



UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA

Atractores extraños singulares sobre la frontera de los sistemas Morse-Smale

Diego Alfonso Sandoval Salazar

Universidad Nacional de Colombia

Facultad de Ciencias

Departamento de Matemáticas

Bogotá, Colombia

2011

Atractores extraños singulares sobre la frontera de los sistemas Morse-Smale

Diego Alfonso Sandoval Salazar

Trabajo Final de Maestría presentado como requisito para optar al
título de:
Magister en Ciencias-Matemáticas

Director:
Prof. Serafín Bautista Díaz

Universidad Nacional de Colombia
Facultad de Ciencias
Departamento de Matemáticas
Bogotá, Colombia
2011

Dedicatoria

A mis padres y hermana.

Agradecimientos

Gracias a mis padres por su apoyo incondicional y a mi hermana Ana por su ayuda constante y compañía a lo largo de estos años.

A todos los profesores que me formaron como matemático, en especial al profesor Serafín Bautista Díaz, quién fue el director de este trabajo que con paciencia y comprensión me orientó de manera adecuada con sus aceptadas sugerencias durante el desarrollo de éste.

Agradezco a todas aquellas personas cercanas que de alguna manera han colaborado y aportado.

Resumen

En este trabajo se estudia la bifurcación de los campos Morse-Smale en 3-variedades cerradas a través de un ciclo singular silla-nodo, la cual genera nuevos atractores extraños en la frontera de dichos campos después de su bifurcación, como los atractores Hénon y no Lorenz-like . Para obtener los resultados estudiamos la aplicación de retorno sobre la órbita periódica silla-nodo del ciclo y la mapa inducida en el espacio de folias estables sobre la sección transversal.

Palabras clave: Atractor extraño singular, ciclos singulares silla-nodo, campos Morse-Smale, transversalidad, bifurcación.

Abstract

In this paper we study the bifurcation of Morse-Smale fields on closed 3-manifolds through a saddle-node singular cycle, which generates new strange attractors on the boundary of these fields after its bifurcation, as Henon and non-Lorenz-like attractors. To get the results we study the application of return on the saddle-node periodic orbit of the cycle and the map induced in the space of stable leaves on the cross section.

Keywords: singular strange attractor, saddle-node singular cycles, Morse-Smale field, transversality, bifurcation.

Contenido

Agradecimientos	IV
Resumen	V
Introducción	VII
1. Conceptos preliminares	1
2. Dinámica uni-dimensional	6
3. Reducciones uni-dimensionales	15
4. Pruebas de los teoremas A y B	29
Apéndice	32
Bibliografía	37

Introducción

En la década de los 90's, la teoría de bifurcaciones de los sistemas Morse-Smale fue suficientemente desarrollada. Actualmente algunos de los atractores no son equivalentes al atractor geométrico de Lorenz, como se puede ver en los artículos [AS], [NPT], [BLMP], [PR] o en el caso gradiente [CP]. Además, los atractores Hénon y Lorenz contracting fueron estudiados a través de las bifurcaciones de sistemas hiperbólicos.

Como el atractor geométrico de Lorenz es el ejemplo más representativo de un atractor extraño singular persistente, éste motivó el estudio de los atractores extraños con singularidades, *atractores hiperbólicos generalizados* (ver [P]), los cuales incluyen un número conocido de ejemplos como los *atractores Lorenz-type*. Para campos vectoriales, otros ejemplos fueron introducidos en [R], [LV] y [PRV]; y por lo tanto motiva proponer una clasificación para la categoría de los atractores extraños para flujos. El término *Lorenz-like* ha sido frecuentemente utilizado por muchos autores y aquí lo emplearemos, bajo el siguiente punto de vista: un atractor extraño singular es *Lorenz-like* si es equivalente a algún atractor geométrico de Lorenz.

En este trabajo se pretende estudiar las bifurcaciones en la frontera de los sistemas Morse-Smale que generan atractores extraños con singularidades en 3-variedades cerradas M . Esta ocurre a través de un campo con una singularidad hiperbólica tipo silla y una órbita periódica silla-nodo. Para difeomorfismos, el análisis de los *ciclos silla-nodo* fueron introducidos en [NPT] y donde fue probado que los ciclos silla-nodo críticos muestran tangencias homoclínicas en su desdoblamiento genérico. Esta bifurcación también se ha estudiado ampliamente en [DRV], allí se demostró la existencia en el espacio de parámetros, de un amplio conjunto de valores cuyos correspondientes sistemas exhiben atractores Hénon-like (ver [PT]). Por lo tanto nuestro objetivo será resumir las principales características dinámicas en presencia de un ciclo singular silla-nodo, para las cuales generen atractores extraños en la frontera de los sistemas Morse-Smale siguiendo como referencia el artículo [MP].

Capítulo 1

Conceptos preliminares

En este capítulo daremos las definiciones previas para entender la bifurcación que proveerá diferentes tipos de atractores extraños singulares precisamente a través de la frontera de los sistemas Morse-Smale. Recordemos que un **campo vectorial de clase C^r en M** es una función que a cada punto $p \in M$, le asocia un vector $X(p) \in T_p M$. Es decir, es una función de clase C^r , $X : M \rightarrow TM$ tal que πX es la identidad en M , donde π es la proyección natural de TM en M . Denotaremos por $\mathfrak{X}^r(M)$ el conjunto de campos de clase C^r en M , donde M es una variedad.

Sean M una 3-variedad cerrada (compacta sin borde), X un campo vectorial en M de clase C^1 y $X[t, \cdot]$ con $t \in \mathbb{R}$ es el flujo generado por X .

Una **órbita de X** es el conjunto $O = O_X(q) = \{X[t, q] : t \in \mathbb{R}\}$ para algún $q \in M$. Una **singularidad** de X es un punto $\sigma \in M$ tal que $X(\sigma) = 0$ (equivalentemente $O_X(\sigma) = \{\sigma\}$). Una **órbita periódica** de X es una órbita $O = O_X(p)$ tal que $X[T, p] = p$ para algún mínimo número $T > 0$ (equivalentemente O es compacto y $O \neq \{p\}$). Una **órbita cerrada** de X es una singularidad ó una órbita periódica de X . El conjunto **omega limite** de un punto $p \in M$ es el conjunto $\omega_X(p) = \{x \in M : x = \lim_{n \rightarrow \infty} X[t_n, p], \text{ para alguna sucesión } t_n \rightarrow \infty\}$. Un punto $p \in M$ es llamado **no-errante** para X si para cada $T > 0$ y cada vecindad U de p en M existe $t > T$ tal que $X[t, U] \cap U \neq \emptyset$. El conjunto de puntos no-errantes de X es denotado por $\Omega(X)$ ó $\Omega(X_t)$.

Definición 1.1. *Un atractor extraño singular de un campo X es un conjunto transitivo invariante A con las siguientes propiedades:*

- *A contiene un conjunto denso de órbitas periódicas de X ;*
- *A tiene al menos una singularidad de X ;*
- *A exhibe una órbita positiva densa con exponente de Lyapunov positivo.*
- *Existe una vecindad U de A que satisface $A = \bigcap_{t \geq 0} X[t, U]$ (U se llama bloque aislante).*

La **cuenca** de A es el conjunto de puntos en M cuyo ω -límite está contenido en A . Además decimos que A es **persistente** si $\cap_{t \geq 0} Y[t, U]$ es un atractor extraño singular para cualquier campo Y cercano a X .

Definición 1.2. Dos atractores extraños singulares A y B de X e Y , respectivamente; son **equivalentes** cuando existen bloques aislados U y W de A y B (respectivamente) y un homeomorfismo $h : U \rightarrow W$ que envía órbitas de X en órbitas de Y .

Ejemplo 1.1. El atractor geométrico de Lorenz es el más representativo atractor extraño singular persistente (ver [DKO] para una definición axiomática).

Definición 1.3. Sean M una 3-variedad compacta y un campo X definido sobre M . Un conjunto compacto invariante H de X es **hiperbólico** si existe una descomposición continua $DX[t, \cdot]$ -invariante

$$T_H M = E_H^s \oplus E_H^X \oplus E_H^u$$

tal que E_H^X es la dirección del flujo en H y $DX[t, \cdot]$ contrae (resp. expande) de manera uniforme vectores en E_H^s (resp. E_H^u). Es decir, existen constantes positivas k, λ tal que para todo $p \in H$:

1. $\|DX[t, p]/E_p^s\| \leq k e^{-\lambda t}, \forall t > 0$ (e.d, E_H^s es el subfibrado (k, λ) -contractor);
2. $\|DX[-t, p]/E_p^u\| \leq k e^{-\lambda t}, \forall t > 0$ (e.d, E_H^u es el subfibrado (k, λ) -expansor);
3. $E_H^X = \langle X \rangle$ (e.d, E_H^X es la dirección del campo).

Decimos que un campo X es hiperbólico si su conjunto de puntos no-errantes es hiperbólico.

La teoría de variedades invariantes (ver [HPS]) asegura que si x pertenece a un conjunto hiperbólico H de X , entonces los conjuntos:

$$W^{ss}(x) = \{y \in M : d(X[t, x], X[t, y]) \rightarrow 0, \text{ cuando } t \rightarrow \infty\}$$

y

$$W^{uu}(x) = \{y \in M : d(X[t, x], X[t, y]) \rightarrow 0, \text{ cuando } t \rightarrow -\infty\}$$

son C^1 -“subvariedades” de M . Estas variedades son llamadas las variedades **estable fuerte** e **inestable fuerte** de x . Además, los conjuntos:

$$W^s(H) = \bigcup_{x \in H} W^{ss}(x) \quad y \quad W^u(H) = \bigcup_{x \in H} W^{uu}(x)$$

son también C^1 -“subvariedades” de M usualmente llamadas las variedades **estable** e **inestable** asociadas a cualquier conjunto hiperbólico de H . Ellas son tangentes a los subfibrados $E_H^s \oplus E_H^X$ y $E_H^u \oplus E_H^X$ respectivamente. Además es bien conocido que $W^s(H)$ (resp. $W^u(H)$) coincide con el conjunto de puntos $x \in M$ cuyo conjunto ω -límite (resp. α -límite) está contenido en H . En el caso cuando H se reduce a

una singularidad σ de X cuyos valores propios $\{\lambda_1, -\lambda_2, -\lambda_3\}$ son reales y satisfacen $-\lambda_2 < -\lambda_3 < 0 < \lambda_1$, existe también una (única) variedad invariante pasando a través de σ y tangente a la dirección asociado al valor propio $\{-\lambda_2\}$: la *variedad estable fuerte* de σ denotada por $W^{ss}(\sigma)$.

Definición 1.4. Un campo $X \in \mathfrak{X}^r(M)$ es **C^r -estructuralmente estable** si existe una vecindad \mathcal{V} de X en $\mathfrak{X}^r(M)$ tal que para todo $Y \in \mathcal{V}$ es topológicamente equivalente a X . Es decir, el campo es **C^r -estructuralmente estable** si el comportamiento topológico de sus órbitas no se altera mediante pequeñas perturbaciones.

Definición 1.5. Un subconjunto de $\mathfrak{X}^r(M)$ es **residual** si contiene una intersección enumerable de subconjuntos abiertos y densos.

Definición 1.6. Sean M una variedad compacta de dimensión n y $X \in \mathfrak{X}^r(M)$. Decimos que X es un campo **Morse Smale** si:

1. X tiene un número finito de órbitas cerradas, todas hiperbólicas;
2. Si σ_1 y σ_2 son órbitas cerradas de X , entonces $W^s(\sigma_1)$ es transversal a $W^u(\sigma_2)$;
3. $\Omega(X)$ es igual al conjunto de las órbitas cerradas de X .

Observaciones.

- Los campos Morse-Smale son residuales, para detalles ver [PM].
- La clase de campos Morse-Smale es un subconjunto abierto no vacío y sus órbitas cerradas son estructuralmente estables.
- Los campos Morse-Smale son hiperbólicos y no exhibe atractores extraños singulares.

En algunos casos existen variedades invariantes no hiperbólicas; por ejemplo, cuando σ_1 es una **órbita periódica silla-nodo**, es decir, la correspondiente derivada de la función de retorno de Poincaré $D\pi(\sigma_1)$ tiene un valor propio en valor absoluto diferente de 1 y el segundo igual a 1; y π tiene un término cuadrático no degenerado distinto de cero en la dirección central (ver [T]). Nosotros estamos interesados en el caso donde el primer valor propio pertenece a $(0, 1)$. Sea $W^s(\sigma_1)$ el conjunto de puntos cuyo ω -límite es σ_1 , en este caso, $W^s(\sigma_1)$ es una 3-variedad con frontera.

Definición 1.7. Un conjunto $\Gamma = \{\sigma_0, \sigma_1, \gamma_0, \gamma_1\}$ es un **ciclo singular silla-nodo** de X si satisface las siguientes condiciones:

1. σ_0 es una singularidad hiperbólica tipo silla cuyos valores propios $\{\lambda_1, -\lambda_2, -\lambda_3\}$ satisfacen $-\lambda_2 < -\lambda_3 < 0 < \lambda_1$;
2. σ_1 es una órbita periódica silla-nodo;
3. $\gamma_0 = (W^s(\sigma_0) \cap W^u(\sigma_1)) \setminus W^{ss}(\sigma_0)$ es un conjunto finito de órbitas regulares;

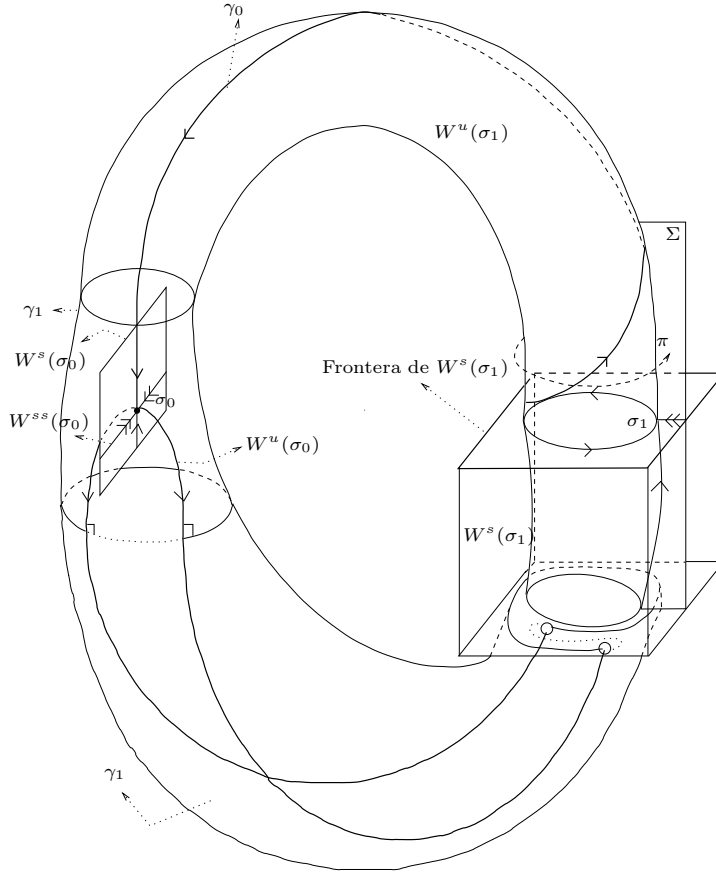


Figura 1-1: Ciclo singular silla-nodo

4. $\gamma_1 = (W^u(\sigma_1) \setminus \gamma_0) \cup W^u(\sigma_0)$ y esta contenido en el interior de $W^s(\sigma_1)$.

Para simplicidad, asumimos la existencia de una vecindad \mathcal{U} de X tal que si $Y \in \mathcal{U}$, entonces la *continuación analítica* de la singularidad admite una C^2 -linealización de coordenadas. Para esto es necesario que los valores propios de la singularidad cumplan ciertas condiciones de no-resonancia y de esta manera $\lambda_3 \neq \lambda_1$. Luego para que esto sea cierto, el campo en el que se trabaje será al menos de clase C^3 .

Ahora, es bien conocida la existencia de una foliación estable fuerte \mathcal{F}^{ss} (o variedad estable fuerte) para π . Saturando \mathcal{F}^{ss} por $X[t, \cdot]$ se obtiene la foliación $\tilde{\mathcal{F}}^{ss}$ en $W^s(\sigma_1)$.

Definición 1.8. Un ciclo singular silla-nodo Γ es **transversal** si $W^s(\sigma_0)$ es transversal a $W^u(\sigma_1)$ y γ_1 es transversal a $\tilde{\mathcal{F}}^{ss}$. El ciclo es **crítico** si $W^s(\sigma_0)$ es transversal a $W^u(\sigma_1)$ y hay una tangencia no-degenerada entre $\gamma_1 \setminus W^u(\sigma_0)$ y $\tilde{\mathcal{F}}^{ss}$.

Por lo tanto, el primer resultado resume las principales características dinámicas en presencia de un ciclo singular silla-nodo k -expansivo Γ con $k > 1$ (ver definición 3.1 en el capítulo 3). Lo cuál demostrará que la k -expansividad caracteriza la dinámica en una adecuada vecindad del ciclo. Para ello reconstruimos su demostración y usaremos las siguientes convenciones: m representa la medida de Lebesgue en \mathbb{R} y $Cl(A)$ denota la clausura del conjunto A .

Teorema A. *Sea X_μ una familia genérica uni-paramétrica de campos en M tal que X_μ es Morse-Smale, para $\mu < 0$; y X_0 exhibe un ciclo singular silla-nodo transversal Γ de tipo k -expansivo. Entonces,*

- (a) *Si $k > 1$, existen $\delta > 0$ y una vecindad U de Γ tal que $\forall \mu \in (0, \delta)$, X_μ exhibe un atractor extraño singular persistente $\hat{A}_\mu \subseteq U$ cuya cuenca contiene un conjunto abierto y denso de U . En particular, X_μ no es hiperbólico $\forall \mu \in (0, \delta)$;*
- (b) *Si $k > \sqrt{2}$, (a) se cumple y existe una sucesión de intervalos disjuntos $[a_n, b_n] \subseteq (0, \delta)$ tal que \hat{A}_μ no es un atractor Lorenz-like, $\forall \mu \in I = \cup_{n>0} [a_n, b_n]$; y*

$$\liminf_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{m(I \cap (0, \varepsilon))}{\varepsilon} > 0;$$

- (c) *Si $k > \sqrt{2}$, $N_0(f_\Gamma) = 1$ y $Cl(D(f_\Gamma)) \neq S^1$, (b) se cumple y existe otra sucesión de intervalos disjuntos $[a'_n, b'_n] \subseteq (0, \delta)$ tal que \hat{A}_μ es Lorenz-like, $\forall \mu \in I' = \cup_{n>0} [a'_n, b'_n]$; y*

$$\liminf_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{m(I' \cap (0, \varepsilon))}{\varepsilon} > 0;$$

- (d) *Si $k > 2$, (a) se cumple y \hat{A}_μ no es un atractor Lorenz-like, $\forall \mu \in (0, \delta)$.*

Además explicaremos en el apéndice el porqué los atractores obtenidos en este teorema no son Lorenz-like a través del modelo del gráfico **4-1**, debido que el ciclo singular silla-nodo transversal genera un mapa de retorno, cuya imagen A' de una sección transversal anular A tiene la forma de espiral.

También deseamos mostrar las principales propiedades de los ciclos críticos Γ tales que su mapa circular asociado f_Γ tiene una extensión crítica continua (ver definición 2.4), con el siguiente teorema.

Teorema B. *Sea X_μ una familia uni-paramétrica genérica de campos en M tal que X_μ es Morse-Smale, para $\mu < 0$; y X_0 exhibe un ciclo singular silla-nodo crítico Γ cuya función uni-dimensional tiene una extensión crítica continua. Entonces, si $He(\varepsilon)$ denota la conjunto de parámetros $\mu > 0$ tal que X_μ tiene un atractor Hénon-like cercano a Γ , y*

$$\liminf_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{m(He(\varepsilon))}{\varepsilon} > 0.$$

Capítulo 2

Dinámica uni-dimensional

En esta parte estudiaremos la dinámica de ciertas funciones en S^1 o intervalos compactos. Los resultados que se mostrarán serán usados en el capítulo 4.

Definición 2.1. Sean J un intervalo compacto real o S^1 , $k > 0$ y $c \in J$. Definimos $E_k(\mathbf{J}, \mathbf{c})$ como el conjunto de funciones $f : J \setminus \{c\} \rightarrow J$ tales que

1. $f \in C^1$ y $|f'(x)| \geq k' > k$, para algún k' fijo y para todo $x \in J \setminus \{c\}$;
2. f tiene límites laterales en c ; es decir, existen los límites $r_+ = \lim_{x \rightarrow c^-} f(x)$ y $r_- = \lim_{x \rightarrow c^+} f(x)$.

Se define $\mathbf{N}_0(\mathbf{f})$ como el único entero positivo tal que $\text{card}(f^{-1}(x))$ es $N_0(f) + 1$ o $N_0(f)$ ($\forall x \in J$); y $\mathbf{D}(\mathbf{f})$ como el subconjunto de J tal que $\text{card}(f^{-1}(x)) = N_0(f) + 1$ (Ver figura 2(a)). Si $I \subseteq J$ y $f \in E_k(J, c)$, decimos que f **genera la función de primer retorno R en I** si para cualquier $x \in I \setminus \{c\}$, existe un número entero positivo $m(x)$ tal que $R(x) = f^{m(x)}(x) \in I$.

Nota 2.1. Para cada $f \in E_k(J, c)$ con $k > 1$, f es expansiva; debido que para todo $x \neq c$ y alguna constante k' tenemos $|f'(x)| \geq k' > k > 1$. Este hecho, en particular, implica que para todo $I \subseteq J$ abierto, existe un primer entero $n \in \mathbb{N}$ tal que $c \in f^n(I \setminus \{c\})$.

Esta nota será usada en las pruebas de los resultados de este capítulo.

Afirmación 2.1. Sea $f \in E_k(J, c)$ con $k > 1$. Suponga $b > 2$ (fijo) y $\varepsilon_b > 0$ tal que $\min\{(k')^{n^{\pm(\varepsilon_b)}}\} > b$. Entonces para todo $\gamma < \varepsilon_b$, tenemos:

- $U_{\frac{b}{2}\gamma}^+ \subset f^{n^+(\gamma)}(U_\gamma^+)$ ó $U_{\frac{b}{2}\gamma}^- \subset f^{n^+(\gamma)}(U_\gamma^+)$;
- $U_{\frac{b}{2}\gamma}^- \subset f^{n^-(\gamma)}(U_\gamma^-)$ ó $U_{\frac{b}{2}\gamma}^+ \subset f^{n^-(\gamma)}(U_\gamma^-)$, donde $U_\gamma^- = (-\gamma, 0)$, $U_\gamma^+ = (0, \gamma)$, y $n^\pm(\gamma) = \min\{k \in \mathbb{N} : 0 \in f^k(U_\gamma^\pm)\}$.

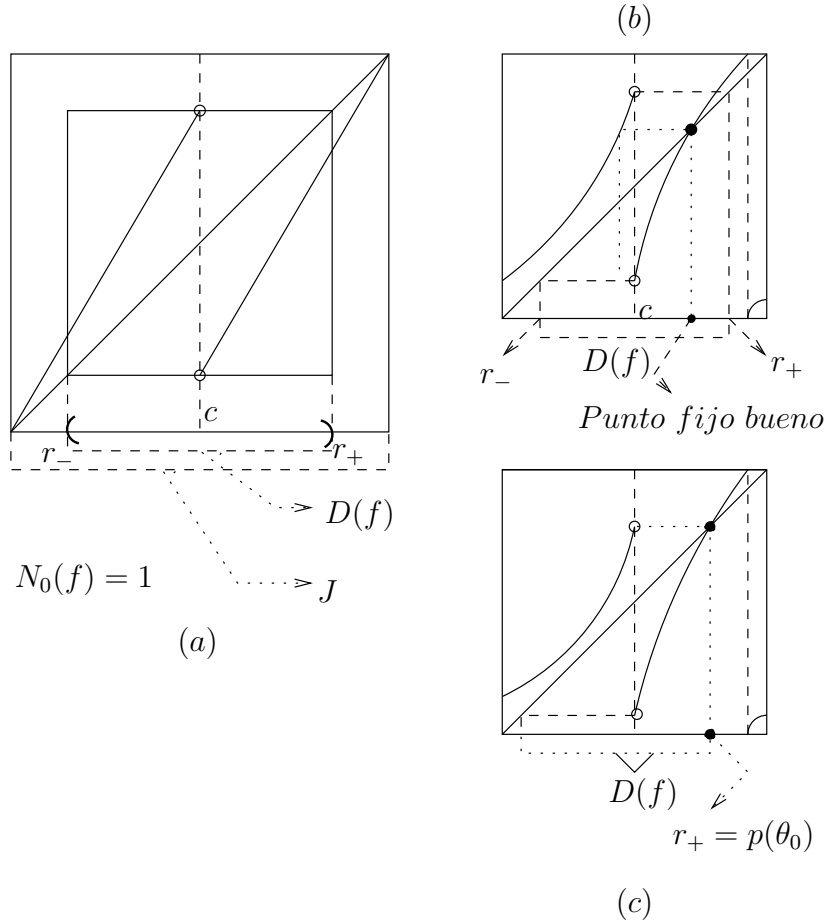


Figura 2-1: Conceptos de la definición 2.1.

En efecto, $0 \in f^{n^\pm(\gamma)}(U_\gamma^\pm)$ y $|f^{n^\pm(\gamma)}(U_\gamma^\pm)| > (k')^{n^\pm(\gamma)}|U_\gamma^\pm| > \frac{b}{2}|U_\gamma| = |U_{\frac{b}{2}\gamma}|$.

En particular, tenemos que $U_{\frac{b}{2}\gamma}^+ \subset f^k((-\gamma, \gamma))$ ó $U_{\frac{b}{2}\gamma}^- \subset f^k((-\gamma, \gamma))$ con $k = n^\pm(\gamma)$, ya que $U_\gamma^\pm \subset (-\gamma, \gamma)$.

Lema 2.1. *Sea $f \in E_k(J, c)$ con $k > 1$ y $c = 0$. Entonces existe $\delta > 0$ tal que para todo $0 < \varepsilon < \delta$, existe $n \in \mathbb{N}$ que satisface $(-\delta, \delta) \subseteq f^n((-\varepsilon, \varepsilon))$.*

Demostración. Dado $\varepsilon > 0$, consideremos los intervalos $U_\varepsilon = (-\varepsilon, \varepsilon)$, $U_\varepsilon^+ = (0, \varepsilon)$ y $U_\varepsilon^- = (-\varepsilon, 0)$. Definimos n^+ y n^- como

$$n^\pm(\varepsilon) = \text{mín}\{k \in \mathbb{N} : 0 \in f^k(U_\varepsilon^\pm)\}.$$

Ellas existen porque f es expansiva, luego $f^k(U_\varepsilon^\pm)$ debe eventualmente intersectar a 0 (Ver nota 2.1). De esto se deduce que:

- (a) $f^{n^\pm(\varepsilon)}(U_\varepsilon^\pm)$ es abierto;
- (b) Las funciones $\varepsilon \mapsto n^\pm(\varepsilon)$ son decrecientes;
- (c) $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} n^\pm(\varepsilon) = \infty$.

En efecto:

(a) es cierto, debido a que f es un difeomorfismo.

(b) Sean ε_1 y ε_2 positivos tal que $\varepsilon_1 < \varepsilon_2$, luego $U_{\varepsilon_1}^{\pm} \subset U_{\varepsilon_2}^{\pm}$; pero por definición de $n^{\pm}(\varepsilon_1)$ sabemos que éste número es el mínimo tal que $0 \in f^{n^{\pm}(\varepsilon_1)}(U_{\varepsilon_1}^{\pm}) \subset f^{n^{\pm}(\varepsilon_1)}(U_{\varepsilon_2}^{\pm})$, es decir $0 \in f^{n^{\pm}(\varepsilon_1)}(U_{\varepsilon_2}^{\pm})$. Por otro lado, usando la definición de $n^{\pm}(\varepsilon_2)$ obtenemos que $n^{\pm}(\varepsilon_2) \leq n^{\pm}(\varepsilon_1)$. Con esto mostramos que las funciones n^{\pm} son decrecientes.

(c) es cierto porque $f^k(U_{\varepsilon}^{\pm})$ es abierto para $k \leq n^{\pm}(\varepsilon)$.

Consideremos $I = (-\delta, \delta)$ el intervalo tal que $I \subset f^{n^+(\varepsilon_b)}(U_{\varepsilon_b}^+) \cap f^{n^-(\varepsilon_b)}(U_{\varepsilon_b}^-)$ y $\delta < \varepsilon_b$. Veamos que para cada $0 < \varepsilon < \delta$, existe un $n \in \mathbb{N}$ tal que

$$(-\delta, \delta) \subset f^n((-\varepsilon, \varepsilon)). \quad (2-1)$$

En efecto, por la afirmación 2.1, podemos encontrar $k = n^{\pm}(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ de manera que $U_{\frac{\varepsilon}{2}}^+ \subset f^k((-\varepsilon, \varepsilon))$ ó $U_{\frac{\varepsilon}{2}}^- \subset f^k((-\varepsilon, \varepsilon))$. Luego repitiendo este argumento, mientras i satisfaga $(\frac{\varepsilon}{2})^i < \varepsilon_b$, se deduce que $U_{\varepsilon_b}^+ \subset f^n((-\varepsilon, \varepsilon))$ ó $U_{\varepsilon_b}^- \subset f^n((-\varepsilon, \varepsilon))$, para algún n ; y por lo tanto

$$(-\delta, \delta) \subset f^{n+n^+(\varepsilon_b)}((-\varepsilon, \varepsilon)) \quad \text{ó} \quad (-\delta, \delta) \subset f^{n+n^-(\varepsilon_b)}((-\varepsilon, \varepsilon)). \quad (2-2)$$

Esto prueba (2-1). □

Teorema 2.1. *Para cada $f \in E_k(J, c)$, $k > 1$, existe un intervalo compacto no trivial I tal que f genera una función de primer retorno R en I . Además, R es topológicamente transitiva y $W^s(I) = \{x \in J : f^n(x) \in I \text{ para algún } n \in \mathbb{N}\}$ es denso en J .*

Demostración. Podemos asumir $c = 0$ sin pérdida de generalidad. Demostremos la existencia de un intervalo I tal que la función de retorno está bien definida y es transitiva. Para ello, elegimos δ como en el lema 2.1. Sean $H = \bigcup_{0 \leq k < \infty} f^k((-\delta, \delta))$ y $C_0(H)$ la componente conexa de H que contiene a cero. Se deduce que:

- *La función de primer retorno (sobre $C_0(H)$) está bien definida:* si $x \in C_0(H)$ entonces existe k tal que $x \in U \subset f^k((-\delta, \delta))$, para algún abierto U . Como f es expansiva implica la existencia de un entero m tal que $f^m(U)$ es abierto y contiene a 0 (véase la nota 2.1). Así $f^m(U) \subset C_0(H)$ y se deduce que existe un entero positivo $r = m + k$ tal que $R(x) = f^r(x) \in C_0(H)$.
- *La función de retorno con dominio $C_0(H) \setminus \{0\}$ obtenida anteriormente es transitiva:* Sean U, V abiertos de $C_0(H) \setminus \{0\}$, veamos que existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $R^n(U) \cap V \neq \emptyset$. Como $V \subset C_0(H)$, existe un $p \in \mathbb{N}$ tal que $V \subset f^p((-\delta, \delta))$.

Además, por lo anterior sabemos que $R(U)$ es abierto y contiene a 0, luego podemos escoger $0 < \varepsilon < \delta$ tal que $(-\varepsilon, \varepsilon) \subset R(U)$. Ahora por el resultado (2-2), existe $q \in \mathbb{N}$ tal que $(-\delta, \delta) \subset f^q((-\varepsilon, \varepsilon))$. De esto se sigue

$$V \subset f^p((-\delta, \delta)) \subset f^{p+q}((-\varepsilon, \varepsilon)) \subset f^{p+q}(R(U)) = f^{(p+q)r}(U) = R^{p+q}(U).$$

Elegimos $I = Cl(C_0(H))$ y así f genera una función de primer retorno transitiva en I . Ahora si $f \in E_k(J, 0)$ genera una función de primer retorno en algún intervalo I que contiene 0, entonces $W^s(I)$ es denso en J ; porque dado $x \in J$ y $\delta > 0$, consideramos $(x - \delta, x + \delta)$, pero como f es expansiva (ver nota 2.1), existe $n \in \mathbb{N}$ tal que el n -ésimo iterado de f intersecta a I , es decir, $f^n(x - \delta, x + \delta) \cap I \neq \emptyset$; entonces existe $\tilde{x} \in (x - \delta, x + \delta)$ tal que $f^n(\tilde{x}) \in I$, esto muestra que $\tilde{x} \in W^s(I)$. Por consiguiente, $W^s(I) = \{x \in J : f^n(x) \in I \text{ para algún } n \in \mathbb{N}\}$ es denso en J . Esto termina la demostración del teorema. □

Definición 2.2. Sea $f \in E_k(S^1, c)$ y $\theta \in [0, 2\pi)$. Se define $f_\theta = R_\theta \circ f$, donde R_θ es la rotación de un ángulo θ sobre S^1 .

Proposición 2.1. Si $f \in E_k(S^1, c)$ entonces $f_\theta \in E_k(S^1, c)$, $N_0(f_\theta) = N_0(f)$ y $D_\theta = D(f_\theta) = R_\theta(D(f))$, para todo $\theta \in [0, 2\pi)$.

Demostración. Consideremos $f_\theta(x) = R_\theta \circ f(x) = f(x) + \theta$, para $x \in S^1$ y $\theta \in [0, 2\pi)$.

- Veamos $f_\theta \in E_k(S^1, c)$: La función f_θ es de clase C^1 , debido a que R_θ y f lo son. Además $|f'_\theta(x)| = |f'(x)| > k' > k$, para todo $x \in S^1 \setminus \{c\}$. Por otro lado, los límites laterales en c de f_θ existen, ya que $f \in E_k(S^1, c)$ y $\lim_{x \rightarrow c^\pm} \theta$ existe.
- Veamos $N_0(f_\theta) = N_0(f)$: Debido que para $x \in S^1$ tenemos $f_\theta^{-1}(x) = f^{-1}(x - \theta)$, luego $\text{card}(f_\theta^{-1}(x)) = \text{card}(f^{-1}(x - \theta))$ que es igual $N_0(f)$ ó $N_0(f) + 1$.
- Veamos $D_\theta = D(f_\theta) = R_\theta(D(f))$: si $y \in R_\theta(D(f))$, entonces existe $x \in D(f)$ tal que $y = R_\theta(x) = x + \theta$, luego $x = y - \theta$. Por otro lado, como $x \in D(f)$ y por inciso anterior tenemos que

$$N_0(f_\theta) + 1 = N_0(f) + 1 = \text{card}(f^{-1}(x)) = \text{card}(f^{-1}(y - \theta)) = \text{card}(f_\theta^{-1}(y)),$$

luego $y \in D(f_\theta)$. Ahora, si $y \in D(f_\theta)$, por la anterior expresión obtenemos que $x = y - \theta \in D(f)$, luego $y = x + \theta = R_\theta(x)$, es decir $y \in R_\theta(D(f))$. Con esto terminamos la demostración. □

Nota 2.2. Sea $f \in E_k(S^1, c)$ con $k > 0$. Entonces

1. Decimos que f **preserva orientación** si $f'(x) > 0$, para todo $x \in S^1 \setminus \{c\}$. De manera análoga, decimos que f **invierte orientación** si $f'(x) < 0$, para todo $x \in S^1 \setminus \{c\}$.

2. Supongamos $N_0(f) = 1$. Si f preserva orientación (Resp. invierte orientación), entonces f tiene por lo menos un punto fijo (resp. dos puntos fijos).

Lema 2.2. Sea $f \in E_k(S^1, c)$ con $k > \sqrt{2}$. Entonces, para cada intervalo no trivial $I \subset S^1$, existe un entero positivo n tal que $f^n(I)$ contiene ya sea un intervalo con puntos extremos $\{r_-, c\}$ ó $\{r_+, c\}$.

Demostración. Denotamos por $|I|$ la longitud del intervalo I .

- **Caso 1:** $c \notin I$. Consideremos $I_1 = f(I)$, pero como $f \in E_k(S^1, c)$ entonces $|I_1| \geq k'|I|$. Sustituya I por I_1 y continúe el algoritmo. Este proceso termina, debido a que $|(c, r_+)|$ y $|(r_-, c)|$ es finita y se satisface $|I_n| \geq (k')^n|I|$. Por lo tanto, existe un n tal que $f^n(I)$ contiene (c, r_+) ó (r_-, c) .
- **Caso 2:** $c \in I$. Elegimos I_0 la mayor componente conexa de $I \setminus \{0\}$, entonces $|I_0| \geq (\frac{1}{2})|I|$. Ahora veamos que ocurre en $I_1 = f(I_0)$:
 - **Caso 2.1:** Si $c \in I_1$: entonces $I_2 = f(I_1) = f^2(I_0)$ contiene un intervalo con puntos extremos $\{r_-, c\}$ ó $\{r_+, c\}$.
 - **Caso 2.2:** Si $c \notin I_1$: consideremos $I_2 = f(I_1) = f^2(I_0)$, entonces $|I_2| \geq \frac{(k')^2}{2}|I|$, sustituya I_0 por I_2 y continúe con el algoritmo. Así obtenemos que $|I_{2n}| \geq (\frac{k'^2}{2})^n|I|$, pero como $\frac{k'^2}{2} > 1$ entonces existe un n tal que $f^n(I)$ contiene (c, r_+) ó (r_-, c) .

□

Observación. En la prueba se observa que f con estas condiciones es **local eventualmente sobre**, es decir, para cada subintervalo I de S^1 , existe un entero n tal que $f^n(I) = S^1$. La prueba esta basada en [W].

En particular, las funciones en $E_k(S^1, c)$ son transitivas en S^1 , $k > 2$.

Proposición 2.2. Cada $f \in E_k(S^1, c)$ con $k > 2$, es transitiva en S^1 .

Demostración. Sea I un intervalo abierto de $S^1 \setminus \{c\}$. Consideremos el primer $n(I) \in \mathbb{N}$ tal que $c \in f^{n(I)}(I)$. Entonces, la componente conexa más grande de $f^{n(I)}(I) \setminus \{c\}$ tiene diámetro más grande que $(\frac{k'}{2})^{n(I)}|I|$. Luego repitiendo el algoritmo de la prueba anterior tenemos que existe un entero n tal que $f^n(I) = S^1 \setminus \{c\}$. Por lo tanto, f es transitiva.

□

Definición 2.3. Sea $f \in E_k(S^1, c)$, con $k > \sqrt{2}$. Decimos que un punto fijo p de f es **bueno** si para cada componente conexa J de $S^1 \setminus \{r_-, c\}$ o $S^1 \setminus \{r_+, c\}$, existe $x \in \text{int}(J)$ tal que $f^n(x) = p$, para algún $n \in \mathbb{N}$ (ver figura 2(b)).

Afirmación 2.2. Sea $f \in E_k(S^1, c)$ con $k > \sqrt{2}$. Entonces f es transitiva si y solo si tiene puntos fijos buenos.

Es consecuencia directa del lema 2.2. Debido que para cualquier abierto o componente conexa J , existe un entero n tal que $f^n(J) = S^1$.

Teorema 2.2. Sea $f \in E_k(S^1, c)$, $k > \sqrt{2}$. Entonces, existe un intervalo $I \subseteq [0, 2\pi)$ tal que f_θ es transitiva en S^1 , para todo $\theta \in I$.

Demostración. Por la afirmación anterior, es suficiente mostrar que f_θ tiene un punto fijo bueno para un adecuado $\theta \in [0, 2\pi)$. Además, como f es transitiva podemos suponer que f tiene un punto fijo $p \in S^1 \setminus \{c\}$.

Consideremos $N_0 = N_0(f)$, $D = D(f)$ y $r_\pm = r_\pm(f)$ y el punto de discontinuidad $c = c(f)$ como en la definición 2.1. Por la proposición 2.1, se puede extender el punto fijo p de f para f_θ , es decir, existe una función suave $p : \theta \rightarrow p(\theta)$ tal que $p(0) = p$ y $f_\theta(p(\theta)) = p(\theta)$, lo cual es equivalente a $p(\theta) = R_\theta(f(p(\theta))) = f(p(\theta)) + \theta$. Luego derivando con respecto a θ obtenemos

$$f'(p(\theta))p'(\theta) + 1 = p'(\theta).$$

En el caso que preserva orientación (véase la Nota 2.2), tenemos

$$p'(\theta) = \frac{1}{1 - f'(p(\theta))} < 0,$$

luego D_θ y $p(\theta)$ se están moviendo en direcciones opuestas cuando θ varía. Entonces existe $\theta_0 \in [0, 2\pi)$ tal que $r_+(\theta_0) = p(\theta_0)$, donde $r_\pm(\theta) = r_\pm(f_\theta)$ (Ver figura 2(c)). Esto se tiene porque los puntos extremos de $D(f_\theta)$ son $r_\pm(f_\theta)$. En el caso que invierte orientación, no tenemos que $p'(\theta) < 0$, pero, D_θ se esta moviendo más rápidamente que $p(\theta)$, por lo que tenemos $p(\theta_0)$ igual a $r_+(\theta_0)$ (o $r_-(\theta_0)$) para algún θ_0 , incluso en este caso.

Por otra parte, por la expansividad de f se deduce que existe $\varepsilon_0 > 0$ tal que para todo $\theta \in (\theta_0 - \varepsilon_0, \theta_0 + \varepsilon_0)$ y para cada componente conexa $J(\theta)$ de $S^1 \setminus \{r_+(\theta), c\}$ o $S^1 \setminus \{r_-(\theta), c\}$ existe $n(J(\theta)) \in \mathbb{N}$ tal que $c \in \text{int}(f_\theta^{n(J(\theta))}(J(\theta)))$.

Definimos

$$J^*(\theta) = \bigcap_{J(\theta)} \text{int}(f_\theta^{n(J(\theta))}(J(\theta))),$$

y $\delta > 0$ suficientemente pequeño tal que $(c - 2\delta, c + 2\delta) \subset J^*(\theta_0)$. Entonces existe $0 < \varepsilon_1 < \varepsilon_0$ tal que $(c - \delta, c + \delta) \subset J^*(\theta)$, para todo $\theta \in (\theta_0 - \varepsilon_1, \theta_0 + \varepsilon_1)$.

Ahora elegimos $\theta_1 \in (\theta_0 - \varepsilon_1, \theta_0 + \varepsilon_1)$ tan cercano a θ_0 tal que $p(\theta_1) \in \text{int}(f_{\theta_1}(c - \delta, c + \delta))$ y $p(\theta_1) \in D(f_{\theta_1})$. Luego $P(\theta_1) \in \text{int}(f_{\theta_1}^{n(J(\theta_1))+1}(J(\theta_1)))$ y para todo $J(\theta_1)$. Esto implica que $p(\theta_1)$ es un punto fijo de $f(\theta_1)$.

□

Nótese que este teorema no asume nada sobre $N_0(f)$ y $D(f)$.

Proposición 2.3. Sea $f \in E_k(S^1, c)$ con $k > \sqrt{2}$, $N_0(f) = 1$ y $Cl(D(f)) \neq S^1$. Entonces existen intervalos no triviales disyuntos I_1 y I_2 en $[0, 2\pi]$ tal que:

1. Si $\theta \in I_1$, f_θ es transitiva en S^1 ;
2. Si $\theta \in I_2$ y f preserva orientación, entonces f_θ es transitiva en un subintervalo propio cerrado invariante de S^1 que contiene a c ;
3. Si $\theta \in I_2$ y f invierte orientación, entonces f_θ^2 es transitiva en un subintervalo propio cerrado invariante de S^1 que contiene a c .

Demostración. 1. Por el teorema 2.2 tenemos que existe un intervalo I_1 tal que f_θ es transitiva en S^1 , para $\theta \in I_1$.

2. Supongamos que f preserva orientación (ver nota 2.2) y considere θ_0 como en la prueba del teorema 2.2. Elegimos θ_1 cercano a θ_0 tal que $p(\theta_1) \notin D(f_{\theta_1})$. Como $N_0(f) = 1$ y $Cl(D(f)) \neq S^1$, podemos considerar f el mapa intervalo cortando S^1 en $p(\theta_1)$, luego $c \in D(f_{\theta_1})$ y $f(Cl(D(f_{\theta_1}))) \subset Cl(D(f_{\theta_1}))$. Elegimos un intervalo pequeño I_2 tal que $f(Cl(D(f_\theta)) \setminus \{c\}) \subset Cl(D(f_\theta))$ y $f_\theta/Cl(D(f_\theta)) \in E_k(Cl(D(f_\theta)), c)$, para todo $\theta \in I_2$. Entonces por el lema 2.2 tenemos que $f_\theta/Cl(D(f_\theta))$ es transitiva.

3. Ahora supongamos que f invierte orientación. Entonces f tiene dos puntos fijos (ver nota 2.2) y por lo tanto también f_θ . Elegimos θ_1 tal que $c \notin D(f_{\theta_1})$. Consideremos los puntos fijos p_1, p_2 de f_θ . Luego, una de las componentes conexas de $S^1 \setminus \{p_1, p_2\}$ (llamémosla J_1) satisface que $c \in int(J_1)$. Entonces $f^2/J_1 \in E_{k^2}(J_1, c)$, la cual preserva orientación y los puntos extremos de J_1 son los puntos fijos de f^2/J_1 . Luego siguiendo como en el caso que preserva orientación, pero en este caso en un intervalo, en vez de S^1 .

□

A continuación estudiaremos una clase especial de mapas circulares. Ellos surgen de los ciclos silla-nodo críticos.

Definición 2.4. Sea $f : S^1 \setminus \{c_1, c_2, \dots, c_r\} \rightarrow S^1$ satisfaciendo

- (1) f es de clase C^1 y tiene una criticidad en S^1 , es decir, existe $p \in S^1$ tal que $f'(p) = 0$;
- (2) Los límites laterales de f en c_i existen, para todo $i = 1, \dots, r$;
- (3) f admite un levantamiento (lifting) de grado uno.

Bajo estas condiciones, decimos que f tiene una **extensión crítica continua** F (relativa a p) si

- $F : S^1 \rightarrow S^1$ es continua y sobreyectiva en S^1 ;

- existe una colección finita de intervalos I_i tal que F/I_i es constante para todo i , $F/(S^1 \setminus \cup I_i) = f$ y $p \in \text{int}(S^1 \setminus \cup I_i)$.

Nota 2.3. *Cualquier función sobreyectiva $f : S^1 \setminus \{c\} \rightarrow S^1$ satisfaciendo (1), (2) y (3) de la definición anterior tiene una extensión crítica continua.*

El siguiente resultado extiende uno encontrado en [NPT] para mapas circulares con extensión crítica continua. Este será usado en el capítulo 4 para la prueba del teorema (B).

Teorema 2.3. *Si $f : S^1 \setminus \{c_1, c_2, \dots, c_r\} \rightarrow S^1$ tiene una extensión crítica continua, entonces existe $\theta_0 \in [0, 2\pi]$ tal que la familia uni-paramétrica $R_\theta \circ f$ presenta una tangencia homoclínica en θ_0 .*

Demostración. Sea F una extensión crítica continua de f (esta no necesariamente es única). Por definición tenemos que $R_\theta \circ F$ es una extensión crítica continua de $R_\theta \circ f$. Es bien conocido (ver [NPT]) que para $F_\theta = R_\theta \circ F$, existe un $\theta \in [0, 2\pi]$ tal que esta exhibe una tangencia, es decir, existe un punto crítico q y un punto periódico p tal que $F_\theta(q) = p$ y $W^u(F_\theta, q) = S^1$. Lo que quiero decir, es que para todo conjunto abierto U tal que $q \in U$, tenemos $\cup_{n \geq 0} F_\theta^n(U) = S^1$. Por lo tanto, $q \notin \cup I_i$ y $F_\theta^n(U) \not\subseteq \cup I_i$. Por consiguiente,

- q es un punto periódico de f_θ ,
- $\cup_{n \geq 0} f_\theta^n(U) = S^1$ para todo conjunto abierto U tal que $q \in U$,
- $f_\theta(p) = q$.

Esto termina la prueba. □

Para finalizar este capítulo, presentamos una topología para mapas discontinuos. En nuestro caso, la topología en $E_k(J, c)$ ($k \in \mathbb{R}^+$) la cual usaremos más adelante.

Para ello necesitamos la noción de cercanía. Consideremos $dist_J$ como la métrica usual en J (recordemos que $J = S^1$ o un intervalo real compacto) y $dist_i$ denota la métrica en C^i , para $i = 0, 1$ respectivamente. Si $f \in E(J) = \cup_{c \in J, k \in \mathbb{R}^+} E_k(J, c)$, entonces definimos $k(f) = \inf_{x \in J \setminus \{c\}} |f'(x)|$. Obsérvese que $k(f) \geq k$, si $f \in E_k(J, c)$.

Definición 2.5. *Decimos que f, g son δ -cercanos ($\delta > 0$) si $dist_J(c(f), c(g)) < \delta$, $dist_0(f, g) < \delta$, $dist_1(f, g) < \delta$ en una 2δ -vecindad compacta de $\{c(f), c(g)\}$. Si I es un intervalo real compacto y $\{f_\theta\}_{\theta \in I}, \{g_\theta\}_{\theta \in I} \subseteq E(J)$ son familias parametrizadas, decimos que $\{f_\theta\}_{\theta \in I}, \{g_\theta\}_{\theta \in I}$ son δ -cercanos si f_θ y g_θ son δ -cercanos, para todo $\theta \in I$.*

Con la siguiente proposición resumimos la principales propiedades de la noción de cercanía introducida por la definición anterior. Esta será usada en la prueba del teorema (A) en el capítulo 4.

Proposición 2.4. Sea $I = [0, 2\pi]$ y $\{f_\theta\}_{\theta \in I}, \{g_\theta\}_{\theta \in I} \subseteq E(S^1)$ familias parametrizadas. Definimos $k(\{h_\theta\}_{\theta \in I}) = \inf_{\theta \in I} k(h_\theta)$ para $h = f, g$. Entonces,

1. $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ tal que $|k(\{f_\theta\}_{\theta \in I}) - k(\{g_\theta\}_{\theta \in I})| < \varepsilon$ si $\{f_\theta\}_{\theta \in I}$ y $\{g_\theta\}_{\theta \in I}$ son δ -ceranos;
2. Suponga $f_\theta = R_\theta \circ f$ para algún f como en el teorema 2.2 y sea I_f el intervalo obtenido de ese teorema. Entonces, $\exists \delta > 0$ tal que si $\{f_\theta\}_{\theta \in I}$ y $\{g_\theta\}_{\theta \in I}$ son δ -ceranos, hay un intervalo I_g (cerca de I_f) tal que la conclusión del teorema 2.2 es cierto si cambiamos f y I_f por g y I_g (resp.);
3. Suponga $f_\theta = R_\theta \circ f$ para algún f como en la proposición 2.3 y sea I_{1f} y I_{2f} los intervalos obtenidos en esta proposición. Entonces $\exists \delta > 0$ tal que si $\{f_\theta\}_{\theta \in I}, \{g_\theta\}_{\theta \in I}$ son δ -ceranos, hay intervalos I_{1g}, I_{2g} (ceranos a I_{1f}, I_{2f} resp.) tal que la conclusión de la proposición 2.3.1 es cierta si cambiamos f, I_{1f} por g, I_{1g} (resp.) y g_θ ó g_θ^2 es transitiva en algún subintervalo propio cerrado de $S^1, \forall \theta \in I_{2g}$.

Demostración. Notemos que en las pruebas de los teoremas 2.1, 2.2 y la proposición 2.3, involucraron conjuntos abiertos con la respectiva noción de cercanía de la definición 2.5. Luego usamos la compacidad de I . □

Nota 2.4. En el caso cuando las familias parametrizadas $\{f_\theta\}_{\theta \in I}$ y $\{g_\theta\}_{\theta \in I}$ satisfacen $f_\theta = R_\theta \circ f$ y $g_\theta = R_\theta \circ g$, para $f, g \in E(S^1)$ fijos; se observa que si f y g son δ -ceranos, entonces $\{f_\theta\}_{\theta \in I}$ y $\{g_\theta\}_{\theta \in I}$ son δ -ceranos.

Esto será usado en la prueba de la afirmación 3.5 en el capítulo 3.

Capítulo 3

Reducciones uni-dimensionales

En este capítulo probaremos algunos resultados acerca de las dinámicas que se presentan después del desdoblamiento de un ciclo singular silla-nodo. El principal resultado es el teorema 3.1, el cuál habla acerca de la existencia de foliaciones estables en el caso que el ciclo es transversal. Este permitirá hacer reducciones uni-dimensionales que se usaran en el siguiente capítulo para la prueba del teorema A. Como los elementos críticos son obstrucciones para la existencia de foliaciones estables, luego el teorema B requiere diferentes herramientas. En este caso, usaremos técnicas de renormalización; la cuales también serán usadas en la pruebas de los teorema C y D en el apéndice.

Para empezar, necesitamos construir un mapa circular f_Γ asociado a cualquier ciclo singular silla-nodo Γ . Supongamos que $\Gamma = \{\sigma_0, \sigma_1, \gamma_0, \gamma_1\}$ un ciclo singular silla-nodo de un campo X . A continuación, consideramos los siguientes hechos:

Hecho (1). Existe una sección transversal Σ de X y una función de primer retorno π sobre Σ tal que σ_1 es un punto fijo silla-nodo de π . Las siguientes *estructuras* están bien definidas:

- Una variedad central-inestable W^{cu} que pasa por σ_1 .
- Una variedad estable fuerte W^{ss} que contiene a σ_1 , cuyo espacio tangente (en σ_1) es el correspondiente al valor propio hiperbólico de $D\pi(\sigma_1)$. Además, W^{ss} es transversal a W^{cu} en σ_1 y divide W^{cu} en dos partes, denotadas por $W^{cu,+}$ y $W^{cu,-}$.
- Una foliación estable fuerte \mathcal{F}^{ss} definida en Σ . Esta foliación induce un sistema de coordenadas $(x, y) \in \Sigma$ tal que π tiene la forma $\pi(x, y) = (\varphi_0(x), \psi_0(x, y))$. Aquí $\psi_0(x, y)$ satisface $\psi_0(x, 0) = 0$ y $|\partial_y \psi_0(x, y)| < \lambda < 1$, para alguna constante fija λ . La frontera superior e inferior de Σ , así como W^{ss} son hojas de \mathcal{F}^{ss} (Ver figura **3-1**).

Hecho (2). Identificando puntos en la misma órbita de π cuando se restringe a W^{cu} , tanto $W^{cu,+}$ y $W^{cu,-}$ son circunferencias, es decir, son copias de S^1 . Usamos esta identificación sin mención explícita. Luego el comportamiento de π puede

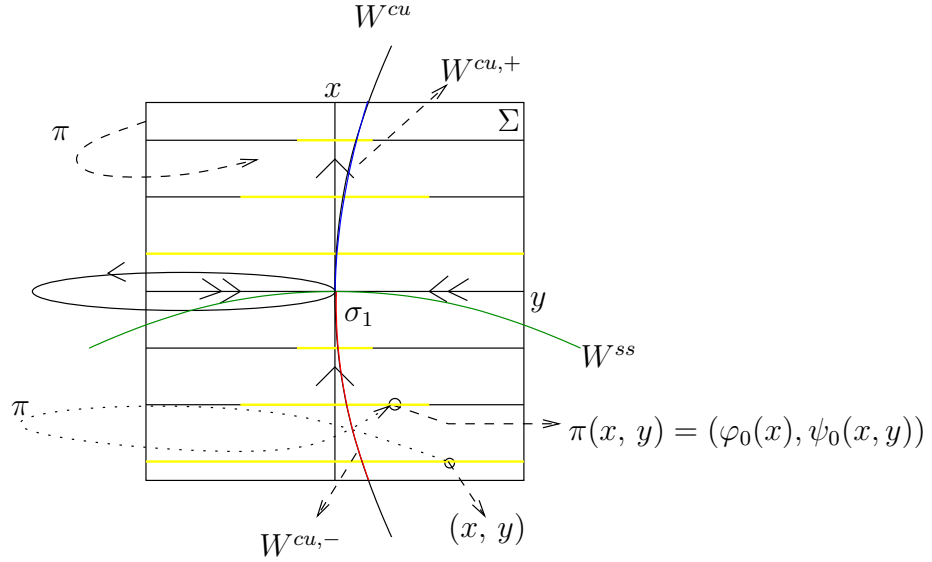


Figura 3-1: Hecho (1).

ser estudiado a partir de φ_0 . Es decir, existe un campo tangente Z asociado a π , donde $\varphi_0 = \pi/W^{cu}$ es precisamente la función tiempo-uno de Z ($Z[1, x] = \varphi_0(x)$). Si $a \in W^{cu,+}$, se define un sistema de coordenadas $\varphi_a : W^{cu,+} \rightarrow S^1$ dado por $\varphi_a(x) = e^{2\pi i t_a(x)}$, donde $t_a(x)$ es solución de $Z[t, x] = a$. De manera similar, para cualquier $b \in W^{cu,-}$.

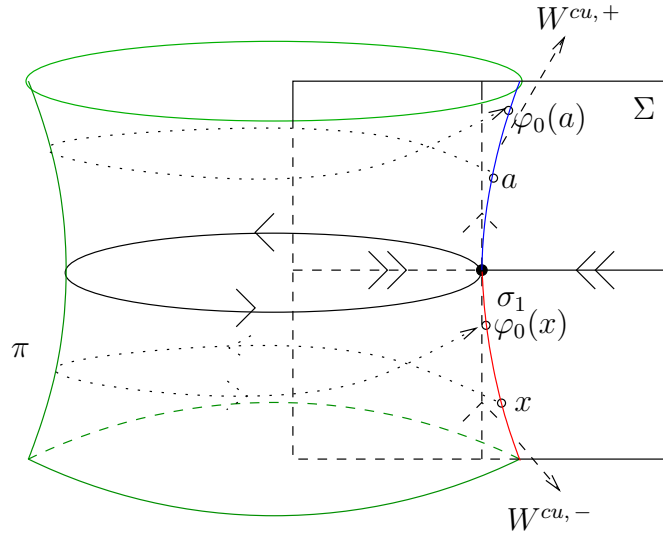


Figura 3-2: Hecho (2).

Hecho (3). Hay una función de retorno

$$H_0 : ([\varphi_0^{-1}(a), \varphi_0(a)] \times [-\Delta, \Delta]) \setminus D_0 \rightarrow [b, \varphi_0(b)] \times [-\Delta, \Delta],$$

inducida por el flujo $X[t, \cdot]$, donde Δ es el diámetro de Σ y $D_0 = W^s(\sigma_0) \cap \{[\varphi_0^{-1}(a), \varphi_0(a)] \times [-\Delta, \Delta]\}$. Resulta que D_0 es un conjunto finito de curvas

verticales y se reduce a una cuando Γ es transversal. En este caso, D_0 puede ser escogida como la línea vertical $\{c_0\} \times [-\Delta, \Delta]$. La restricción de H_0 a $([\varphi_0^{-1}(a), \varphi_0(a)] \times \{0\}) \setminus D_0$ se denota por h .

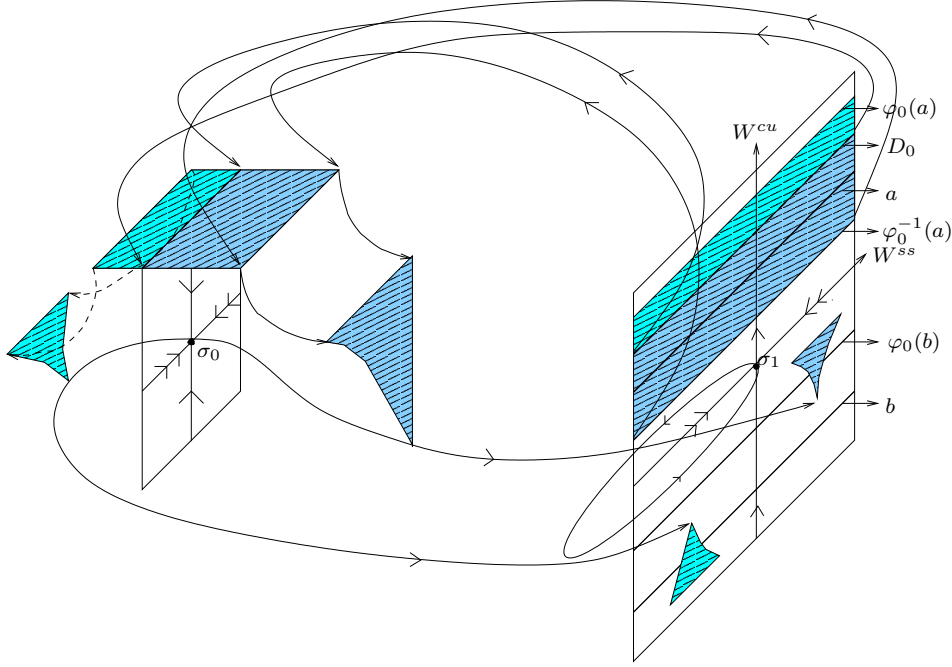


Figura 3-3: Hecho (3).

Consideramos las estructuras (Σ, W^{cu}, a, b) que satisfacen los anteriores hechos.

Definición 3.1. Sea Γ un ciclo singular silla-nodo de X . Entonces $f_\Gamma : S^1 \setminus D_1 \rightarrow S^1$ está definida por la fórmula

$$f_\Gamma = \varphi_b \circ \pi^{ss} \circ h \circ \varphi_a^{-1},$$

donde π^{ss} denota la proyección a lo largo de \mathcal{F}^{ss} sobre W^{cu} .

Cuando Γ es transversal y $f_\Gamma = f_\Gamma(\Sigma, W^{cu}, a, b) \in E_k(S^1, c_0)$ para alguna estructura (Σ, W^{cu}, a, b) , decimos que f_Γ es **k -expansivo** ($k > 0$). En otras palabras, el módulo de la derivada del mapa circular asociado a Γ es más grande que k' con $k' > k$.

Además definimos $N_0 = N_0(f_\Gamma) \in \mathbb{N}$ como $\text{card}(f_\Gamma^{-1}(x))$ es igual a N_0 o N_0+1 para todo $x \in S^1$ y $D(f_\Gamma)$ como el conjunto de puntos $x \in S^1$ tal que $\text{card}(f_\Gamma^{-1}(x)) = N_0+1$.

Observaciones.

- En este caso podríamos considerar $D_1 = \varphi_a(D_0)$.
- Si f_Γ es k -expansivo, es bien conocida la condición de expansión $\lambda_3 < \lambda_1$ sobre los valores propios de la singularidad de Γ (ver definición 1.7).

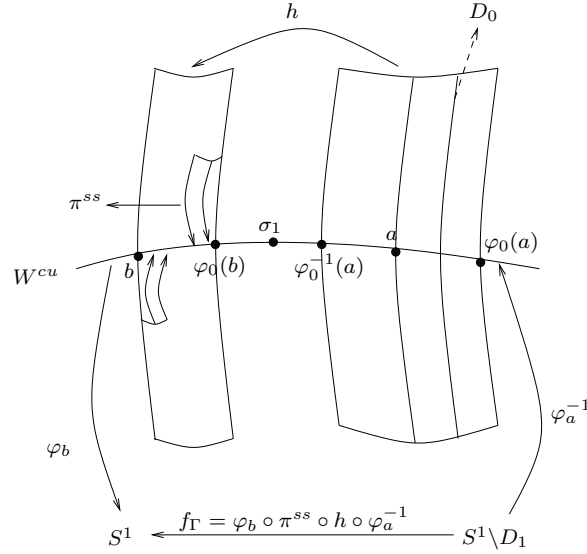


Figura 3-4: Mapa circular f_Γ .

- Si $D_0 = \{c_0\}$ y $f_\Gamma = f_\Gamma(\Sigma, W^{cu}, a, b) \in E_k(S^1, c_0)$, para alguna estructura (Σ, W^{cu}, a, b) y $k > 0$, entonces no es cierto que Γ sea transversal.
- El número N_0 existe y corresponde al grado en el caso de endomorfismos expansivos del círculo.

La noción de expansividad en la definición 3.1 esta basada en el siguiente resultado cuya prueba se realizará en el apéndice.

Proposición 3.1. Sea Γ un ciclo singular silla-nodo de un campo vectorial y considere dos estructuras (Σ, W^{cu}, a, b) y $(\hat{\Sigma}, \hat{W}^{cu}, \hat{a}, \hat{b})$ acorde con los hechos (1), (2) y (3). Entonces $f_\Gamma = f(\Sigma, W^{cu}, a, b)$ y $\hat{f}_\Gamma = f(\hat{\Sigma}, \hat{W}^{cu}, \hat{a}, \hat{b})$ difieren por una rotación en S^1 ; es decir, existe $\theta \in [0, 2\pi)$ tal que $f_\Gamma = R_\theta \circ \hat{f}_\Gamma$.

Así, la expansividad realmente no depende de las estructuras. Por otro lado, podemos preguntarnos cuales mapas circulares pueden ser representados por un mapa circular f_Γ asociado a un ciclo Γ . A continuación se dará las condiciones para garantizar esto.

Definición 3.2. Considere $r \in \mathbb{N}$ y sea $\tilde{E}^r(S^1, \tilde{c})$ el conjunto de funciones $f : S^1 \setminus \{\tilde{c}\} \rightarrow S^1$ tal que

- $f \in C^r$ y existen los límites laterales de f en \tilde{c} ;
- Las derivadas $f^{(i)}(x)$ para $1 \leq i \leq r$ satisfacen

$$\lim_{x \rightarrow \tilde{c}} \frac{f^{(i)}(x)}{(x - \tilde{c})^{\alpha-i}} = k_i \quad (3-1)$$

para algunas constantes fijas k_i y $\alpha \in (0, 1)$.

Observación. *Observese que para $r_1 \leq r_2$ tenemos que $\tilde{E}^{r_2}(S^1, \tilde{c}) \subseteq \tilde{E}^{r_1}(S^1, \tilde{c})$. Además como $(x - \tilde{c})^{\alpha-i}$ tiende a más o menos infinito, luego por la ecuación 3-1, tenemos que induce un signo sobre la derivada $f^{(i)}$ y además $f^{(i)}$ tiende a más o menos infinito. En particular, existe $k > 0$ tal que $|f'(x)| \geq k$ para todo $x \in S^1 \setminus \{\tilde{c}\}$. Es decir, que para cada $r \in \mathbb{N}$, existe $k > 0$ tal que $\tilde{E}^r(S^1, \tilde{c}) \subset E_k(S^1, \tilde{c})$.*

Proposición 3.2. *Para cualquier $f \in \tilde{E}^r(S^1, \tilde{c})$ con $r \in \mathbb{N}$, existe un campo X de clase C^r en M con un ciclo singular silla-nodo Γ tal que $f = f_\Gamma$.*

Demostración. Consideremos $f \in \tilde{E}^r(S^1, \tilde{c})$ y supongamos que $f \neq f_\Gamma$ para todo campo X de clase C^r en M con un ciclo singular silla-nodo Γ . En particular, si consideramos f_Γ los mapas circulares k -expansivos con $k < k_1$, es decir $f_\Gamma \in E_k(S^1, \tilde{c})$. Luego, por la observación anterior, obtenemos que $f \notin \tilde{E}^r(S^1, \tilde{c})$. Esto es una contradicción. \square

Esta proposición se utilizará para demostrar los teoremas (C) y (D) en el apéndice.

Nota 3.1.

1. *Obsérvese que para cualquier ciclo Γ , la propiedad 3-1 es cierta para $f = f_\Gamma$, $i = 0, 1$ y $\tilde{c} \in D$. Aquí $\alpha = \frac{\lambda_3}{\lambda_1}$ (Ver definición 1.7). Además uno tiene que $\alpha < 1$ cuando Γ es k -expansivo para algún $k > 0$. Esto es porque la singularidad en Γ debe satisfacer algunas condiciones de no resonancia para garantizar la existencia de C^2 -coordenadas linealizadas y también $\lambda_3 \neq \lambda_1$. A continuación usaremos la notación $\beta = \frac{\lambda_2}{\lambda_1}$, luego $\beta - \alpha > 0$ (Ver definición 1.7(1)).*
2. *Haremos algunas reducciones sobre H_0 cuando Γ es transversal (ver hecho (3)). Elijiendo $b < 0 < a$ suficientemente cercanos a 0, así H_0 toma la forma*

$$H_0(x, y) = (H_{10}(x, y), H_{20}(x, y))$$

con respecto al sistema de coordenadas (x, y) en Σ con

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial_x H_{20}(x, y)}{\partial_x H_{10}(x, y)} \\ \frac{\partial_y H_{10}(x, y)}{\partial_x H_{10}(x, y)} \end{vmatrix} \quad y \quad \begin{vmatrix} \frac{\partial_y H_{10}(x, y)}{\partial_x H_{10}(x, y)} \\ \frac{\partial_x H_{10}(x, y)}{\partial_x H_{10}(x, y)} \end{vmatrix}$$

uniformemente pequeño para $(x, y) \in ([\varphi_0^{-1}(a), \varphi_0(a)] \times [-\varepsilon^, \varepsilon^*]) \setminus \{c_0\}$ y $\varepsilon^* > 0$ pequeño. En el caso particular cuando Γ es k -expansivo para algún $k > 0$, tales reducciones pueden ser hechas y no afectar la expansividad de Γ por la proposición 3.1.*

A continuación recordamos unos hechos bien conocidos.

Si X_0 es un campo y $\Gamma = \{\sigma_0, \sigma_1, \gamma_0, \gamma_1\}$ es un ciclo singular silla-nodo de X_0 , entonces los campos cercanos a X_0 que tienen una órbita periódica silla-nodo cercana a σ_1 están contenidos en una subvariedad S de co-dimensión uno en el espacio de los campos vectoriales. Luego, S divide una pequeña vecindad \mathcal{U} de X_0 en dos regiones abiertas. Una de ellas (denotada \mathcal{U}^-) consiste de los campos vectoriales cuyo conjunto no errante cercano a σ_1 está conformada por dos órbitas periódicas hiperbólicas.

Definición 3.3. Decimos que una familia X_μ uni-paramétrica con $\mu \in \mathbb{R}$, **desdobla a Γ positivamente** siempre que X es transversal¹ a S en $\mu = 0$ y $X_\mu \in \mathcal{U}^-$ para $\mu < 0$. Un **anillo** A es una 2-variedad difeomorfa a $\{z \in \mathbb{C} : |z| \in [r, R]\}$, $R > r > 0$. Una curva suave $l \subset A$ es **radial** si ella es transversal a cualquier círculo $\{z \in \mathbb{C} : |z| = t\}$ ($t \in [r, R]$).

La *continuación analítica de los elementos críticos hiperbólicos de Γ* (ver [PT]) será indicada por $\sigma_0(\mu)$, cuando consideremos familias uni-paramétricas. De lo que resta de este capítulo se dedicará a mostrar el siguiente teorema.

Teorema 3.1. Sea X_μ una familia de campos vectoriales uni-paramétricas tal que X_0 exhibe un ciclo singular silla-nodo transversal $\Gamma = \{\sigma_0, \sigma_1, \gamma_0, \gamma_1\}$. Suponga que X_0 desdobla a Γ positivamente. Entonces existe $\delta > 0$ tal que para $0 < \mu < \delta$ se cumple:

a. Existe una sección transversal anular A_μ de X_μ y una curva radial $l_\mu \subset A_\mu \cap W^s(\sigma(\mu))$ tal que para todo $p \in A_\mu \setminus l_\mu$ existe un primer tiempo $t(p) > 0$ tal que $F_\mu(p) = X_\mu[t(p), p] \in \text{int}(A_\mu)$,

b. $F_\mu : A_\mu \setminus l_\mu \rightarrow A_\mu$ es una función conjugada de clase C^1 para $\hat{F}_\mu : S^1 \times [-1, 1] \setminus \hat{l}_\mu \rightarrow S^1 \times [-1, 1]$ satisfaciendo las siguientes propiedades.

b.1 \hat{l}_μ es una curva radial en $A = S^1 \times [-1, 1]$,

b.2 \hat{F}_μ admite una C^1 -foliación estable fuerte \mathcal{L}_μ^{ss} en A , consistiendo de curvas radiales tal que \hat{l}_μ es una hoja de \mathcal{L}_μ^{ss} ,

c. Sea f_μ el mapa inducido por \hat{F}_μ sobre $S^1 = A/\mathcal{L}_\mu^{ss}$. Entonces, existen sucesiones decrecientes $\delta_n, \mu_n^* > 0$ (convergentes a 0) y una sucesión de difeomorfismos sobre $\mu_n : [0, 2\pi] \rightarrow [\mu_n^*, \mu_{n-1}^*]$ (con inversa θ_n) invirtiendo orientación tal que,

c.1 $\{f_{\mu_n(\theta)}\}_{\theta \in [0, 2\pi]}$ y $\{R_\theta \circ f_\Gamma\}_{\theta \in [0, 2\pi]}$ son δ -ceranos.

c.2 La **propiedad de distorsión** es cierta para la sucesión μ_n ; es decir, dado $\varepsilon > 0$ y un conjunto de Borel $A \subset [0, 2\pi]$ tenemos

$$(1 - \varepsilon)m(A) \leq \frac{m(\mu_n(A))}{m([\mu_n^*, \mu_{n-1}^*])} \leq (1 + \varepsilon)m(A).$$

La prueba se realizará por medio de los siguientes pasos.

Paso1: *Sistemas dinámicos discontinuos sobre secciones transversales anulares.*

En este paso presentamos las herramientas para la prueba del teorema 3.1. Para analizar los mapas de retorno, introducimos el sistema de coordenadas Φ_μ^+ y Φ_μ^- , los cuales permiten transportar la dinámica sobre la sección transversal para un mapa discontinuo en $S^1 \times [-1, 1]$. La dinámica inducida será parecida a la exhibida por el

¹Para la definición de transversalidad ver [PM].

atractor geométrico de Lorenz, pero en lugar de un cuadrado $[-1, 1] \subset \mathbb{R}^2$ será ahora en un anillo.

Para empezar, consideremos el ciclo Γ y su correspondiente mapa circular f_Γ dependiendo de la estructura (Σ, W^{cu}, a, b) acorde con la definición 3.1. Usando la continuación analítica de \mathcal{F}^{ss} , obtenemos un sistema de coordenadas μ -dependientes (x, y) en Σ , tal que la continuación π_μ de π toma la forma,

$$\pi_\mu(x, y) = (\varphi_\mu(x), \psi_\mu(x, y)),$$

donde φ_μ es un **arco silla-nodo** y ψ_μ satisface que $\psi_\mu(x, 0) = 0$, $|\partial_y \psi_\mu(x, y)| \leq \lambda < 1$ para alguna constante fija λ . Este sistema de coordenadas puede ser escogido de tal manera que $W^s(\sigma_0(\mu)) \cap \Sigma$ es la vertical $\{(c_\mu, y) : y \in [-\Delta, \Delta]\}$. Recordemos que Δ es el diámetro de Σ .

Sea Z_μ el campo tangente asociado al arco silla-nodo. Recuerde que este campo es μ -dependiente tal que φ_μ es la función de tiempo-uno para Z_μ . Consideremos A_μ^+ como el subconjunto de Σ con fronteras verticales $\{(\varphi_\mu^{-1}(a), y) : y \in [-\Delta, \Delta]\}$ y $\pi_\mu(\{(\varphi_\mu^{-1}(a), y) : y \in [-\Delta, \Delta]\})$. También el conjunto A_μ^- con fronteras verticales $\{(b, y) : y \in [-\Delta, \Delta]\}$ y $\pi_\mu(\{(b, y) : y \in [-\Delta, \Delta]\})$.

Ahora introducimos dos sistemas de coordenadas $\Phi_\mu^+ : C_\mu \rightarrow S^1 \times [-1, 1]$ y $\Phi_\mu^- : A_\mu^- \rightarrow S^1 \times [-1, 1]$, donde $C_\mu = A_\mu^+ \cup \pi_\mu(A_\mu^+)$. Consideremos los tiempos $t_\mu^+(x)$ y $t_\mu^-(x)$ que solucionan las ecuaciones $Z_\mu[t, x] = a$ y $Z_\mu[t, x] = b$ para $x \in [\varphi_\mu^{-1}(a), \varphi_\mu(a)]$ y $[b, \varphi_\mu(b)]$, respectivamente. Estas soluciones serán las coordenadas angulares de la siguiente definición.

Definición 3.4. *Definimos Φ_μ^+ y Φ_μ^- por las formulas*

$$\Phi_\mu^+(x, y) = \left(e^{2\pi i t_\mu^+(x)}, \Theta_\mu^+(x, y) \right)$$

y

$$\Phi_\mu^-(x, y) = \left(e^{2\pi i t_\mu^-(x)}, \Theta_\mu^-(x, y) \right),$$

para (x, y) en C_μ y A_μ^- respectivamente. Aquí $\Theta_\mu^+ : C_\mu \rightarrow [-1, 1]$ y $\Theta_\mu^- : A_\mu^- \rightarrow [-1, 1]$ son suaves y satisfacen

- $\Theta_\mu^\pm(\pi_\mu(x, y)) = \Theta_\mu^\pm(x, y)$;
- Existen constantes positivas c_1 y c_2 tal que $c_1 \leq \|D\Theta_\mu^\pm(x, y)\| \leq c_2$ y $\Theta_\mu^\pm(x, 0) = 0$; donde D denota la derivada de Θ_μ^\pm en (x, y) .

Ya definidas Φ_μ^\pm , obsérvese que existe una función de retorno

$$H_\mu : C_\mu \setminus \{(r_\mu, y) : r_\mu \in \{\varphi^{-1}(c_\mu), c_\mu\}, y \in [-\Delta, \Delta]\} \rightarrow A_\mu^-$$

inducido por los campos X_μ tal que H_0 es como en el hecho (3). Donde c_μ es tal que $\{(c_\mu, y) : y \in [-\Delta, \Delta]\} = C_\mu \cap W^s(\sigma_0(\mu))$.

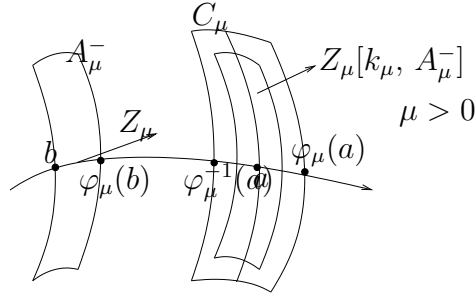


Figura 3-5: Mapa de transición.

Definición 3.5. Para $\mu > 0$ suficientemente pequeño, consideramos $k_\mu \in \mathbb{N}$ y $s_\mu \in \mathbb{R}^+$ satisfaciendo $k_\mu < s_\mu \leq k_\mu + 1$, $\pi_\mu^{k_\mu}(A_\mu^-) \subset C_\mu$ y $Z_\mu[s_\mu, b] = a$. Definimos el **mapa de transición** $T_\mu : A_\mu^- \rightarrow C_\mu$ como

$$T_\mu(x, y) = \pi_\mu^{k_\mu}(x, y) = (\varphi_\mu^{k_\mu}(x), \Delta_\mu^{k_\mu}(x, y)),$$

donde Δ_μ^n son funciones **cociclo-like** definidos inductivamente por

$$\Delta_\mu^{n+1}(x, y) = \psi_\mu(\varphi_\mu^n(x), \Delta_\mu^n(x, y)) \quad y \quad \Delta_\mu^0(x, y) = y.$$

A continuación enunciamos algunas propiedades de estos mapas (ver [DRV]).

Lema 3.1. El límite de T_μ cuando $\mu \rightarrow 0^+$, en la C^2 -topología, existe y toma la forma $(T_\infty(x), 0)$. Donde la función $T_\infty(x)$ es suave y tiene derivadas acotadas lejos de 0.

Finalmente, introducimos dos funciones útiles $\hat{H}_\mu : A^* \rightarrow A$ y $\hat{T}_\mu : A \rightarrow A$, donde $A = S^1 \times [-1, 1]$, $A^* = A \setminus D_\mu$ y $D_\mu = \Phi_\mu^+(\{(r_\mu, y) : r_\mu \in \{\varphi_\mu^{-1}(c_\mu), c_\mu\} \text{ y } y \in [-\Delta, \Delta]\})$. Ellas están dadas por las relaciones

$$\hat{H}_\mu(s, r) = (\Phi_\mu^- \circ H_\mu)(x, y)$$

y

$$\hat{T}_\mu(s, r) = (\Phi_\mu^+ \circ T_\mu)(x, y)$$

donde (x, y) satisface $\Phi_\mu^\pm(x, y) = (s, r)$ respectivamente.

Nota 3.2.

1. Sean $F_\mu = T_\mu \circ H_\mu$ y $\hat{F}_\mu = \hat{T}_\mu \circ \hat{H}_\mu$, entonces

$$\hat{F}_\mu = \hat{T}_\mu \circ \hat{H}_\mu = \Phi_\mu^+ \circ T_\mu \circ H_\mu \circ (\Phi_\mu^+)^{-1} = \Phi_\mu^+ \circ F_\mu \circ (\Phi_\mu^+)^{-1}.$$

Luego, F_μ y \hat{F}_μ son C^1 -conjugados. Además F_μ es el levantamiento de \hat{F}_μ por medio de $\Phi_\mu^+ : C_\mu \rightarrow A$. Usaremos esta observación en el paso 3.

2. \hat{T}_μ es la rotación cuando nos restringimos a $S^1 \times \{0\}$. En efecto, para todo $s \in S^1$ tenemos que existe $x \in S^1$ tal que $\Phi_\mu^-(x, 0) = (s, 0)$ y $s = e^{2\pi i t_\mu^-(x)}$, entonces

$$\hat{T}_\mu(s, 0) = \Phi_\mu^+(T_\mu(x, 0)) = \Phi_\mu^+(\varphi_\mu^{k_\mu}(x), 0) = (e^{2\pi i t_\mu^+(\varphi_\mu^{k_\mu}(x))}, 0)$$

donde $Z_\mu[t_\mu^+(\varphi_\mu^{k_\mu}(x)), \varphi_\mu^{k_\mu}(x)] = a$. Pero como $Z_\mu[k_\mu, x] = \varphi_\mu^{k_\mu}(x)$ y $Z_\mu[t_\mu^-(x), x] = b$ entonces $Z_\mu[t_\mu^+(\varphi_\mu^{k_\mu}(x)) + k_\mu - t_\mu^-(x), b] = a$. Por otro lado, $Z_\mu[s_\mu, b] = a$ luego $t_\mu^+(\varphi_\mu^{k_\mu}(x)) = s_\mu - k_\mu + t_\mu^-(x)$. Por consiguiente, $\hat{T}_\mu(s, 0) = (e^{2\pi i (s_\mu - k_\mu)} s, 0)$.

3. Si P_{S^1} denota la proyección sobre S^1 , $s \in S^1 \rightarrow (P_{S^1} \circ \hat{H}_\mu)(s, 0)$ es δ -cercano a f_Γ para algún $\delta > 0$ (ver definición 2.5). Note que ambas funciones tienen el mismo punto de discontinuidad $c = e^{2\pi i t_\mu^+(c_\mu)}$.

4. Por el lema 3.1, la sucesión de funciones cociclo-like Δ_μ^n convergen a 0 en la C^2 -topología. Este hecho nos permite reducir el análisis de la dinámica de H_μ para $\mu > 0$ pequeño en la región $\{(x, y) : |y| \leq \varepsilon^*\}$, donde ε^* es como en la nota 3.1(2).

Paso2 Foliaciones estables.

En este paso, mostraremos la existencia de una foliación estable fuerte para $F_\mu = T_\mu \circ H_\mu$ cuando $\mu > 0$ es pequeño. Nosotros usamos técnicas de transformación de gráficos en esta parte. El principal resultado en este paso es el siguiente.

Lema 3.2. Sea T_μ y H_μ como en el paso anterior y $F_\mu = T_\mu \circ H_\mu$. Entonces existe una C^1 -foliación $\hat{\mathcal{L}}_\mu^{ss}$ en C_μ con las siguientes características:

1. $\pi_\mu(\hat{\mathcal{L}}_\mu^{ss}(q)) \subset \hat{\mathcal{L}}_\mu^{ss}(\pi_\mu(q))$ para todo $q \in A_\mu^+$;
2. $F_\mu(\hat{\mathcal{L}}_\mu^{ss}(q)) \subset \hat{\mathcal{L}}_\mu^{ss}(F_\mu(q))$ para todo $q \in C_\mu \setminus (l_{1\mu} \cup l_{2\mu})$. Aquí $l_{i\mu}$ con $i = 1, 2$ son el soporte para $\{(\varphi_\mu^{-1}(c_\mu), y) : y \in [-\varepsilon, \varepsilon]\} \cap C_\mu$ y $\{(c_\mu, y) : y \in [-\varepsilon, \varepsilon]\} \cap C_\mu$ respectivamente;
3. Las curvas $l_{i\mu}$ con $i = 1, 2$ son hojas de $\hat{\mathcal{L}}_\mu^{ss}$;
4. Existe $L \in (0, 1)$ tal que si $n \in \mathbb{N}$ entonces $\text{dist}((T_\mu \circ H_\mu)^n(p), (T_\mu \circ H_\mu)^n(q)) \leq L^n$, para todo $p, q \in C_\mu$, $q \in \hat{\mathcal{L}}_\mu^{ss}(p)$. Aquí $\hat{\mathcal{L}}_\mu^{ss}(p)$ es una hoja de $\hat{\mathcal{L}}_\mu^{ss}$ pasando a través de p .

La prueba empieza con la siguiente afirmación.

Afirmación 3.1. Existe $B > 0$ tal que si $H_\mu = (H_{1\mu}, H_{2\mu})$,

$$0 < \sup \left\{ \frac{|\partial_y H_{1\mu}|}{|\partial_x H_{1\mu}|}, \frac{|\partial_x H_{2\mu}|}{|\partial_x H_{1\mu}|}, \frac{|\partial_y H_{2\mu}|}{|\partial_x H_{1\mu}|}, \frac{|\det DH_\mu|}{|\partial_x H_{1\mu}|} \right\} \leq B.$$

Aquí D denota la derivada con respecto a (x, y) y det es el determinante.

Esta afirmación se sigue de la nota 3.1(1) y la condición sobre los valores propios en la definición 1.7(1).

Ahora escribimos

$$DF_\mu = \begin{pmatrix} \tilde{A}_\mu & \tilde{B}_\mu \\ \tilde{C}_\mu & \tilde{D}_\mu \end{pmatrix}$$

donde

$$\begin{aligned} \tilde{A}_\mu &= \left[(\varphi_\mu^{k_\mu})' \circ H_{1\mu} \right] \partial_x H_{1\mu}; \\ \tilde{B}_\mu &= \left[(\varphi_\mu^{k_\mu})' \circ H_{1\mu} \right] \partial_y H_{1\mu}; \\ \tilde{C}_\mu &= \left[(\partial_x \Delta_\mu^{k_\mu}) \circ H_\mu \right] \partial_x H_{1\mu} + \left[(\partial_y \Delta_\mu^{k_\mu}) \circ H_\mu \right] \partial_x H_{2\mu}; \\ \tilde{D}_\mu &= \left[(\partial_x \Delta_\mu^{k_\mu}) \circ H_\mu \right] \partial_y H_{1\mu} + \left[(\partial_y \Delta_\mu^{k_\mu}) \circ H_\mu \right] \partial_y H_{2\mu}. \end{aligned}$$

Consideremos el espacio funcional

$$\mathcal{A} = \{ \phi : C_\mu \rightarrow [-1, 1] : \phi \text{ es continua, } \phi(r_\mu, y) = 0, r_\mu \in \{c_\mu, \varphi_\mu^{-1}(c_\mu)\}, \forall y \}$$

dotado con la norma supremo $\| \cdot \|$ y el operador gráfico

$$G(\phi) = \frac{(\phi \circ F_\mu) \tilde{D}_\mu - \tilde{B}_\mu}{\tilde{A}_\mu - (\phi \circ F_\mu) \tilde{C}_\mu}$$

definida en \mathcal{A} . Ahora de esto se sigue que

$$|G(\phi)(q) - G(\phi')(q)| = \frac{|det DF_\mu(q)| \cdot |\phi(F_\mu(q)) - \phi'(F_\mu(q))|}{|\tilde{A}_\mu(q) - (\phi(F_\mu(q))) \tilde{C}_\mu(q)| |\tilde{A}_\mu(q) - (\phi'(F_\mu(q))) \tilde{C}_\mu(q)|}, \quad (3-2)$$

para todo $q = (x, y) \in C_\mu \setminus \{(r_\mu, y) : r_\mu \in \{\varphi_\mu^{-1}(c_\mu), c_\mu\} \text{ y } y \in [-\Delta, \Delta]\}$.

En efecto,

$$\begin{aligned} |G(\phi)(q) - G(\phi')(q)| &= \left| \frac{\phi(F_\mu(q)) \tilde{D}_\mu(q) - \tilde{B}_\mu(q)}{\tilde{A}_\mu(q) - \phi(F_\mu(q)) \tilde{C}_\mu(q)} - \frac{\phi'(F_\mu(q)) \tilde{D}_\mu(q) - \tilde{B}_\mu(q)}{\tilde{A}_\mu(q) - \phi'(F_\mu(q)) \tilde{C}_\mu(q)} \right| \\ &= \frac{\left| \tilde{A}_\mu(q) (\phi(F_\mu(q)) - \phi'(F_\mu(q))) \tilde{D}_\mu(q) - \tilde{B}_\mu(q) (\phi(F_\mu(q)) - \phi'(F_\mu(q))) \tilde{C}_\mu(q) \right|}{\left| \tilde{A}_\mu(q) - \phi(F_\mu(q)) \tilde{C}_\mu(q) \right| \left| \tilde{A}_\mu(q) - \phi'(F_\mu(q)) \tilde{C}_\mu(q) \right|} \\ &= \frac{\left| \left(\tilde{A}_\mu(q) \tilde{D}_\mu(q) - \tilde{B}_\mu(q) \tilde{C}_\mu(q) \right) (\phi(F_\mu(q)) - \phi'(F_\mu(q))) \right|}{\left| \tilde{A}_\mu(q) - \phi(F_\mu(q)) \tilde{C}_\mu(q) \right| \left| \tilde{A}_\mu(q) - \phi'(F_\mu(q)) \tilde{C}_\mu(q) \right|} \\ &= \frac{|det DF_\mu(q)| |\phi(F_\mu(q)) - \phi'(F_\mu(q))|}{|\tilde{A}_\mu(q) - \phi(F_\mu(q)) \tilde{C}_\mu(q)| |\tilde{A}_\mu(q) - \phi'(F_\mu(q)) \tilde{C}_\mu(q)|}. \end{aligned}$$

Afirmación 3.2. *Existen constantes fijas $K_0, K_1 > 0$ tal que el orden de L ($O(L)$) para (x, y) cercano a $(r_\mu, 0)$, satisface*

1. $O(\tilde{A}_\mu) \geq K_1|x - r_\mu|^{(1-\alpha)}$;
2. $O(\tilde{B}_\mu), O(\tilde{D}_\mu) \leq K_1|x - r_\mu|^{(\beta-\alpha+1)}$;
3. $O(\tilde{C}_\mu/\tilde{A}_\mu) \leq K_0$;
4. $O(\det DF_\mu) \geq K_1|x - r_\mu|^{(\beta+\alpha-1)}$.

Recuerde la nota 3.1(1). La constante K_0 puede ser elegido muy pequeño.

La prueba de esta afirmación se sigue usando la hipótesis de linealización del capítulo 1 y la nota 3.1(2).

Ahora, por el lema 3.1 tenemos que $|\partial_x \Delta_\mu^{k_\mu}|$ y $|\partial_y \Delta_\mu^{k_\mu}|$ son pequeños para $\mu > 0$ cercano a 0 y existe una constante $K > 0$ tal que $|(\varphi_\mu^{k_\mu})'(x)| > K$. Entonces, $G(\phi)$ extiende continuamente a $\{(r_\mu, y) : r_\mu \in \{\varphi_\mu^{-1}(c_\mu), c_\mu\}, \forall y\}$. En efecto $G(\phi)$ converge a $-\frac{\tilde{B}_\mu}{\tilde{A}_\mu}$ cuando $(x, y) \rightarrow (r_\mu, y)$, pero usando la afirmación 3.2 tenemos que $\left|\frac{\tilde{B}_\mu}{\tilde{A}_\mu}\right| \leq |x - r_\mu|^\beta$, luego $G(\phi)(r_\mu, y) = 0 = \phi(r_\mu, y)$.

Ahora veamos que $G(\phi) \in [-1, 1]$:

$$\begin{aligned}
|G(\phi)| &= \left| \frac{(\phi \circ F_\mu)\tilde{D}_\mu - \tilde{B}_\mu}{\tilde{A}_\mu - (\phi \circ F_\mu)\tilde{C}_\mu} \right| \leq \frac{1}{|1 - K_0|} \left| \frac{\tilde{D}_\mu}{\tilde{A}_\mu} - \frac{\tilde{B}_\mu}{\tilde{A}_\mu} \right| \\
&\leq \frac{1}{|1 - K_0|} \left| \frac{\partial_y H_{1\mu}}{\partial_x H_{1\mu}} \left(\frac{\partial_x \Delta_\mu^{k_\mu} \circ H_\mu}{(\varphi_\mu^{k_\mu})' \circ H_{1\mu}} - 1 \right) + \partial_y \Delta_\mu^{k_\mu} \circ H_\mu \cdot \frac{\partial_y H_{2\mu}}{\partial_x H_{1\mu}} \right| \\
&\leq \frac{B}{|1 - K_0|} \left| \frac{\partial_x \Delta_\mu^{k_\mu}}{K} - 1 + \partial_y \Delta_\mu^{k_\mu} \right| \rightarrow \frac{B}{|1 - K_0|} < 1.
\end{aligned}$$

Debido que cuando $\mu \rightarrow 0$, tenemos por la nota 3.1(2) que B es uniformemente pequeño.

Además $G(\phi)$ es una contracción: usando la ecuación 3-2, \tilde{A} , \tilde{B} , \tilde{C} , \tilde{D} , las afirmaciones 3.1 y 3.2, implica que

$$\begin{aligned}
|G(\phi_1) - G(\phi_2)| &= \frac{|\det DF_\mu|}{|\tilde{A}_\mu - (\phi_1 \circ F)\tilde{C}_\mu| |\tilde{A}_\mu - (\phi_2 \circ F_\mu)\tilde{C}_\mu|} |\phi_1 \circ F_\mu - \phi_2 \circ F_\mu| \\
&\leq \frac{1}{(1 - K_0)^2} \left| \frac{\det DF_\mu}{\tilde{A}_\mu^2} \right| |\phi_1 \circ F_\mu - \phi_2 \circ F_\mu| \\
&= \frac{1}{(1 - K_0)^2} \left| \frac{\tilde{D}_\mu}{\tilde{A}_\mu} - \frac{\tilde{C}_\mu \tilde{B}_\mu}{\tilde{A}_\mu \tilde{A}_\mu} \right| |\phi_1 \circ F_\mu - \phi_2 \circ F_\mu| \\
&= \frac{1}{(1 - K_0)^2} \left| \frac{\partial_y \Delta_\mu^{k_\mu} \circ H_\mu}{(\varphi_\mu^{k_\mu})' \circ H_{1\mu}} \right| \left| \frac{\partial_y H_{2\mu}}{\partial_x H_{1\mu}} - \frac{\partial_x H_{2\mu}}{\partial_x H_{1\mu}} \frac{\partial_y H_{1\mu}}{\partial_x H_{1\mu}} \right| |\phi_1 \circ F_\mu - \phi_2 \circ F_\mu| \\
&\leq \frac{B + B^2}{K(1 - K_0)^2} |\partial_y \Delta_\mu^{k_\mu} \circ H_\mu| |\phi_1 \circ F_\mu - \phi_2 \circ F_\mu| \\
&= K_3 |\partial_y \Delta_\mu^{k_\mu}| |\phi_1 \circ F_\mu - \phi_2 \circ F_\mu|.
\end{aligned}$$

Como $G(\phi) \in \mathcal{A}$, para todo $\phi \in \mathcal{A}$ y G es una contracción en \mathcal{A} entonces G tiene un punto fijo ϕ^* y $(\phi^*, 1)$ genera un conjunto de líneas continuas F_μ -invariantes $\{E_q\}_{q \in C_\mu}$ con las siguientes propiedades

- $DF_\mu^{-1}(F_\mu(q))(E_{F_\mu(q)}) = E_q$.
- $\|DF_\mu^{-1}/E\| \geq M$, para alguna constante fija $M > 1$.
- Si $\hat{\mathcal{L}}_\mu^{ss}$ es la foliación (en C_μ) obtenida por integración sobre $\{E_q\}$, entonces $l_{1\mu}$ y $l_{2\mu}$ son hojas de $\hat{\mathcal{L}}_\mu^{ss}$.
- $\hat{\mathcal{L}}_\mu^{ss}$ es π_μ -invariante, es decir, si $q \in A_\mu^+$ entonces $\pi_\mu(\hat{\mathcal{L}}_\mu^{ss}(q)) \subset \hat{\mathcal{L}}_\mu^{ss}(\pi_\mu(q))$. Esto debido que $H_\mu(\pi_\mu(q)) = H_\mu(q)$ para todo $q \in A_\mu^+$.

Para completar la prueba del lema 3.2, debemos probar que $\hat{\mathcal{L}}_\mu^{ss}$ es de clase C^1 . Para ello introducimos el espacio funcional

$$\mathcal{A}_1 = \{A : C_\mu \rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}) : A \text{ es continua, } A(r_\mu, y) = 0, r_\mu \in \{\varphi_\mu^{-1}(c_\mu), c_\mu\}, \forall y\}$$

y el operador

$$S(\phi, A) = \frac{(\phi \circ F_\mu)\nabla\tilde{D}_\mu - \nabla\tilde{B}_\mu}{\tilde{A}_\mu - (\phi \circ F_\mu)\tilde{C}_\mu} - G(\phi)\frac{\nabla\tilde{A}_\mu - (\phi \circ F_\mu)\nabla\tilde{C}_\mu}{\tilde{A}_\mu - (\phi \circ F_\mu)\tilde{C}_\mu} + \frac{\det DF_\mu}{(\tilde{A}_\mu - (\phi \circ F_\mu)\tilde{C}_\mu)^2}(A \circ F_\mu)DF_\mu,$$

para un fijo $\phi \in \mathcal{A}$.

Afirmación 3.3. *Existe una constante fija $K_2 > 0$ tal que*

1. $O(\nabla\tilde{B}_\mu/\tilde{A}_\mu), O(\nabla\tilde{D}_\mu/\tilde{A}_\mu) \leq K_2|x - r_\mu|^{(\beta-\alpha)}$;
2. $O(\nabla\tilde{A}_\mu/\tilde{A}_\mu), O(\nabla\tilde{C}_\mu/\tilde{A}_\mu) \leq K_2|x - r_\mu|^{-\alpha}$.

Primero obsérvese que $S(\phi, A)$ está bien definida, ya que $S(\phi, A)$ representa el operador derivado de $G(\phi)$ (operador gráfico). Además, usando la afirmación anterior y 3.2, podemos extender $S(\phi, A)$ a $\{(r_\mu, y) : r_\mu \in \{\varphi_\mu^{-1}(c_\mu), c_\mu\}, \forall y\}$. En efecto, $S(\phi, A)$ converge a $\frac{\nabla\tilde{B}_\mu}{\tilde{A}_\mu} + \frac{\tilde{B}_\mu}{\tilde{A}_\mu}\frac{\nabla\tilde{A}_\mu}{\tilde{A}_\mu}$, cuando $(x, y) \rightarrow (r_\mu, y)$; pero por la afirmación 3.2 tenemos que $\frac{|\tilde{B}_\mu|}{|\tilde{A}_\mu|} \leq |x - r_\mu|^\beta$, luego usando la afirmación anterior se obtiene

$$\left| \frac{\nabla\tilde{B}_\mu}{\tilde{A}_\mu} + \frac{\tilde{B}_\mu}{\tilde{A}_\mu}\frac{\nabla\tilde{A}_\mu}{\tilde{A}_\mu} \right| \leq \left| \frac{\nabla\tilde{B}_\mu}{\tilde{A}_\mu} \right| + \left| \frac{\tilde{B}_\mu}{\tilde{A}_\mu} \right| \left| \frac{\nabla\tilde{A}_\mu}{\tilde{A}_\mu} \right| \leq 2K_2|x - r_\mu|^{\beta-\alpha}.$$

Como $\beta - \alpha > 0$, entonces $S(\phi, A)(r_\mu, y) = 0$. Con esto obtenemos que $S(\phi, A) \in \mathcal{A}_1$, para todo $(\phi, A) \in \mathcal{A} \times \mathcal{A}_1$.

Por otro lado, usando la afirmación 3.1, \tilde{A} , \tilde{B} , \tilde{C} y \tilde{D} implica que

$$\begin{aligned} \left| \frac{\det DF_\mu}{\tilde{A}_\mu} \right| &= \left| \tilde{D}_\mu - \tilde{C}_\mu \frac{\tilde{B}_\mu}{\tilde{A}_\mu} \right| = |\partial_y \Delta_\mu^{k_\mu} \circ H_\mu| \left| \partial_y H_{2\mu} - \frac{\partial_x H_{2\mu} \partial_y H_{1\mu}}{\partial_x H_{1\mu}} \right| = \\ &= |\partial_y \Delta_\mu^{k_\mu} \circ H_\mu| \left| \frac{\det DH_\mu}{\partial_x H_{1\mu}} \right| \leq B |\partial_y \Delta_\mu^{k_\mu}| \end{aligned}$$

para alguna constante fija B . Además

$$\begin{aligned} |S(\phi, A) - S(\phi, B)| &= \left| \frac{\det DF_\mu}{\tilde{A}_\mu - (\phi \circ F_\mu) \tilde{C}_\mu} \right|^2 |A \circ F_\mu - B \circ F_\mu| \\ &\leq \frac{1}{(1 - K_0)^2} \left| \frac{\det DF_\mu}{\tilde{A}_\mu} \right|^2 |A \circ F_\mu - B \circ F_\mu| \\ &\leq \frac{B}{(1 - K_0)^2} |\partial_y \Delta_\mu^{k_\mu}| |A \circ F_\mu - B \circ F_\mu| \\ &= K_4 |\partial_y \Delta_\mu^{k_\mu}| |A \circ F_\mu - B \circ F_\mu|. \end{aligned}$$

Esto implica que $A \rightarrow S(\phi, A)$ es una contracción con constante independiente de ϕ para $\mu > 0$ pequeño (recuerde el lema 3.1). Así, $(\phi, A) \rightarrow (G(\phi), S(\phi, A))$ tiene un único punto fijo (φ^*, A^*) (recuerde que ϕ^* es un punto fijo de G). Luego, $\phi^* \in C^1$ con derivada igual A^* , lo cuál queda probado el lema 3.2.

Prueba del teorema 3.1(a). Consideremos el anillo A_μ obtenido al identificar las órbitas de π_μ en C_μ . Otra manera de ver A_μ es por medio de una sección transversal plana de $W^u(\sigma_0)$ y $W^s(\sigma_0)$ es como un cilindro localmente (ver definición 1.7). Sea l_μ igual $\{(r_\mu, y) : r_\mu \in \{\varphi_\mu^{-1}(c_\mu), c_\mu\}, y \in [-\Delta, \Delta]\}$ como la identificación cociente en C_μ . Entonces A_μ, l_μ y $F_\mu = T_\mu \circ H_\mu : A_\mu \setminus l_\mu \rightarrow A_\mu$ satisfacen el teorema 3.1(a). \square

Paso3: *Prueba teorema 3.1 (b)-(c).*

Introducimos las foliaciones $\mathcal{L}_{\mu,-}^{ss}$ y $\mathcal{L}_{\mu,+}^{ss}$ en A como el pulback de $\hat{\mathcal{L}}_\mu^{ss}$ bajo $\Phi_\mu^- \circ T_\mu^{-1}$ y Φ_μ^+ respectivamente (recuerde $A = S^1 \times [-1, 1]$). Considere $\hat{F}_\mu = \hat{T}_\mu \circ \hat{H}_\mu$, donde \hat{H}_μ y \hat{T}_μ son como en la nota 3.2(1). Entonces se obtiene que $\mathcal{L}_{\mu,-}^{ss}$ es C^1 y

$$\lim_{\mu \rightarrow 0^+} P_{\mathcal{L}_{\mu,-}^{ss}} = P_{S^1} \quad (3-3)$$

en la C^1 -topología, donde P_{S^1} es la proyección de $A = S^1 \times [-1, 1]$ sobre S^1 (recuerde la nota 3.2). Como $\hat{\mathcal{L}}_\mu^{ss}$ es F_μ -invariante $(T_\mu(H_\mu(\hat{\mathcal{L}}_\mu^{ss})) \subseteq \hat{\mathcal{L}}_\mu^{ss})$ entonces $H_\mu(\hat{\mathcal{L}}_\mu^{ss}) \subset T_\mu^{-1}(\hat{\mathcal{L}}_\mu^{ss})$, es decir, H_μ envía hojas de $\hat{\mathcal{L}}_\mu^{ss}$ en hojas de la forma $T_\mu^{-1}(\hat{\mathcal{L}}_\mu^{ss}(q))$. Esto implica que $(s, 0) \rightarrow (\hat{T}_\mu \circ P_{\mathcal{L}_{\mu,-}^{ss}} \circ \hat{H}_\mu)(s, 0)$ es justamente el mapa uni-dimensional f_μ inducido por \hat{F}_μ en el espacio cociente $A/\mathcal{L}_{\mu,+}^{ss}$, donde $P_{\mathcal{L}_{\mu,-}^{ss}}$ denota la proyección a lo largo de $\mathcal{L}_{\mu,-}$ sobre S^1 .

Afirmación 3.4. Sea $L_\mu(s) = (P_{\mathcal{L}_{\mu,-}^{ss}} \circ \hat{H}_\mu)(s, 0)$ para $s \in S^1$. Entonces para todo $\delta > 0$, existe $\mu_\delta > 0$ tal que L_μ y f_Γ son δ -cercanos, para todo $\mu \in (0, \mu_\delta)$ (recuerde la definición 2.5).

Demostración. Usando la ecuación 3-3 obtenemos que para todo $\delta > 0$, existe $\mu_\delta > 0$ tal que

$$|P_{\mathcal{L}_{\mu,-}^{ss}}(s, t) - P_{s^1}(s, t)| < \delta/2$$

para todo $\mu \in (0, \mu_\delta)$ y $(s, t) \in A$. En particular tenemos que

$$|L_\mu(s) - P_{s^1} \circ \hat{H}_\mu(s, 0)| = |P_{\mathcal{L}_{\mu,-}^{ss}} \circ \hat{H}_\mu(s, 0) - P_{s^1} \circ \hat{H}_\mu(s, 0)| < \delta/2.$$

Por otro lado, por la nota 3.2 tenemos que $P_{s^1} \circ \hat{H}_\mu(s, 0)$ es $\delta/2$ -cercano a f_Γ , es decir

$$|P_{s^1} \circ \hat{H}_\mu(s, 0) - f_\Gamma(s)| < \delta/2.$$

Luego $L_\mu(s)$ y $f_\Gamma(s)$ son δ -cercanos. \square

Afirmación 3.5. Para todo $\delta > 0$, existe $\mu_\delta > 0$ tal que $\hat{T}_\mu \circ L_\mu$ y $R_{\theta(\mu)} \circ f_\Gamma$ son δ -cercanos, para todo $\mu \in (0, \mu_\delta)$, donde $\theta(\mu) = 2\pi(s_\mu - k_\mu)$ (ver nota 3.2(2)).

Demostración. Por la nota 3.2(2) tenemos que $\hat{T}_\mu/(S^1 \times \{0\})$ es $R_{\theta(\mu)}$. Ahora por la afirmación 3.4 tenemos que para todo $\delta > 0$, existe $\mu_\delta > 0$ tal que L_μ y f_Γ son δ -cercanos, para todo $\mu \in (0, \mu_\delta)$, luego por la nota 2.4 se concluye que $\hat{T}_\mu \circ L_\mu$ y $R_{\theta(\mu)} \circ f_\Gamma$ son δ -cercanos. \square

Ahora enunciamos un lema cuya prueba se encuentra en [DRV].

Lema 3.3. Hay una sucesión decreciente $\mu_n^* > 0$ convergente a 0 tal que si $\theta : \mu \rightarrow \theta(\mu)$, entonces $\theta_n = \theta/[\mu_n^*, \mu_{n-1}^*] : [\mu_n^*, \mu_{n-1}^*] \rightarrow [0, 2\pi]$ satisfaciendo

1. Para todo $n \in \mathbb{N}$, θ_n es un difeomorfismo sobre;
2. dado $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n > n_0$ y cada conjunto de Borel $A \subset [0, 2\pi]$ tenemos

$$(1 - \varepsilon)m(A) \leq \frac{m(\theta_n^{-1}(A))}{m([\mu_n^*, \mu_{n-1}^*])} \leq (1 + \varepsilon)m(A).$$

La prueba del teorema 3.1(b)-(c) se sigue: usando la afirmación 3.5 para la sucesión decreciente $\delta_n = 1/n$ convergente a 0, tenemos que $f_\mu = \hat{H}_\mu \circ L_\mu$ y $R_{\theta(\mu)} \circ f_\Gamma$ son δ_n -cercanos. Por otro lado, el lema 3.3 nos dice que existe una sucesión decreciente μ_n tal que $\mu_n(\theta(\mu)) = \mu$. Luego $f_{\mu_n(\theta)}$ y $R_\theta \circ f_\Gamma$ son δ_n -cercanos. Además se cumple la propiedad de distorsión para μ_n , donde μ_n es el inverso de θ_n , para todo $n \in \mathbb{N}$.

Ahora por la nota 3.2.1 sabemos que \hat{F}_μ y F_μ son conjugados por medio de Φ_μ^+ , luego podemos elegir $\mathcal{L}_\mu^{ss} = \mathcal{L}_{\mu,+}^{ss}$ y $\hat{l}_\mu = \Phi_\mu^+(l_\mu)$. Con esto finalizo el paso 3 y completamos la prueba del teorema 3.1.

Capítulo 4

Pruebas de los teoremas A y B

Prueba del Teorema A. Primero debemos construir una vecindad U requerida por este teorema. Para esto usamos la nota 3.2(4) con el fin de reducir la dinámica a una vecindad tubular $\{(x, y) : |y| \leq \varepsilon^*\}$. Ahora, como Δ_μ^n converge a 0 en la C^2 -topología, tenemos que nuestra vecindad tubular genera un conjunto abierto satisfaciendo $X_\mu[t, U] \subset U$, para todo $t > 0$ y $\mu > 0$ pequeño. En efecto, U es obtenida al saturar la vecindad por el flujo inducido por X_0 .

Por otro lado, por el teorema 3.1, U genera una sección transversal anular A_μ y una función de retorno F_μ sobre ella. Además la conjugación entre F_μ y \hat{F}_μ (ver teorema 3.1(b)) reduce la dinámica de la función de retorno al mapa uni-dimensional f_μ . Pero, usando el teorema 3.1(c), resulta que f_μ y una adecuada rotación de f_Γ son δ_n -ceranos para δ_n convergiendo a 0^+ , cuando n tiende a infinito. También, veremos en el apéndice que $\hat{A}_\mu = \bigcap_{t>0} X_\mu[t, U]$ no es un atractor Lorenz-like si y solo si f_μ es transitiva en S^1 .

Ahora, aplicaremos los resultados del segundo capítulo (en particular la proposición 2.4). Bajo estas condiciones, tenemos que (a) es cierto debido que como Γ es k -expansivo entonces por proposición 2.1 tenemos que $R_\theta \circ f_\Gamma \in E_k(S^1)$, pero f_μ y $R_\theta \circ f_\Gamma$ son δ_n -ceranos, luego por la proposición 2.4(1) obtenemos que $f_\mu \in E_k(S^1)$, por lo tanto, por el teorema 2.1 tenemos que para f_μ existe un intervalo I tal que $W^s(I)$ es abierto y denso en S^1 . Luego la cuenca del atractor extraño \hat{A}_μ de X_μ contiene un conjunto abierto y denso en U .

Para que (d) sea cierto usamos el mismo argumento anterior para obtener que $f_\mu \in E_k(S^1)$ con $k > \sqrt{2}$, luego por la proposición 2.2 tenemos que f_μ es transitiva. Con esto mostramos que \hat{A}_μ no es un atractor Lorenz-like.

Para probar (b) y (c) usamos la proposición 2.4(2) – (3) y teorema 3.1(b) – (c) de la siguiente manera. Como Γ es k -expansivo entonces $f_\Gamma \in E_k(S^1)$ con $k > \sqrt{2}$. Usando el teorema 2.2 y proposición 2.3 respectivamente, podemos asumir que existen intervalos disyuntos $I_{1f}, I_{2f} \subseteq [0, 2\pi]$ tal que $f_\theta = R_\theta \circ f_\Gamma$ es transitivo para todo $\theta \in I_{1f}$; y para todo $\theta \in I_{2f}$ se tiene que f_θ o f_θ^2 es transitivo en algún intervalo cerrado de S^1 . Por lo tanto, usando la proposición 2.4(2) – (3), se obtiene que existe

un $\delta > 0$ tal que si f_θ y $f_{\mu(\theta)}$ son δ -ceranos entonces existen intervalos disyuntos \tilde{I}_1 y $\tilde{I}_2 \subset [0, 2\pi]$ tales que $f_{\mu(\theta)}$ es transitivo en S^1 para $\theta \in \tilde{I}_1$; y para $\theta \in \tilde{I}_2$ se cumple que $f_{\mu(\theta)}$ ó $f_{\mu(\theta)}^2$ es transitivo en algún subintervalo cerrado \tilde{I}_3 de S^1 .

Además, recordemos que las sucesiones decrecientes δ_n y μ_n^* convergen a 0, entonces existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\delta_{n_0} < \delta$ y $\mu_{n_0}^* < \delta$. Luego por el teorema 3.1(c) tenemos que $f_{\mu_{n_0}(\theta)}$ y $R_\theta \circ f_\Gamma$ son δ -ceranos. Por consiguiente, existen \tilde{I}_1 y \tilde{I}_2 satisfaciendo lo anterior.

Para probar (b), consideremos la sucesión disyunta $I_n = \mu_{n_0+n}(\tilde{I}_1) \subset [\mu_{n_0+n}^*, \mu_{n_0+n-1}^*] \subset (0, \delta)$. Pero $f_{\mu(\theta)}$ es transitiva para todo $\theta \in \tilde{I}_1$, entonces \hat{A}_μ no es un atractor Lorenz-like para $\mu \in I = \bigcup_{n>0} I_n$. Ahora para (c) usamos el hecho que μ_n es sobre e invierte orientación para concluir que $f_{\mu(\theta)}$ no es transitiva para $\theta \in \tilde{I}_2$. Por lo tanto concluimos que \hat{A}_μ es Lorenz-like para todo $\mu \in \bigcup_{n>0} I'_n$, donde $I'_n = \mu_{n_0+n}(\tilde{I}_2) \subset [\mu_{n_0+n}^*, \mu_{n_0+n-1}^*] \subset (0, \delta)$.

Sin pérdida de generalidad, tanto I_k como I'_k están contenidas en $[\mu_{k+1}^*, \mu_k^*]$. Luego usando la propiedad de distorsión obtenemos que existe una constante $c_1 > 0$ tal que

$$m(I_k \cap (0, \mu_k^*)) = m(I_k) \geq c_1(\mu_k^* - \mu_{k+1}^*).$$

Sumando sobre todos los I_k (similar para I'_k) se obtiene

$$m(I \cap (0, \mu_k^*)) = \sum_{k>0} m(I_k \cap (0, \mu_k^*)) \geq c_1 \sum_{k>0} (\mu_k^* - \mu_{k+1}^*) = c_1 \mu_1$$

luego

$$\frac{m(I \cap (0, \mu_k^*))}{\mu_k^*} \geq \frac{c_1 \mu_1}{\mu_k^*} \geq c_1 > 0.$$

Como $\mu_n^* \rightarrow 0^+$ entonces se concluye el teorema. \square

Prueba del Teorema B. Aunque el teorema 3.1 no funciona en este caso, podemos aplicar el esquema de renormalización de [DRV] para obtener alguna convergencia para el mapa circular en este caso. En realidad, por el teorema 2.3 existe $\theta_0 \in [0, 2\pi]$ tal que $R_{\theta_0} \circ f_\Gamma$ exhibe una tangencia homoclínica asociada a un punto periódico hiperbólico.

Ahora para obtener atractores extraños Henón-like debemos hacer renormalizaciones cerca de la tangencia. Esto lo podemos hacer desde que la pre-imagen del punto crítico involucrado en esta tangencia no intersecta un pequeño conjunto compacto alrededor del punto de discontinuidad. La renormalización converge a una familia cuadrática para algún subconjunto J de valores $\sigma \in [0, 2\pi]$. Así concluimos (ver [MV]) que la renormalización tiene atractores extraños Henón-like para un conjunto J de valores $\sigma \in [0, 2\pi]$ con medida de Lebesgue positiva.

Por otra parte, dado que el limite de la familia se somete a tangencias cuadráticas, podemos aplicar el esquema de renormalización en [MV] de manera uniforme a la

familia de renormalización, para concluir que $m(J_k)$ es uniformemente acotada lejos de cero. La prueba del teorema B esta completa porque una similar propiedad de distorsión como en el teorema 3.1 (ver [DRV]).

□

Apéndice

Aquí probamos la proposición 3.1. También exhibimos ejemplos de ciclos singulares silla-nodo cuyo desdoblamiento genera diferentes tipos de dinámicas. Finalizamos explicando porque algunos atractores obtenidos en el teorema (A) no son Lorenz-like.

Prueba de la proposición 3.1.

Para empezar requerimos algunas notaciones y hechos. Recordemos que una estructura es (Σ, W^{cu}, a, b) , donde Σ , W^{cu} , a y b cumplen los hechos (1), (2) y (3) del capítulo 3. En esta parte asociamos los mapas φ_a , φ_b y h , así como la proyección π^{ss} a lo largo de la variedad estable fuerte en Σ . Los mapas correspondientes, para alguna otra estructura $(\hat{\Sigma}, \hat{W}^{cu}, \hat{a}, \hat{b})$, serán denotados por $\hat{\varphi}_{\hat{a}}$, $\hat{\varphi}_{\hat{b}}$ y \hat{h} . En este caso la proyección será denotada por $\hat{\pi}^{ss}$. También se le asocia un campo vectorial tangente Z en W^{cu} . El correspondiente campo vectorial para \hat{W}^{cu} se denotará por \hat{Z} .

Ahora, si (Σ, W^{cu}, a, b) y $(\hat{\Sigma}, \hat{W}^{cu}, \hat{a}, \hat{b})$ son estructuras, entonces las siguientes relaciones pueden ser formuladas. Recordemos que R_θ denota la rotación en S^1 con un ángulo $\theta \in [0, 2\pi)$.

R1. Suponga $(\Sigma, W^{cu}) = (\hat{\Sigma}, \hat{W}^{cu})$. Si $(a', b') \in W^{cu,+} \times W^{cu,-}$, existe $(\theta, \theta') \in [0, 2\pi)^2$ tal que $\varphi_a = R_\theta \circ \varphi_{a'}$ y $\varphi_b = R_{\theta'} \circ \varphi_{b'}$.

R2. Suponga $\Sigma = \hat{\Sigma}$ (así $\pi^{ss} = \hat{\pi}^{ss}$). Denotamos por π^{cu} y $\hat{\pi}^{cu}$ la proyección sobre W^{cu} y \hat{W}^{cu} inducido por π^{ss} respectivamente. Definimos $\pi^- : W^{cu,-} \rightarrow \hat{W}^{cu,-}$ por la proyección a lo largo de π^{ss} . Entonces,

1. $Z[t, x] = b$ implica $\hat{Z}[t, \pi^-(x)] = \pi^-(b)$, para todo $t \in \mathbb{R}$;
2. $\varphi_b(x) = \hat{\varphi}_{\pi^-(b)}(\pi^-(x))$, para todo $x \in W^{cu,-}$;
3. $\pi^- \circ \pi^{cu} = \hat{\pi}^{cu}$.

R3. Existe una función de retorno X -inducido $L : \Sigma \rightarrow \hat{\Sigma}$. Suponga que $\hat{W}^{cu} = L(W^{cu})$, $\hat{a} = L(a)$ y $\hat{b} = L(b)$. Entonces,

1. $\hat{\pi} = L \circ \pi \circ L^{-1}$;
2. $\hat{\varphi}_{\hat{a}}(L(x)) = \varphi_a(x)$;
3. $\hat{\varphi}_{\hat{b}}(L(x)) = \varphi_b(x)$.

Ahora la proposición 3.1 es consecuencia de las siguientes lemas.

Lema 4.1. *Suponga que (Σ, W^{cu}, a, b) es una estructura y $(a', b') \in W^{cu,+} \times W^{cu,-}$. Entonces $f(\Sigma, W^{cu}, a, b)$ y $f(\Sigma, W^{cu}, a', b')$ difieren en una rotación en S^1 .*

La prueba es consecuencia directa de R1. En efecto,

$$\begin{aligned} f(\Sigma, W^{cu}, a, b) &= \varphi_b \circ \pi^{ss} \circ h \circ \varphi_a^{-1} = R_{\theta'} \circ \varphi_{b'} \circ \pi^{ss} \circ h \circ \varphi_{a'}^{-1} \circ R_{\theta}^{-1} \\ &= R_{\theta'} \circ f(\Sigma, W^{cu}, a', b') \circ R_{\theta}^{-1} = R_{\theta'+\theta} \circ f(\Sigma, W^{cu}, a', b'). \end{aligned}$$

Lema 4.2. *Suponga que (Σ, W^{cu}) y $(\hat{\Sigma}, \hat{W}^{cu})$ satisface el hecho (1) del capítulo 3 con $\Sigma = \hat{\Sigma}$. Entonces para todo $(a, b) \in W^{cu,+} \times W^{cu,-}$, existe $(\hat{a}, \hat{b}) \in \hat{W}^{cu,+} \times \hat{W}^{cu,-}$ tal que $f(\Sigma, W^{cu}, a, b)$ y $f(\hat{\Sigma}, \hat{W}^{cu}, \hat{a}, \hat{b})$ difieren en una rotación en S^1 .*

Demostración. Como $\Sigma = \hat{\Sigma}$ entonces $\pi^{ss} = \hat{\pi}^{ss}$. Sean $\hat{a} = a$, $\hat{b} = \pi^-(b)$, luego aplicando R2 obtenemos

$$\begin{aligned} f(\Sigma, W^{cu}, a, b) &= \varphi_b \circ \pi^{cu} \circ h \circ \varphi_a^{-1} = \varphi_{\hat{b}} \circ \pi^- \circ \pi^{cu} \circ h \circ \varphi_{\hat{a}}^{-1} \\ &= \varphi_{\hat{b}} \circ \hat{\pi}^{cu} \circ h \circ \varphi_{\hat{a}}^{-1} = f(\hat{\Sigma}, \hat{W}^{cu}, \hat{a}, \hat{b}). \end{aligned}$$

□

Lema 4.3. *Sea (Σ, W^{cu}, a, b) una estructura y considere una sección transversal $\hat{\Sigma}$ satisfaciendo el hecho (1) del capítulo 3. Entonces existe $(\hat{W}^{cu}, \hat{a}, \hat{b})$ tal que $(\hat{\Sigma}, \hat{W}^{cu}, \hat{a}, \hat{b})$ es una estructura tal que $f(\Sigma, W^{cu}, a, b)$ y $f(\hat{\Sigma}, \hat{W}^{cu}, \hat{a}, \hat{b})$ difiere en una rotación en S^1 .*

Demostración. Aquí usamos la función de retorno L en R3. Sean $\hat{W}^{cu} = L(W^{cu})$, $\hat{a} = L(a)$ y $\hat{b} = L(b)$. Luego aplicando R3 se obtiene

$$\begin{aligned} f(\Sigma, W^{cu}, a, b) &= \varphi_b \circ \pi^{cu} \circ h \circ \varphi_a^{-1} = \varphi_{\hat{b}} \circ L \circ \pi^{ss} \circ L^{-1} \circ h \circ \varphi_{\hat{a}}^{-1} \\ &= \varphi_{\hat{b}} \circ \hat{\pi}^{ss} \circ h \circ \varphi_{\hat{a}}^{-1} = f(\hat{\Sigma}, \hat{W}^{cu}, \hat{a}, \hat{b}). \end{aligned}$$

□

Esto finaliza la prueba de la proposición 3.1.

Ahora presentaremos algunos ejemplos de ciclos en los cuales surgen varios tipos de dinámicas después de su desdoblamiento. Para este objetivo nosotros usaremos la proposición 3.2. En el teorema (C) mostramos ejemplos de ciclos singulares silla-nodo críticos generando dinámicas hiperbólicas, atractores Lorenz y atractores Hénon-like después de su desdoblamiento. En el teorema (D) exhibe ejemplos de ciclos transversales generando atractores Lorenz-like contractivos después de su desdoblamiento.

Nosotros usamos las siguientes notaciones. Si X_μ es una familia uni-paramétrica de campos vectoriales y Γ es un ciclo singular silla-nodo de X_0 , entonces

- $L(\varepsilon) = \{ \mu \in [0, \varepsilon] : X_\mu \text{ exhibe un atractor Lorenz-like cerca a } \Gamma \}$,
- $He(\varepsilon) = \{ \mu \in [0, \varepsilon] : X_\mu \text{ exhibe un atractor Hénon-like cerca a } \Gamma \}$,

- $Hy(\varepsilon) = \{ \mu \in [0, \varepsilon] : X_\mu \text{ es hiperb\u00f3lico cerca a } \Gamma \},$
- $Ro(\varepsilon) = \{ \mu \in [0, \varepsilon] : X_\mu \text{ exhibe un atractor Lorenz contractivo cerca a } \Gamma \}.$

Deseo se\u00f1alar que las bifurcaciones mostradas, a pesar de no ser hiperb\u00f3licas, est\u00e1n lejos de tangencias homocl\u00ednicas. En cambio, los ciclos singulares silla-nodo y atractores extra\u00f1os que surgen del desdoblamiento gen\u00e9rico son acumulados por los ciclos singulares. Esto surge que los ciclos singulares son un buen conjunto denso para el estudio de los campos vectoriales.

Teorema C. *Existen conjuntos abiertos de familias uni-param\u00e9tricas de campos vectoriales X_μ desdoblado sistemas Morse-Smale a trav\u00e9s de un ciclo singular silla-nodo cr\u00edtico Γ tal que*

$$\liminf_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{m(\mathcal{H}(\varepsilon))}{\varepsilon} > 0$$

donde $\mathcal{H}(\varepsilon)$ es $L(\varepsilon)$, $He(\varepsilon)$ o $Hy(\varepsilon)$.

Demostraci\u00f3n. Usamos la proposici\u00f3n 3.2 para construir un ciclo singular silla-nodo Γ para un adecuado mapa circular uni-dimensional discontinuo f . Obtenemos f mediante la extensi\u00f3n del mapa expansivo de Lorenz cl\u00e1sico en un intervalo compacto I de S^1 a S^1 . La extensi\u00f3n se hace de una manera que tambi\u00e9n presente un punto fijo atractor $s \in S^1 \setminus I$ y una extensi\u00f3n cr\u00edtica continua en S^1 , seg\u00fan la definici\u00f3n 2.4 (ver nota 2.3). Luego tenemos $f_\Gamma = f$ para el ciclo Γ introducido anteriormente. Ahora bien, haciendo rotaciones de f se producen atractores geom\u00e9tricos de Lorenz y por el teorema (B), los atractores H\u00e9non-like.

La hiperb\u00f3licidad es obtenida al ver que para un adecuado $\theta \in (0, 2\pi)$, $R_\theta \circ f$ tendr\u00e1 un intervalo I_μ donde la funci\u00f3n se asemeja a un mapa uni-dimensional g de un ciclo singular expansivo (ver [BLMP]). En esta referencia se comprob\u00f3 que el l\u00edmite de la capacidad del conjunto de par\u00e1metros donde la imagen de la singularidad se mantiene en el dominio de g , tiende a cero cuando los par\u00e1metros se acercan a 0^+ . El mismo argumento se puede aplicar en esta situaci\u00f3n para obtener que la imagen de la singularidad bajo $f_\theta \setminus I_\mu$ y la imagen del otro punto cr\u00edtico van a una silla hiperb\u00f3lica en la mayor parte del tiempo. En particular, la hiperb\u00f3licidad se tiene para estos casos. Esto completa la prueba. □

Teorema D. *Existen conjuntos abiertos de familias uni-param\u00e9tricas de campos vectoriales X_μ desdoblado sistemas Morse-Smale a trav\u00e9s de un ciclo singular silla-nodo transversal Γ tal que*

$$\liminf_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{m(\mathcal{H}(\varepsilon))}{\varepsilon} > 0,$$

donde $\mathcal{H}(\varepsilon)$ es $Hy(\varepsilon)$ o $Ro(\varepsilon)$.

Demostración. Nosotros primero construimos un campo vectorial X_0 con un ciclo transversal Γ satisfaciendo $\lambda_3 > \lambda_1$ y $\lambda_2 > \lambda_3 + 3\lambda$ (ver [R]). Haciendo uso de la proposición 3.2 para construir un ciclo singular silla-nodo transversal de un adecuado mapa circular h . Elegimos h extendiendo el mapa intervalo estudiado en [R] al círculo S^1 de manera que las imágenes del punto de discontinuidad de h , denotadas por r_+ y r_- , van a dos órbitas periódicas repulsoras ξ_1 y ξ_2 de h , respectivamente. Vamos a definir $h_\theta = R_\theta \circ h$ y $\xi_i(\theta)$ como la continuación analítica de ξ_i para h_θ con $i = 1, 2$. Además, considere las continuaciones analíticas $r_+(\theta)$ y $r_-(\theta)$ de r_+ y r_- , respectivamente para el mapa h_θ . De ello se desprende que estos elementos están bien definidos, al menos para θ en un intervalo de la forma $(-\varepsilon, \varepsilon)$ con $\varepsilon > 0$ pequeño; y además, las derivadas $\frac{d}{d\theta}(r_+ - \xi_1)$ y $\frac{d}{d\theta}(r_- - \xi_2)$ en $\theta = 0$ no son nulas.

Podemos construir C^3 -foliaciones estable fuerte asociada a la correspondiente función de retorno como lo hicimos en el teorema 3.1 para los ciclos transversales (ver [R]). Resulta que el mapa uni-dimensional \hat{h}_μ asociado a tal foliación invariante esta en gran parte relacionada con h_μ . De hecho, se deduce que para los mapas \hat{h}_μ ($\mu > 0$) que están cerca de h_θ con $\theta \in (-\varepsilon, \varepsilon)$, hay un \hat{h}_μ -intervalo invariante no trivial (conteniendo la discontinuidad) donde \hat{h}_μ es transitivo con exponente de Lyapunov positivo en la discontinuidad. La prueba continua utilizando argumentos en [DRV] como se hizo antes.

□

Atractores singulares sobre secciones transversales anulares

En esta parte explicamos porque algunos de los atractores extraños obtenidos en el teorema (A) no son Lorenz-like. Empezamos nuestra explicación con el modelo geométrico \mathcal{M} representado por el gráfico **4-1**

$\mathcal{M}1.$ $A \subset M$ es un anillo y Π es un plano paralelo a A . La curva $l \in A \cap W^s(\sigma)$. Esta curva es precisamente l_μ como en el teorema 3.1.

$\mathcal{M}2.$ σ es una singularidad hiperbólica asociada al ciclo singular silla-nodo Γ (ver definición 1.7).

$\mathcal{M}3.$ $L : A^* \rightarrow \Pi$ y $G : \Pi \rightarrow A$ son funciones de retorno y $F = G \circ L$. A' denota la imagen de A^* por F , donde $A^* = A \setminus l$.

$\mathcal{M}4.$ El lado derecho de la figura indica la posición relativa de A' en A . La foliación radial en A es preservada por F . Esta representa \mathcal{L}_μ^{ss} del teorema 3.1. Además el mapa uni-dimensional inducido por F en la foliación radial es denotada por $f : S^1 \rightarrow S^1$. Esta representa f_μ en el teorema 3.1.

Ahora, el atractor geométrico de Lorenz es construido por definición sobre un cuadrado S con una función de retorno $T : S^* \rightarrow S$ satisfaciendo ciertas propiedad **cuasi-hiperbólicas**.

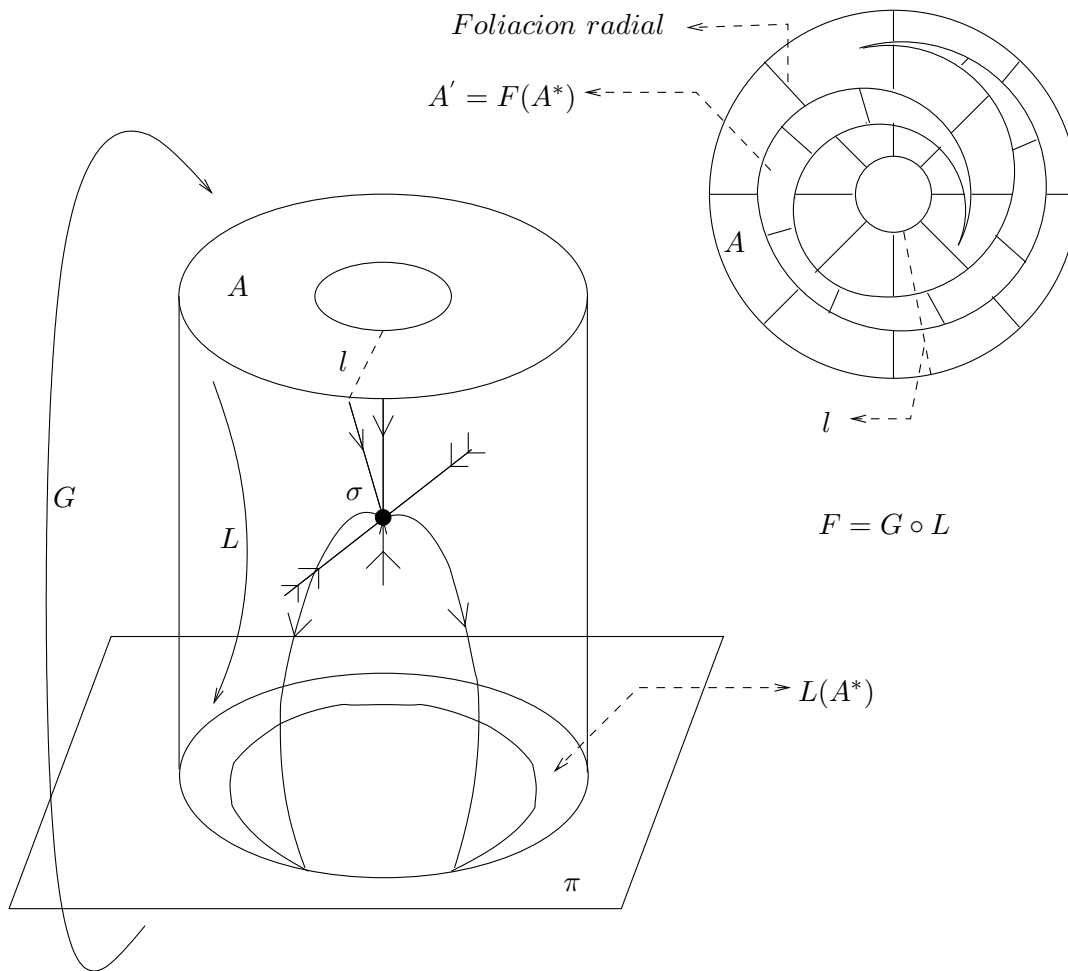


Figura 4-1: Sección transversal a un anillo

Un simple, pero significativo hecho aquí es que la imagen $T(S^*) \subset S$ es desconexo en S , donde S^* es justamente S quitándole la línea media. El modo del modelo geométrico en la figura 4-1 se asemeja a la construcción del Lorenz, excepto que, en este caso, A' es conexo en A . Ahora, de esto se sigue que cualquier atractor Lorenz-like muestra todas las propiedades de la construcción del Lorenz mencionado anteriormente. Debido que podemos llevar todas estas construcciones usando homeomorfismos h , es decir que son equivalentes (ver capítulo 1).

En particular, los atractores Lorenz-like deben exhibir una sección transversal global desconexa. Recordemos que por sección transversal global hacemos referencia a una sección transversal \mathcal{G} del flujo de tal manera que toda la órbita positiva en él se acerca a \mathcal{G} . Se sigue que si f en \mathcal{M}^4 es transitiva, luego \mathcal{M} no muestra secciones transversales globales desconexas. Por lo tanto \mathcal{M} no puede ser equivalente al atractor geométrico de Lorenz en [GW], cuando f es transitiva. En estos casos son precisamente aquellos en los que los atractores extraños singulares obtenidos en el teorema A no son Lorenz-like.

Bibliografía

- [MP] Morales, C.A; y Pujals, E.R. *Singular Strange Attractors on the Boundary of Morse-Smale Systems*. Ann.Scient. Éc. Norm. Sup. 4° serie. T.30.(1997), 693-717.
- [PM] Palis, Jacob; De Melo, Welington. *Introducao aos sistemas dinámicos*. Proyecto de Euclides Impa, 1978.
- [C] Clark, Robinson. *Dynamical systems*. 2^{da} edición. Editorial CRC, 1999.
- [D] Devaney, Robert L. *An Introduction to chaotic dynamical systems*. 2^{da} edición. Addison-wesley publishing company, 1989.
- [AS] Afraimovich, V. S; y Shilnikov, L. P. *On Attainable Transition from Morse-Smale systems to systems with many periodic motions*. Math. U.S.S.R Izv, Vol 8. 1974, 1235-1270.
- [BLMP] Bamón, R; Labarca, R; Mañe, R; y Pacífico M. J. *The explosion of Singular Cycles*. Publ. Math. IHES, Vol 78. 1993. 207-232.
- [CP] Carneiro, M. D; y Palis, Jacob. *Bifurcations and Global stability of families of gradients*. Publ. Math. IHES, Vol 70. 1990. 103-168.
- [DKO] Dumortier, E; Kokubu, H; y Oka, H. *A degenerate singularity generating geometric Lorenz attractors*. Ergodic Theory and Dynamical systems. Vol 15. 1995, 833-856.
- [DRV] Diaz, L; Rocha, J; Viana, Marcelo. *Saddle node cycles and prevalence of strange attractors*. Invent. Math, 125. 1996. 34-74.
- [GW] Guckenheimer, J; y Williams, R. F. *Structural stability of Lorenz Attractors*. Publ. Math. IHES, Vol 50. 1979. 59-72.
- [HPS] Hirsch M.; Pugh y Shub M. *Varietades Invariantes*. Lec. Not. in Math. 583, Springer-Verlag, 1977.
- [LV] Luzatto, S; Viana, M. *Lorenz-like attractors without invariant foliations*. En preparación.

- [Mc] Morales, C. A. *Lorenz Attractor through Saddle-Node bifurcations*. Ann. Inst. Henri Poincaré. Vol 13. 1996. 589-617.
- [MV] Mora, L; y Viana, M. *Abundance of Strange Attractors*. Acta Math. Vol 171. 1993. 1-71.
- [NPT] Newhouse, S; Palis, J; y Takens, F. *Bifurcations and Stability of families of Diffeomorphism*. Publ. Math. IHES, Vol 57. 1983. 5-57.
- [PR] Pacífico, M. J; y Rovella, A. *Unfolding Contracting singular Cycles*. Ann. Scient. Ec. Norm. Sup. Pisa 4. Serie 26. 1993. 691-700.
- [PRV] Pacífico, M. J; Rovella, A; y Viana, M. *Persistence of Global Spiriling Attractor*. En preparación.
- [PT] Palis, J; Takens, F. *Hyperbolicity and sensitive chaotic dynamic at homoclinic bifurcation*. Cambridge University Press. Vol 35. 1993.
- [P] Pesin, Ya. *Dynamical systems with generalized hyperbolic attractors: hyperbolic, ergodic and topological properties*. Ergodic Theory and Dynamical Systems. Vol 12. 1992. 123-151.
- [R] Rovella, A. *The dynamics of perturbations of the contracting Lorenz Attractor*. Bol. Soc. Bras. Mat.Nova Sér. 24, No.2. 1993. 233-259.
- [W] Williams, R. F. *The structure of Lorenz attractors*. Publ. Math. IHES, Vol 50. 1979. 101-152.
- [T] Takens, F. *Partially hyperbolic fixed points*. Topology. Vol 10, 1971. pp 123-147.