básico y bastante profundo entre problemas de tipo manso.

De acuerdo con el desarrollo lógico de la teoría de representaciones, es necesario e indispensable obtener el criterio que permita decidir cuando un poset equipado es de un parámetro con respecto a sus corepresentaciones, luego obtener una clasificación de todas las corepresentaciones indescomponibles de los posets equipados de un parámetro (incluso las series correspondientes) así como una lista de los posets ciertos.

Con el fin de lograr esos objetivos, en el presente trabajo se utilizan tanto métodos de algebra lineal y combinatorial de la teoría clásica de representaciones de posets ordinarios, como los métodos nuevos, en particular la técnica de diferenciación para problemas matriciales de tipo mixto sobre extensiones

¹Algunas investigaciones preliminares de este tipo fueron ejecutadas en [30] en el caso de la pareja (\mathbb{R}, \mathbb{C}) .

cuadráticas $\mathbb{F} \subset \mathbb{G}$, desarrollada en [32] y algunos métodos especiales de reducción junto con propiedades estructurales de corepresentaciones de unos posets críticos y sus extensiones, desarrollados en [31].

Los resultados principales de la tesis son los siguientes:

- Introducción (en lenguaje matricial e invariante) de las corepresentaciones de posets equipados sobre una extensión cuadrática arbitraria de campos $\mathbb{F} \subset \mathbb{G}$ (los resultados listados en adelante también han sido obtenidos sobre la pareja (\mathbb{F}, \mathbb{G})).
- Construcción del algoritmo de diferenciación $D\widehat{\text{VII}}$ y de la completación para corepresentaciones.
- Desarrollo de algunos métodos especiales de reducción de corepresentaciones.
- Propiedades estructurales de corepresentaciones de los posets críticos K_6 y K_8 y de otros posets que los contienen.
- Obtención del criterio de un parámetro para corepresentaciones de los posets equipados.
- Clasificación matricial completa de todas las corepresentaciones indescomponibles de los posets equipados de un parámetro.
- Descripción de los posets equipados ciertos de un parámetro.
- Establecimiento de relaciones entre las dimensiones de corepresentaciones indescomponibles y las raíces de la forma de Tits asociada.

Los dos primeros resultados fueron obtenidos junto con el profesor Zavadskij, los restantes son propios del autor.

Además, en esta investigación se obtuvieron nexos con la teoría de formas canónicas de operadores semilineales y pseudolineales [7, 35] (en la descripción de las series de los posets críticos de un parámetro).

El contenido del trabajo es el siguiente.

En el capítulo 2 se presentan la información básica concerniente a representaciones de posets ordinarios (sección 2.1), a representaciones y corepresentaciones de posets equipados (secciones 2.2 - 2.4), a la clasificación de corepresentaciones de posets equipados de tipo finito (sección 2.5).

En el capítulo 3 se presentan (sin demostración) los resultados principales de la investigación. En la sección 3.1, el criterio de un parámetro para posets equipados con respecto a corepresentaciones (Teorema A), la lista de de los posets equipados ciertos de un parámetro (Teorema B) y la clasificación de las corepresentaciones indescomponibles de los posets equipados críticos K_6, \dots, K_9 (Teoremas C1 a C4). Luego, en la sección 3.2, se establecen relaciones entre las dimensiones de las corepresentaciones indescomponibles de los posets equipados de un parámetro y las raíces de la forma cuadrática de Tits asociada (Teorema D).

En el capítulo 4 se describen las técnicas desarrolladas y utilizadas. En la sección 4.1 se presentan dos resultados básicos pero esenciales, uno sobre posets escindibles y otro sobre la clasificación de corepresentaciones de una cadena débil. En la sección 4.2 se recuerda el algoritmo de diferenciación D-I para representaciones de posets ordinarios y algunas de sus propiedades. En la sección 4.3 se construye el algoritmo de diferenciación D- $\widehat{\text{VII}}$ para corepresentaciones de posets equipados y se establecen sus propiedades más importantes. En la sección 4.4 se encuentran consideraciones análogas para el algoritmo de completación.

En el capítulo 5 se obtiene la clasificación de las corepresentaciones indescomponibles de los posets equipados ciertos que contienen único poset crítico K_6

ó K_7 . Las notaciones necesarias están dadas en la sección 5.1. En la sección 5.2 se presenta la clasificación de las corepresentaciones de los posets equipados K_6 y A_{25} que demuestra en particular el teorema C1. En las secciones 5.3, 5.4 y 5.6 se obtiene la clasificación de las corepresentaciones de los posets equipados ciertos de un parámetro que contienen al poset K_6 . En la sección 5.5 se enuncian (sin demostración) dos propiedades estructurales sobre conjuntos bien insertados conteniendo al poset K_6 . Finalmente en la sección 5.7 se obtiene la clasificación de las corepresentaciones del poset crítico K_7 (demostración del teorema C2).

El capítulo 6 tiene una estructura análoga al anterior. En la sección 6.1 se obtiene la clasificación de las corepresentaciones indescomponibles del poset K_8 (demostración del teorema C3) y de los posets equipados ciertos de un parámetro que contienen a K_8 (sección 6.2). Luego, se enuncian (sin demostración) dos propiedades estructurales para el caso del poset crítico K_8 (sección 6.3). Finalmente, en la sección 6.4 se encuentra la clasificación de las corepresentaciones del poset K_9 (demostración del teorema C4).

En el capítulo 7 se describen propiedades estructurales de posets equipados con subconjuntos bien insertados de tipo K_6 y K_8 (sección 7.1) así como la demostración del criterio de un parámetro (Teorema A), la obtención de la lista de los posets equipados ciertos de un parámetro (Teorema B) y el establecimiento de relaciones entre las dimensiones de las corepresentaciones indescomponibles y las raíces de la forma cuadrática de Tits (Teorema D).

Los apéndices A,...,E contienen el material con respecto a corepresentaciones de los posets equipados de un parámetro.

En el apéndice A se presenta la lista de los posets equipados de tipo finito (denotados como F_{13}, \dots, F_{18}) y la clasificación de sus corepresentaciones indescomponibles.

En el apéndice B se listan los posets equipados críticos de un parámetro (tanto los posets críticos de Kleiner K_1, \dots, K_5 como los posets críticos no trivialmente equipados K_6, \dots, K_9).

En los apéndices C y D se listan todos los posets equipados ciertos de un parámetro y las dimensiones de sus corepresentaciones indescomponibles.

El apéndice E contiene todas las dimensiones de las corepresentaciones indescomponibles de los posets equipados críticos K_7 y K_9 con valor no nulo de la forma cuadrática de Tits.

Los resultados de la tesis fueron parcialmente publicados en [31, 32], un artículo adicional está en preparación. Los resultados fueron presentados por el autor (con ponencia) en los siguientes eventos nacionales e internacionales:

- XV Congreso Colombiano de Matemáticas. Bogotá, Colombia, 2005.
- XVII Coloquio Latinoamericano de Álgebra. Rio Negro, Colombia, 2007.
- ALTENCOA-3. Bucaramanga, Colombia, 2008.
- ICRA XIII (International Conference on Representations of Algebras). São Paulo, Brazil, 2008.
- XVIII Congreso Colombiano de Matemáticas. Bucaramanga, Colombia, 2011.

Capítulo 2

Representaciones y corepresentaciones de posets equipados sobre una extensión cuadrática de campos arbitraria

En este capítulo se presentan las definiciones básicas y necesarias para comprender los resultados principales del trabajo. El orden de las secciones se asemeja al desarrollo histórico de la teoría de representaciones de posets.

En la sección 2.1 se recuerda la definición de una representación de un poset ordinario \mathcal{P} y de la categoría de representaciones $\text{rep } \mathcal{P}$ ([1, 11, 29, 36] ofrecen una versión más profunda y detallada de este tema). En la sección 2.2 se presenta la definición de poset equipado, notaciones y ejemplos. La sección 2.3 trata sobre las representaciones de posets equipados sobre una extensión cuadrática arbitraria de campos $\mathbb{F} \subset \mathbb{G}$ (concebida originalmente en [37, 38] para la pareja clásica (\mathbb{R}, \mathbb{C})) y la categoría de representaciones. Los resultados de la sección 2.4 fueron obtenidos por el autor en conjunto con el profesor Zavadskij [32], en esta se introducen las corepresentaciones de posets equipados sobre la pareja de campos (\mathbb{F}, \mathbb{G}) , la categoría de corepresentaciones de un poset equipado y otros hechos relacionados. En la sección 2.5 se recuerda el criterio de tipo finito para posets equipados con respecto a corepresentaciones.

2.1. Representaciones de posets ordinarios

El cardinal de un conjunto X se denota por $|X|$. En algunas ocasiones un conjunto unitario $\{x\}$ se escribirá simplemente x , siempre que sea claro que es un conjunto. Un poset¹ (\mathcal{P}, \leq) , escrito más brevemente \mathcal{P} , es un conjunto parcialmente ordenado. En este trabajo todos los posets son finitos. Es usual describir un poset \mathcal{P} mediante su diagrama de Hasse: si $x < y$ y no existe $x < z < y$ entonces x se une a y mediante un segmento ascendente.

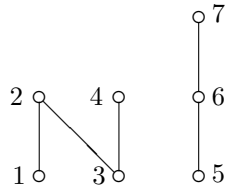


Figura 2.1. Descripción mediante un diagrama de Hasse de un poset

Dados dos subconjuntos $X, Y \subset \mathcal{P}$, $X \leq Y$ significa $x \leq y$ para todo $x \in X$ y $y \in Y$. Denotamos por $\min X$ (resp. $\max X$) el conjunto de todos los puntos minimales (resp. maximales) de $X \subset \mathcal{P}$. Un subconjunto de \mathcal{P} es una *cadena* (resp. *anticadena*) si todos sus puntos son comparables (resp. incomparables) dos a dos, en particular, una *díada* (resp. *triada*) es una anti-cadena de dos (resp. tres) puntos. La *longitud* de una cadena es el número de puntos que la componen.

Ejemplo 2.1. Sea \mathcal{P} el poset dado por el diagrama de la figura 2.1. Entonces sus relaciones estrictas son: $1 < 2 > 3 < 4$; $5 < 6 < 7$. En particular, $\{1, 3\} < 2$; $3 < \{2, 4\}$.

Sea \mathcal{P} un poset y K un campo arbitrario, una *representación* de \mathcal{P} sobre K es una colección $U = (U_0, U_x : x \in \mathcal{P})$ donde, U_0 es un K -espacio lineal de dimensión finita y cada U_x es un K -subespacio de U_0 ($x \in \mathcal{P}$) con la condición

¹Del inglés partially ordered set

$U_x \subset U_y$ siempre que $x \leq y$ en \mathcal{P} . Un morfismo $U \xrightarrow{\varphi} V$ de representaciones es una transformación K -lineal $\varphi : U_0 \rightarrow V_0$ con $\varphi(U_x) \subset V_x$ ($x \in \mathcal{P}$), si la aplicación φ es un isomorfismo y $\varphi(U_x) = V_x$ ($x \in \mathcal{P}$) las dos representaciones son *isomorfas*.

La *categoría de representaciones* de un poset \mathcal{P} sobre K es $\text{rep}_K(\mathcal{P}, \leq)$, se denota brevemente por $\text{rep } \mathcal{P}$ y sus objetos y morfismos son los mencionados anteriormente.

La *suma directa* de dos representaciones $U, V \in \text{rep } \mathcal{P}$ es la representación $U \oplus V = (U_0 \oplus V_0, U_x \oplus V_x : x \in \mathcal{P})$. Una representación W es *indescomponible* si $W \simeq U \oplus V$ implica que $U = 0$ o $V = 0$, en otro caso se dice que W es *descomponible*.

La categoría $\text{rep } \mathcal{P}$ es una categoría K -aditiva de Krull-Schmidt, esto implica que cada objeto $U \in \text{rep } \mathcal{P}$ se expresa de manera única como suma directa de objetos indescomponibles (salvo permutación e isomorfismo), vea el teorema 1.2.2 [1]. Entonces, un problema importante en la teoría de representaciones de posets consiste en clasificar los objetos indescomponibles en la categoría $\text{rep } \mathcal{P}$ salvo isomorfismo.

Los resultados más importantes de la teoría de representaciones de posets ordinarios (desarrollada principalmente por la escuela de Kiev durante 1970-1990) pueden consultarse por ejemplo en los libros [11, 29, 36] y en los artículos [10, 13, 15, 14, 21, 22, 25, 28, 39, 47]. Recordamos que el objeto de estudio en este trabajo son las representaciones y corepresentaciones de posets equipados.

2.2. Los posets equipados

Definición 2.2. Un *poset equipado* es una tripla $(\mathcal{P}, \leq, \triangleleft)$ donde (\mathcal{P}, \leq) es un poset con una relación binaria adicional \triangleleft sobre \mathcal{P} llamada *fuerte* tal que la

siguiente condición se satisface

$$x \leq y \triangleleft z \quad \text{o} \quad x \triangleleft y \leq z \quad \text{implica} \quad x \triangleleft z, \quad (2.1)$$

es decir que una composición de una relación fuerte \triangleleft con cualquier otra relación es fuerte.

Escribimos $x \prec y$ si $x \leq y$ y $x \not\triangleleft y$, y decimos que \prec es la *relación débil*. En general \prec y \triangleleft no son ordenes parciales sobre \mathcal{P} (podrían ser no reflexivas).

Nota 1. De (2.1) se sigue que para cualquier relación débil $x \prec y$, tanto x como y son débiles, más aún, para cualquier punto $x \leq t \leq y$ se tiene que $x \prec t \prec y$.

Por brevedad, de ahora en adelante escribiremos simplemente \mathcal{P} en vez de $(\mathcal{P}, \leq, \triangleleft)$.

Un punto $x \in \mathcal{P}$ es llamado *fuerte* (resp. *débil*) si $x \triangleleft x$ (resp. $x \prec x$), y en los diagramas será denotado por \circ (resp. \otimes). Por \mathcal{P}° (resp. \mathcal{P}^\otimes) denotaremos el conjunto de todos los puntos fuertes (resp. débiles) de \mathcal{P} . Si $\mathcal{P} = \mathcal{P}^\circ$, el equipamiento es *trivial* y el poset \mathcal{P} es *ordinario*. Cada subconjunto $X \subset \mathcal{P}$ que consiste únicamente de puntos fuertes se llama *ordinario*.

Escribimos $x \parallel y$ si los puntos son incomparables. Para cualquier subconjunto $X \subset \mathcal{P}$ denotamos

$$N(X) = \{a \in \mathcal{P} : a \parallel x \text{ para todo } x \in X\}. \quad (2.2)$$

Dado algunos subconjuntos $X, X_1, \dots, X_n \subset \mathcal{P}$ (los cuales pueden tener elementos comparables en diferentes subconjuntos), denotamos su union disjunta por $X_1 + \dots + X_n$ y la llamamos la *suma* de X_1, \dots, X_n .

Para un punto $x \in \mathcal{P}$, denotamos $x^\vee = \{y : x \leq y\}$, $x^\nabla = \{y : x \triangleleft y\}$ y $x^\sphericalcap = \{y : x \prec y\}$. Observe que x^\vee es un cono superior mientras que x^∇ y x^\sphericalcap no lo son en general. Los subconjuntos $x_\wedge, x_\Delta, x_\lambda$ se definen dualmente.

Para un subconjunto $X \subset \mathcal{P}$, designamos $X^\vee = \bigcup_{x \in X} x^\vee$, $X^\nabla = \bigcup_{x \in X} x^\nabla$, $X^\gamma = \bigcup_{x \in X} x^\gamma$ y $X^\blacktriangledown = X^\vee \setminus X$, de manera dual se definen los conjuntos X_\wedge , X_Δ , X_λ y X_\blacktriangle . Decimos que alguna relación xRy entre dos puntos es *estricta* si $x \neq y$. Dados los subconjuntos $X, Y \subset \mathcal{P}$, $X \prec Y$ significa que $x \prec y$ para todo $x \in X$ y $y \in Y$, $X \triangleleft Y$ se define análogamente.

Una *guirnalda* es una suma arbitraria de conjuntos unitarios y díadas. Una cadena $C = \{a_1 \prec a_2 \prec \dots \prec a_n\}$ es llamada *débil*, si adicionalmente $a_1 \prec a_n$ entonces esta es *completamente débil*. Un subconjunto arbitrario $X \subset \mathcal{P}$ se dice *completamente débil* si todos sus puntos y posibles relaciones entre ellos son débiles.

El *ancho generalizado* $w(x)$ de un punto $x \in \mathcal{P}$ es 1 si x es un punto fuerte y 2 si es un punto débil. Si $X \subset \mathcal{P}$ es una anticadena, su *ancho generalizado* se define como la suma del ancho generalizado de todos los puntos que la componen y se denota por $w(X) = \sum_{x \in X} w(x)$. El *ancho generalizado* de un poset \mathcal{P} es el máximo de los anchos generalizados de sus anticadenas, y se denota por $w(\mathcal{P})$.

Por un *subposet* \mathcal{Q} de un poset equipado \mathcal{P} entendemos un subconjunto equipado completo $\mathcal{Q} \subset \mathcal{P}$, es decir que para cualquier par de puntos $x, y \in \mathcal{Q}$ se tiene $x \prec y$ ($x \triangleleft y$) en \mathcal{Q} si y solo si $x \prec y$ ($x \triangleleft y$) en \mathcal{P} .

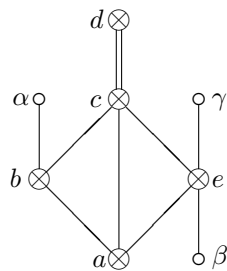


Figura 2.2. Ejemplo de un poset equipado

Gráficamente cada poset equipado es presentado por su *diagrama*, el cual es obtenido del diagrama de Hasse ordinario del poset \mathcal{P} distinguiendo sus puntos fuertes y débiles, y adjuntando líneas adicionales simbolizando aquellas relacio-

nes estrictamente fuertes entre puntos débiles los cuales no son consecuencias de sus otras relaciones.

Ejemplo 2.3. Sea \mathcal{P} el poset equipado dado por el diagrama de la figura 2.2. Entonces, entre las relaciones estrictas, las únicas débiles son: $a \prec \{b, e\} \prec c$, por lo tanto todas las restantes son fuertes, a saber, $a \triangleleft c$; $\{a, b, c, e, \beta\} \triangleleft d$; $\{a, b\} \triangleleft \alpha$; $\{a, e, \beta\} \triangleleft \gamma$; $\beta \triangleleft \{c, d, e, \gamma\}$. A lo largo de todo el trabajo se utilizarán letras del alfabeto latino (resp. griego) para referirse a puntos débiles (resp. fuertes).

2.3. Representaciones de posets equipados

De ahora en adelante, en todo el texto, $\mathbb{F} \subset \mathbb{F}(\xi) = \mathbb{G}$ denotará una extensión cuadrática de campos arbitraria (en situaciones especiales se encuentran algunas restricciones que serán advertidas), es claro que cada x en \mathbb{G} es expresado de forma única $x = a + \xi b$ ($a, b \in \mathbb{F}$) donde $a = \text{Re}(x)$ es la *parte real* de x y $b = \text{Im}(x)$ la *parte imaginaria* de x .

Cada poset equipado \mathcal{P} define un problema matricial de tipo mixto sobre la pareja (\mathbb{F}, \mathbb{G}) de forma natural. Considere una matriz rectangular M separada en franjas verticales M_x , $x \in \mathcal{P}$, con M_x estando sobre \mathbb{F} (resp. sobre \mathbb{G}) si el punto x es fuerte (resp. débil):

$$M = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} & x & & y & \\ \hline \dots & M_x & \dots & M_y & \dots \end{array} \end{array} \quad (2.3)$$

Las matrices como M , particionadas en franjas verticales, son llamadas *matrices de representación* de \mathcal{P} sobre (\mathbb{F}, \mathbb{G}) y sus *transformaciones admisibles* son las siguientes:

- (a) Transformaciones \mathbb{F} -elementales de filas sobre toda la matriz M ;
- (b) Transformaciones \mathbb{F} -elementales (resp. \mathbb{G} -elementales) de columnas de una franja M_x si el punto x es fuerte (resp. débil);
- (c) En el caso de una relación débil $x \prec y$, adiciones de columnas de la franja M_x a las columnas de la franja M_y con coeficientes en \mathbb{G} ;
- (d) En el caso de una relación fuerte $x \triangleleft y$, adiciones de columnas tanto de la parte real e imaginaria de la franja M_x (de forma independiente), a la parte real e imaginaria (en cualquier combinación) de las columnas de la franja M_y con coeficientes en \mathbb{F} (asumiendo que, para y fuerte, no hay adiciones a la parte imaginaria nula de M_y).

Dos representaciones se llaman *equivalentes* o *isomorfas* si ellas pueden ser llevadas una en la otra con ayuda de las transformaciones admisibles. El correspondiente *problema matricial* de tipo mixto sobre la pareja (\mathbb{F}, \mathbb{G}) consiste en clasificar matrices indescomponibles en el sentido natural, salvo equivalencia.

Uno puede dar otra definición natural de representaciones, en términos de espacios vectoriales sobre \mathbb{F} y \mathbb{G} . Identificando la suma directa U_0^2 de dos copias de un \mathbb{F} -espacio U_0 con un \mathbb{G} -espacio $U_0^2 = U_0 \oplus \xi U_0$, observe que, para cada \mathbb{G} -subespacio $X \subset U_0^2$, su parte real e imaginaria coincide $\text{Re } X = \text{Im } X$. Entonces X está contenido en su \mathbb{F} -cápsula $\mathbb{F}(X) = (\text{Re } X)^2$, la cual es un \mathbb{G} -subespacio en U_0^2 .

Un \mathbb{G} -subespacio $X \subset U_0^2$ es llamado *fuerte* si $\mathbb{F}(X) = X$, o equivalentemente, si $X = Y^2$ para algún subespacio real Y .

Una *representación* de un poset equipado \mathcal{P} sobre la pareja (\mathbb{F}, \mathbb{G}) es cualquier colección de la forma

$$U = (U_0, U_x : x \in \mathcal{P}) \tag{2.4}$$

donde U_0 es un \mathbb{F} -espacio finito dimensional y U_x \mathbb{G} -subespacios en U_0^2 tales que las siguientes condiciones se satisfacen

$$\begin{aligned} x \leq y &\implies U_x \subset U_y, \\ x \triangleleft y &\implies \mathbb{F}(U_x) \subset U_y. \end{aligned} \tag{2.5}$$

En particular, si un punto x es fuerte, entonces el correspondiente subespacio $U_x = \mathbb{F}(U_x)$ es fuerte.

Las representaciones son los objetos de la categoría $\text{rep}_{(\mathbb{F}, \mathbb{G})}(\mathcal{P}, \leq, \triangleleft)$ (o de forma corta $\text{rep } \mathcal{P}$), los morfismos $U \xrightarrow{\varphi} V$ son aplicaciones \mathbb{F} -lineales $\varphi : U_0 \rightarrow V_0$ tales que $\varphi^2(U_x) \subset V_x$ para cada $x \in \mathcal{P}$. Dos representaciones U, V son *isomorfas* ($U \simeq V$) si y solo si para algún \mathbb{F} -isomorfismo $\varphi : U_0 \rightarrow V_0$ se tiene $\varphi^2(U_x) = V_x$ para todo x .

El problema descrito ya fue investigado en [38, 42, 41] para la pareja de campos (\mathbb{R}, \mathbb{C}) , allí se encuentran descritos los criterios para posets equipados de un parámetro, mansos y de crecimiento finito respectivamente, el criterio de tipo representación finito para una pareja arbitraria (\mathbb{F}, \mathbb{G}) se sigue de un resultado reciente de [16] sobre categorías de espacios vectoriales schurianos.

El principal propósito de esta tesis de Doctorado es estudiar otro problema matricial de tipo mixto sobre la pareja (\mathbb{F}, \mathbb{G}) , el cual también se define para un poset equipado \mathcal{P} y que es en algún sentido dual al mencionado anteriormente. Más aún, en esta investigación se han trabajado dichos problemas con técnicas similares. Sin embargo, no es conocido aún alguna construcción formal que reduzca un problema en el otro.

En este trabajo se estudia el nuevo problema en base a la experiencia del antiguo. Para evitar confusiones en la terminología se ha adjuntado la partícula *co* para algunos términos relacionados con el nuevo problema, se dirá por ejemplo coproblema, corepresentation, etc.

2.4. Corepresentaciones de posets equipados

Considere una matriz rectangular M sobre \mathbb{G} separada en franjas verticales M_x , $x \in \mathcal{P}$ con la misma forma que en (2.3). Las matrices M particionadas de esa forma son llamadas *corepresentaciones matriciales* de \mathcal{P} sobre (\mathbb{F}, \mathbb{G}) . Las *transformaciones admisibles* sobre M son:

- (a') Transformaciones \mathbb{G} -elementales de filas de toda la matriz M ;
- (b') Transformaciones \mathbb{G} -elementales (\mathbb{F} -elementales) de columnas de una franja M_x si el punto x es fuerte (resp. débil);
- (c') En el caso de una relación fuerte (resp. débil) $x \triangleleft y$ ($x \prec y$), adiciones de columna de la franja M_x a las columnas de la franja M_y con coeficientes en \mathbb{G} (\mathbb{F}).

A cada corepresentación matricial M es asociado un *vector dimension* $d = \dim M = (d_0, d_x : x \in \mathcal{P})$ donde d_0 (resp. d_x) es el numero de filas en M (resp. de columnas en M_x). Para un subconjunto $X \subset \mathcal{P}$ y una corepresentación matricial M , denotamos $M_X = \bigcup_{x \in X} M_x$ como la submatriz formada por las franjas M_x con $x \in \mathcal{P}$.

Dos corepresentaciones son *equivalentes* o *isomorfas* si ellas pueden ser llevadas cada una en la otra con ayuda de las transformaciones admisibles (a') – (c'). El correspondiente *coproblema matricial* de tipo mixto sobre la pareja (\mathbb{F}, \mathbb{G}) consiste en clasificar las *corepresentaciones indescomponibles* en el sentido matricial, salvo equivalencia. En esta situación también es posible dar una interpretación invariante en términos de \mathbb{F} -subespacios y \mathbb{G} -subespacios.

Para cualquier \mathbb{F} -subespacio U de algún \mathbb{G} -espacio V , denotamos por \tilde{U} y \underline{U} la \mathbb{G} -cápsula y \mathbb{G} -cocápsula de U respectivamente y se define como sigue

$$\tilde{U} = \bigcap_{U \subset W} W, \quad \underline{U} = \sum_{W \subset U} W,$$

donde W son \mathbb{G} -subespacios de V . Es claro que \tilde{U} (resp. \underline{U}) es el \mathbb{G} -subespacio minimal (resp. maximal) de V conteniendo a U (contenido en U). Más aún, uno puede considerar \tilde{U} como el subespacio \mathbb{G} -generado de U es decir, $\tilde{U} = \mathbb{G}U$. Cuando U en si mismo es un \mathbb{G} -subespacio entonces $\tilde{U} = \underline{U} = U$ y se dice \mathbb{G} -fuerte o fuerte.

Definición 2.4. Una *corepresentación* de un poset equipado \mathcal{P} sobre la pareja (\mathbb{F}, \mathbb{G}) es una colección de la forma $U = (U_0, U_x : x \in \mathcal{P})$ donde U_0 es un \mathbb{G} -espacio finito dimensional conteniendo \mathbb{F} -subespacios U_x tales que

$$\begin{aligned} x \leq y &\implies U_x \subset U_y, \\ x \triangleleft y &\implies \tilde{U}_x \subset U_y. \end{aligned} \tag{2.6}$$

Observe que si $x \in \mathcal{P}^\circ$ entonces U_x es un subespacio fuerte.

La *dimension* de U es un vector $d = \underline{\dim} U = (d_0, d_x : x \in \mathcal{P})$ con $d_0 = \dim_{\mathbb{G}} U_0$ y $d_x = \dim_{\mathbb{G}} U_x / \underline{U}_x$ (resp. $d_x = \dim_{\mathbb{F}} U_x / \underline{U}_x$) para cada punto x fuerte (resp. débil), donde

$$\underline{U}_x = \sum_{\substack{y \triangleleft x \\ y \neq x}} U_y + \sum_{\substack{y \triangleleft x \\ y \neq x}} \tilde{U}_y$$

es el *subespacio radical* de U_x . Una corepresentación U de \mathcal{P} con vector dimensión d se llama *trivial* si $d_0 = 1$.

Definición 2.5. La *categoría de corepresentaciones* de un poset equipado \mathcal{P} sobre la pareja (\mathbb{F}, \mathbb{G}) se denota por $\text{corep}_{(\mathbb{F}, \mathbb{G})}(\mathcal{P}, \leq, \triangleleft)$, escrita brevemente $\text{corep } \mathcal{P}$, donde los objetos son las corepresentaciones de \mathcal{P} y los morfismos $U \xrightarrow{\varphi} V$ aplicaciones \mathbb{G} -lineales $\varphi : U_0 \rightarrow V_0$ tales que $\varphi(U_x) \subset V_x$ para cada $x \in \mathcal{P}$.

Las corepresentaciones U, V son *isomorfas* si y solo si existe algún \mathbb{G} -isomorfismo $\varphi : U_0 \rightarrow V_0$ tal que $\varphi(U_x) = V_x$ para todo x .

La *suma directa* de dos corepresentaciones U y V de un poset equipado \mathcal{P} es la corepresentación

$$U \oplus V = (U_0 \oplus V_0, U_x \oplus V_x : x \in \mathcal{P}).$$

Una corepresentación U es *descomponible* si hay una descomposición de espacios vectoriales $U_0 = V_0 \oplus W_0$ tal que $U_x = (V_0 \cap U_x) \oplus (W_0 \cap U_x)$ para cada x y tanto V_0 como W_0 \mathbb{G} -espacios no nulos. Una corepresentación U es *indescomponible* si $0 = (0, 0, \dots, 0)$ y U son los únicos sumandos directos de U . Obviamente la categoría $\text{corep } \mathcal{P}$ es \mathbb{F} -aditiva ya que $\text{Hom}(U, V)$ es \mathbb{F} -espacio. Además, $\text{corep } \mathcal{P}$ es una categoría de Krull-Schmidt, esto puede ser establecido análogamente al caso de los posets ordinarios (compárese con [11, 29, 36]).

Denotamos por $\text{Ind}_{(\mathbb{F}, \mathbb{G})} \mathcal{P}$, o brevemente $\text{Ind } \mathcal{P}$, a un conjunto completo de corepresentaciones indescomponibles no isomorfas dos a dos de \mathcal{P} sobre la pareja (\mathbb{F}, \mathbb{G}) . Si escribimos $\text{Ind } \mathcal{P} \setminus X$, para alguna colección de corepresentaciones de X , siempre se supondrá que $X \subset \text{Ind } \mathcal{P}$. La clasificación de objetos en $\text{Ind } \mathcal{P}$ corresponde precisamente al coproblema matricial descrito anteriormente.

Más precisamente, si M es una corepresentación matricial de \mathcal{P} con $\underline{\dim} M = (d_0, d_x : x \in \mathcal{P})$, uno puede considerar una base e_1, \dots, e_{d_0} de algún \mathbb{G} -espacio U_0 de dimensión d_0 e identificar cada columna $(\lambda_1, \dots, \lambda_{d_0})^T$ de M con el elemento $u = \lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_{d_0} e_{d_0} \in U_0$. Dado cualquier conjunto de columnas $X \subset M$, denotamos por $\mathbb{F}[X]$ y $\mathbb{G}[X]$ el espacio \mathbb{F} -generado y \mathbb{G} -generado de X en U_0 respectivamente. Entonces, uno puede formar una corepresentación $U_M = (U_0, U_x : x \in \mathcal{P})$ donde $U_x = \sum_{y \prec x} \mathbb{F}[M_y] + \sum_{y \prec x} \mathbb{G}[M_y]$, el cual satisface las condiciones (2.6).

Desde este punto de vista, las columnas de cada franja vertical M_x representan un sistema de generadores del espacio U_x modulo su subespacio radical

$$\underline{U}_x = \sum_{\substack{y \prec x \\ y \neq x}} \mathbb{F}[M_y] + \sum_{\substack{y \triangleleft x \\ y \neq x}} \mathbb{G}[M_y].$$

Entonces, las transformaciones (a') - (c') de M reflejan tanto el cambio de base en U_0 y cambios de generadores en los subespacios U_x . Conversamente, comenzando desde U , uno puede asociar con U una corepresentación matricial denotada por M_U . Observe que $\underline{\dim} U_M \leq \underline{\dim} M$ y $\underline{\dim} U \leq \underline{\dim} M_U$, en ambos casos la igualdad se tiene si y solo si las columnas de cada franja M_x son linealmente independientes modulo la columna radical. Cuando trabajamos con corepresentaciones matriciales M_U correspondientes a corepresentaciones U , siempre seleccionaremos matrices $M = M_U$ tales que $\underline{\dim} M = \underline{\dim} U$.

El *soporte* de una corepresentación U de \mathcal{P} con vector dimension $d = \underline{\dim} U$ es el subconjunto $\text{Supp } U = \{x \in \mathcal{P} : d_x > 0\}$.

Un vector d es *cierto* si no tiene coordenadas nulas. Una corepresentación se llama *cierta* si su vector dimensión es cierto. Cada poset equipado teniendo al menos una corepresentación indescomponible cierta es llamado *cierto* (con respecto a corepresentaciones).

Vamos a denotar por \mathcal{P}^{op} o \mathcal{P}^* el poset anti-isomorfo al poset \mathcal{P} (la doble notación es cómoda por razones técnicas).

Definición 2.6. Dada una corepresentación U de \mathcal{P} , se define la *corepresentación dual* U^* de \mathcal{P}^{op} como

$$U^* = (U_0^*, U_x^* : x \in \mathcal{P}^{op}),$$

donde $U_0^* = \text{Hom}_{\mathbb{G}}(U_0, \mathbb{G})$ y

$$U_x^* = \begin{cases} (U_x)_{\mathbb{G}}^{\perp} = \{\varphi \in \text{Hom}_{\mathbb{G}}(U_0, \mathbb{G}) : U_x \subset \text{Ker} \varphi\}, & \text{si } x \text{ es fuerte;} \\ (U_x)_{\mathbb{F}}^{\perp} = \{\varphi \in \text{Hom}_{\mathbb{F}}(U_0, \mathbb{F}) : U_x \subset \text{Ker} \varphi\}, & \text{si } x \text{ es débil.} \end{cases}$$

El espacio U_x^* , donde x es un punto débil, se identifica con un \mathbb{F} -subespacio de U_0^* . Más precisamente, sea $\{e_1, \dots, e_n\}$ una base para el \mathbb{G} -espacio U_0 , entonces este puede ser considerado como un \mathbb{F} -espacio de dimensión $2n$ con $U_0 = \mathbb{F}\{e_1, \xi e_1, \dots, e_n, \xi e_n\}$. Un morfismo $\varphi \in \text{Hom}_{\mathbb{F}}(U_0, \mathbb{F})$ está determinado por las imágenes de la base $\varphi(e_1) = a_1, \varphi(\xi e_1) = b_1, \dots, \varphi(e_n) = a_n, \varphi(\xi e_n) = b_n$ ($a_i, b_i \in \mathbb{F}$). El morfismo φ se puede identificar con un morfismo $\bar{\varphi} \in \text{Hom}_{\mathbb{G}}(U_0, \mathbb{G})$ determinado por $\bar{\varphi}(e_1) = a_1 + \xi b_1, \dots, \bar{\varphi}(e_n) = a_n + \xi b_n$.

El siguiente lema es muy útil para la descripción explícita de las corepresentaciones de posets duales, y se hará referencia a este frecuentemente.

Lema 2.1. *Un poset equipado \mathcal{P} arbitrario es cierto con respecto a corepresentaciones si y solo si el poset dual \mathcal{P}^* lo es.*

Prueba. Si U es una corepresentación indescomponible cierta de un poset \mathcal{P} y $d = \underline{\dim} U$, $d^* = \underline{\dim} U^*$, entonces cambiando cada espacio U_x (que satisface la condición $d^* = 0$), por el subespacio radical \underline{U}_x , se obtiene una corepresentación U_1 del conjunto \mathcal{P} de codimensión $d_1^* = \underline{\dim} U_1^*$ tal que $(d_1^*)_x \neq 0$ para todo $x \in \mathcal{P}$, es decir U_1^* es una corepresentación cierta del poset dual \mathcal{P}^* . \square

2.5. Los posets equipados de tipo corepresentación finito

Un poset equipado \mathcal{P} es de *tipo corepresentación finito* (resp. *infinito*) si $\text{Ind } \mathcal{P}$ es finito (resp. *infinito*). Los posets equipados de tipo corepresentación finito ya han sido descritos, en un contexto más general, por Klemp y Simson [16], quienes estudiaron categorías de espacios vectoriales Schurianos y consideraron representaciones de posets valuados. La lista de los posets equipados finitos ciertos y una descripción explícita matricial de todas sus corepresentaciones, descritos

en términos más cercanos a los expuestos aquí, se encuentra en [32], también puede consultar la lista en el apéndice A. Ahora recordamos el criterio de tipo corepresentación finito.

Teorema 2.2 (Criterio de tipo corepresentación finito). *Un poset equipado \mathcal{P} es de tipo corepresentación finito si y solo si \mathcal{P} no contiene ninguno de los posets críticos K_1, \dots, K_9 (vea el apéndice B).*

Los posets críticos K_1, \dots, K_5 se llaman críticos de Kleiner quien descubrió el criterio de tipo representación finito para posets ordinarios, [14, 15]. Los posets equipados K_6, \dots, K_9 son críticos y su numeración es una continuación de la de Kleiner.

Capítulo 3

Formulación de los resultados principales sobre la clasificación de corepresentaciones indescomponibles de los posets equipados de un parámetro

Aquí presentamos los resultados principales del trabajo sobre corepresentaciones de posets equipados de un parámetro. En la sección 3.1 se introducen los posets equipados de un parámetro con respecto a corepresentaciones y se formulan los resultados correspondientes de clasificación de indescomponibles (las demostraciones se presentarán más adelante en los capítulos 5, 6 y 7). En la sección 3.2 se define la forma cuadrática de Tits asociada a un poset equipado y se presenta una relación entre sus raíces reales e imaginarias (y ciertos vectores especiales) y las dimensiones de las corepresentaciones indescomponibles de los posets equipados de un parámetro.

3.1. Los posets equipados de un parámetro

Una corepresentación matricial de un poset \mathcal{P} sobre la pareja de anillos de polinomios $(\mathbb{F}[t], \mathbb{G}[t])$, se puede definir de manera análoga que una corepresentación matricial de \mathcal{P} sobre (\mathbb{F}, \mathbb{G}) . Más precisamente, una $(\mathbb{F}[t], \mathbb{G}[t])$ -corepresentación

matricial de \mathcal{P} es una matriz rectangular $M[t]$ sobre $\mathbb{G}[t]$ separada en franjas verticales $(M[t])_x$ ($x \in \mathcal{P}$), las transformaciones admisibles son definidas análogamente a las transformaciones (a') - (c') , pero sobre la pareja $(\mathbb{F}[t], \mathbb{G}[t])$.

Una $(\mathbb{F}[t], \mathbb{G}[t])$ -corepresentación de \mathcal{P} es una colección $U(t) = (U_0, U_x : x \in \mathcal{P})$ tal que U_0 es un $\mathbb{G}[t]$ -módulo libre finitamente generado y cada U_x es un $\mathbb{F}[t]$ -submódulo de U_0 finitamente generado, en particular la $\mathbb{G}[t]$ -cápsula de cualquier \mathbb{F} -submódulo finitamente generado V es el $\mathbb{G}[t]$ -generado de V .

Una *serie* de corepresentaciones se obtiene de una matriz $M[t]$ de $(\mathbb{F}[t], \mathbb{G}[t])$ -corepresentación sustituyendo cualquier \mathbb{G} -matriz cuadrada A por la variable t y matrices escalares λI , del mismo tamaño, por los coeficientes $\lambda \in \mathbb{G}$. Una serie de corepresentaciones de \mathcal{P} es llamada *cierta* si esta induce al menos una corepresentación indescomponible cierta de \mathcal{P} .

Definición 3.1. Sea \mathbb{F} un campo infinito. Un poset equipado \mathcal{P} de tipo infinito es de un *parámetro* con respecto a corepresentaciones sobre (\mathbb{F}, \mathbb{G}) , si este tiene una serie conteniendo casi todas las corepresentaciones indescomponibles de cada dimensión dada.

Si el campo es finito, llamamos a \mathcal{P} de un *parámetro* siempre que exista una extensión cuadrática $\mathbb{F}' \subset \mathbb{G}'$ tal que $\mathbb{F} \subset \mathbb{F}'$, $\mathbb{G} \subset \mathbb{G}'$ y \mathcal{P} sea de un *parámetro* con respecto a la pareja $(\mathbb{F}', \mathbb{G}')$ (de hecho no depende de la elección de tal pareja, como se sigue de la clasificación obtenida aquí).

De ahora en adelante todos los resultados serán formulados con respecto a corepresentaciones sin advertencia, siempre que no haya lugar a confusión.

Teorema A (Criterio de un parámetro). *Sea \mathcal{P} un poset equipado tal que $w(\mathcal{P}) \leq 4$. Entonces, \mathcal{P} es de un parámetro si y solo si este contiene precisamente un subconjunto crítico, es decir uno de los conjuntos K_1, \dots, K_9 .*

Teorema B (Posets ciertos). *Un poset no trivialmente equipado de un parámetro es cierto si y solo si es isomorfo o anti-isomorfo a uno de los 28 posets $K_6, \dots, K_9, A_{25}, \dots, A_{48}$ listados en los apéndices B y C.*

La clasificación de corepresentaciones indescomponibles de los posets críticos K_6, \dots, K_9 se encuentra con detalles en los teoremas 5.1, 5.11, 6.1, 6.10, sin embargo, los enunciamos a continuación en forma breve como los teoremas C1 a C4. Para los posets equipados ciertos de un parámetro, la descripción de sus corepresentaciones indescomponibles se encuentra en las proposiciones 5.2, 5.6, 5.9, 6.2, 6.3, 6.5 y 6.7.

Teorema C1. *El poset crítico $K_6 = \{a, b\}$ posee 6 tipos de corepresentaciones indescomponibles sobre la pareja (\mathbb{F}, \mathbb{G}) (salvo dualidad y permutación de los puntos), listados junto con sus corepresentaciones duales en forma matricial en la tabla 5.1, incluso la serie de corepresentaciones.*

Teorema C2. *El poset crítico $K_7 = \{a \prec p \prec q; \theta\}$ posee 48 tipos de corepresentaciones indescomponibles sobre la pareja (\mathbb{F}, \mathbb{G}) con forma de Tits diferente de 0, listados en las tablas 5.8 y 5.9, además tiene una serie de corepresentaciones, vea el teorema 5.11.*

Teorema C3. *El poset crítico $K_8 = \{\varrho, \sigma, a\}$ posee 11 tipos de corepresentaciones indescomponibles (incluso la serie) sobre una extensión cuadrática de campos $\mathbb{F} \subset \mathbb{G}$ arbitraria (salvo dualidad y permutación de los puntos fuertes ϱ, σ), se encuentran listados en las tablas 6.1, 6.2, 6.3 y 6.4.*

Teorema C4. *El poset crítico $K_9 = \{a \prec b; \zeta \triangleleft \eta\}$ posee 48 tipos de corepresentaciones indescomponibles sobre la pareja (\mathbb{F}, \mathbb{G}) con forma de Tits diferente de 0, listados en las tablas 5.8 y 5.9, además tiene una serie de corepresentaciones, vea el teorema 6.10.*

3.2. La forma cuadrática de Tits asociada a un poset equipado

Existe una relación estrecha entre la teoría de formas cuadráticas y la teoría de corepresentaciones de posets equipados. En esta sección se define la forma cuadrática de Tits $f_{\mathcal{P}}(d)$ de un vector d asociado a un poset equipado \mathcal{P} , además se presenta la relación entre las raíces de $f_{\mathcal{P}}$ y los vectores dimensión de las corepresentaciones indescomponibles de \mathcal{P} (teorema D).

Dado un poset equipado \mathcal{P} , tomamos $\mathcal{P}^{\bullet} = \mathcal{P} \cup \{0\}$ (0 es un símbolo formal incomparable con los puntos en \mathcal{P}). Un vector $e_x \in \mathbb{Z}^{\mathcal{P}^{\bullet}}$ ($x \in \mathcal{P}^{\bullet}$) es una *raíz simple* si $(e_x)_x = 1$ y $(e_x)_y = 0$ para $x \neq y$. La *forma cuadrática de Tits* $f_{\mathcal{P}} = f$ asociada a \mathcal{P} se define sobre un vector dado $d = (d_0, d_x : x \in \mathcal{P})$ por la fórmula

$$f(d) = \sum_{x,y \in \mathcal{P}^{\bullet}} l_{xy} d_x d_y - 2d_0 \sum_{x \in \mathcal{P}} d_x,$$

donde $l_{xy} = 0$, si $x \parallel y$; $l_{xy} = 1$, si $x \prec y$; $l_{xy} = 2$, si $x \triangleleft y$ ó $x = y = 0$. Recuerde que si $\langle x, y \rangle = \frac{1}{4}[f(x+y) - f(x-y)]$ es la correspondiente forma bilineal simétrica, la *reflexión* en el punto $x \in \mathcal{P}^{\bullet}$ es una aplicación $\rho_x : \mathbb{Z}^{\mathcal{P}^{\bullet}} \mapsto \mathbb{Z}^{\mathcal{P}^{\bullet}}$ definida por $\rho_x(d) = d - \frac{2}{l_{xx}} \langle d, e_x \rangle \cdot e_x$.

Las *raíces* de la forma de Tits $f_{\mathcal{P}}$ (de un poset \mathcal{P}) son los vectores obtenidos por reflexiones de las raíces simples. Sean d, d' raíces de $f_{\mathcal{P}}$, escribimos $d \leq d'$ si $d_x \leq d'_x$ ($x \in \mathcal{P}^{\bullet}$). De ahora en adelante trabajaremos con *raíces admisibles* las cuales son raíces no negativas con $d_0 > 0$.

Un vector $\mu \geq 0$ es una *raíz imaginaria* de la forma cuadrática $f_{\mathcal{P}}$ (o del poset \mathcal{P}) si $f_{\mathcal{P}}(\mu) = 0$. Dos raíces d, d' de $f_{\mathcal{P}}$ son del *mismo tipo* si $d = d' + \mu$, donde μ es una raíz imaginaria, una *raíz minimal* μ_0 es una raíz admisible minimal en el conjunto de raíces del mismo tipo.

Cuando un vector de dimensión d de una corepresentación indescomponible de un poset \mathcal{P} no es admisible ni imaginaria de $f_{\mathcal{P}}$ se llama *vector especial*. El siguiente resultado describe la estrecha relación entre la forma de Tits $f_{\mathcal{P}}$ asociada a un poset equipado \mathcal{P} y los vectores dimensión de sus corepresentaciones indescomponibles.

Teorema D (Dimensiones de indescomponibles). *Un vector $d > 0$, correspondiente a un poset equipado de un parámetro, es una dimensión de una corepresentación indescomponible si y solo si este es una raíz admisible, una raíz imaginaria o un vector especial, más aún*

- (a) *Si d es una raíz admisible o un vector especial, entonces existe precisamente una corepresentación indescomponible (salvo isomorfismo) de dimensión d .*
- (b) *Si d es una raíz imaginaria, entonces existe una cantidad infinita de corepresentaciones indescomponibles no isomorfas entre sí (siempre que el campo \mathbb{F} sea infinito) de dimensión d .*

El vector dimensión d de un poset \mathcal{P} que es raíz admisible, tiene forma de Tits $f_{\mathcal{P}}(d) = 1$ o $f_{\mathcal{P}}(d) = 2$. En el caso de los posets críticos K_6 y K_8 se presentan las raíces minimales asociadas a cada tipo de corepresentación en los cuadros 5.1, 6.1 - 6.4, para el caso de K_7 y K_9 se presentan en el apéndice E.

Capítulo 4

Descripción de las técnicas utilizadas y desarrolladas

Casi desde el mismo momento en que las representaciones de posets se introdujeron para estudiar álgebras de dimensión finita, se desarrollaron las técnicas de diferenciación de posets para su estudio, estos algoritmos (como también se conocen) actúan de dos formas, una combinatorial transformando un poset \mathcal{P} en otro poset derivado \mathcal{P}' , y una funtorial transformando los objetos y morfismos de $\text{corep } \mathcal{P}$ en $\text{corep } \mathcal{P}'$.

Los algoritmos que presentamos aquí fueron útiles para la obtención del criterio de un parámetro para corepresentaciones de posets equipados y la clasificación de sus corepresentaciones. Estos algoritmos son útiles porque permiten reducir la dimensión de la corepresentación inicial, por esto los algoritmos son una herramienta para hacer pasos inductivos sobre la dimensión de las corepresentaciones.

En la sección 4.1 se describen algunas notaciones necesarias para entender la construcción y propiedades de los algoritmos de diferenciación, además se presentan dos resultados básicos que serán invocados en capítulos posteriores, la clasificación de corepresentaciones de una cadena débil (lema 4.1) y un lema sobre posets escindibles (lema 4.2) que será útil en algunas consideraciones combinatoriales. En la sección 4.2 se recuerdan las definiciones esenciales del algo-

ritmo de diferenciación D-I para posets ordinarios y su completación. Por último en las secciones 4.3 y 4.4 se presentan el algoritmo de diferenciación $D\text{-}\widehat{\text{VII}}$ y el algoritmo de completación para corepresentaciones de posets equipados, los cuales fueron desarrollados en [32].

4.1. Notaciones y hechos básicos

Sean (X, Y) cualquier par de subconjuntos de \mathcal{P} tal que X es completamente débil, Y es arbitrario y $X \cap Y^\vee = \emptyset$. En lo sucesivo usaremos la siguiente corepresentación indescomponible trivial $\widehat{T}(X, Y)$ de la forma

$$\widehat{T}(X, Y) = (\mathbb{G}, U_t : t \in \mathcal{P})$$

donde,

$$U_t = \begin{cases} \mathbb{G}, & \text{si } t \in X^\vee \cup Y^\vee; \\ \mathbb{F}, & \text{si } t \in X^\vee \setminus (X^\vee \cup Y^\vee); \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Es claro que $\widehat{T}(X, Y) = \widehat{T}(\min X, \min Y)$, entonces en principio uno puede trabajar con objetos $\widehat{T}(X, Y)$ suponiendo que X, Y son anticadenas. Tomando

$$\widehat{T}(X, \emptyset) = \widehat{T}(X) \quad \text{y} \quad \widehat{T}(\emptyset, Y) = \widehat{P}(Y),$$

se tiene en particular

$$\widehat{T}(\emptyset, \emptyset) = \widehat{T}(\emptyset) = \widehat{P}(\emptyset) = (\mathbb{G}, 0, \dots, 0).$$

En el caso $X = \{x\}$ ó $Y = \{y\}$, escribimos simplemente $\widehat{T}(x, Y)$ ó $\widehat{T}(X, y)$, así por ejemplo, los objetos $\widehat{T}(x)$, $\widehat{T}(x, y)$ con $x \prec y$ y $\widehat{P}(y)$ son casos parciales de $\widehat{T}(X, Y)$ y tenemos las siguientes formas matriciales

$$\widehat{T}(x) = \boxed{\mathbf{1} \mid x}, \quad \widehat{T}(x, y) = \boxed{\mathbf{1} \mid x \prec y \mid \xi}, \quad \widehat{P}(y) = \boxed{\mathbf{1} \mid y \mid \xi}.$$

El elemento ξ puede ser borrado de la matriz $\widehat{P}(y)$ si el punto y es fuerte. Recordamos a continuación la clasificación de las corepresentaciones de una cadena débil, su demostración sencilla se puede consultar en [32].

Lema 4.1. *Las corepresentaciones indescomponibles de la forma*

$$\widehat{P}(\emptyset), \widehat{P}(x), \widehat{T}(x), \widehat{T}(x, y),$$

donde $x \prec y$, son todas las posibles corepresentaciones indescomponibles de una cadena débil arbitraria.

Un poset equipado \mathcal{P} se llama *escindible* si $\mathcal{P} = A + B + C$ donde A, B son conjuntos no vacíos, $A \triangleleft B$ y $C = \{c_1 \triangleleft c_2 \triangleleft \cdots \triangleleft c_n\}$ es una cadena de puntos fuertes (posiblemente vacía).

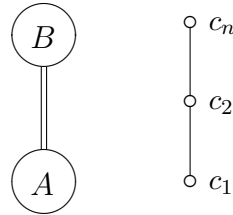


Figura 4.1. Ejemplo de un poset equipado escindible

La razón por la cual se llama escindible es porque sus corepresentaciones siempre se pueden separar como una suma directa de corepresentaciones indescomponibles con soporte en $A + C$ ó $B + C$.

Suponga que M es una corepresentación matricial de \mathcal{P} correspondiente a U . Seleccionamos las columnas \mathbb{G} -linealmente independientes de M_A y haciendo transformaciones \mathbb{G} -elementales de filas podemos volver ceros el mayor número de filas y ubicarlas en el bloque $Q \cap M_A$ ubicado en la parte superior de M . Con adiciones de columnas adecuadas $M_A \xrightarrow{\mathbb{G}} M_B$ convertimos en cero el bloque $Q \cap M_B$. Con el fin de preservar la forma de los bloques M_A y M_B (ya reducidos), se deben restringir las transformaciones admisibles sobre filas (las trans-

formaciones admisibles de columnas son las mismas) **(1)** Transformaciones \mathbb{G} -elementales de filas de las franjas Q y R de forma independiente, **(2)** adiciones de filas con coeficientes en \mathbb{G} de la franja R a la franja Q .

En el bloque $R \cap M_{c_1}$ seleccionamos las columnas \mathbb{G} -linealmente independientes y volvemos ceros el mayor número de filas en estas columnas, incluso en la franja Q arriba de ellas, el bloque no nulo se puede convertir en una matriz identidad que ubicamos en una nueva franja horizontal R_0 , los bloques $M_{c_i} \cap R_0$ ($i \neq 1$) se pueden convertir en ceros con adiciones de columnas adecuadas $M_{c_1} \xrightarrow{\mathbb{G}} M_{c_i}$, este proceso se puede seguir efectuando sucesivamente hasta llegar a la franja matricial M_{c_n} , con lo cual la matriz de corepresentación M toma la forma (4.1). Entonces tenemos el siguiente resultado sobre posets escindibles.

Lema 4.2. *Cada poset equipado escindible \mathcal{P} no es cierto. Más precisamente, dada una corepresentación indescomponible U de \mathcal{P} o bien $\text{Supp } U \subset A + C$, o bien $\text{Supp } U \subset B + C$.*

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{c} Q \\ R \end{array} \left\{ \begin{array}{c} A \quad B \quad c_1 \quad c_2 \quad c_n \\
 \begin{array}{|c|c|c|c|c|}
 \hline
 * & & * & & * & & * & \\
 \hline
 & * & & \mathbf{I} & & & & \\
 \hline
 & * & & & & \mathbf{I} & & \\
 \hline
 & * & & & & & & \mathbf{I} \\
 \hline
 & * & & & & & & \\
 \hline
 \end{array}
 \end{array}
 \right. R_0
 \end{array}
 \tag{4.1}$$

Nota 2. Todos los bloques vacíos de aquí en adelante representan bloques de ceros, los marcados con $*$ matrices arbitrarias, y los marcados con \mathbf{I} (resp. \mathbf{I}_n) denotan una matriz identidad arbitraria (resp. de orden n).

4.2. El algoritmo de diferenciación D-I para posets ordinarios

En 1972, Nazarova y Roiter [22] desarrollaron el algoritmo de diferenciación con respecto a un punto maximal (respectivamente minimal) para posets ordinarios, más adelante en 1977, Zavadskij [39] construyó un algoritmo más general con respecto a una pareja de puntos adecuada, que también se llamó algoritmo D-I (en cierta forma el algoritmo de diferenciación D-I factoriza el algoritmo de Nazarova-Roiter). Estos algoritmos fueron planteados para estudiar representaciones de posets ordinarios sobre un solo campo K . Sin embargo en el caso de corepresentaciones de posets equipados son aplicables cuando el campo \mathbb{F} es superfluo, es decir, cuando todos los puntos son fuertes y todas las transformaciones elementales de la corepresentación matricial M son sobre \mathbb{G} .

Aquí presentamos las definiciones básicas del algoritmo D-I y las propiedades que conciernen a esta investigación, para una descripción más detallada y reciente de este algoritmo puede consultarse [43].

Sea \mathcal{P} un poset finito. Una pareja de puntos ordinarios (a, b) de \mathcal{P} se dice *I-adeuada* (es decir, adecuada para la diferenciación I) si

$$\mathcal{P} = a^\vee + b_\wedge + C,$$

donde $C = \{c_1 < \dots < c_n\}$ es una cadena (posiblemente vacía) incomparable con los puntos a y b . La pareja (a, b) se llama *especial* si $C = \emptyset$. Únicamente se admite el caso en que $b < a$, no $a \not\leq b$. El algoritmo se puede desarrollar sin la restricción de incomparabilidad entre los subconjuntos $\{a, b\}$ y C , pero se puede reducir al caso considerado aquí.

Sea $\mathcal{L} = \mathcal{L}(\mathcal{P})$ el retículo modular libre generado por \mathcal{P} definido naturalmente, entonces este retículo contiene en particular, dos nuevas cadenas, $C^- = \{c_1^- <$

$\dots < c_n^-$ y $C^+ = \{c_1^+ < \dots < c_n^+\}$ formadas por los elementos $c_i^- = c_i \cdot b$ y $c_i^+ = a + c_i$, además de la cadena inicial $C = \{c_1 < \dots < c_n\}$.

El poset *derivado* del poset \mathcal{P} con respecto a la pareja (a, b) es un subposet en \mathcal{L} de la forma

$$\mathcal{P}' = \mathcal{P}'_{(a,b)} = (\mathcal{P} \setminus C) + C^+ + C^-,$$

es decir

$$\mathcal{P}'_{(a,b)} = (\mathcal{P} \setminus \{c_1, \dots, c_n\}) + \{c_1 + a, \dots, c_n + a\} + \{c_1 \cdot b, \dots, c_n \cdot b\},$$

Las relaciones de orden en \mathcal{P}' (inducidas por \mathcal{L}) se ilustran en la figura 4.2.

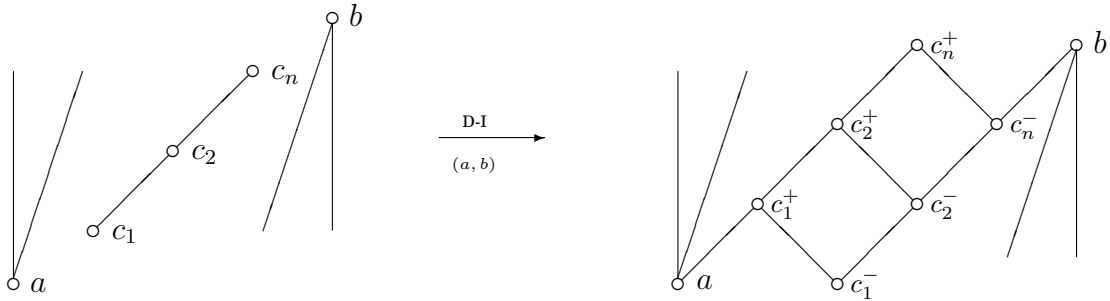


Figura 4.2. Descripción combinatorial del algoritmo de diferenciación D-I.

Cada uno de los dos nuevos puntos c_i^+ y c_i^- hereda todas las previas relaciones de orden del punto original c_i con los puntos del subconjunto $\mathcal{P} \setminus C$, por lo tanto $\mathcal{P} \setminus C$ y $\mathcal{P} \setminus (C^- + C^+)$ se identifican de forma natural.

El *functor de diferenciación* $D-I_{(a,b)} : \text{rep } \mathcal{P} \longrightarrow \text{rep } \mathcal{P}'$ denotado también brevemente $()' : \text{rep } \mathcal{P} \longrightarrow \text{rep } \mathcal{P}'$ (si es claro que se refiere a D-I), es definido de manera natural. Si U es un objeto en $\text{rep } \mathcal{P}$ entonces el objeto U' en $\text{rep } \mathcal{P}'$ se elige $U' = U_{\mathcal{L}|\mathcal{P}'}$, es decir

$$\begin{aligned} U'_0 &= U_0, \\ U'_{c_i^-} &= U_{c_i \cdot b}, \\ U'_{c_i^+} &= U_{c_i + a}, \\ U'_x &= U_x \quad \text{para los puntos restantes } x \in \mathcal{P}', \end{aligned} \tag{4.2}$$

recordamos que $U_{x+y} = U_x + U_y$ y $U_{x \cdot y} = U_x \cap U_y$ de acuerdo con la definición del retículo \mathcal{L} . Si φ es un morfismo en $\text{rep } \mathcal{P}$ (considerado como una aplicación lineal $\varphi : U_0 \mapsto V_0$) entonces se define el *morfismo derivado* $\varphi' = \varphi$. Se tiene que $(U \oplus V)' = U' \oplus V'$.

Observe que para cada objeto $W \in \text{rep } \mathcal{P}'$, existe un objeto $U \in \text{rep } \mathcal{P}$ tal que $U' = W \oplus P^m(a)$ para algún $m \geq 0$ (vea el lema 4.5 en [43], adjuntamos su demostración para ilustrar el proceso de integración). Considere el espacio $W_{c_1^+}$ con la suma directa $W_{c_1^+} = \underline{W}_{c_1^+} \oplus F_i \oplus H_i$ donde F_i y H_i son unos complementos tales que $F_i \subset W_b$ y $H_i \cap W_b = 0$. Elija una base arbitraria $f_1^i, \dots, f_{m_i}^i$ en cada espacio F_i . Tome nuevos símbolos $e_1^i, \dots, e_{m_i}^i$ y suponga que ellos forman una base de un \mathbb{G} -espacio nuevo E_i . Entonces elija el conjunto $E_0 = \bigoplus_{i=1}^n E_i$ y defina la representación U como sigue

$$\begin{aligned}
 U_0 &= W_0 \oplus E_0, \\
 U_x &= W_x \oplus E_0 \quad \text{si } x \in a^\nabla, \\
 U_x &= W_x \oplus E_0 \quad \text{si } x \in b_\Delta, \\
 U_{c_i} &= U_{c_{i-1}} + W_{c_i^-} + H_i + \mathbb{G}\{f_1^i + e_1^i, \dots, f_{m_i}^i + e_{m_i}^i\}
 \end{aligned} \tag{4.3}$$

Asumiendo que $U_{c_0} = 0$. Usando la definición (4.2) del funtor y (4.3) del proceso de *integración*, uno puede verificar que $U' = W \oplus \widehat{P}^m(a)$. La forma matricial (4.4) ilustra el proceso de integración que se describió anteriormente, seleccionando bases adecuadas para el espacio U_0 y cada U_x se puede identificar la representación W con la franja inferior W_0 , los espacios complementarios F_i y H_i se identifican con los bloques del mismo nombre.

$$\begin{array}{c}
\begin{array}{cccccccccccc}
& a & a^\vee & & c_1 & & c_n & & b_\blacktriangle & b \\
E_0 & \left\{ \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|}
\hline
& \mathbf{I} & & & \mathbf{I} & & & & & & \\
\hline
& & \mathbf{I} & & & & & \mathbf{I} & & & \\
\hline
\end{array} \right. \\
W_0 & \left\{ \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|}
\hline
& & & * & & & & & & & \\
\hline
* & & & * & * & F_1 & H_1 & * & F_n & H_n & * & * \\
\hline
\end{array} \right. U_b \\
& a & & c_1^- & \underbrace{\quad\quad\quad}_{c_1^+} & c_n^- & \underbrace{\quad\quad\quad}_{c_n^+} & & & & & &
\end{array}
\end{array} \tag{4.4}$$

La principal propiedad del algoritmo de diferenciación es que este induce una equivalencia entre categorías cociente, la recordamos a continuación (también puede consultar [43], teorema 4.7).

Teorema 4.3. *Sea $\mathcal{P} = a^\vee + b_\blacktriangle + \{c_1 < \dots < c_n\}$ un poset ordinario con una pareja de puntos adecuados (a, b) . Entonces el funtor de diferenciación $(\)' : \text{rep } \mathcal{P} \rightarrow \text{rep } \mathcal{P}'_{(a,b)}$, induce una equivalencia de categorías cociente*

$$\text{rep } \mathcal{P} / \langle \widehat{P}(a), \widehat{P}(a, c_1), \dots, \widehat{P}(a, c_n) \rangle \xrightarrow{\sim} \text{rep } \mathcal{P}'_{(a,b)} / \langle \widehat{P}(a) \rangle,$$

y en particular, biyecciones entre las representaciones indescomponibles

$$\text{Ind } \mathcal{P} \setminus \{ \widehat{P}(a), \widehat{P}(a, c_1), \dots, \widehat{P}(a, c_n) \} \xleftrightarrow{\sim} \text{Ind } \mathcal{P}'_{(a,b)} \setminus \widehat{P}(a). \quad \square$$

Esto significa que al aplicar el algoritmo D-I, se disminuyen en un número finito las representaciones indescomponibles de $\text{rep } \mathcal{P}$ con respecto a $\text{rep } \mathcal{P}'$, esto permite realizar pasos inductivos y es una herramienta fundamental para estudiar la clasificación de representaciones de posets ordinarios finitos y de un parámetro, en particular, se tiene el siguiente resultado.

Corolario 4.4. $|\text{Ind } \mathcal{P}| = |\text{Ind } \mathcal{P}'| + n.$

Denotaremos por $\overline{\mathcal{P}'_{(a,b)}}$ la *completación* del poset $\mathcal{P}'_{(a,b)}$, es decir, el poset $\mathcal{P}'_{(a,b)}$ fortalecido por la relación $a < b$. La transición $\mathcal{P} \mapsto \overline{\mathcal{P}'_{(a,b)}}$ ($\mathcal{P} \mapsto \mathcal{P}'_{(a,b)}$) se llama *derivación con completación (sin completación)*. Cuando se aplica la completación a un poset equipado \mathcal{P} se elimina una sola representación indescomponible

trivial, salvo isomorfismo, en $\text{Ind } \overline{\mathcal{P}'}$, más precisamente se tiene la siguiente propiedad.

Proposición 4.5. *La diferenciación con completación $\mathcal{P} \mapsto \overline{\mathcal{P}'_{(a,b)}}$ induce biyecciones mutuamente inversas entre los conjuntos indescomponibles*

$$\text{Ind } \mathcal{P} \setminus \{\widehat{P}(a), \widehat{P}(a, c_1), \dots, \widehat{P}(a, c_n)\} \rightleftharpoons \text{Ind } \overline{\mathcal{P}'_{(a,b)}}. \quad \square$$

4.3. La diferenciación D-VII para posets equipados

La acción combinatorial del algoritmo de diferenciación D-VII coincide con la del algoritmo de diferenciación VII descrito en [41]. A saber, una pareja de puntos incomparables (a, b) de un poset equipado \mathcal{P} es llamada VII-*adecuada* o VII-*adecuada* si a es un punto débil, b un punto fuerte y

$$\mathcal{P} = a^\nabla + b_\Delta + \{a \prec c_1 \prec \dots \prec c_n\}$$

donde $\{a \prec c_1 \prec \dots \prec c_n\}$ es una cadena completamente débil incomparable con el punto b . Bajo el convenio de que $a = c_0$, se asume entonces $n \geq 0$. Denotamos $A = a^\nabla$, $B = b_\Delta \setminus b$ y $C = \{c_1 \prec \dots \prec c_n\}$.

El poset *derivado* $\mathcal{P}' = \mathcal{P}'_{(a,b)}$ de \mathcal{P} con respecto a tal pareja (a, b) tiene la forma

$$\mathcal{P}'_{(a,b)} = (\mathcal{P} \setminus (a + C)) + \{a^- < a^+\} + C^+ + C^-$$

donde el punto a^- es débil y el punto a^+ es fuerte, $C^- = \{c_1^- \prec \dots \prec c_n^-\}$ y $C^+ = \{c_1^+ \prec \dots \prec c_n^+\}$ son cadenas completamente débiles, $c_i^- \prec c_i^+$ para todo $i = 1, \dots, n$; $a^- \prec c_1^-$; $a^+ < c_1^+$; $c_n^- < b$ y las siguientes condiciones naturales son satisfechas:

- (a) Cada uno de los puntos $a^-, a^+ (c_i^-, c_i^+)$ hereda todas las relaciones de orden previas del punto original $a (c_i)$ con los puntos del subconjunto $\mathcal{P} \setminus (a + C)$.

- (b) La relación de orden en $\mathcal{P}'_{(a,b)}$ es inducida por la relación de orden inicial en el subconjunto $\mathcal{P} \setminus (a + C)$ y por las relaciones listadas anteriormente.

El *functor de diferenciación* $D - \widehat{\text{VII}}_{(a,b)} : \text{corep } \mathcal{P} \rightarrow \text{corep } \mathcal{P}'$ (denotado también por $()'$: $\text{corep } \mathcal{P} \rightarrow \text{corep } \mathcal{P}'$) del algoritmo $\widehat{\text{VII}}$ asigna a cada corepresentación U de \mathcal{P} la corepresentación *derivada* U' de \mathcal{P}' por la regla

$$\begin{aligned} U'_0 &= U_0 \\ U'_{c_i^-} &= U_{c_i} \cap U_b \quad \text{para } i = 0, 1, \dots, n \\ U'_{c_i^+} &= U_{c_i} + \tilde{U}_a \quad \text{para } i = 0, 1, \dots, n \\ U'_x &= U_x \quad \text{para los puntos restantes } x \in \mathcal{P}'. \end{aligned} \tag{4.5}$$

Y para un morfismo $U \xrightarrow{\varphi} V$ de la categoría $\text{corep } \mathcal{P}$ (considerada como una aplicación lineal $\varphi : U_0 \rightarrow V_0$), tomamos $\varphi' = \varphi$. Uno puede verificar fácilmente que el functor esta bien definido.

Los objetos $\widehat{P}(a)$, $\widehat{T}(a)$ y $\widehat{T}(a, c_i)$, $i = 1, \dots, n$, juegan un papel importante en la descripción de las propiedades del algoritmo $\widehat{\text{VII}}$. Todas sus derivadas coinciden $\widehat{P}(a)' = \widehat{T}(a)' = \widehat{T}(a, c_i)' = \widehat{P}(a^+)$, entonces tenemos que considerar los objetos *reducidos* de la categoría $\text{corep } \mathcal{P}$ ($\text{corep } \mathcal{P}'$), es decir, aquellos que no contienen sumandos directos $\widehat{P}(a)$, $\widehat{T}(a)$ y $\widehat{T}(a, c_i)$, $i = 1, \dots, n$, (resp. $\widehat{P}(a^+)$).

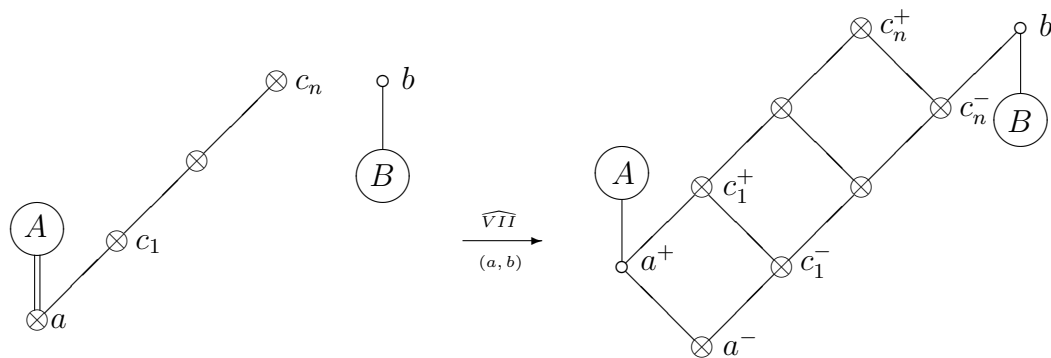


Figura 4.3. Descripción combinatorial del algoritmo de diferenciación D- $\widehat{\text{VII}}$.

Señalamos, como una regla, que el objeto derivado U' contiene sumandos directos triviales $\widehat{P}(a^+)$, incluso si U es indescomponible. Por eso el objeto *reducido derivado* U^\downarrow (el cual es único salvo isomorfismo) es definido para cualquier objeto $U \in \text{corep } \mathcal{P}'$ como el sumando directo de U' más grande que no contiene sumandos directos $\widehat{P}(a^+)$, es decir considerando $U' = U^\downarrow \oplus \widehat{P}^m(a^+)$, con $m = \dim_{\mathbb{G}} \widetilde{U}_a / (\widetilde{U}_a \cap U_b) = \dim_{\mathbb{G}} (\widetilde{U}_a + U_b) / U_b$. Evidentemente $(U_1 \oplus U_2)^\downarrow \simeq U_1^\downarrow \oplus U_2^\downarrow$.

Una definición equivalente de U^\downarrow es la siguiente: se toma cualquier (\widetilde{U}_a, U_b) -separación de la pareja de subespacios (E_0, W_0) del \mathbb{G} -espacio U_0 y tomamos $U^\downarrow = W = (W_0; W_x \mid x \in \mathcal{P}')$ donde $W_x = U'_x \cap W_0$ para cada $x \in \mathcal{P}'$.

Es claro que el objeto reducido derivado U^\downarrow puede ser visto no únicamente como una corepresentación de $\mathcal{P}'_{(a,b)}$ sino también como la corepresentación *derivada completada* del poset equipado $\overline{\mathcal{P}}'_{(a,b)}$ obtenida de $\mathcal{P}'_{(a,b)}$ adicionando la relación $a^+ < b$ (debido a la definición $W_{a^+} \subset W_b$).

El procedimiento de *integración* para el algoritmo $\widehat{\text{VII}}$ (el cual es en algún sentido inverso al de diferenciación) es descrito en la siguiente forma. para una corepresentación dada W del poset derivado completado $\overline{\mathcal{P}}'_{(a,b)}$, presentamos cada \mathbb{F} -espacio $W_{c_i^+}$ ($i = 1, \dots, n$) en la forma $W_{c_i^+} = \underline{W}_{c_i^+} \oplus S_i \oplus H_i$, donde S_i, H_i son algunos complementos tales que $S_i \subset W_b$ y $H_i \cap W_b = 0$. Elegimos en cada S_i alguna \mathbb{F} -base s_{i1}, \dots, s_{im_i} . Análogamente presentamos el \mathbb{G} -espacio W_{a^+} en la forma $W_{a^+} = \underline{W}_{a^+} \oplus T_0$ donde $T_0 = \mathbb{G}\{t_{01}, \dots, t_{0m_0}\}$ es algún complemento para el \mathbb{G} -subespacio \underline{W}_{a^+} .

Tomando ahora un nuevo \mathbb{G} -espacio E_0 con una base $\{e_{ij} : i = 0, \dots, n; j = 1, \dots, m_i\}$, adjuntamos a W su objeto *primitivo* $W^\uparrow = U = (U_0, U_x : x \in \mathcal{P})$ donde

$$\begin{aligned} U_0 &= W_0 \oplus E_0, \\ U_x &= W_x \oplus E_0^{A \cap \{x\}} \quad \text{para } x \neq a, c_i, \\ U_a &= W_{a^-} + \mathbb{F}\{s_{0j} + ue_{0j} : j = 1, \dots, m_0\} + \\ &\quad + \mathbb{F}\{e_{ij} : i = 0, \dots, n; j = 1, \dots, m_i\}, \\ U_{c_i} &= U_{c_{i-1}} + W_{c_i^-} + H_i + \mathbb{F}\{s_{ij} + ue_{ij} : j = 1, \dots, m_i\} \quad (i \geq 1), \end{aligned} \tag{4.6}$$

y $U_{c_0} = U_a$. El objeto primitivo W^\uparrow no depende, salvo isomorfismo, de la elección de los subespacios T_i, H_i y sus bases, más aún $(W_1 \oplus W_2)^\uparrow \simeq W_1^\uparrow \oplus W_2^\uparrow$. Se tienen también las igualdades $\dim_{\mathbb{G}} S_0 = \dim_{\mathbb{G}}(W_{a^+}/\tilde{W}_{a^-})$ y $\dim_{\mathbb{F}} S_i = \dim_{\mathbb{F}}(W_{c_i^+} \cap W_b)/(W_{c_i^-} + W_{c_{i-1}^+} \cap W_b)$ para $i = 1, \dots, n$.

El resultado principal de la diferenciación VII es el siguiente.

Teorema 4.6. *En el caso de la diferenciación VII, las operaciones de integración \uparrow y de reducción \downarrow inducen biyecciones mutuamente inversas*

$$\text{Ind } \mathcal{P} \setminus [\hat{P}(a), \hat{T}(a), \hat{T}(a, c_i), i = 1, \dots, n] \Leftrightarrow \text{Ind } \bar{\mathcal{P}}'_{(a,b)} = \text{Ind } \mathcal{P}'_{(a,b)} \setminus [\hat{P}(a^+)].$$

Prueba. Dadas las corepresentaciones U de \mathcal{P} y W de $\bar{\mathcal{P}}'$, uno tiene que probar que $[U^\downarrow]^\uparrow \simeq U$ y $[W^\uparrow]^\downarrow \simeq W$. el segundo isomorfismo se puede verificar sin dificultad procediendo rutinariamente usando las fórmulas (4.5) y (4.6).

Para probar el primer isomorfismo, considere la matriz M de una corepresentación reducida U de \mathcal{P} elegida en tal forma que las columnas de cada franja vertical $M_x, x \in \mathcal{P}$, generan U_x . Aplicando a M adecuadas transformaciones \mathbb{G} -elementales de filas, colocamos en su parte inferior las filas linealmente independientes correspondientes a alguna base del \mathbb{G} -subespacio U_b obteniendo todo cero arriba de ellas en el bloque M_{b+B} .

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{cccccccccccccccc}
 & & a & & A & & c_1 & & & & c_n & & B & & b \\
 E_0 \left\{ \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|}
 \hline
 & & \xi I & I & & & & & & & & & & & \\
 \hline
 & & & & I & & & & \xi I & & & & & & \\
 \hline
 & & & & & I & & & & & \xi I & & & & \\
 \hline
 W_0 \left\{ \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|}
 \hline
 & & & & & * & & & X_1 & & & X_n & & & \\
 \hline
 * & * & & & & * & * & S_1 & Y_1 & * & S_n & Y_n & * & * & \\
 \hline
 \end{array} \right. \\
 \hline
 a^- & a^+ & & & & c_1^- & \underbrace{\quad\quad\quad}_{c_1^+} & c_n^- & \underbrace{\quad\quad\quad}_{c_n^+} & & & & & & \\
 \end{array} \\
 \end{array} \quad (4.7)
 \end{array}$$

Además, seleccionamos filas linealmente independientes sobre \mathbb{G} en M_a arriba de la franja horizontal U_b denotando la nueva franja horizontal por E_0 y obteniendo (utilizando transformaciones \mathbb{G} -elementales de filas adecuadas) ceros en la franja horizontal intermedia $Q \cap M_a$. Aplicando transformaciones admisibles de columnas adecuadas al bloque $Q \cap (M_{c_1} \cup \dots \cup M_{c_n})$, podemos dejar allí únicamente aquellas celdas X_1, \dots, X_n las cuales son \mathbb{F} -linealmente independientes por columnas (todas juntas).

Considere cada matriz M_{c_i} ($i = 1, \dots, n$) como una unión de dos franjas verticales $M_{c_i} = M'_{c_i} \cup M''_{c_i}$ donde M''_{c_i} es conformado por las columnas que contienen el bloque X_i , y M'_{c_i} consiste del resto de las columnas. Reducimos el bloque $E_0 \cap (M_a \cup M'_{c_1} \dots \cup M'_{c_n})$ a la forma canónica considerándolo como una corepresentación de una cadena completamente débil $a \prec c_1 \prec \dots \prec c_n$ y se aplica el lema 4.1 (seleccione las formas matriciales $\widehat{T}(a) = \begin{bmatrix} \xi & \mathbf{1} \end{bmatrix}$ y $\widehat{T}(a, c_i) = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & \xi \end{bmatrix}$, $i = 1, \dots, n$). Omita los sumandos directos $\widehat{P}(a)$ los cuales son separados como sumandos directos de toda la matriz M . Haciendo adiciones de filas, vuelva ceros bajo los bloques identidad I en M_a y obtendrá el bloque M_a como se muestra en (4.7).

Entonces usando adiciones de filas $Q \xrightarrow{\mathbb{G}} E_0$ y adiciones de columna $M_a \xrightarrow{\mathbb{F}} M_{\{c_1, \dots, c_n\}}$ anulamos todos los bloques M''_{c_i} (esto es posible porque la matriz $X_1 \cup \dots \cup X_n$ puede ser vista como una corepresentación de una cadena completamente débil $c_1 \prec \dots \prec c_n$ y entonces presentada como una suma directa de bloques

triviales de la forma mencionada en el lema 4.1). Observe que los bloques matriciales S_i y $X_i \cup Y_i$ corresponden a los subespacios S_i y H_i respectivamente, considerados arriba en el procedimiento de integración.

Finalmente anulamos el bloque $E_0 \cap A$ (haciendo adiciones de columna $M_a \xrightarrow{\mathbb{G}} M_A$) y obtenemos la forma matricial que se muestra en (4.7). Una comparación inmediata con las fórmulas (4.5) y (4.6) confirman evidentemente que en la franja horizontal $W_0 = Q \cup U_b$ tenemos justamente la corepresentación derivada reducida U^\downarrow y el isomorfismo $(U^\downarrow)^\uparrow \simeq U$ se tiene. Con esto la prueba queda completa. \square

Nota 3. Si una corepresentación indescomponible U de un poset equipado \mathcal{P} proviene de integrar una corepresentación W ($U = W^\uparrow$) no necesariamente cierta del poset $\overline{\mathcal{P}}$, entonces denotamos esta operación por $U = \text{Int}_Q W_1$ donde $\text{Supp } W = Q$ y $W|_Q = W_1$, o simplemente $U = \text{Int } W_1$ si es claro cual es el soporte de W .

4.4. La completación

Recordemos de [41] que una pareja de puntos débilmente comparables $a \prec b$ de un poset equipado \mathcal{P} es *especial* si $\mathcal{P} = a^\nabla + b_\Delta + \Sigma$, donde $a \prec x \prec b$ para todo $x \in \Sigma$, automáticamente Σ es un subconjunto de puntos débiles (posiblemente vacío). La completación de \mathcal{P} con respecto a la pareja especial (a, b) es una transición de \mathcal{P} a un poset equipado $\overline{\mathcal{P}} = \overline{\mathcal{P}}_{(a,b)}$ ligeramente distinto de \mathcal{P} , obtenido de \mathcal{P} fortaleciendo la relación débil $a \prec b$, es decir, convirtiéndola en la relación fuerte $a \triangleleft b$. Los subconjuntos $A = a^\nabla \setminus a$ y $B = b_\Delta \setminus b$ pueden ser vacíos.

Note que $\text{corep } \overline{\mathcal{P}}$ es una subcategoría plena de la categoría $\text{corep } \mathcal{P}$, y la siguiente afirmación se cumple.

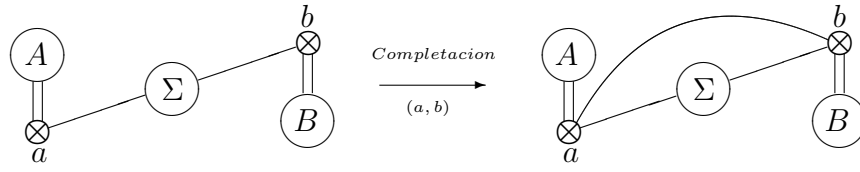


Figura 4.4. Descripción combinatorial del algoritmo de completación.

Lema 4.7. *La categoría $\text{corep } \overline{\mathcal{P}}$ coincide con la subcategoría plena de $\text{corep } \mathcal{P}$ formada por los objetos sin sumandos directos $\widehat{P}(a)$, en particular,*

$$\text{Ind } \overline{\mathcal{P}} = (\text{Ind } \mathcal{P}) \setminus \widehat{P}(a)$$

Prueba. Sea $U \in \text{corep } \mathcal{P} \setminus \text{corep } \overline{\mathcal{P}}$, es decir que $\tilde{U}_a \not\subset U_b$. Considere la matriz M de U y seleccione en su parte inferior la franja horizontal correspondiente al \mathbb{G} -subespacio maximal $U_b^{\mathbb{G}}$ de el \mathbb{F} -espacio U_b . Se tienen ceros arriba de esta franja en el bloque M_B . Asuma que la matriz M es escogida de tal forma que las columnas de la franja M_b generan todo el espacio U_b . Reduzca las partes superiores de las matrices M_a, M_b (situadas arriba de la franja horizontal $U_b^{\mathbb{G}}$), como una corepresentación de una cadena completamente débil $a \prec b$, a la forma canónica de acuerdo al lema 4.1. En ese lugar se pueden poner únicamente los bloques $\widehat{P}(a)$ y $\widehat{P}(b)$, en otro caso el \mathbb{G} -espacio $U_b^{\mathbb{G}}$ se podría extender más.

$$M = \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} & a & A & \Sigma & B & b & \\ \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|} \hline I & & & & & & L \\ \hline & & * & * & & & I \\ \hline & & * & * & & & \\ \hline & * & * & * & * & * & U_b^{\mathbb{G}} \\ \hline \end{array} \\ \end{array} \end{array} \quad (4.8)$$

Como cada columna del bloque M_Σ es una combinación \mathbb{F} -lineal de las columnas de las franjas M_a y M_b (teniendo en cuenta la suposición sobre la elección de U_b), el bloque $M_\Sigma \cap L$ está sobre \mathbb{F} y entonces puede ser anulado por adiciones de columnas $M_a \xrightarrow{\mathbb{F}} M_\Sigma$. Se pueden anular también los bloques $M_A \cap L$ (por adiciones de columnas $M_a \xrightarrow{\mathbb{G}} M_A$), así como también todos los elementos bajo la matriz identidad I en M_a (por transformaciones de filas sobre \mathbb{G}). Entonces la matriz M toma la forma (4.8) y evidentemente contiene al menos un sumando directo no trivial $\widehat{P}(a)$, es decir que U lo contiene. \square

Capítulo 5

Clasificación de las corepresentaciones de los posets equipados de un parámetro conteniendo a K_6 ó K_7

En este capítulo se presenta una clasificación completa (en forma matricial) de las corepresentaciones indescomponibles ciertas de los posets equipados K_6 , K_7 , A_{25} , A_{28} , A_{29} , A_{33} , A_{34} , A_{38} , A_{39} , A_{41} , A_{42} , A_{45} , A_{46} y sus posets duales, sobre cualquier extensión cuadrática de campos. La clasificación de las corepresentaciones indescomponibles esta basada esencialmente en la del poset crítico K_6 .

En la sección 5.1 se da la notación necesaria para interpretar la clasificación de las corepresentaciones indescomponibles de K_6 . También se presentan algunas convenciones que se usaran en adelante (incluso en el capítulo 6). En la sección 5.2 se encuentra la clasificación de corepresentaciones de los posets K_6 y A_{25} , además se dará la prueba del teorema C1 (escrito con detalles en este capítulo como el teorema 5.1). En las secciones 5.3, 5.4 y 5.6 se presenta la clasificación de las corepresentaciones indescomponibles de los posets ciertos de un parámetro que contienen a K_6 . En la sección 5.4 se definen los posets equipados con subconjuntos bien insertados de tipo K_6 y se listan varias propiedades. Finalmente, en la sección 5.7 se prueba el teorema C3 (en esta sección se presenta con detalles como el teorema 5.11).

5.1. Notaciones

En todo el texto usaremos la siguiente notación para los tipos de corepresentaciones matriciales. \overleftarrow{A} (resp. A^\uparrow) es una matriz que proviene de A adicionando una columna (resp. fila) de ceros sobre el lado izquierdo (resp. por arriba), análogamente son definidas \overrightarrow{A} , A^\downarrow , incluso si A tiene varias flechas adicionamos varias columnas o filas de ceros. $J_n(\lambda)$ es un bloque de Jordan de orden n con valor propio λ , las identidades pueden ser escritas tanto arriba como abajo de la diagonal, y $J_n^+(\lambda)$ (resp. $J_n^-(\lambda)$) significa el bloque de Jordan con identidades escritas solamente arriba (resp. abajo) de la diagonal principal.

Se definen $P_1 = I_1$ y $P_2 = \begin{pmatrix} 1 & \xi \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, también se definen la versión par e impar (más generales) como

$$P_{2k} = \bigoplus_{i=1}^k P_2, \quad P_{2k+1} = P_{2k} \oplus I_1 = \left[\begin{array}{c|c} & 0 \\ & \vdots \\ P_{2k}^\downarrow & 0 \\ & 1 \end{array} \right], \quad (k \leq 0).$$

Anotamos que cuando $k = 0$, P_0 denota una matriz formal con cero columnas y cero filas.

$$\text{Tomamos } R_{2k+2} = P_{2k} \oplus \boxed{1 \ \xi}, \quad R_{2k+3} = I_1 \oplus P_{2k} \oplus \boxed{1 \ \xi} \quad \text{y} \quad C_n = \left[\begin{array}{c|c} & 0 \\ & \vdots \\ \xi I_n & 0 \\ & 1 \end{array} \right],$$

en particular, $R_2 = \boxed{1 \ \xi}$ y $R_3 = I_1 \oplus \boxed{1 \ \xi}$.

Se asignará un número fijo m a cada tipo de corepresentación indescomponible de un poset \mathcal{P} , y se denotará por $(\mathcal{P} - m)$. Cuando sea necesario referirse a un tipo de corepresentación específico de una cierta dimensión dada n , también se adjuntará un subíndice y se escribirá $_n(\mathcal{P} - m)$. Para las corepresentaciones de

tipo finito se omitirán los paréntesis y los subíndices. Si el poset \mathcal{P} tiene un solo tipo de corepresentación indescomponible, esta se denotará por (\mathcal{P}) .

Sea \mathcal{P} un poset equipado con un punto fuerte maximal (resp. minimal) ζ y $\mathcal{Q} = \mathcal{P} \setminus \zeta$. El subconjunto de todos los puntos comparables en \mathcal{Q} con el punto ζ se denota por \mathcal{K} . Si una corepresentación indescomponible U del poset \mathcal{Q} de tipo $(\mathcal{Q} - m)$ satisface la condición $\tilde{U}_{\mathcal{K}} \neq U_0$ (resp. $\underline{U}_{\mathcal{K}} \neq 0$), entonces U puede ser extendido a una corepresentación V de \mathcal{P} definida por $V_x = U_x$ si $x \in \mathcal{Q}$ y V_{ζ} es un \mathbb{G} -espacio arbitrario que contiene propiamente al \mathbb{G} -espacio $\tilde{U}_{\mathcal{K}}$ (resp. $V_{\zeta} = \bigcap_{x \in \mathcal{K}} \underline{U}_x$). El tipo de corepresentación V del poset \mathcal{P} construido en esta forma es denotado por $(\mathcal{Q} - m)_{\zeta}^{\zeta}$ (resp. $(\mathcal{Q} - m)_{\zeta}$) bajo la suposición de que la condición $\dim_{\mathbb{G}} U_{\zeta} / \tilde{U}_{\mathcal{K}} = 1$ (resp. $\dim_{\mathbb{G}} \underline{U}_{\mathcal{K}} / U_{\zeta} = 1$) y que la corepresentación no depende, salvo isomorfismo, de la elección de V_{ζ} .

Si \mathcal{P} contiene puntos fuertes ζ y η maximal y minimal respectivamente, entonces una combinación de dos de los pasos anteriores producirán una corepresentación del tipo $(\mathcal{Q} - m)_{\eta}^{\zeta}$ donde $\mathcal{Q} = \mathcal{P} \setminus \{\zeta, \eta\}$. En algunos casos se considera un punto débil $p \in \mathcal{P}$ maximal o minimal, en esta situación se trabaja con \mathbb{F} -subespacios en vez de \mathbb{G} -subespacios.

5.2. Clasificación de las corepresentaciones indescomponibles de los posets K_6, A_{25}

El cálculo de la serie de corepresentaciones para el poset K_6 se reduce al problema matricial del haz clásico, resuelto completamente por Kronecker [17] (véase [11, 44] para soluciones cortas recientes). El resto de corepresentaciones ciertas de K_6 se obtienen mediante la diferenciación de las corepresentaciones del poset A_{25} . Por esto la clasificación de las corepresentaciones de ambos posets se obtiene simultáneamente.

Teorema 5.1. *El poset crítico $K_6 = \{a, b\}$ posee 6 tipos de corepresentaciones indescomponibles sobre la pareja (\mathbb{F}, \mathbb{G}) (salvo dualidad y permutación de los puntos), listados junto con sus corepresentaciones duales en forma matricial en la tabla 5.1.*

tipo	dmin	paso	$f(d)$	A	B	k_1	k_2	k_3	l_1	l_2	l_3
1	$\begin{matrix} 1 \\ 1 & 2 \end{matrix}$	μ	1	I_n	$\vec{I}_n + \xi \overleftarrow{I}_n$	0	1	1	0	0	0
1^*	$\begin{matrix} 1 \\ 1 & 0 \end{matrix}$	μ	1	I_{n+1}	$I_n^\uparrow + \xi I_n^\downarrow$	0	0	0	0	1	1
2	$\begin{matrix} 1 \\ 2 & 2 \end{matrix}$	2μ	2	C_{2n+1}	$C_{2n+1} + \overleftrightarrow{I}_{2n}$	1	1	2	0	0	0
2^*	$\begin{matrix} 1 \\ 0 & 0 \end{matrix}$	2μ	2	I_{2n}^\downarrow	$I_{2n}^\downarrow + C_{2n-1}^{\uparrow\uparrow}$	0	0	0	1	1	2
$3 = \tilde{3}^*$	$\begin{matrix} 1 \\ 2 & 0 \end{matrix}$	2μ	2	$\vec{I}_{2n+1} + \xi \overleftarrow{I}_{2n+1}$	I_{2n}^\uparrow	1	0	0	0	1	0
$4 = 4^*$	$\begin{matrix} 2 \\ 2 & 2 \end{matrix}$	2μ	0	P_{2n}	R_{2n}^\uparrow	0	1	0	0	1	0
$5 = 5^*$	$\begin{matrix} 1 \\ 1 & 1 \end{matrix}$	μ	0	I_n	$I_n + \xi J_n^+(0)$	0	0	1	0	0	1
$6 = 6^*$	$\begin{matrix} 1 \\ 1 & 1 \end{matrix}$	μ	0	I_n	$\xi I_n + X$	0	0	0	0	0	0

Tabla 5.1. Clasificación de las corepresentaciones indescomponibles del poset crítico K_6 .

En la tabla 5.1 μ es la raíz imaginaria $(1, 1, 1)$ de la forma cuadrática de Tits asociada al poset K_6 . El bloque marcado con X de la serie de corepresentaciones $(K_6 - 6)$ representa un bloque indescomponible de Frobenius sobre \mathbb{F} . La corepresentación $K_6 - \tilde{i}$ se obtiene de $K_6 - i$ cambiando el punto a por b y viceversa. además se utilizan las siguientes convenciones:

$$k_1 = \dim_{\mathbb{G}} \underline{U}_a, \quad k_2 = \dim_{\mathbb{G}} \underline{U}_b, \quad k_3 = \dim_{\mathbb{F}} U_a \cap U_b,$$

$$l_1 = \text{codim}_{\mathbb{G}} \tilde{U}_a, \quad l_2 = \text{codim}_{\mathbb{G}} \tilde{U}_b, \quad l_3 = \text{codim}_{\mathbb{F}} U_a + U_b.$$

Proposición 5.2. *Cada uno de los posets $A_{25} = \{a; b \triangleleft \eta\}$ y $A_{25}^* = \{a; \eta \triangleleft b\}$ tiene 5 tipos de corepresentaciones indescomponibles ciertas en el punto η y se listan en la tabla 5.2*

${}_n(A_{25} - 1) = {}_n(K_6 - 1^*)^\eta$	${}_n(A_{25}^* - 1) = {}_n(K_6 - 1)_\eta$
${}_{2n-1}(A_{25} - 3) = {}_{2n-1}(K_6 - 2^*)^\eta$	${}_{2n-1}(A_{25}^* - 3) = {}_{2n-1}(K_6 - 2)_\eta$
${}_{2n-1}(A_{25} - 4) = {}_{2n-1}(K_6 - 3)^\eta$	${}_{2n-1}(A_{25}^* - 4) = {}_{2n-1}(K_6 - 3^*)_\eta$
${}_{2n}(A_{25} - 5) = {}_{2n}(K_6 - 4)^\eta$	${}_{2n}(A_{25}^* - 5) = {}_{2n}(K_6 - 4)_\eta$
${}_2(A_{25} - 2) = F_{14} - C$	
${}_{2n+2}(A_{25} - 2) = \text{Int } {}_{2n+1}(A_{25} - 3)$	${}_{2n}(A_{25}^* - 2) = {}_{2n}(A_{25} - 2)^*$

Tabla 5.2. Descripción de las corepresentaciones de A_{25} . En todos los casos $n \geq 1$.

Prueba. Considere una corepresentación U de K_6 indescomponible y cierta.

Primer caso: $\tilde{U}_b \neq U_0$. Entonces U se puede extender de forma natural a una corepresentación V de A_{25} , con $V|_{\{a,b\}} = U$ donde $V_\eta = \tilde{U}_b$. Una corepresentación como V no es cierta en η y se obtiene por integración $\widehat{\text{VII}}$ de una corepresentación W de menor dimensión con soporte en A'_{25} (observe que la pareja (a, η) de A_{25} es $\widehat{\text{VII}}$ -adecuada, la figura 5.1 muestra la acción combinatorial de A'_{25}). Más precisamente la clasificación se obtiene inductivamente por integración de corepresentaciones W tales que $\text{Supp } W = \{a^+, b\}$ y $W|_{\{a^+, b\}} \in \{F_{14} - A, F_{14} - B, F_{14} - C\}$, es decir que la clasificación se obtiene integrado inicialmente las corepresentaciones del poset finito F_{14} (vea el apéndice A).

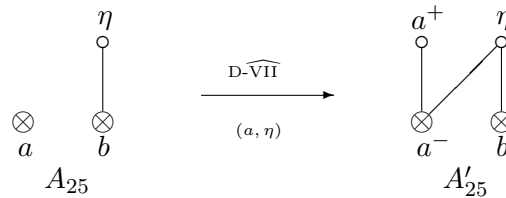


Figura 5.1. Descripción combinatorial de la diferenciación- $\widehat{\text{VII}}$ aplicada al poset A_{25} .

En particular se tienen tres definiciones recursivas (siguiendo la notación de la página 41), la primera ${}_2(K_6 - 1^*) = \text{Int}(F_{14} - A)$; ${}_n(A_{25} - 1) = \text{Int } {}_n(K_6 - 1^*)$; ${}_n(K_6 - 1^*) = \text{Int } {}_{n-1}(A_{25} - 1)$, vea el ejemplo de la tabla 5.3. La segunda ${}_3(K_6 - 2^*) = \text{Int}(F_{14} - C)$; ${}_n(A_{25} - 3) = \text{Int } {}_n(K_6 - 2^*)$; ${}_n(A_{25} - 2) = \text{Int } {}_{n-1}(A_{25} - 3)$; ${}_n(K_6 - 2^*) =$

$\text{Int}_{n-1}(A_{25} - 2)$. La tercera ${}_2(K_6 - 4) = \text{Int}(F_{14} - B)$; ${}_{2n}(A_{25} - 5) = \text{Int}_{2n}(K_6 - 4)$; ${}_{2n+1}(K_6 - 3) = \text{Int}_{2n}(A_{25} - 5)$; ${}_{2n+1}(K_6 - 4) = \text{Int}_{2n+1}(K_6 - 3)$.

$$\begin{array}{ccccccc}
 \begin{array}{c} a^+ \quad b \\ \boxed{1 \quad 1} \\ F_{14} - A
 \end{array} & \xrightarrow{\text{Int}} & \begin{array}{c} a^- \quad b \\ \boxed{1 \quad \xi \quad 0 \\ 0 \quad 1 \quad 1} \\ {}_2(K_6 - 1^*)
 \end{array} & \xrightarrow{\text{Int}} & \begin{array}{c} b \quad a^- \quad a^+ \\ \boxed{1 \quad \xi \quad 0 \quad 1 \\ 0 \quad 1 \quad 1 \quad 0} \\ {}_2(A_{25} - 1)
 \end{array} & \xrightarrow{\text{Int}} & \begin{array}{c} a^- \quad b \\ \boxed{1 \quad \xi \quad 0 \quad 0 \quad 0 \\ 0 \quad 1 \quad 0 \quad 1 \quad \xi \\ 0 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 1} \\ {}_3(K_6 - 1^*)
 \end{array} & \xrightarrow{\text{Int}} & \begin{array}{c} b \quad a^- \quad a^+ \\ \boxed{1 \quad \xi \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \\ 0 \quad 1 \quad 0 \quad 1 \quad \xi \quad 0 \\ 0 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 1 \quad 0} \\ {}_3(A_{25} - 1)
 \end{array} & \longrightarrow & \cdots
 \end{array}$$

Tabla 5.3. Ejemplo de integración matricial de las corepresentaciones de K_6 y A_{25} , comenzando con $F_{14} - A$.

Segundo caso: $\underset{\sim}{U}_b \neq 0$. Entonces U se puede extender a alguna corepresentación de A_{25}^* (en forma análoga al caso anterior) y por consideraciones duales se obtiene la clasificación de indescomponibles para A_{25}^* y las corepresentaciones duales para K_6 del primer caso. Otra forma de obtener esta clasificación es aplicar directamente dualidad y el lema 2.1, a las corepresentaciones de A_{25} y K_6 obtenidas en el caso anterior.

Tercer caso: $\tilde{U}_b = U_0$ y $\underset{\sim}{U}_b = 0$. Entonces la matriz M de corepresentación asociada a U tiene la forma $\begin{array}{c} a \quad b \\ \boxed{* \quad I_n} \end{array}$. Para continuar reduciendo la corepresentación M teniendo cuidado de no cambiar el bloque identidad en M_b solo es permitido aplicar transformaciones \mathbb{F} -elementales de filas sobre toda la matriz y transformaciones \mathbb{F} -elementales de forma independiente sobre los bloques M_a and M_b .

Este problema corresponde precisamente al problema clásico del haz (Kronecker) sobre el campo \mathbb{F} , a saber, como el bloque cuadrado M_a tiene coeficientes sobre \mathbb{G} , tomamos $A = \text{Re}(M_a)$ y $B = \text{Im}(M_a)$, estas matrices están sobre \mathbb{F} y las transformaciones elementales anteriores corresponden a las siguientes transformaciones de similitud de forma simultanea

$$(A, B) \mapsto (X^{-1}AY, X^{-1}BY),$$

donde X, Y son matrices cuadradas no singulares sobre \mathbb{F} .

Los cuatro tipos de soluciones de este problema (vea por ejemplo [11, 44]) inducen las corepresentaciones indescomponibles de K_6 de los tipos $\tilde{1}, \tilde{1}^*, 5$, y 6 (la serie). \square

5.3. Clasificación de las corepresentaciones indescomponibles de los posets $A_{28}, A_{29}, A_{33}, A_{34}, A_{45}$ y sus duales

Los posets A_{28}, A_{29}, A_{34} y A_{45} tienen parejas $\widehat{\text{VII}}$ -adecuadas (A_{45} se obtiene por completación de A_{33}) entonces sus corepresentaciones indescomponibles se obtienen por $\widehat{\text{VII}}$ -integración de corepresentaciones indescomponibles (no necesariamente ciertas de su poset derivado). En particular, la pareja (a, η) del poset $A_{28} = \{a \triangleleft \zeta; b \triangleleft \eta\}$ es $\widehat{\text{VII}}$ -adecuada, vea la figura 5.2, y su único tipo de corepresentación indescomponible se obtiene integrando corepresentaciones indescomponibles de A'_{28} ciertas solamente en $\{a^- \triangleleft \zeta; b\}$ del tipo $(A_{25} - 3)$. En este caso el tipo de corepresentación (A_{28}) coincide con la corepresentación extendida $(A_{25} - 3)^\zeta$. La clasificación completa de todos los posets se presenta en la siguiente proposición 5.3.

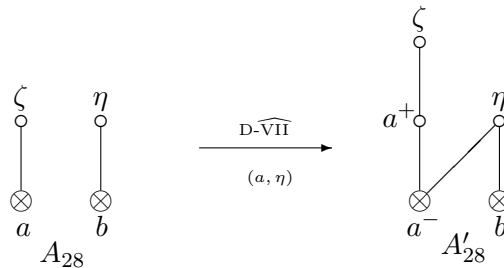


Figura 5.2. Descripción combinatorial de la diferenciación $\widehat{\text{VII}}$ aplicada al poset A_{28} .

Proposición 5.3. *Cada uno de los posets $A_{28} = \{a \triangleleft \zeta; b \triangleleft \eta\}$, $A_{29} = \{a; b \triangleleft \eta \triangleleft \theta\}$, $A_{33} = \{a \triangleleft \zeta; \eta \triangleleft b\}$, $A_{34} = \{a; \eta \triangleleft b \triangleleft \theta\}$, $A_{45} = \{a \triangleleft \zeta \triangleright \eta \triangleleft b\}$ y sus posets duales tiene un tipo de corepresentación indescomponible cierta en todos sus puntos fuertes que se listan en la tabla 5.4.*

${}_{2n-1}(A_{28}) = {}_{2n-1}(A_{25} - 3)^\zeta$	${}_{2n-1}(A_{28}^*) = {}_{2n-1}(A_{25}^* - 3)_\zeta$
${}_{2n}(A_{29}) = {}_{2n}(A_{25} - 2)^\theta$	${}_{2n}(A_{29}^*) = {}_{2n}(A_{25}^* - 2)_\theta$
${}_{2n-1}(A_{33}) = {}_{2n-1}(A_{25}^* - 4)^\zeta$	${}_{2n-1}(A_{45}) = {}_{2n-1}(A_{25}^* - 4)_\zeta$
${}_{2n}(A_{34}) = {}_{2n}(A_{25}^* - 5)^\theta$	

Tabla 5.4. Descripción de las corepresentaciones de $A_{28}, A_{29}, A_{33}, A_{34}$ y A_{45} . En todos los casos $n \geq 1$.

5.4. Clasificación de las corepresentaciones indescomponibles de los posets $A_{38}, A_{39}, A_{41}, A_{46}$ y sus duales

Para calcular las corepresentaciones de los posets A_{38}, A_{38}^* y A_{41} reducimos el problema matricial mixto a un problema matricial sobre representaciones del poset K_8 , esta clasificación se encuentra en [38]. Análogamente el problema matricial sobre corepresentaciones de K_8 puede ser reducido a uno sobre representaciones de posets equipados.

Sea U una representación indescomponible de $K_8 = \{\varrho, \sigma, a\}$ y M su respectiva representación matricial¹. Como $\{\varrho, \sigma\} \subset K_8$ es un subposet ordinario, los

¹Los bloques M_ϱ, M_σ tienen coeficientes sobre \mathbb{F} , y M_a sobre \mathbb{G} , adicionalmente podemos aplicar transformaciones \mathbb{F} -elementales de filas sobre toda la matriz, así como transformaciones \mathbb{F} -elementales (resp. \mathbb{G} -elementales) de columnas, de manera independiente, a las franjas correspondientes a los puntos ϱ, σ (resp. al punto a).

bloques M_ρ , M_σ pueden ser reducidos como una díada ordinaria. Observe que M_a debe ser indescomponible y que tiene coeficientes sobre \mathbb{G} .

Asignamos a cada franja horizontal de M un punto del poset A_{41} como en la figura 5.3. Para preservar los bloques reducidos M_r y M_s podemos aplicar transformaciones \mathbb{G} -elementales de columna al bloque M_a , transformaciones \mathbb{F} -elementales de filas independientes de cada franja horizontal y adiciones de fila sobre \mathbb{F} entre las franjas horizontales las cuales sugeridas por el poset A_{41} .

Por lo tanto, podemos establecer una correspondencia biyectiva entre las representaciones indescomponibles de K_8 y corepresentaciones indescomponibles de los subposets de A_{41} .

La matriz de la figura 5.3 corresponde a una representación matricial reducida de K_8 . Los campos sobre los cuales se hacen las transformaciones elementales de filas y columnas se escriben al margen de la matriz ya sea sobre \mathbb{F} o \mathbb{G} .

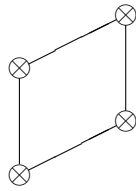
$$\mathbf{M} = \begin{array}{c} \mathbb{F} \\ \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline & r & s & a \\ \hline I & & I & * \\ \hline & I & & * \\ \hline & & & I \\ \hline & & & * \\ \hline & & & * \\ \hline \end{array} \\ \mathbb{F} \quad \mathbb{F} \quad \mathbb{G} \end{array}$$


Figura 5.3. Representación matricial reducida indescomponible M de K_8 (los bloques vacíos denotan bloques de ceros).

Nota 4. Si M es una corepresentación matricial indescomponible de K_8 podemos reducirla como en el caso de representaciones. La matriz de la figura 5.3 también corresponde a una corepresentación matricial reducida de K_8 pero los campos sobre los cuales se efectúan las transformaciones cambian, es decir, en vez de hacer transformaciones sobre el campo \mathbb{F} se hacen sobre el campo \mathbb{G} y viceversa. Entonces podemos establecer una relación análoga entre las corepresentaciones

indescomponibles de K_8 y las representaciones indescomponibles de A_{38}, A_{38}^*, A_{41} y K_6 .

Nota 5. Una representación indescomponible cierta no trivial de K_8 solo corresponde a alguna corepresentación indescomponible de A_{38}, A_{38}^*, A_{41} o K_6 . Además, la serie de representaciones de K_8 esta relacionada a la serie de corepresentaciones de K_6 , entonces la serie se reduce al problema clásico del haz sobre \mathbb{F} .

Nuestros cálculos son basados en la clasificación de representaciones de K_8 sobre la pareja (\mathbb{R}, \mathbb{C}) dada en [38]. Esta clasificación fue obtenida (exceptuando la serie de representaciones) usando la técnica de diferenciación VII y completación, que son validas para cualquier extensión cuadrática de campos (\mathbb{F}, \mathbb{G}) . De este modo, las formas matriciales de representaciones descritas obtenidas allí coinciden con la clasificación matricial sobre la pareja (\mathbb{F}, \mathbb{G}) .

Proposición 5.4. Cada uno de los posets $A_{38} = \{a \prec q \succ b\}$ y $A_{38}^* = \{a \succ q \prec b\}$ tiene 4 tipos de corepresentaciones indescomponibles ciertas en el punto q (salvo automorfismo de posets equipados), teniendo las siguientes formas matriciales:

$$\mu : \begin{matrix} 1 & & 0 \\ & 1 & \\ & & 1 \end{matrix} \quad (\text{salvo permutación de los puntos } a \leftrightarrow b) \quad \mu : \begin{matrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 0 \end{matrix} \begin{matrix} \\ \\ 1 \end{matrix}$$

tipo	dmin	paso	f(d)	A	B	P
1	$\begin{matrix} 1 & & 0 \\ & 1 & \\ & & 0 \end{matrix}$	μ	$\mathbf{1}$	I_n^\downarrow	$I_n^\downarrow + C_{n-1}^\uparrow$	$\begin{matrix} 0 \\ \xi \\ \vdots \\ 0 \end{matrix}$
2	$\begin{matrix} 1 & & 0 \\ & 1 & \\ & & 1 \end{matrix}$	μ	$\mathbf{1}$	I_n^\downarrow	$I_{n+1} + \xi J_{n+1}^-(0)$	$\begin{matrix} \xi \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{matrix}$
3	$\begin{matrix} 1 & & 1 \\ & 1 & \\ & & 1 \end{matrix}$	μ	$\mathbf{1}$	I_n	$I_n + \xi J_n^-(0)$	$\begin{matrix} \xi \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{matrix}$
4	$\begin{matrix} 1 & & 0 \\ & 0 & 2 \\ & & 0 \end{matrix}$	2μ	$\mathbf{2}$	I_{2n}^\downarrow	$I_{2n}^\downarrow + C_{2n-1}^\uparrow$	$\begin{matrix} \xi \\ 0 \\ 0 \\ \xi \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{matrix}$

tipo	dmin	paso	f(d)	A	B	Q
1	$\begin{matrix} 1 & & 1 \\ & 1 & \\ & & 1 \end{matrix}$	μ	$\mathbf{1}$	C_n^\uparrow	$C_n^\uparrow + J_{n+1}^+(0)$	$\begin{matrix} \xi \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{matrix}$
2	$\begin{matrix} 1 & & 1 \\ & 1 & \\ & & 0 \end{matrix}$	μ	$\mathbf{1}$	C_n^\uparrow	$I_n^\downarrow + \xi I_n^\uparrow$	$\begin{matrix} \xi \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{matrix}$
3	$\begin{matrix} 1 & & 0 \\ & 0 & 1 \\ & & 0 \end{matrix}$	μ	$\mathbf{1}$	ξI_n^\uparrow	$\xi I_n^\uparrow + I_n^\downarrow$	$\begin{matrix} \xi \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{matrix}$
4	$\begin{matrix} 1 & & 0 \\ & 0 & 2 \\ & & 0 \end{matrix}$	2μ	$\mathbf{2}$	C_{2n-1}^\uparrow	$C_{2n-1}^\uparrow + I_{2n}^\downarrow$	$\begin{matrix} \xi \\ 0 \\ 0 \\ \xi \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{matrix}$

Prueba. Basados en las consideraciones anteriores, es claro que las corepresentaciones indescomponibles de A_{38} están en biyección con las representaciones indescomponibles U de K_8 tales que $U_r \cap U_s \neq 0$ y $U_r + U_s = U_0$, de forma dual las corepresentaciones de A_{38}^* están en correspondencia aquellas representaciones de K_8 que satisfacen $U_r \cap U_s = 0$ y $U_r + U_s \neq U_0$. \square

$n(A_{38} - 2) = n(K_6 - \tilde{1}^*)^q$	$n(A_{38}^* - 2) = n(K_6 - \tilde{1})_q$
$n(A_{38} - 3) = n(K_6 - 5)^q$	$n(A_{38}^* - 3) = n(K_6 - 5)_q$
${}_{2n-1}(A_{38} - 4) = {}_{2n-1}(K_6 - 2^*)^q$	${}_{2n-1}(A_{38}^* - 4) = {}_{2n-1}(K_6 - 2)_q$

Tabla 5.5. Descripción de algunas corepresentaciones indescomponibles de A_{38} en forma breve. En todos los casos $n \geq 1$.

Proposición 5.5. *Cada uno de los posets $A_{41} = \{p \prec \{a, b\} \prec q\}$, y $A_{46} = \{p \prec \{a, b\} \prec q; p \triangleleft q\}$ tiene 1 tipo, salvo automorfismo de posets equipados, de corepresentaciones indescomponibles ciertas en los puntos p y q teniendo las siguientes formas matriciales:*

$$n(A_{41}) = n(A_{46}) = n(K_6 - 5)_p^q, \quad \text{donde } n \geq 2.$$

Prueba. Para el caso de $A_{41} = \{p \prec \{a, b\} \prec q\}$ consideramos las representaciones de K_8 que satisfacen $U_r \cap U_s \neq 0$ y $U_r + U_s \neq U_0$. La pareja (p, q) de A_{41} es especial para la completación y $\overline{A_{41}} = A_{46}$, por propiedades de la completación (vea sección 4.4) la clasificación de corepresentaciones ciertas indescomponibles de ambos posets coinciden. \square

Nota 6. Considerando las representaciones de K_8 con la condición $U_r \cap U_s = 0$ y $U_r + U_s = U_0$, se corrobora la clasificación de corepresentaciones de K_6 obtenida en el teorema 5.1.

Algunas corepresentaciones de A_{38} y A_{39} están relacionadas por medio de la diferenciación $\widehat{\text{VII}}$, por esto, algunas corepresentaciones de A_{38} y A_{39} se pueden

expresar en términos de la integración $\widehat{\text{VII}}$ de manera recursiva, en particular se tiene otra forma de expresar las corepresentaciones $(A_{38} - i)$ con $i = 1, 2, 4$.

Proposición 5.6. *Cada uno de los posets $A_{39} = \{a \prec q \succ b \triangleleft \theta\}$ y $A_{39}^* = \{a \succ q \prec b \triangleright \theta\}$ tiene 10 tipos de corepresentaciones indescomponibles ciertas en los puntos p y θ , en el caso de A_{39} se listan en la tabla 5.6.*

${}_2(A_{39} - 1) = F_{15} - A$	${}_{n+1}(A_{39} - 1) = \text{Int}_n(A_{39} - 1)$
${}_1(A_{39} - 2) = F_{15} - B$	${}_n(A_{39} - 2) = \text{Int}_n(A_{38} - \tilde{2})$
${}_1(A_{39} - 3) = F_{14} - A$	${}_n(A_{39} - 3) = \text{Int}_n(A_{38} - 1)$
${}_2(A_{39} - 4) = F_{15} - C$	${}_{n+1}(A_{39} - 4) = \text{Int}_n(A_{39} - 3)$
${}_2(A_{39} - 5) = F_{15} - D$	${}_{n+1}(A_{39} - 5) = \text{Int}_n(A_{39} - 5)$
${}_1(A_{39} - 6) = F_{14} - B$	${}_{2n-1}(A_{39} - 6) = \text{Int}_{2n-1}(A_{38} - 4)$
${}_2(A_{39} - 7) = F_{15} - E$	${}_{2n}(A_{39} - 7) = \text{Int}_{2n-1}(A_{39} - 6)$
${}_2(A_{39} - 8) = F_{14} - C$	${}_{2n}(A_{39} - 8) = \text{Int}_{2n-1}(A_{39} - 10)$
${}_3(A_{39} - 9) = F_{15} - G$	${}_{2n+1}(A_{39} - 9) = \text{Int}_{2n}(A_{39} - 8)$
${}_3(A_{39} - 10) = F_{15} - F$	${}_{2n+1}(A_{39} - 10) = \text{Int}_{2n-1}(A_{39} - 9)$

Tabla 5.6. Clasificación de corepresentaciones de A_{39} . En todos los casos $n \geq 2$.

Prueba. Si U es una corepresentación indescomponible de A_{38} tal que $\tilde{U}_a \neq U_0$ o $\tilde{U}_b \neq U_0$, entonces U puede ser extendida naturalmente a una corepresentación indescomponible no cierta V de A_{39} (asuma por ejemplo que $\tilde{U}_b \neq U_0$, el otro caso es análogo), V se define de tal forma que $V|_{A_{38}} = U$ y $V_\theta = \tilde{U}_b$. La pareja (a, θ) de A_{39} es $\widehat{\text{VII}}$ -adecuada y una corepresentación como V se obtiene por $\widehat{\text{VII}}$ -integración de una corepresentación de menor dimensión con soporte en A'_{39} . Las corepresentaciones de A_{39}^* se obtienen por dualidad y aplicando el lema 2.1.

Para las corepresentaciones del poset A_{39}^* se tiene la siguiente convención, $(A_{39^*} - i) = (A_{39} - i)^*$ siempre que $i = 1, 4, 5, 8, 9, 10$, para el caso $(A_{39^*} - 7)$ se aplica dualidad y el lema 2.1, el resto se obtiene como sigue: $(A_{39^*} - 2) = (A_{38}^* - 2)_\theta$; $(A_{39^*} - 3) = (A_{38}^* - 1)_\theta$; $(A_{39^*} - 6) = (A_{38}^* - 4)_\theta$. \square

Utilizando la clasificación de las corepresentaciones de A_{39} se obtiene una nueva forma de expresar algunas corepresentaciones de A_{38} , partiendo de las corepresentaciones del poset finito F_{13} (vea el apéndice A) y son presentadas en la tabla 5.7.

${}_1(A_{38} - 1) = F_{13} - A$	${}_{n+1}(A_{38} - 1) = \text{Int}_n(A_{39} - 4)$
${}_1(A_{38} - \tilde{2}) = F_{13} - A$	${}_{n+1}(A_{38} - \tilde{2}) = \text{Int}_n(A_{39} - 2)$
${}_1(A_{38} - 4) = F_{13} - B$	${}_{2n+1}(A_{38} - 4) = \text{Int}_{2n}(A_{39} - 7)$

Tabla 5.7. Otra descripción para algunas corepresentaciones de A_{38} . En todos los casos $n \geq 1$.

Nota 7. Cuando estudiamos el caso en que U satisface la condición $\tilde{U}_a = U_0$ y $\tilde{U}_b = U_0$, se obtiene la corepresentación $(A_{38} - 3)$.

5.5. Posets con subconjuntos bien insertados de tipo K_6

Además de los algoritmos de diferenciación es importante establecer algunas propiedades invariantes sobre las corepresentaciones de posets, en particular sobre aquellas de posets que contienen a conjuntos críticos. En esta sección se definirán los posets con subconjuntos bien insertados de tipo K_6 , y posteriormente en el capítulo 7 serán probadas, para ello se requiere conocer únicamente la clasificación de corepresentaciones indescomponibles de los posets A_{28} , A_{38} y de una cadena débil (lema 4.1).

Un subposet $K_6 = \{a, b\} \subset \mathcal{P}$ se llama *bien insertado* en \mathcal{P} si los subconjuntos

$$(a \vee b) = \{x \in \mathcal{P} : a \preceq x, b \preceq x\}, \quad (a \wedge b) = \{x \in \mathcal{P} : x \preceq a, x \preceq b\}$$

son cadenas y cada uno de los subconjuntos $N(a)$ y $N(b)$ (de tipo (2.2)) es una cadena con un único punto débil, observe la figura 5.4 en la cual c_1, \dots, c_4 son cadenas ordinarias y X, Y son cadenas completamente débiles.

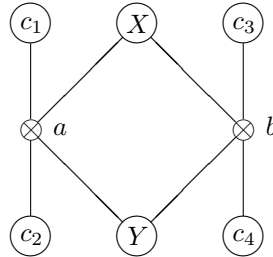


Figura 5.4. Ejemplo de un subconjunto bien insertado de tipo K_6 .

Teorema 5.7. *Si un poset equipado \mathcal{P} contiene un subconjunto bien insertado K_6 , entonces cada corepresentación indescomponible (no necesariamente cierta) U de \mathcal{P} satisface las siguientes condiciones:*

- (1) $U_a \cap U_b = 0$ o $\tilde{U}_a = \tilde{U}_b = U_0$;
- (2) $U_a + U_b = U_0$ o $\underline{U}_a = \underline{U}_b = 0$.

El siguiente corolario y el corolario 6.9 generalizan el lema del zigzag para representaciones de posets ordinarios, para el caso de corepresentaciones de posets equipados y es útil para obtener la clasificación de corepresentaciones y el criterio de un parámetro para posets equipados, la prueba del corolario es inmediata a partir del teorema 5.7.

Corolario 5.8. *Asuma que un posets equipado \mathcal{P} contiene un subconjunto bien insertado K_6 como antes y dos puntos p, q tales que $q \triangleleft a$ y $\{a, b\} < p$, o $q < \{a, b\}$ y $a \triangleleft p$. Entonces cada corepresentación indescomponible de \mathcal{P} no es cierta en uno de los puntos p, q .*

5.6. Clasificación de las corepresentaciones indescomponibles del poset A_{42}

Proposición 5.9. *Cada uno de los posets $A_{42} = \{\{a, b\} \prec q \prec r\}$ y $A_{42}^* = \{r \succ q \succ \{a, b\}\}$ tiene 1 tipo de corepresentación indescomponible cierta en el punto r , salvo automorfismo de posets equipados, teniendo las siguientes formas matriciales*

$$\begin{aligned} {}_1(A_{42}) &= F_{17} & {}_n(A_{42}) &= {}_n(A_{38} - 1)^r \\ {}_1(A_{42})^* &= F_{17} & {}_n(A_{42}^*) &= {}_n(A_{42} - 0)^* \end{aligned}$$

donde ${}_n(A_{42} - 0) := {}_n(A_{38} - 1)$ con $\text{Supp } {}_n(A_{42} - 0) = \{a, b, q\}$ y $n \geq 2$

Prueba. Sea U una corepresentación indescomponible cierta de A_{42} , y descomponga su restricción $V|_{A_{38}}$ donde $A_{38} = \{K_6 \prec q\}$ en una suma directa de representaciones indescomponibles

$$V = \bigoplus_i V^i$$

como U es cierta en r entonces $U_a + U_b \neq U_0$, y aplicando el teorema 5.7, se tiene que $\underline{U}_a = \underline{U}_b = 0$ y equivalentemente $\underline{V}_a = \underline{V}_b = 0$, por lo tanto cada sumando satisface la condición $\underline{V}_a^i = \underline{V}_b^i = 0$, adicionalmente $V_q^i \neq V_0^i$, de lo contrario V^i sería un sumando directo de U . En conclusión, cada sumando V^i o bien es cierto en el punto q y entonces es del tipo $(A_{38} - 1)$ o bien no es cierto en el punto q y de hecho es del tipo $(K_6 - k)$ para $k = 1^*, \bar{1}^*, 2^*, 5$.

Considere la matriz de corepresentación $M = M_U$, ponemos en las franjas correspondientes a los puntos a, b, q las formas canónicas matriciales de las corepresentaciones V^i ya conocidas, y en la franja correspondiente al punto r dejamos el mínimo número de bloques no nulos. En esta última franja se tiene el problema de clasificar las representaciones de una guirnalda \mathcal{G} ordenada como en (5.1), más precisamente la franja del punto r es separada en franjas

horizontales enumeradas de la siguiente forma

$$\begin{aligned} a_1 < b_1 < \{c_1, \tilde{c}_1\} < b_2 < a_2 < \cdots \\ < a_n < b_{2n} < \{c_n, \tilde{c}_n\} < b_{2n+1} < a_{n+1} < d_n < \cdots < d_1 \end{aligned} \quad (5.1)$$

los bloques matriciales correspondientes a los puntos fuertes b_i , c_i , \tilde{c}_i y d_i ($i \geq 1$) en la franja r tienen coeficientes sobre² \mathbb{F} , mientras los bloques correspondientes a los puntos débiles a_i en la franja r tienen coeficientes sobre \mathbb{G} , las transformaciones admisibles entonces son de la forma (a)-(d) (vea sección 2.3) sugeridas por el orden dado en (5.1), en la figura 5.5 se presenta un ejemplo de esta situación.

Nota 8. El problema de la guirnalda se obtiene asociando a cada una de las franjas a_k , b_k , c_k , \tilde{c}_k y d_k ($k \geq 1$) las sumas de corepresentaciones matriciales de ${}_{2k-1}(K_6 - 2^*)$, ${}_k(A_{38} - 1)$, ${}_k(K_6 - 1)$, ${}_k(K_6 - 1^*)$, y ${}_k(K_6 - 5)$ respectivamente.

Entonces el problema de encontrar corepresentaciones indescomponibles de A_{42} se reduce al problema de clasificar las representaciones indescomponibles de esta guirnalda, cuya clasificación esta dada por los siguientes bloques matriciales

$$\begin{array}{c} x \\ \boxed{1} \end{array}, \quad \begin{array}{c} a_i \\ \boxed{1} \\ \xi \\ \xi \end{array}, \quad \begin{array}{cc} c_i & \tilde{c}_i \\ \boxed{1} & \boxed{1} \end{array} \quad (5.2)$$

donde x puede ser cualquiera de los puntos a_i , b_i , c_i , \tilde{c}_i o d_i .

De todas estas representaciones indescomponibles la única que produce una corepresentación indescomponible cierta de A_{42} en los puntos q , r es un bloque identidad en alguna de las franjas b_i , que esta asociada a una extensión de una corepresentación de tipo $(A_{38} - 1)$, como se quería probar. La corepresentación del poset dual se obtiene bajo las las consideraciones del lema 2.1. \square

²Originalmente el bloque M_r tiene coeficientes sobre \mathbb{G} sin embargo utilizando operaciones de columna los coeficientes de esta franja pueden volverse sobre \mathbb{F}

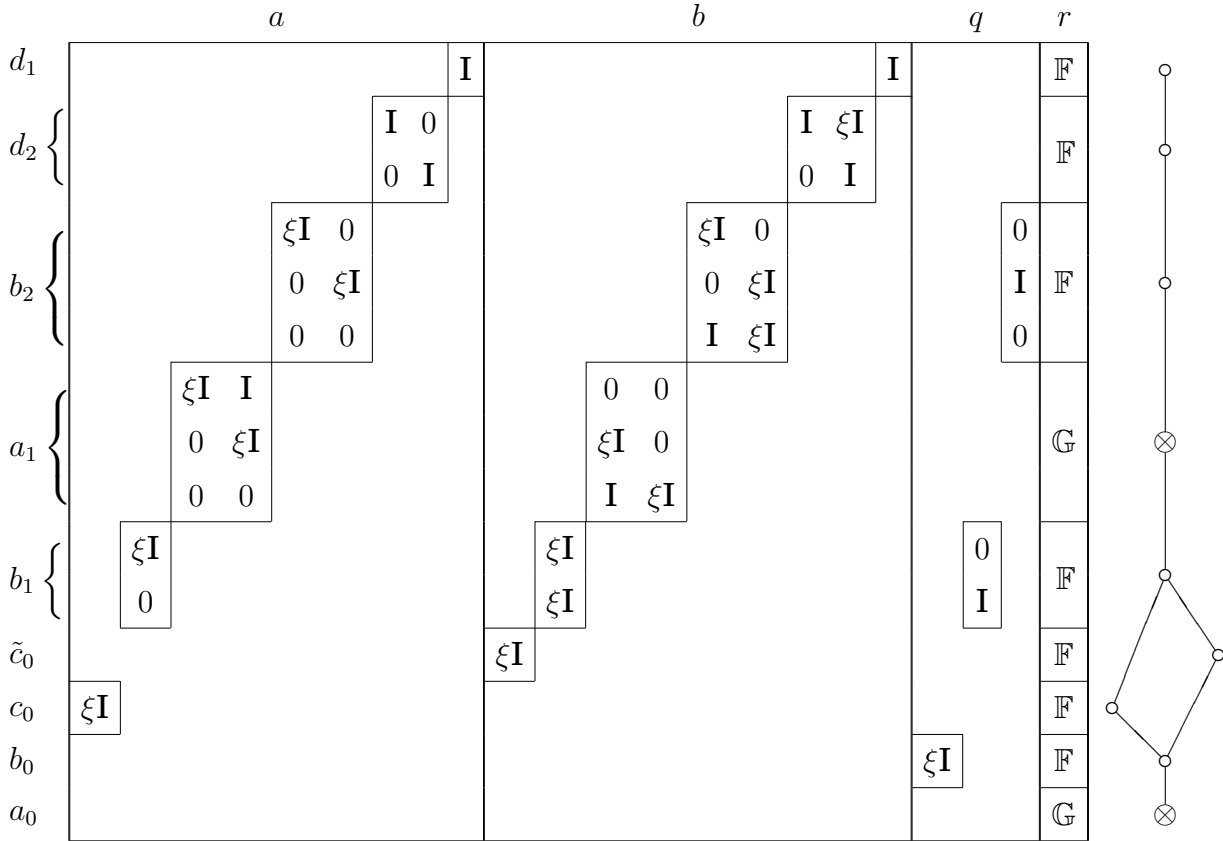


Figura 5.5. Corepresentación de A_{42} y su relación con las representaciones de una guirnalda.

Lema 5.10. *Si \mathcal{P} es uno de los posets $K_6, A_{25}, A_{28}, A_{29}, A_{38}, A_{39}$ o A_{42} , entonces cada uno de las corepresentaciones indescomponibles de \mathcal{P} satisface las siguientes condiciones*

$$\begin{aligned}
 & \text{(a) } U_a = U_b = 0 \quad \text{o} \quad \tilde{U}_a + \tilde{U}_b = U_0 \quad \text{para } \mathcal{P} \neq A_{39}; \\
 & \text{(b) } U_a = 0 \quad \text{o} \quad \begin{cases} \tilde{U}_a + \tilde{U}_b = U_0, & \text{para cualquier } \mathcal{P}; \\ \tilde{U}_a + U_b = U_0, & \text{si } \mathcal{P} \neq A_{38}, A_{39}, A_{42}; \\ \tilde{U}_a + U_p = U_0, & \text{si } \mathcal{P} = A_{38}, A_{42}; \\ \tilde{U}_\theta + U_p = U_0, & \text{si } \mathcal{P} = A_{39}; \end{cases}
 \end{aligned}$$

Este lema se puede verificar fácilmente haciendo una revisión exhaustiva de la clasificación de corepresentaciones de esos posets.

5.7. Clasificación de las corepresentaciones indescomponibles del poset K_7

En esta sección se presenta la clasificación de las corepresentaciones indescomponibles del poset crítico K_7 . Además se prueba que no existen otros posets equipados de un parámetro que contienen a K_7 .

El poset $K_7 = \{a \prec p \prec q; \theta\}$ posee una pareja $\widehat{\text{VII}}$ -adecuada (a, θ) , vea la figura 5.6, de este modo, su clasificación se obtiene por integración de las corepresentaciones indescomponibles (no necesariamente ciertas) de los posets equipados clasificados en este capítulo. Incluso la serie de corepresentaciones se obtiene de la serie de K_6 . Observe que K_7 es autodual y se tiene la convención $(K_7 - i)^* = (K_7 - i^*)$ para las corepresentaciones duales.

Teorema 5.11. *El poset crítico $K_7 = \{a \prec p \prec q; \theta\}$ posee 48 tipos de corepresentaciones indescomponibles sobre la pareja (\mathbb{F}, \mathbb{G}) con forma de Tits diferente de 0, listados en las tablas 5.8 y 5.9, además este poset tiene infinitas corepresentaciones indescomponibles (no isomorfas dos a dos) cuyas dimensiones son múltiplos de la raíz imaginaria $\mu = (2, 1, 1, 1, 1)$, casi todas ellas son generadas (de cada dimensión dada) por la siguiente serie de corepresentaciones*

a	p	q	θ
I	X	I	I
I	ξI		

donde X es un bloque indescomponible de Frobenius sobre \mathbb{F} y $d = (d_0, d_a, d_p, d_q, d_\theta)$.

$(K_7 - 1) = \text{Int}(K_6 - 1)$	$(K_7 - 1^*) = \text{Int}(K_6 - 1^*)$
$(K_7 - 2) = \text{Int}(K_6 - \tilde{1})$	$(K_7 - 2^*) = \text{Int}(K_6 - \tilde{1}^*)$
$(K_7 - 3) = \text{Int}(A_{38} - 1)$	$(K_7 - 3^*) = \text{Int}(A_{38^*} - 1)$
$(K_7 - 4) = \text{Int}(A_{38} - 2)$	$(K_7 - 4^*) = \text{Int}(A_{38^*} - 2)$
$(K_7 - 5) = \text{Int}(A_{38} - \tilde{2})$	$(K_7 - 5^*) = \text{Int}(A_{38^*} - \tilde{2})$
$(K_7 - 6) = \text{Int}(A_{38} - 3)$	$(K_7 - 6^*) = \text{Int}(A_{38^*} - 3)$
$(K_7 - 7) = \text{Int}(A_{25} - 1)$	$(K_7 - 7^*) = \text{Int}(A_{25^*} - 1)$
$(K_7 - 8) = \text{Int}(A_{39} - 1)$	$(K_7 - 8^*) = \text{Int}(A_{39^*} - 1)$
$(K_7 - 9) = \text{Int}(A_{39} - 2)$	$(K_7 - 9^*) = \text{Int}(A_{39^*} - 2)$
$(K_7 - 10) = \text{Int}(A_{39} - 3)$	$(K_7 - 10^*) = \text{Int}(A_{39^*} - 3)$
$(K_7 - 11) = \text{Int}(A_{39} - 4)$	$(K_7 - 11^*) = \text{Int}(A_{39^*} - 4)$
$(K_7 - 12) = \text{Int}(A_{39} - 5)$	$(K_7 - 12^*) = \text{Int}(A_{39^*} - 5)$

Tabla 5.8. Corepresentaciones del poset K_7 y forma de Tits con valor 1.

$(K_7 - 13) = \text{Int}(K_6 - 2)$	$(K_7 - 13^*) = \text{Int}(K_6 - 2^*)$
$(K_7 - 14) = \text{Int}(K_6 - 3)$	$(K_7 - 14^*) = \text{Int}(K_6 - 3^*)$
$(K_7 - 15) = \text{Int}(A_{38} - 4)$	$(K_7 - 15^*) = \text{Int}(A_{38^*} - 4)$
$(K_7 - 16) = \text{Int}(A_{25} - 2)$	$(K_7 - 16^*) = \text{Int}(A_{25^*} - 2)$
$(K_7 - 17) = \text{Int}(A_{25} - 3)$	$(K_7 - 17^*) = \text{Int}(A_{25^*} - 3)$
$(K_7 - 18) = \text{Int}(A_{25} - 4)$	$(K_7 - 18^*) = \text{Int}(A_{25^*} - 4)$
$(K_7 - 19) = \text{Int}(A_{39} - 6)$	$(K_7 - 19^*) = \text{Int}(A_{39^*} - 6)$
$(K_7 - 20) = \text{Int}(A_{39} - 7)$	$(K_7 - 20^*) = \text{Int}(A_{39^*} - 7)$
$(K_7 - 21) = \text{Int}(A_{39} - 8)$	$(K_7 - 21^*) = \text{Int}(A_{39^*} - 8)$
$(K_7 - 22) = \text{Int}(A_{39} - 9)$	$(K_7 - 22^*) = \text{Int}(A_{39^*} - 9)$
$(K_7 - 23) = \text{Int}(A_{39} - 10)$	$(K_7 - 23^*) = \text{Int}(A_{39^*} - 10)$
$(K_7 - 24) = \text{Int}(K_6 - 4)$	
$(K_7 - 25) = \text{Int}(A_{33})$	

Tabla 5.9. Corepresentaciones del poset K_7 y forma de Tits con valor 2, los tipos de corepresentación 24 y 25 son autoduales.

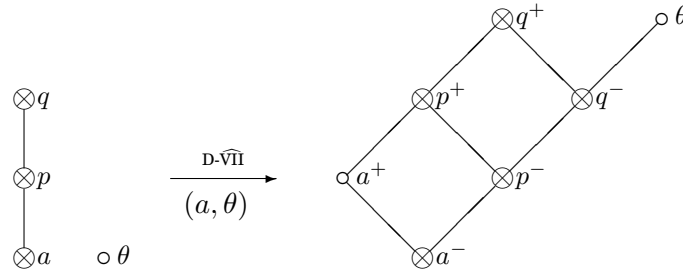


Figura 5.6. Descripción combinatorial del algoritmo de diferenciación $D\text{-}\widehat{\text{VII}}$ aplicado a K_7 .

Los siguientes lemas establecen que solo existe un poset equipado cierto de un parámetro que contiene a K_7 , él mismo. Los siguientes hechos y notaciones se utilizan en sus pruebas.

Note que todo poset equipado cierto de un parámetro \mathcal{P} conteniendo un subconjunto crítico K_7 tiene la siguiente forma:

$$\mathcal{P} = K_7 + (K_7)^\nabla + (K_7)_\blacktriangle. \quad (5.3)$$

Para $x \in (K_7)^\nabla \subset \mathcal{P}$, con la forma (5.3), se cumple una de las siguientes cuatro condiciones: **(1)** $q \triangleleft x$; **(2)** $\{p, \theta\} \triangleleft x$; **(3)** $q \prec x$ y $\theta \triangleleft x$; **(4)** $q \prec x$ y $p \triangleleft x$. Para la situación en que $x \in (K_7)_\blacktriangle$ se cumple una de la cuatro condiciones duales: **(1')** $a \triangleright x$; **(2')** $\{p, \theta\} \triangleright x$; **(3')** $x \prec a$ y $\theta \triangleright x$; **(4')** $x \prec a$ y $p \triangleright x$.

Dada una corepresentación W de \mathcal{P} , como en (5.3), denotamos por $r = r_W = (r_1, r_2, r_3, r_4)$ un vector de codimensiones donde $r_1 = \text{codim}_{\mathbb{G}} \widetilde{W}_q$; $r_2 = \text{codim}_{\mathbb{G}} \widetilde{W}_p + W_\theta$; $r_3 = \text{codim}_{\mathbb{F}} W_q + W_\theta$; $r_4 = \text{codim}_{\mathbb{F}} W_q + \widetilde{W}_p$. Dualmente se define $r^* = r_W^* = (r_1^*, r_2^*, r_3^*, r_4^*)$ donde $r_1^* = \text{dim}_{\mathbb{G}} \widetilde{W}_a$; $r_2^* = \text{dim}_{\mathbb{G}} \widetilde{W}_p \cap W_\theta$; $r_3^* = \text{dim}_{\mathbb{F}} W_a \cap W_\theta$; $r_4^* = \text{dim}_{\mathbb{F}} W_a \cap \widetilde{W}_p$.

Haciendo una revisión exhaustiva de las corepresentaciones de las tablas 5.8 y 5.9 se tiene que las corepresentaciones indescomponibles W de K_7 para las cuales $r_W \neq 0$ son las listadas en la tabla 5.10 (denotadas por W_i con $i \in \{1, \dots, 9\}$), también observe que para esas mismas corepresentaciones $r_W^* = 0$.

$$\begin{aligned}
W_1 &\cong {}_1(K_7 - 2^*), & r_{W_1} &= (0, 0, 0, 1); & W_6 &\cong {}_1(K_7 - 12), & r_{W_6} &= (0, 1, 1, 1); \\
W_2 &\cong {}_2(K_7 - 8), & r_{W_2} &= (0, 0, 0, 1); & W_7 &\cong {}_1(K_7 - 15), & r_{W_7} &= (0, 2, 0, 0); \\
W_3 &\cong {}_1(K_7 - 9), & r_{W_3} &= (0, 0, 1, 0); & W_8 &\cong {}_2(K_7 - 21), & r_{W_8} &= (0, 1, 0, 2); \\
W_4 &\cong {}_2(K_7 - 10), & r_{W_4} &= (0, 0, 0, 1); & W_9 &\cong {}_1(K_7 - 22), & r_{W_9} &= (1, 1, 2, 2); \\
W_5 &\cong {}_1(K_7 - 11), & r_{W_5} &= (0, 0, 1, 0);
\end{aligned}$$

Tabla 5.10. Corepresentaciones de K_7 con $r \neq 0$.

Lema 5.12. *Si \mathcal{P} es un poset equipado cierto de un parámetro conteniendo un subconjunto crítico K_7 entonces $(K_7)^\blacktriangledown = \emptyset$ o $(K_7)_\blacktriangle = \emptyset$.*

Prueba. Sea $U \in \text{Ind } \mathcal{P}$ cierta en $x \in (K_7)^\blacktriangledown$. Tomamos $V = U|_{K_7}$ una corepresentación restringida a K_7 y la descomponemos en una suma directa $V = \bigoplus_j V^j$. Como U es cierta en x , para cada sumando $V^j \simeq W_i$ ($i \in \{1, \dots, 9\}$), entonces U no es cierta en $(K_7)_\blacktriangle$ porque $r_W^* = 0$ para $W = W_i$. De manera análoga se prueba que U no es cierta en $(K_7)^\blacktriangledown$ siempre que $U \in \text{Ind } \mathcal{P}$ se suponga cierta en $(K_7)_\blacktriangle$. \square

Lema 5.13. *Si \mathcal{P} es un poset equipado cierto de un parámetro conteniendo un subconjunto K_7 , entonces $\mathcal{P} = K_7$.*

Prueba. Por las consideraciones hechas anteriormente se puede suponer que \mathcal{P} tiene la forma 5.3 y $(K_7)_\blacktriangle = \emptyset$. Sea $x \in (K_7)^\blacktriangledown \cap \max \mathcal{P}$ y $U \in \text{Ind } \mathcal{P}$ cierta con $d = \underline{\dim} U$.

Consideramos la restricción $V = U|_{\mathcal{P} \setminus x}$ como una suma directa de corepresentaciones indescomponibles $V = \bigoplus_i V^i$ y denotamos cada uno de sus soportes por $S^i = \text{Supp } V^i$. Se puede asumir que $S^i \subset K_7$ o $S^i \simeq F_i$ con $i = 13, \dots, 18$ (uno de los posets finitos), este último caso se da cuando S^i contiene un punto débil.

Utilizando la notación del lema anterior, para cada sumando $W \simeq V^i$ se tiene que $r_W \neq 0$, entonces para $S^i \subset K_7$ cada corepresentación W es isomorfa a alguna de las corepresentaciones descritas en el cuadro 5.10.

Si se analiza la forma del vector r_W en esos casos, y también calculando para los casos en que $S^i \not\subset K_7$ (haciendo algo de combinatoria, tomando en cuenta las posibles inclusiones de S^i en \mathcal{P}) se reduce el estudio a los siguientes cuatro casos.

Primer caso: $q \triangleleft x$. Entonces para todos los sumandos W , los cuales son ciertos en un punto débil, se tiene que $r_1 \neq 0$ y entonces $\dim_{\mathbb{F}} W_a = 0$ lo que implica que $d_a = 0$ y U no sea cierta en a , contradicción.

Segundo caso: $\{p, \theta\} \triangleleft x$. Entonces para todos los sumandos W , los cuales son ciertos en un punto débil, se tiene que $r_2 \neq 0$ y al igual que antes $\dim_{\mathbb{F}} W_a = 0$ lo que implica que U no sea cierta en a .

Tercer caso: $q \prec x$ y $\theta \triangleleft x$ (y también $p \prec x$, en otro caso se tendría el segundo caso). Entonces $r_3 \neq 0$ y por lo tanto para todos los sumandos W se tendría que $\dim_{\mathbb{C}} W_\theta = 0$ ($|S^i| \leq 2$ si todos los puntos de S^i son fuertes y $\theta \in S^i$) y U no sería cierta en θ .

Cuarto caso: $q \prec x$ y $p \triangleleft x$ (y también $x \parallel \theta$, en otro caso se tendría el tercer caso). Entonces $S^i \subset K_7$ para todo i y $\mathcal{P} = K_7 + x$. Como en este caso $r_4 \neq 0$, los sumandos $W \simeq V^i$ son isomorfos a alguno entre $W_1, W_2, W_4, W_6, W_8, W_9$.

Considere la realización matricial M_U de U , luego de reducir en la restricción M_V se obtiene un problema matricial de tipo mixto sobre la franja vertical x . Las columnas en esta franja se pueden reducir por transformaciones sobre \mathbb{G} y las filas, separadas en seis franjas (enumeradas según la corepresentación correspondiente), están dadas por los puntos de la cadena $9 < 6 < 8 < 2 < 4 < 1$. Las franjas 9, 8 (1, 2, 4, 6) son reducidas por transformaciones \mathbb{G} -elementales (\mathbb{F} -

elementales). Entonces el problema sobre la franja x es un problema sobre clasificación de representaciones de una cadena.

Los subconjuntos ciertos de esta cadena son conjuntos unitarios, y por lo tanto $d_a = 0$ o $d_b = 0$ y en cualquier caso contradice la suposición inicial, que U es cierta. Con esto finaliza la prueba. \square

Capítulo 6

Clasificación de las corepresentaciones indescomponibles de los posets equipados de un parámetro conteniendo a K_8 ó K_9

En este capítulo se presenta una clasificación completa (en forma matricial) de las corepresentaciones indescomponibles ciertas de los posets equipados K_8 , K_9 , A_{26} , A_{27} , A_{30} , A_{31} , A_{32} , A_{35} , A_{36} , A_{37} , A_{40} , A_{43} , A_{44} , A_{47} , A_{48} y sus posets duales, sobre una extensión cuadrática arbitraria de campos.

La clasificación de las corepresentaciones indescomponibles de los posets equipados mencionados anteriormente está basada esencialmente en la clasificación de corepresentaciones matriciales del poset crítico K_8 que se encuentra en la sección 6.1 junto con la prueba del teorema C2 (enunciado en esta sección como el teorema 6.1).

Para hallar la clasificación de corepresentaciones del poset K_8 se estudian extensiones separables e inseparables y se tiene en cuenta la característica del campo \mathbb{F} , esto conduce a que la serie de corepresentaciones para K_8 sea expresada en términos de la solución del problema del haz semilineal (véase [7]) o del problema del haz pseudolinear (originalmente en [35]). Esos problemas también fueron considerados recientemente con detalles en [44] y [45].

6.1. Clasificación de las corepresentaciones indescomponibles del poset K_8

La clasificación de corepresentaciones de K_8 es inducida por la clasificación de representaciones de A_{38} , A_{38}^* , A_{41} , y K_6 . Hay que notar que la clasificación de representaciones se obtuvo en [37] para la pareja (\mathbb{R}, \mathbb{C}) , pero puede ser extendida a una pareja de campos más general (\mathbb{F}, \mathbb{G}) , debido a que las técnicas de diferenciación que se utilizaron son independientes de la elección de la extensión cuadrática. Sin embargo la serie de representaciones de K_6 no puede ser calculada con técnicas de diferenciación. Entonces la serie de representaciones de K_6 sobre la pareja (\mathbb{F}, \mathbb{G}) se reduce a un problema matricial bicuadrático sobre \mathbb{F} en el sentido de [44, 45].

Teorema 6.1. *El poset crítico $K_8 = \{\varrho, \sigma, a\}$ posee 11 tipos de corepresentaciones indescomponibles sobre una extensión cuadrática de campos $\mathbb{F} \subset \mathbb{G}$ arbitraria (salvo dualidad y permutación de los puntos fuertes ϱ, σ), se encuentran listados en las tablas 6.1, 6.2, 6.3 y 6.4.*

Para la tabla 6.1 considere la siguiente notación para la serie de corepresentaciones. Si $f(t) = a_0 + a_1t + \cdots + a_{n-1}t^{n-1} + t^n$ es un polinomio mónico no constante sobre \mathbb{G} , $C(f) = (c_{ij})$ denota su matriz acompañante usual de orden n con $c_{i,i+1} = 1$, $c_{ni} = -a_{i-1}$ y $c_{ij} = 0$ en otro caso.

Sea $\mathbb{G}[t, \sigma, \delta]$ el anillo de polinomios torcidos que consisten de los polinomios derechos en la variable t sobre \mathbb{G} tal que $at = ta^\sigma + a^\delta$ para cualquier $a \in \mathbb{G}$, donde σ es un automorfismo de \mathbb{G} y δ es una σ -derivación sobre \mathbb{G} . Se denota por \mathcal{I} un subconjunto maximal de los polinomios indescomponibles no similares dos a dos en $\mathbb{G}[t, \sigma, \delta]$.

La serie de K_8 para una extensión de campos cuadrática separable $\mathbb{F} \subset \mathbb{G} = \mathbb{F}(\xi)$ con $\text{car } \mathbb{G} \neq 2$ es dada por (K_8-6_i) , entonces, se considera el polinomio mini-

mal $\wp(t) = t^2 - q$ y la conjugación natural $\overline{a + \xi b} = a - \xi b$ ($a, b \in \mathbb{F}$). Para (K_8-6_i) , el polinomio $f \in \mathcal{I}$ en $\mathbb{G}[t, \sigma, \delta]$ se toma el automorfismo $\sigma(a + \xi b) = a - \xi b$ y $\delta = 0$.

La serie de corepresentaciones de K_8 , para una extensión de campos cuadrática separable con $\text{car } \mathbb{G} = 2$, está dada por (K_8-6_{ii}) , en este caso el polinomio minimal de ξ es $\wp(t) = t^2 + pt + q$ con $p \neq 0$. En este caso la conjugación natural esta dada por $\overline{a + \xi b} = a - pb + \xi b$ y el polinomio $f \in \mathcal{I}$ en $\mathbb{G}[t, \sigma, 0]$ con σ la conjugación natural.

Por último, la serie de corepresentaciones de K_8 para una extensión inseparable tiene la forma (K_8-6_{iii}) , entonces $\text{car } \mathbb{G} = 2$ y el polinomio minimal de ξ es $\wp(t) = t^2 + q$. Para la serie de este tipo, se toma $f \in \mathcal{I}$ en $\mathbb{G}[t, \sigma, \delta]$ donde σ es el automorfismo identidad 1 y δ es la 1-derivación sobre \mathbb{G} de modo que $\delta(a) = 0$ ($a \in \mathbb{F}$) y $\delta(\xi) = \xi$.

M_U tiene la forma matricial

	ϱ	σ	a	
	R	0	A_1	A_2
	0	S	A'_1	A'_2

tipo	dmin	paso	$f(d)$	R	A_1	A_2	S	A'_1	A'_2
1	$\begin{matrix} 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{matrix}$	μ	1	I_n	\overrightarrow{I}_n	ξI_n	I_n	\overleftarrow{I}_n	ξI_n
1*	$\begin{matrix} 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{matrix}$	μ	1	I_{n+1}	I_n^\downarrow	ξI_{n+1}	I_{n+1}	I_n^\uparrow	ξI_{n+1}
$2 = \tilde{2}^*$	$\begin{matrix} 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{matrix}$	μ	1	I_{n+1}	I_{n+1}	ξI_n^\uparrow	I_n	\overrightarrow{I}_n	ξI_n
3	$\begin{matrix} 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{matrix}$	μ	2	I_{n+1}	I_{n+1}	ξI_{n+1}	I_n	\overrightarrow{I}_n	$\xi \overleftarrow{I}_n$
3*	$\begin{matrix} 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{matrix}$	μ	2	I_n	I_n	ξI_n	I_{n+1}	I_n^\uparrow	ξI_n^\downarrow
$4 = 4^*$	$\begin{matrix} 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{matrix}$	μ	0	I_n	I_n	$\xi J_n(0)$	I_n	I_n	ξI_n
$5 = 5^*$	$\begin{matrix} 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{matrix}$	μ	0	I_n	I_n	$\xi J_n(1)$	I_n	I_n	ξI_n
6_i	$\begin{matrix} 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{matrix}$	μ	0	I_n	I_n	ξI_n	I_n	$[I_n - \overline{C(f)}]$	$\xi [I_n + \overline{C(f)}]$
6_{ii}	$\begin{matrix} 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{matrix}$	μ	0	I_n	I_n	ξI_n	I_n	$[I_n + \overline{C(f)}]$	$[\xi I_n + \xi \overline{C(f)}]$
6_{iii}	$\begin{matrix} 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{matrix}$	μ	0	I_n	I_n	ξI_n	I_n	$[\overline{C(f)}]$	$\xi [I_n + C(f)]$

Tabla 6.1. Clasificación de corepresentaciones para K_8 , primera parte.

ϱ	σ	a	
1 0 ... 0	1 0 ... 0	T_1	T_2
R	$\mathbf{0}$	A_1	A_2
$\mathbf{0}$	S	A'_1	A'_2

M_U tiene la forma matricial

tipo	dmin	paso	$f(d)$	R	A_1	A_2	S	A'_1	A'_2	T_1	T_2
7	$\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{smallmatrix}$	μ	1	\overleftarrow{I}_n	\overrightarrow{I}_n	ξI_n	\overleftarrow{I}_n	\overleftarrow{I}_n	ξI_n	0 0 ... 0	1 0 ... 0
8	$\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{smallmatrix}$	μ	2	\overleftarrow{I}_n	\overrightarrow{I}_n	$\xi \overleftarrow{I}_n$	\overleftarrow{I}_n	\overleftarrow{I}_n	$\xi \overrightarrow{I}_n$	0 ... 0 1	0 ... 0 ξ
9	$\begin{smallmatrix} 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{smallmatrix}$	μ	2	\overleftarrow{I}_n	\overrightarrow{I}_n	$\xi \overleftarrow{I}_n$	\overleftarrow{I}_{n+1}	I_{n+1}	ξI_{n+1}	0 0 ... 0	1 0 ... 0
10	$\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{smallmatrix}$	μ	2	\overleftarrow{I}_n	I_n	$\xi J_n(1)$	\overleftarrow{I}_n	I_n	ξI_n	0 0 ... 0	1 0 ... 0

Tabla 6.2. Clasificación de corepresentaciones para K_8 , segunda parte.

ϱ	σ	a	
R	$\mathbf{0}$	A_1	A_2
$\mathbf{0}$	S	A'_1	A'_2
0 0 ... 0	0 0 ... 0	L_1	L_2

M_U tiene la forma matricial

tipo	dmin	paso	$f(d)$	R	A_1	A_2	S	A'_1	A'_2	L_1	L_2
7*	$\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{smallmatrix}$	μ	1	I_n	I_n	$\xi \overleftarrow{I}_n$	I_n	I_n	$\xi \overrightarrow{I}_n$	1 ... 1 1	$\xi \dots \xi \xi$
8*	$\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{smallmatrix}$	μ	2	I_n	$J_n(0)$	ξI_n	I_n	I_n	$\xi J_n(0)$	1 ... 1 1	$\xi \dots \xi \xi$
9*	$\begin{smallmatrix} 2 \\ 1 & 0 & 2 \end{smallmatrix}$	μ	2	I_{n+1}	I_{n+1}	$\xi J_{n+1}(0)$	I_n	\overleftarrow{I}_n	$\xi \overleftarrow{I}_n$	1 ... 1 1	$\xi \dots \xi \xi$
10*	$\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{smallmatrix}$	μ	2	I_n	\overrightarrow{I}_n	$\xi \overrightarrow{I}_n + \xi \overleftarrow{I}_n$	I_n	\overrightarrow{I}_n	$\xi \overrightarrow{I}_n$	0 ... 0 1	0 ... 0 ξ

Tabla 6.3. Clasificación de corepresentaciones para K_8 , tercera parte.

ϱ	σ	a		$\text{dmin} : \begin{smallmatrix} 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{smallmatrix}$	
tipo	$M_U \leftrightarrow$	I_n	I_n	$\mathbf{0} \quad \xi I_n$	paso μ
$K_8 - 11 = 11^*$		$J_n^+(0)$	$\mathbf{0}$	$I_n \quad \xi I_n$	$f(d) = 0$

Tabla 6.4. Clasificación de corepresentaciones para K_8 , cuarta parte.

La tabla 6.5 muestra algunas dimensiones y codimensiones importantes que más adelante harán evidente la relación que existe entre las corepresentaciones indescomponibles de los posets equipados de un parámetro que contienen a un subconjunto K_8 y las de K_8 . En particular algunas corepresentaciones de estos posets son simplemente extensiones de alguna corepresentación de K_8 . las siguientes convenciones son utilizadas.

$$k_1 = \text{codim}_{\mathbb{G}} \tilde{U}_a, \quad k_2 = \text{codim}_{\mathbb{G}}(U_\rho + U_\sigma), \quad k_3 = \text{codim}_{\mathbb{F}} U_a + U_\rho, \quad k_4 = \text{codim}_{\mathbb{F}} U_a + U_\sigma,$$

$$l_1 = \text{dim}_{\mathbb{G}} \tilde{U}_a, \quad l_2 = \text{dim}_{\mathbb{G}}(U_\rho \cap U_\sigma), \quad l_3 = \text{dim}_{\mathbb{F}}(U_a \cap U_\rho), \quad l_4 = \text{dim}_{\mathbb{F}}(U_a \cap U_\sigma).$$

tipo	k_1	k_2	k_3	k_4	l_1	l_2	l_3	l_4	tipo	k_1	k_2	k_3	k_4	l_1	l_2	l_3	l_4
1	0	0	0	0	1	0	1	1	7	0	0	0	0	0	1	1	1
1*	1	0	1	1	0	0	0	0	7*	0	1	1	1	0	0	0	0
$2 = \tilde{2}^*$	0	0	0	1	0	0	1	0	8	0	0	0	0	1	1	2	2
3	0	0	0	0	1	0	2	0	8*	1	1	2	2	0	0	0	0
3*	1	0	2	0	0	0	0	0	9	0	0	0	0	0	1	0	2
$4 = 4^*$	0	0	0	1	0	0	0	1	9*	0	1	0	2	0	0	0	0
$5 = 5^*$	1	0	0	0	1	0	0	0	10	1	0	0	0	0	1	0	0
6	0	0	0	0	0	0	0	0	10*	0	1	0	0	1	0	0	0
									11 = 11*	0	1	0	0	0	1	0	0

Tabla 6.5. Dimensiones de algunos subespacios especiales de K_8 .

Prueba del teorema 6.1. Sea $\mathbb{F} \subset \mathbb{F}(\xi) = \mathbb{G}$ una extensión cuadrática de campos arbitraria con generador ξ y polinomio minimal $\wp(t) = t^2 + pt + q$. Las raíces conjugadas de $\wp(t)$ son ξ y $\bar{\xi} = -\xi - p$, en general $\overline{a + \xi b} = a - pb - \xi b$ ($a, b \in \mathbb{F}$).

$$\begin{array}{ccc}
 \begin{array}{c} \otimes \quad \otimes \\ \begin{array}{|c|c|} \hline \xi I & A \\ \hline I & B \\ \hline \end{array} \\ \text{(a)} \end{array} &
 \begin{array}{c} \circ \quad \circ \quad \otimes \\ \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline I & & \xi I & I \\ \hline & I & A^t & B^t \\ \hline \end{array} \\ \text{(b)} \end{array} &
 \begin{array}{c} \begin{array}{|c|c|} \hline A_1 & A_2 \\ \hline B_1 & B_2 \\ \hline \end{array} \\ \text{(c)} \end{array}
 \end{array} \tag{6.1}$$

Como la serie de representaciones de K_6 es obtenida en [38] por consideraciones matriciales de la forma (6.1)(a), la serie de corepresentaciones de K_8 tiene la forma (6.1)(b).

Observe que los bloques A y B tienen coeficientes sobre \mathbb{G} . Así, el problema consiste en encontrar una forma canónica matricial para los bloques A y B

usando transformaciones admisibles que preserven el bloque reducido $\begin{array}{|c|} \hline \xi I \\ \hline I \\ \hline \end{array}$.

El anterior problema es equivalente al siguiente problema matricial sobre \mathbb{F} . Considere una matriz de la forma (6.1)(c) donde $\text{Im}(A) = A_1$, $\text{Re}(A) = A_2$, $\text{Im}(B) = B_1$ y $\text{Re}(B) = B_2$, entonces las transformaciones admisibles sobre el bloque de la forma (6.1) (c) están dadas por las soluciones de las ecuaciones (6.2) y (6.3) para los bloques X_1, \dots, X_4 y Y_1, \dots, Y_4

$$\begin{array}{|c|c|} \hline X_1 & X_2 \\ \hline X_3 & X_4 \\ \hline \end{array} \cdot \begin{array}{|c|} \hline \xi I \\ \hline I \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|} \hline \xi I \\ \hline I \\ \hline \end{array} \cdot \begin{array}{|c|} \hline \overline{U + \xi V} \\ \hline \\ \hline \end{array}, \quad (6.2)$$

$$\begin{array}{|c|c|} \hline A_1 & A_2 \\ \hline B_1 & B_2 \\ \hline \end{array} \cdot \begin{array}{|c|c|} \hline Y_1 & Y_2 \\ \hline Y_3 & Y_4 \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|} \hline \xi A_1 + A_2 \\ \hline \xi B_1 + B_2 \\ \hline \end{array} \cdot \begin{array}{|c|} \hline Z + \xi T \\ \hline \\ \hline \end{array}, \quad (6.3)$$

donde $\overline{U + \xi V}$ y $Z + \xi T$ son \mathbb{G} -matrices cuadradas. El problema equivalente consiste en encontrar una forma canónica para los bloques matriciales de tipo (6.1)(c) con respecto a las siguientes transformaciones

$$\begin{array}{|c|c|} \hline A_1 & A_2 \\ \hline B_1 & B_2 \\ \hline \end{array} \mapsto \begin{array}{|c|c|} \hline U & qV \\ \hline -V & U - pV \\ \hline \end{array} \cdot \begin{array}{|c|c|} \hline A_1 & A_2 \\ \hline B_1 & B_2 \\ \hline \end{array} \cdot \begin{array}{|c|c|} \hline Z - pT & -qT \\ \hline T & Z \\ \hline \end{array}. \quad (6.4)$$

A cada $n \times n$ \mathbb{G} -matriz $U + \xi V$ corresponde una *matriz formalmente compleja*

$$\begin{array}{|c|c|} \hline U - pV & -qV \\ \hline V & U \\ \hline \end{array}$$

la cual es una $2n \times 2n$ \mathbb{F} -matriz. Esta correspondencia induce un

isomorfismo entre el anillo de matrices $n \times n$ sobre \mathbb{G} y el anillo de matrices formalmente complejas $2n \times 2n$.

Observe que la matriz formalmente compleja asociada a $\overline{U + \xi V}$ tiene la for-

ma $\begin{array}{|c|c|} \hline U & qV \\ \hline -V & U - pV \\ \hline \end{array}$ entonces la transformación (6.4) puede ser reescrita como sigue

$$\begin{array}{|c|c|} \hline A_1 & A_2 \\ \hline B_1 & B_2 \\ \hline \end{array} \mapsto \begin{array}{|c|c|} \hline U - pV & -qV \\ \hline V & U \\ \hline \end{array} \cdot \begin{array}{|c|c|} \hline A_1 & A_2 \\ \hline B_1 & B_2 \\ \hline \end{array} \cdot \begin{array}{|c|c|} \hline Z - pT & -qT \\ \hline T & Z \\ \hline \end{array}. \quad (6.5)$$

El caso separable

(1) *car* $\mathbb{G} \neq 2$. Asuma que $\mathbb{F} \subset \mathbb{F}(\xi) = \mathbb{G}$ es una extensión separable, entonces podemos considerar el polinomio minimal $\wp(t) = t^2 + q$, en este caso la transformación (6.5) se convierte en

$$\begin{array}{|c|c|} \hline A_1 & A_2 \\ \hline B_1 & B_2 \\ \hline \end{array} \mapsto \begin{array}{|c|c|} \hline U & -qV \\ \hline V & U \\ \hline \end{array} \cdot \begin{array}{|c|c|} \hline A_1 & A_2 \\ \hline B_1 & B_2 \\ \hline \end{array} \cdot \begin{array}{|c|c|} \hline Z & -qT \\ \hline T & Z \\ \hline \end{array}. \quad (6.6)$$

Precisamente, la transformación (6.6) corresponde al problema bicuadrático homogéneo, el cual se reduce al problema semilineal de Kronecker, vea [44].

Sea \mathbb{G} un campo con un automorfismo σ , entonces el problema semilineal de Kroncker es encontrar la forma canónica matricial para la pareja (A, B) de matrices sobre \mathbb{G} de igual tamaño, utilizando las transformaciones

$$(A, B) \mapsto (X^{-1}AY, X^{-1}BY^\sigma)$$

Djoković resolvió este problema en [7] y la solución del correspondiente problema bicuadrático homogéneo que se encuentra en ([44], Teorema 3) induce la serie de corepresentaciones matricial de K_8 para una extensión separable con *car* $\mathbb{G} \neq 2$, denotada por $K_8\text{-}6_i$.

Nota 9. Si consideramos la forma matricial canónica dada en ([44], Teorema 4), el tipo de corepresentación K_8-6_i coincide con la serie de corepresentaciones de K_8 dada en [32].

(2) $\text{car } \mathbb{G} = 2$. Entonces, para el polinomio minimal $\varphi(t) = t^2 + pt + q$, se tiene que $p \neq 0$ y la transformación (6.4) toma la forma

$$\begin{array}{|c|c|} \hline A_1 & A_2 \\ \hline B_1 & B_2 \\ \hline \end{array} \mapsto \begin{array}{|c|c|} \hline U & -qV \\ \hline V & U - pV \\ \hline \end{array} \cdot \begin{array}{|c|c|} \hline A_1 & A_2 \\ \hline B_1 & B_2 \\ \hline \end{array} \cdot \begin{array}{|c|c|} \hline Z - pT & -qT \\ \hline T & Z \\ \hline \end{array}, \quad (6.7)$$

este problema corresponde al problema bicuadrático homogéneo para una extensión de campos cuadrática separable $\mathbb{F} \subset \mathbb{G}$ con $\text{car } \mathbb{G} = 2$ (véase [45], Teorema 3). Este induce la corepresentación matricial indescomponible K_8-6_{ii} .

El caso inseparable

Ahora, consideramos una extensión inseparable $\mathbb{F} \subset \mathbb{F}(\xi) = \mathbb{G}$, entonces $\text{car } \mathbb{G} = 2$ y $p = 0$, es decir que el polinomio minimal tiene la forma $\varphi(t) = t^2 + q$, así (6.4) toma la forma (6.6), la cual también corresponde al problema bicuadrático homogéneo considerado en [45], este puede ser reducido a un problema (σ, δ) -pseudolineal de Kronecker, resuelto en [35] por Sergeichuk, se trata de encontrar alguna forma canónica matricial para la pareja de matrices (A, B) de igual tamaño sobre un campo \mathbb{G} sujetas a las transformaciones

$$(A, B) \mapsto (X^{-1}AY, X^{-1}(BY^\sigma + AY^\delta))$$

donde σ es un automorfismo del campo \mathbb{G} y δ es una σ -derivación derecha sobre \mathbb{G} tal que $(ab)^\delta = ab^\delta + a^\delta b^\sigma$. La solución del problema bicuadrático homogéneo asociado es dado en [45], Teorema 5, y esa forma canónica induce la serie de corepresentaciones para el caso inseparable que denotamos K_8-6_{iii} . \square

6.2. Clasificación de las corepresentaciones indescomponibles de los posets $A_{26}, A_{27}, A_{30}, A_{31}, A_{32}, A_{35}, A_{36}, A_{37}, A_{40}, A_{43}, A_{44}, A_{47}, A_{48}$ y sus duales

El poset $\overline{A_{26}}$ derivado completado con respecto a la diferenciación D-I es un poset escindible. Las corepresentaciones ciertas del poset original A_{26} se obtienen por integración de las corepresentaciones indescomponibles de K_8 y A_{27} . Análogamente, el poset A'_{27} derivado con respecto a la diferenciación D- \widehat{VII} es escindible e integrando las corepresentaciones indescomponibles ciertas de K_8 y A_{26} se obtienen las del poset A_{27} . Las corepresentaciones de los posets duales se obtienen utilizando dualidad y el lema 2.1. La proposición 6.2 describe la clasificación de corepresentaciones de estos posets.

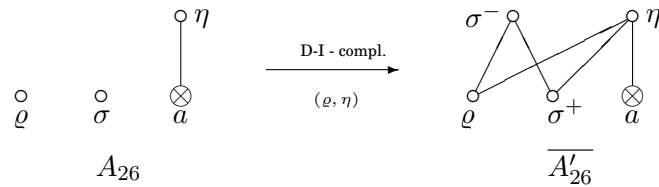


Figura 6.1. Descripción combinatorial de la diferenciación D-I con completación aplicada al poset A_{26} .

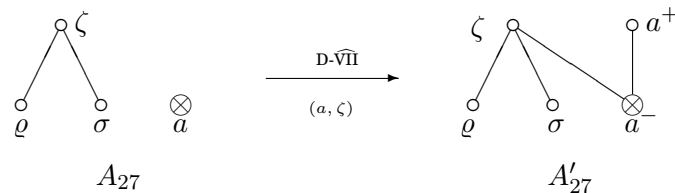


Figura 6.2. Descripción combinatorial de la diferenciación \widehat{VII} aplicada al poset A_{27} .

Proposición 6.2. *Cada uno de los posets $A_{26} = \{\varrho, \sigma; a \triangleleft \eta\}$, $A_{27} = \{\varrho \triangleleft \zeta \triangleright \sigma; a\}$ y sus posets duales tienen 6 tipos de corepresentaciones indescomponibles ciertas en los puntos η y ζ respectivamente, expresados en las tablas 6.6 y 6.7.*

${}_{2n}(A_{26} - 1) = {}_{2n}(K_8 - 1^*)^\eta$	${}_{2n}(A_{26}^* - 1) = {}_{2n}(K_8 - 1)_\eta$
${}_{2n-1}(A_{26} - 2) = {}_{2n-1}(K_8 - 3^*)^\eta$	${}_{2n-1}(A_{26}^* - 2) = {}_{2n-1}(K_8 - 3)_\eta$
${}_{2n}(A_{26} - 3) = {}_{2n}(K_8 - 5)^\eta$	${}_{2n}(A_{26}^* - 3) = {}_{2n}(K_8 - 5)_\eta$
${}_{2n-1}(A_{26} - 4) = {}_{2n-1}(K_8 - 8^*)^\eta$	${}_{2n-1}(A_{26}^* - 4) = {}_{2n-1}(K_8 - 8)_\eta$
${}_{2n-1}(A_{26} - 5) = {}_{2n-1}(K_8 - 10)^\eta$	${}_{2n-1}(A_{26} - 5)^* = {}_{2n-1}(K_8 - 10^*)_\eta$
${}_2(A_{26} - 6) = (F_3 - B)$	
${}_{2n+2}(A_{26} - 6) = \text{Int } {}_{2n+1}(A_{27} - 2)$	${}_{2n+2}(A_{26}^* - 6) = 2n + 2(A_{26} - 6)^*$

Tabla 6.6. Descripción de las corepresentaciones de A_{26} . En todos los casos $n \geq 1$.

${}_{2n-1}(A_{27} - 1) = {}_{2n-1}(K_8 - 7^*)^\zeta$	${}_{2n-1}(A_{27}^* - 1) = {}_{2n-1}(K_8 - 7)_\zeta$
${}_{2n-1}(A_{27} - 2) = {}_{2n-1}(K_8 - 8^*)^\zeta$	${}_{2n-1}(A_{27}^* - 2) = {}_{2n-1}(K_8 - 8)_\zeta$
${}_{2n}(A_{27} - 3) = {}_{2n}(K_8 - 9^*)^\zeta$	${}_{2n}(A_{27}^* - 3) = {}_{2n}(K_8 - 9)_\zeta$
${}_{2n-1}(A_{27} - 4) = {}_{2n-1}(K_8 - 10^*)^\zeta$	${}_{2n-1}(A_{27}^* - 4) = {}_{2n-1}(K_8 - 10)_\zeta$
${}_{2n}(A_{27} - 5) = {}_{2n}(K_8 - 11)^\zeta$	${}_{2n}(A_{27}^* - 5) = {}_{2n}(K_8 - 11)_\zeta$
${}_2(A_{27} - 6) = (F_{14} - C)$	
${}_{2n+2}(A_{27} - 6) = \text{Int } {}_{2n+1}(A_{26} - 4)$	${}_{2n+2}(A_{27}^* - 6) = 2n + 2(A_{27} - 6)^*$

Tabla 6.7. Descripción de las corepresentaciones de A_{27} . En todos los casos $n \geq 1$.

Los posets A_{31} , A_{32} , A_{37} y A_{47} tienen parejas $\widehat{\text{VII}}$ -adecuadas y sus indescomponibles se obtienen mediante $\widehat{\text{VII}}$ -integración como en el caso anterior. Análogamente, A_{30} , A_{36} tienen parejas I-adecuadas y su clasificación se obtiene por I-integración. Por otra parte, observe que $\overline{A_{35}^*} = A_{47}$ entonces ambos posets comparten las mismas corepresentaciones indescomponibles ciertas. La clasificación de corepresentaciones de los posets duales se obtiene por dualidad y aplicando el lema 2.1. De esto se sigue la proposición 6.3.

Proposición 6.3. *Cada uno de los posets A_{30} , A_{31} , A_{32} , A_{35} , A_{36} , A_{37} , A_{47} y sus duales tiene un tipo de corepresentación indescomponible cierta en todos sus puntos fuertes y expresados en la tabla 6.8*

${}_{2n}(A_{30}) = {}_{2n}(A_{26} - 6)^\theta$	${}_{2n-1}(A_{31}) = {}_{2n-1}(A_{26} - 4)^\zeta$	${}_{2n}(A_{32}) = {}_{2n}(A_{27} - 6)^\theta$
${}_{2n}(A_{30}^*) = {}_{2n}(A_{26}^* - 6)^\theta$	${}_{2n-1}(A_{31}^*) = {}_{2n-1}(A_{26}^* - 4)^\zeta$	${}_{2n}(A_{32}^*) = {}_{2n}(A_{27}^* - 6)^\theta$
${}_{2n-1}(A_{35}) = {}_{2n-1}(A_{26} - 5)^\zeta$	${}_{2n}(A_{36}) = {}_{2n}(A_{26}^* - 3)^\theta$	${}_{2n}(A_{37}) = {}_{2n}(A_{27}^* - 5)^\theta$
${}_{2n-1}(A_{47}) = {}_{2n-1}(A_{26}^* - 5)^\zeta$	${}_{2n}(A_{36}^*) = {}_{2n}(A_{26} - 3)^\theta$	${}_{2n}(A_{37}^*) = {}_{2n}(A_{27} - 5)^\theta$

Tabla 6.8. Descripción de las corepresentaciones de A_{30} , A_{31} , A_{32} , A_{35} , A_{36} , A_{37} y A_{47} . En todos los casos $n \geq 1$. Observe que $A_{47} = \overline{A_{35}^*}$ es un poset completado, Por tanto, estos tienen el mismo tipo de corepresentaciones indescomponibles ciertas.

El siguiente lema se sigue facilmente haciendo una inspección de las clasificaciones de corepresentaciones obtenidas hasta ahora y será utilizado en el capítulo 7.

Lema 6.4. *Sea \mathcal{P} un poset equipado el cual coincide con uno de los posets K_8 , A_{26} , A_{27} , A_{30} , A_{31} o A_{32} . Entonces cada corepresentación indescomponible (probablemente no cierta) U de \mathcal{P} satisface las siguientes condiciones*

- (a) $U_a = 0$ o $\tilde{U}_a + U_\rho = \tilde{U}_a + U_\sigma = U_0$;
- (b) $U_r = 0$ o $\begin{cases} U_a + U_\rho + U_\sigma = U_0 \text{ para cualquier } \mathcal{P}; \\ \tilde{U}_a + U_\rho = U_0 \text{ para } \mathcal{P} = K_8, A_{27}, A_{32}. \end{cases}$

Proposición 6.5. *Cada uno de los posets $A_{40} = \{\varrho; \sigma \triangleleft q \succ a\}$ y $A_{40}^* = \{\varrho; \sigma \triangleright q \prec a\}$ (donde ϱ, σ son puntos fuertes y q, a puntos débiles) tiene 15 tipos de corepresentaciones indescomponibles ciertas en el punto q , definidos recursivamente en las tablas 6.9 y 6.10.*

Prueba. La pareja (q, ϱ) del poset A_{40}^* es $\widehat{\text{VII}}$ -adecuada, entonces nuevamente las corepresentaciones indescomponibles de este se obtienen via integración de las

corepresentaciones indescomponibles (no necesariamente ciertas) de $(A_{40}^*)'$. En la primera columna de la tabla 6.9 están las corepresentaciones de dimensión minimal, en particular ${}_2(A_{40}^* - 6)$ y ${}_2(A_{40}^* - 11)$ son ciertas y entonces no pueden ser expresadas en términos de corepresentaciones de tipo finito, en la segunda columna se expresan los tipos de corepresentación matricial en términos de la integración. Para la clasificación de las corepresentaciones del poset A_{40} se aplica dualidad y el lema 2.1, en particular se tiene $(A_{40} - i) = (A_{40}^* - i)^*$ para $i \in \{1, 6, 8, 9, 11, 12, 13, 14, 15\}$, los otros casos se presentan en la tabla 6.10. \square

${}_1(A_{40}^* - 1) = F_{17}$	${}_{2n+1}(A_{40}^* - 1) = \text{Int } {}_{2n}(K_8 - 1)$
${}_2(A_{40}^* - 2) = F_{15} - D$	${}_{2n+2}(A_{40}^* - 2) = \text{Int } {}_{2n+1}(A_{40}^* - 1)$
${}_2(A_{40}^* - 3) = F_{15} - A$	${}_{2n+2}(A_{40}^* - 3) = \text{Int } {}_{2n+1}(K_8 - 2)$
${}_3(A_{40}^* - 4) = F_{15} - F$	${}_{2n+3}(A_{40}^* - 4) = \text{Int } {}_{2n+1}(K_8 - 3)$
${}_1(A_{40}^* - 5) = F_{13} - A$	${}_{2n+1}(A_{40}^* - 5) = \text{Int } {}_{2n}(K_8 - 4)$
${}_2(A_{40}^* - 6)$	${}_{2n}(A_{40}^* - 6) = \text{Int } {}_{2n-1}(K_8 - 7)$
${}_1(A_{40}^* - 7) = F_{14} - A$	${}_{2n+1}(A_{40}^* - 7) = \text{Int } {}_{2n}(A_{40}^* - 6)$
${}_1(A_{40}^* - 8) = F_{13} - B$	${}_{2n+1}(A_{40}^* - 8) = \text{Int } {}_{2n-1}(K_8 - 8)$
${}_3(A_{40}^* - 9) = F_{15} - G$	${}_{2n+3}(A_{40}^* - 9) = \text{Int } {}_{2n+1}(A_{40}^* - 8)$
${}_2(A_{40}^* - 10) = F_{14} - C$	${}_{2n+2}(A_{40}^* - 10) = \text{Int } {}_{2n}(K_8 - 9)$
${}_2(A_{40}^* - 11)$	${}_{2n}(A_{40}^* - 11) = \text{Int } {}_{2n-1}(A_{40}^* - 13)$
${}_2(A_{40}^* - 12) = F_{15} - C$	${}_{2n+2}(A_{40}^* - 12) = \text{Int } {}_{2n}(A_{40}^* - 11)$
${}_1(A_{40}^* - 13) = F_{15} - B$	${}_{2n+1}(A_{40}^* - 13) = \text{Int } {}_{2n}(A_{40}^* - 12)$
${}_2(A_{40}^* - 14) = F_{15} - E$	${}_{2n+2}(A_{40}^* - 14) = \text{Int } {}_{2n}(A_{40}^* - 14)$
${}_1(A_{40}^* - 15) = F_{14} - B$	${}_{2n+1}(A_{40}^* - 15) = \text{Int } {}_{2n-1}(A_{40}^* - 15)$

Tabla 6.9. Descripción de las corepresentaciones de A_{40}^* . En todos los casos $n \geq 1$.

${}_{2n}(A_{40} - 2) = {}_{2n}(K_8 - 1^*)^q$	${}_{2n}(A_{40} - 3) = {}_{2n}(K_8 - 4)^q$
${}_{2n+1}(A_{40} - 4) = {}_{2n+1}(K_8 - \tilde{3}^*)^q$	${}_{2n-1}(A_{40} - 5) = {}_{2n-1}(K_8 - 2)^q$
${}_{2n-1}(A_{40} - 7) = {}_{2n-1}(K_8 - 7^*)^q$	${}_{2n-1}(A_{40} - 8) = {}_{2n-1}(K_8 - 8^*)^q$
${}_{2n}(A_{40} - 10) = {}_{2n}(K_8 - 9^*)^q$	

Tabla 6.10. Descripción de las corepresentaciones de A_{40} . En todos los casos $n \geq 1$.

La propiedad que se enuncia en el lema 6.6 sobre las corepresentaciones del poset A_{40} es útil en la demostración del criterio de un parámetro y se sigue inmediatamente revisando exhaustivamente la clasificación que se obtuvo en la proposición 6.5.

Lema 6.6. *Si \mathcal{P} es un poset equipado el cual coincide con $A_{40} = \{\varrho; \sigma \triangleleft q \succ a\}$ entonces cada corepresentación indescomponible (probablemente no cierta) U de \mathcal{P} satisface las siguientes condiciones*

$$(a) \ U_a = 0 \ \text{ó} \ \tilde{U}_a + U_\sigma = U_0;$$

$$(b) \ U_\varrho = 0, \ \text{ó}, \ U_q + U_\sigma = U_q + \tilde{U}_a = U_0 \ \text{y} \ \tilde{U}_q = U_0.$$

$A_{43} = \{\varrho; p \triangleleft \sigma \triangleleft q \succ a \succ p\}$ es un poset autodual, es decir que $A_{43} = A_{43}^*$ y la pareja (ϱ, θ) es VII-adecuada. por esto, sus corepresentaciones indescomponibles se obtienen por integración de corepresentaciones indescomponibles ciertas en σ y q del poset A'_{43} con soporte A_{40} y A_{44} que satisfagan $\dim_{\mathbb{F}}(U_{a^+} \cap U_\varrho)/U_{a^-} \neq 0$, es decir del tipo $(A_{40} - 5)$. Otra forma de obtener este tipo de corepresentación es extendiendo la corepresentación $(K_8 - 4)$, observe la tabla 6.5, y que $(K_8 - 4)$ es el único tipo de corepresentación para el cual $\text{codim}_{\mathbb{F}} U_a + U_\sigma \neq 0$ y $\dim_{\mathbb{F}} U_a \cap U_\sigma \neq 0$.

$$(A_{43}) = (K_8 - 4)_p^q = (A_{40} - 3)_p$$

Los posets A_{44} y A_{48} también son autoduales y adicionalmente $A_{48} = \overline{A_{44}}$ se obtiene por completación, entonces ambos comparten corepresentaciones indescomponibles ciertas no triviales. Su clasificación se obtiene al integrar corepresentaciones de A'_{48} ciertas en ϱ y q , es decir de las corepresentaciones de los posets A_{40} y A_{43} que satisfagan $\dim(U_{a^+} \cap U_\sigma)/U_{a^-} \neq 0$, solo el tipo $(A_{40} - 3)$ lo hace. Análogamente al caso anterior, existe otra forma de expresar este tipo de corepresentación, en el cuadro 6.5 se observa que $(K_8 - 2)$ es la única corepresentación que satisface

$$\text{codim}_{\mathbb{F}} U_a + U_\sigma \neq 0 \ \text{y} \ \dim_{\mathbb{F}} U_a \cap U_\varrho \neq 0, \ \text{entonces se tiene que}$$

$$(A_{44}) = (A_{48}) = (K_8 - 2)_p^q = (A_{40} - 5)_p.$$

Para terminar, observe que al integrar mutuamente los tipos de corepresentaciones de A_{43} y A_{44} en los casos anteriores, no se producen nuevas corepresentaciones, entonces se tiene la siguiente clasificación.

Proposición 6.7. *Cada uno de los posets $A_{43} = \{\varrho; p \triangleleft \sigma \triangleleft q \succ a \succ p\}$, $A_{44} = \{\varrho \triangleright p \prec a \prec q \triangleright \sigma\}$ y $A_{48} = \{\varrho \triangleright p \prec a \prec q \triangleright \sigma; p \triangleleft q\}$ tiene 1 tipo de corepresentación indescomponible cierta en todos sus puntos débiles que se muestran en la tabla 6.11.*

${}_2(A_{43}) = F_{18}$	${}_{2n+2}(A_{43}) = \text{Int } {}_{2n+1}(A_{40} - 5)$
${}_1(A_{44}) = F_{17}$	${}_{2n+1}(A_{44}) = \text{Int } {}_{2n}(A_{40} - 3)$
	${}_{2n+1}(A_{48}) = \text{Int } {}_{2n}(A_{40} - 3)$

Tabla 6.11. Descripción de las corepresentaciones de A_{43} , A_{44} y A_{48} . En todos los casos $n \geq 1$.

6.3. Posets con subconjuntos bien insertados de tipo K_8

Un poset \mathcal{P} tiene un subconjunto *bien insertado* K_8 , si las siguientes condiciones son satisfechas (vea la figura 6.3):

1. $N(a) = \{\Gamma^- < \{r, s\} < \Gamma^+\}$ where Γ^-, Γ^+ son cadenas ordinarias.
2. $N(r, s) = \{\Delta^- < a < \Delta^+\}$ where Δ^-, Δ^+ son cadenas ordinarias.
3. Los conjuntos

$$[r \vee a] = \{x \in N(s) : r < x \text{ y } a \prec x\},$$

$$[r \wedge a] = \{x \in N(s) : x < r \text{ y } x \prec a\}$$

y los conjuntos análogamente definidos $[s \vee a]$ y $[s \wedge a]$ son cadenas, tales que $|[r \vee a] + [s \vee a]| \leq 2$ y $|[r \wedge a] + [s \wedge a]| \leq 2$.

Denotamos $\Omega^+ = [r \vee a] + [s \vee a]$ y $\Omega^- = [r \wedge a] + [s \wedge a]$. Así, uno puede suponer que un poset \mathcal{P} con un subconjunto bien insertado de tipo K_8 tiene la forma

$$\mathcal{P} = \Omega^+ + \Omega^- + \Gamma^+ + \Gamma^- + \Delta^+ + \Delta^- + X, \quad (6.8)$$

para un conjunto X adecuado.

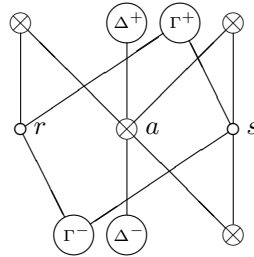


Figura 6.3. Ejemplo de un subconjunto bien insertado de tipo K_8 .

Teorema 6.8. *Si un poset equipado \mathcal{P} contiene un subconjunto bien insertado de tipo K_8 , entonces cada corepresentación indescomponible (no necesariamente cierta) U de \mathcal{P} satisface las siguientes condiciones:*

- (1) $U_a \cap U_r = U_a \cap U_s = 0$ o $\tilde{U}_a = U_r + U_s = U_0$;
- (2) $U_a + U_r = U_a + U_s = U_0$ o $\underline{U}_a = U_r \cap U_s = 0$.

La prueba de este teorema se presenta en el capítulo 7 sección 7.1. El siguiente corolario se sigue inmediatamente del teorema 6.8.

Corolario 6.9. *Sea \mathcal{P} un poset equipado con un subconjunto bien insertado de tipo K_8 , los puntos p, q satisfaciendo una de las dos condiciones:*

- (1) $q \triangleleft a$ o $q < \{r, s\}$, y, $\{a, r\} < p$ o $\{a, s\} < p$;

(2) $q < \{a, r\}$ o $q < \{a, s\}$, y , $a \triangleleft p$ o $\{r, s\} < p$.

Entonces cada corepresentación indescomponible del poset \mathcal{P} no es cierta en uno de los puntos p, q .

6.4. Clasificación de las corepresentaciones indescomponibles del poset K_9

En esta sección se presenta la clasificación de las corepresentaciones indescomponibles del poset crítico K_9 . Además se prueba que no existen otros posets equipados de un parámetro que contienen a K_9 .

El poset $K_9 = \{a \prec p; \zeta \triangleleft \eta\}$ posee una pareja $\widehat{\text{VII}}$ -adecuada (a, η) , vea la figura 6.4, por esto, su clasificación se obtiene por integración de las corepresentaciones indescomponibles (no necesariamente ciertas) de los posets equipados clasificados en este capítulo. Incluso la serie de corepresentaciones se obtiene de la serie de K_8 (para cada tipo de extensión cuadrática). Observe que K_9 es autodual y se tiene la convención $(K_9 - i)^* = (K_9 - i^*)$ para las corepresentaciones duales.

Teorema 6.10. *El poset crítico $K_9 = \{a \prec p; \zeta \triangleleft \eta\}$ posee 48 tipos de corepresentaciones indescomponibles sobre la pareja (\mathbb{F}, \mathbb{G}) con forma de Tits diferente de 0, listados en los cuadros 6.12 y 6.13, además tiene una serie de corepresentaciones indescomponibles cuyas dimensiones son múltiplos de la raíz imaginaria $\mu = (3, 2, 2, 1, 1)$ descrita a continuación.*

		\overbrace{A}^a	\overbrace{B}^p	ζ	η
		A	B	I	
	I	I	ξI		I
I	ξI				

$A = [I_n - \overline{C(f)}]$ y $B = \xi[I_n + \overline{C(f)}]$, si $\mathbb{F} \subset \mathbb{G}$ es separable y $\text{car} \neq 2$;

$A = [I_n + \overline{C(f)}]$ y $B = [\xi I_n + \xi \overline{C(f)}]$, si $\mathbb{F} \subset \mathbb{G}$ es separable y $\text{car} = 2$;

$A = [\overline{C(f)}]$ y $B = \xi[I_n + C(f)]$, si $\mathbb{F} \subset \mathbb{G}$ es inseparable. En la misma notación que se utilizó para la serie de K_8 , vea la página 69.

$(K_9 - 1) = \text{Int}(K_8 - 1)$	$(K_9 - 1^*) = \text{Int}(A_{40} - 6)$
$(K_9 - 2) = \text{Int}(K_8 - 1^*)$	$(K_9 - 2^*) = \text{Int}(A_{40^*} - 6)$
$(K_9 - 3) = \text{Int}(K_8 - 2)$	$(K_9 - 3^*) = \text{Int}(A_{40^*} - 3)$
$(K_9 - 4) = \text{Int}(K_8 - 2^*)$	$(K_9 - 4^*) = \text{Int}(A_{40} - 3)$
$(K_9 - 5) = \text{Int}(K_8 - 7)$	$(K_9 - 5^*) = \text{Int}(A_{40} - 1)$
$(K_9 - 6) = \text{Int}(K_8 - 7^*)$	$(K_9 - 6^*) = \text{Int}(A_{40^*} - 1)$
$(K_9 - 7) = \text{Int}(A_{40} - 2)$	$(K_9 - 7^*) = \text{Int}(A_{40^*} - 7)$
$(K_9 - 8) = \text{Int}(A_{40} - 7)$	$(K_9 - 8^*) = \text{Int}(A_{40^*} - 2)$
$(K_9 - 9) = \text{Int}(A_{40} - 11)$	$(K_9 - 9^*) = \text{Int}(A_{40^*} - 13)$
$(K_9 - 10) = \text{Int}(A_{40} - 12)$	$(K_9 - 10^*) = \text{Int}(A_{40^*} - 11)$
$(K_9 - 11) = \text{Int}(A_{40} - 13)$	$(K_9 - 11^*) = \text{Int}(A_{40^*} - 12)$
$(K_9 - 12) = \text{Int}(A_{40} - 5)$	
$(K_9 - 13) = \text{Int}(A_{40^*} - 5)$	

Tabla 6.12. Corepresentaciones del poset K_9 y forma de Tits con valor 1, los tipos de corepresentación 12 y 13 son autoduales.

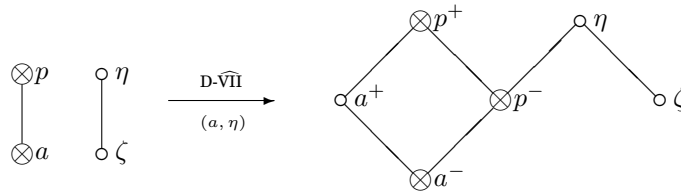


Figura 6.4. Diferenciación de K_9

Todo poset equipado cierto de un parámetro \mathcal{P} con un subconjunto crítico K_9 tiene la forma:

$$\mathcal{P} = K_9 + (K_9)^\blacktriangledown + (K_9)^\blacktriangle, \tag{6.9}$$

$(K_9 - 14) = \text{Int}(K_8 - 3)$	$(K_9 - 14^*) = \text{Int}(K_8 - \tilde{9}^*)$
$(K_9 - 15) = \text{Int}(K_8 - 3^*)$	$(K_9 - 15^*) = \text{Int}(K_8 - \tilde{9})$
$(K_9 - 16) = \text{Int}(K_8 - \tilde{3})$	$(K_9 - 16^*) = \text{Int}(A_{40} - 10)$
$(K_9 - 17) = \text{Int}(K_8 - \tilde{3}^*)$	$(K_9 - 17^*) = \text{Int}(A_{40^*} - 10)$
$(K_9 - 18) = \text{Int}(K_8 - 8)$	$(K_9 - 18^*) = \text{Int}(A_{40} - 8)$
$(K_9 - 19) = \text{Int}(K_8 - 8^*)$	$(K_9 - 19^*) = \text{Int}(A_{40^*} - 8)$
$(K_9 - 20) = \text{Int}(K_8 - 9)$	$(K_9 - 20^*) = \text{Int}(A_{40} - 4)$
$(K_9 - 21) = \text{Int}(K_8 - 9^*)$	$(K_9 - 21^*) = \text{Int}(A_{40^*} - 4)$
$(K_9 - 22) = \text{Int}(A_{40} - 9)$	$(K_9 - 22^*) = \text{Int}(A_{40^*} - 9)$
$(K_9 - 23) = \text{Int}(A_{40} - 14)$	$(K_9 - 23^*) = \text{Int}(A_{40^*} - 15)$
$(K_9 - 24) = \text{Int}(A_{40} - 15)$	$(K_9 - 24^*) = \text{Int}(A_{40^*} - 14)$
$(K_9 - 25) = \text{Int}(K_8 - 10)$	
$(K_9 - 26) = \text{Int}(K_8 - 10^*)$	

Tabla 6.13. Corepresentaciones del poset K_9 y forma de Tits con valor 2, los tipos de corepresentación 25 y 26 son autoduales.

o de lo contrario \mathcal{P} contendría más de un poset crítico y no sería de un parámetro. Además, observe que $x \in (K_9)^\nabla$ si y solo si una de las siguientes condiciones se satisface **(1)** $p \triangleleft x$; **(2)** $\{a, \eta\} \triangleleft x$; **(3)** $p \prec x$ y $\eta \triangleleft x$; **(4)** $p \prec x$ y $\{a, \zeta\} \triangleleft x$ (en la situación en que $x \in (K_9)_\blacktriangle$ se cumple una de las cuatro condiciones duales: **(1')** $x \triangleleft a$; **(2')** $x \triangleleft \{p, \zeta\}$; **(3')** $x \prec a$ y $x \triangleleft \zeta$; **(4')** $x \prec a$ y $x \triangleleft \{p, \eta\}$).

Dada una corepresentación W de \mathcal{P} , como en 6.9, es útil considerar el vector de dimensiones $r = r_W = (r_1, r_2, r_3, r_4)$ donde $r_1 = \text{codim}_{\mathbb{G}} \tilde{W}_p$; $r_2 = \text{codim}_{\mathbb{G}} \tilde{W}_a + W_\eta$; $r_3 = \text{codim}_{\mathbb{F}} W_p + W_\eta$; $r_4 = \text{codim}_{\mathbb{F}} \tilde{W}_a + W_p + W_\zeta$. También se define el vector de dimensiones $r^* = r_W^* = (r_1^*, r_2^*, r_3^*, r_4^*)$ donde $r_1^* = \text{dim}_{\mathbb{G}} \tilde{W}_a$; $r_2^* = \text{dim}_{\mathbb{G}} \tilde{W}_p \cap W_\zeta$; $r_3^* = \text{dim}_{\mathbb{F}} W_a \cap W_\zeta$; $r_4^* = \text{dim}_{\mathbb{F}} \tilde{W}_p \cap W_a \cap W_\eta$.

Revisando exhaustivamente la clasificación de las corepresentaciones del poset K_9 que se dio anteriormente se sigue que las corepresentaciones W para las

cuales $r \neq 0$ es una de las mencionadas en la tabla 6.14. Note que $r_W^* = 0$ para $W = W_i$ ($i \in \{1, \dots, 10\}$).

$$\begin{aligned}
W_1 &\cong {}_1(K_9 - 6), & r_{W_1} &= (0, 0, 0, 1); & W_6 &\cong {}_1(K_9 - 16^*), & r_{W_6} &= (0, 1, 0, 0); \\
W_2 &\cong {}_1(K_9 - 7), & r_{W_2} &= (0, 0, 1, 0); & W_7 &\cong {}_1(K_9 - 23), & r_{W_7} &= (1, 1, 2, 2); \\
W_3 &\cong {}_1(K_9 - 9), & r_{W_3} &= (0, 1, 1, 1); & W_8 &\cong {}_1(K_9 - 15), & r_{W_8} &= (1, 0, 0, 0); \\
W_4 &\cong {}_2(K_9 - 11), & r_{W_4} &= (0, 0, 0, 1); & W_9 &\cong {}_1(K_9 - 19), & r_{W_9} &= (1, 0, 0, 2); \\
W_5 &\cong {}_2(K_9 - 18^*), & r_{W_5} &= (0, 1, 0, 0); & W_{10} &\cong {}_2(K_9 - 24), & r_{W_{10}} &= (0, 1, 0, 2);
\end{aligned}$$

Tabla 6.14. Corepresentaciones de K_9 con $r \neq 0$.

Esto significa que si \mathcal{P} es cierto en K_9^∇ entonces no es cierto en $(K_9)_\blacktriangle$. Análogamente, para las corepresentaciones de K_9 con $r^* \neq 0$ se tiene que $r = 0$, de lo cual se obtiene el siguiente lema.

Lema 6.11. *Si \mathcal{P} es un poset equipado cierto de un parámetro conteniendo un subconjunto crítico K_9 entonces $(K_9)^\nabla = \emptyset$ o $(K_9)_\blacktriangle = \emptyset$.*

El lema anterior permite probar un resultado aún más fuerte, que conduce a la descripción completa de los posets equipados de un parámetro que contienen al poset crítico K_9 .

Lema 6.12. *Si \mathcal{P} es un poset equipado cierto de un parámetro, conteniendo un subconjunto K_9 , entonces $\mathcal{P} = K_9$.*

Prueba. Análogamente a las consideraciones hechas en el lema 5.13, y por el lema anterior 6.11 se puede considerar que $(K_9)_\blacktriangle = \emptyset$ y $x \in K_9^\nabla \cap \max \mathcal{P}$. Sea U una corepresentación cierta e indescomponible de \mathcal{P} , con $\dim U = d$. Se descompone la restricción $V = U|_{\mathcal{P} \setminus x}$ en una suma directa de corepresentaciones

indescomponibles $V = \bigoplus_i V^i$ y el soporte de cada indescomponible se denota por $S^i = \text{Supp } V^i$.

Observe que $S^i \subset K_9$ o $S^i \simeq F_i$ con $i = 13, \dots, 18$, esto último en la situación en que S^i contenga un punto débil. Utilizando la notación del lema 6.11, como $r_{V^i} \neq 0$, para todo i entonces cada V^i es isomorfo a alguno de las corepresentaciones del cuadro 6.14.

Haciendo algo de combinatoria se pueden reducir los casos a estudiar a solo cuatro (note que en el tercer y cuarto caso más adelante $\mathcal{P} \setminus x_\wedge$ es una cadena de puntos fuertes).

Primer caso: $p \triangleleft x$. Entonces para todos los sumandos $W = V^i$ ciertos en un punto débil, $r_1 = 0$ y $\dim_{\mathbb{F}} W_a = 0$, entonces $d_a = 0$, que contradice que U sea cierta.

Segundo caso: $\{a, \eta\} \triangleleft x$. Entonces para todos los sumandos $W = V^i$, $r_2 = 0$ y $\dim_{\mathbb{F}} W_a = 0$, y nuevamente $d_a = 0$.

Tercer caso: $p \prec x$ y $\eta \triangleleft x$. Entonces $r_3 = 0$ y $\dim_{\mathbb{G}} W_\zeta = 0$, para todos los sumandos $W = V^i$, esto implica que $d_\zeta = 0$, lo cual es imposible.

Cuarto caso: $p \prec x$ y $\{a, \zeta\} \triangleleft x$. Entonces $r_4 = 0$ y $d_\zeta = 0$, contradictorio, como antes. Con esto termina la prueba. \square

Nota 10. Es bien conocido que la teoría de representaciones de los posets ordinarios tiene aplicaciones esenciales en varias partes del álgebra moderna, como en el estudio de grupos abelianos libres de torsión, la teoría de formas cuadráticas y anillos y módulos (vea por ejemplo [1, 29, 47]). Análogamente los posets equipados, sus representaciones y corepresentaciones tienen y tendrán aplicaciones similares en las mismas áreas (vea por ejemplo [16, 36]).

Demostración de los teoremas A, B y D

7.1. Propiedades de subconjuntos críticos K_6 y K_8 bien insertados

7.1.1. Demostración del teorema 5.7 concerniente a K_6

Prueba. Como las afirmaciones del teorema son autoduales, basta probar una de ellas, nosotros consideraremos la afirmación (1). Partiremos la prueba en cuatro casos.

Primer caso: $\mathcal{P} = K_6 + (a \vee b)$. Considere $U \in \text{Ind } \mathcal{P}$, usamos inducción sobre el número $\dim U_0$, cuando $\dim U_0 = 1$ la condición se satisface trivialmente, para ellos se deben inspeccionar todos las corepresentaciones indescomponibles. Ahora asumimos que $\dim U_0 > 1$, y razonando por contradicción suponemos que $\tilde{U}_a \neq U_0$ y $U_a \cap U_b \neq 0$.

Elegimos $V = (V_0, V_x : x \in \mathcal{P})$ de tal forma que $V_0 = \tilde{U}_a$ y $V_x = \tilde{U}_a \cap U_x$ y la descomponemos en una suma directa $V = \bigoplus_i V^i$, también consideramos $W = (W_0, W_x : x \in \mathcal{P})$ donde $V_0 \oplus W_0 = U_0$ y $W_x = \pi(V'_x)$, donde V'_x es algún complemento de V_x en U_x y π es la proyección natural.

Como $\dim V_0 < \dim U_0$, cada sumando de V satisface la condición, entonces para algún i , se tiene $V_a^i \cap V_b^i \neq 0$ y $\tilde{V}_a^i = \tilde{V}_b^i = V_0^i$ (en otro caso $U_a \cap U_b = 0$). Afirmamos que V^i es un sumando directo de U . Una forma simple de ver esto es usando lenguaje matricial. $M_{V_b^i} = \boxed{1}^{\eta_1} \oplus \boxed{1 \ \xi}^{\eta_2}$, sin embargo el segundo sumando es directo, entonces podemos considerar la siguiente matriz, correspondiente a los espacios V_b^i y W_x ($x \in \mathcal{P} \setminus a$):

$$\begin{array}{c} v_0^i \\ w_0 \end{array} \left\{ \begin{array}{c|c|c|c} & b & c_1 & c_n \\ \hline I & * & * & * \\ \hline 0 & * & * & * \end{array} \right. \quad (7.1)$$

esta corepresentación matricial se descompone como una cadena débil, vea el lema 4.1, pero adicionalmente cada espacio W_x no es nulo, entonces el bloque \boxed{I} , en (7.1), es un sumando directo.

Segundo caso: $\mathcal{P} = K_6 + A^- + B^-$ donde $A^- = N(b) \setminus a^\vee$ y $B^- = N(a) \setminus b^\vee$. Para esto, razonamos análogamente al caso anterior pero considerando la cadena fuerte $B \triangleleft b$ en vez de una cadena débil.

Tercer caso: $\mathcal{P} = K_6 + (a \vee b) + A^- + B^-$, utilizando la misma notación anterior. Descomponemos la restricción $U|_{K_6} = V = \bigoplus_i V^i$ en una suma directa de corepresentaciones indescomponibles, cada una de las cuales satisface la condición (1) del teorema para $(a \vee b) = \emptyset$, y por lo tanto también satisface (2), esto significa que podemos descomponer V en una suma directa $X \oplus Y$, donde $X_a + X_b = X_0$ y $Y_a = Y_b = 0$, como U es indescomponible entonces es cierta o bien sobre algún subconjunto de $K_6 + (a \vee b)$ o sobre algún subconjunto de $K_6 + A^- + B^-$.

Cuarto caso: \mathcal{P} es cualquier poset con un conjunto bien insertado K_6 . Usamos inducción sobre el número $|\mathcal{P} \setminus \mathcal{Q}|$ donde $\mathcal{Q} = K_6 + (a \vee b) + A^- + B^-$. Consideramos una corepresentación indescomponible U en el conjunto de todos los puntos del subconjunto $\mathcal{P} \setminus \mathcal{Q}$. Primero considere $\mathcal{P} = \mathcal{Q}$, este es precisamente el tercer caso.

Ahora suponga que $x \in \mathcal{P} \setminus \mathcal{Q}$, pueden pasar tres cosas: **(a)** $a \triangleleft x$ o **(b)** $b \triangleleft x$ o **(c)** $x < \{a, b\}$. Los primeros dos subcasos son análogos, por ejemplo asumamos el primero $a \triangleleft x$, entonces consideramos la restricción $V = U|_{\mathcal{P} \setminus x}$ y descomponemos esto en una suma directa $\bigoplus_i V^i$, cada V^i satisface la condición (1) pero $\tilde{V}_a^i \neq V_0^i$ para todo i , en otro caso V^i sería indescomponible, entonces $V_a^i \cap V_b^i = 0$ para cada i , por lo tanto se tiene $V_a \cap V_b = 0$ y $U_a \cap U_b = 0$. Para el subcaso **(c)** seguimos el mismo razonamiento, consideramos $U|_{\mathcal{P} \setminus x} = V = \bigoplus_i V^i$, pero $V_a^i \cap V_b^i \neq 0$ para todo i , así que U parece ser indescomponible, entonces $V_a \cap V_b \neq 0$ y por lo tanto se tiene $\tilde{V}_a = \tilde{V}_b = V_0$ y $\tilde{U}_a = \tilde{U}_b = U_0$.

Hemos probado el paso inductivo y esto completa la prueba del teorema 5.7. □

7.1.2. Demostración del teorema 6.8 concerniente a K_8

Prueba. Las condiciones (1) y (2) del teorema son mutuamente duales, probaremos la primera tomando inducción sobre el número $\dim U_0$. Sea \mathcal{P} un poset equipados con un conjunto bien insertado de tipo K_8 teniendo la forma (6.8). Separamos la prueba en cuatro casos.

Primer caso: $\mathcal{P} = K_8 + \Omega^+$. Sea U una corepresentación indescomponible de \mathcal{P} , cuando $\dim U_0 = 1$, \mathcal{P} satisface la condición trivialmente, se puede verificar inspeccionando todas las formas de sus corepresentaciones indescomponibles. Para una dimensión superior $\dim U_0 = n$, razonamos por contradicción, asuma que **(a)** $U_r + U_s \neq U_0$, y tomamos $V_0 = U_r + U_s$. Entonces construimos la una corepresentación $V = (V_0, V_x : x \in \mathcal{P})$ tomando $V_x = U_x \cap V_0$ para $x \in \mathcal{P}$ y lo descomponemos en una suma directa de indescomponibles $V = \bigoplus_i V^i$.

Sean W_0, V'_x algunos complementos para V_0 y V_x en U_0 y U_x respectivamente, de este modo obtenemos la corepresentación $W = (W_0, W_x : x \in \mathcal{P})$ con $W_x = \pi(V'_x)$ donde $\pi : U_0 \rightarrow W_0$ es la proyección natural.

Para la primera parte de la condición (1), admitimos por ejemplo que $U_a \cap U_r \neq 0$ y elegimos un índice fijo i tal que $V_a^i \cap V_r^i \neq 0$, entonces por hipótesis de inducción se sigue $\tilde{V}_a^i = V_r^i + V_s^i = V_0^i$ y podemos concluir que la corepresentación V^i es un sumando directo de U . Una forma de observar esta descomposición es por consideraciones matriciales, para esto, reduzca el bloque matricial asociado a los puntos en $\text{Supp } W \subset a + \Omega^+$, es decir que reducimos los bloques matriciales asociados o bien al subposet $A_{38}^* \subset \mathcal{P}$ o bien a una cadena débil de longitud máxima. Aplicando adiciones tanto de columnas desde los bloques M_{V^i} y de filas desde los bloques M_W , de manera adecuada, anulamos los bloques en la intersección.

Ahora asumimos **(b)** $\tilde{U}_a \neq U_0$, en este caso tomamos $V_0 = \tilde{U}_a$, y construimos la corepresentación $V = \bigoplus_i V^i$, y W análogamente y razonando similarmente encontramos un sumando directo V^i de V el cual también es un sumando directo de U , sin embargo en este caso las consideraciones matriciales llevan a que el soporte W sea o bien el conjunto A_{28}^* o un subconjunto adecuado de tipo finito del conjunto $\{r \triangleleft p \triangleleft q, s\}$ donde p y q son puntos débiles.

Segundo caso: $\mathcal{P} = K_8 + \Delta^- + \Gamma^-$. Razonando como antes, podemos asumir que **(a)** $U_r + U_s \neq U_0$ (o **(b)** $\tilde{U}_a \neq U_0$), de este modo, elegimos $V_0 = U_r + U_s$ (o resp. $V_0 = \tilde{U}_a$) y considerando la misma construcción para V y W , obtenemos un sumando directo de U , sin embargo los cálculos matriciales son más simples debido a que $\text{Supp } W \subset \{\Delta^- \triangleleft a\}$ es una cadena (o $\text{Supp } W \subset \Gamma^- \triangleleft \{r, s\}$ respectivamente).

Tercer caso: $\mathcal{P} = K_8 + \Omega^+ + \Delta^- + \Gamma^-$. El soporte de cualquier corepresentación indescomponible U de \mathcal{P} o bien es $K_8 + \Omega^+$ o $K_8 + \Delta^- + \Gamma^-$, y regresamos al primer o segundo caso respectivamente respectivamente. Para ver esto descomponemos las

restricción $V = U|_{K_8}$ en una suma directa de indescomponibles $V = \bigoplus_i V^i$, como cada uno de ellos satisface la condición (2), tenemos que $V = X \oplus Y$ donde $X_a + X_r = X_a + X_s = X_0$ y $Y_a = Y_r \cap Y_s = 0$, entonces U es cierta o bien en algún subconjunto de $K_8 + \Omega^+$ o bien en algún subconjunto de $K_8 + \Delta^- + \Gamma^-$.

Cuarto caso: \mathcal{P} es un poset arbitrario. Considere $U \in \text{Ind } \mathcal{P}$ una corepresentación cierta en el subposet $\mathcal{P} \setminus \mathcal{Q}$ donde $\mathcal{Q} = K_8 + \Omega^+ + \Delta^- + \Gamma^-$. Probaremos la condición por inducción sobre el número $|\mathcal{P} \setminus \mathcal{Q}|$, la afirmación base se tiene para $\mathcal{P} = \mathcal{Q}$, esto fue probado precisamente en los casos anteriores.

Para $x \in \mathcal{P} \setminus \mathcal{Q}$, descomponemos la restricción $V = U|_{\mathcal{P} \setminus x}$ en una suma directa $V = \bigoplus_i V^i$, entonces se tienen cuatro posibilidades: **(a)** $a \triangleleft x$, **(b)** $\{r, s\} \triangleleft x$, **(c)** $x < \{r, a\}$ y **(d)** $x < \{s, a\}$. Como U es cierta, para **(a)** se tiene $\tilde{V}_a^i \neq V_0^i$ y para **(b)** se tiene $V_r^i + V_s^i \neq V_0^i$ para todo i , así, en cualquier caso tenemos $V_a^i \cap V_r^i = V_a^i \cap V_s^i = 0$ para todo i , por lo tanto $U_a \cap U_r = U_a \cap U_s = 0$. Para **(c)** y **(d)** se tiene $V_a^i \cap V_r^i \neq 0$ y $V_a^i \cap V_s^i \neq 0$ para todo i respectivamente, por lo que $\tilde{U}_a = U_r + U_s = U_0$. Con esto concluye la prueba. \square

7.2. Demostración del criterio de un parámetro, la lista de los posets equipados ciertos y las relaciones con la forma cuadrática de Tits

Los teoremas A y B del capítulo 3 se deducen de los resultados sobre clasificación de las corepresentaciones indescomponibles de los posets equipados de un parámetro dados en los capítulos 5 y 6 así como de los lemas 5.13, 6.12 y los teoremas 7.5 y 7.7 dados en este capítulo. Primero se probaran algunos lemas técnicos.

Haciendo una inspección de la clasificación de corepresentaciones indescomponibles de la lista de posets de tipo finito se verifica fácilmente la siguiente propiedad.

Lema 7.1. *Una corepresentación indescomponible U de un poset equipado finito \mathcal{P} el cual coincide con uno de los conjuntos F_{15} , F_{17} o F_{18} , satisface las siguientes condiciones*

$$\begin{cases} \tilde{U}_a = U_0 \text{ y } U_b = U_0, & \text{si } \mathcal{P} = F_{17}; \\ \tilde{U}_b = \tilde{U}_a + U_\xi = U_0, & \text{si } \mathcal{P} = F_{15} \text{ o } F_{18}; \\ \tilde{U}_a + U_b = U_0, & \text{si } \mathcal{P} = F_{18}. \end{cases}$$

Lema 7.2. *Sea $\mathcal{P} = K_6 + (a \vee b) + (a \wedge b)$ un poset equipado con la forma*

$$\mathcal{P} = \{p_m \prec \cdots \prec p_1 \prec \{a, b\} \prec q_1 \cdots \prec q_n\}.$$

Entonces, \mathcal{P} es cierto si y solo si $n + m \leq 2$.

Prueba. Primer caso: $|(a \wedge b)| = \emptyset$ o $|(a \vee b)| = \emptyset$. Consideramos primero $|(a \wedge b)| = \emptyset$. Sea U una corepresentación indescomponible de \mathcal{P} y descomponga su restricción $V = U|_{\mathcal{P} \setminus q_n}$ en una suma directa de indescomponibles

$$V = \bigoplus_i V^i.$$

Aplicaremos inducción sobre el número n , con caso inicial $n = 3$. Para $n = 3$, primero observe que cada sumando V^i es cierto a lo sumo en uno de los puntos $\{q_1, q_2\}$ ya que $V^i = (A_{42})$ sería un sumando directo de U ($V_{q_2}^i = V_0^i$, vea la proposición 5.9). Entonces haciendo consideraciones matriciales análogas como en la proposición 5.9, obtenemos un problema matricial sobre representaciones en la franja q_3 correspondiente a una guirnalda \mathcal{G}' la cual difiere de la guirnalda \mathcal{G} cambiando cada punto b_i por la cadena de dos puntos $b_i < b'_i$, vea (5.1) en la página 59, la clasificación de representaciones de la guirnalda \mathcal{G}' son como en (5.2) junto con bloques identidad de orden 1 en la franja correspondiente a b'_i . Esto sugiere que U no es cierta en más de dos puntos de la cadena $q_1 \prec q_2 \prec q_3$.

Ahora suponga que $\mathcal{P} = K_6 \prec q_1 \prec \cdots \prec q_k$, por hipótesis de inducción cada sumando V^i es cierto a lo sumo en un punto de la cadena $q_1 \prec \cdots \prec q_{k-1}$ (recuerde que no puede ser una corepresentación de A_{42} o sería un sumando directo) entonces razonando de manera similar al caso base, podemos reducir el problema matricial a uno sobre la clasificación de representaciones indescomponibles de una guirnalda \mathcal{G}' sobre la franja q_k que difiere de la guirnalda \mathcal{G} en (5.1) cambiando cada punto b_i por la cadena $b_{i_1} < \cdots < b_{i_{k-1}}$, la solución de este problema es como la dada en (5.2) y en las franjas correspondientes a los puntos b_{n_j} bloques identidad de orden 1. Con esto concluimos que si U es cierta entonces $n = 2$.

Observe que el caso en que $|(a \vee b)| = \emptyset$ se obtiene aplicando el lema 2.1 sobre dualidad y el resultado anterior.

Segundo caso: $|(a \wedge b)| \neq \emptyset$ y $|(a \vee b)| \neq \emptyset$. Considere la matriz de corepresentación indescomponible de U , M_U del poset \mathcal{P} cierta en el punto q_n suponga por inducción (sobre el número $m + n$, con caso base $m + n = 2$) que el lema es cierto para el conjunto $\mathcal{P} \setminus q_n$. Ahora, descomponga la restricción $V = U|_{\mathcal{P} \setminus q_n}$ en una suma directa de indescomponibles $V = \bigoplus_i V^i$, entonces aquellas corepresentaciones V^i las cuales no son sumandos directos de U deben ser del tipo $(K_6 - j)$ para $j \in \{1, 1^*, 2^*, 5\}$ o $(A_{38} - 1)$ en alguno de los subconjuntos $K_{6+q_1}, \dots, K_{6+q_{n-1}}$, entonces en la franja q_n aparece un problema matricial sobre representaciones determinado por una guirnalda \mathcal{G}'' , la cual es obtenida de la guirnalda \mathcal{G}' cambiando cada punto d_i por la cadena $d_i < d_{i_1} < \cdots < d_{i_{n-1}}$ y $d_{i_{n-1}} < d_{i+1}$. Las nuevas franjas d_{i_j} corresponden a corepresentaciones del tipo $(A_{38}^* - 1)$. La clasificación de corepresentaciones de la guirnalda \mathcal{G}'' es como la de la guirnalda \mathcal{G}' adicionando bloques identidad de orden uno en las franjas correspondientes a los puntos d_{i_j} . Esto significa que $m + n = 2$ o de lo contrario U no sería cierta en \mathcal{P} .

□

Si un poset equipado \mathcal{P} contiene un subconjunto crítico $\{a, b\}$, denotamos $A^- = N(b) \setminus a^\vee$, $A^+ = N(b) \setminus a_\wedge$, donde $N(b)$ es el conjunto de puntos incomparables con b en \mathcal{P} , B^- y B^+ son definidos análogamente.

Lema 7.3. *Sea \mathcal{P} un poset equipado conteniendo un subconjunto crítico $K_6 = \{a, b\}$ y teniendo la siguiente forma*

$$\mathcal{P} = \{A^- \triangleleft a \triangleleft A^+, B^- \triangleleft b \triangleleft B^+\}, \quad (7.2)$$

entonces, \mathcal{P} es cierto si y solo si $|A^-| + |A^+| + |B^-| + |B^+| = n \leq 2$.

Prueba. Primero observe que A^- , A^+ , B^- , B^+ son cadenas de puntos fuertes ya que K_6 es un subconjunto crítico correcto de \mathcal{P} . Note que cuando $n \leq 2$ un poset \mathcal{P} de la forma (7.2) corresponde a uno de los posets $K_6, A_{25}, A_{28}, A_{29}, A_{33}, A_{34}, A_{45}$ o sus duales. Probaremos que para $n \geq 3$ toda corepresentación indescomponible U de \mathcal{P} no es cierta, lo haremos por inducción sobre n (con caso base $n = 3$) teniendo en cuenta la dimensión de las corepresentaciones, utilizando la diferenciación $\widehat{\text{VII}}$, la completación para puntos ordinarios (sección 4.2) y la clasificación de corepresentaciones de los posets mencionados anteriormente así como la de sus duales.

Es suficiente considerar el caso en que \mathcal{P} tiene un punto fuerte maximal x (con este caso probado y utilizando el lema 2.1 se tiene el caso dual), en particular tomamos $x \in B^+$, el caso $x \in A^+$ es análogo, además podemos suponer que $A^- \subset x_\blacktriangle$ ya que de lo contrario \mathcal{P} se puede completar tantas veces como sea necesario entre x y los puntos en $N(x) \cap A^-$, esto se ilustra en la figura 7.1, esta consideración es necesaria para poder aplicar la diferenciación $\widehat{\text{VII}}$, adicionalmente las corepresentaciones indescomponibles ciertas de \mathcal{P} y el poset completado $\overline{\mathcal{P}}$ serían las mismas, vea la proposición 4.5.

Suponga que $n = 3$. Sea U una corepresentación indescomponible del poset completado $\overline{\mathcal{P}}$ con $\underline{\dim} U = (d_0, d_x : x \in \mathcal{P})$. La pareja (a, x) de $\overline{\mathcal{P}}$ es $\widehat{\text{VII}}$ -adecuada

y $U' = U^\downarrow \oplus \widehat{P}^m(a^+)$ donde $m = \dim_{\mathbb{G}}(\widetilde{U}_a + U_b)/U_b$ entonces cuando aplicamos la diferenciación pueden ocurrir dos cosas, o bien que la dimensión de la corepresentación derivada reducida U_0^\downarrow sea menor que d_0 o bien que la dimensión de U_0^\downarrow sea igual a d_0 .

Primer caso: $m = \dim_{\mathbb{G}}(\widetilde{U}_a + U_b)/U_b = 0$. Entonces $U' = U^\downarrow$, más aún $\text{Supp } U^\downarrow \subset (\overline{\mathcal{P}})' \setminus \{x, a^+\}$, como $[U^\downarrow]^\dagger = U$ entonces una condición necesaria para que U sea cierta en $\overline{\mathcal{P}}$ es que $\text{Supp } U^\downarrow = (\overline{\mathcal{P}})' \setminus \{x, a^+\}$, y entonces $W = U^\downarrow|_{\text{Supp } U^\downarrow}$ sería alguna de las corepresentaciones indescomponibles (A_{28}) , (A_{29}) , (A_{34}) , (A_{45}) o alguna de sus duales, pero al integrarlas U resulta no cierta en x .

Segundo caso: $m = \dim_{\mathbb{G}}(\widetilde{U}_a + U_b)/U_b \neq 0$. Entonces la dimensión de U_0^\downarrow es menor que la de U_0 y $\text{Supp } U^\downarrow \subset \mathcal{P} \setminus \{x\}$, análogamente al caso anterior una condición necesaria para que U sea cierta en $\overline{\mathcal{P}}$ es que $\text{Supp } U^\downarrow = (\mathcal{P})' \setminus \{x\}$ entonces $W = U^\downarrow|_{\text{Supp } U^\downarrow}$ puede derivarse nuevamente como corepresentación del poset $(\overline{\mathcal{P}})' \setminus \{x\}$ (si no posee una pareja $\widehat{\text{VII}}$ -adecuada puede completarse como se explicó anteriormente), sin embargo la dimensión no de las corepresentaciones reducidas derivadas no puede decrecer indefinidamente, entonces en algún paso de diferenciación se debe llegar al primer paso y podemos concluir que U no es cierta.

Cuando $n = k$ estudiamos los mismos dos casos anteriores, en el primero la dimensión de U^\downarrow no disminuye pero $\text{Supp } U^\downarrow \subset (\overline{\mathcal{P}})' \setminus \{x, a^+\}$ aplicando la hipótesis de inducción al conjunto $(\overline{\mathcal{P}})' \setminus \{x, a^+\}$ de la forma (7.2) con $n = k - 1$ tenemos que U no puede ser cierta. En el segundo caso la dimensión de U^\downarrow disminuye, esta corepresentación puede derivarse nuevamente (bajo algunas consideraciones) sin embargo este proceso no se puede realizar indefinidamente, por lo que en algún paso caemos en el primer caso y de cualquier forma concluimos que U no puede ser cierta.

□

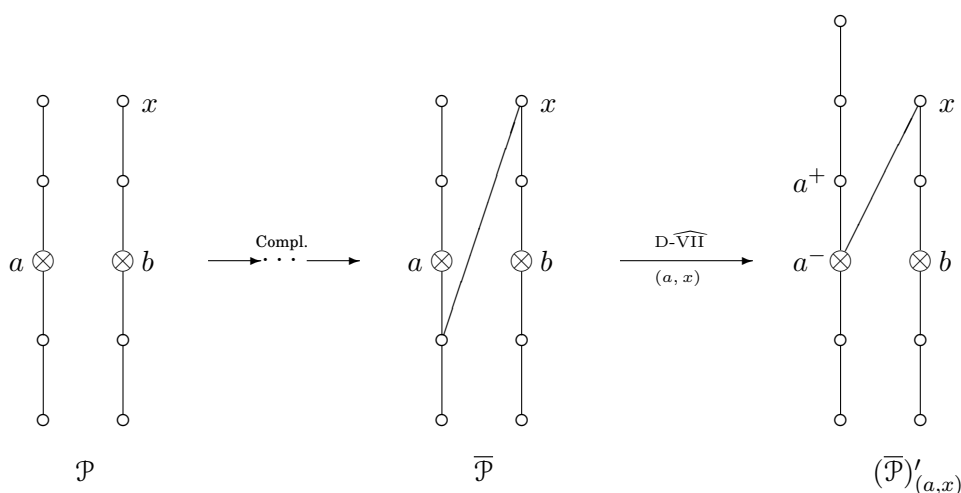


Figura 7.1. (Izquierda) Un poset \mathcal{P} de la forma (7.2) es completado $\bar{\mathcal{P}}$ (centro) tantas veces como sea necesario entre el punto x y los puntos en $N(x) \cap A^-$, (derecha) el poset completado derivado $(\bar{\mathcal{P}})'_{(a,x)}$

El siguiente corolario se deduce de forma inmediata del corolario 5.8 y los lemas 7.2 y 7.3.

Corolario 7.4. *Sea \mathcal{P} un poset equipado de un parámetro de la forma*

$$\mathcal{P} = K_6 + (a \vee b) + (a \wedge b) + A^+ + A^- + B^+ + B^-.$$

Entonces, \mathcal{P} es cierto si y solo si $|(a \vee b)| + |(a \wedge b)| + |A^+| + |A^-| + |B^+| + |B^-| \leq 2$

Si \mathcal{P} satisface las condiciones del corolario 7.4, la anterior equivalencia puede ser reescrita diciendo que \mathcal{P} es cierto si y solo si es isomorfo o antiisomorfo a alguno de los posets $K_6, A_{25}, A_{28}, A_{29}, A_{33}, A_{34}, A_{38}, A_{39}, A_{41}, A_{42}, A_{45}$ o A_{46} .

Falta revisar el caso más general en que \mathcal{P} contiene un subconjunto crítico de tipo K_6 , el caso básico se resume en el corolario 7.4.

Teorema 7.5. *Un poset equipado \mathcal{P} de un parámetro conteniendo un subconjunto crítico K_6 es cierto si y solo si este es isomorfo o antiisomorfo a alguno de los conjuntos $K_6, A_{25}, A_{28}, A_{29}, A_{33}, A_{34}, A_{38}, A_{39}, A_{41}, A_{42}, A_{45}$ y A_{46} .*

Prueba. La prueba de este teorema será por inducción, más precisamente, denotamos por $\mathcal{P}_0 = K_6 + (a \vee b) + (a \wedge b) + A^+ + A^- + B^+ + B^-$ donde A^\pm, B^\pm son como en el lema 7.3. La inducción se hará sobre el número $|\mathcal{P} \setminus \mathcal{P}_0|$ con caso base \mathcal{P}_0 que fue probado en el corolario 7.4.

Sea $x \in \mathcal{P} \setminus \mathcal{P}_0$ y $U \in \text{Ind } \mathcal{P}$ cierta de dimensión d . Se puede asumir que $x \in \max \mathcal{P}$ (para el caso dual se puede aplicar el lema 2.1) y que $x > K_6$ (utilizando algo de combinatoria se pueden descartar los otros casos), observe que $a \triangleleft x$ o $b \triangleleft x$ o de lo contrario $a, b \in (a \vee b)$ o habría dos subconjuntos críticos en \mathcal{P} .

Como U es cierta entonces $U_a + U_b \neq U_0$ y por la consideración anterior $\tilde{U}_a \neq U_0$ o $\tilde{U}_b \neq U_0$, entonces también se tiene que $U_a \cap U_b = \underline{U}_a = \underline{U}_b = 0$, debido al lema 5.8 y en particular $K_6 = \min \mathcal{P}$.

Descomponemos la restricción $V = U|_{\mathcal{P} \setminus x}$ en una suma directa de corepresentaciones indescomponibles

$$V = \bigoplus_i V^i$$

y denotamos el soporte de cada sumando por $S^i = \text{Supp } V^i$, para todo i S^i debe ser un poset de tipo finito o de un parámetro, entonces por hipótesis de inducción cada S^i es isomorfo a alguno de los posets $K_6, A_{25}, A_{28}, A_{29}, A_{38}, A_{39}, A_{42}$ o uno finito (ya que estos no tienen puntos menores que K_6).

Ahora podemos estudiar dos posibilidades (**primero**) $K_6 \triangleleft x$ y (**segundo**) $a \triangleleft x$ y $b \prec x$.

Primer caso: Entonces $\tilde{V}_a^i + \tilde{V}_b^i \neq V_0^i$ para todo i . Considere un índice para el cual $S^i \cap K_6 \neq \emptyset$, entonces S^i no puede ser isomorfo a $K_6, A_{25}, A_{28}, A_{29}, A_{38}$ y A_{42} , vea el lema 5.10(a), por la misma razón S^i no es isomorfo a F_{13}, F_{14} y F_{16} (porque estos posets corresponden a corepresentaciones no ciertas, de dimensiones minimales, de los posets K_6, A_{25} y A_{29} respectivamente, o también se puede

verificar directamente de sus corepresentaciones). De manera similar, aplicando el lema 7.1 y algo de combinatoria que S^i no es isomorfo a F_{17} o F_{18} .

para A_{39} y F_{15} (ya que \mathcal{P} solo puede contener un poset crítico), se verifica que \mathcal{P} no puede contener más de un subconjunto $S^i \cong A_{39}$ y no más de un subconjunto $S^j \cong F_{15}$, adicionalmente $S^j \subset S^i$, entonces como las corepresentaciones de F_{15} corresponden precisamente a corepresentaciones indescomponibles no ciertas, de dimensiones minimales, de A_{39} (vea la proposición 5.6) se tiene por el lema 5.10(b) que $V_a^i = 0$ o $V_b^i = 0$, lo cual contradice la suposición inicial.

Segundo caso: Entonces x es un punto débil. Como en el primer caso probamos que para $K_6 \triangleleft y$ la corepresentación U no es cierta en y , podemos suponer que el conjunto $C = (a \vee b) + \mathcal{P} \setminus \mathcal{P}_0$ es una cadena de puntos débiles, con $x = \max C$ además $V_a^i + V_b^i \neq V_0^i$ para todo i , o de lo contrario V^i sería un sumando directo de U . Como U es cierto en a existe un índice i para el cual $a \in S^i$. Se pueden hacer algunas consideraciones según sea la forma de C .

(a) Si asumimos que $(a \vee b) \neq \emptyset$ y $p = \min(a \vee b)$, entonces $|A^+ + B^+| \leq 1$ ya que \mathcal{P} no puede contener más de un poset crítico. Si $A^+ + B^+ = \emptyset$ entonces S^i es isomorfo a uno de los conjuntos $K_6, A_{38}, A_{42}, F_{13}, F_{17}$, y entonces aplicando los lemas 5.10(b) y 7.1 debería ocurrir que $V_a^i = 0$, es decir que $a \notin S^i$ contradiciendo la suposición inicial.

Entonces $|A^+ + B^+| = 1$, si $A^+ = \zeta$ y $B^+ = \emptyset$ entonces para cualquier $y > p$ se tiene que $\zeta < y$ o de lo contrario $K_7 \subset \mathcal{P}$, en particular $\zeta < x$, entonces S^i es isomorfo a alguno de los posets $K_6, A_{35}, A_{38}, A_{39}, F_{13} = \{a\}, F_{17} = \{a < p\}$, teniendo en cuenta nuevamente los lemas 5.10(b) y 7.1 volvemos a $V_a^i = 0$, contradiciendo que $a \in S^i$. Si $A^+ = \emptyset$ y $B^+ = \zeta$ debido a la condición de que $K_7 \not\subset \mathcal{P}$ implica que $C = \{p < x\}$ y $\mathcal{P} = A_{39} + x$, ya que para $p < y < x$ se debe tener que $p \triangleleft x$ y $b \triangleleft x$ lo cual es una contradicción. Entonces la pareja (b, x) es especial para la completación, como $\overline{\mathcal{P}}$ no es cierto (corresponde al primer

caso) entonces \mathcal{P} tampoco es cierto, el lema 4.7 establece una relación entre las corepresentaciones indescomponibles de \mathcal{P} y \mathcal{P} .

(b) Suponga que $(a \vee b) = \emptyset$. Entonces $b + \mathcal{P} \setminus \mathcal{P}_0$ es una cadena completamente débil y $a \triangleleft y$, donde $y = \min(\mathcal{P} \setminus \mathcal{P}_0)$ lo cual implica que S^i no es isomorfo a A_{38} , A_{39} , A_{42} , F_{15} , F_{17} y F_{18} , más aún, como ya fue mencionado antes, si S^i es isomorfo a F_{13} , F_{14} o F_{16} cada una de sus corepresentaciones puede considerarse como una corepresentación no cierta, de dimensión minimal, de los posets K_6 , A_{25} y A_{29} respectivamente, entonces por el lema 5.10(b) $V_a^i = 0$ que es una contradicción. Esto completa la prueba. □

Lema 7.6. *Un poset equipado \mathcal{P} de un parámetro teniendo la siguiente forma*

$$\mathcal{P} = K_8 + \Omega^+ + \Omega^- + \Gamma^- + \Gamma^+ + \Delta^- + \Delta^+$$

(usando la misma notación de la fórmula (6.8) página 81) es cierto si y solo si este es isomorfo o antiisomorfo a uno de los conjuntos K_8 , A_{26} , A_{27} , A_{30} , A_{31} , A_{32} , A_{35} , A_{36} , A_{37} , A_{40} , A_{43} , A_{44} , A_{47} o A_{48} .

Prueba. Observe que $K_8 \subset \mathcal{P}$ es un subconjunto bien insertado, entonces podemos estudiar dos casos.

Primer caso: $\Omega^+ + \Omega^- \neq \emptyset$ entonces $\Gamma^-, \Gamma^+, \Delta^-, \Delta^+ = \emptyset$, por el corolario 6.9, adicionalmente $|\Omega^+| \leq 1$ y $|\Omega^-| \leq 1$ por que \mathcal{P} debe contener solo un poset crítico. En este caso concluimos que \mathcal{P} es isomorfo o antiisomorfo a A_{40} , A_{43} , A_{44} o A_{48} .

Segundo caso: Si $\Omega^+ + \Omega^- = \emptyset$ entonces suponiendo que $\Gamma^+ + \Delta^+ \neq \emptyset$ (el caso $\Gamma^- + \Delta^- \neq \emptyset$ se tiene aplicando el lema 2.1) el poset \mathcal{P} puede derivarse con respecto al algoritmo D- $\widehat{\text{VII}}$ o D-I, utilizando cualquiera de estos dos algoritmos tenemos dos opciones, primero que la dimensión de la corepresentación reducida derivada no disminuya, entonces volvemos a un poset del mismo tipo y podemos argumentar inductivamente sobre el número $n = |\Gamma^+| + |\Delta^+|$ con caso base

3 (análogamente al lema 7.3). Segundo la dimensión de la corepresentación reducida derivada disminuye pero no lo puede hacer indefinidamente y el algún momento volvemos a la situación anterior, entonces \mathcal{P} es isomorfo o antiisomorfo a $A_{26}, A_{27}, A_{30}, A_{31}, A_{32}, A_{35}, A_{36}, A_{37}$ o A_{47} . \square

Teorema 7.7. *Sea \mathcal{P} un poset equipado de un parámetro conteniendo un subconjunto crítico $K_8 = \{\varrho, \sigma, a\}$. Entonces, \mathcal{P} es cierto si y solo si es isomorfo o antiisomorfo a alguno de los conjuntos $K_8, A_{26}, A_{27}, A_{30}, A_{31}, A_{32}, A_{35}, A_{36}, A_{37}, A_{40}, A_{43}, A_{44}, A_{47}$ y A_{48} .*

Prueba. Denotamos por $\mathcal{P}_0 = K_8 + \Omega^+ + \Omega^- + \Gamma^- + \Gamma^+ + \Delta^- + \Delta^+$ como en el lema 7.6, aplicaremos inducción sobre el número $|\mathcal{P} \setminus \mathcal{P}_0|$, donde el caso inicial $\mathcal{P} = \mathcal{P}_0$ ya fue considerado en el lema 7.6. Sea U una corepresentación indescomponible cierta del poset \mathcal{P} , podemos considerar $x \in (\mathcal{P} \setminus \mathcal{P}_0) \cap \max \mathcal{P}$ y luego aplicar el lema 2.1 para el caso dual, entonces por el lema 6.9 $K_8 = \min \mathcal{P}$.

Descomponemos la restricción $V = U|_{\mathcal{P} \setminus x}$ en una suma directa de corepresentaciones indescomponibles $V = \bigoplus_i V^i$, denotamos por $S^i = \text{Supp } V^i$, por hipótesis de inducción cada conjunto S^i conteniendo al menos 1 punto débil es isomorfo a alguno de los conjuntos $K_8, A_{26}, A_{27}, A_{30}, A_{31}, A_{32}, A_{40}$ o alguno de los posets finitos. Entonces podemos estudiar dos posibilidades para x .

Primer caso: $\{a, \varrho\} \triangleleft x$. Entonces $(\tilde{V}_a^i) + V_\varrho^i \neq V_0^i$ para todo i , así en el caso $A_{40} = \{\varrho; \sigma \triangleleft q \succ a\} \not\subset \mathcal{P}$ se puede establecer que $V_a^i = 0$ para todo i utilizando el lema 6.6 y algo de combinatoria en el caso en que S^i es isomorfo a un poset finito.

En la situación en que $F_{15} = \{a \prec b; y\} \subset \mathcal{P}$ (para algunos puntos $b, y \in \mathcal{P}$) entonces $A_{26}, A_{30}, A_{31} \not\subset \mathcal{P}$ y $|S^i| \leq 2$, si $\varrho \in S^i$ y todos los puntos de S^i son fuertes, es decir que $U_a = 0$ o $U_\varrho = 0$ lo cual contradice la suposición inicial.

Si $A_{40} = \{\varrho; \sigma \triangleleft q \succ a\} \subset \mathcal{P}$, entonces $N(\varrho) = \{a, \sigma\}$ y $A_j \not\subset \mathcal{P}$ para $j = 26, 27, 30, 31, 32$, es decir que todos los conjuntos S^i son del tipo K_8 , A_{40} o algún poset finito, entonces (con ayuda del lema 6.6 y algo de combinatoria) obtenemos que $V_\varrho^i = 0$ cuando $q \triangleleft x$ y que $V_a^i = 0$ cuando $y \parallel x$ para todo i , es decir nuevamente $U_\varrho = 0$ o $U_a = 0$, lo cual es imposible.

Segundo caso: Sea $a \prec x$ y $\{\varrho, \sigma\} \triangleleft x$. Entonces $V_a^i + V_\varrho^i + V_\sigma^i \neq V_0^i$ para todo i . Como x es un punto débil, entonces $\mathcal{P} \setminus x_\Delta$ es una cadena de puntos fuertes y entonces cada S^i contiene un punto débil. Aplicando los lemas 7.1 y 6.6, según sea el caso tanto para $A_{40} \not\subset \mathcal{P}$ o $A_{40} \subset \mathcal{P}$ respectivamente, se tendría que $U_\varrho = 0$ contradiciendo la suposición inicial de que U es cierto, con esto finaliza la prueba. \square

Con los teoremas 7.5, 7.7, los lemas 5.13, 6.12, y los resultados sobre clasificación de las corepresentaciones ciertas dados en las proposiciones 5.2, 5.6, 5.9, 6.2, 6.3, 6.5 y 6.7 y los teoremas C1-C4 se concluye el criterio de un parámetro para posets equipados (Teorema A) así como la lista completa de posets equipados ciertos, con respecto a corepresentaciones (Teorema B).

Dado que la lista de posets equipados ciertos de un parámetro es la mencionada en el teorema B y que las dimensiones de las corepresentaciones indecomponibles de estos han sido calculadas, vea los apéndices C y D, se verifica exhaustivamente que estas dimensiones corresponden a las raíces reales e imaginarias de la forma cuadrática de Tits asociada a cada poset así como a los vectores especiales como se indica en el teorema D.

Apéndice **A**

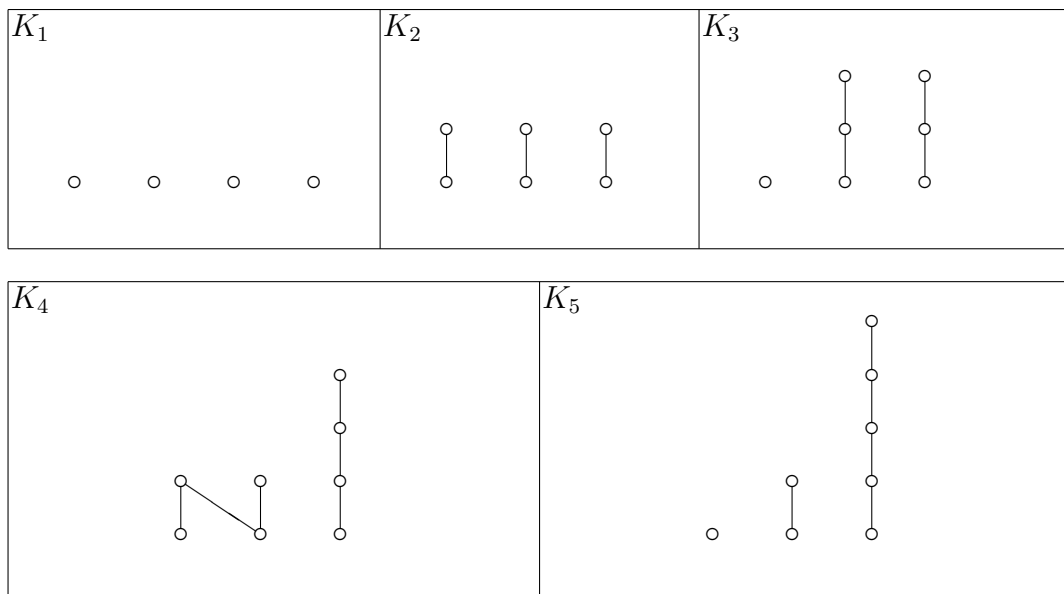
Los posets equipados de tipo finito y sus corepresentaciones

$f=1$	$\boxed{1}$ A	$\boxed{1 \ 1}$ A	$\begin{array}{ c c c } \hline 1 & 0 & \xi \\ \hline 0 & 1 & 1 \\ \hline \end{array}$ A	$\boxed{1 \ \xi \ 1}$ B		$\boxed{1 \ \xi}$	$\begin{array}{ c c c c } \hline 1 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 1 & \xi & \xi \\ \hline \end{array}$
$f=2$	$\boxed{1 \ \xi}$ B	$\boxed{1 \ \xi \ 1}$ B	$\begin{array}{ c c c c } \hline 1 & 0 & \xi & 0 & \xi \\ \hline 0 & 1 & 0 & \xi & 1 \\ \hline \end{array}$ E	$\begin{array}{ c c c c } \hline 0 & 0 & 1 & \xi & 1 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 & \xi \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ \hline \end{array}$ F	$\begin{array}{ c c c c } \hline 1 & 0 & \xi & 1 \\ \hline 0 & 1 & 1 & 0 \\ \hline \end{array}$		
	$\begin{array}{ c c } \hline 1 & 0 & 1 \\ \hline 1 & \xi & 0 \\ \hline \end{array}$ C	$\begin{array}{ c c c c } \hline 0 & 0 & 1 & \xi & 1 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \xi \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ \hline \end{array}$ G					
	F_{13}	F_{14}	F_{15}	F_{16}	F_{17}	F_{18}	
	\otimes_a	$\otimes_a \quad \circ_c$	$\begin{array}{c} \otimes_b \\ \\ \otimes_a \end{array} \quad \circ_c$	$\otimes_a \quad \begin{array}{c} \circ_\eta \\ \\ \circ_c \end{array}$	$\begin{array}{c} \otimes_b \\ \\ \otimes_a \end{array}$	$\begin{array}{c} \otimes_b \\ \\ \otimes_c \\ \\ \otimes_a \end{array} \quad \circ_c$	

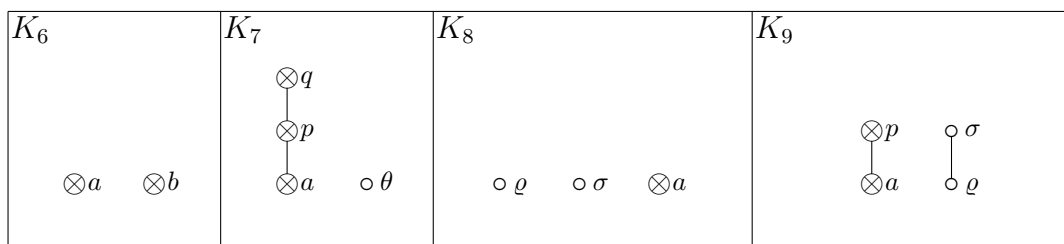
Apéndice B

Los posets equipados críticos

Los posets críticos de Kleiner



Los posets críticos con equipamiento no trivial


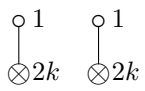
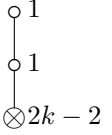
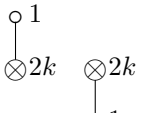
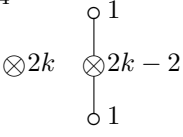
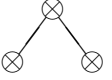
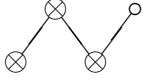
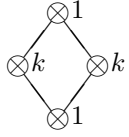
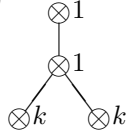


Apéndice C



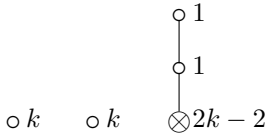
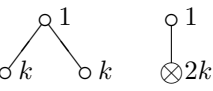
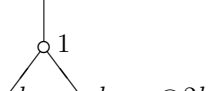
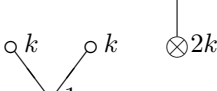
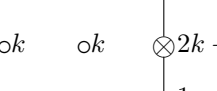
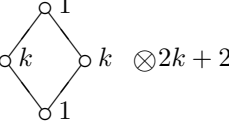

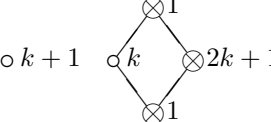
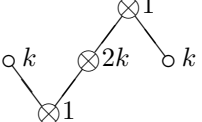
Los posets ciertos

Los números que aparecen junto a los puntos de algunos posets corresponden a las dimensiones de su único tipo de corepresentación junto con su forma de Tits en la parte inferior derecha. Las dimensiones de los otros posets se encuentran en el apéndice D.

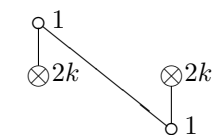
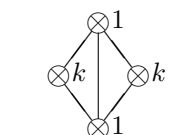
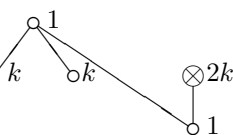
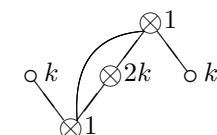
Los posets ciertos conteniendo K_6 excepto los especiales

A_{25}  $d_0 = 2k$	A_{28}  $d_0 = 2k + 1$ $f = 2$	A_{29}  $d_0 = 2k$ $f = 2$	A_{33}  $d_0 = 2k + 1$ $f = 2$	
A_{34}  $d_0 = 2k$ $f = 2$	A_{38} 	A_{39} 	A_{41}  $d_0 = k + 1$ $f = 1$	A_{42}  $d_0 = k + 1$ $f = 1$

Los posets ciertos conteniendo K_8 excepto los especiales

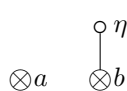
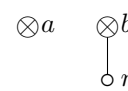
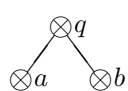
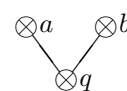
A_{26}  $d_0 = 2k$	A_{27}  $d_0 = 2k$	A_{30}  $d_0 = 2k$ $f = 2$	
A_{31}  $d_0 = 2k + 1$ $f = 2$	A_{32}  $d_0 = 2k + 2$ $f = 2$	A_{35}  $d_0 = 2k + 1$ $f = 2$	A_{36}  $d_0 = 2k$ $f = 2$
A_{37}  $d_0 = 2k + 2$ $f = 2$	A_{40}  $d_0 = 2k + 2$ $f = 1$	A_{43}  $d_0 = 2k + 2$ $f = 1$	A_{44}  $d_0 = 2k + 1$ $f = 1$

Los posets ciertos especiales

A_{45}  $d_0 = 2k + 1$ $f = 4$	A_{46}  $d_0 = k + 1$ $f = 2$	A_{47}  $d_0 = 2k + 1$ $f = 4$	A_{48}  $d_0 = 2k + 1$ $f = 2$
---	--	--	---

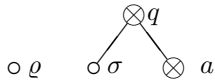
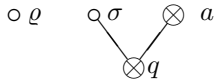
Apéndice **D**

Dimensiones de las corepresentaciones indescomponibles de los posets ciertos

A_{25}				A_{25}^*				A_{38}				A_{38}^*			
															
$\underline{\dim} = (d_0; d_a, d_b, d_\eta)$								$\underline{\dim} = (d_0; d_a, d_b, d_q)$							
T	f	$\underline{\dim} A_{25}$	$\underline{\dim} A_{25}^*$	T	f	$\underline{\dim} A_{38}$	$\underline{\dim} A_{38}^*$	T	f	$\underline{\dim} A_{38}$	$\underline{\dim} A_{38}^*$	T	f	$\underline{\dim} A_{38}$	$\underline{\dim} A_{38}^*$
1	1	(1,1,0,1)	(1,1,0,1)	1	1	(1,0,0,1)	(1,1,1,1)								
2	2	(2,2,0,1)	(2,2,2,1)	2	1	(1,0,1,1)	(1,1,0,1)								
3	2	(1,0,0,1)	(1,2,0,1)	3	1	(1,1,1,1)	(1,0,0,1)								
4	2	(1,2,0,1)	(1,0,0,1)	4	2	(1,0,0,2)	(1,0,0,2)								
5	2	(2,2,2,1)	(2,2,0,1)												

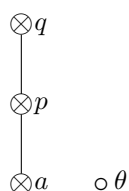
A_{26}				A_{26}^*				A_{27}				A_{27}^*			
$\underline{\dim} = (d_0; d_\rho, d_\sigma, d_a, d_\eta)$				$\underline{\dim} = (d_0; d_\rho, d_\sigma, d_a, d_\eta)$				$\underline{\dim} = (d_0; d_\rho, d_\sigma, d_a, d_\zeta)$				$\underline{\dim} = (d_0; d_\rho, d_\sigma, d_a, d_\zeta)$			
T	f	$\underline{\dim} A_{26}$	$\underline{\dim} A_{26}^*$	T	f	$\underline{\dim} A_{27}$	$\underline{\dim} A_{27}^*$	T	f	$\underline{\dim} A_{27}$	$\underline{\dim} A_{27}^*$	T	f	$\underline{\dim} A_{27}$	$\underline{\dim} A_{27}^*$
1	1	(2,1,1,1,1)	(2,1,1,1,1)	1	1	(1,0,0,1,1)	(1,0,0,1,1)	1	1	(1,0,0,1,1)	(1,0,0,1,1)	1	1	(1,0,0,1,1)	(1,0,0,1,1)
2	2	(1,0,1,0,1)	(1,1,0,0,1)	2	2	(1,0,0,0,1)	(1,0,0,2,1)	2	2	(1,0,0,0,1)	(1,0,0,2,1)	2	2	(1,0,0,0,1)	(1,0,0,2,1)
3	2	(2,1,1,2,1)	(2,1,1,0,1)	3	2	(2,0,1,2,1)	(2,0,1,2,1)	3	2	(2,0,1,2,1)	(2,0,1,2,1)	3	2	(2,0,1,2,1)	(2,0,1,2,1)
4	2	(1,0,0,0,1)	(1,1,1,0,1)	4	2	(1,0,0,2,1)	(1,0,0,2,1)	4	2	(1,0,0,2,1)	(1,0,0,2,1)	4	2	(1,0,0,2,1)	(1,0,0,2,1)
5	2	(1,1,1,0,1)	(1,0,0,0,1)	5	2	(2,1,1,2,1)	(2,0,0,2,1)	5	2	(2,1,1,2,1)	(2,0,0,2,1)	5	2	(2,1,1,2,1)	(2,0,0,2,1)
6	2	(2,1,1,0,1)	(2,1,1,2,1)	6	2	(2,0,0,2,1)	(2,1,1,2,1)	6	2	(2,0,0,2,1)	(2,1,1,2,1)	6	2	(2,0,0,2,1)	(2,1,1,2,1)

A_{39}				A_{39}^*			
$\underline{\dim} = (d_0; d_a, d_b, d_q, d_\theta)$							
T	f	$\underline{\dim} A_{39}$	$\underline{\dim} A_{39}^*$	T	f	$\underline{\dim} A_{39}$	$\underline{\dim} A_{39}^*$
1	1	(2,1,0,1,1)	(2,1,0,2,1)	6	2	(1,0,0,2,1)	(3,2,0,2,1)
2	1	(1,1,0,1,1)	(2,1,0,1,1)	7	2	(2,2,0,2,1)	(2,0,0,2,1)
3	1	(1,0,0,1,1)	(2,2,0,1,1)	8	2	(2,0,0,2,1)	(2,2,0,2,1)
4	1	(2,2,0,1,1)	(1,0,0,1,1)	9	2	(3,2,0,2,2)	(1,0,0,2,1)
5	1	(2,1,0,2,1)	(1,1,0,1,1)	10	2	(3,2,0,2,1)	(3,2,0,2,2)

A_{40} 				A_{40}^* 			
$\underline{\dim} = (d_0; d_\rho, d_\sigma, d_a, d_q)$				$\underline{\dim} = (d_0; d_\rho, d_\sigma, d_a, d_q)$			
T	f	$\underline{\dim} A_{40}$	$\underline{\dim} A_{40}^*$	T	f	$\underline{\dim} A_{40}$	$\underline{\dim} A_{40}^*$
1	1	(1,1,0,0,1)	(1,0,0,1,1)	9	2	(1,0,0,0,2)	(3,2,0,2,2)
2	1	(2,1,1,1,1)	(2,1,0,2,1)	10	2	(2,1,0,2,2)	(2,1,0,0,2)
3	1	(2,1,1,2,1)	(2,1,0,1,1)	11	1	(2,1,0,1,2)	(2,1,1,2,1)
4	2	(1,1,0,0,2)	(3,1,0,2,1)	12	1	(2,1,0,1,1)	(2,1,0,1,2)
5	1	(1,1,0,1,1)	(1,1,1,0,1)	13	1	(1,0,0,0,1)	(1,1,0,1,1)
6	1	(2,1,0,2,1)	(2,1,1,1,1)	14	2	(2,1,0,0,2)	(2,1,0,2,2)
7	1	(1,0,0,1,1)	(1,1,0,0,1)	15	2	(3,1,0,2,2)	(1,1,0,0,2)
8	2	(3,2,0,2,2)	(1,0,0,0,2)				

Apéndice **E**

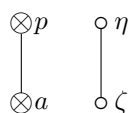
Dimensiones de las corepresentaciones indescomponibles de K_7 y K_9



K_7

$d = (d_0, d_a, d_p, d_q, d_\theta)$ y tamaño de paso $\mu = (2, 1, 1, 1, 1)$.

f = 1		f = 1		f = 2		f = 2	
1	(2,1,1,2,1)	1*	(2,0,2,1,1)	13	(3,2,2,2,1)	13*	(3,0,2,2,2)
2	(1,1,1,0,0)	2*	(1,0,0,1,1)	14	(1,0,2,0,0)	14*	(1,0,0,2,1)
3	(2,0,1,2,1)	3*	(2,1,2,1,1)	15	(1,0,0,2,0)	15*	(1,0,2,0,1)
4	(2,1,0,2,1)	4*	(2,1,2,0,1)	16	(2,0,2,0,1)	16*	(1,2,0,0,0)
5	(1,0,1,1,0)	5*	(1,0,1,1,1)	17	(1,0,0,0,1)	17*	(2,2,0,2,1)
6	(1,1,0,1,0)	6*	(1,0,1,0,1)	18	(3,2,2,0,1)	18*	(2,2,0,0,0)
7	(2,1,1,0,1)	7*	(2,2,0,1,1)	19	(3,2,0,2,1)	19*	(3,2,2,0,2)
8	(2,0,1,1,1)	8*	(2,2,1,1,1)	20	(4,2,2,2,1)	20*	(4,2,2,2,3)
9	(1,1,0,0,0)	9*	(1,1,0,0,1)	21	(2,0,0,2,1)	21*	(2,2,2,0,1)
10	(2,1,0,1,1)	10*	(2,2,1,0,1)	22	(1,0,0,0,0)	22*	(1,2,0,0,1)
11	(1,0,1,0,0)	11*	(1,1,0,1,1)	23	(3,0,2,2,1)	23*	(3,2,2,2,2)
12	(1,0,0,1,0)	12*	(1,1,1,0,1)	24	(2,0,2,2,1)		
				25	(2,2,0,0,1)		

 K_9 $d = (d_0, d_a, d_p, d_\zeta, d_\eta)$ y tamaño de paso $\mu = (3, 2, 2, 1, 1)$.

f = 1		f = 1		f = 2		f = 2	
1	(3,2,3,1,1)	1*	(3,1,3,1,1)	14	(2,2,2,0,1)	14*	(2,0,2,1,1)
2	(3,2,1,1,1)	2*	(3,3,1,1,1)	15	(1,0,0,1,0)	15*	(1,2,0,0,0)
3	(2,2,1,0,1)	3*	(2,1,1,1,1)	16	(1,0,2,1,0)	16*	(1,0,2,0,0)
4	(1,0,1,1,0)	4*	(1,1,1,0,0)	17	(2,2,0,0,1)	17*	(2,2,0,1,1)
5	(2,2,1,1,0)	5*	(2,1,1,1,0)	18	(2,2,2,1,0)	18*	(2,0,2,1,0)
6	(1,0,1,0,1)	6*	(1,1,1,0,1)	19	(1,0,0,0,1)	19*	(1,2,0,0,1)
7	(1,1,0,0,0)	7*	(1,1,0,1,0)	20	(3,2,2,2,0)	20*	(3,2,2,1,0)
8	(2,1,2,0,1)	8*	(2,1,2,1,1)	21	(3,2,2,0,2)	21*	(3,2,2,1,2)
9	(1,0,1,0,0)	9*	(1,1,1,1,0)	22	(3,2,2,0,1)	22*	(3,2,2,2,1)
10	(3,1,2,1,1)	10*	(3,3,2,1,1)	23	(1,0,0,0,0)	23*	(1,2,0,1,0)
11	(2,1,1,0,1)	11*	(2,2,1,1,1)	24	(2,0,2,0,1)	24*	(2,2,2,1,1)
12	(2,1,2,1,0)			25	(2,2,0,1,0)		
13	(1,1,0,0,1)			26	(1,0,2,0,1)		

Bibliografía

- [1] D.M. Arnold, *Abelian groups and representations of finite partially ordered sets*, CMS Books in Mathematics, 2000.
- [2] M. Auslander, I. Reiten, and Sv. Smalø, *Representation Theory of Artin Algebras*, Cambridge Univ. Press, 1995.
- [3] R. Bautista, *On algebras of strongly unbounded type*, Comm. Math. Helv. **60** (1985), 392–399.
- [4] R. Bautista, P. Gabriel, A.V. Roiter, and L. Salmeron, *Representation-finite algebras and multiplicative bases*, Invent. Math. **81** (1985), 277–285.
- [5] K.I. Belousov, L.A. Nazarova, and A.V. Roiter, *Finitely representable triadic sets (Russian, English)*, St. Petersburg. Math. J. **9** (1998), no. 4, 651–673, translation from Algebra Anal. **9** (1997), no.4, 3–27.
- [6] V.M. Bondarenko and A.G. Zavadskij, *Posets with an equivalence relation of tame type and of finite growth*, Can. Math. Soc. Conf. Proc **11** (1991), 67–88.
- [7] D.Ž. Djoković, *Classification of pair consisting of a linear and semilinear map*, Linear Algebra Appl. **20** (1978), 147–165.
- [8] U. Fischbacher, *Une nouvelle preuve de un théorème de Nazarova et Roiter*, C.R. Acad. Sci. Paris, Ser. I (1985), 259–262.

-
- [9] P. Gabriel, *Unzerlegbare Darstellungen I*, *Manuscripta Math.* **6** (1972), 71–103.
- [10] ———, *Représentations indécomposables des ensembles ordonnés*, Séminaire P. Dubreil (Algèbre) 1972/73, Exposé 13, Secrétariat Math., Paris, 1973.
- [11] P. Gabriel and A.V. Roiter, *Representations of Finite Dimensional Algebras, Algebra VIII, Encyclopedia of Math. Sc.*, vol. 73, Springer-Verlag, 1992.
- [12] I.M. Gelfand, *The cohomology of infinite dimensional Lie algebras; some questions of integral geometry*, *Actes ICM* (1970), 95–111.
- [13] I.M. Gelfand and V.A. Ponomarev, *Problems of linear algebra and classification of quadruples of subspaces in a finite dimensional vector space*, *Colloq. Math. Soc. János Bolyai, Vol. 5, Hilbert Space Operators*, Tihany, 1970, pp. 163–237.
- [14] M.M. Kleiner, *On faithful representations of partially ordered sets of finite type*, *Zap. Nauchn. Semin. LOMI* **28** (1972), 42–59, (in Russian) English transl. in: *J. Sov. Math.* **3** (1975).
- [15] ———, *Partially ordered sets of finite type*, *Zap. Nauchn. Semin. LOMI* **28** (1972), 32–41, (in Russian) English transl. in: *J. Sov. Math.* **3** (1975).
- [16] B. Klemp and D. Simson, *Schurian sp -representation-finite right peak PI-rings and their indecomposable socle projective modules*, *Journal of Algebra* **134** (1990), no. 2, 390–468.
- [17] L. Kronecker, *Algebraische reduction der scharen bilinearen formen*, *Sitzungsber. Akad. Berlin, Jbuch.* **22** (1890), no. 169, 1225–1237.
- [18] G. Medina and A.G. Zavadskij, *The four subspace problem: An elementary solution*, *Linear Algebra and its Applications* **392** (2004), 11–23.

-
- [19] L.A. Nazarova, *Representations of a tetrad*, Izv. AN SSSR Ser. Mat. **31** (1967), 1361–1378, (in Russian). English transl. in: Math. USSR Izv. **1** (1967), 1305–1321.
- [20] ———, *Representations of quivers of infinite type*, Izv. AN SSSR Ser. Mat. **37** (1973), 752–791, (in Russian). English transl. in: Math. USSR Izv. **7** (1973), 749–792.
- [21] ———, *Partially ordered sets of infinite type*, Izv. Akad. Nauk. SSSR Ser. Mat. **39** (1975), no. 5, 963–991, (in Russian). English transl. in: Math. USSR Izv. **9** (1975).
- [22] L.A. Nazarova and A.V. Roiter, *Representations of partially ordered sets*, Zap. Nauchn. Semin. LOMI **28** (1972), 5–31, (in Russian) English transl. in: J. Sov. Math. **3** (1975), 585–606.
- [23] ———, *On a problem of I.M. Gel'fand*, Funkts. Anal. i Priložen. **7** (1973), no. 4, 64–69, (in Russian). English transl. in: Function Anal. Appli. **7** (1973), 299–311.
- [24] ———, *Kategorielle Matrizen-Probleme und die Brauer-Thrall Vermutung*, Mitt. Math. Semin. Giessen **115** (1975), 1–153.
- [25] ———, *Representations and forms of weakly completed partially ordered sets*, Linear Algebra and Representation Theory (1983), 19–54, (in Russian).
- [26] ———, *Finitely Represented Dyadic Sets*, Ukr. Math. J. **52** (2000), no. 10, 1561–1596.
- [27] ———, *The norm of a relation, separating functions and representations of marked quivers*, Ukr. Math. J. **54** (2002), no. 6, 808–840, (in Russian) available at ArXiv:math. RT/0206052v1.

-
- [28] V.V. Otrasheskaya, *On one-parameter partially ordered sets*, Ukr. Math. J. **28** (1976), no. 3, 334–341.
- [29] C.M. Ringel, *Tame Algebras and Integral Quadratic Forms*, LMN, vol. 1099, Springer-Verlag, 1984.
- [30] C. Rodríguez, *Un problema matricial de tipo mixto sobre la pareja (R, C)* , Trabajo de grado, Universidad Nacional de Colombia sede Bogotá, 2004.
- [31] ———, *On corepresentations of one parametric equipped posets*, São Paulo J. of Math. Sc. **4** (2011), To appear.
- [32] C. Rodríguez and A.G. Zavadskij, *On corepresentations of equipped posets and their differentiation*, Revista Colombiana de Matemáticas **41** (2007), 117–142, Available in: <http://www.emis.de/journals/RCM/Articulos/820.pdf>.
- [33] A.V. Roiter, *Indecomposable representations of algebras having infinitely many indecomposable representations*, Izv. Akad. Nauk. SSSR Ser. Mat. **32** (1968), 1275–1282, (in Russian). English transl. in: Math. USSR Izv. **2** (1968), 1223–1230.
- [34] A.V. Roiter, K.I. Belousov, and L.A. Nazarova, *Representations of finitely represented dyadic sets*, Algebras and Modules II (ICRA-VIII, 1996), CMS Conf. Proc., no. 24, 1996, pp. 61–77.
- [35] V.V. Sergeichuk, *Pseudolinear matrix pencils and systems of linear differential equations with meromorphic coefficients*, Differ. Uravneniya **25** (1989), 1721–1727, (in Russian) English trans. in: Differ. Equations **25**, (1989), 1201–1206.
- [36] D. Simson, *Linear representation of partially ordered sets and vector space categories, algebra, logic and applications*, vol. 4, Gordon & Breach Sci. Publ., 1992.

-
- [37] A.V. Zabarilo and A.G. Zavadskij, *Representations of one-parameter equipped posets*, I, II, *Matematychni Studii* **11** (1999), no. 1 (2), 3–16 (119–134).
- [38] ———, *One-parameter equipped posets and their representations*, *Function. Anal. i Prilozhen.* **34** (2000), no. 2, 72–75, (in Russian) English transl. in: *Functional Anal. Appl.*, **34** (2000), no.2, 138–140.
- [39] A.G. Zavadskij, *Differentiation with respect to a pair of points*, *Matrix problems* (1977), 115–121, (in Russian).
- [40] ———, *An algorithm for posets with an equivalence relation*, *Can. Mat. Soc. Conf. Proc.* **11** (1991), 299–322.
- [41] ———, *Tame equipped posets*, *Linear Algebra Appl.* **365** (2003), 389–465.
- [42] ———, *Equipped posets of finite growth*, *Representations of algebras and related topics*, *Fields Inst. Commun.* **45** (2005), 363–393.
- [43] ———, *On two-point differentiation and its generalization*, *Algebraic structures and their representations*, *Contemp. Math.* **376** (2005), 413–436.
- [44] ———, *On the Kronecker problem and related problems of linear algebra*, *Linear Algebra and its Appl.* **425** (2007), 26–62.
- [45] ———, *A matrix problem over a central quadratic skew field extension*, *Linear Algebra and its Appl.* **428** (2008), 393–399.
- [46] ———, *Representations of generalized equipped posets and posets with automorphisms over Galois field extensions*, *Journal of Algebra* **332** (2011), 386–413.
- [47] A.G. Zavadskij and V.V. Kirichenko, *Semimaximal rings of finite type*, *Mat. Sb.(N.S.)* **103(145)** (1977), no. 3, 323–345, (in Russian) English transl. in: *Math. USSR Sbornik*, **32** (1977), no.3, 273–291.

-
- [48] A.G. Zavadskij and L.A. Nazarova, *Partially ordered sets of finite growth*, Funkz. Anal. i Priložen. **19** (1982), 72–73, (in Russian). English transl. in: Function. Anal. Appl., **16** (1982), 135–137.

Índice alfabético

- corep \mathcal{P} , 18
- Ind \mathcal{P} , 19
- rep \mathcal{P} , 16

- ancho generalizado, 13
- anticadena, 10

- cadena, 10
 - completamente débil, 13
 - débil, 13
- categoría
 - de corepresentaciones, 18
- cierto
 - poset equipado, 20
 - vector de dimensión, 20
- completación, 35
- corepresentación, 18
 - cierta, 20
 - dual, 20
 - trivial, 18
- corepresentaciones
 - isomorfismo de, 17
- débil
 - punto, 12
 - relación, 12
- díada, 10
- derivado
 - poset, 36
- dimensión
 - de una corepresentación, 18
- dimensión de
 - una corepresentación matricial, 17
- especial
 - pareja de puntos, 41
- forma de Tits, 26
- fuerte
 - punto, 12
 - relación, 11
 - subespacio, 15
- funtor de diferenciación, 37
 - D-I, 33
- guirnalda, 13
- integración
 - con resp. a D-I, 34

-
- longitud
 - de una cadena, 10
 - matriz
 - de corepresentación, 17
 - de representación, 14
 - max X , 10
 - min X , 10
 - morfismo derivado
 - con respecto a D-I, 34
 - $N()$, 12
 - pareja
 - I-adeuada, 32
 - VII-adeuada, 36
 - poset equipado, 11
 - cierto, 20
 - de tipo finito, 21
 - de un parámetro, 24
 - escindible, 30
 - problema matricial
 - para corepresentaciones, 17
 - para representaciones, 15
 - raíz, 26
 - admisible, 26
 - imaginaria, 26
 - minimal, 26
 - simple, 26
 - reflexión, 26
 - representación, 15
 - representaciones
 - categoría de, 16
 - isomorfismo de, 16
 - subespacio radical, 18
 - transformaciones admisibles
 - de corepresentaciones, 17
 - de representaciones, 14
 - vector especial, 27